Q.C.M

Exercice 1.

(a) Faux,

$$\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IO} = \frac{3}{4}a^2.$$

(b) Vrai.

(c) Faux, $OB = OC$.

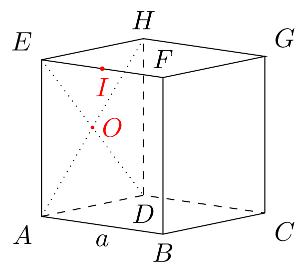

FIGURE 1 – Construction I.

Exercice 2.

(a) Vrai.

(b) Faux,

$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SD} = 23.$$

(c) Faux,

$$\mathcal{V}_{(SABCD)} = 24 \quad (u.v).$$

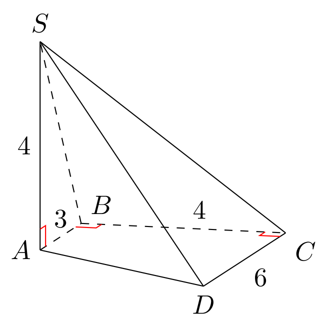

FIGURE 2 – Construction II.

Exercice 3.

(a) Vrai.

(b) Vrai.

(c) Faux,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{(ABCD)} &= ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}|| \\ &= 3\sqrt{10} \ \ (u.a).\end{aligned}$$

Exercice 5.

(a) Faux, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

(b) Vrai.

(c) Vrai.

Exercice 4.

(a) Vrai.
(b) Vrai.
(c) Faux,

$$\mathcal{A}_{(BDM)} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MD}|| = \frac{\sqrt{6}}{4} \ (u.a).$$

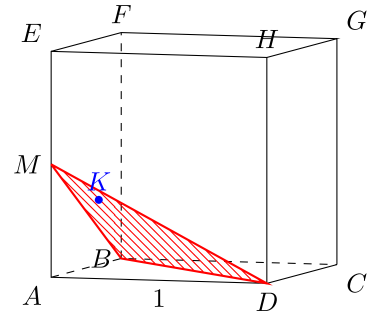

FIGURE 3 – Construction III.

Exercice 6.

(a) Vrai.
(b) Vrai.
(c) Faux, car $BA = 2\sqrt{5}$.

Exercice 7.

(a) Vrai.
(b) Faux.
(c) Faux.

Exercice 8.

(a) Faux.
(b) Faux.
(c) Vrai.

Exercice 9.

(a) Vrai.
(b) Faux.
(c) Faux.

Exercice 10.

(a) Vrai.
(b) Vrai.
(c) Vrai.

Problèmes.

Exercice 1.

1. Un vecteur est unitaire si sa norme vaut 1.

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2} = 1$$
$$||\vec{v}|| = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = 1$$

donc, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 0.$$

Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales.

2.

$$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

Exercice 2.

1. (a)

$$\begin{cases}\frac{x_I+x_L}{2}=\frac{1+1}{2}=1=x_A\\\frac{y_I+y_L}{2}=\frac{0+0}{2}=0=y_A\\\frac{z_I+z_L}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}=z_A\end{cases}.$$

Ainsi A est le milieu du segement $[IL]$.

$$\overrightarrow{KB}=\begin{bmatrix}0\\\frac{2}{3}\\0\end{bmatrix}=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KN}.$$

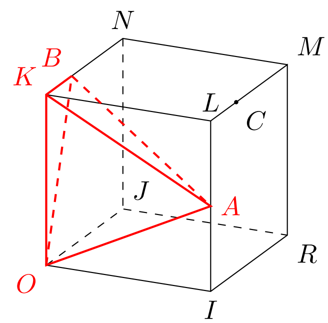

Figure 4 – Construction IV.

(b)

$$\vec{u}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{bmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}0\\\frac{2}{3}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\-1\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

2. (a)

$$\mathcal{A}_{(OAB)}=\frac{1}{2}||\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}||=\frac{1}{2}\sqrt{\Big(-\frac{1}{3}\Big)^2+(-1)^2+\Big(\frac{2}{3}\Big)^2}=\frac{\sqrt{14}}{6}\quad(u.a).$$

(b)

$$\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OC}\cdot\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{3}\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\-1\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}=-\frac{1}{3}\times1-1\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times1=0.$$

Ainsi $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont coplanaires et par suite $C\in\mathcal{P}$.

3. (a)

$$\mathcal{V}_{(OABC)}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OK}\cdot(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB})\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\-1\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|-\frac{1}{3}\times0-1\times0+\frac{2}{3}\times1\right|=\frac{1}{9}\quad(u.v).$$

(b) Or,

$$\mathcal{V}_{(OABC)}=\frac{1}{3}\mathcal{A}_{(OAB)}\,\mathrm{d}(K,\mathcal{P}),$$

donc,

$$\mathrm{d}(K,\mathcal{P})=\frac{3\mathcal{V}_{(OABC)}}{\mathcal{A}_{(OAB)}}=\frac{3\times\frac{1}{9}}{\frac{\sqrt{14}}{16}}=\frac{\sqrt{14}}{7}..$$

Exercice 3.

1. Le vecteur $\vec{n}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{P} : x-y+z+d=0$. Or, le point $A(1,0,1)\in\mathcal{P}$ donc $d=-2$ et,

$$\mathcal{P} : x-y+z-2=0. \tag{1}$$

Et puis,

$$\begin{aligned} S : & x^2+y^2+z^2-2x-8z+13=0 \\ & (x-1)^2+y^2+(z-4)^2=2^2 \end{aligned} \tag{2}$$

donc S est la sphère de centre $C(1,0,4)$ et de rayon $R=2$.

$$\mathrm{d}(C,\mathcal{P})=\frac{\left|1-0+1-2\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\sqrt{3}.$$

Dès lors, $\mathrm{d}(C,\mathcal{P})<R$ et $\mathcal{P}$ et S sont sécants.

2. Soit $\mathcal{D}$ la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ menée par $C(1,0,4)$ et $H\in\mathcal{D}\cap\mathcal{P}$. Alors $\vec{n}$ est directeur de $\mathcal{D}$ et pour α un paramètre réel

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x=\alpha+1 \\ y=-\alpha \\ z=\alpha+4 \end{cases}. \tag{3}$$

Comme H est l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$, ses coordonnées satisfont aux équations (1) et (3) donc $\alpha_H+1-(-\alpha_H)+\alpha_H+4-2=0$ puis $\alpha_H=2$ et $H(2,-1,5)$. $S\cap\mathcal{P}$ est un cercle de centre H et de rayon $r=\sqrt{R^2-CH^2}$. On a $\overrightarrow{CH}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ donc $CH=\sqrt{3}$ et de là $r=1$.

3. Soit Q un plan tangent à S et parallèle à $\mathcal{P}$ donc $\vec{n}$ est normal à Q et $\mathrm{d}(C,Q)=R$ alors $Q : x-y+z+\beta=$ et

$$\frac{\left|1-0+4+\beta\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=2$$

par suite $\left|\beta+5\right|=2\sqrt{3}$ et $\beta\in\{2\sqrt{3}-5,-2\sqrt{3}-5\}$. Ainsi $Q\in\{P_1,P_2\}$ avec

$$\begin{aligned} P_1 &: x-y+z+2\sqrt{3}-5=0 \\ P_2 &: x-y+z-2\sqrt{3}-5=0 \end{aligned}$$

4. On a,

$$\Delta : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = t + 3 \end{cases} . \tag{4}$$

Ainsi $\vec{n}$ est directeur de Δ, et comme il est normal à $\mathcal{P}$ il en découle que $\Delta \perp \mathcal{P}$.
Soit $M(x, y, z)$ un point de $\Delta \cap S$, donc ses coordonnées satisfont au systèmes (2) et (4) donc,

$$(t + 1)^2 + (-t)^2 + (t + 3)^2 - 2(t + 1) - 8(t + 3) + 13 = 0.$$

Ou encore, $3t^2 - 2t - 3 = 0$ dont les solutions sont $t_1 = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$ et $t_2 = \frac{1-\sqrt{10}}{3}$ qui correspondent au points,

$$\begin{cases} M_1\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3} + 1, -\frac{1+\sqrt{10}}{3}, \frac{1+\sqrt{10}}{3} + 3\right) \\ M_2\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3} + 1, -\frac{1-\sqrt{10}}{3}, \frac{1-\sqrt{10}}{3} + 3\right) \end{cases} .$$

Bien entendu, $S \cap \mathcal{D} = \{M_1, M_2\}$.

Exercice 4.

1. L'équation de S s'écrit,

$$S : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 3^2. \tag{5}$$

Alors S est une sphère de centre $W(2, -1, 0)$ et de rayon $R = 3$.

2.

$$\overrightarrow{WA} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

$$\mathrm{d}(W, \mathbb{D}) = \frac{\left|\left|\overrightarrow{WA} \wedge \vec{u}\right|\right|}{||\vec{u}||} = \frac{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

On a $\vec{u} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ est directeur de $\mathcal{D}$ et $A(2, -1, 1) \in \mathcal{D}$ donc, pour t un paramètre réel.

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t - 1 \\ z = -t + 1 \end{cases} \tag{6}$$

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'intersection de S et $\mathcal{D}$. Donc ses coordonnées satisfont à l'équation (5) aussi bien qu'au système (6). Alors,

$$(t + 2 - 2)^2 + (-2t - 1 + 1)^2 + (-t + 1)^2 = 3^2.$$

Ou encore, $6t^2+8$ donc $t \in \left\{\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$. On trouve ainsi les points points suivants,

$$\begin{cases} M_1\Big(\frac{2\sqrt{3}}{3}+2, -\frac{4\sqrt{3}}{3}-1, -\frac{2\sqrt{3}}{3}+1\Big) \\ M_2\Big(-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2, -\frac{4\sqrt{3}}{3}-1, \frac{2\sqrt{3}}{3}+1\Big) \\ S\cap\mathcal{D} \end{cases}.$$

3.

$$\mathrm{d}(W, P_m) = \frac{\Big|0-4+m\Big|}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{\big|m-4\big|}{\sqrt{2}}.$$

L'équation $\mathrm{d}(W, P_m) = R$ équivaut à $m^2-8m-2=0$. Ainsi,

— Si $m > 4+3\sqrt{2}$ ou $m < 4-3\sqrt{2}$, alors $S\cap\mathcal{P}_m = \emptyset$.

— Si $m \in \left\{4+3\sqrt{2}, 4-3\sqrt{2}\right\}$, alors $S\cap\mathcal{P}_m$ est un point.

— Sinon, $S\cap\mathcal{P}_m$ est un cercle de rayon $\sqrt{3^2-\mathrm{d}(W,\mathcal{P}_m)}$ et dont le centre est le projeté orthogonal de W sur $\mathcal{P}_m$.

4. On a $0 \in]4-3\sqrt{2}, 4+3\sqrt{2}[$ donc $S\cap\mathcal{P}_0$ est un cercle. Soit Δ la perpendiculaire à $\mathcal{P}_0$ passante par $W(2,1,0)$. Comme $\mathcal{P}_0 : y-z=0$, on a $\vec{w}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_0$ et par suite directeur à Δ. Ainsi, pour α un paramètre réel,

$$\Delta : \begin{cases} x = 2 \\ y = \alpha - 1 \\ z = -\alpha \end{cases} \tag{7}$$

On répète le même algorithme, $H \in \Delta\cap\mathcal{P}_0$ donc $y_H - zH = 0$ et en remplaçant par les expressions de (7), on trouve $\alpha = \frac{1}{2}$ et $H(2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Ainsi $S\cap\mathcal{P}_0$ est le cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{3^2 - WH^2}$. Or $\overrightarrow{WH}\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ donc $WH = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi, $r = \frac{\sqrt{34}}{2}$.

5. On $O \in \mathcal{P}_0$ donc $\mathcal{P}'_0 = h_{(O,2)}(\mathcal{P}_0) = \mathcal{P}_0$ et S est une sphère de centre $W(2,-1,0)$ et de rayon 3 donc $S' = h_{(O,2)}(S)$ est une sphère de centre $W'(4,-2,0)$ et de rayon $2\times 3 = 6$. Elle est d'équation,

$$S' : (x-4)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 36.$$