Exercice 1.

1. Soit
$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
l'équation de E et c tel que $b^2 + c^2 = a^2$. La directrice $\mathcal{D}$ de E a pour équation $\mathcal{D} : x = \frac{a^2}{c}$ et son excentricité $e = \frac{c}{a}$. Alors,
$$\begin{cases} \frac{a^2}{c} = \frac{25}{4} \\ \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \end{cases}.$$
En multipliant les deux équations, on trouve $a = 5$ et on tire de la deuxième $c = 4$. On calcule $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Ainsi,
$$E : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2. L'expression de la fonction complexe associée à f est de la forme $z' = az + b$ avec $\begin{cases} a = i \\ b = 1 - i \end{cases}$ donc f est une similitude directe de rapport $|a| = 1$, d'angle $\arg a \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ et de centre I d'affixe $\frac{b}{1-a} = 1$. Ainsi $f = R_{(I, \frac{\pi}{2})}$.

3. (a) f est une similitude donc elle conserve les formes et par suite l'image de E par f est une ellipse. De plus, toute similitude conserve les rapports, donc f conserve $e = \frac{c}{a}$ qui est caractéristique de la forme de l'ellipse et comme f est de rapport 1, E et E' sont isometriques.

   (b) Le centre de E est O d'affixe 0 donc celui de E' est $f(O)$ d'affixe $z'_O = 1 - i$. Les foyers de E sont F_1 et F_2 d'affixes respectifs 4 et -4 donc ceux de E' sont $f(F_1)$ et $f(F_2)$ d'affixes respectifs $1 + 3i$ et $1 - 5i$. Les sommets de E sont S_1, S_2, S_3 et S_4 d'affixes respectifs $5, -5, 3i$ et $-3i$ donc ceux de E' sont $f(S_1), f(S_2), f(S_3)$ et $f(S_4)$ d'affixes respectifs $1 + 4i, 1 - 6i, -2 - i$ et $4 - i$.

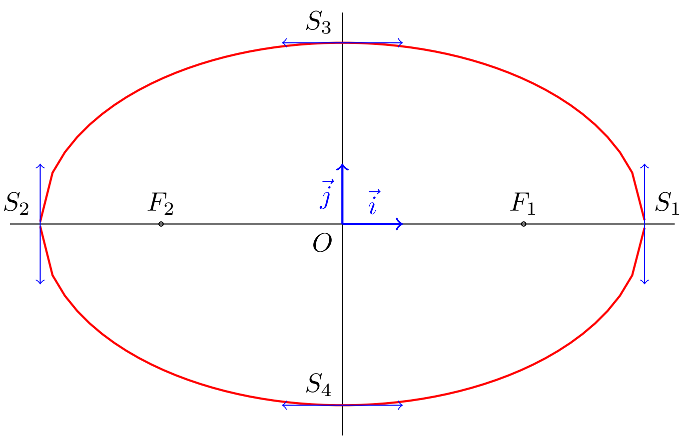

Figure 1 – Construction I.

Exercice 2.

1. (a)

   Théorème (de Bézout)**.** *Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si, et seulement s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que*
   $$au + bv = 1.$$

   Comme 8 et 5 sont premiers entre eux, l'équation $(E) : 8x + 5y = 1$ admet une solution. $(2, -3)$ est une solution particulière de (E).

   (b) Si (x, y) est solution de (E) alors,
   $$\begin{aligned} 8x + 5y &= 1 \\ 8x + 5y &= 8 \times 2 - 3 \times 5 \\ 8(x-2) &= -5(y+3) \end{aligned}$$
   alors, 5 divise $8(x-2)$. Or, 8 et 5 sont premiers entre eux, donc, d'après la lemme de Gauss 5 divise, $x - 2$ et par suite il existe $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant $x = 5k + 2$. On obtient, alors, $8(5k + 2 - 2) = -5(y + 3)$, ou encore $y = -8k - 3$.
   Reciproquement, si $(x, y) = (5k + 2, -8k - 3)$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors,
   $$8x + 5y = 8(5k + 2) + 5(-8k - 3) = 40k + 16 - 40k - 15 = 1.$$
   Et (x, y) est solution de (E). Ainsi,
   $$S_{\mathbb{Z}^2} = \Big\{(5k + 2, -8k - 3); k \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

2. (a)
   $$\begin{aligned} &\text{Si} && \begin{cases} x \equiv 1 \pmod 8 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}, \\ &\text{alors,} && \begin{cases} x = 8\alpha + 1 \\ x = 5\beta + 2 \end{cases} \\ &\text{alors,} && \begin{cases} 5x = 40\alpha + 5 \\ 8y = 40\beta + 16 \end{cases} \\ &\text{alors,} && 2 \times 8x - 3 \times 5x = -3(40\alpha + 5) + 2(40\beta + 16) \\ &\text{alors,} && x = 40(2\alpha - 3\beta) + 17 \\ &\text{alors,} && x \equiv 17 \pmod{40} \end{aligned}$$
   avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Reciproquement, si $x \equiv 17 \pmod{40}$, alors 40 divise $x - 17$. Or 8 et 5 divisent 40, donc 8 et 5 divisent $x - 17$, alors,
   $$\begin{cases} x \equiv 17 \pmod 8 \\ x \equiv 17 \pmod 5 \end{cases}$$
   $$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 8 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}.$$
   Ainsi,
   $$S_{\mathbb{Z}} = \{40k - 17; k \in \mathbb{Z}\}.$$

(b) Si x est solution de (S), alors, $x \equiv 17 \pmod{40}$. $0 \leq 17 \leq 40$, donc 17 est le reste de la division euclidienne de x par 40.

3. (a) En faisant exactement la même démarche qu'on a faite dans la question 2.(a) pour résoudre (E), seulement avec $(200, -300)$ comme solution particulière, on trouve que

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \Big\{(5k + 200, -8k - 300); k \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

(b) Notons par x le nombre de garçons et y celui des filles. L'énoncée se traduit,

$$\begin{cases} 8x + 5y = 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5k + 200 \\ y = -8k - 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} k \leq \frac{-75}{2} \\ k \geq -40 \end{cases}$$

Ainsi, $k \in \{-40, -39, -38\}$ et les répartitions possibles sont :

— Aucun garçon et 20 filles.

— 5 garçons et 12 filles.

— 10 garçons et 4 filles.