Les coniques

La première loi de Kepler stipule que les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe un des foyers. Dans le cadre du cours de quatrième année, nous allons démontrer cette loi mais, pour cela, il nous faut savoir précisément ce qu'est une ellipse (une partie de cette démonstration est faite dans le dernier exercice du script, le 39).

Dans ce but, nous commencerons par montrer que l'ellipse est un cas particulier des courbes du plan appelées les coniques. Nous étudierons ensuite les différentes coniques non-dénérées (ellipses, hyperboles et paraboles) et verrons diverses applications en technologie (en particulier dans le cadre des exercices). Finalement, nous montrerons que toutes les courbes du plan définies par équation cartésienne du second degré sont des coniques.

Pour tous les calculs de géométrie analytique de ce document, nous travaillerons avec un repère orthonormé du plan.

1 Généralités

Soit a et g deux droites de l'espace qui se coupe avec un angle aigu $\alpha < 90°$ en un point S. Notons κ la surface engendrée par la rotation de g autour de a (voir la figure 1).

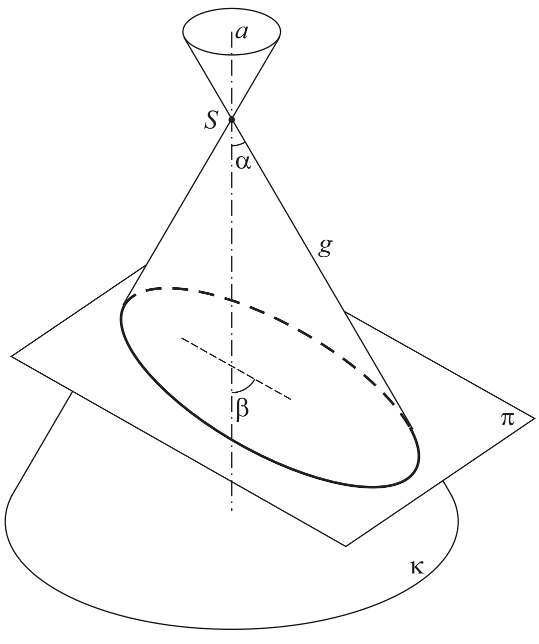


FIGURE 1 – construction d'une conique

1.1 Définitions
*La surface κ est un **cône de révolution**, la droite g est une **génératrice** de κ, la droite a son **axe**, le point S son **sommet** et l'angle aigu entre a et g son **demi-angle d'ouverture**.*

Soit π un plan. Si π et a sont sécants, nous notons β l'angle entre a et π, sinon, nous posons $\beta = 0$.

1.2 Définition (Apollonius, III$^{\text{e}}$ s. av. J.-C.)
*L'intersection entre un cône de révolution et un plan est une **conique**.*

Il peut se produire plusieurs cas particuliers qui ont déjà été étudiés dans de précédents cours de mathématiques :

(a) Si $S \in \pi$, nous obtenons soit :
  (i) un point si $\beta > \alpha$,
  (ii) une droite si $\beta = \alpha$,
  (iii) deux droites sécantes si $\beta < \alpha$.

(b) Si $S \notin \pi$ et si $\beta = 90°$ nous obtenons un cercle.

Dans les cas précédents, nous parlons de **coniques dégénérées** sinon nous sommes dans une des situations suivantes :

1.3 Définitions
Si l'intersection du plan π et du cône de révolution κ n'est pas une conique dégénérée, il s'agit (voir figure 2) :

(a) *d'une **ellipse** si $\beta > \alpha$,*

(b) *d'une **parabole** si $\beta = \alpha$,*

(c) *d'une **hypberbole** si $\beta < \alpha$.*

Pour toute la suite de ce script, nous nous intéresserons au cas où la conique obtenue n'est pas dégénérée et l'utilisation du terme « conique » sous-entendra « conique non-dégénérée ». Ainsi, pour toute conique, nous pourrons construire une sphère tangente κ et π :

1.4 Définitions
*Une **sphère de Dandelin** est une sphère qui centré sur l'axe du cône de révolution et qui est tangente intérieure au cône de révolution κ et tangente au plan π.*

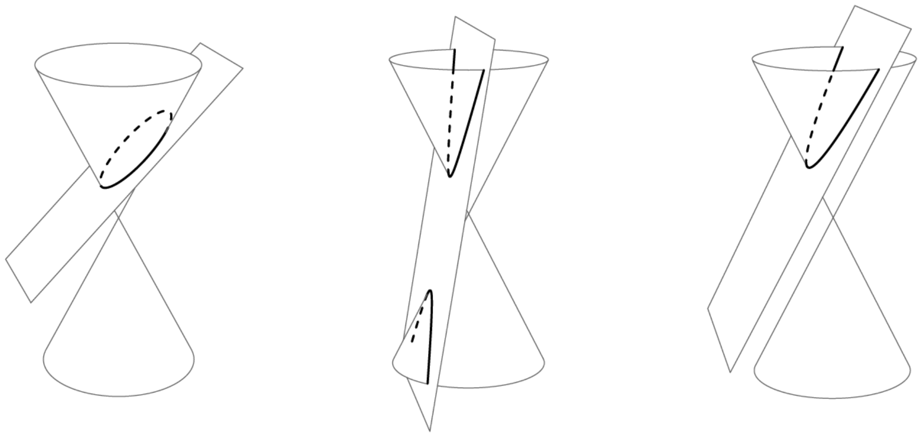


FIGURE 2 – coniques non dégénérées (source : [2])

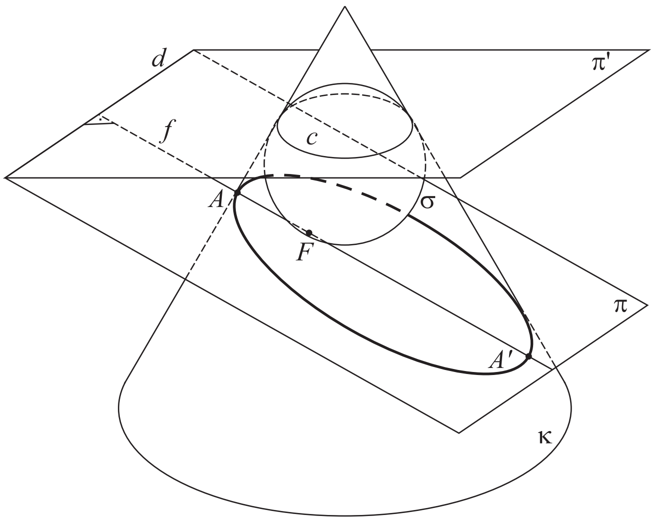


FIGURE 3 – sphère de Dandelin σ, directrice d, foyer F, axe focal f et sommets A, A' d'une conique $\pi \cap \kappa$

A l'aide d'une sphère de Dandelin σ, nous pouvons construire les éléments suivants (voir figure 3) :

— le point de tangence F entre π et σ,
— le cercle $c = \kappa \cap \sigma$,
— le plan π' contenant c.
— la droite $d = \pi \cap \pi'$,
— la droite $f \subset \pi$ perpendiculaire à d passant par F,
— les intersections $A,\ A'$ de f avec la conique (dans le cas d'une parabole, il y a une seule intersection).

1.5 Définitions

(a) *Le point F est un* ***foyer*** *de la conique.*

(b) *La droite d est sa* ***directrice*** *par rapport au foyer F.*

(c) *La droite f est son* ***axe focale****.*

(d) *Le(les) point(s) A (et A') est(sont) son(ses)* ***sommet(s)****.*

1.6 Remarque
Dans le cas d'une parabole, il existe une unique sphère de Dandelin et donc un unique foyer et une unique directrice. Sinon il y a toujours deux sphères de Dandelin et il y a alors deux foyers distincts ayant chacun une directrice.

Nous avons alors le résultat suivant :

1.7 Théorème
Pour tout point P de la conique, nous avons[1]

$$\frac{PF}{\delta(P,d)} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}.$$

*Ce rapport est l'****excentricité*** *de la conique.*

DÉMONSTRATION
Soit P un point de la conique, P_d sa projection orthogonale sur d (voir la figure 4), P' sa projection orthogonale sur π' (rappelons que si π est strictement parallèle à l'axe a de la conique nous avons posé $\beta = 0°$; dans ce cas $P' = P_d$) et Q l'intersection de c avec la génératrice de κ contenant P. Comme les droites PF et PQ sont tangentes à σ et en travaillant dans le triangle rectangle $PP'Q$ dont l'angle $\widehat{P'PQ}$ vaut α, nous avons

$$PF = PQ = \frac{PP'}{\cos(\alpha)}. \tag{1}$$

D'autre part, si $\beta \neq 0$ (dans ce cas π n'est pas orthogonal à π') alors $P_d \neq P'$ et nous pouvons travailler dans le triangle rectangle $PP'P_d$ dont l'angle $\widehat{P'PP_d}$ vaut β. Nous avons alors

$$\delta(P;d) = PP_d = \frac{PP'}{\cos(\beta)}. \tag{2}$$

Cette équation est aussi valable si $\beta = 0°$ (dans ce cas π est orthogonal à π') car dans ce cas $P = P_d$ et $PP_d = \frac{PP'}{1} = \frac{PP'}{\cos(\beta)}$. Les équations (1) et (2) nous donnent alors

$$\frac{PF}{\delta(P,d)} = \frac{\frac{PP'}{\cos(\alpha)}}{\frac{PP'}{\cos(\beta)}} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}.$$

□

1. Pour deux objets o_1, o_2 du plan ou de l'espace, la distance entre o_1 et o_2, notée $\delta(o_1; o_2)$, est la longueur du plus court chemin reliant un point de o_1 avec un point de o_2.

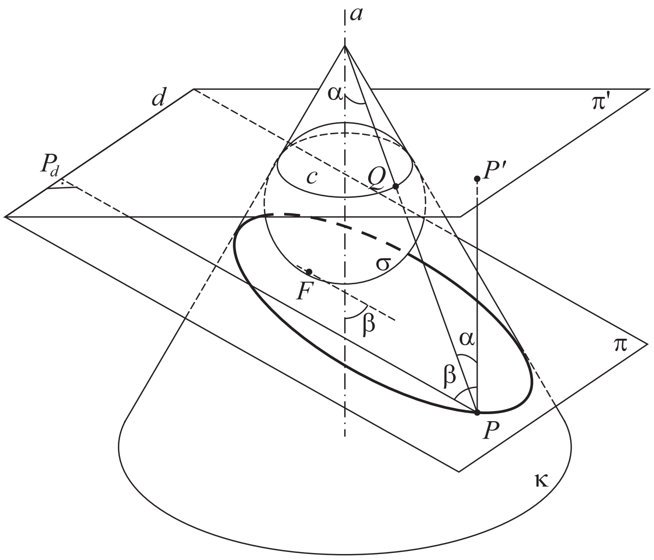


FIGURE 4 – calcul de l'excentricité d'une conique

1.8 Remarque

Dans le cas où l'angle β tend vers 90°, la conique « s'approche » d'un cercle et l'excentricité tend vers 0. Donc, plus l'excentricité est proche de 0, plus la conique est proche d'un cercle : ceci justifie la terminologie utilisée.

1.9 Corollaire

(a) *L'excentricité d'une ellipse se trouve dans l'intervalle* $]0;1[$.
(b) *L'excentricité d'une parabole vaut 1.*
(c) *L'excentricité d'une hyperbole se trouve dans l'intervalle* $]1;\infty[$.

DÉMONSTRATION

Ce résultat une conséquence de la définition 1.3, du théorème 1.7 et la décroissance stricte de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0;\frac{\pi}{2}]$. □

Compte tenu du théorème 1.7, nous pouvons adopter la nouvelle définition suivante (il est possible de montrer que celle-ci est équivalente à la définition 1.2) :

1.10 Définitions

*Soit $d \subset \mathbb{R}^2$ une droite, $F \in \mathbb{R}^2 \setminus d$ et $e > 0$. Une **conique** (non dégénérée) est l'ensemble des points $P \in \mathbb{R}^2$ tels que*

$$\frac{PF}{\delta(P;d)} = e.$$

F est un foyer de la conique, d la directrice associée à F et e l'excentricité de la conique.

*Une **ellipse** une conique d'excentricité strictement inférieure à 1, une **parabole** est une conique d'excentricité égale à 1 et une **hyperbole** est une conique d'excentricité strictement supérieure à 1.*

1.11 Remarque
La relation entre la définition d'une conique par l'excentricité (définition 1.10) et la définition comme section d'un cône de révolution (définition 1.3) est l'œuvre de Dandelin et Lebesgue (XVIII^{e} siècle).

2 Ellipses

Le théorème suivant nous donnera une méthode pour dessiner les ellipses et nous permettra de trouver la forme d'une équation cartésienne d'une ellipse ainsi qu'une représentation paramétrique :

2.1 Théorème
Soit P un point d'un plan π intersectant un cône de révolution et définissant une ellipse k de foyers F et F' dont la distance entre les sommets vaut $2a$. Nous avons alors l'équivalence suivante :

$$P \in k \Longleftrightarrow PF + PF' = 2a.$$

De plus, si P est interne à l'ellipse alors $PF + PF' < 2a$ et si P est externe à l'ellipse alors $PF + PF' > 2a$.

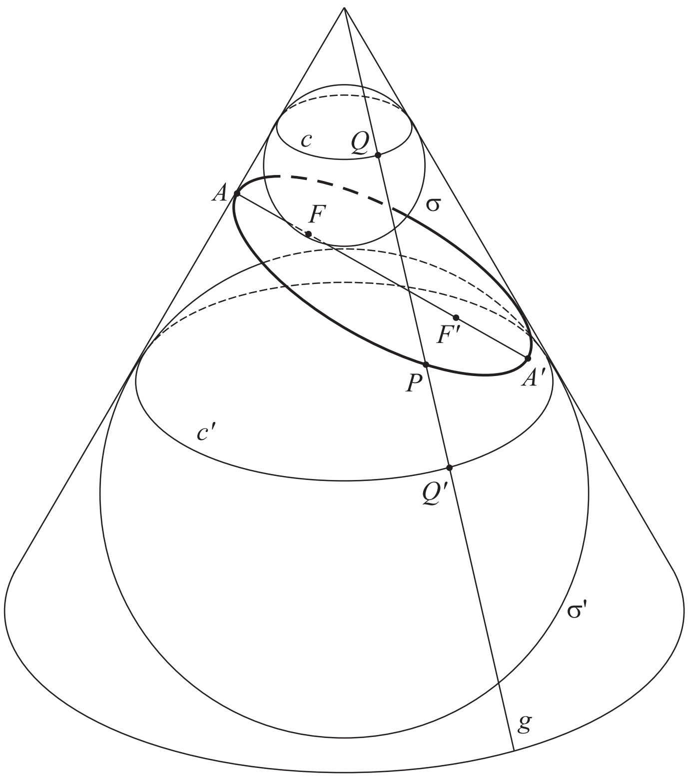


FIGURE 5 – sphères de Dandelin σ, σ' d'une ellipse et calcul des la somme des distances aux foyers d'un point P de celle-ci

DÉMONSTRATION
$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $p \in k$. Nous commençons par montrer que la somme $PF + PF'$ est constante.

Pour cela, nous considérons la génératrice g du cône qui passe par P (voir la figure 5). Nous notons Q le point de tangence de g avec la sphère de Dandelin σ relative à F et Q' le point de tangence de g avec la sphère de Dandelin σ' relative à F'. Comme les droites (PF) et (PQ) sont tangentes à la sphère σ nous avons $PF = PQ$. Pour la même raison, nous avons $PF' = PQ'$. Il s'en suit que

$$PF + PF' = PQ + PQ' = QQ' = \delta(c, c'),$$

où c et c' sont les cercles de contact entre les sphères de Dandelin et le cône de révolution.

Nous avons montré que la somme $PF+PF'$ était constante pour tous les points de l'ellipse. Calculons maintenant la valeur de cette constante. Pour cela, posons $PF + PF' = L$ et notons A et A' les sommets de l'ellipse. L'ensemble des points du plan π satisfaisant l'égalité $PF + PF' = L$ est symétrique par rapport à l'axe de symétrie entre F et F' et donc $AF = A'F'$. Comme A, A', F et F' sont alignés, nous avons donc $L = A'F + A'F' = A'F + AF = AA' = 2a$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Nous allons démontrer la contraposée de cette implication, c'est-à-dire que si P n'est pas sur l'ellipse alors $PF + PF' \neq 2a$.

Nous commençons par traiter le cas où P est externe à l'ellipse Pour cela, nous construisons le point $\hat{P}$ qui se trouve à l'intersection de l'ellipse et du segment OP, O étant le milieu

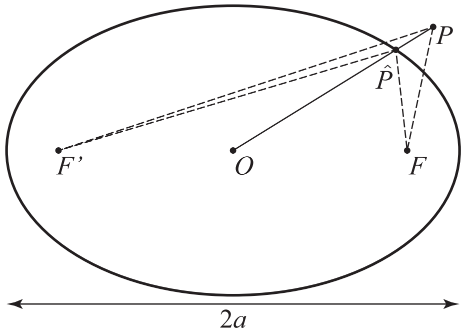


FIGURE 6 – si P est externe à l'ellipse alors $PF + PF' > 2a$

du segment FF' (voir la figure 6). Nous avons alors $PF > \hat{P}F$ et $PF' > \hat{P}F'$ donc

$$PF + PF' > \hat{P}F + \hat{P}F' = 2a,$$

l'égalité $\hat{P}F+\hat{P}F' = 2a$ venant du fait que $\hat{P}$ appartient à l'ellipse (celle-ci a été démontrée dans la première partie de la démonstration de ce théorème).

Si P est interne à l'ellipse, nous construisons le point $\hat{P}$, qui est à l'intersection de la normale à l'axe focale passant par P et de la conique k et qui est dans le demi-plan défini par l'axe focal et contenant P (voir figure 7). Nous avons $PF < \hat{P}F$ et $PF' < \hat{P}F'$ et donc

$$PF + PF' < \hat{P}F + \hat{P}F' = 2a.$$

Par conséquent, si $p \notin k$ alors $PF + PF' \neq 2a$. $\square$

Soit $c > 0$. Considérons les points $F(c; 0)$ et $F'(-c; 0)$ placés dans un repère orthonormé. En attachant une ficelle de longueur $L > 2c$ aux points F et F', nous pouvons dessiner une

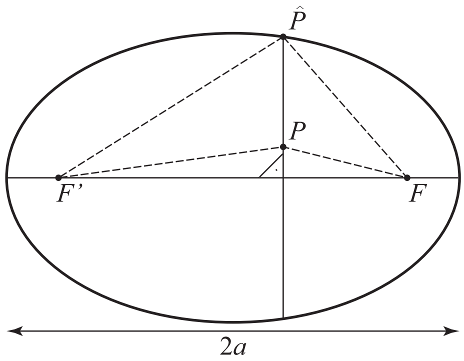


FIGURE 7 – si P est interne à l'ellipse alors $PF + PF' < 2a$

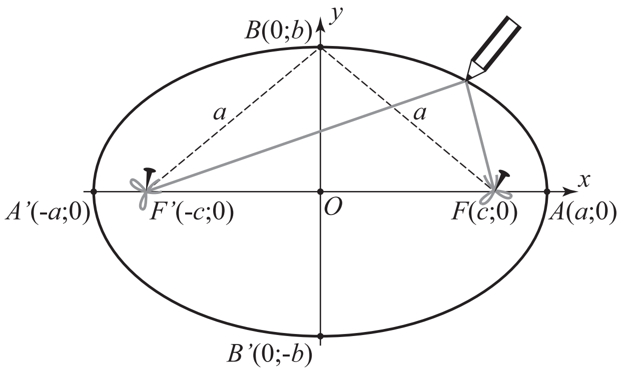


FIGURE 8 – dessin d'une ellipse avec une ficelle de longueur $2a$

ellipse de foyer F et F' (voir figure 8). Notons alors a l'abscisse du point d'intersection de l'ellipse avec la partie positive de l'axe des abscisse et b l'ordonnée du point d'intersection de l'ellipse avec la partie positive de l'axe des ordonnées. Nous définissons alors les points $A(a;0)$, $A'(-a;0)$, $B(0;b)$ et $B'(0;-b)$. Les segments AA' et BB' sont les **axes** de l'ellipse. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OFB, O étant l'origine, nous obtenons la propriété suivante :

2.2 Propriété
Soit $a > c > 0$. Une ellipse de distance focale $2c$, c'est-à-dire dont la distance entre les foyers vaut $2c$, et dont l'axe contenant les foyers mesure $2a$ a un deuxième axe mesurant

$$\boxed{2b = 2\sqrt{a^2 - c^2}.}$$

Cette égalité implique le résultat suivant :

2.3 Corollaire
Le grand axe d'une ellipse est toujours l'axe passant par les foyers.

DÉMONSTRATION
Par la propriété 2.2, une ellipse de distance focale $2c$ et dont l'axe contenant les foyers mesure $2a$ a un deuxième axe mesurant $2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} < 2\sqrt{a^2 + 0} = 2a$. □

A partir du théorème 2.1, nous pouvons mettre en relation les propriétés géométriques et analytiques d'une ellipse :

2.4 Théorème
Soit $a > c > 0$ et $P(x;y)$ un point du plan. Si nous posons $F(c;0)$, $F'(-c;0)$ et $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ alors les énoncés suivants sont équivalents :

(1) *P appartient à l'ellipse de foyers F et F' dont le grand axe mesure $2a$ et le petit axe $2b$.*

(2) $PF + PF' = 2a$

(3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(4) *Il existe un angle $\theta \in \mathbb{R}$ tel que* $\begin{cases} x = a\cos(\theta), \\ y = b\sin(\theta). \end{cases}$

*Nous appellerons l'équation cartésienne donnée en (3) l'**équation canonique** de l'ellipse. Les équations données en (4) sont des **équations paramétriques** de celle-ci.*

Démonstration

$\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ Il s'agit du théorème 2.1.

$\boxed{(2)\Rightarrow(1)}$ Il s'agit du théorème 2.1 et de la propriété 2.2.

$\boxed{(2)\Rightarrow(3)}$ Soit $P(x;y)$ un point du plan tel que $PF + PF' = 2a$. Cette équation implique les équations suivantes (comme il y a plusieurs élévations au carré des membres de gauche et droite ce ne sont, a priori, pas des équations équivalentes) :

$$\begin{aligned}
\left\|\begin{pmatrix} c-x \\ -y \end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix} -c-x \\ -y \end{pmatrix}\right\| &= 2a \\
\left(\sqrt{(c-x)^2 + (-y)^2}\right)^2 &= \left(2a - \sqrt{(-c-x)^2 + (-y)^2}\right)^2 \\
\cancel{4}a\sqrt{(-c-x)^2 + (-y)^2} &= \cancel{4}a^2 + \cancel{4}cx \\
(\underbrace{a^2 - c^2}_{=b^2})x^2 + a^2y^2 &= a^2(\underbrace{a^2 - c^2}_{=b^2}) \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1
\end{aligned}$$

$\boxed{(3)\Rightarrow(4)}$ Soit $P(x;y)$ satisfaisant l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. En faisant le changement de variables $x = a\hat{x},\ y = b\hat{y}$ nous obtenons

$$\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 1.$$

$(\hat{x};\hat{y})$ se trouve donc sur un cercle de rayon 1 centré à l'origine. Il existe donc un angle θ tel que $(\hat{x};\hat{y}) = \big(\cos(\theta);\sin(\theta)\big)$. Nous avons alors

$$\begin{cases} x = a\hat{x} = a\cos(\theta), \\ y = b\hat{y} = b\sin(\theta). \end{cases}$$

$\boxed{(4)\Rightarrow(2)}$ Voir l'exercice 4. □

2.5 Remarques

(a) Pour $b > a > 0$, l'ensembles des points du plan satisfaisant l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une ellipse d'axe focal *vertical*. Ses demi-axes mesurent a et b et ses foyers se trouvent en $(0; \pm\sqrt{b^2 - a^2})$.

(b) Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$. L'équation canonique de l'ellipse centrée en $(x_0; y_0)$, d'axe horizontal mesurant $2a$ et d'axe vertical mesurant $2b$ est

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Des équations paramétriques de cette ellipse sont

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos(\theta), \\ y = y_0 + b\sin(\theta), \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

(c) Les équations paramétriques d'une ellipse donnent une méthode de construction d'une ellipse avec équerre et compas (voir l'exercice 5).

2.6 Exemple

Montrer que l'équation

$$16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$$

est l'équation d'une ellipse puis déterminer les coordonnées des extrémités des axes et des foyers de celle-ci.

Il faut commencer par mettre cette équation sous sa forme canonique. Pour cela, nous complétons les carrés et nous obtenons les équations suivantes qui sont équivalentes à l'équation initiale :

$$\begin{aligned} 16(x^2 + 4x + \boxed{4}) + 9(y^2 - 2y + \boxed{1}) &= 71 + \boxed{16 \cdot 4} + \boxed{9 \cdot 1} \\ 16(x+2)^2 + 9(y-1)^2 &= 144 \\ \frac{\cancel{16}^1 (x+2)^2}{\cancel{144}_9} + \frac{\cancel{9}^1 (y-1)^2}{\cancel{144}_{16}} &= 1 \\ \frac{(x - (-2))^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

Nous avons donc une ellipse centrée en $Z(-2; 1)$, dont le demi petit axe mesure $a = 3$, le demi grand axe $b = 4$ et la demi-distance focale $c = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ (voir la figure 9). Les coordonnées des extrémités des axes et des foyers sont donc

$$\begin{gathered} A(-2+3; 1) = (1; 1), \;\; A'(-2-3; 1) = (-5; 1), \\ B(-2; 1+4) = (-2; 5), \;\; B'(-2; 1-4) = (-2; -3), \\ F(-2; 1+c) = (-2; 1+\sqrt{7}) \text{ et } F'(-2; 1-c) = (-2; 1-\sqrt{7}). \end{gathered}$$

☺

Les ellipses ont une propriété de réflexion intéressante :

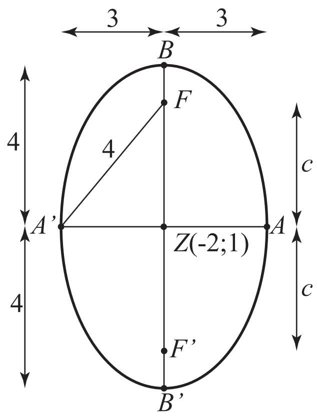


Figure 9 – calcul des coordonnées des sommets des axes et des foyers de l'ellipse de l'exemple 2.6

2.7 Propriété
Soit P un point d'une ellipse de foyer F et F' et soit t la tangente à cette ellipse en P. La normale à t passant par P est la bissectrice de l'angle $\widehat{FPF'}$ (voir la figure 10).

Cette propriété a pour conséquence que toute onde émise depuis un foyer d'une ellipse se réfléchit contre celle-ci en direction de l'autre foyer. Cette propriété aurait été utilisée pour la construction de confessionnaux à plafond ellipsoïdal pour des malades contagieux : le prêtre pouvait très bien entendre la malade sans s'en approcher si chacun se trouvait à un des foyers (voir exercice 10). Cette propriété est aussi utilisée en médecine pour briser des calculs rénaux (voir l'exercice 9) et pour la construction d'instruments optiques (par exemple lanternes de projecteurs de films analogiques).

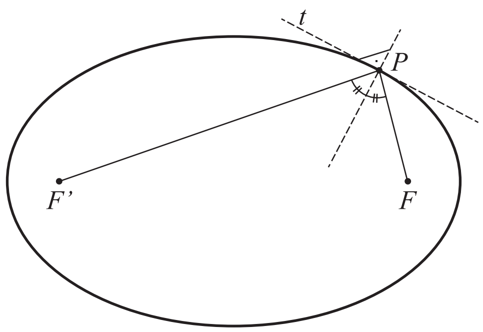


Figure 10 – propriété de réflexion des ellipses

Pour démontrer la propriété 2.7, nous avons besoin du théorème suivant :

2.8 Théorème (de Héron, Ier s. apr. J.-C.)
Soit d une droite du plan, $M \in d$ et P, Q des points situés dans un des demi-plans définis par d. Nous avons alors l'équivalence suivante :

$$PM + MQ \text{ est minimale} \iff \angle\big((PM); d\big) = \angle\big((MQ); d\big)$$

Démonstration
Soit P' le symétrique de P par rapport à d (voir la figure 11). Par symétrie, nous avons

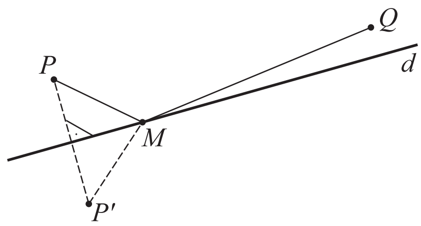


Figure 11 – preuve du théorème de Héron

$PM = P'M$ donc $PM + MQ$ est minimale si et seulement si $P'M + MQ$ est minimale. Or $P'M + MQ$= est minimale si et seulement si P', M et Q sont alignés. Ceci est le cas si et seulement si $\angle\big((P'M);d\big) = \angle\big((MQ);d\big)$. Mais, par symétrie, nous avons $\angle\big((P'M);d\big) = \angle\big((PM);d\big)$, ce qui termine la preuve. □

Démonstration de la propriété 2.7
Soit P un point de l'ellipse, t la tangente à l'ellipse en P et n la normale à t passant par P. Tout point $T \in t \setminus \{P\}$ est externe à l'ellipse et par le théorème 2.1 nous avons $TF + TF' > 2a$. Comme P appartient à l'ellipse $2a = PF + PF'$ et donc

$$TF + TF' > PF + PF'.$$

Il suit alors du théorème de Héron que $\angle\big((PF);t\big) = \angle\big((PF');t\big)$ et donc que n est la bissectrice de l'angle $\widehat{FPF'}$ □

3 Hyperboles

En reprenant les raisonnements fait sur les ellipses nous obtenons le résultat suivant :

3.1 Théorème
Soit $c > a > 0$ et $P(x;y)$ un point du plan. Si nous posons $F(c;0)$, $F'(-c;0)$ alors les énoncés suivants sont équivalents :

(1) *P appartient à une hyperbole de foyers F et F' dont la distance entre les sommets mesure $2a$.*

(2) $|PF - PF'| = 2a$

(3) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *avec* $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

*Nous appellerons l'équation cartésienne donnée en (3) l'**équation canonique** de l'hyperbole. Le segment reliant les sommets de l'hyperbole est son **axe transverse**.*

Démonstration
$\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ Voir l'exercice 13.

$\boxed{(2)\Rightarrow(1)}$ Nous allons démontrer la contraposée de cette implication, c'est-à-dire que si P n'est pas sur l'hyperbole de foyer F, F' dont la distance entre les sommets mesure $2a$ alors $|PF - PF'| \neq 2a$.

Soit P un point du plan. On peut montrer (voir l'exercice 14) que si P est sur l'axe focal alors

$$|PF - PF'| \begin{cases} < 2a & \text{si } P \text{ est entre les sommets,} \\ = 2a & \text{si } P \text{ est sur un sommet,} \\ > 2a & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui démontre la contraposée dans ce cas particulier.

Si P n'est pas sur l'axe focale, nous construisons n, la normale à l'axe focal passant par P, et pour $h \geqslant 0$, nous construisons le point $Q_h \in n$ qui si trouve à une distance h de l'axe focale, qui est dans le demi-plan défini par celui-ci et contenant P (voir la figure 12). A l'aide du calcul différentiel, il est possible de montrer que la fonction $f(h) =$

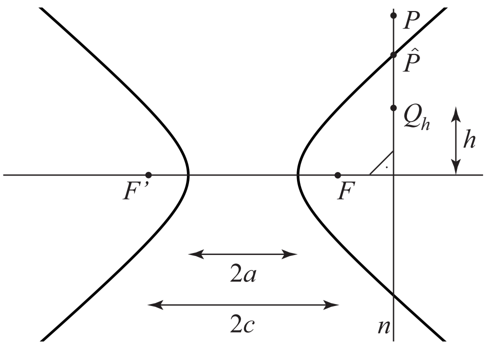


FIGURE 12 – valeur de $|PF - PF'|$ en fonction de sa position

$|Q_hF - Q_hF'|, h \geqslant 0$, est strictement décroissante[2].

Si n n'intersecte pas l'hyperbole alors n passe entre les sommets de l'hyperbole et nous avons montré que $f(0) < 2a$, la décroissance de f implique que $|PF - PF'| < 2a$.

Si n intersecte l'hyperbole, nous notons $\hat{P}$ l'intersection de n avec l'hyperbole. Par conséquent, il suit de la décroissance de f que

$$|PF - PF'| \begin{cases} < 2a & \text{si } P \text{ est entre l'axe focal et } \hat{P}, \\ = 2a & \text{si } P = \hat{P} \text{ (démontrée dans la partie « (1)}\Rightarrow\text{(2) »),} \\ > 2a & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\boxed{(2)\Leftrightarrow(3)}$ Voir l'exercice 15. □

2. Sans restriction de la généralité, nous pouvons supposer que l'abscisse de P est positive. Nous avons donc $|Q_hF - Q_hF'| = Q_hF' - Q_hF$ et les coordonnées de Q_h sont (x_0, h) avec $x_0 > 0$. Nous avons alors $f(h) = \sqrt{(x_0+c)^2 + h^2} - \sqrt{(x_0-c)^2 + h^2}$ et la dérivée $f'(h) = \frac{h}{\sqrt{(x_0+c)^2+h^2}} - \frac{h}{\sqrt{(x_0-c)^2+h^2}}$ est strictement négative pour $h > 0$ car $\sqrt{(x_0+c)^2 + h^2} > \sqrt{(x_0-c)^2 + h^2}$ avec $x_0, c > 0$.

3.2 Propriété
Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. L'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ possède deux asymptotes dont les équation sont

$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot x.$$

Démonstration
Voir l'exercice 16. □

3.3 Remarques

(a) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l'équation d'une hyperbole dont les sommets ont pour coordonnées $(0; \pm b)$, les foyers $(0; \pm\sqrt{a^2+b^2})$ (l'axe transverse est donc vertical et mesure $2b$) et dont les asymptotes ont pour équations $y = \pm \frac{b}{a} x$.

(b) Si le centre de l'hyperbole se trouve en $(x_0; y_0)$ alors son équation canonique est de la forme

$$\pm\left(\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}\right) = 1$$

avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et ses asymptotes ont pour équations $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$.

(c) Il est possible de montrer que la tangente en un point P d'une hyperbole de foyer F et F' est la bissectrice de l'angle $\widehat{FPF'}$.

4 Directrices et excentricité des coniques à centre

Nous voulons maintenant déterminer l'excentricité ainsi que l'équation cartésienne des directrices des coniques à centre (c'est-à-dire des ellipses et des hyperboles) à partir des paramètres de leur équation canonique. Pour cela, nous allons travailler avec la définition des coniques par l'excentricité (définition 1.2). Dans ce but, nous allons commencer par déterminer l'équation cartésienne d'une conique non-dégénérée définie par un foyer, un sommet et son excentricité.

Soit une conique d'excentricité e, de foyer F et de sommet A, A étant le sommet se trouvant sur le segment reliant F et sa projection orthogonale sur la directrice de la conique par rapport à F (voir la figure 13). Nous choisissons un repère orthonormé centré

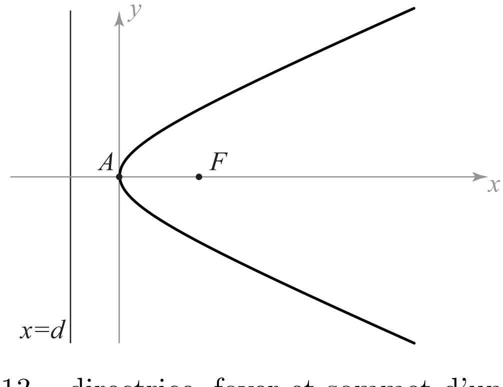


Figure 13 – directrice, foyer et sommet d'une conique

en A dont la partie positive de l'axe des abscisses contient F. Nous avons donc $F(x_F;0)$ avec $x_F>0$ et $A(0;0)$. L'équation de la directrice doit être de la forme $x=d$ avec $d<0$ et nous avons

$$e=\frac{AF}{\delta(A;x=d)}=\frac{x_F}{-d}\text{ donc }d=-\frac{x_F}{e}. \tag{3}$$

Nous déterminons maintenant l'équation cartésienne de la conique. Un point $P(x;y)$ appartient à la conique si et seulement si $e=\frac{PF}{\delta(P;x=d)}$. Nous avons donc les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} e &= \frac{\sqrt{(x-x_F)^2+y^2}}{|x-d|} \\ e^2(x-d)^2 &= (x-x_F)^2+y^2 \\ x^2(e^2-1)+2x(-e^2d+x_F)+e^2d^2-x_F^2 &= y^2 \end{aligned} \tag{4}$$

En insérant l'équation (3) dans l'équation (4) nous obtenons l'équation

$$x^2(e^2-1)+2xx_F(e+1)=y^2$$

qui est appelée **équation commune aux trois coniques**.

Dans les cas où la conique considérée n'est pas une parabole (donc $e\neq 1$), nous pouvons déterminer les coordonnées de son second sommet $A'(x_{A'};y_{A'})$. Comme A' est sur l'axe focale (qui est l'axe des abscisses), nous avons $y_{A'}=0$. De plus, les coordonnées de A' doivent satisfaire l'équation commune aux trois coniques donc nous avons les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} x_{A'}^2(e^2-1)+2x_{A'}x_F(e+1) &= \underbrace{y_{A'}^2}_{=0} \\ x_{A'}\left(x_{A'}(e^2-1)+2x_F(e+1)\right) &= 0 \end{aligned}$$

Cette équations possède deux solutions, la première est nulle et correspond au point A. La seconde est $x_{A'}=-\frac{2x_F(e+1)}{e^2-1}=-\frac{2x_F(e+1)}{(e+1)(e-1)}=\frac{2x_F}{(1-e)}$. Le deuxième sommet est donc

$$A'\left(\frac{2x_F}{1-e};0\right).$$

Nous pouvons maintenant déterminer la relation entre les paramètres a et b de l'équation canonique d'une conique à centre et la valeur de son excentricité e. Dans le cas d'une ellipse, l'excentricité e est strictement inférieure à 1 et l'abscisse de A' est donc positive. La situation est représentée dans la figure 14. Nous en déduisons que d'une part nous avons $2a=\frac{2x_F}{1-e}$ donc

$$a=\frac{x_F}{1-e}, \tag{5}$$

et d'autre part

$$x_F=a-c. \tag{6}$$

En insérant (6) dans (5), nous obtenons $a=\frac{a-c}{1-e}$ et donc

$$e=1+\frac{c-a}{a}.$$

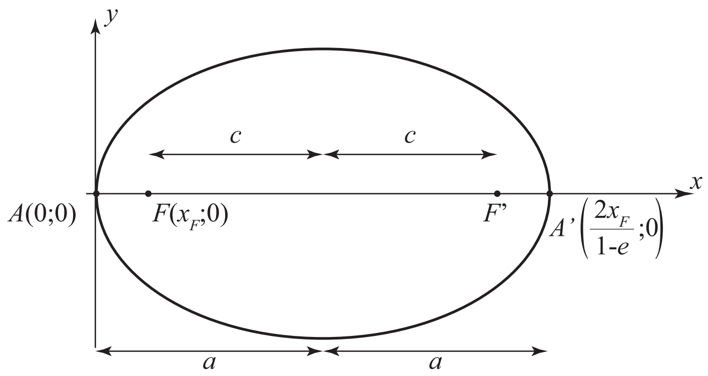


FIGURE 14 – calcul de l'excentricité d'une ellipse

Il est possible de montrer que nous obtenons le même résultat dans le cas d'une hyperbole (voir l'exercice 21). Nous avons donc le résultat suivant :

4.1 Propriété
L'excentricité e d'une conique d'axe focal horizontal et d'équation $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ *vaut*

$$\boxed{e = \frac{c}{a}.}$$

Pour déterminer la position des directrices, considérons d'abord le cas où nous avons une ellipse de foyer $F(c;0)$, $F'(-c;0)$ et de sommets $A(a;0)$, $A'(-a;0)$, $a, c > 0$ (voir la

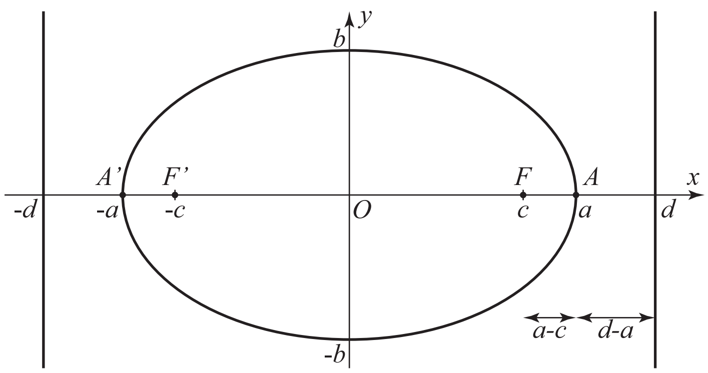


FIGURE 15 – ellipse et ses directrices $x = \pm d$

figure 15). Si les directrices ont pour équations $x = \pm d$, la définition d'une conique par l'excentricité (voir 1.10) appliquée au sommet A de l'ellipse ainsi que la propriété 4.1 nous donne les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} e &= \frac{AF}{\delta(A; x = d)} \\ \frac{c}{a} &= \frac{a-c}{d-a} \\ d - a &= \frac{(a-c)a}{c} \\ d &= \frac{a^2 - ac}{c} + a = \frac{a^2}{c}. \end{aligned}$$

Il est possible de montrer que nous obtenons le même résultat dans le cas d'une hyperbole (voir l'exercice 22). Nous avons donc le résultat suivant :

4.2 Propriété
Les directrices d'une conique d'axe focal horizontal et d'équation $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ *ont pour équations*

$$\boxed{x = \pm\frac{a^2}{c}.}$$

5 Paraboles

5.1 Théorème
Soit $q \in \mathbb{R}^*$. *La parabole de foyer* $(q; 0)$ *ayant l'origine pour sommet a pour équation*

$$y^2 = 4qx.$$

Démonstration
Voir l'exercice 25. □

5.2 Remarque

(a) D'après le théorème précédent, le graphe d'un fonction quadratique est une parabole d'axe focal vertical (pour une illustration de ceci voir l'exercice 26(c)).

(b) L'équation cartésienne d'une parabole de sommet $(x_0; y_0)$ et d'axe focal horizontal est

$$(y - y_0)^2 = 4q(x - x_0),$$

où $|q|$ est la distance entre le sommet et le foyer. Si q est positif, le foyer est à droite du sommet, sinon il est à sa gauche.

5.3 Propriété
Pour tout point P *d'une parabole* p *et de foyer* F, *la tangente* t *au graphe de* p *en* P *est une bissectrice de la droite* (FP) *et de la parallèle* d *à l'axe focal passant par* P *(voir la figure 16).*

Démonstration
Voir l'exercice 28. □

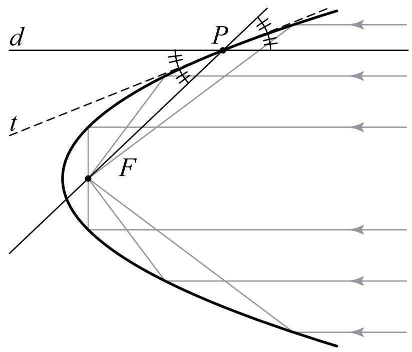


Figure 16 – propriété de réfexion d'une parabole

5.4 Remarque
Il suit de la propriété précédente qu'un faisceau de rayons parallèles à l'axe focal d'une parabole se réfléchissant à l'intérieur de celle-ci se concentre sur son foyer. Cette proporiété est la raison de la forme des antennes paraboliques.

6 Equations du second degrés à deux variables

Compte tenu de ce qui a été vu jusqu'ici, nous pouvons affirmer que l'ensemble des points $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ solutions d'une équation du second degrés à deux variables de la forme

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + G = 0,$$

$A,\ B,\ D,\ E,\ F \in \mathbb{R}$, forme une conique (éventuellement dégénérée) ou est un ensemble vide. Le cas général où il y a un terme de la forme $Cxy,\ C \in \mathbb{R}$, peut se ramener à celui-ci en faisant un changement de repère par une rotation judicieusement choisie autour de l'origine (voir la chapitre de 4e année d'algèbre linéaire).

6.1 Exemple
Discuter selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ la nature de la courbe d'équation

$$c_m : x^2 + my^2 - mx - y = 0.$$

Nous devons commencer par distinguer le cas $m = 0$ du cas $m \neq 0$ car c'est seulement si m est non nul qu'il est possible d'avoir une conique à centre, centre que nous obtenons par mise en évidence des facteurs des termes de degré deux puis complétion des carrés (si un des facteurs est nul, cette mise en évidence n'est pas possible !).

$\boxed{m = 0}$ L'équation est de la forme $c_0 : x^2 - y = 0$ et il s'agit d'une *parabole* (d'axe focal horizontal).

$\boxed{m \neq 0}$ Nous commençons pas compléter les carrés et nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left(x^2 - mx + \frac{m^2}{4}\right) + m\left(y^2 - \frac{y}{m} + \frac{1}{4m^2}\right) &= \frac{m^2}{4} + \cancel{m}^{1} \cdot \frac{1}{4\cancel{m^2}_{m}} \\
\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + m\left(y - \frac{1}{2m}\right)^2 &= \frac{m^3+1}{4m}.
\end{aligned}$$

Nous ne pouvons nous ramener à l'équation canonique d'une ellipse ou d'une hyperbole que si le membre de droite de la dernière équation est non-nul. Nous devons donc distinguer les cas $m = -1$ et $m \neq -1$.

$\boxed{m = -1}$ L'équation est alors de la forme

$$\begin{array}{rcl} c_{-1}: \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 & = & 0 \\ x + \frac{1}{2} & = & \pm\left(y + \frac{1}{2}\right). \end{array}$$

Il s'agit des équations de *deux droites sécantes* : $x = y$ et $x + y + 1 = 0$.

$\boxed{m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}}$ Nous pouvons mettre l'équation sous forme canonique :

$$\frac{\left(x - \frac{m}{2}\right)^2}{\frac{m^3+1}{4m}} + \frac{\left(y - \frac{1}{2m}\right)^2}{\frac{m^3+1}{4m^2}} = 1$$

Pour connaître la nature de c_m, il faut étudier le signe des dénominateurs de chacun des termes du membre de gauche de l'équation :

Valeurs de m		-1		0	
$\operatorname{sgn}\left(\frac{m^3+1}{4m}\right)$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$
$\operatorname{sgn}\left(\frac{m^3+1}{4m^2}\right)$	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$

Nous avons alors les cas suivants :

$\boxed{m \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[}$ c_m est une *hyperbole* (d'axe focal horizontal si $m \in]-\infty; -1[$ et d'axe focal vertical si $m \in]-1; 0[$).

$\boxed{m \in]0; +\infty[}$ c_m est une ellipse ou un cercle. Pour avoir une cercle, l'égalité suivante doit être vérifiée :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{m^3+1}{4m} & = & \dfrac{m^3+1}{4m^2} \\ m(m^3+1) & = & m^3+1 \\ m(m^3+1) - (m^{+}1) & = & 0 \\ (m-1)(m^3+1) & = & 0. \end{array}$$

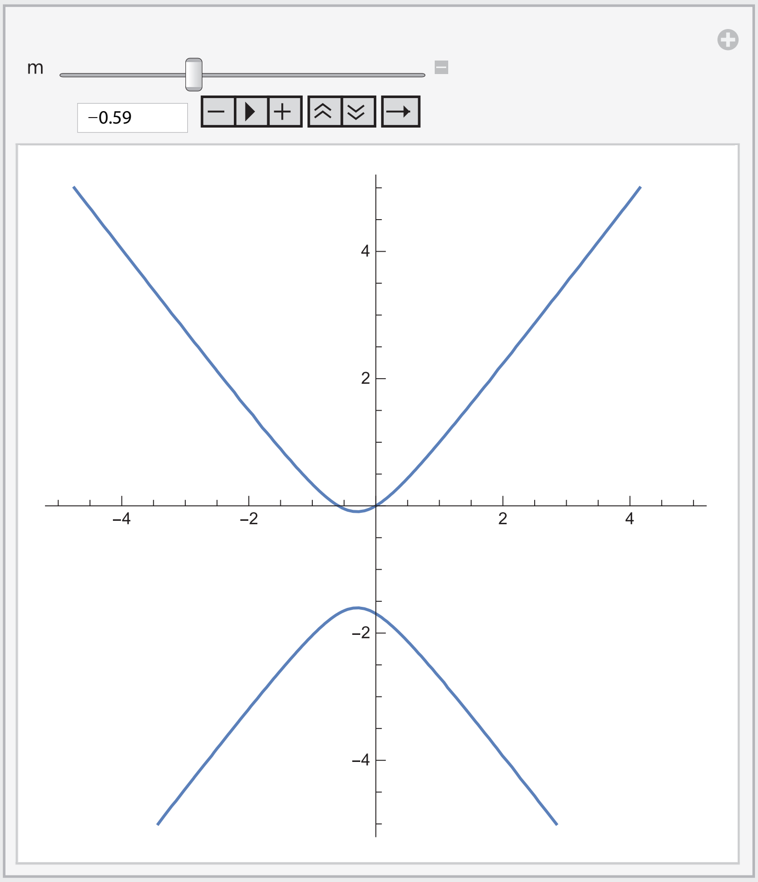
c_m est donc un *cercle* lorsque $m = 1$ (le cas $m = -1$ est exclu car nous considérons ici que $m \in]0; +\infty[$) et une *ellipse* pour $m \in]0; 1[\cup]1, +\infty[$ (une étude du signe de $\frac{m^3+1}{4m} - \frac{m^3+1}{4m^2}$ permettrait de déterminer la direction de l'axe).

La fonction `Manipulate` de Mathematica permet de valider les résultats obtenus :

In[1]:=

```
c[m_, x_, y_] := x^2 + m y^2 - m x - y
Manipulate[
  ContourPlot[
    c[m, x, y] == 0, {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
    Frame -> False, Axes -> True,
    AspectRatio -> Automatic
  ], {m, -2, 2}
]
```

Out[1]=



☺

7 Exercices

Une partie des exercices qui suivent provient de [1] et [3].

***Exercice* 1 (sans Mathematica)**
Chacun des dessins suivants est une vue en coupe d'un cône (en gris) qui est intercepté par un plan π. La coupe est faite par un plan qui est perpendiculaire à π et qui contient l'axe du cône. La conique ainsi formée est représentée en gras.
Sur chaque coupe placer :

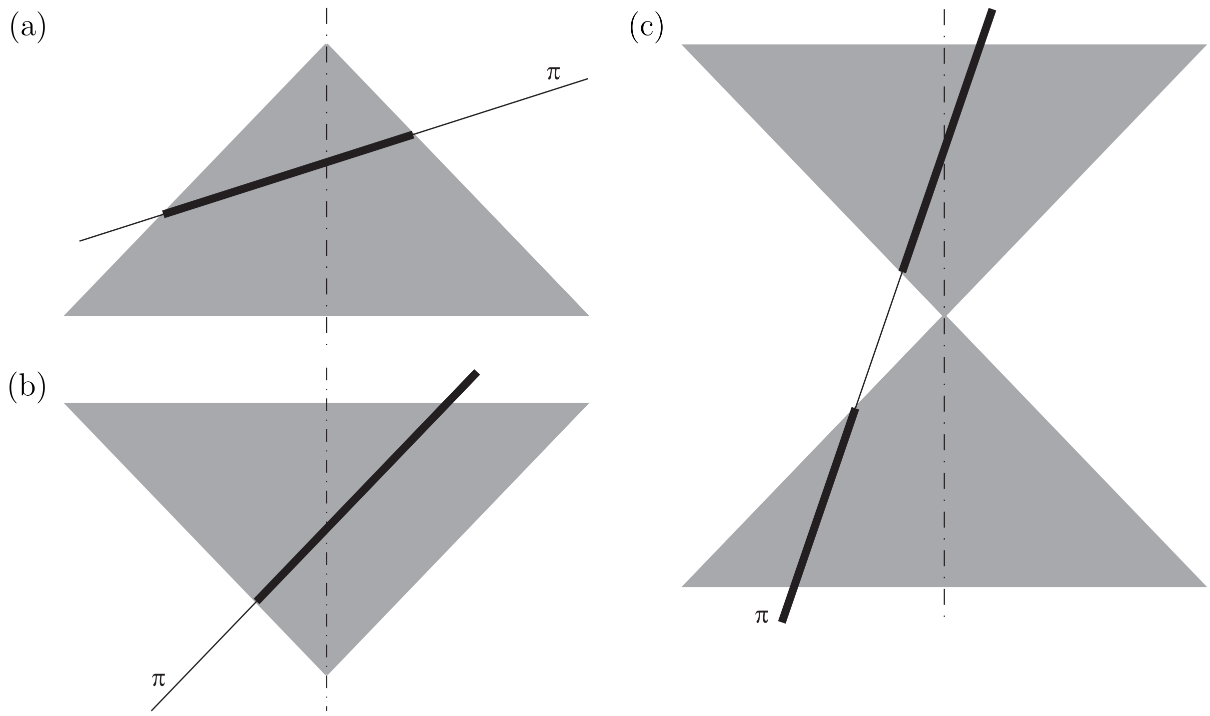
(i) le(les) sommet(s) de la conique,

(ii) la(les) sphère(s) de Dandelin,

(iii) le(les) foyer(s),

(iv) la(les) directrice(s).

Préciser la conique dont il s'agit et calculer son excentricité.



***Exercice* 2 (avec Mathematica)**
Soit la conique de foyer $F(3;-1)$, de directrice $d : 3x - 4y + 1 = 0$ et d'excentricité 2.

(a) A l'aide de Mathematica, déterminer une équation cartésienne de cette conique. Réduire l'équation de façon à ne pas avoir de valeur absolue ou de racine.

(b) Tracer un graphique contenant le graphe de cette conique, le point F et la droite d. Indication : travailler avec `ContourPlot`.

***Exercice* 3 (avec Mathematica)**
Reprendre les données de l'exercice précédent puis tracer les coniques ayant une excentricité variant entre 0 et 2 en travaillant avec `Manipulate`.

***Exercice* 4 (sans Mathematica)**
Soit $a > c > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $P(x;y)$ un point du plan. Nous posons $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $F(c;0)$ et $F'(-c;0)$. Montrer que si $(x;y) = \big(a\cos(\theta); b\sin(\theta)\big)$ alors $PF + PF' = 2a$.

***Exercice* 5 (sans Mathematica)**
Soit l'ellipse d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 4\cos(\theta), \\ y = 2\sin(\theta). \end{cases}$$

A partir de ces équations, construire l'ellipse avec équerre et compas (placer avec précision une dizaine de points).
Indication : dans un repère orthonormé, commencer par tracer des cercles de rayon 2 et 4 centrés à l'origine, puis construire un angle θ centré à l'origine du repère dont la partie positive de l'axe des abscisses constitue un côté, construire des segments de longueur $4\cos(\theta)$ et $2\sin(\theta)$, et finalement placer le point correspondant.

***Exercice* 6 (sans/avec Mathematica)**
Pour chaque cas, décider, sans utiliser Mathematica, si l'équation correspond à une ellipse. Dans l'affirmative, déterminer les caractéristiques de celle-ci (coordonnées des foyers et des sommets) puis tracer le graphe de l'équation avec Mathematica afin de tester vos résultats.

(a) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

(b) $4x^2 + y^2 = 16$

(c) $\dfrac{(x-3)^2}{16} + \dfrac{(y+4)^2}{9} = 1$

(d) $9x^2 + 4y^2 - 36x - 32y + 64 = 0$

(e) $4x^2 + 36y^2 - 24x + 36y + 81 = 0$

(f) $25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0$

***Exercice* 7 (sans Mathematica)**
Pour chaque cas, déterminer l'équation de l'ellipse remplissant les conditions données :

(a) Centrée à l'origine, d'axe focal horizontale, distance focale égale à 8 et grand axe égale à 10.

(b) Foyers en $(4;1)$ et $(4;-5)$, demi petit axe égale à 4.

(c) Passant par $(-2;2)$, centrée à l'origine, d'axe focal verticale et de demi grand axe égale à 4.

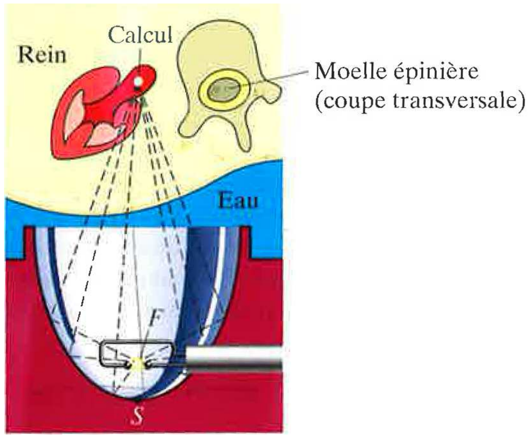
(d) Sommets en $(-9;2)$ et $(7;2)$ et un foyers en $(-6;2)$.

***Exercice* 8 (sans/avec Mathematica)**
Pour chaque cas, déterminer la nature ainsi que les caractéristiques du graphe de la fonction sans utiliser Mathematica, puis tracer le graphe de la fonction avec Mathematica afin de tester vos résultats.

(a) $y = 11\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{49}}$

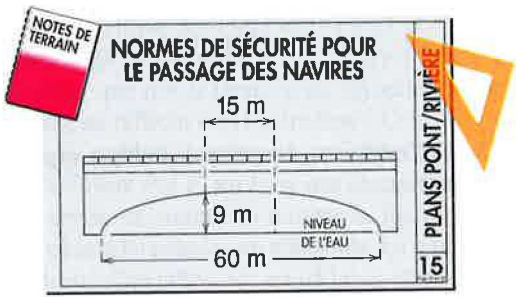
(b) $y = 2 - 7\sqrt{1 - \dfrac{(x+1)^2}{9}}$

Exercice 9 (sans Mathematica)
Un lithotripteur haut de 15 cm et de 18 cm de diamètre doit être utilisé pour briser un calcul rénal (voir la figure ci-contre). Cet appareil a une forme d'hémi-ellipsoïde et des ondes de choc sous-marines à haute énergie seront émises à partir du foyer F. Calculer la distance entre le sommet S du lithotripteur et le calcul.



Exercice 10 (sans Mathematica)
Le plafond d'un galerie à écho à la forme d'un hémi-ellipsoïde[3], le point le plus haut du plafond se trouvant à 4.5 m du plancher qui est de forme elliptique et les sommets de l'ellipse formant le périmètre du plancher se trouvent à 15 m l'un de l'autre. Deux personnes veulent expérimenter la propriété de réflexion des ellipses. Pour cela, elles se placent chacune sur un des foyers du plancher elliptique. A quelle distance du sommet le plus proche leurs pieds se trouvent-t-elles ?

Exercice 11 (avec Mathematica)
Un pont doit être construit par-dessus une rivière large de 60 m. L'arche du pont doit être en forme de demi-ellipse et doit être construite de telle sorte qu'un bateau de moins de 15 m de large et 9 m de haut puisse passer sans encombre au-dessous de l'arche, comme le montre la figure ci-contre. Déterminer la hauteur de l'arche au milieu du pont.



Exercice 12 (sans/avec Mathematica)
Déterminer les coordonnées du point de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ qui est le plus proche de la droite d'équation $2x - 3y + 25 = 0$.

(a) Résoudre l'exercice sans utiliser Mathematica.

(b) Résoudre l'exercice en utilisant Mathematica.

3. Un ellipsoïde est la surface engendrée par la rotation d'une ellipse autour de son axe focal. Les foyers de l'ellipse correspondent aux foyers de l'ellipsoïde.

***Exercice* 13 (sans Mathematica)**
Nous considérons l'hyperbole de la figure 17.

(a) En s'inspirant de ce qui a été fait pour l'ellipse, montrer que pour tout point P de l'hyperbole nous avons

$$PF' - PF = \begin{cases} k & \text{si } P \text{ est sur la nappe de gauche du cône de révolution,} \\ -k & \text{si } P \text{ est sur la nappe de droite du cône de révolution,} \end{cases}$$

où F est le foyer de gauche de l'hyperbole, F' celui de droite et k une constante positive.

(b) Montrer que k est égale à la longueur de l'axe transverse de l'hyperbole.

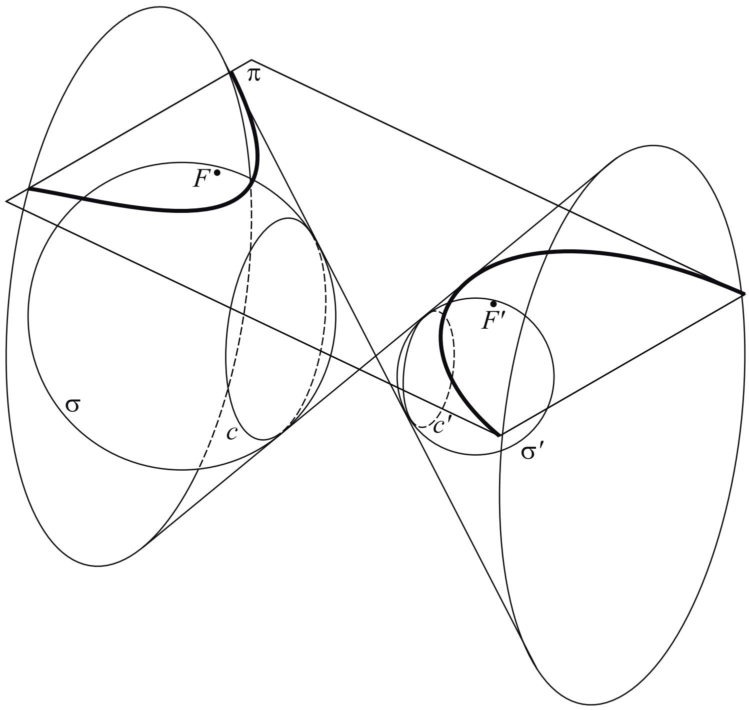


FIGURE 17 – exercice 13

***Exercice* 14 (sans Mathematica)**
Soit $c > a > 0$. Montrer que pour une point $P(x;y)$ de l'axe focal de l'hyperbole de foyers $F(c;0),\ F(-c;0)$ et de sommets $A(a;0),\ A'(-a;0)$ on a :

$$|PF - PF'| \begin{cases} < 2a & \text{si } P \text{ est entre les sommets,} \\ = 2a & \text{si } P \text{ est sur un sommet,} \\ > 2a & \text{sinon.} \end{cases}$$

***Exercice* 15 (sans Mathematica)**
Soit $c > a > 0,\ F(c;0),\ F'(-c;0)$ et $P(x;y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer l'équivalence suivante :

$$|PF - PF'| = 2a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ avec } b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

***Exercice* 16 (sans Mathematica)**
Soit $a, b > 0$. Montrer que l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ possède deux asymptotes dont les équations sont
$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$
Indication : décomposer le graphe de l'hyperbole en deux graphes qui sont des graphes de fonctions puis calculer les équations des asymptotes de ces fonctions.

***Exercice* 17 (sans Mathematica, facultatif avec)**
Pour chaque cas, décider, sans utiliser Mathematica, si l'équation correspond à une hyperbole. Dans l'affirmative, déterminer les caractéristiques de celle-ci (coordonnées des foyers et des sommets, équation des asymptotes).
Facultatif : tracer le graphe de l'équation avec Mathematica afin de tester vos résultats.

(a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

(b) $y^2 - \dfrac{x^2}{24} = 1$

(c) $16x^2 - 36y^2 = 1$

(d) $\dfrac{(y+2)^2}{9} - \dfrac{(x+2)^2}{4} = 1$

(e) $144x^2 - 25y^2 + 864x - 100y - 2404 = 0$

(f) $4y^2 - x^2 + 40y - 4x + 60 = 0$

***Exercice* 18 (sans Mathematica)**
Pour chaque cas, déterminer l'équation de l'hyperbole remplissant les conditions données :

(a) Sommets $(\pm 3; 0)$, foyers $(\pm 5; 0)$.

(b) Sommets $(-2; -2)$ et $(-2; -4)$, foyers $(-2; -1)$ et $(-2; -5)$.

(c) Intersections avec l'axe des abscisses en ± 5, équations des asymptotes $y = \pm 2x$.

(d) Passe par $(4; \frac{13}{3})$ et asymptotes d'équation $y = \pm\frac{2}{3}x + 1$

***Exercice* 19 (sans Mathematica)**
Pour chaque cas, déterminer la nature ainsi que les caractéristiques du graphe de la fonction.

(a) $y = \dfrac{3}{7}\sqrt{x^2 + 49}$

(b) $y = -\dfrac{9}{4}\sqrt{x^2 - 16}$

***Exercice* 20 (sans/avec Mathematica)**

(a) Sachant que le graphe de $y = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$, est une hyperbole, déterminer la dimension de l'axe transverse ainsi que les coordonnées des foyers.

(b) Afin de valider le résultat du point précédent, tracer à l'aide de Mathematica, dans un même repère, le graphe de $y = \frac{1}{x}$ et le graphe de l'hyperbole ayant les foyers et l'axe transverse calculés.

***Exercice* 21 (sans Mathematica)**
Soit une hyperbole d'excentricité e, dont l'origine est un sommet, d'axe focale horizontale et dont $F(x_F; 0)$, $x_F > 0$, est un foyer. Sachant que le second sommet a les coordonnées $(\frac{2x_F}{1-e}; 0)$, montrer que $e = \frac{c}{a}$, où $2c$ est la distance focale et $2a$ la longueur de l'axe transverse.

***Exercice* 22 (sans Mathematica)**
Soit une hyperbole centrée à l'origine, d'axe focal horizontal avec une distance entre les foyers $2c$ et d'axe transverse de longueur $2a$. Sachant que l'excentricité vaut $e = \frac{c}{a}$ montrer que les directrices ont pour équations $x = \pm\frac{a^2}{c}$.

***Exercice* 23 (avec Mathematica)**
Soit une branche d'hyperbole de foyer F. Montrer que le point de cette branche qui est le plus proche de F est le sommet de la branche.
Indication : décomposer le graphe de l'hyperbole en deux graphes qui sont des graphes de fonctions.

***Exercice* 24 (sans Mathematica)**
Suivant la valeur de son énergie mécanique, une comète peut avoir une trajectoire elliptique, parabolique ou hyperbolique dont le soleil est un foyer. Si la comète parcourt une trajectoire parabolique ou hyperbolique, elle va passer une fois près du Soleil et n'y retournera plus jamais. Nous supposons que les coordonnées, en mètres, de la trajectoire d'une comète satisfont l'équation

$$\frac{x^2}{26 \cdot 10^{20}} - \frac{y^2}{18 \cdot 10^{20}} = 1 \text{ pour } x > 0.$$

(a) Déterminer les coordonnées du soleil.
(b) Sachant que pour que la comète maintienne sa trajectoire hyperbolique, son énergie mécanique doit être strictement positive, déterminer la vitesse qu'elle doit avoir lorsqu'elle est au point de sa trajectoire le plus proche de soleil.

***Exercice* 25 (sans Mathematica)**
En partant de la définition des coniques par l'excentricité (définition 1.10), démontrer que l'équation d'une parabole de sommet $(0; 0)$ dont le foyer se trouve sur la partie positive de l'axe des x à une distance $q > 0$ de l'origine est $y^2 = 4qx$.
Indication : commencer par déterminer les coordonnées du foyer ainsi que l'équation de la directrice.

***Exercice* 26 (sans Mathematica)**
Pour chaque cas, déterminer les coordonnées du foyers et du sommet de la parabole.

(a) $x^2 = -3y$
(b) $4(y - 2)^2 = (x - 3)$
(c) $y = x^2 - 4x + 2$
(d) $y^2 + 14y + 4x + 45 = 0$

***Exercice* 27 (sans Mathematica)**
Pour chaque cas, déterminer l'équation de la parabole remplissant les conditions données :
(a) Sommet $(1; 0)$, foyer $(6; 0)$.
(b) Foyer $(-2; 0)$, directrice $x = 2$.
(c) Sommet $(1; -2)$, foyer $(1; 0)$
(d) Axe focal parallèle à l'axe des abscisses, sommet $(-3; 5)$, passe par le point $(5; 9)$.

***Exercice* 28 (sans Mathematica)**
Soit la parabole p de foyer F et d'équation

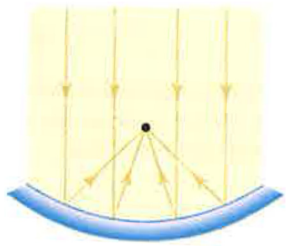
$$p : x^2 = 4ay, \quad a \in \mathbb{R}^*,$$

P un point de cette parabole, t la tangente à p en P, Q la projection orthogonale de P sur la directrice de p et R l'intersection de t avec O_y.

(a) Montrer par calcul que $FP = FR$.

(b) Déduire de l'énoncé précédent que t est la bissectrice de l'angle $\widehat{FPQ}$.

***Exercice* 29 (sans Mathematica)**
Le miroir d'un télescope à réflexion a la forme d'un paraboloïde (limité) de 20 cm de diamètre et de 2.5 cm de profondeur (voir le croquis ci-contre). A quelle distance du centre du miroir la lumière va-t-elle se concentrer ?



***Exercice* 30 (sans/avec Mathematica)**
Soit la courbe c d'équation

$$c : \frac{x|x|}{25} + \frac{y|y|}{9} = 1.$$

(a) Tracer le graphe de c sans utiliser Mathematica et déterminer sa nature.

(b) Vérifier votre résultat avec Mathematica.

***Exercice* 31 (sans/avec Mathematica)**
Soit $m \in \mathbb{R}^*$, h l'hyperbole et d_m la droite d'équations

$$h : y^2 = x^2 + 4x, \quad d_m : y = m$$

et $M,\ M'$ les points d'intersection des graphes de h et d_m.

(a) Sans utiliser Mathematica,...

  (i) ... tracer le graphe de h (avec sommets et asymptotes).

  (ii) ... montrer que le triangle MOM' est rectangle, où O est l'origine du repère.

(b) Illustrer la situation avec Mathematica (utiliser la fonction `Manipulate`).

***Exercice* 32**
Soit $A, B \in \mathbb{R}^*$. Déterminer la nature de la courbe

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$$

on fonction des signes de A et B.

***Exercice* 33 (sans/avec Mathematica)**
Soit la famille de courbes

$$c_m : y^2 = 2x + mx^2 + 1, \quad m \in \mathbb{R}.$$

(a) Sans utiliser Mathematica, déterminer la nature de c_m en fonction de la valeur du paramètre m.
(b) Valider les résultats précédents avec Mathematica.

***Exercice* 34 (sans/avec Mathematica)**
Soit la famille de courbes

$$c_m : x^2 + my^2 + y + m = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

(a) Sans utiliser Mathematica, déterminer la nature de c_m en fonction de la valeur du paramètre m.
(b) Valider les résultats précédents avec Mathematica.

***Exercice* 35 (sans Mathematica)**
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et le triangle rectangle isocèle ABC avec $A(-a;0),\ B(a;0),\ C(0;a)$. Par un point quelconque Q de l'axe des abscisses, on trace la parallèle à BC qui coupe la droite d_{AC} en R. Par R, on mène la parallèle à AB et cette droite coupe la droite d_{QC} en un point P.

(a) Déterminer l'équation du lieu de P lorsque Q parcourt l'axe des abscisses et déterminer la nature de ce lieu.
(b) Facultatif : valider votre résultat à l'aide de GeoGebra.

***Exercice* 36 (sans Mathematica)**
Soit c un cercle de rayon $r > 0$ centré à l'origine,$A(-r;0)$, et $Q \in c \setminus \{A;(0;\pm r)\}$. La tangente en Q coupe l'axe des abscisses en T. La perpendiculaire à l'axe des abscisses en T coupe la droite d_{AQ} en P.

(a) Déterminer l'équation du lieu de P lorsque Q parcourt c et déterminer la nature de ce lieu.
(b) Facultatif : valider votre résultat à l'aide de GeoGebra.

***Exercice* 37 (sans/avec Mathematica)**
Soit la fonction $f(z) = z^2 + 2z,\ z \in \mathbb{C}$.

(a) Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur...
   (i) ...sans utiliser Mathematica.
   (ii) ...en utilisant Mathematica.
(b) Soit les points d'affixe $f(z)$ avec $Re(z) = -2$. Déterminer une équation cartésienne et la nature de l'ensemble de ces points...
   (i) ...sans utiliser Mathematica.
   (ii) ...en utilisant Mathematica.

***Exercice* 38 (sans/avec Mathematica)**
Soit $A(a;0)$ avec $a > 0$, $M \in \mathbb{R}^2$ et B la projection orthogonale de M sur l'axe des ordonnées.

(a) Trouver l'équation du lieu des points M du plan tels que

$$MA^2 + k \cdot MB^2 = a^2, \quad k \in \mathbb{R}.$$

(b) Discuter la nature de ce lieu en fonction de la valeur du paramètre k sans utiliser Mathematica.

(c) Valider le résultat précédent à l'aide de Mathematica

***Exercice* 39 (sans Mathematica)**
Il est possible de montrer que les points $P(x;y)$ de la trajectoire d'un corps « autour » d'une étoile dans un repère centré sur l'étoile satisfont l'équation

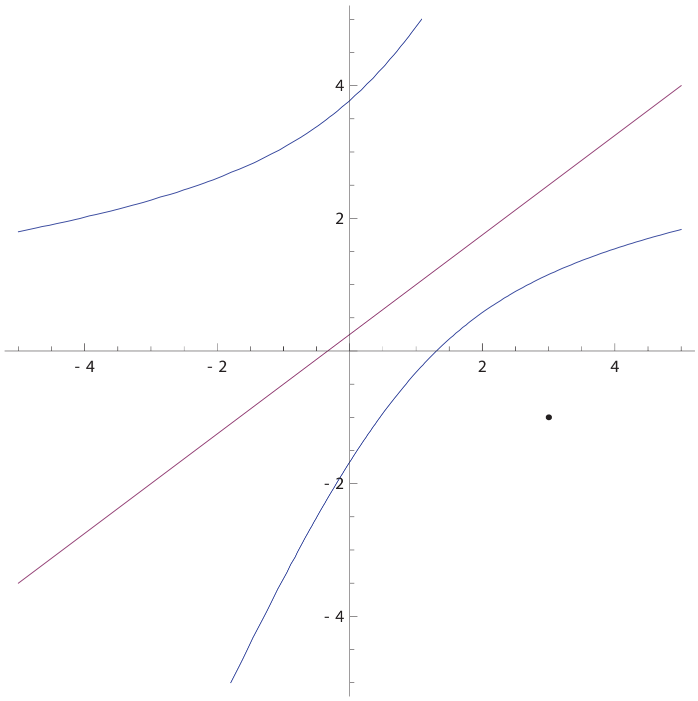
$$L^2 = m^2 MG\sqrt{x^2+y^2} + wx,$$

avec $L \in \mathbb{R}_+^*$, $w \in \mathbb{R}_+$, G la constante de gravitation universelle, M la masse de l'étoile et m la masse du corps.
Montrer que la trajectoire forme une conique dont l'origine est un foyer et déterminer la nature de cette conique en fonction de la valeur de w.

8 Réponses des exercices

$\boxed{2}$ (a) $246 - 174x - 11x^2 + 82y + 96xy - 39y^2 = 0$

(b)



6 (a) Sommets $(\pm 3; 0)$, foyers $(\pm\sqrt{5}; 0)$

(b) Sommets $(0; \pm 4)$, foyers $(0; \pm 2\sqrt{3})$

(c) Sommets $(-1; -4)$ et $(7; -4)$, foyers $(3 \pm \sqrt{7}; -4)$

(d) Sommets $(2; 1)$ et $(2; 7)$, foyers $(2; 4 \pm \sqrt{5})$

(e) L'ensemble des solutions de cette équation est vide et le graphe de celle-ci ne contient aucun point.

(f) Sommets $(5; -3)$ et $(5; 7)$, foyers $(5; 2 \pm \sqrt{21})$

7 (a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

(b) $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$

(c) $\frac{x^2}{16/3} + \frac{y^2}{16} = 1$

(d) $\frac{(x+1)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{39} = 1$

8 (a) Moitié supérieure d'une ellipse de sommets $(0; \pm 11)$ et de foyers $(0; \pm 6\sqrt{2})$.

(b) Moitié inférieure d'une ellipse de $(-1; -5)$ et $(-1; 9)$, de foyers $(-1; 2 \pm 2\sqrt{10})$.

9 27 cm

10 1.5 m

11 $\sqrt{86.4} \cong 9.3\,\text{m}$

12 $(-3; 2)$

17 (a) Sommets $(\pm 3; 0)$, foyers $(\pm\sqrt{13}; 0)$, asymptotes $y = \pm\frac{2}{3}x$.

(b) Sommets $(0; \pm 1)$, foyers $(0; \pm 5)$, asymptotes $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{12}x$.

(c) Sommets $(\pm\frac{1}{4}; 0)$, foyers $(\pm\frac{\sqrt{13}}{12}; 0)$, asymptotes $y = \pm\frac{2}{3}x$.

(d) Sommets $(-2; -5)$ et $(-2; 1)$, foyers $(-2; -2 \pm \sqrt{13})$, asymptotes $y = -5 - \frac{3x}{2}$ et $y = 1 + \frac{3x}{2}$.

(e) Sommets $(-8; -2)$ et $(2; -2)$, foyers $(-16; -2)$ et $(10; -2)$, asymptotes $y = \frac{26}{5} + \frac{12}{5}x$ et $y = -\frac{46}{5} - \frac{12}{5}x$

(f) Sommets $(-2; -8)$ et $(-2; -2)$, foyers $(-2; -5 \pm 3\sqrt{5})$, asymptotes $y = -4 + \frac{x}{2}$ et $y = -6 - \frac{x}{2}$

18 (a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

(b) $(y+3)^2 - \frac{(x+2)^2}{3} = 1$

(c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1$

(d) $\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

19 (a) Branche supérieure de l'hyperbole d'asymptote $y = \pm\frac{3}{7}x$, de sommet $(0; \pm 3)$ et de foyer $(0; \pm\sqrt{58})$.

(b) Moitié inférieurs des branches de l'hyperbole d'asymptote $y = \pm\frac{9}{4}x$, de sommet $(\pm 4; 0)$ et de foyer $(\pm\sqrt{97}; 0)$.

20 (a) Axe transverse $2\sqrt{2}$ et $F(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $F'(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

24 (a) $(6.6 \cdot 10^{10}; 0)$

(b) $v > 130\,000\,\text{m/s}$

26 (a) Sommet $(0; 0)$, foyer $(0; -0.75)$.

(b) Sommet $(3; 2)$, foyer $(\frac{49}{16}; 2)$.

(c) Sommet $(2; -2)$, foyer $(2; -\frac{7}{4})$.

(d) Sommet $(1; -7)$, foyer $(0; -7)$.

27 (a) $y^2 = 20(x-1)$

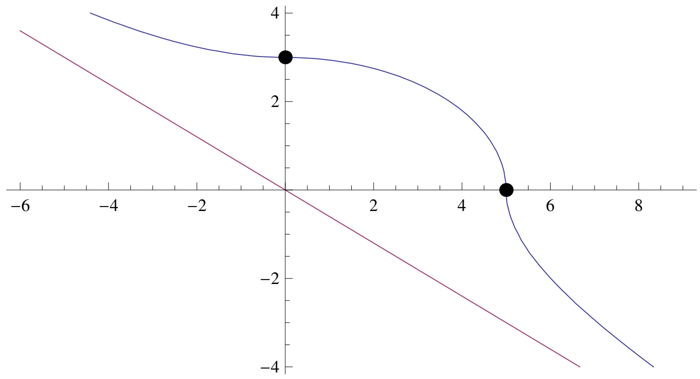
(b) $y^2 = -8x$

(c) $8(y+2) = (x-1)^2$

(d) $(y-5)^2 = 2(x+3)$

29 10 cm

30 Il s'agit de deux demi-branches d'hyperboles reliées par un quart d'ellipse :



32
- $A, B > 0,\ A \neq B$: ellipse (axe focal horizontal si $A > B$, vertical si $A < B$)
- $A, B > 0,\ A = B$: cercle
- $A > 0, B < 0$ ou bien $A < 0, B > 0$: hyperbole (axe focal horizontal si $A > 0$, vertical si $B > 0$)
- $A, B < 0$: ensemble vide

33
- $m < -1$: ellipse ;
- $m = -1$: cercle ;
- $m \in]-1; 0[$: ellipse ;
- $m = 0$: parabole ;
- $m \in]0; 1[$: hyperbole ;
- $m = 1$: deux droites sécantes ;
- $m > 1$: hyperbole.

34
- $m < -\frac{1}{2}$: hyperbole ;
- $m = -\frac{1}{2}$: deux droites sécantes ;
- $m \in]-\frac{1}{2}; 0[$: hyperbole ;
- $m = 0$: parabole ;
- $m \in]0; \frac{1}{2}[$: ellipse (mais jamais de cercle) ;
- $m = \frac{1}{2}$: un unique point ;
- $m > \frac{1}{2}$: ensemble vide.

35 Il s'agit d'une parabole d'équation $\left(y - \frac{3a}{2}\right)^2 = -\frac{a}{2}\left(x - \frac{a}{8}\right)$.

36 Il s'agit d'une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} = 1$ privée de son sommet de coordonnée $(-r; 0)$.

37 (a) Il s'agit d'une hyperbole d'équation $(x + 1)^2 - y^2 = 1$.

(b) Il s'agit d'une parabole d'équation $y^2 = -4x$.

38 (a) $(a - x)^2 + (k + 1)y^2 = a^2$

(b)
- $k < -1$: hyperbole ;
- $k = -1$: parabole ;
- $k \in]-1; 0[$: ellipse ;
- $k = 0$: cercle ;
- $k > 0$: ellipse.

39
- $(m^2MG)^2 - w^2 < 0$: hyperbole ;
- $(m^2MG)^2 - w^2 = 0$: parabole ;
- $(m^2MG)^2 - w^2 > 0$: ellipse.

Il sera montré en 4$^{\text{e}}$ année que $w^2 - (m^2MG)^2$ est un multiple positif de l'énergie mécanique du corps de masse m.

A savoir

- Maîtriser les termes suivants : conique, parabole, hyperbole, ellipse, sphère de Dandelin, directrice, excentricité, foyer, axe focal.
- Démontrer des propriétés d'une conique à partir de sa représentation tridimensionnelle comme intersection d'un plan et d'un cône.
- Démontrer les formes canoniques des équations des trois coniques.
- Déterminer les caractéristiques d'une conique à partir de son équation et inversement.
- Maîtriser les différentes propriétés des coniques vues au cours.
- Résoudre, avec ou sans Mathematica, des problèmes faisant intervenir les éléments précédemment cités, en particulier déterminer la nature du lieu des points du plan satisfaisant une équation de second degré (sans terme mixte, mais éventuellement avec un paramètre).

Références

[1] Carrel, A. *Coniques et géométrie analytique de l'espace.* Matériel scolaire du Collège St-Michel, 1991.

[2] Commissions romandes de mathématiques, de physique et de chimie *Formulaire et tables.* G d'Encre, 2015.

[3] Swokowski, E. W. & Cole, J. A. *Trigonométrie avec géométrie analytique.* LEP, 2001.

9 Corrigés d'une sélection d'exercices

Afin d'avoir un système d'axe usuel et orthonormé lorsque nous travaillerons avec Mathematica, nous modifions les options de la fonction `ContourPlot` de la façon suivante :

In[1]:=
```
SetOptions[ContourPlot,
  AspectRatio -> Automatic,
  Frame -> False,
  Axes -> True
]
```

Corrigé de l'exercice 2

In[2]:=
```
Clear["Global`*"]
F={3,-1}; (*foyer*)
a=3;  (*coefficient de x dans l'équation de la
   directrice*)
b=-4; (*coefficient de y dans l'équation de la
   directrice*)
d[x_,y_]:=a x+b y+1 (*fonction dont les zéros sont sur
   la directrice*)
e=2; (*excentricité*)
```

(a) Nous commençons par définir la fonction calculant la distance entre un point de coordonnées $(x; y)$ et la directrice :

In[3]:=
```
dDir[x_,y_]:=Abs[d[x,y]]/Norm[{a,b}]
```

Nous pouvons alors déterminer l'équation de la conique :

In[4]:=
```
Norm[{x,y}-F]/dDir[x,y]==e (*équation de la conique
   *)
```

Out[4]= $\dfrac{5\sqrt{Abs[-3+x]^2+Abs[1+y]^2}}{Abs[1+3x-4y]} == 2$

Il nous faut encore éliminer les valeurs absolues ainsi que les racines :

In[5]:=
```
Numerator[%[[1]]]^2==(%[[2]]*Denominator[%[[1]]])^2
```

Out[5]= $25(Abs[-3+x]^2+Abs[1+y]^2) == 4Abs[1+3x-4y]^2$

Mathematica ne réduit pas plus les membres de gauche et droite car il ne sait pas que x et y sont des réels. Il faut le lui préciser :

In[6]:=
```
Simplify[%,Element[{x,y},Reals]]
```

Out[6]= $25((-3+x)^2+(1+y)^2) == 4(1+3x-4y)^2$

Nous pouvons alors obtenir l'équation cartésienne de la conique :

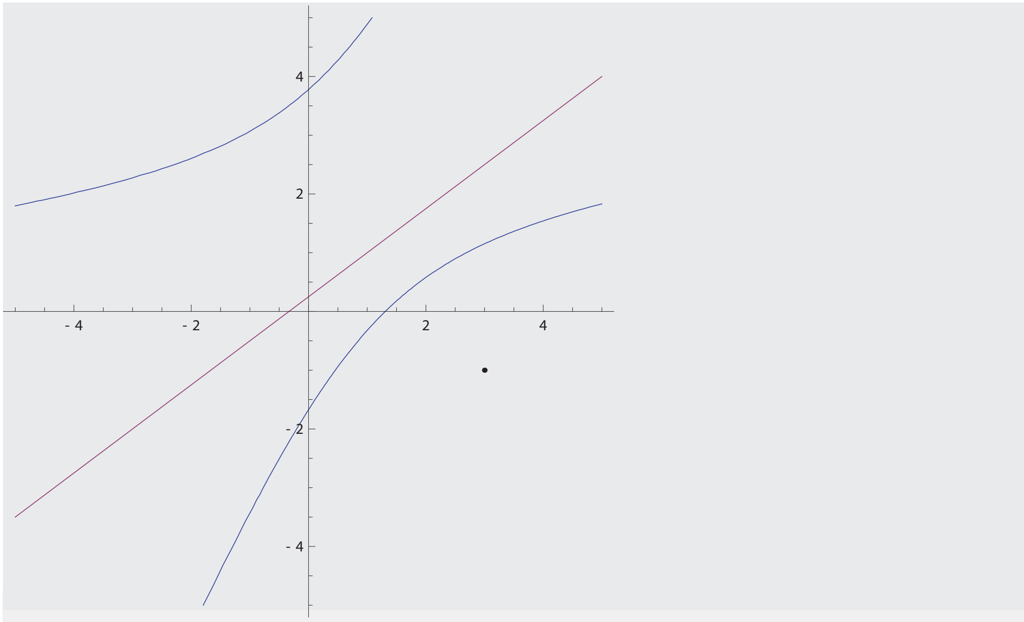
In[7]:=
```
Expand[%[[1]]-%[[2]]] == 0
```

Out[7]= $246 - 174x - 11x^2 + 82y + 96xy - 39y^2 == 0$

(b) In[8]:=

```
ContourPlot[
  {
    Norm[{x,y}-F]/dDir[x,y]==e, (*conique*)
    d[x,y]==0 (*directrice*)
  },
  {x,-5,5},{y,-5,5},
  Epilog -> Point[F],
  AspectRatio -> Automatic
]
```

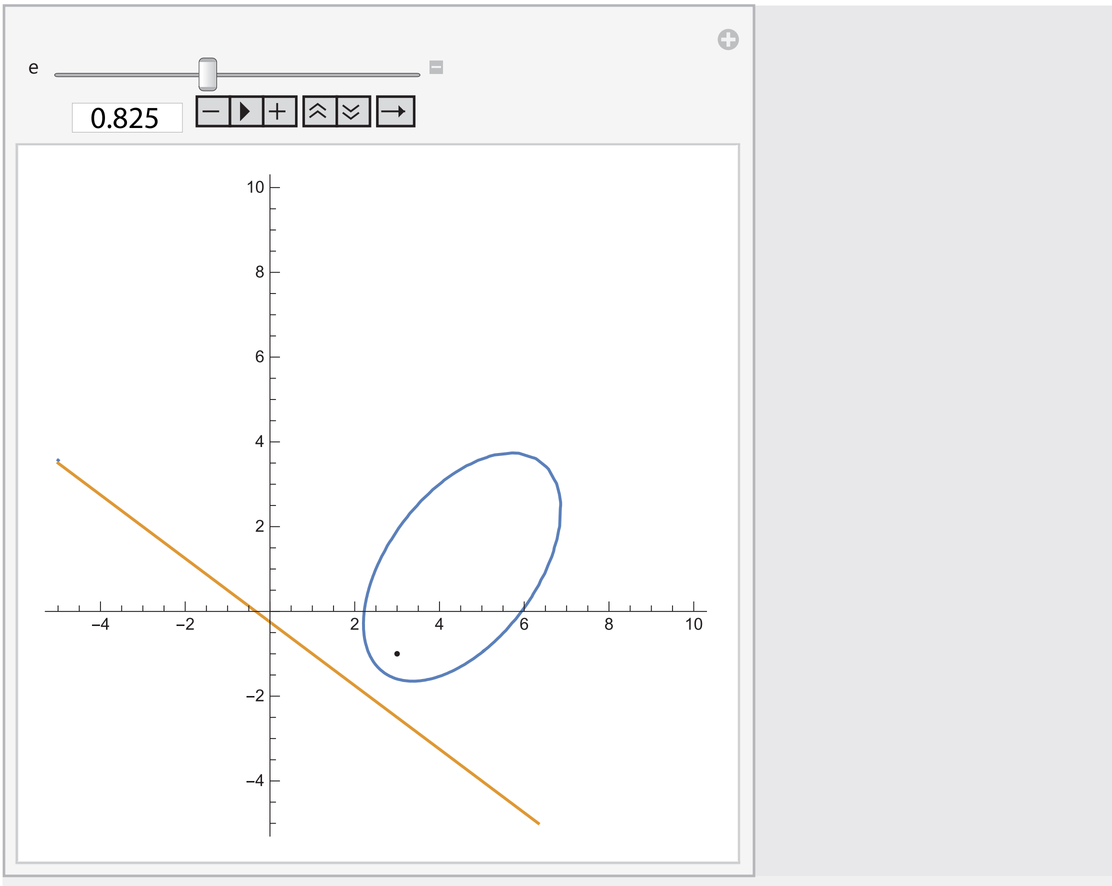
Out[8]=



Corrigé de l'exercice 3

In[9]:=
```
Clear["Global`*"]
F={3,-1}; (* foyer *)
a=3;  (* 1ère composante du vecteur normal de la
   directrice *)
b=-4; (* 2e composante du vecteur normal de la
   directrice *)
d[x_,y_] :=
a x-b y+1 (* fonction dont les zéros sont sur la
   directrice *)
e=2; (*excentricité*)
dDir[x_,y_]:=Abs[d[x,y]]/Norm[{a,b}] (*distance entre un
    point de coordonnées (x;y) et la directrice*)
Manipulate[
  ContourPlot[
    {
      Norm[{x,y}-F]/dDir[x,y]==e, (*conique*)
      d[x,y]==0 (*directrice*)
    },
    {x,-5,10},{y,-5,10},
    Epilog -> Point[F]
  ],
  {e,0,2}
]
```

Out[9]=



Corrigé de l'exercice 4

Données: $a>c>0$, $b=\sqrt{a^2-c^2}$

$P(x;y)\in\mathbb{R}^2$ avec $(x;y)=(a\cdot\cos(\vartheta);\ b\cdot\sin(\vartheta))$

$F(c;0)$, $F'(-c;0)$

A montrer: $PF+PF'=2a$

preuve:

$$PF+PF'=\left\|\begin{pmatrix}c-a\cos(\vartheta)\\0-b\sin(\vartheta)\end{pmatrix}\right\|+\left\|\begin{pmatrix}-c-a\cdot\cos(\vartheta)\\0-b\cdot\sin(\vartheta)\end{pmatrix}\right\|$$

$$=\sqrt{(c-a\cos(\vartheta))^2+(b\sin(\vartheta))^2}+\sqrt{(-c-a\cos(\vartheta))^2+(b\cdot\sin(\vartheta))^2}$$

$b^2=a^2-c^2$

$$=\sqrt{c^2-2ac\cdot\cos(\vartheta)+a^2\cos^2(\vartheta)+a^2\sin^2(\vartheta)-c^2\sin^2(\vartheta)}$$
$$+\sqrt{c^2+2ac\cos(\vartheta)+a^2\cos^2(\vartheta)+a^2\sin^2(\vartheta)-c^2\sin^2(\vartheta)}$$

$a^2\cos^2(\vartheta)+a^2\sin^2(\vartheta)=a^2\underbrace{(\cos^2(\vartheta)+\sin^2(\vartheta))}_{=1}=a^2$

$$=\sqrt{c^2-2ac\cos(\vartheta)+a^2-c^2\sin^2(\vartheta)}$$
$$+\sqrt{c^2+2ac\cos(\vartheta)+a^2-c^2\sin^2(\vartheta)}$$

$\sin^2(\vartheta)=1-\cos^2(\vartheta)$

$$=\sqrt{\cancel{c^2}-2ac\cos(\vartheta)+a^2-\cancel{c^2}+c^2\cos^2(\vartheta)}$$
$$+\sqrt{\cancel{c^2}-2ac\cos(\vartheta)+a^2-\cancel{c^2}+c^2\cos^2(\vartheta)}$$

$$=\sqrt{(a+c\cos(\vartheta))^2}+\sqrt{(a-c\cdot\cos(\vartheta))^2}$$

$$=|a+c\cdot\cos(\vartheta)|+|a-c\cos(\vartheta)|$$

$a+c\cdot\cos(\vartheta)>a-c>0$ et $a-c\cos(\vartheta)>a-c>0$ car $\cos(\vartheta)\in[-1;1]$

$$=a+c\cos(\vartheta)+a-c\cdot\cos(\vartheta)$$

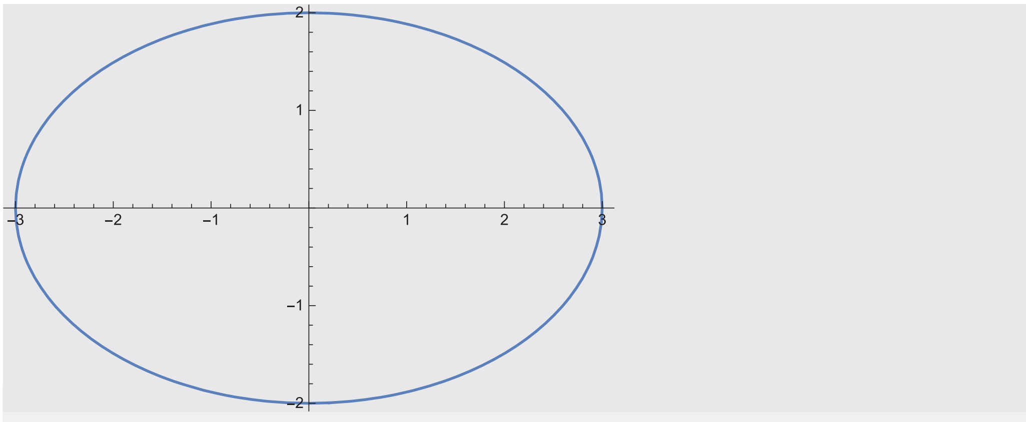
$$=2a$$

Corrigé de l'exercice 6

Nous présentons ici que le travaille avec Mathematica.

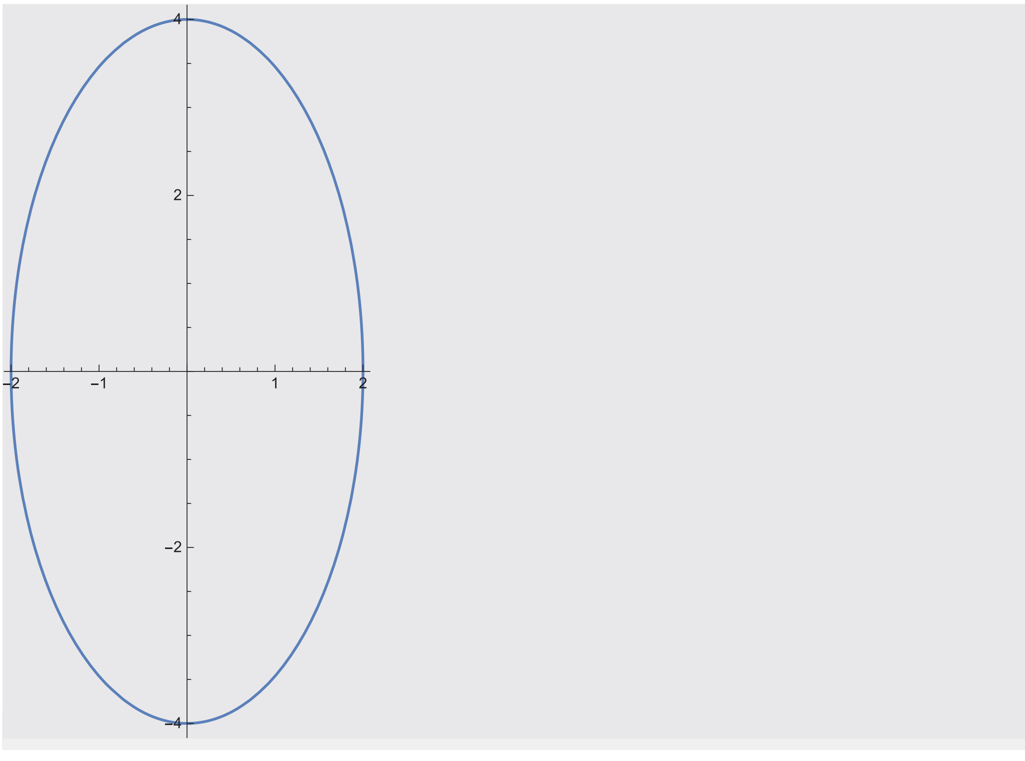
In[10]:=
```
Clear["Global`*"]
```

(a) In[11]:=
```
ContourPlot[x^2/9+y^2/4==1,{x,-3,3},{y,-2,2}]
```

Out[11]=


(b) In[12]:=

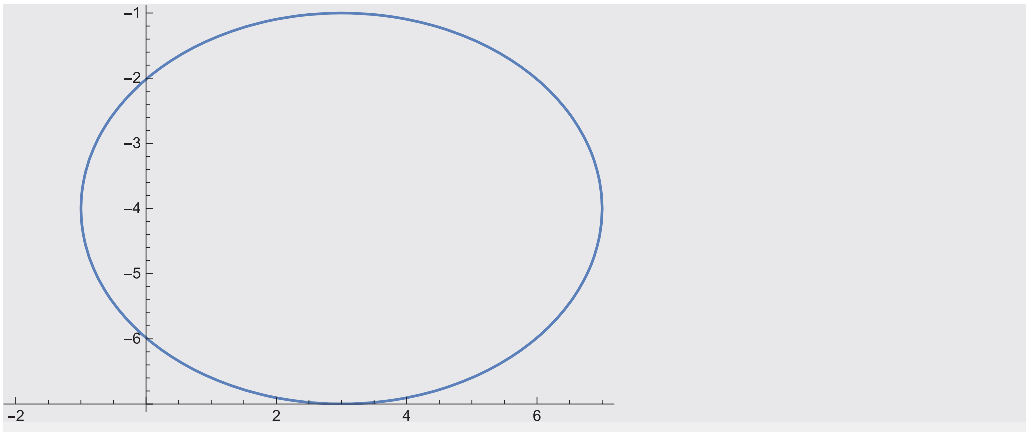
```
ContourPlot[4x^2+y^2==16,{x,-2,2},{y,-4,4}]
```

Out[12]=


(c) In[13]:=

```
ContourPlot[(x-3)^2/16+(y+4)^2/9==1,{x,-2,7},{y
    ,-7,-1}]
```

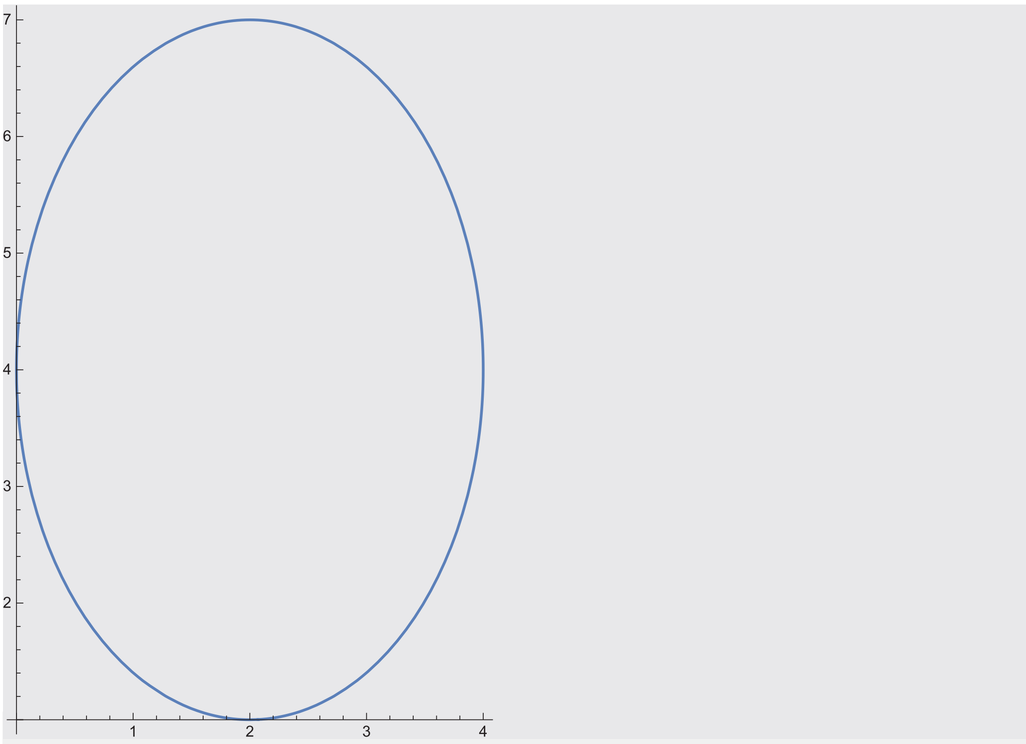
Out[13]=



(d) In[14]:=

```
ContourPlot[9x^2+4y^2-36x-32y+64==0,{x,0,4},{y,1,7}]
```

Out[14]=



(e) In[15]:=

```
Reduce[4x^2+36y^2-24x+36y+81==0,{x,y},Reals]
```

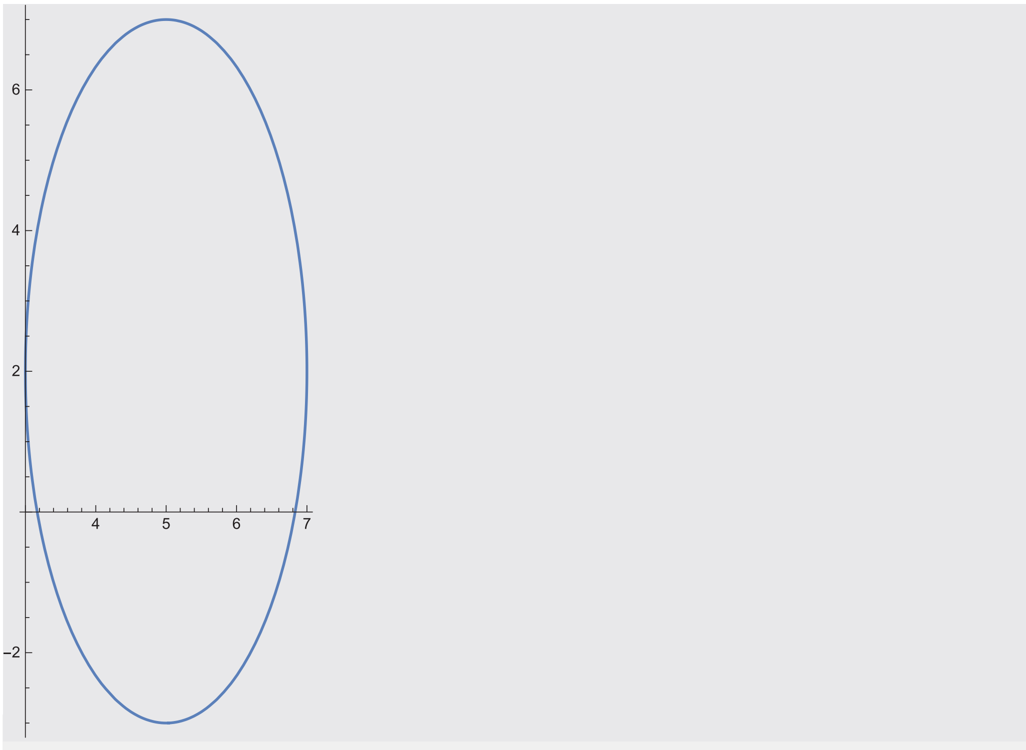
Out[15]=

```
False
```

(f) In[16]:=

```
ContourPlot[25x^2+4y^2-250x-16y+541==0,{x,3,7},{y
   ,-3,7}]
```

Out[16]=



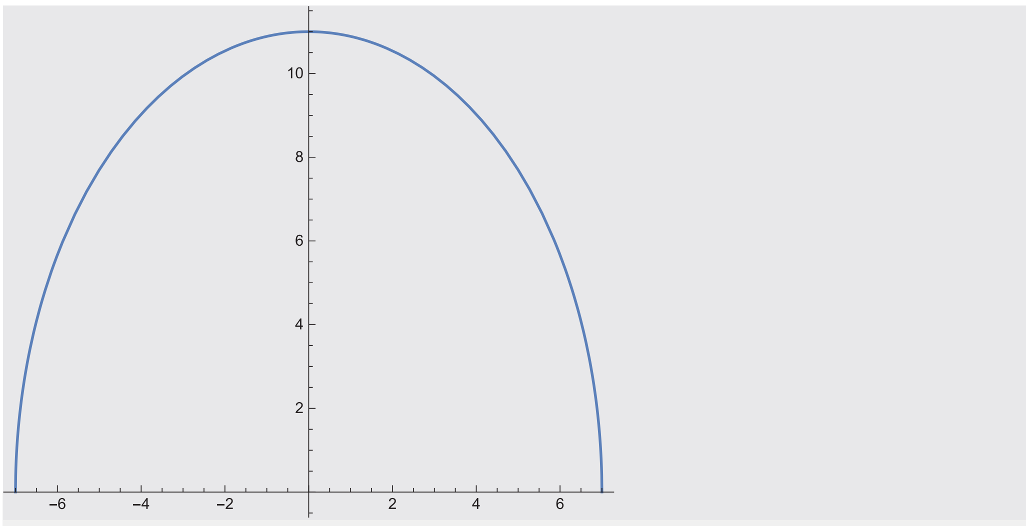
Corrigé de l'exercice 8

Nous présentons ici que le travaille avec Mathematica.

In[17]:=
```
Clear["Global`*"]
```

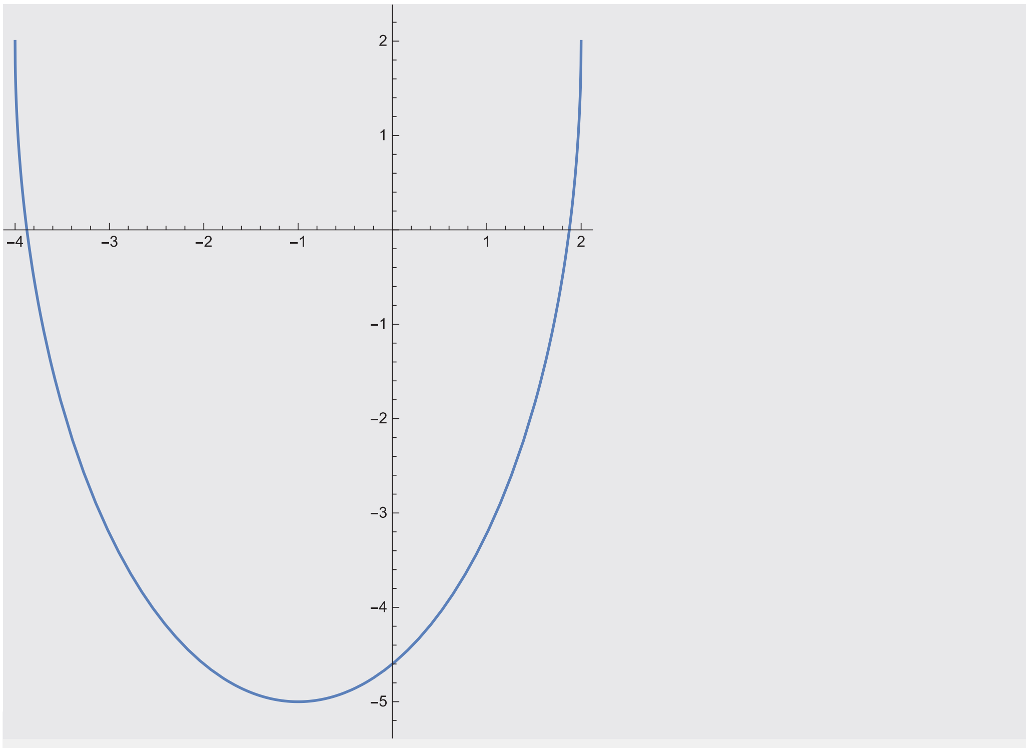
(a) In[18]:=
```
Plot[11 Sqrt[1-x^2/49],{x,-7,7},AspectRatio ->
   Automatic]
```

Out[18]=



(b) In[19]:=
```
Plot[2 - 7 Sqrt[1 - (x + 1)^2/9], {x, -4, 2},
AspectRatio -> Automatic]
```

Out[19]=



***Corrigé de l'exercice* 11**

Nous plaçons un système d'axe dont l'origine se trouve au niveau de l'eau au milieu du pont. Nous avons alors les données suivantes :

In[20]:=
```
Clear["Global`*"]
pt1={-15/2,9};
pt2={15/2,9}; (* points par lesquels doit passer la demi
   -ellipse *)
a=30; (* 1/2 largeur du pont = demi grand axe *)
f[{x_,y_}]:=x^2/a^2+y^2/b^2 == 1 (* équation de l'
   ellipse *)
sol=Flatten[Solve[f[pt1],b]]
```

Out[20]= $\{b \to -12\sqrt{\frac{3}{5}}, b \to 12\sqrt{\frac{3}{5}}\}$

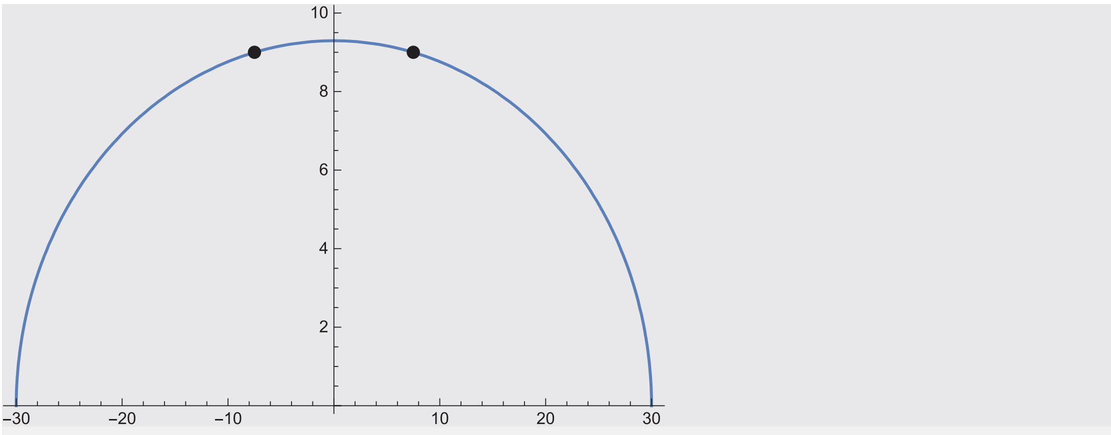
In[21]:=
```
%//N
```

Out[21]= $\{b \to -9.29516, b \to 9.29516\}$

Le pont a donc une hauteur de 9.3 m. Vérifions graphiquement :

In[22]:=
```
ContourPlot[
  Evaluate[f[{x, y}] /. sol],
  {x, -30, 30}, {y, 0, 10},
  AspectRatio -> 1/GoldenRatio,
  Epilog -> {PointSize[0.02], Point[pt1], Point[pt2]}
]
```

Out[22]=

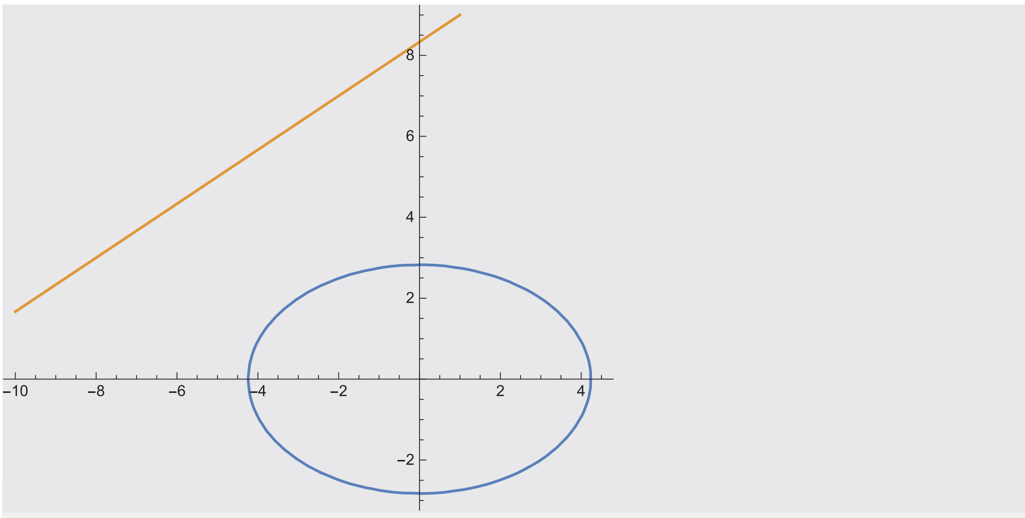


***Corrigé de l'exercice* 12**

(b) Commençons par représenter la situation :

In[23]:=
```
Clear["Global`*"]
e[x_,y_]:=x^2/18+y^2/8
d[c_][x_,y_]:=2x-3y+c
ContourPlot[{e[x,y]==1,d[25][x,y]==0},{x,-10,4.5},{y
    ,-3,9}]
```

Out[23]=



(i) **Résolution sans calcul différentiel**

Nous cherchons la valeur de c telle que la droite d'équation $2x-3y+c = 0$ coupe l'ellipse en un seul point. Pour cela, calculons les coordonnées de l'intersection pour une valeur c quelconque :

In[24]:=
```
intersections=Solve[{e[x,y]==1,d[c][x,y]==0},{x,y
  }]
```

Out[24]=
$$\{\{x \to \frac{1}{4}(-c-\sqrt{144-c^2}), y \to \frac{1}{6}(c-\sqrt{144-c^2})\},$$
$$\{x \to \frac{1}{4}(-c+\sqrt{144-c^2}), y \to \frac{1}{6}(c+\sqrt{144-c^2})\}\}$$

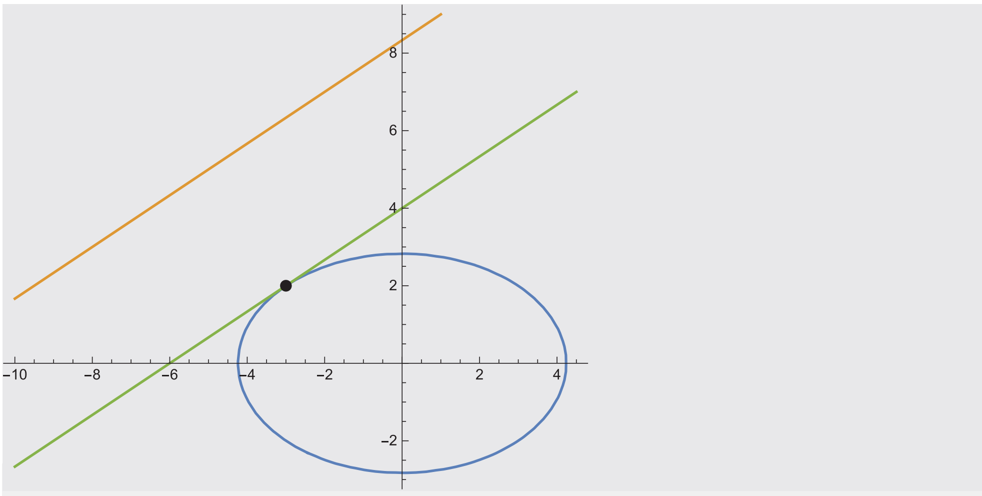
Nous constatons qu'il y a deux intersection si $\Delta = 144 - c^2 > 0$, une seule intersection (c'est le cas qui nous intéresse) si $\Delta = 0$ et aucune intersection si $\Delta < 0$ (si le système avait été résolu à la main, nous serions arrivé à une équation du second degré de discriminant Δ dont le signe détermine le nombre de solutions). Nous devons donc avoir $c = \pm 12$. Calculons les coordonnées des points d'intersection pour ces deux valeurs :

In[25]:=
```
intersections /. {{c -> -12},{c -> 12}}
```

Out[25]=
$$\{\{\{x \to 3, y \to -2\}, \{x \to 3, y \to -2\}\},$$
$$\{\{x \to -3, y \to 2\}, \{x \to -3, y \to 2\}\}\}$$

Pour $c = -12$, nous trouvons le point $(3; -2)$ qui est le plus éloigné de la droite tandis que pour $c = 12$, nous trouvons le point $(-3; 2)$ qui est le point recherché :

In[26]:=
```
ContourPlot[
  {
  e[x,y]==1,
  d[25][x,y]==0,
  d[12][x,y]==0
  },
  {x,-10,4.5},{y,-3,9},
  Epilog -> {PointSize[0.02],Point[{-3,2}]}
]
```

Out[26]=


(ii) **Résolution avec calcul différentiel**

D'après la situation présentée en introduction de la résolution du problème, le point recherché appartient au graphe de la fonction f dont le graphe est la partie de l'ellipse se trouvant dans les cadrans I et II. Nous trouvons cette fonction en isolant y dans l'équation de l'ellipse :

In[27]:=
```
f[x_]:=Sqrt[8(1-x^2/18)]
```

Nous cherchons alors le point $P(a; f(a))$ tel la distance $\delta(P; 2x - 3y + 25 = 0)$ soit minimale. La fonction donnant la distance entre P et la droite considérée contenant une valeur absolue, nous allons minimiser son carré, c'est-à-dire la fonction $g(a) = \big(\delta(P; 2x - 3y + 25 = 0)\big)^2$:

In[28]:=
```
g[a_]:=((2a-3f[a]+25)/Sqrt[2^2+(-3)^2])^2
```

Nous calculons la dérivée de g et cherchons ses zéros :

In[29]:=
```
gg[a_]:=D[g[x],x] /.{x -> a}
sol=Solve[gg[a]==0,a,Reals]
```

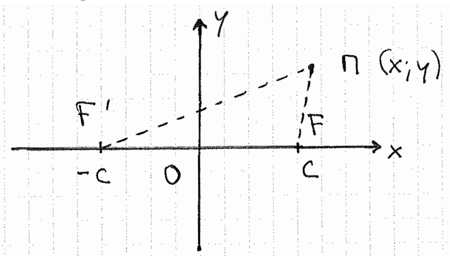
Out[29]= $\{\{a \to 3\}\}$

La géométrie du problème nous garantit qu'il s'agit bien d'un minimum (on pourrait aussi vérifier que la dérivée seconde est positive) et les coordonnées du point recherché sont les suivantes :

In[30]:=
```
{a,f[a]}/. sol[[1]]
```

Out[30]= $\{-3, 2\}$

Corrigé de l'exercice 15



$\overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix} c-x \\ -y \end{pmatrix}$ $\quad \|\overrightarrow{MF}\| = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$

$\overrightarrow{MF'} = \begin{pmatrix} -c-x \\ -y \end{pmatrix}$ $\quad \|\overrightarrow{MF'}\| = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}$

Les équations suivantes sont équivalentes :

$$|MF - MF'| = 2a$$
$$MF - MF' = \pm 2a$$
$$MF = MF' \pm 2a \qquad (1)$$
$$\left(\sqrt{(c-x)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(c+x)^2 + y^2} \pm 2a\right)^2 \qquad (2)$$
$$(c-x)^2 + \cancel{y^2} = (c+x)^2 + \cancel{y^2} \pm 4a\sqrt{(c+x)^2 + y^2} + 4a^2$$
$$(c-x)^2 - (c+x)^2 - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(c+x)^2 + y^2}$$
$$-4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(c+x)^2 + y^2}$$
$$cx + a^2 = \mp a\sqrt{(c+x)^2 + y^2}$$
$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2(c^2 + 2cx + x^2 + y^2)$$
$$c^2x^2 + \cancel{2a^2cx} + a^4 = a^2c^2 + \cancel{2a^2cx} + a^2x^2 + a^2y^2$$
$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec } b^2 = c^2 - a^2$$

■

<u>Remarque :</u> Les équations (1) et (2) sont équivalentes sous la condition $MF' - 2a \geq 0$. Si cette condition n'est pas vérifiée nous devons alors avoir $MF - 2a \geq 0$ (car $|MF - MF'| = 2a$ implique que $MF \geq 2a$ ou $MF' \geq 2a$) et dans ce cas nous isolons $MF' = MF \pm 2a$

***Corrigé de l'exercice* 16**

Le graphe d'une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est composé du graphe des fonctions suivantes :

- $f(x) = \sqrt{b^2 \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)}$
- $g(x) = -f(x)$

Déterminons les équations des asymptotes du graphe de f. Comme

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \sqrt{\lim_{x \to \pm\infty} b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \sqrt{\lim_{x \to \pm\infty} b^2 \frac{x^2}{a^2}} = +\infty$$

il est possible d'avoir des asymptotes obliques $y = mx + h$ pour $x \to -\infty$ et $y = \hat{m}x + \hat{h}$ pour $x \to +\infty$.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{\frac{1}{x^2}} \cdot \sqrt{b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} \quad \left(\text{car } x = -\sqrt{x^2} \text{ pour } x<0\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{b^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= -\sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = -\frac{b}{a}$$

$$h = \lim_{x \to -\infty} f(x) - \left(-\frac{b}{a}x\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt{b^2 \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} + \frac{b}{a}x$$

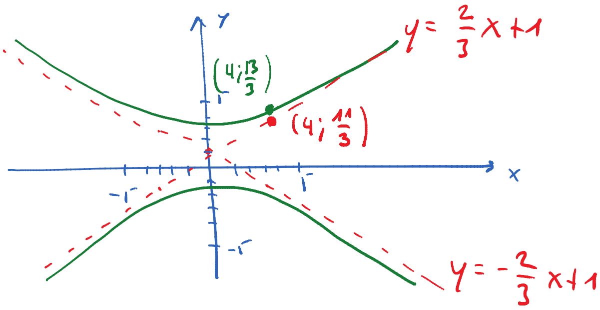
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{b^2x^2 - a^2b^2} + bx}{a} \cdot \frac{\sqrt{b^2x^2 - a^2b^2} - bx}{\sqrt{b^2x^2 - a^2b^2} - bx}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{b^2x^2} - a^2b^2 - \cancel{b^2x^2}}{a\left(\sqrt{b^2x^2 - a^2b^2} - bx\right)} \quad \left(= \frac{-a^2b^2}{a(\infty + \infty)}\right) = 0$$

On a donc une asymptote $y = -\frac{b}{a}x$ pour $x \to -\infty$ pour le graphe de f. De façon analogue, on montre que $y = \frac{b}{a}x$ est une asymptote pour $x \to +\infty$ pour le graphe de f, que $y = \frac{b}{a}x$ est une asymptote de g pour $x \to -\infty$ et que $y = -\frac{b}{a}x$ est une asymptote de g pour $x \to +\infty$ ■

***Corrigé de l'exercice* 18**

(d) Situation :



Equation canonique de l'hyperbole : $\frac{(y-1)^2}{b^2} - \frac{(x-0)^2}{a^2} = 1$

pente des asymptotes : $\pm \frac{2}{3} = \pm \frac{b}{a}$ donc $\boxed{\frac{b}{a} = \frac{2}{3}}$ (1)

$(4; \frac{13}{3})$ appartient à l'hyperbole donc $\boxed{\frac{(13/3-1)^2}{b^2} - \frac{4^2}{a^2} = 1}$ (2)

La résolution du système d'équations (1) et (2) donne

$(a;b) = (3;2)$ ou $(-3;-2)$

et l'équation de l'hyperbole est

$$\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

***Corrigé de l'exercice* 20**

(a) Les sommets A et A' de l'hyperbole sont l'intersection des graphes de $y = \frac{1}{x}$ et $y = x$. Nous avons donc $A(1; 1)$ et $A'(-1; -1)$. Il s'en suit que l'axe transverse mesure

$$AA' = 2\sqrt{2}$$

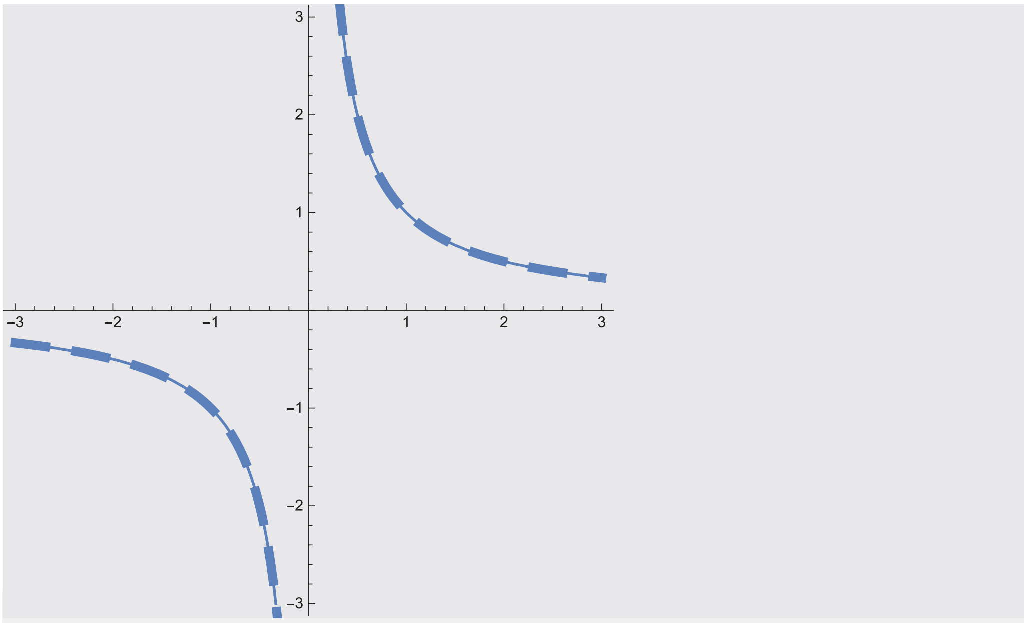
et $a = \frac{1}{2}AA' = \sqrt{2}$. Comme les asymptotes sont perpendiculaires, nous devons avoir $a = b = \sqrt{2}$. La demie-distance focale mesure alors $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2 = FF'$, où F et F' sont les foyers. Ils ont donc comme coordonnées

$$F(\sqrt{2}; \sqrt{2}) \text{ et } F'(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}).$$

(b) In[31]:=

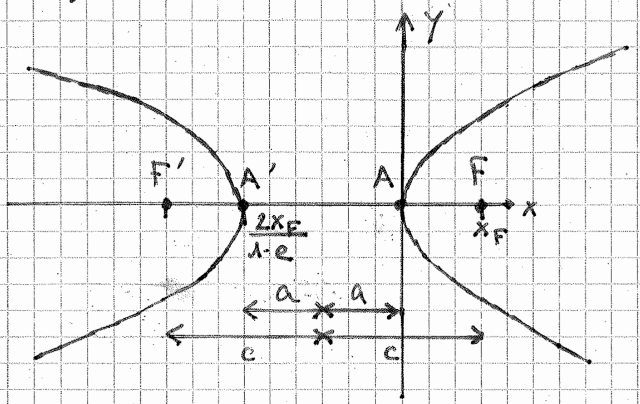
```
Clear["Global`*"]
M={x,y};
F={Sqrt[2], Sqrt[2]};
FF=-F;
hyp=ContourPlot[
  Abs[Norm[M-F]-Norm[M-FF]]==2 Sqrt[2],
  {x,-3,3},{y,-3,3}
];
inv=Plot[
  1/x, {x, -3, 3},
  PlotStyle -> {Thickness[0.015],
  Dashing[{0.05, 0.05}]}
];
Show[{hyp, inv}]
```

Out[31]=



Corrigé de l'exercice 21

Nous avons la situation suivante ($\frac{2x_F}{1-e} < 0$ car $e>1$ pour une hyperbole) :



Nous avons d'une part $2a = AA' = \left|\frac{2x_F}{1-e}\right| = \frac{2x_F}{e-1}$ donc

$$a = \frac{x_F}{e-1}. \qquad (1)$$

D'autre part, nous avons

$$c - a = x_F. \qquad (2)$$

En introduisant (2) dans (1) nous obtenons

$$a = \frac{c-a}{e-1}$$

$$e-1 = \frac{c-a}{a}$$

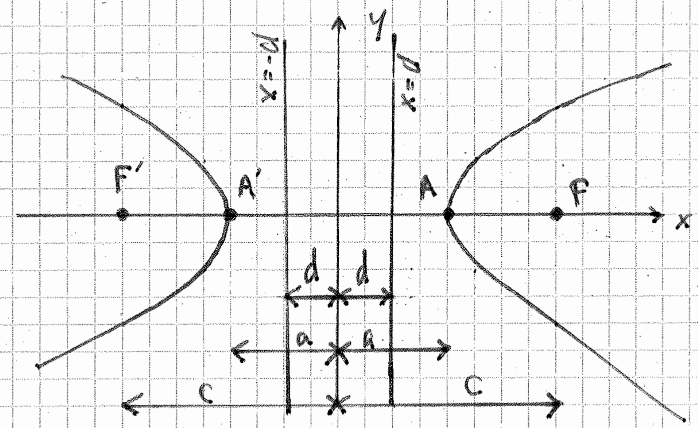
$$e = \frac{c-a}{a} + 1$$

$$= \frac{c}{a}.$$

■

***Corrigé de l'exercice* 22**

Nous avons la situation suivante :



Pour tout point P de l'hyperbole nous devons avoir $PF / \delta(P; x=d) = e$. Cette égalité doit en particulier être vérifiée pour A. Nous avons alors les égalités suivantes :

$$\frac{AF}{\delta(A; x=d)} = e$$

$$\frac{c-a}{a-d} = e$$

$$\frac{c-a}{e} = a-d$$

$$\begin{aligned} d &= a - \frac{c-a}{e} \\ &= \frac{ae - c + a}{e} \\ &= \frac{c - c + a}{\frac{c}{a}} \\ &= \frac{a^2}{c}. \end{aligned}$$

$e = c/a$

$\blacksquare$

***Corrigé de l'exercice* 23**

```
In[32]:= Clear["Global`*"]
```

Nous considérons une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, et nous allons considérer la partie supérieure de la branche de droite. La fonction ayant pour graphe cette courbe est

In[33]:=
```
f[x_]:=b Sqrt[x^2/a^2-1]
```

avec $x \geqslant a$. Le foyer F correspondant à cette branche a pour coordonnées $(\sqrt{a^2+b^2}; 0)$.

In[34]:=
```
xF=\sqrt{a^2 + b^2};
```

Il faut montrer que le point de cette demie-branche qui est le plus proche de F et le sommet $A(a;0)$ de l'hyperbole.

Nous devons donc minimiser la distance MF, où M est un point de la branche de l'hyperbole. Afin de simplifier les calculs, nous allons minimiser MF^2 :

In[35]:=
```
MF2[x_] := (xF - x)^2 + (0 - f[x])^2
Collect[MF2[x], x]
```

Out[35]= $a^2 - 2\sqrt{a^2+b^2}x + \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)x^2$

Cette fonction est définie pour $x \geqslant a$ comme f et son graphe est un arc de parabole convexe. Le sommet de la parabole a pour abscisse

In[36]:=
```
Simplify[-(-2 Sqrt[a^2+ b^2])/(2(1+b^2/a^2))]
```

Out[36]= $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Comme cette abscisse est inférieur à a car $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} < \frac{a^2}{\sqrt{a^2}} = \frac{a^2}{a} = a$, il s'en suit que la fonction `MF2` est strictement croissante et prend son minimum en $x = a$.

***Corrigé de l'exercice* 24**

(a) Le soleil se trouve au foyer $(x_F; 0)$ de l'hyperbole avec $x_F > 0$. Nous avons donc $x_F = \sqrt{26\cdot 10^{20} + 18\cdot 10^{20}} \approx 6.6\cdot 10^{10}$ m et les coordonnées du soleil sont

$$(6.6\cdot 10^{10}; 0).$$

(b) La comète est la plus proche du soleil lorsqu'elle se trouve au sommet de l'hyperbole. La distance séparant la comète du centre du soleil vaut à ce moment $r = x_F - \sqrt{26\cdot 10^{20}} \approx 1.5\cdot 10^{10}$ m. Comme l'énergie mécanique de la comète doit être positive, nous avons alors les inéquations équivalentes suivante où m est la masse de la comète, M la masse du soleil et G la constante de gravitation universelle :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{r} &> 0 \\
v^2 &> \frac{2\cancel{m}^1 MG}{\cancel{m}_1 r} \\
v &> \sqrt{\frac{2MG}{r}} \approx 130\,000\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

***Corrigé de l'exercice* 25**
Les coordonnées du foyer sont $(q;0)$ et l'équation de la directrice est de la forme $x = d$ avec $d < 0$. Le sommet $A(0;0)$ de la parabole doit satisfaire la définition des coniques par l'excentricité (définition 1.10) et, comme l'excentricité d'une parabole vaut 1, nous avons l'équation suivante :

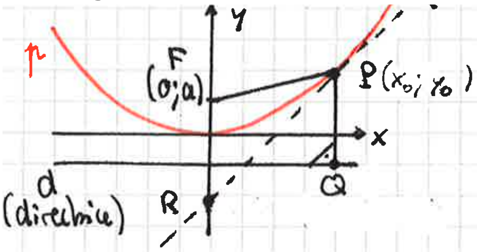
$$1 = \frac{AF}{\delta(A; x = d)} = \frac{q}{-d} \text{ donc } d = -q.$$

Nous déterminons maintenant l'équation cartésienne de la conique. Un point $P(x;y)$ appartient à la conique si et seulement si $1 = \frac{PF}{\delta(P;x=-q)}$. Nous avons donc les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\sqrt{(x-q)^2+y^2}}{|x+q|} \\ (x+q)^2 &= (x-q)^2+y^2 \\ 4qx &= y^2 \end{aligned}$$

□

Corrigé de l'exercice 28



(a) Le graphe de p est le graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{4a}x^2.$$

Comme P appartient au graphe de p, nous devons avoir $P(x_0; f(x_0))$ pour un $x_0 \in \mathbb{R}$. Afin de déterminer les coordonnées de R nous déterminons l'équation de la tangente t à f en P :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y - \frac{1}{4a}x_0^2 = \frac{1}{2a}x_0(x - x_0).$$

Déterminons l'intersection de t avec O_y :

$$y - \frac{1}{4a}x_0^2 = \frac{1}{2a}x_0(0 - x_0)$$
$$y = -\frac{x_0^2}{4a}$$

Les coordonnées de R sont donc $\left(0; -\frac{x_0^2}{4a}\right)$ et nous avons alors :

$$(1)\quad FR^2 = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{x_0^2}{4a} - a \end{pmatrix}\right\|^2 = \frac{x_0^4}{16a^2} + \frac{x_0^2}{2} + a^2,$$

$$(2)\quad PF^2 = \left\|\begin{pmatrix} -x_0 \\ a - \frac{1}{4a}x_0^2 \end{pmatrix}\right\| = x_0^2 + a^2 - \frac{x_0^2}{2} + \frac{x_0^4}{16a^2}$$
$$= \frac{x_0^4}{16a^2} + \frac{x_0^2}{2} + a^2.$$

Il s'en suit que $FR^2 = PF^2$ et donc $FR = PF$. ∎

(b) Il suit de la partie (a) que PFR est un triangle isocèle donc

$$\widehat{FPR} = \widehat{PRF}.$$

D'autre part, comme $\vec{FR} // \vec{PQ}$ nous avons

$$\widehat{PRF} = \widehat{RPQ}.$$

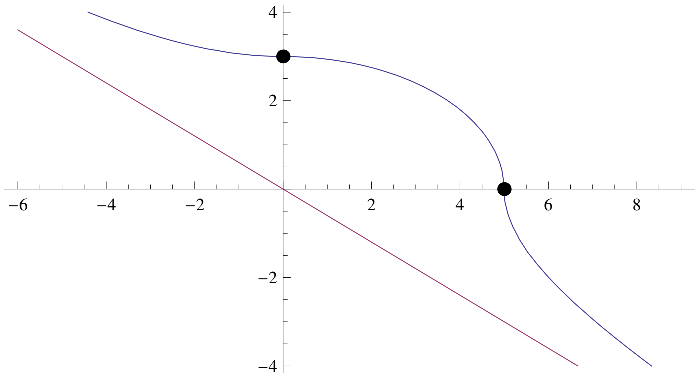
Nous avons donc $\widehat{FPR} = \widehat{RPQ}$, ce qui signifie que t est la bissectrice de $\widehat{FPQ}$.

***Corrigé de l'exercice* 30**

(a) Nous écrivons l'équation de c en fonction du signe de x et y :

$$c : \begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 & \text{pour } x, y \geqslant 0 \\ \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{-\,y^2}{9} = 1 & \text{pour } x \geqslant 0, y < 0 \\ \dfrac{-\,x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 & \text{pour } x < 0, y \geqslant 0 \\ \dfrac{-\,x^2}{25} + \dfrac{-\,y^2}{9} = 1 & \text{pour } x, y < 0 \end{cases}$$

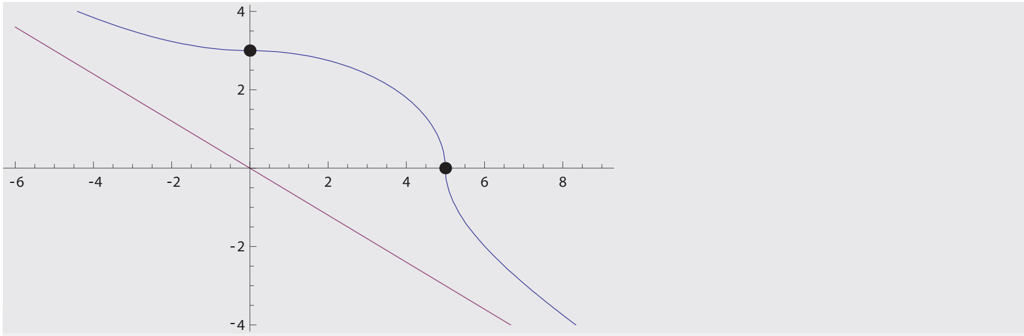
Aucun point ayant ses deux coordonnées négative ne satisfait l'équation de c. Le graphe de c est donc composé de deux demi-branches d'hyperboles reliées par un quart d'ellipse :



(b) In[37]:=

```
Clear["Global`*"]
ContourPlot[
  {x Abs[x]/25+y Abs[y]/9==1,y==-3/5 x},
  {x,-6,9},{y,-4,4},
  Epilog -> {PointSize[0.02],Point[{{5,0},{0,3}}]}
]
```

Out[37]=

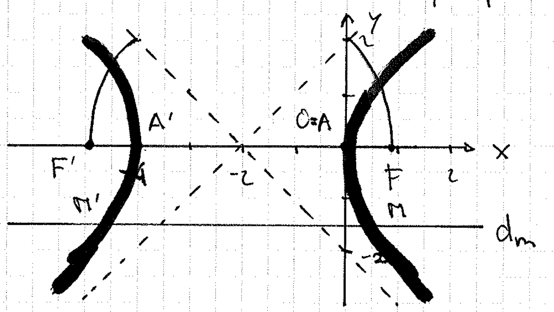


***Corrigé de l'exercice* 31**

(a) (i) $h : (x+2)^2 - y^2 = 4$ (1)

$$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

h est une hyperbole : - de centre $(-2;0)$,
- de sommet $A'(4;0)$ et $A(0;0)$,
- d'asymptotes $y = \pm(x+2)$



(ii) Calculons les coordonnées de M et M'. Nous devons avoir, en partant de l'équation (1) :

$$(x+2)^2 - m^2 = 4$$
$$(x+2)^2 = 4 + m^2$$
$$x = -2 \pm \sqrt{4+m^2}$$

Nous avons donc $M'(-2-\sqrt{4+m^2}\,;m)$, $M(-2+\sqrt{4+m^2}\,;m)$.
Il faut montrer que MOM' est rectangle en O. Pour cela nous allons montrer que $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'} = 0$:

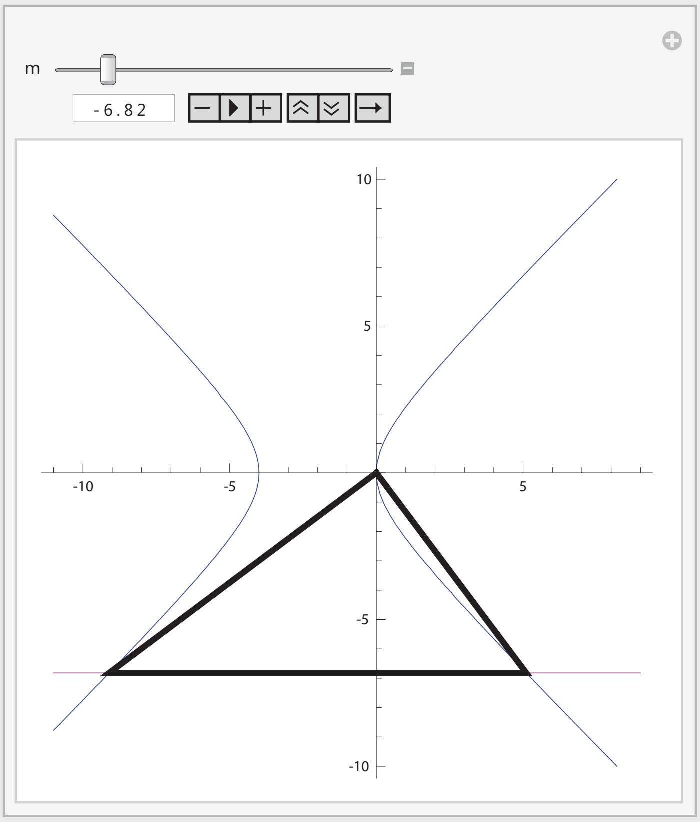
$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{4+m^2} \\ m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2-\sqrt{4+m^2} \\ m \end{pmatrix}$$

$$= 4 - \left(\sqrt{4+m^2}\right)^2 + m^2$$
$$= 4 - 4 - m^2 + m^2 = 0$$

(b) In[38]:=

```
Manipulate[
 ContourPlot[
  {y^2==x^2+4x,y==m},
  {x,-11,9},
  {y,-10,10},
  Epilog -> {
    Thickness[0.01],
    Line[
     Join[
      {{0,0}},
      {x,y} /. NSolve[y^2==x^2+4x && y==m,{x,y},
         Reals],
      {{0,0}}
      ]
     ]}
  ], {m,-9,9}
 ]
```

Out[38]=



Corrigé de l'exercice 33

(a)

$\boxed{m=0}$ $C_0 : y^2 = 2x+1$ parabole

$\boxed{m\neq 0}$ $C_m : mx^2 + 2x - y^2 = -1$

$$m\left(x+\frac{1}{m}\right)^2 - y^2 = \underbrace{-1+\frac{1}{m}}_{=\frac{1-m}{m}}$$

$\boxed{m=1}$ $C_1 : (x+1)^2 - y^2 = 0$

$(x+1)^2 = y^2$

$y = \pm(x+1)$ deux droites sécantes

$\boxed{m\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}}$ $C_m : \dfrac{\left(x+\frac{1}{m}\right)^2}{\frac{1-m}{m^2}} + \dfrac{y^2}{\frac{m-1}{m}} = 1$

Valeurs de m		0		1	
$\mathrm{Sgn}\left(\frac{1-m}{m^2}\right)$	$+$	‖	$+$	‖	$-$
$\mathrm{Sgn}\left(\frac{m-1}{m}\right)$	$+$	‖	$-$	‖	$+$

$\boxed{m\in\,]0;1[\,\cup\,]1;\infty[}$ hyperbole

$\boxed{m\in\,]-\infty;0[}$ ellipse ou cercle ?

cercle ssi $\dfrac{1-m}{m^2} = \dfrac{m-1}{m}$

$1-m = m^2-m$

$1 = m^2$

$\boxed{m=-1}$ cercle

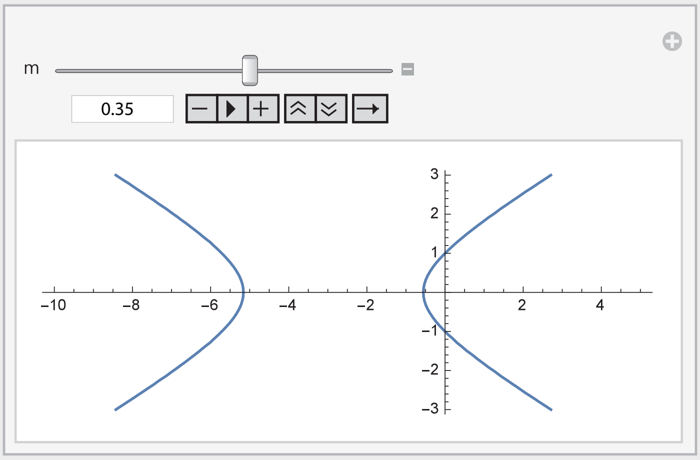
$\boxed{m\in\,]-\infty;0[\,\setminus\{-1\}}$ ellipse

(b)

In[39]:=

```
Manipulate[
 ContourPlot[
   y^2==2x+m x^2+1,{x,-10,5},{y,-3,3}
  ],
 {m,-2,1}
]
```

Out[39]=



***Corrigé de l'exercice* 34**

(a)

$\boxed{m=0}$ $C_0 : x^2+y=0 \to$ parabole

$\boxed{m\neq 0}$ $C_m : x^2 + m\left(y+\frac{1}{2m}\right)^2 = -m + \frac{\cancel{m}^{1}}{4\cancel{m^2}_{m}}$

$$x^2 + m\left(y+\frac{1}{2m}\right)^2 = \frac{1-4m^2}{m}$$

$\frac{1-4m^2}{m} = 0$ pour $m = \pm 1/2$: traitons ces cas particuliers.

$\boxed{m=-1/2}$ $C_{-1/2} : x^2 - \frac{1}{2}(y+1)^2 = 0$

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(y+1)$$

$\to$ deux droites sécantes

$\boxed{m=1/2}$ $C_{1/2} : x^2 + \frac{1}{2}(y+1)^2 = 0$

$$\underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-\tfrac{1}{2}(y+1)^2}_{\leq 0}$$

$\to$ un unique point $((0;-1))$

$\boxed{m\neq \pm 1/2}$ $C_m : \dfrac{x^2}{\frac{1-4m^2}{m}} + \dfrac{\left(y+\frac{1}{2m}\right)^2}{\frac{1-4m^2}{m^2}} = 1$

Valeurs de m		$-1/2$		0		$1/2$	
Sgn $(1-4m^2)/m$	$+$	‖	$-$	‖	$+$	‖	$-$
Sgn $(1-4m^2)/m^2$	$-$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$-$

$\boxed{m\in\ ]-\infty;0[\ \setminus\{-\frac{1}{2}\}}$ hyperbole

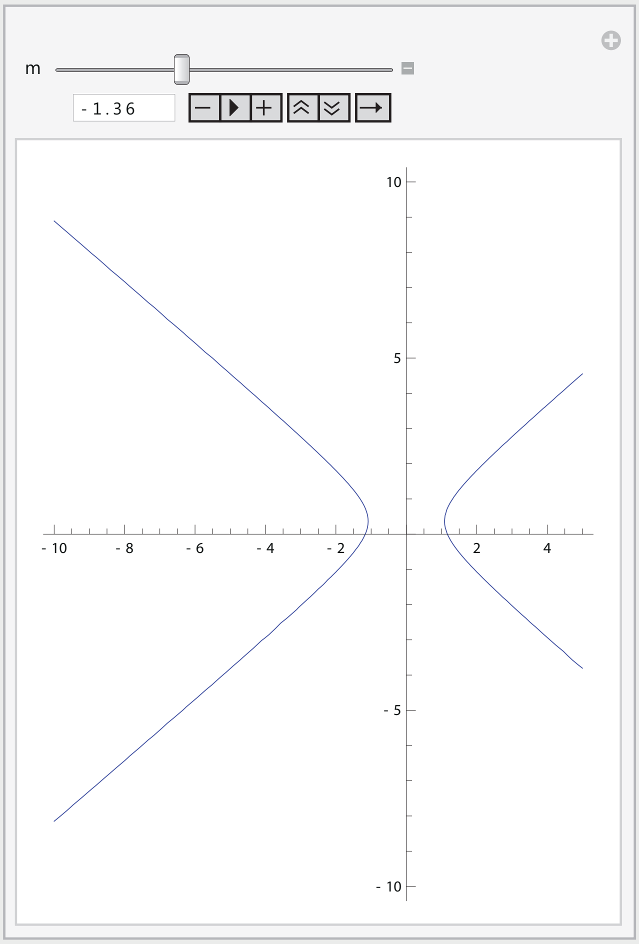
$\boxed{m\in\ ]0;\frac{1}{2}[}$ ellipse (mais pas de cercle car $(1-4m^2)/m \neq (1-4m^2)/m^2$ ici).

$\boxed{m>\frac{1}{2}}$ $C_m = \emptyset$

(b)

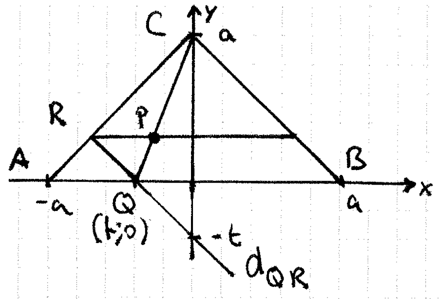
In[40]:=
```
Manipulate[
 ContourPlot[
  x^2+m y^2+y+m==0,{x,-10,5},{y,-10,10}
  ],
 {m,-5,5}
 ]
```

Out[40]=



***Corrigé de l'exercice* 35**

(a)



d_{AC} : $y = x+a$

d_{QR} : $y = -x+t$

Calcul des coordonnées de R :

$$\begin{cases} y = x+a \\ y = -x+t \end{cases}$$

$x+a = -x+t$ donc $2x = t-a$ et $x = \frac{1}{2}(t-a)$.

Nous avons alors $y = \frac{1}{2}(t-a)+a = \frac{1}{2}(t+a)$ et

$$R\left(\frac{t-a}{2}\,;\,\frac{t+a}{2}\right).$$

Il s'en suit que d_{RP} a pour équation

$$d_{RP} : y = \frac{t+a}{2}$$

Déterminons maintenant l'équation de d_{QC}. Nous avons $\overrightarrow{QC} = \begin{pmatrix} -t \\ a \end{pmatrix}$ donc d_{QC} : $ax + ty + c = 0$. Comme $C \in d_{QC}$ il s'en suit que $a \cdot 0 + t \cdot a + c = 0$ et $c = -at$. Nous avons donc

$$d_{QC} : ax + ty - at = 0$$

Calculons les coordonnées de P :

$$\begin{cases} y = \frac{t+a}{2} \longrightarrow t = 2y-a \\ ax+ty-at = 0 \longrightarrow ax + (2y-a)y - (2y-a)a = 0 \end{cases}$$

$$2y^2 - 3ay = -ax - a^2$$

$$2\left(y - \frac{3a}{4}\right)^2 = -ax - a^2 + \frac{9a^2}{8}$$

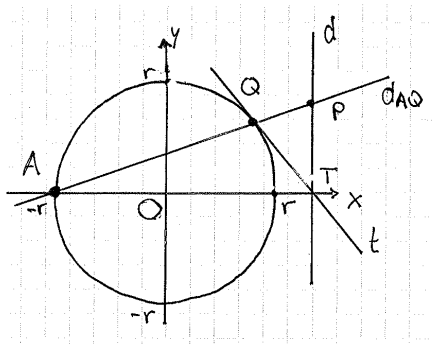
$$\left(y - \frac{3a}{4}\right)^2 = -\frac{a}{2}\left(x - \frac{a}{8}\right)$$

Il s'agit d'une parabole d'équation $\left(y - \frac{3a}{4}\right)^2 = -\frac{a}{2}\left(x - \frac{a}{8}\right)$

(b) Voir fichier GeoGebra déposé sur le réseau de l'école.

***Corrigé de l'exercice* 36**

(a)



Nous avons $Q \in c$ donc

$Q(r\cos(\alpha)\,;\, r\sin(\alpha))$ pour $\alpha \in [0;2\pi[$

Le vecteur $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha) \\ r\sin(\alpha) \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la tangente t à c en Q. L'équation de t est donc de la forme $\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y + c = 0$. Comme $Q \in t$ nous devons avoir

$$\cos(\alpha)\cdot r\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cdot r\sin(\alpha) + c = 0$$
$$c = -r\cos^2(\alpha) - r\sin^2(\alpha)$$
$$= -r\,(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))$$
$$= -r.$$

Il s'en suit que l'équation de t est $t: \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y - r = 0$. Calculons l'intersection de t avec O_y. Nous devons avoir

$$\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)\cdot 0 - r = 0$$
$$x = r/\cos(\alpha).$$

Les coordonnées de t sont donc $T(r/\cos(\alpha)\,;\,0)$. Remarquons que si $\alpha \in \{\pi/2\,;\,3\pi/2\}$, $t \cap O_x = \emptyset$. L'équation de la perpendiculaire d à O_x en T est donc

$$d: x = r/\cos(\alpha).$$

Déterminons maintenant l'équation de d_{AQ}. Comme $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha) + r \\ r\sin(\alpha) \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} \cos(\alpha)+1 \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$, nous avons $d_{AQ}: \sin(\alpha)\cdot x - (\cos(\alpha)+1)\,y + \hat{c} = 0$ et $A \in d_{AQ}$ nous donne

$$\sin(\alpha)(-r) - (\cos(\alpha)+1)\cdot 0 + \hat{c} = 0$$
$$\hat{c} = r\sin(\alpha),$$
$$d_{AQ}: \sin(\alpha)x - (\cos(\alpha)+1)\,y + r\sin(\alpha) = 0.$$

Pour déterminer le lieu de P, il faut réduire le système d'équations suivant à une équation d'inconnues x et y où (x;y) sont les coordonnées de P :

$$\begin{cases} d : x = r/\cos(\alpha) \\ d_{AQ} : \sin(\alpha)x - (\cos(\alpha)+1)\, y + r\sin(\alpha) = 0 \end{cases}$$

De l'équation de d nous tirons $\cos(\alpha) = r/x$ (pas de problème car $x \neq 0$) et $\sin(\alpha) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)} = \pm\sqrt{1 - r^2/x^2}$. Nous introduisons cela dans d_{AQ} et nous avons les équations équivalentes

$$\pm\sqrt{1-r^2/x^2}\; x - (r/x + 1)\, y \pm r\sqrt{1-r^2/x^2} = 0$$

$$\pm\sqrt{1-\frac{r^2}{x^2}}\,(x+r) = \frac{r+x}{x}\, y$$

$$\pm\sqrt{x^2-r^2}\;\frac{x+r}{x} = \frac{x+r}{x}\, y.$$

Comme $Q \neq A$, nous avons $x \neq -r$ et nous pouvons diviser les membres de la dernière équation par $(x+r)/x$:

$$\pm\sqrt{x^2-r^2} = y$$

$$x^2 - r^2 = y^2$$

$$\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} = 1.$$

Le lieu de P est donc une hyperbole privée de son sommet de coordonnées $(-r;0)$.

(b) Voir fichier GeoGebra déposé sur le réseau de l'école.

Corrigé de l'exercice 37

(a) (i)

Posons $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$f(z) = (x+iy)^2 + 2(x+iy)$$
$$= (x^2+2x-y^2) + i(2xy+2y)$$

Pour que $f(z)$ soit imaginaire pur nous devons avoir $\mathrm{Re}\big(f(z)\big) = 0$:

$$x^2 + 2x - y^2 = 0$$
$$(x+1)^2 - y^2 = 1$$

Le lieu du point M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur est donc une <u>hyperbole</u>.

(ii)

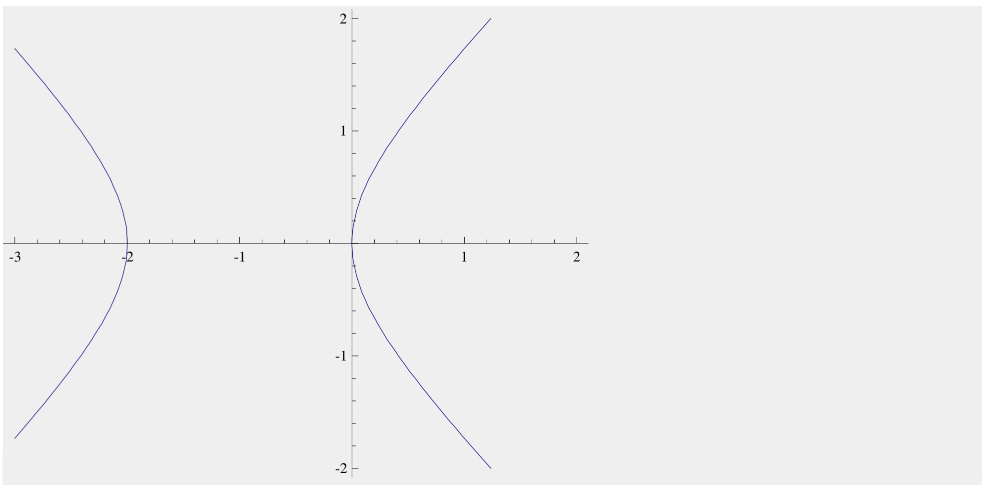
In[41]:=
```
f[z_] := z^2 + 2 z
Reduce[
  {Re[f[x+I y]]==0, Element[{x,y}, Reals]},
  {x,y}
]
```

Out[41]= $(x \leqslant -2 \ \&\& \ (y == -\sqrt{2x+x^2}] \ \ || \ \ y == \sqrt{2x+x^2})) \ \ || \ \ (x \geqslant 0 \ \&\& \ (y == -\sqrt{2x+x^2} \ \ || \ \ y == \sqrt{2x+x^2}))$

Nous devons donc avoir $y = \pm\sqrt{2x+x^2}$ et $x \notin]-2;0[$ ce qui correspond à une l'hyperbole d'équation $(x+1)^2 - y^2 = 1$ (mêmes calculs qu'en (a)(i)). Nous pouvons valider ce résultat de la façon suivante :

In[42]:=
```
ContourPlot[
  Re[f[x+I y]]==0,{x,-3,2},{y,-2,2}
 ]
```

Out[42]=



(b) (i) Posons $z = -2 + it$, $t \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$f(z) = (-2+it)^2 + 2(-2+it) = t^2 - 2it$$

Pour déterminer le lieu des points d'affixe $f(z)$ nous posons $x = Re(f(z))$, $y = Im(f(z))$ et nous avons alors le système d'équations paramétriques suivants :

$$\begin{cases} x = -t^2 \longrightarrow x = -\dfrac{y^2}{4} \\ y = -2t \rightarrow t = -y/2 \end{cases}$$

L'équation des points d'affixe $f(z)$ lorsque $Re(z) = -2$ est donc $\underline{\underline{y^2 = -4x}}$, ce qui correspond à une parabole.

(ii) Si $Re(z) = -2$ alors $z = -2+it, t \in \mathbb{R}$. Pour déterminer l'équation de la courbe, nous procédons de la façon suivante :

In[43]:=
```
Reduce[
  {
  x==Re[f[-2+t I]],
  y==Im[f[-2+t I]],
  Element[{x,y,t}, Reals]
  },
  y]
```

Out[43]=
```
t∈Reals &&
x==-4-2Im[t]+Re[(-2+It)^2] &&
y==Im[(-2+I t)^2]+2Re[t]
```

In[44]:=
```
FullSimplify[%]
```

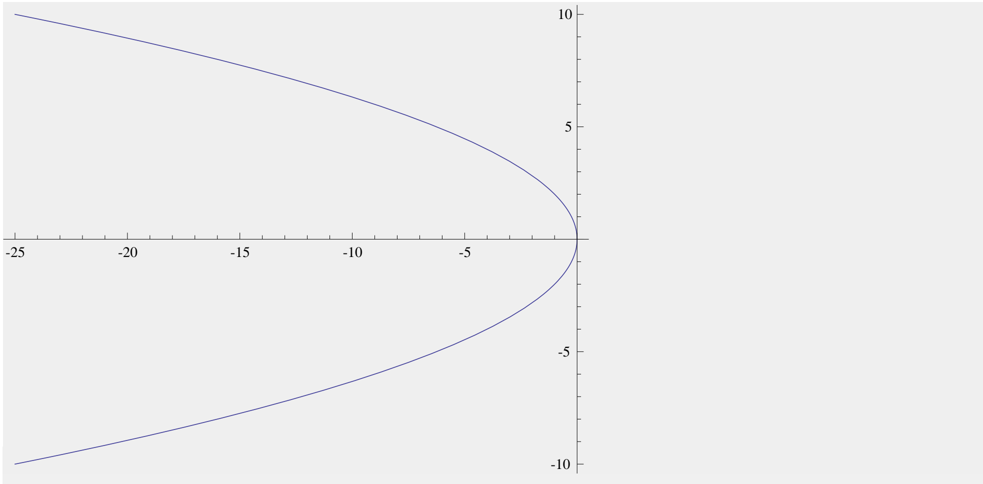
Out[44]=
```
t∈Reals && t^2+x==0 && 2t+y==0
```

De la dernière équation, nous tirons $t = -(y/2)$ que nous introduisons dans la première pour obtenir $x + y^2/4 = 0$ donc $y^2 = -4x$: l'ensemble recherché est une parabole.

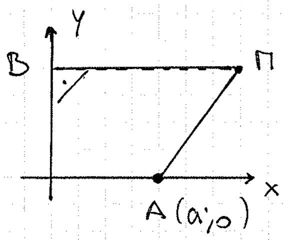
Nous pouvons valider ce résultat de la façon suivante :

In[45]:=
```
ParametricPlot[
  {Re[f[-2+t I]],Im[f[-2+t I]]},
  {t,-5,5}
]
```

Out[45]=



***Corrigé de l'exercice* 38**



Posons $M(x;y)$. Nous avons alors $B(0;y)$ et $\overrightarrow{MA}=\begin{pmatrix}a-x\\-y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MB}=\begin{pmatrix}-x\\0\end{pmatrix}$.
Comme $MA^2+k\,MB^2=a^2$ nous devons avoir les équations suivantes :

$$(a-x)^2+y^2+kx^2=a^2$$

$$\underline{\underline{(k+1)x^2-2ax+y^2=0}} \qquad (*)$$

$\boxed{k=-1}$ L'équation $(*)$ devient $-2ax+y^2=0$ et le lieu de M est une <u>parabole</u>.

$\boxed{k\neq -1}$ $$(k+1)\left(x-\frac{a}{k+1}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{k+1}$$

Comme $a\neq 0$, nous pouvons diviser les membre de l'équation par $a^2/(k+1)$:

$$\frac{\left(x-\frac{a}{k+1}\right)^2}{\frac{a^2}{(k+1)^2}}+\frac{y^2}{\frac{a^2}{k+1}}=1$$

$\boxed{k<-1}$ Le lieu de M est une hyperbole

$\boxed{k>-1}$ Le lieu de M est un cercle si

$$\frac{a^2}{(k+1)^2}=\frac{a^2}{k+1}$$

$$(k+1)=(k+1)^2$$

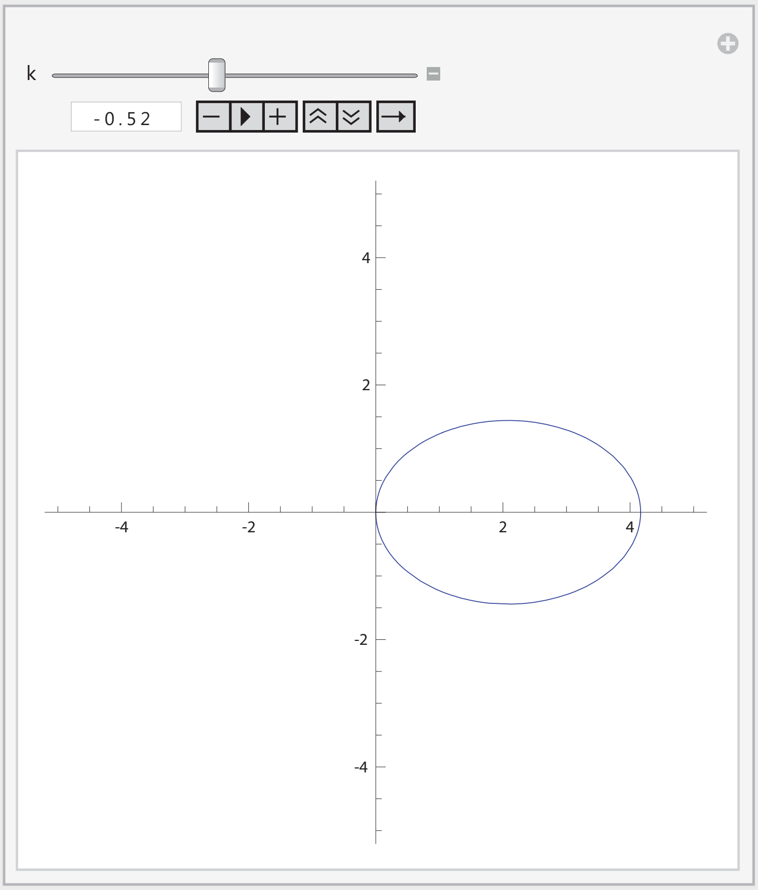
$$0=k^2+k$$

$$0=k(k+1).$$

Par conséquent le lieu de M est un <u>cercle</u> si $k=0$ et est une <u>ellipse</u> si $k\in\,]-1;\infty[\,\setminus\{0\}$

In[46]:=
```
a = 1
Manipulate[
 ContourPlot[
  (a -x)^2+y^2+k x^2==a^2,
  {x,-5,5},{y,-5,5}
  ], {k,-5,5}
 ]
```

Out[46]=



Corrigé de l'exercice 39

Posons $\alpha = GMm^2$. Nous avons alors les équations suivantes :

$$L^2 = \alpha\sqrt{x^2+y^2} + wx \qquad (1)$$

$$(L^2 - wx)^2 = \alpha^2 (x^2+y^2) \qquad (2)$$

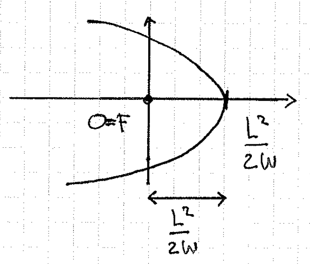
$$L^4 = (\alpha^2 - w^2)x^2 + 2L^2wx + \alpha^2 y^2 \qquad (3)$$

$\boxed{\underbrace{\alpha^2 - w^2}_{=:-k} = 0}$

$$L^4 = 2L^2wx + \overbrace{\alpha^2}^{= w^2 \text{ car } \alpha^2 = w^2} y^2$$

$$-2L^2w\left(x - \frac{L^4}{2L^2w}\right) = w^2 y^2$$

$$-\underbrace{\frac{2L^2w}{w}}_{= 4\cdot\frac{L^2}{2w}}\left(x - \frac{L^2}{2w}\right) = y^2$$



parabole dont l'origine est le foyer

$\boxed{\alpha^2 - w^2 \neq 0}$ (3) est équivalente aux équations suivantes :

$$\underbrace{L^4 + \frac{L^4w^2}{\alpha^2 - w^2}}_{= L^4\alpha^2/(\alpha^2 - w^2)} = (\alpha^2 - w^2)\left(x + \frac{L^2w}{\alpha^2 - w^2}\right)^2 + \alpha^2 y^2$$

$$1 = \frac{\left(x + \frac{L^2w}{\alpha^2 - w^2}\right)^2}{\frac{L^4\alpha^2}{(\alpha^2 - w^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{L^4}{\alpha^2 - w^2}} \qquad (4)$$

$\boxed{\alpha^2 - w^2 > 0}$ $(k<0)$ Pour avoir un cercle il faut avoir

$$\frac{L^4\alpha^2}{(\alpha^2 - w^2)^2} = \frac{L^4}{\alpha^2 - w^2}$$

$$\alpha^2 = \alpha^2 - w^2$$

$$w = 0$$

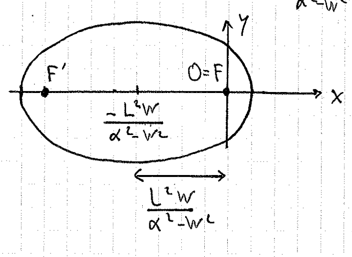
$\boxed{w = 0}$ cercle centré à l'origine

$\boxed{w \neq 0}$ Déterminons la direction de l'axe focal :

$$\frac{L^4\alpha^2}{(\alpha^2-w^2)^2} - \frac{L^4}{\alpha^2-w^2} = \frac{L^4 w^2}{(\alpha^2-w^2)^2} > 0 \quad \text{car } w, L \neq 0$$

La trajectoire est donc une ellipse d'axe focal horizontale et la demi-distance focale vaut

$$c = \sqrt{\frac{L^4 w^2}{(\alpha^2-w^2)^2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha^2-w^2>0}}{=} \frac{L^2 w}{\alpha^2-w^2}$$



ellipse dont l'origine est un foyer

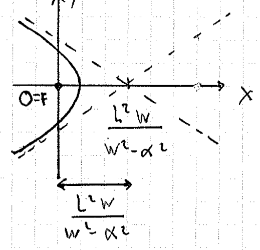
$\boxed{\alpha^2-w^2<0}$ (K>0)

(4) peut être mise sous la forme suivante

$$\frac{\left(x-\frac{L^2w}{w^2-\alpha^2}\right)^2}{\frac{L^4\alpha^2}{(\alpha^2-w^2)^2}} - \frac{y^2}{\underbrace{\frac{L^4}{w^2-\alpha^2}}_{>0}} = 1$$

Nous avons une hyperbole dont la demi-distance focale vaut

$$c = \sqrt{\frac{L^4\alpha^2}{(\alpha^2-w^2)^2} + \frac{L^4}{w^2-\alpha^2}} = \sqrt{\frac{L^4 w^2}{(w^2-\alpha^2)^2}} = \frac{L^2 \cdot w}{w^2-\alpha^2}$$



hyperbole dont l'origine est un foyer

Remarque : L'équation (1) implique l'équation (2) mais ces équations ne sont pas équivalentes. Nous avons donc montré que si P(x;y) satisfait l'équation donnée alors sa trajectoire est sur une conique.