

Tema Bonus

Modelare și simulare

Seria III AB

Autor: Andrei Bratosin

13 ianuarie 2026

1 Introducere

Această lucrare are ca scop modelarea și simularea mișcării corpurilor din sistemul solar, utilizând un model gravitațional newtonian și instrumente de simulare numerică disponibile în MATLAB și SIMULINK. Sistemul analizat este format din Soare și cele opt planete, considerate corpuri punctiforme care interacționează gravitațional într-un sistem de referință inerțial tridimensional.

Obiectivul principal îl constituie compararea rezultatelor obținute prin integrare numerică în SIMULINK cu cele obținute prin implementarea explicită a metodei Runge–Kutta de ordinul 4 (RK4), precum și evidențierea unor fenomene dinamice specifice, precum sensibilitatea lui Mercur la pasul de integrare.

2 Modelul matematic

Se consideră un sistem format din N corpuri cu masele m_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Fiecărui corp îi este asociat un vector de poziție $\mathbf{r}_i(t) \in \mathbb{R}^3$. Mișcarea este guvernată de legea atracției universale a lui Newton, iar ecuațiile de mișcare sunt:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^N G m_i m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|_2^3} \quad (1)$$

unde $G = 6.6743 \cdot 10^{-11}, \text{m}^3, \text{kg}^{-1}, \text{s}^{-2}$ este constanta gravitațională.

Pentru integrarea numerică, sistemul de ecuații de ordinul al doilea este rescris sub forma unui sistem echivalent de ecuații diferențiale de ordinul întâi, folosind vectorii de stare ce includ pozițiile și vitezele fiecărui corp.

3 Date inițiale și ipoteze

Pozițiile și vitezele inițiale ale planetelor au fost preluate din baza de date *JPL Horizons*, folosind opțiunea *Ephemeris Type – Vector Table*, toate valorile fiind selectate pentru același moment de timp de referință. Sistemul este considerat izolat, iar efectele relativiste, presiunea radiației solare și influența altor corpuri cerești sunt neglijate. De asemenea, sistemul de coordonate în care sunt date stările este unul baricentric.

4 Implementarea în Simulink

Modelul SIMULINK este construit pe baza unei structuri clasice de integrare în cascadă poziție-viteză-accelerație, conform diagramei de sistem prezentate în Figura 1. Vectorul de stare \mathbf{x} conține pozițiile tuturor corpurilor cerești și este utilizat atât pentru calculul accelerațiilor, cât și pentru feedback-ul necesar integrării numerice.

Calculul accelerațiilor gravitaționale este realizat într-un bloc *MATLAB Function*, care apelează funcția definită în fișierul `functie_sistem.m`. Această funcție primește ca intrări vectorul pozițiilor \mathbf{x} și vectorul maselor `masses`, și calculează vectorul accelerațiilor $\ddot{\mathbf{x}}$ conform legii atracției universale a lui Newton.

Ieșirea blocului *MATLAB Function* este conectată la un prim bloc *Integrator* ($1/s$), care integrează accelerațiile pentru a obține vitezele planetelor. Acestea sunt integrate din nou printr-un al doilea bloc *Integrator*, rezultând pozițiile actualizate ale corpurilor cerești. Pozițiile sunt reintroduse în blocul de calcul al accelerațiilor, realizând bucla de reacție a sistemului.

Datele privind masele planetelor sunt furnizate prin intermediul unui bloc constant (`masses`), iar rezultatele simulării sunt exportate în mediul MATLAB cu ajutorul blocului *To Workspace*, sub variabila `out.simout`, pentru procesare și analiză ulterioară.

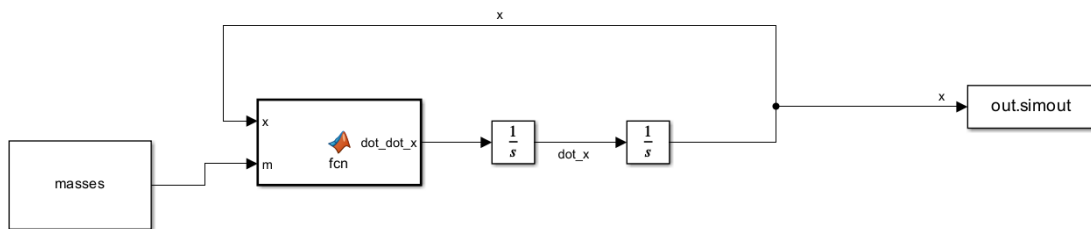


Figura 1: Structura modelului Simulink utilizat pentru simularea sistemului solar.

Datele inițiale (poziții, viteze și mase) sunt încărcate în workspace-ul MATLAB cu ajutorul scriptului `load_data_bonus.m`, care definește masele planetelor și condițiile inițiale corespunzătoare unei date de referință preluate din baza de date JPL Horizons.

Simularea a fost realizată pe o durată de cel puțin 88 de zile, corespunzătoare aproximativ unei revoluții complete a planetei Mercur în jurul Soarelui.

5 Mișcarea retrogradă aparentă a planetei Mercur

În cadrul simulării realizate a fost evidențiat și fenomenul de mișcare retrogradă aparentă a planetei Mercur, observată din perspectiva Pământului. Acest fenomen nu reprezintă o modificare reală a sensului de mișcare al planetei, ci este o consecință geometrică a mișcării relative a Pământului și a lui Mercur pe orbitele lor în jurul Soarelui.

Pentru evidențierea acestui efect, poziția relativă a lui Mercur față de Pământ a fost calculată prin diferența vectorilor de poziție, iar coordonatele carteziene rezultate au fost transformate în coordonate ecliptice sferice (λ, β) . Reprezentarea traiectoriei în planul (λ, β) permite observarea clară a buclelor caracteristice mișcării retrograde.

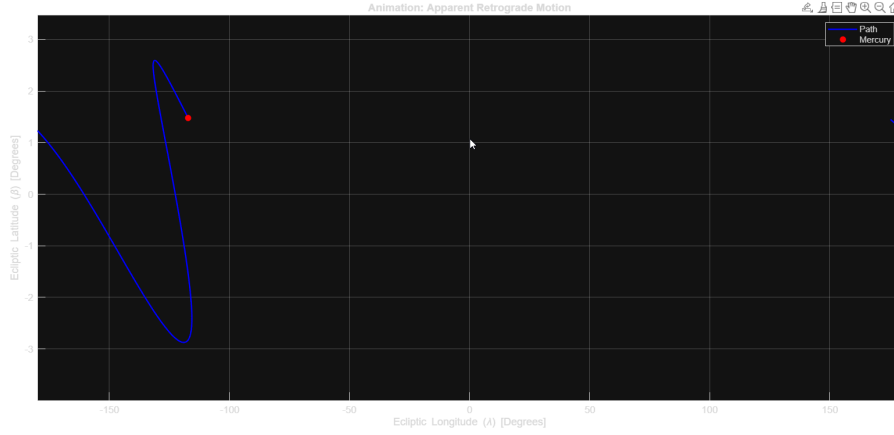


Figura 2: Mișcarea retrogradă aparentă a planetei Mercur în coordonate ecliptice (λ, β) .

6 Implementarea metodei Runge–Kutta de ordinul 4

Pentru validarea rezultatelor obținute în SIMULINK, a fost implementată în MATLAB metoda Runge–Kutta de ordinul 4 (RK4), în fișierul `rk4.m`. Scriptul încarcă datele inițiale utilizând `load_data_bonus.m` și definește vectorul de stare inițial sub forma:

$$\mathbf{x}(0) = [\dot{\mathbf{x}}(0), \mathbf{x}(0)],$$

unde $\mathbf{x}(0)$ reprezintă pozițiile inițiale, iar $\dot{\mathbf{x}}(0)$ vitezele inițiale ale corpurilor cerești.

Funcția de dinamică utilizată în cadrul metodei RK4 este definită printr-o funcție anonimă care apelează funcția `functie_sistem.m`, identică celei utilizate în modelul SIMULINK. Astfel, comparația dintre cele două metode de integrare se realizează în condiții identice din punct de vedere al modelului fizic.

Integrarea se realizează cu un pas constant $h = 600$ s, pe un interval de timp de o săptămână. Algoritmul RK4 este implementat explicit prin calculul termenilor intermediari k_1 , k_2 , k_3 și k_4 , iar starea sistemului este actualizată la fiecare pas de timp.

La finalul simulării, pozițiile obținute prin RK4 sunt comparate cu cele rezultate din SIMULINK, fiind calculate erorile absolute și relative pentru fiecare corp ceresc. Rezultatele sunt afișate numeric și reprezentate grafic, evidențiind concordanța foarte bună între cele două metode de integrare.

Animațiile mișcării planetelor și reprezentările grafice ale traiectoriilor sunt realizate cu ajutorul scriptului `genereaza_animatii.m`, care utilizează datele exportate din SIMULINK.

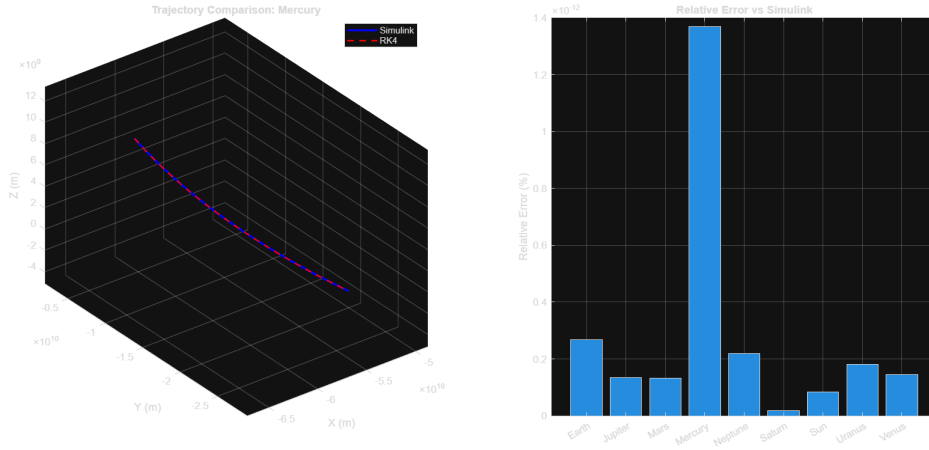


Figura 3: Traectoria simulată prin RK4 suprapusă cu cea din Simulink, respectiv eroarea relativă la poziția finală pentru fiecare obiect.

7 Rezultate și observații

Analiza rezultatelor obținute conduce la următoarele observații importante:

- Dintre toate obiectele cerești simulate, **Mercurul este cel mai sensibil la pasul de integrare utilizat**. Pentru pași de integrare mai mari sau pentru orizonturi de predicție extinse, Mercurul este primul corp care iese din orbită, acest comportament fiind explicat prin perioada sa orbitală redusă și apropierea de Soare.
- Pentru orizontul de predicție analizat (o săptămână), **diferențele relative dintre pozițiile finale obținute prin Simulink și prin RK4 sunt extrem de mici**, de ordinul 10^{-12} , ceea ce indică o concordanță excelentă între cele două metode de integrare.

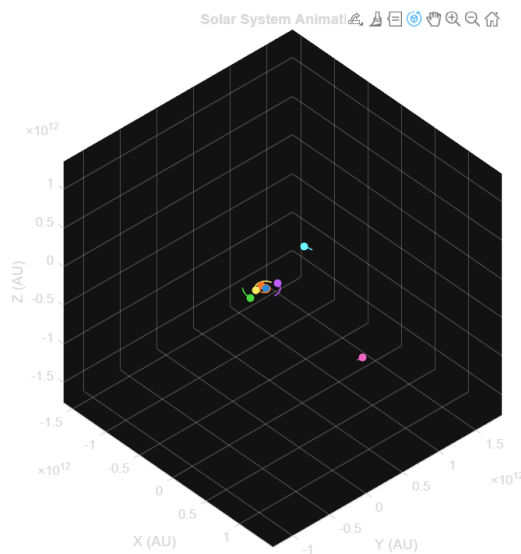


Figura 4: Traectoriile planetelor în planul ecliptic (placeholder).

8 Cerințe neimplementate

În cadrul acestui proiect, următoarele puncte din cerință nu au fost implementate:

- Reprezentarea grafică a distanței fiecărui corp ceresc față de Soare pe întreaga perioadă de simulare (punctul 3).
- Calcularea erorii relative de la finalul orizontului de predicție față de datele reale din baza de date JPL Horizons. (punctul 6)

Aceste extensii rămân ca posibile direcții de dezvoltare ulterioară a modelului.

9 Concluzii

Rezultatele obținute demonstrează că modelul gravitațional newtonian, integrat numeric cu metode adecvate, permite descrierea fidelă a mișcării planetelor pe intervale de timp moderate. Concordanța dintre rezultatele SIMULINK și cele obținute prin RK4 validează implementarea numerică, iar analiza sensibilității evidențiază importanța alegerii pasului de integrare, în special pentru corpurile cu perioade orbitale mici.