L-P-Bourguiba de Tunis		**Durée : 2 H**
	Devoir de Mathématiques n°5	
Prof : Ben Jedidia Chokri	**Date : 20/4/2009**	**Classe : $4^{ème}$ Math**

<u>EXERCICE 1 :</u> (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1.Trouver l'équation réduite d'une ellipse E sachant que D a pour équation $x = \frac{25}{4}$ et pour excentricité $e = \frac{4}{5}$.

2.Soit f l'application du plan dans lui-même
qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que z'=iz+1-i
Donner la nature de f et ses éléments caractéristiques

3.a.On note E' l'image de E par f .
Expliquer pourquoi E' est une ellipse.
b.Déterminer son centre ,ses sommets et ses foyers.

4.Représenter E et E'.

<u>EXERCICE2 :</u>(4points)

On considère l'équation (E) 8x+5y=1 ou x et y sont des entiers relatifs.

1.a)Citer le théorème permettant d'affirmer que l'équation (E) a des solutions
b)Donner une solution particulière de (E)
c)Résoudre dans ZxZ l'équation (E)

2.a)Résoudre dans Z le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 8 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$

b)Dans le cas ou x un entier solution de (S),
déterminer le reste de la division euclidienne de x par 40.

3.a)On considère l'équation (E') 8x+5y=100.
b)Résoudre dans ZxZ l'équation (E').
c)Un groupe de garçons et filles a dépensé 100 dinars dans une excursion .
Chaque garçon a dépensé 8 dinars et chaque fille a dépensé 5dinars.
Donner les répartitions des groupes possibles.

EXERCICE 3 (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$;
On considère les points A(3,0,10) ,B(0,0,15) et C(0,20,0).
1)a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
b) Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)
d) Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses au point E(9,0,0).
2) Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC.
a) Justifier que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OEH).
En déduire que (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC.
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (OEH).
c) Déterminer les coordonnées de point H .
d) Calculer la distance OH, déduire que EH = 15 et l'aire du triangle EBC.
3) En exprimant de 2 façons le volume du tétraèdre OEBC,
déterminer la distance du point O au plan ABC.
4) Soit f l'application de l'espace dans lui-même,
qui à tout point M (x,y,z) associe le point M' (x',y',z') tel que

$$\begin{cases} x'=2x-3 \\ y'=2y \\ z'=2z-10 \end{cases}$$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristique de f .
b) Déterminer une équation cartésienne de l'image du plan (ABC) par f.
c) Déterminer le volume de l'image par f du tétraèdre OEBC.

PROBLEME (8 points)

On considère la fonction f_n définie sur R par : $f_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}$

ou n est un entier naturel supérieur ou égal à 1

Partie A : Etude pour n=1

1. Etudier les variations de f_1.
2. On note Cf_1 la représentation graphique dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

Tracer Cf_1.

Partie B : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et soit $I_n = \int_0^n f_n(x)dx$

On se propose dans cette partie de déterminer la limite de la suite I_n

1. Montrer que pour tout réel $t \geq 0$: $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$.
2. En déduire que pour tout réel x de $[0,n]$:

   a. $x - \frac{x^2}{2n} \leq n.\ln(1+\frac{x}{n}) \leq x$.

   b. $e^{x}.e^{-\frac{x^2}{2n}} \leq (1+\frac{x}{n})^n \leq e^{x}$.

   c. $e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}} \leq f_n(x) \leq e^{-x}$.
3. a. Montrer que pour tout réel $t \geq 0$: $e^{-t} \geq 1-t$

   b. En déduire que pour tout réel x de $[0,n]$: $e^{-x} - \frac{x^2}{2n} e^{-x} \leq e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}}$.

4. a. Calculer $\int_0^n e^{-x}dx$.

   b. Calculer à l'aide de deux intégrations par parties : $\int_0^n x^2e^{-x}dx$.

5. a. Déduire de ce qui précède que pour tout n de N* :

   $$1-\frac{1}{n} + e^{-n}(\frac{1}{n}+\frac{n}{2}) \leq I_n \leq 1-e^{-n}.$$

   b. Prouver que $\lim\limits_{+\infty} I_n = 1$