-P-Bourguiba deTunis		**Prof :Ben jedidia chokri**
Chapitre 6	**Géométrie dans l'espace**	**Classe :4 Math**
	EXERCICES	

EXERCICE 1:

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

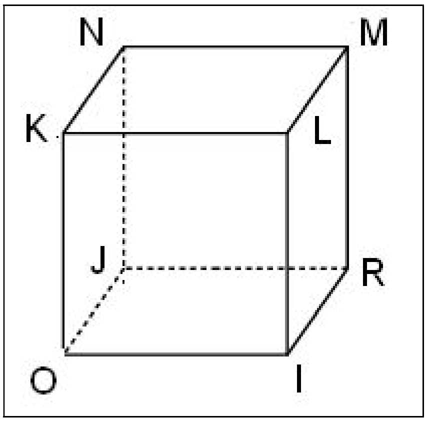
Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$ et $\vec{v}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

1) Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et orthogonaux.

2) Déterminer un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormée de l'espace.

EXERCICE 2 :

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK}\right)$,
on considère le cube OIRJKLMN.



On considère les points $A\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(0,\frac{2}{3},1\right)$.

On appelle $\mathcal{P}$ le plan passant par O, A et B.

1) a- Vérifier que A est le milieu de l'arrête $[IL]$ et que $\overrightarrow{KB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$.

b- Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$.

2) a- En déduire que l'aire du triangle OAB vaut $\frac{\sqrt{14}}{6}$.

b- Le point $C\left(1,\frac{1}{3},1\right)$ appartient-il à $\mathcal{P}$? Justifiez votre réponse.

3) On considère le tétraèdre OABK. Calculer sur volume et $d(K,\mathcal{P})$.

EXERCICE 3 :

L'espace E étant rapporté au repère orthonormé $(\vec{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère la sphère S dont une équation cartésienne est :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8z + 13 = 0$.

et le plan P passant par A (1, o, 1) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

1°) Démontrer que S et P sont sécants.

2°) Déterminer $S \cap P$.

3°) Déterminer les équations cartésiennes des plans P′ et P″ parallèles à P et tangents à S.

4°) Soit la droite Δ dont une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=-t \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=t+3 \end{cases}$$

a) Vérifier que Δ et P sont orthogonaux.

b) Etudier la position relative de Δ et S .et déterminer $S\cap\Delta$

EXERCICE 4 :

L' espace E étant rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère l'ensemble S: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

1°) Démontrer que S est une sphère dont déterminera le centre w et le rayon R

2°) Soit D la droite passant par A(2,-1,1) et dont un vecteur directeur est $\vec{U}\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}$

a) Calculer d(w,D).

b) Déterminer l'intersection de S et D.

3°) Soit le plan P_m: y-z+m=0 ou m un paramètre réel.

a) Etudier les positions relatives de S et P_m .

b) Pour m=0 , déterminer $C=P_0 \cap S$

4°)a)Déterminer l'équation de P_0' image de P_0 par l'homothétie de centre O et de rapport 2

b) Déterminer l'équation de S' image de S par l'homothétie de centre O et de rapport 2

EXERCICE 5 :

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{I},\vec{J};\vec{K})$.

On considère les points : A (-1, 1, 2) ; B (1, 2, -1) et C (0, 3, 1).

Soit la droite Δ passant par C est de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$.

1) a- Écrire une équation paramétrique de chacune des droites (AB) et Δ.

b- Montrer que (AB) et Δ ne sont ni coplanaires ni orthogonales.

2) a- Calculer $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

b-En déduire la distance d (C, (AB)) du point C à la droite (AB).

3) S désigne l'ensemble des points M (x, y, z) de C tels que :

$x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 2z + 4 = 0$.

a- Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

b- Soit P le plan d'équation :. x + 2y - z + 1 = 0.

Montrer que P est tangent à (S) en A.

c- Déterminer $(S)\cap(AB)$.

4) Soit P′ le plan d'équation : x - z - 2 =0.

Écrire une équation paramétrique de la droite D définie par : $D = P \cap P'$

EXERCICE 6:

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$,

on considère les points A(4, 0,0), B(2,4,0), C(0,6,0), S(0,04) E(6,0,0) et F(0,8,0).

1.a) Déterminer l'intersection des droites (BC) et (OA).

b) Montrer que F est le point d'intersection des droites (AB) et (OC).

2) a) Donner une équation cartésienne du plan (SEF).

b) Calculer le volume du tétraèdre OSEF.

3) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{4}$

a) Déterminer l'expression analytique de h et donner les coordonnées de h(A) =A'.

b) Montrer qu' une équation cartésienne de l'image du plan (SEF) par l'homothétie h est le plan P : 4x+3y+6z-22=0.

4) Le plan (P) coupe les arêtes [SO] ,[SA],[SB] et [SC] de la pyramide SOABC respectivement aux points O',A' ,B' et C'.

a) Déterminer les coordonnées de O' et B'

et vérifier que C' a pour coordonnées $(0,2,\frac{8}{3})$

b) Montrer que O'A'B'C' est un parallélogramme et Calculer son aire.