Lógica Y Programación

Problemas de λ-Calculus y Lógica Combinatoria

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Universidad de Granada

Lógica Y Programación

Curso

5to curso

Docente

Francisco Miguel García Olmedo

Autores

Alejandro Egea López
Nicolás Ramírez Rodiles

A fecha de
28 de noviembre de 2025

Índice

Ejercicio 1.

Exponga y desarrolle justificadamente el tema de la “Notación de de Bruijn”.

Solución.

Introducción

La notación tradicional del cálculo λ usa nombres para las variables ligadas ($x, y, z, \dots$). Esta práctica introduce tres dificultades fundamentales:

1. **Captura accidental**: al sustituir una expresión por una variable libre, puede producirse captura si surgen colisiones de nombre con variables ligadas en el contexto.
2. **Conversión-α obligatoria**: para evitar capturas debe renombrarse sistemáticamente las variables ligadas.
3. **Complejidad en meta-demostraciones**: propiedades como la confluencia o la prueba de Church-Rosser se complican debido a la constante necesidad de renombrar.

La propuesta de N. G. de Bruijn consiste en *eliminar los nombres de variables ligadas* y reemplazarlos por **índices naturales** que indican cuántos ligadores separan la ocurrencia de su λ correspondiente. De este modo:

- desaparece por completo la conversión-α,
- no hay colisiones de nombres,
- las definiciones de sustitución, reducción β y η se vuelven puramente estructurales,
- las demostraciones metateóricas se simplifican sustancialmente.

El propio de Bruijn establece tres criterios para evaluar una notación:

(i) legibilidad humana,

(ii) claridad en discusión metalingüística,

(iii) utilidad para implementaciones automáticas.

La notación de índices sacrifica parcialmente el punto (i), pero destaca en (ii) y (iii).

Name-carrying expressions y árbol sintáctico

Antes de eliminar nombres, representamos aplicaciones mediante un símbolo especial:

$$A((M), (N)),$$

que corresponde a la aplicación usual MN. Esto permite un análisis uniforme de la estructura.

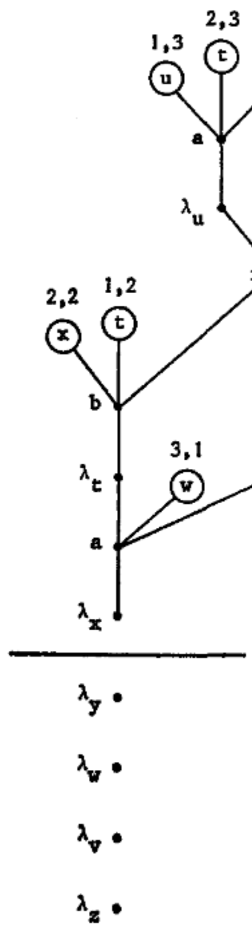
Consideremos ahora la siguiente expresión λ-cálculo (tomada del ejemplo del artículo):

$$\boxed{\lambda x\ a(\lambda b(x, t, f(\lambda u\ a(u, t, z),\ \lambda s\ w)), w, y)}$$

En forma estructurada “name-carrying”, cada rama del árbol lleva etiquetas a, b, f según la construcción.

El artículo presenta el siguiente **árbol anotado** con *reference depth* y *level.* Los pares (d, ℓ) representan:

- d = *reference depth*: número de ligadores λ desde la ocurrencia hasta su ligador,
- ℓ = *level*: número total de λ hasta la raíz.



Lectura precisa del árbol

Tomemos algunos nodos para ejemplificar:

- El nodo x tiene etiqueta $(2, 2)$:
  - reference depth = 2: está bajo dos λ antes de llegar a su ligador original λ_x,
  - level = 2: desde la ocurrencia hasta la raíz hay dos λ.
- El nodo t bajo $b(x, t)$ tiene $(1, 2)$:
  - depth = 1: está inmediatamente bajo λ_t,
  - level = 2: hay dos ligadores superiores en total.
- El nodo v etiquetado $(3, 1)$ indica que:
  - depth = 3: su ligador está tres λ más arriba,
  - level = 1: solo un λ separa esa rama de la raíz.

- Lo mismo ocurre para u, t, z, w en la rama derecha bajo f.

Este árbol es la base para convertir la expresión a notación sin nombres.

De nombres a índices: notación de de Bruijn

Para cada ocurrencia ligada, sustituimos su nombre por su *reference depth*.

- Las variables libres se conservan en una lista ordenada $(x_1, x_2, \dots)$,
- Los *level* sirven como información auxiliar para verificar la corrección formal, pero se omiten en la expresión final.

Ejemplos simples

$$\lambda x.\, x \;\longmapsto\; \lambda.\, 1$$

$$\lambda x.\, \lambda y.\, (x\, y) \;\longmapsto\; \lambda.\, \lambda.\, (2\, 1)$$

$$\lambda x.\, \lambda y.\, \lambda z.\, x \;\longmapsto\; \lambda.\, \lambda.\, \lambda.\, 3$$

Sintaxis de expresiones sin nombres

Usamos una gramática claramente indentada:

```
<NF>         ::= <Const>
               | <Index>
               | <NFList>
               | lambda.<NF>

<Const>      ::= a | b | c | ...         ; constantes simbólicas

<Index>      ::= 1 | 2 | 3 | ...         ; variable ligada por índice

<NFList>     ::= A(<NF>, <NF>)           ; aplicación
               | <NF> <NF>               ; concatenación de expresiones
```

Esta sintaxis es extremadamente regular: ya no aparecen nombres ligados, sólo índices.

Sustitución en notación de de Bruijn

La sustitución se define como:

$$S(Z_1, Z_2, \dots;\ Q),$$

donde Z_i sustituye a la variable libre cuyo índice es i.
Casos fundamentales:

- Si Q es una constante, permanece igual.
- Si $Q = k$ es un índice, entonces:
$$S(\dots, Z_k;\ k) = Z_k,$$
con ajuste de índices si la sustitución entra bajo una λ.

- Si $Q = A((Q_1), (Q_2))$, entonces:
$$S(Z;\ A((Q_1), (Q_2))) = A((S(Z; Q_1)), (S(Z; Q_2))).$$
- Si $Q = \lambda.\, R$, entonces:
$$S(Z_1, Z_2, \ldots;\ \lambda.\, R) = \lambda.\, S(Z_1', Z_2', \ldots;\ R),$$
donde cada Z_i' es la versión de Z_i con sus índices incrementados en uno (para preservar referencias correctas).

Reducción β

La regla de contracción β se expresa elegantemente:

$$A((\lambda.\, Q), (r)) \;\longrightarrow\; S(r, 2, 3, \ldots;\ Q),$$

es decir: sustituimos el índice 1 por r.

Ejemplos

$$(\lambda x.\, x)\ a \quad \rightsquigarrow \quad \lambda.\, 1\ a \;\longrightarrow\; a.$$

$$(\lambda x.\, \lambda y.\, x)\ y \quad \rightsquigarrow \quad A((\lambda.\, \lambda.\, 2), (y)) \;\longrightarrow\; \lambda.\, 1.$$

En ningún momento aparece conversión-α.

Reducción η

La regla extensional:

$$\lambda.\, A((Q), 1) \;\longrightarrow\; Q$$

siempre que Q no contenga ninguna referencia al índice 1 ligado por la λ.
Ejemplo:

$$\lambda x.\, f\, x \quad \longmapsto \quad \lambda.\, A((f), 1) \quad \longrightarrow \quad f.$$

Algunos comentarios sobre la reducción múltiple

De Bruijn desarrolla una teoría de *reducción múltiple* β_U, donde un conjunto U de símbolos de aplicación se reduce simultáneamente.

Ideas centrales:

- se define la noción de *expresión U-correcta*,
- la sustitución conserva U-corrección (Teorema 10.1),
- la reducción múltiple y la sustitución poseen reglas claras de conmutación y composición (Teorema 11.1),
- reducciones múltiples para conjuntos distintos U, V conmutan entre sí (Teorema 11.2),
- todo ello conduce a una demostración pulcra del **teorema de Church-Rosser** en la notación sin nombres.

En la notación de índices no existe la conversión-α ni conflictos de nombres, por lo que la demostración se vuelve más transparente: la confluencia se logra por propiedades puramente estructurales.

Conclusión

La notación de de Bruijn resuelve de raíz los problemas de captura y renombrado al sustituir nombres ligados por índices estructurales. La sustitución y la reducción se vuelven definiciones limpias, algebraicas y mecanizables.

La aplicación a la reducción múltiple y a la prueba de Church-Rosser muestra que la notación no sólo simplifica cálculos locales, sino que también clarifica la teoría global del cálculo λ.

Ejercicio 2.

Demuestre que para todo λ-término N, $\lambda x.x\,K\,N \# \lambda x.x\,S\,N$. (Nota: Recuérdese que $S \equiv \lambda xyz.xz(yz)$ y $K \equiv \lambda xy.x$).

Solución. *Supongamos, por reducción al absurdo, que $\lambda x.x\,K\,N = \lambda x.x\,S\,N$ y vamos a llegar a la contradicción de que $K = S$, lo cual es imposible porque $S \# K$ por clase.*

En primer lugar, aplicamos la "regla 3" con $Z = K$, de modo que

$$\lambda x.x\,K\,N \;=\; \lambda x.x\,S\,N \Rightarrow (\lambda x.x\,K\,N)K \;=\; (\lambda x.x\,S\,N)K$$

Ahora bien, aplicando "β-conversión" y "sustitución 1" obtenemos que

$$(\lambda x.x\,K\,N)K = KKN \qquad y \qquad (\lambda x.x\,S\,N)K = KSN$$

tal que, por transitividad, obtenemos

$$KKN = KSN$$

Finalmente, basta con aplicar la propia definición de K, concluyendo por transitividad que

$$KKN = K \qquad y \qquad KSN = S$$

$$\Rightarrow K = S$$

lo cual es una contradicción.

Ejercicio 3.

Dibuje razonadamente el grafo $G_\beta(WWW)$, donde $W \equiv \lambda xy.xyy$.

Solución. *Primero, es interesante recordar la definición del grafo de β-conversión de un λ-término tal que*

> *El grafo de β-conversión de un λ-término T (o grafo de reducción de un λ-término T), que denotaremos por $G_\beta(T)$, verifica:*
>
> 1. *Un λ-término M es un nodo de $G_\beta(T)$ si $\lambda \vdash T = M$.*
> 2. *Si M_1, M_2 son nodos distintos de $G_\beta(T)$, entonces $M_1 \not\equiv M_2$ (en particular, admite $M_1 =_\beta M_2$).*
> 3. *$n \geq 1$ aristas unen nodo M_1 a nodo M_2 (pudiendo ser $M_1 \equiv M_2$) si, y solo si, $\lambda \vdash M_1 = M_2$*

Ejercicio 4.

Encuentre razonadamente un λ-término M tal que $G_\beta(M)$ sea exactamente:

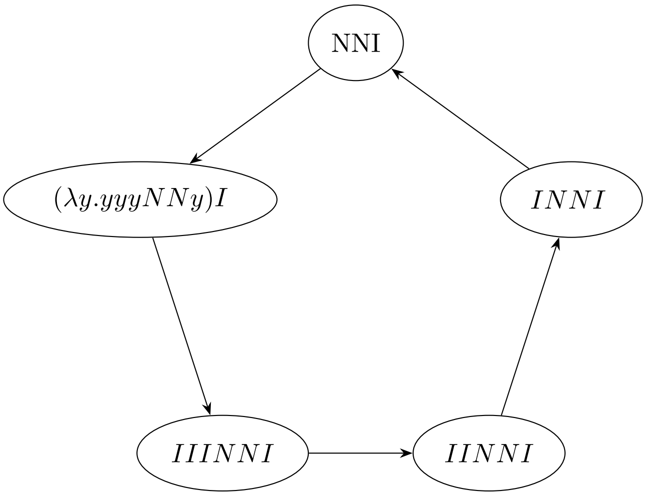
Solución. *Sea el candidato $M \equiv NNI$ donde*

$$N \equiv \lambda xy.yyyxxy \qquad \textit{e} \qquad I \equiv \lambda x.x$$

y veamos que $G_\beta(M)$ es el grafo del enunciado. Sabiendo que $II \equiv (\lambda x.x)I = I$, tenemos que

$$\begin{aligned} NNI &\equiv (\lambda xy.yyyxxy)NI \\ &= (\lambda y.yyyNNy)I \\ &= IIINNI \\ &= IINNI \\ &= INNI \\ &= NNI \qquad \textit{(¡hemos cerrado el ciclo!)} \end{aligned}$$

En efecto, tenemos cinco λ-términos no iguales (en el sentido de $\equiv$). Y $G_\beta(M)$ es



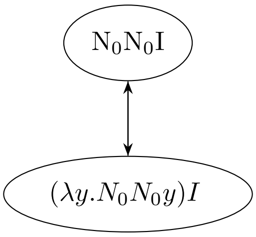
Vamos a explorar un poco más este λ-término que hemos propuesto. Presentamos las siguientes definiciones:

$$N_k = \lambda xy.\underbrace{y\cdots y}_{k \text{ veces}}xxy \qquad \textit{y} \qquad C_{k+2} = N_k N_k I \qquad \textit{para } k \in \mathbb{N}$$

Así pues, estas definiciones nos conducen a plantear el siguiente lema.

> *$G_\beta(C_{k+2})$ es un grafo de reducción cíclico de $k+2$ nodos para todo $k \in \mathbb{N}$.*

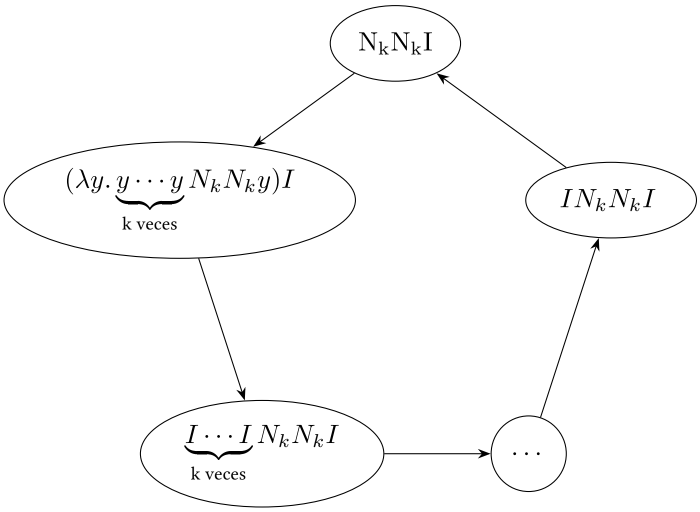
Por una parte, veamos el caso base $k = 0$ tal que $N_0 = \lambda xy.xxy$ y por ende, $C_2 = N_0 N_0 I$. Tras la primera parte del ejercicio, es inmediato comprobar que $(\lambda y.N_0 N_0 y)I = N_0 N_0 I$ se trata de $G_\beta(C_2)$ cíclico de 2 nodos. Cabe destacar que el caso base constituye un caso degenerado, puesto que un ciclo de dos nodos no es más que el segmento que los une.



Por otra parte, veamos el caso para un $k > 0$ arbitrario tal que $N_k = \lambda xy.\underbrace{y \cdots y}_{\text{k veces}} xxy$, es decir

$$
\begin{aligned}
C_{k+2} = N_kN_kI = (\lambda xy.\underbrace{y \cdots y}_{\text{k veces}} xxy)N_kI = \\
&= (\lambda y.\underbrace{y \cdots y}_{\text{k veces}} N_kN_ky)I \\
&= \underbrace{I \cdots I}_{\text{k veces}} N_kN_kI \\
&= \underbrace{I \cdots I}_{\text{k-1 veces}} N_kN_kI \\
&= \dots \\
&= IN_kN_kI \\
&= N_kN_kI
\end{aligned}
$$

En conclusión, es inmediato observar que hay $k + 2$ λ-términos no iguales (en el sentido de $\equiv$) y así podemos hacer que $G_\beta(C_{k+2})$ sea un policiclo de cualquier número **finito** de nodos mayor o igual que 2.



Ejercicio 5.

Sea el λ-término:

$$G \equiv \lambda yx.x(yx) \qquad \text{y} \qquad M \equiv (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy)).$$

1. Demuestre que M es un punto fijo de G.
2. Demuestre que si el combinador N es un punto fijo de G, entonces N es un operador de punto fijo.
3. Demuestre que M es un combinador de punto fijo.
4. Demuestre que si M es un combinador de punto fijo, entonces $M = GM$.

Solución.

(1) *Si aplicamos el Teorema del Punto Fijo al λ-término G, sean y tal que $y \notin FV(G)$, $W = \lambda z.G(zz)$ y $X = WW$, entonces obtenemos que $X = M$ es punto fijo de G. En efecto,*

$$\begin{aligned} X &\equiv \\ &\equiv WW \\ &= (\lambda yx.x(yyx))(\lambda yx.x(yyx)) && \textit{por } (\dagger) \\ &\equiv (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy)) && \textit{por } \alpha\textit{-congruencia} \end{aligned}$$

donde $(\dagger)$ resulta por

$$\begin{aligned} W &\equiv \\ &\equiv \lambda y.G(yy) \\ &\equiv \lambda y.(\lambda yx.x(yx))(yy) \\ &= \beta\lambda y.((\lambda x.x(yx))[y := yy]) && \textit{por } \beta\textit{-conversión} \\ &\equiv \lambda y.\lambda x.x(yyx) && \textit{por sustitución (1)} \\ &= \lambda yx.x(yyx) \end{aligned}$$

(2) *Supongamos que el combinador N es un punto fijo de G, es decir, $N = GN$. Por esto,*

$$\begin{aligned} N &= \\ &= GN \\ &\equiv (\lambda yx.x(yx))N \\ &= \lambda x.((x(yx))[y := N]) && \textit{por } \beta\textit{-conversión} \\ &\equiv \lambda x.x(Nx) && \textit{por sustitución 1} \end{aligned}$$

Y concluimos que, dado F un λ-término,

$$\begin{aligned} NF &= \\ &= (\lambda x.x(Nx))F \\ &= (x(Nx))[x := F] && \textit{por } \beta\textit{-conversión} \\ &= F(NF) && \textit{por sustitución 1} \end{aligned}$$

que es precisamente lo que se quería demostrar.

***(3)** Vamos a presentar una forma inmediata de resolver el ejercicio y otra más didáctica.*

Por una parte, M es claramente un combinador porque ninguna variable ocurra libre y, además, es punto fijo de G por el apartado (1). Tenemos que verifica las hipótesis del apartado (2) y por tanto, M es un operador (o combinador) de punto fijo.

Por otra parte, si denotamos por $W := \lambda xy.y(xxy)$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
&M = \\
&\quad \equiv WW \\
&\quad \equiv (\lambda xy.y(xxy))W \\
&\quad = \lambda y.((y(xxy))[x := W]) \qquad \textit{por } \beta\textit{-conversión} \\
&\quad \equiv \lambda y.y(WWy) \qquad \textit{por sustitución 1} \\
&\quad \equiv \lambda y.y(My) \qquad \textit{denotamos por } (\dagger)
\end{aligned}
$$

Y llegamos a que, dado F un λ-término,

$$
\begin{aligned}
&MF = \\
&\quad = (\lambda y.y(My))F \qquad \textit{por } (\ddagger) \\
&\quad = (y(My))[y := F] \qquad \textit{por } \beta\textit{-conversión} \\
&\quad \equiv F(MF) \qquad \textit{por sustitución 1}
\end{aligned}
$$

es decir, que M es un combinador de punto fijo.

***(4)** Supongamos que N es un combinador de punto fijo, es decir, para todo F λ-término $NF = F(NF)$. Tomando el G del enunciado tenemos que*

$$
\begin{aligned}
&GM = \\
&\quad \equiv (\lambda yx.x(yx))N \\
&\quad = \lambda x.((x(yx))[y := N]) \qquad \textit{por } \beta\textit{-conversión} \\
&\quad \equiv \lambda x.x(Nx) \qquad \textit{por sustitución 1}
\end{aligned}
$$

Ahora bien, si tomamos $T = GN$ llegamos a que

$$
\begin{aligned}
&TF = \\
&\quad = GNF \qquad \textit{por regla 3} \\
&\quad = (\lambda x.x(Nx))F \\
&\quad = (x(Nx))[x := F] \qquad \textit{por } \beta\textit{-conversión} \\
&\quad = F(NF) \qquad \textit{por sustitución 1}
\end{aligned}
$$

Finalmente, aplicamos la hipótesis obteniendo que $TF = F(NF) = NF$, y de nuevo, por la regla 3, tenemos que $T = N$.

Como partíamos de que $T = GN$, efectivamente llegamos a que $N = GN$, es decir, N es punto fijo de G.

Ejercicio 6.

Considere el combinador:

$$Y \equiv \lambda y.(\lambda x.y(xx))(\lambda x.y(xx))$$

y demuestre que $GY = Y$.

Solución.

Ejercicio 7.

Considere la sucesión de combinadores $\{Y^n\}_n$ definida para todo número natural n como sigue:

$$Y^n = \begin{cases} Y, & \text{si } n = 0, \\ Y^{n-1}G, & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Demuestre que para todo $n \geq 0$, Y^n es un combinador de punto fijo.

Solución.

Ejercicio 8.

Encuentre razonadamente el CL-término $(\lambda xy.xyy)_{CL}$.

Solución. *En primer lugar, escribimos el λ-término como un CL-término de tipo '[x].M' (que usaremos solo permitir la conversión $\lambda \to CL$, pero que no es un CL-término en sí mismo):*

$$(\lambda xy.xyy)_{CL} \to [xy].xyy,$$

y, por definición de abstracción de múltiples variables, obtenemos que

$$[xy].xyy \equiv [x]([y].xyy)$$

de modo que ya podemos proceder a aplicar las reglas de abstracción (a), (b), (c), (f) (las que se requieran). A modo de recordatorio:

Definition 2.18 (Abstraction). *Para todo término de CL llamémoslo M y toda variable x, se define por inducción un término de CL llamado $[x].M$ del siguiente modo:*

- *(a)* $[x].M \equiv KM$ *si* $x \notin FV(M)$.
- *(b)* $[x].x \equiv I$.
- *(c)* $[x].Ux \equiv U$ *si* $x \notin FV(U)$.
- *(f)* $[x].UV \equiv S([x].U)([x].V)$ *si no se aplica ninguna de las reglas anteriores.*

**Cabe destacar que la referencia prescinde de las reglas (d) y (e); y que en [x].UV usando la regla (f), V es siempre la parte derecha de la aplicación más externa del término.*

*Vamos a operar según las reglas (*las reglas se enuncian en orden de aplicación):*

$$\begin{aligned}
&[x].([y].xyy) \equiv \\
&\qquad \equiv [x].(S([y].xy)([y].y)) && \textit{por regla (f)} \\
&\qquad \equiv [x].(S(S([y].x)([y].y))I) && \textit{por regla (f) y (b)} \\
&\qquad \equiv [x].(S(S(Kx)(I))I) && \textit{por regla (a) y (b)} \\
&\qquad \equiv S([x].S(S(Kx)(I)))([x].I) && \textit{por regla (f)} \\
&\qquad \equiv S(S([x].S)([x].(S(Kx)(I))))KI && \textit{por regla (f) y (a)} \\
&\qquad \equiv S(S(KS)([x].(S(Kx)(I))))KI && \textit{por regla (a) y (f)} \\
&\qquad \equiv S(S(KS)(S([x].S(Kx))([x].I)))KI && \textit{por regla (f)} \\
&\qquad \equiv S(S(KS)(S(S([x].S)([x].Kx))KI))KI && \textit{por regla (f) y (a)} \\
&\qquad \equiv S(S(KS)(S(S(KS)K)KI))KI && \textit{por regla (a) y (c)}
\end{aligned}$$

Y por último, podemos aplicar las propias definiciones de los combinadores S, K, I para simplificar la expresión tal que

$$\begin{aligned}
&S(S(KS)(S(S(KS)K)KI))KI \equiv \\
&\qquad\qquad \equiv \textit{FALTA TERMINAR ESTA SIMPLIFICACIÓN}
\end{aligned}$$

Ejercicio 9.

Esquematice la relación entre el sistema λ y la lógica combinatoria.

Solución.

Referencias

[1] De Bruijn, N. G. (1972). *Lambda calculus notation with nameless dummies, a tool for automatic formula manipulation, with application to the Church–Rosser theorem. Indagationes Mathematicae (Proceedings), 75*(5), 381–392. https://doi.org/10.1016/1385-7258(72)90034-0

[2] Venturini Zilli, M. (1984). *Reduction graphs in the lambda calculus. Theoretical Computer Science, 29*(3), 251–275. https://doi.org/10.1016/0304-3975(84)90002-1

[3] Hindley, J. R., & Seldin, J. P. (2008). *Lambda-calculus and combinators: An introduction* (2nd ed.). Cambridge University Press. (Secciones relevantes: Section 2C, *Abstraction in CL*, pp. 26–29; Chapter 9, *Correspondence between* λ *and CL*, pp. 92–106.)