

Exercice 1.¹ (**)

On considère l'équation

$$(E) : x^2 - 7y^2 = 1.$$

ou les inconnues x et y sont des entiers naturels non nuls.

1. (a) Comparer a et b .

(b) Montrer que 1 est le seul diviseur positif commun à a et à b .

(c) Démontrer que $a \equiv 1 \pmod{7}$ ou $a \equiv -1 \pmod{7}$.

2. Trouver la solution (a, b) de (E) telle que b soit le plus petit possible.
3. (a) Démontrer par récurrence qu'il existe un couple (a_n, b_n) d'entiers naturels non nuls solution de (E) et tel que

$$(8 + 3\sqrt{7})^n = a_n + b_n\sqrt{7}.$$

(b) Combien l'équation (E) a-t-elle de solutions ?

4. (a) Prouver que pour tout entier naturel non nul n on a

$$(P_n) : (8 - 3\sqrt{7})^n = a_n - b_n\sqrt{7}.$$

(b) En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n .

Exercice 2.² (***)**Partie I.**

On considère la fonction f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) &= \frac{\ln(x+1)}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) &= 1 \end{cases}.$$

Soit \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Montrer que f est continue sur I .
2. (a) Démontrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, puis pour tout réel $x \in]-1, 0[$ on a,

$$0 \leq \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt \leq x \int_0^x \frac{1}{1+t} dt.$$

(b) Démontrer que pour tout réel $x \in I \setminus \{0\}$ on a,

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt.$$

1. C.BJ.

2. C.BJ. modifié.

- (c) Démontrer, alors, que f est dérivable en 0, déterminer une équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 et étudier la position de celle-ci par rapport à cette tangente.
3. Soit g la fonction définie sur I par

$$g(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}.$$

Etudier le signe de g pour $x \in I$ et en déduire le sens de variation de f .

4. Construire \mathcal{C}_f .

Partie II.

1. Justifier que pour tout réels a et b de I tels que $a < b$ on a,

$$(b-a)f(b) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)f(a).$$

En utilisant la méthode des rectangles pour $n = 5$, en déduire un encadrement de l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C}_f et les droites (O, \vec{i}) et $\Delta : x = 1$.

2. Soit h la fonction définie sur I par

$$h(x) = x + 1 - (x+1)\ln(x+1).$$

- (a) Dresser le tableau de variation de h .
- (b) Montrer que pour tout $x \in]-1, -\frac{1}{2}]$ on a,

$$0 \leq f(x) \leq -2\ln(x+1).$$

- (c) En déduire que la fonction

$$F : x \mapsto \int_x^{-\frac{1}{2}} f(t)dt$$

est majorée dans $] -1, -\frac{1}{2}]$.

3. On considère la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général

$$V_n = \int_{-1+\frac{1}{n}}^0 f(t)dt.$$

Etudier le sens de variation de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et conclure.

Exercice 3.³ (*)

Le plan est orienté dans le sens trigonométrique. Soit OAB un triangle isocèle rectangle direct en O . On désigne par I le milieu de $[AB]$ et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B . Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C .

1. Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. (a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD .
(b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC) . Montrer que J est le centre de la similitude f .
3. Soit g la similitude indirecte de centre I qui envoie A sur D .
(a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC) . En déduire $g(O)$.
(b) Déterminer la nature (et les caractéristiques) de $g \circ f^{-1}$.
4. Soient $I' = f(I)$ et $J' = g(J)$. Montrer que les droites (IJ) , $(I'J')$ et (CD) sont concourantes.

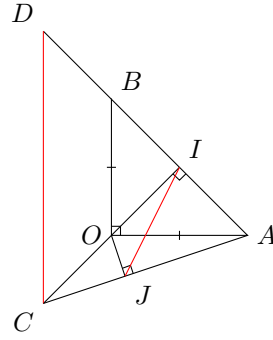


FIGURE 1 – Construction I.

Exercice 4.⁴ (*)

Le plan est orienté dans le sens trigonométrique. Soit ABC un triangle isocèle rectangle direct en A . On désigne par I, J, K, H et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$, $[AJ]$ et $[JC]$.

1. Soit f la similitude directe de centre J qui envoie A sur K . Déterminer ses caractéristiques puis déterminer les images de L et I .
2. On muni le plan du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Soit ϕ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tels que

$$z_{M'} = -\frac{1+i}{2} \overline{z_M} + \frac{1+i}{2}.$$

- (a) Montrer que ϕ est une similitude indirecte de centre C .
- (b) Montrer que $\phi = f \circ S_{(IK)}$.

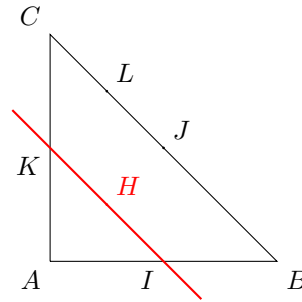


FIGURE 2 – Construction II.

3. Sujet baccalauréat 2008, modifié.

4. Sujet baccalauréat 2009, modifié.

Exercice 5.⁵

Soit OAB un triangle isocèle rectangle tel que $AB = 4$. On note I le milieu de $[AB]$ et F le point défini par $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OI}$. Soit \mathcal{P} la parabole de foyer F et de sommet O . On munit le plan du repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$.

1. Montrer que dans ce repère, \mathcal{P} a pour équation $y^2 = 2x$. Puis, montrer que \mathcal{P} passe par A et B .

2. La tangente à \mathcal{P} en A coupe (OI) en un point J . Montrer que O est le milieu $[IJ]$.

3. Soit $M(x_1, y_1)$ un point de \mathcal{P} distinct de O . La perpendiculaire à (OM) en O recoupe \mathcal{P} en un point $N(x_2, y_2)$. Soient les réel (a, b) pour lesquelles (MN) a pour équation $y = ax + b$.

Montrer que y_1 et y_2 sont les solutions de l'équation $y^2 - 2ay - 2b = 0$ puis que $b = 2$.

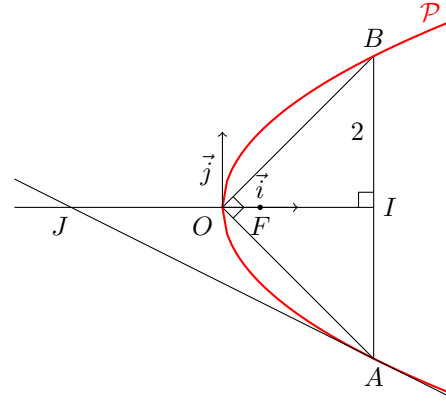


FIGURE 3 – Construction III.

4. En déduire que lorsque M varie sur \mathcal{P} , la droite (MN) passe par un point fixe.

Exercice 6.⁶ (**)

Soit f une fonction décroissante sur $[0, 1]$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

2. En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Calculer,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+n)^2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{n-i}.$$

5. I.M.

6. I.M.