Remarque

Par souci de simplification $f(AB)$ désigne l'image de la droite (AB) par f pour laquelle la notation $f\Big((AB)\Big)$ s'avère trop lourde à l'usage.

Exercice 2.

1. (a) $f(A) = B$ et $f(B) = C$ donc f est d'angle $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}) \pmod{2\pi}$.

$$\begin{aligned}
\theta &\equiv -(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}}) \pmod{2\pi} \\
&\equiv -((\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) + \pi) \pmod{2\pi} \\
&\equiv -(\frac{\pi}{2} + \pi) \pmod{2\pi} \\
&\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.
\end{aligned}$$

et elle est de rapport $\frac{CB}{AB} = \frac{4}{3} \neq 1$ et par suite elle admet un unique point invariant.

(b) f est d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc l'image d'une droite par f est une droite qui lui est perpendiculaire.
On a $B \in (BH)$ et $f(B) = C$ donc $C \in f(BH)$ de plus $f(BH) \perp (BH)$ donc $\underline{f(BH) = (AC)}$.
De même, $A \in (AH)$ et $f(A) = B$ donc $B \in f(AH)$ de plus $f(AH) \perp (AH)$ donc $\underline{f(AH) = (BH)}$.
Maintenant, $\{H\} = (AH) \cap (BH)$ et $f(AH) = (BH); f(BH) = (AH)$ alors,

$$\begin{aligned}
\{f(H)\} &= (BH) \cap (AH) \\
&= \{H\} \\
f(H) &= H.
\end{aligned}$$

Ainsi, H est le centre de f.

2. (a) On a $C \in (AC), f(C) = D$ et $f(AH) = (BH)$ par suite $D \in (BH)$.

(b) On a, encore, $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, $f(A) = B, f(B) = C$ et $f(C) = D$ donc $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ de plus $D \in (BH)$ d'où la construction de D.

3. (a) $g(A) = B$ et $g(B) = C$ donc g est une similitude directe de rapport $\frac{CB}{AB} = \frac{4}{3}$ et par suite g^{-1} est une similitude indirecte de rapport $\frac{3}{4}$ et comme f est une similitude directe de rapport $\frac{4}{3}$, $f \circ g^{-1}$ est une similitude indirecte de rapport $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1$ c'est-à-dire $f \circ g^{-1}$ est un antidéplacement.

$g(A) = B$ donc $g^{-1}(B) = A$ et $f(A) = B$ donc $f \circ g^{-1}(B) = B$. De même $g(B) = C$ donc $g^{-1}(C) = B$ et $f(B) = C$ donc $f \circ g^{-1}(C) = C$. Dès lors, $f \circ g^{-1}$ est un antidéplacement qui fixe A et B et $f \circ g^{-1} = S_{(BC)}$.

(b)

$$\begin{aligned} E &= g(C) \\ g^{-1}(E) &= C \\ f \circ g^{-1}(E) &= f(C) \\ S_{(BC)}(E) &= D. \end{aligned}$$

4. g est une similitude indirecte de centre Ω donc $g \circ g$ est une homothétie du même centre.
   $g(A) = B$ et $g(B) = C$ donc $g \circ g(A) = C$ et $\Omega \in (AC)$. De même, $g(B) = C$ et $g(C) = E$ donc $g \circ g(B) = E$ et $\Omega \in (BE)$. Ainsi $\Omega \in (AC) \cap (BE)$.

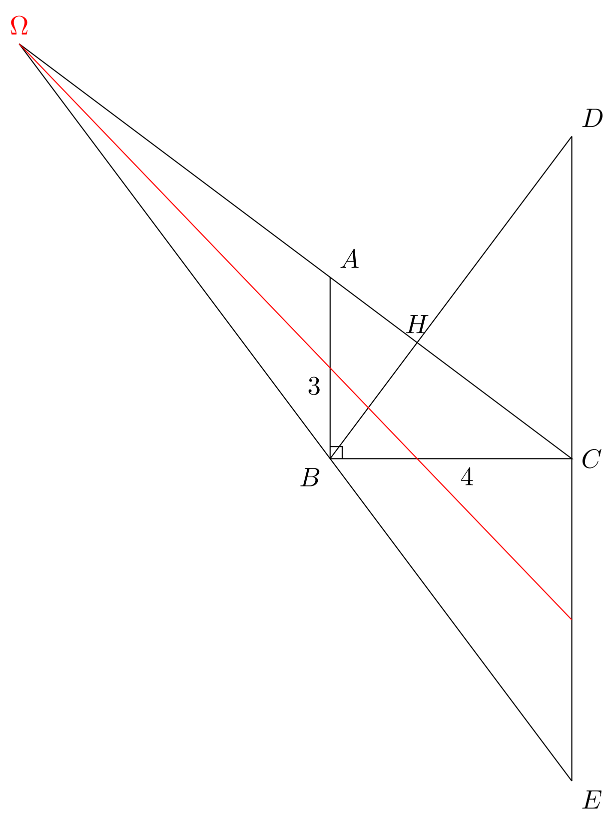

FIGURE 1 – Construction.

Exercice 4.

Partie A.

1. f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1},\ \forall_{x\in]-1,+\infty[}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) &= \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x-\ln(x+1)\\
&= +\infty.\\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x-\ln(x+1)\\
&= \lim_{x\to+\infty} x\Big(1-\frac{x+1}{x}\cdot\frac{\ln(x+1)}{x+1}\Big)\\
&= +\infty.\\
\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\ln x}{x}\\
&= \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{\ln x}{x}\\
&= 1\\
\lim_{x\to+\infty} f(x)-x &= \lim_{x\to+\infty} x-\ln(x+1)-x\\
&= \lim_{x\to+\infty} -\ln(x+1)\\
&= -\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $\Delta : y=x$.

x	-1		0		$+\infty$
$x+1$	0		$+$		
x		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert\ +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Figure 2 – Tableau de variation de la fonction f.

2. f admet 0 comme minimum absolu donc, pour tout x de $]-1,+\infty[$

$$\begin{aligned}
f(x) &\geq 0\\
x-\ln(x+1) &\geq 0\\
\ln(x+1) &\leq x.
\end{aligned}$$

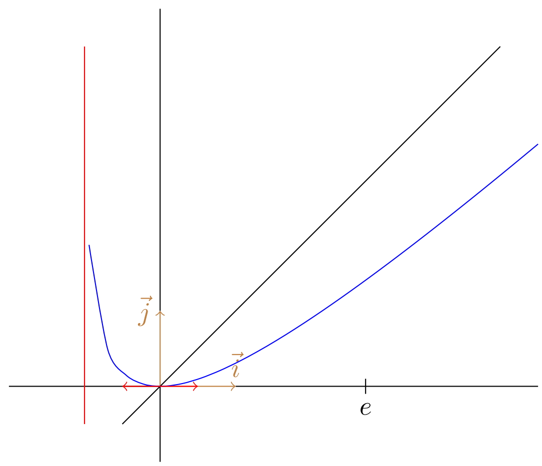

FIGURE 3 – La représentation graphique de la fonction f.

3.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^e \Big|f(x) - x\Big| dx \\
&= \int_0^e x - (x - \ln(x+1)) dx \\
&= \int_0^e \ln(x+1) dx \\
&= \Big[(x+1)\ln(x+1) - x\Big]_0^e \\
&= (e+1)\ln(e+1) - e \ \ (u.a).
\end{aligned}$$

Partie B.

1. (a) Soit k un entier naturel non nul. On a $\frac{1}{k} \in]-1, \infty[$ et $\ln(x+1) \leq x$, $\forall_{x \in]-1,\infty[}$, alors,

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &\leq \frac{1}{k} \\
\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &\leq \frac{1}{k} \\
\ln(k+1) - \ln k &\leq \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

(b) Soit n un entier naturel non nul et $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, alors,

$$\begin{aligned} \ln(i+1) - \ln i &\leq \frac{1}{i} \\ \sum_{i=1}^{n} \ln(i+1) - \sum_{i=1}^{n} \ln k &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \\ \ln(n+1) - \ln 1 &\leq S_n \\ \ln(n+1) &\leq S_n. \end{aligned}$$

Ajoutons que

$$\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

, pour conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$$

.

2. (a)

$$\begin{aligned} C_{n+1} - C_n &= (S_{n+1} - \ln(n+1)) - (S_n - \ln n) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= -\left(\frac{-1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)\right) \\ &= -f\left(\frac{-1}{n+1}\right) \\ \gamma_{n+1} - \gamma_n &= \left(C_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(C_n - \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(C_{n+1} - C_n\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}*$. On a $f(x) \geq 0,\ \forall_{x \in]-1,\infty[}$ et $\frac{-1}{n+1} \in]-1, \infty[,\ \forall_{n \in \mathbb{N}*}$, donc $f\left(\frac{-1}{n+1}\right) \geq 0$ et,

$$\begin{aligned} -f\left(\frac{-1}{n+1}\right) &\leq 0 \\ C_{n+1} - C_n &\leq 0 \\ C_{n+1} &\leq C_n. \end{aligned}$$

Ainsi $(C_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est décroissante. De même, $\frac{1}{n} \in]-1,\infty[,\ \forall_{n\in\mathbb{N}*}$ donc $f\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$ alors $\gamma_{n+1} \geq \gamma_n$ et par suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est croissante.

3. (a) On a $(C_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est décroissante, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est croissante et,

$$\lim_{n\to+\infty} C_n - \gamma_n = \lim_{n\to+\infty} Cn - (Cn - \frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Ainsi, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ sont adjacentes.

(b)

$$\begin{aligned} C_{10} \geq C &\geq \gamma_{10} \\ 0,626 \geq C &\geq 0,526. \end{aligned}$$

Exercice 3.

1. (a)

Théorème (de Bézout)**.** *Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si, et seulement s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que*

$$au + bv = 1.$$

Comme, 5 et -3 sont premiers entre eux alors d'après ce théorème ils existent u et v vérifiant,

$$5u - 3v = 1.$$

En multipliant par 11 on trouve que le couple $(11u, 11v)$ satisfait à l'équation (E).

(b) Soit (x, y) un couple solution de (E) donc,

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 11 \\ 5x - 3y &\equiv 11 \pmod 3 \\ 2x &\equiv 2 \pmod 3 \\ 4x &\equiv 4 \pmod 3 \\ x &\equiv 1 \pmod 3. \end{aligned}$$

(c) $(4, 3)$ est un couple solution de (E).

(d) On a si (x, y) est solution de (E) alors $x \equiv 1 \pmod 3$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 3k + 1$. On a $5x - 3y = 11$, en remplaçant x par $3k + 1$ on trouve $y = 5k - 2$. Après vérification :

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(3k + 1, 5k - 1); k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Je n'ai pas trouvé la réponse à cette question.
3. (a)

$$\begin{cases} x & \equiv 4 \pmod 5 \\ x & \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \equiv 3 \cdot 4 \pmod{3 \cdot 5} \\ 5x \equiv 2 \cdot 5 \pmod{3 \cdot 5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x \equiv -9 \pmod{15} \\ 10x \equiv 20 \pmod{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x \equiv 6 \pmod{15} \\ 10x \equiv 5 \pmod{15} \end{cases}$$

(b) si x est une solution du système, c'est-à-dire,

$$\begin{cases} x & \equiv 4 \pmod 5 \\ x & \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

alors,

$$\begin{cases} 9x \equiv 6 \pmod{15} \\ 10x \equiv 5 \pmod{15} \end{cases}$$

alors, $10x - 9x \equiv 5 - 6 \pmod{15}$ ou encore $x \equiv -1 \pmod{15}$. Après vérification,

$$S_{\mathbb{Z}} = \{15k - 1; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice 1.

1. Vrai.
2. Vrai.
3. Je n'ai pas de réponse à cette question.
4. Faux, il manque une hypothèse. Les entiers a et b doivent être multiples de 2.
5. Faux,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0$$

pourvu que $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

6. Vrai.