L-P-Bourguiba de Tunis	Sujet de mathématiques	Durée : 4 H
Date : 17 / 3/2011		Classes : 4 M1 -4M8

EXERCICE 1 : (4 points)

Répondre par vrai ou faux

1/Le plan P est rapporté à un ROND $(o,\vec{u},\vec{v})$.

On considère la transformation du plan g qui à tout M d'affixe z associe M' d'affixe z' défini par : $z'=2i\bar{z}-2+i$

g est une similitude indirecte de centre I d'affixe i de rapport 2 et d'axe Δ d'équation : y=x+1

2/ $5^{750}-1\equiv 0(\bmod 7)$

3/ Si $n\equiv 1(\bmod 7)$ alors $(3n+4)\wedge(4n+3)=7$

4/Soient a et b deux entiers naturels non nuls .S'ils existent deux entiers u et v tel que au+bv=2 alors $a\wedge b=2$

5/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=+\infty$

6/ Soit la fonction f définie sur R par : $f(x)=e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}$ f est une bijection de IR sur IR

l'application réciproque de f est définie par: $f^{-1}(x)=2\ln(\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2})$

EXERCICE 2 : (6 points)

Soit dans le plan orienté un triangle ABC rectangle en B tel que AB= 3 et BC=4 et $(\vec{BC},\vec{BA})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1/Soit f la similitude directe telle que f(A)=B et f(B)=C

a. Déterminer le rapport et l'angle de f.

b. Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC)

Montrer que H est le centre de f

2/Soit D=f (C)

a. Montrer que D appartient à (BH)

b. Construire le point D.

3/ Soit g la similitude indirecte telle que g(A)=B et g(B)=C

On désigne par Ω le centre de g

a. Montrer que $fog^{-1}=S_{BC}$

b. Soit E=g(C) .Déterminer $S_{BC}(E)$.Construire le point E.

4/ a. Préciser la nature de gog et montrer que $\Omega\in(AC)\cap(BE)$

b. Construire Ω et l'axe Δ

EXERCICE 3: (4points)

On considère dans ZxZ l'équation (E) : $5x-3y=11$.

1/a. Citer le théorème permettant d'affirmer que l'équation (E) a des solutions.

b. Vérifier que si le couple (x,y) est solution de l'équation E ,alors $x \equiv 1 \pmod 3$

c. En déduire une solution particulière de (E)

d. Résoudre dans ZxZ l'équation (E)

2/Déterminer les entiers n tel que $(3n+1) \wedge (5n-2) = 11$

3/ On considère le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$

a. Dans le cas où x un entier solution de (S) montrer que : $\begin{cases} 9x \equiv 6 \pmod{15} \\ 10x \equiv 5 \pmod{15} \end{cases}$

b. En déduire l'ensemble des solutions du système.

EXERCICE4 :(6 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x) = x - \ln(1+x)$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1cm)

PARTIE A

1.Dresser le tableau de variation de f.

2.En déduire que pour tout x de $]-1,+\infty[$: $\ln(1+x) \leq x$

3. Tracer C.

4.Calculer l'aire A de la partie du plan limité par la courbe C la droite $\Delta : y = x$ et les droites d'équations x=0 et x=e

PARTIE B

On considère la suite (S_n) définie sur N* par : $S_n = \sum_{1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

1/a. Montrer que pour tout k>0 : $\ln(1+k) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

b. En déduire que pour tout n de N* : $\ln(1+n) \leq S_n$ .Et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

2/On considère les suites (C_n) et (γ_n) définie sur N* par : $C_n = S_n - \ln(n)$ et $\gamma_n = C_n - \frac{1}{n}$

a. Démontrer que pour tout n de N* : $C_{n+1} - C_n = -f(-\frac{1}{n+1})$ et $\gamma_{n+1} - \gamma_n = f(\frac{1}{n})$

b. En déduire le sens de variation de (C_n) puis de (γ_n) .

3/a. Démontrer que les suites (C_n) et (γ_n) sont adjacentes.

La limite commune de ces deux suites est appelée la constante d'Euler C

b. Donner un encadrement de la constante d'Euler C d'amplitude 10^{-1}.