Q.C.M

Exercice 1.

(a) Faux,

$$\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IO} = \frac{3}{4}a^2.$$

(b) Vrai.

(c) Faux, $OB = OC$.

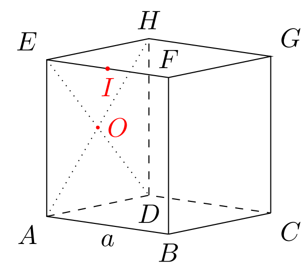

FIGURE 1 – Construction I.

Exercice 2.

(a) Vrai.

(b) Faux,

$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SD} = 23.$$

(c) Faux,

$$\mathcal{V}_{(SABCD)} = 24 \quad (u.v).$$

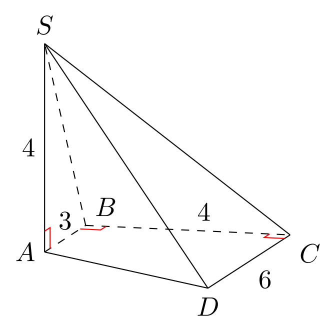

FIGURE 2 – Construction II.

Exercice 3.

(a) Vrai.

(b) Vrai.

(c) Faux,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{(ABCD)} &= ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}|| \\ &= 3\sqrt{10} \ \ (u.a).\end{aligned}$$

Exercice 5.

(a) Faux, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

(b) Vrai.

(c) Vrai.

Exercice 4.

(a) Vrai.
(b) Vrai.
(c) Faux,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{(BDM)} &= \frac{1}{2}||\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MD}|| \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} \quad (u.a).\end{aligned}$$

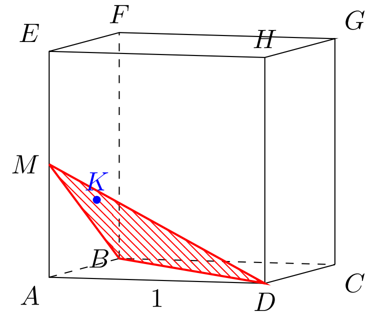

FIGURE 3 – Construction III.

Exercice 6.

(a) Vrai.
(b) Vrai.
(c) Faux, car $BA = 2\sqrt{5}$.

Exercice 7.

(a) Vrai.
(b) Faux.
(c) Faux.

Exercice 8.

(a) Faux.
(b) Faux.
(c) Vrai.

Exercice 9.

(a) Vrai.
(b) Faux.
(c) Faux.

Exercice 10.

(a) Vrai.
(b) Vrai.
(c) Vrai.

Problèmes.

Exercice 1.

1. Un vecteur est unitaire si sa norme vaut 1.

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2} = 1$$
$$||\vec{v}|| = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = 1$$

donc, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 0.$$

Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales.

2.

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Exercice 2.

1. (a)

$$\begin{cases} \frac{x_I+x_L}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 = x_A \\ \frac{y_I+y_L}{2} = \frac{0+0}{2} = 0 = y_A \\ \frac{z_I+z_L}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = z_A \end{cases}.$$

Ainsi A est le milieu du segement $[IL]$.

$$\overrightarrow{KB} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KN}.$$

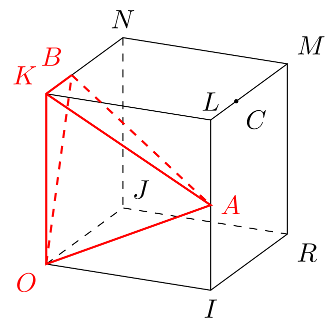

FIGURE 4 – Construction IV.

(b)

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

2. (a)

$$\mathcal{A}_{(OAB)} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}|| = \frac{1}{2}\sqrt{\Big(-\frac{1}{3}\Big)^2 + (-1)^2 + \Big(\frac{2}{3}\Big)^2} = \frac{\sqrt{14}}{6} \quad (u.a).$$

(b)

$$\overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OC} \cdot \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \times 1 - 1 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 1 = 0.$$

Ainsi $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont coplanaires et par suite $C \in \mathcal{P}$.

3. (a)

$$\mathcal{V}_{(OABC)} = \frac{1}{6}\Big|\overrightarrow{OK} \cdot (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB})\Big| = \frac{1}{6}\left| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{6}\Big| -\frac{1}{3} \times 0 - 1 \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 \Big| = \frac{1}{9} \quad (u.v).$$

(b) Or,

$$\mathcal{V}_{(OABC)} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{(OAB)}\, \mathrm{d}(K, \mathcal{P}),$$

donc,

$$\mathrm{d}(K, \mathcal{P}) = \frac{3\mathcal{V}_{(OABC)}}{\mathcal{A}_{(OAB)}} = \frac{3 \times \frac{1}{9}}{\frac{\sqrt{14}}{16}} = \frac{\sqrt{14}}{7}..$$