Exercice 1.[1] (**)

On considère l'équation

$$(E) : x^2 - 7y^2 = 1.$$

ou les inconnues x et y sont des entiers naturels non nuls.

1. (a) Comparer a et b.

   (b) Montrer que 1 est le seul diviseur positif commun à a et à b.

   (c) Démontrer que $a \equiv 1 \pmod 7$ ou $a \equiv -1 \pmod 7$.
2. Trouver la solution (a, b) de (E) telle que b soit le plus petit possible.
3. (a) Démontrer par récurrence qu'il existe un couple (a_n, b_n) d'entiers naturels non nuls solution de (E) et tel que

   $$(8 + 3\sqrt{7})^n = a_n + b_n\sqrt{7}.$$

   (b) Combien l'équation (E) a-t-elle de solutions ?
4. (a) Prouver que pour tout entier naturel non nul n on a

   $$(P_n) : (8 - 3\sqrt{7})^n = a_n - b_n\sqrt{7}.$$

   (b) En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

Exercice 2.[2] (***)

Partie I.

On considère la fonction f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) & = \frac{\ln(x+1)}{x}, \quad x \neq 0 \\ f(0) & = 1 \end{cases}.$$

Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f est continue sur I.
2. (a) Démontrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, puis pour tout réel $x \in]-1, 0[$ on a,

   $$0 \leq \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t^2}{t+1}dt \leq x\int_0^x \frac{1}{1+t}dt.$$

   (b) Démontrer que pour tout réel $x \in I \setminus \{0\}$ on a,

   $$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t^2}{t+1}dt.$$

1. C.BJ.
2. C.BJ. modifié.

(c) Démontrer, alors, que f est dérivable en 0, déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 et étudier la position de celle-ci par rapport à cette tangente.

3. Soit g la fonction définie sur I par

$$g(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}.$$

Etudier le signe de g pour $x \in I$ et en déduire le sens de variation de f.

4. Construire $\mathcal{C}_f$.

Partie II.

1. Justifier que pour tout réels a et b de I tels que $a < b$ on a,

$$(b-a)f(b) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)f(a).$$

En utilisant la méthode des rectangles pour $n = 5$, en déduire un encadrement de l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathbb{C}_f$ et les droites $(O, \vec{i}$ et $\Delta : x = 1$.

2. Soit h la fonction définie sur I par

$$h(x) = x + 1 - (x+1)\ln(x+1).$$

(a) Dresser le tableau de variation de h.

(b) Montrer que pour tout $x \in]-1, -\frac{1}{2}]$ on a,

$$0 \leq f(x) \leq -2\ln(x+1).$$

(c) En déduire que la fonction

$$F : x \mapsto \int_x^{-\frac{1}{2}} f(t)dt$$

est majorée dans $]-1, -\frac{1}{2}]$.

3. On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ de terme général

$$V_n = \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} f(t)dt.$$

Etudier le sens de variation de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ et conclure.

Exercice 3. [3]

Le plan est orienté dans le sens trigonométrique. Soit OAB un triangle isocèle rectangle direct en O. On désigne par I le milieu de $[AB]$ et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B. Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1. Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. (a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.

   (b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC). Montrer que J est le centre de la similitude f.
3. Soit g la similitude indirecte de centre I qui envoie A sur D.

   (a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire $g(O)$.

   (b) Déterminer la nature (et les caractéristiques) de $g \circ f^{-1}$.
4. Soient $I' = f(I)$ et $J' = g(J)$. Montrer que les droites (IJ), $(I'J')$ et (CD) sont concourrantes.

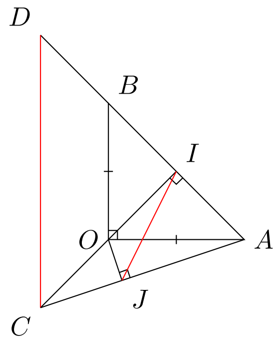

FIGURE 1 – Construction I.

Exercice 4. [4]

Le plan est orienté dans le sens trigonométrique. Soit ABC un triangle isocèle rectangle direct en A. On désigne par I, J, K, H et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$, $[AJ]$ et $[JC]$.

1. Soit f la similitude directe de centre J qui envoie A sur K. Déterminer ses caractéristiques puis déterminer les images de L et I.
2. On muni le plan du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Soit ϕ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tels que

$$z_{M'} = -\frac{1+i}{2}\overline{z_M} + \frac{1+i}{2}.$$

   (a) Montrer que ϕ est une similitude indirecte de centre C.

   (b) Montrer que $\phi = f \circ S_{(IK)}$.

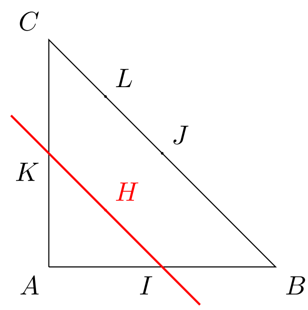

FIGURE 2 – Construction II.

3. Sujet baccalauréat 2008, modifié.
4. Sujet baccalauréat 2009, modifié.