Exercice 1. * (**)

On considère l'équation

$$(E) : x^2 - 7y^2 = 1.$$

ou les inconnues x et y sont des entiers naturels non nuls.

1. (a) Comparer a et b.
   (b) Montrer que 1 est le seul diviseur positif commun à a et à b.
   (c) Démontrer que $a \equiv 1 \pmod 7$ ou $a \equiv -1 \pmod 7$.
2. Trouver la solution (a, b) de (E) telle que b soit le plus petit possible.
3. (a) Démontrer par récurrence qu'il existe un couple (a_n, b_n) d'entiers naturels non nuls solution de (E) et tel que

$$(8 + 3\sqrt{7})^n = a_n + b_n\sqrt{7}.$$

   (b) Combien l'équation (E) a-t-elle de solutions ?
4. (a) Prouver que pour tout entier naturel non nul n on a

$$(P_n) : (8 - 3\sqrt{7})^n = a_n - b_n\sqrt{7}.$$

   (b) En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

Exercice 2. † (***)

Partie I.

On considère la fonction f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f est continue sur I.
2. (a) Démontrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, puis pour tout réel $x \in]-1, 0[$ on a,

$$0 \leq \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t^2}{t+1}dt \leq x\int_0^x \frac{1}{1+t}dt.$$

   (b) Démontrer que pour tout réel $x \in I \setminus \{0\}$ on a,

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t^2}{t+1}dt.$$

   (c) Démontrer, alors, que f est dérivable en 0, déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 et étudier la position de celle-ci par rapport à cette tangente.

*. C.BJ.
†. C.BJ. modifié.

3. Soit g la fonction définie sur I par
$$g(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}.$$
Etudier le signe de g pour $x \in I$ et en déduire le sens de variation de f.
4. Construire $\mathcal{C}_f$.

Partie II.

1. Justifier que pour tout réels a et b de I tels que $a < b$ on a,
$$(b-a)f(b) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)f(a).$$
En utilisant la méthode des rectangles pour $n = 5$, en déduire un encadrement de l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathbb{C}_f$ et les droites $(O, \vec{i}$ et $\Delta : x = 1$.

2. Soit h la fonction définie sur I par
$$h(x) = x + 1 - (x+1)\ln(x+1).$$
   (a) Dresser le tableau de variation de h.
   (b) Montrer que pour tout $x \in]-1, -\frac{1}{2}]$ on a,
$$0 \leq f(x) \leq -2\ln(x+1).$$
   (c) En déduire que la fonction
$$F : x \mapsto \int_x^{-\frac{1}{2}} f(t)dt$$
   est majorée dans $]-1, -\frac{1}{2}]$.
3. On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ de terme général
$$V_n = \int_{-1+\frac{1}{n}}^0 f(t)dt.$$
Etudier le sens de variation de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ et conclure.

Exercice 3.‡ (*)

Le plan est orienté dans le sens trigonométrique. Soit OAB un triangle isocèle rectangle direct en O. On désigne par I le milieu de $[AB]$ et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B. Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1. Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. (a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.
   (b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC). Montrer que J est le centre de la similitude f.
3. Soit g la similitude indirecte de centre I qui envoie A sur D.
   (a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire $g(O)$.
   (b) Déterminer la nature (et les caractéristiques) de $g \circ f^{-1}$.

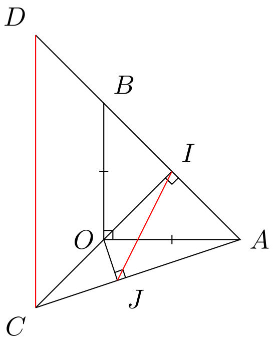

FIGURE 1 – Construction I.

4. Soient $I' = f(I)$ et $J' = g(J)$. Montrer que les droites $(IJ), (I'J')$ et (CD) sont concourrantes.

Exercice 4.§ (*)

Le plan est orienté dans le sens trigonométrique. Soit ABC un triangle isocèle rectangle direct en A. On désigne par I, J, K, H et L les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [AC], [AJ]$ et $[JC]$.

1. Soit f la similitude directe de centre J qui envoie A sur K. Déterminer ses caractéristiques puis déterminer les images de L et I.
2. On muni le plan du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Soit ϕ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tels que

$$z_{M'} = -\frac{1+i}{2}\overline{z_M} + \frac{1+i}{2}.$$

   (a) Montrer que ϕ est une similitude indirecte de centre C.
   (b) Montrer que $\phi = f \circ S_{(IK)}$.

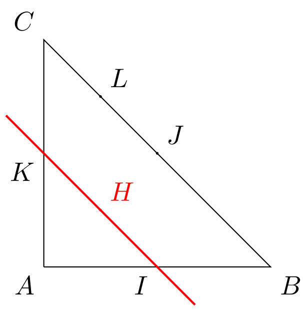

FIGURE 2 – Construction II.

‡. Sujet baccalauréat 2008, modifié.
§. Sujet baccalauréat 2009, modifié.

Exercice 5. ¶

Soit OAB un triangle isocèle rectangle tel que $AB = 4$. On note I le milieu de $[AB]$ et F le point défini par $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OI}$. Soit $\mathcal{P}$ la parabole de foyer F et de sommet O. On munit le plan du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$.

1. Montrer que dans ce repère, $\mathcal{P}$ a pour équation $y^2 = 2x$. Puis, montrer que $\mathcal{P}$ passe par A et B.

2. La tangente à $\mathcal{P}$ en A coupe (OI) en un point J. Montrer que O est le milieu $[IJ]$.
3. Soit $M(x_1, y_1)$ un point de $\mathcal{P}$ distinct de O. La perpendiculaire à (OM) en O recoupe $\mathcal{P}$ en un point $N(x_2, y_2)$. Soient les réel (a, b) pour lesquelles (MN) a pour équation $y = ax + b$.
   Montrer que y_1 et y_2 sont les solutions de l'équation $y^2 - 2ay - 2b = 0$ puis que $b = 2$.

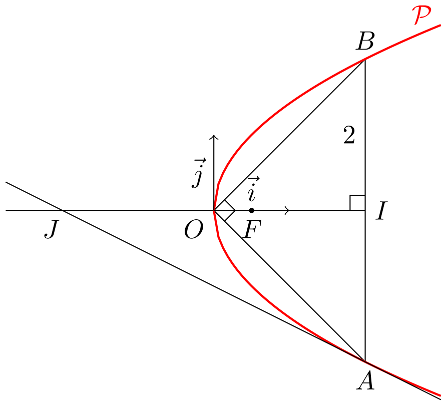

FIGURE 3 – Construction III.

4. En déduire que lorsque M varie sur $\mathcal{P}$, la droite (MN) passe par un point fixe.

Exercice 6. ‖ (**)

Soit f une fonction décroissante sur $[0, 1]$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

2. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Calculer,

$$\lim_{n\to+\infty} n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+n)^2} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}^3}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{n-i}.$$

¶. I.M.
‖. I.M.