Lógica Y Programación

Problemas de λ-Calculus y Lógica Combinatoria

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Universidad de Granada

Lógica Y Programación

Curso

5to curso

Docente

Francisco Miguel García Olmedo

Autores

Alejandro Egea López
Nicolás Ramírez Rodiles

A fecha de

26 de noviembre de 2025

Índice

Ejercicio 1.

Exponga y desarrolle justificadamente el tema de la “Notación de de Bruijn”.

Solución.

Ejercicio 2.

Demuestre que para todo λ-término N, $\lambda x.x\,K\,N \# \lambda x.x\,S\,N$. (Nota: Recuérdese que $S \equiv \lambda xyz.xz(yz)$ y $K \equiv \lambda xy.x$).

Solución. *Supongamos, por reducción al absurdo, que $\lambda x.x\,K\,N = \lambda x.x\,S\,N$ y vamos a llegar a la contradicción de que $K = S$, lo cual es imposible porque $S \# K$ por clase.*

En primer lugar, aplicamos la "regla 3" con $Z = K$, de modo que

$$\lambda x.x\,K\,N \;=\; \lambda x.x\,S\,N \Rightarrow (\lambda x.x\,K\,N)K \;=\; (\lambda x.x\,S\,N)K$$

Ahora bien, aplicando "β-conversión" y "sustitución 1" obtenemos que

$$(\lambda x.x\,K\,N)K = KKN \qquad y \qquad (\lambda x.x\,S\,N)K = KSN$$

tal que, por transitividad, obtenemos

$$KKN = KSN$$

Finalmente, basta con aplicar la propia definición de K, concluyendo por transitividad que

$$KKN = K \qquad y \qquad KSN = S$$

$$\Rightarrow K = S$$

lo cual es una contradicción.

Ejercicio 3.

Dibuje razonadamente el grafo $G_\beta(WWW)$, donde $W \equiv \lambda xy.xyy$.

Solución. *Primero, es interesante recordar la definición del grafo de β-conversión de un λ-término tal que*

> *El grafo de β-conversión de un λ-término T (o grafo de reducción de un λ-término T), que denotaremos por $G_\beta(T)$, verifica:*
>
> 1. *Un λ-término M es un nodo de $G_\beta(T)$ si $\lambda \vdash T = M$.*
> 2. *Si M_1, M_2 son nodos distintos de $G_\beta(T)$, entonces $M_1 \not\equiv M_2$ (en particular, admite $M_1 =_\beta M_2$).*
> 3. *$n \geq 1$ aristas unen nodo M_1 a nodo M_2 (pudiendo ser $M_1 \equiv M_2$) si, y solo si, $\lambda \vdash M_1 = M_2$*

Ejercicio 4.

Encuentre razonadamente un λ-término M tal que $G_\beta(M)$ sea exactamente:

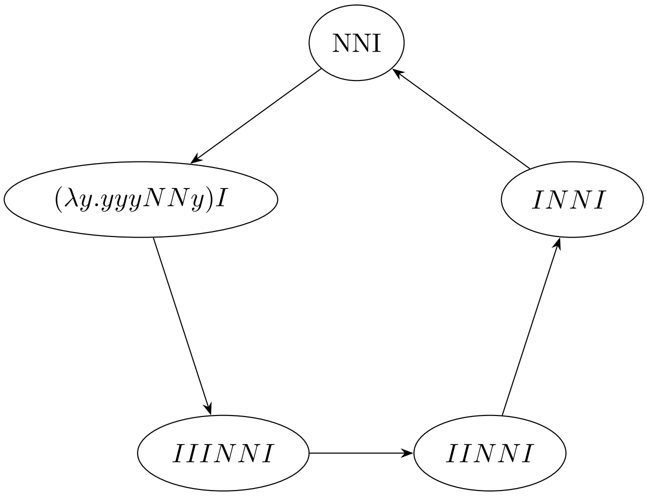
Solución. *Sea el candidato $M \equiv NNI$ donde*

$$N \equiv \lambda xy.yyyxxy \qquad \text{e} \qquad I \equiv \lambda x.x$$

y veamos que $G_\beta(M)$ es el grafo del enunciado. Sabiendo que $II \equiv (\lambda x.x)I = I$, tenemos que

$$\begin{aligned} NNI &\equiv (\lambda xy.yyyxxy)NI \\ &= (\lambda y.yyyNNy)I \\ &= IIINNI \\ &= IINNI \\ &= INNI \\ &= NNI \qquad \text{(¡hemos cerrado el ciclo!)} \end{aligned}$$

En efecto, tenemos cinco λ-términos no iguales (en el sentido de $\equiv$). Y $G_\beta(M)$ es



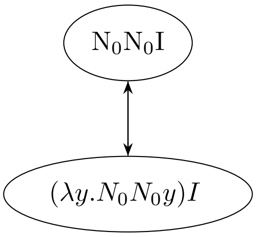
Vamos a explorar un poco más este λ-término que hemos propuesto. Presentamos las siguientes definiciones:

$$N_k = \lambda xy.\underbrace{y\cdots y}_{k \text{ veces}}xxy \qquad \text{y} \qquad C_{k+2} = N_k N_k I \qquad \text{para } k \in \mathbb{N}$$

Así pues, estas definiciones nos conducen a plantear el siguiente lema.

$G_\beta(C_{k+2})$ es un grafo de reducción cíclico de $k+2$ nodos para todo $k \in \mathbb{N}$.

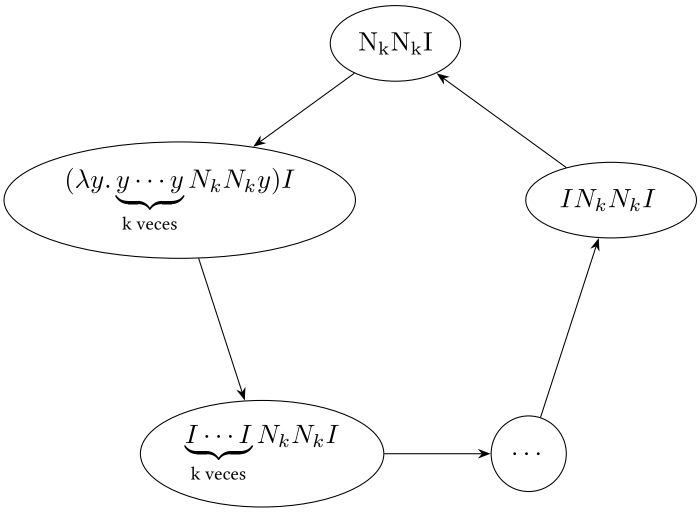
Por una parte, veamos el caso base $k = 0$ tal que $N_0 = \lambda xy.xxy$ y por ende, $C_2 = N_0N_0I$. Tras la primera parte del ejercicio, es inmediato comprobar que $(\lambda y.N_0N_0y)I = N_0N_0I$ se trata de $G_\beta(C_2)$ cíclico de 2 nodos. Cabe destacar que el caso base constituye un caso degenerado, puesto que un ciclo de dos nodos no es más que el segmento que los une.



Por otra parte, veamos el caso para un $k > 0$ arbitrario tal que $N_k = \lambda xy.\underbrace{y \cdots y}_{\text{k veces}} xxy$, es decir

$$\begin{aligned}
C_{k+2} = N_kN_kI = (\lambda xy.\underbrace{y \cdots y}_{\text{k veces}} xxy)N_kI = \\
&= (\lambda y.\underbrace{y \cdots y}_{\text{k veces}} N_kN_ky)I \\
&= \underbrace{I \cdots I}_{\text{k veces}} N_kN_kI \\
&= \underbrace{I \cdots I}_{\text{k-1 veces}} N_kN_kI \\
&= \dots \\
&= IN_kN_kI \\
&= N_kN_kI
\end{aligned}$$

En conclusión, es inmediato observar que hay $k+2$ λ-términos no iguales (en el sentido de $\equiv$) y así podemos hacer que $G_\beta(C_{k+2})$ sea un policiclo de cualquier número **finito** de nodos mayor o igual que 2.



Ejercicio 5.

Sea el λ-término:

$$G \equiv \lambda yx.x(yx) \qquad \text{y} \qquad M \equiv (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy)).$$

1. Demuestre que M es un punto fijo de G.
2. Demuestre que si el combinador N es un punto fijo de G, entonces N es un operador de punto fijo.
3. Demuestre que M es un combinador de punto fijo.
4. Demuestre que si M es un combinador de punto fijo, entonces $M = GM$.

Solución.

(1) *Si aplicamos el Teorema del Punto Fijo al λ-término G, sean y tal que $y \notin FV(G)$, $W = \lambda z.G(zz)$ y $X = WW$, entonces obtenemos que $X = M$ es punto fijo de G. En efecto,*

$$\begin{aligned} X \equiv & \\ & \equiv WW \\ & = (\lambda yx.x(yyx))(\lambda yx.x(yyx)) \qquad \textit{por } (\dagger) \\ & \equiv (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy)) \qquad \textit{por } \alpha\textit{-congruencia} \end{aligned}$$

donde $(\dagger)$ resulta por

$$\begin{aligned} W \equiv & \\ & \equiv \lambda y.G(yy) \\ & \equiv \lambda y.(\lambda yx.x(yx))(yy) \\ & = \beta\lambda y.((\lambda x.x(yx))[y := yy]) \qquad \textit{por } \beta\textit{-conversión} \\ & \equiv \lambda y.\lambda x.x(yyx) \qquad \textit{por sustitución (1)} \\ & = \lambda yx.x(yyx) \end{aligned}$$

(2) *Supongamos que el combinador N es un punto fijo de G, es decir, $N = GN$. Por esto,*

$$\begin{aligned} N = & \\ & = GN \\ & \equiv (\lambda yx.x(yx))N \\ & = \lambda x.((x(yx))[y := N]) \qquad \textit{por } \beta\textit{-conversión} \\ & \equiv \lambda x.x(Nx) \qquad \textit{por sustitución 1} \end{aligned}$$

Y concluimos que, dado F un λ-término,

$$\begin{aligned} NF = & \\ & = (\lambda x.x(Nx))F \\ & = (x(Nx))[x := F] \qquad \textit{por } \beta\textit{-conversión} \\ & = F(NF) \qquad \textit{por sustitución 1} \end{aligned}$$

que es precisamente lo que se quería demostrar.

(3) *Vamos a presentar una forma inmediata de resolver el ejercicio y otra más didáctica.*

Por una parte, M *es claramente un combinador porque ninguna variable ocurra libre y, además, es punto fijo de* G *por el apartado (1). Tenemos que verifica las hipótesis del apartado (2) y por tanto,* M *es un operador (o combinador) de punto fijo.*

Por otra parte, si denotamos por $W := \lambda xy.y(xxy)$ *tenemos que*

$$\begin{aligned} M &= \\ &\equiv WW \\ ok:) &\equiv (\lambda xy.y(xxy))W \\ &= \lambda y.((y(xxy))[x := W]) \qquad \textit{por } \beta\textit{-conversión} \\ &\equiv \lambda y.y(WWy) \qquad \textit{por sustitución 1} \\ &\equiv \lambda y.y(My) \qquad \textit{denotamos por } (\dagger) \end{aligned}$$

Y llegamos a que, dado F *un* λ*-término,*

$$\begin{aligned} MF &= \\ &= (\lambda y.y(My))F \qquad \textit{por } (\ddagger) \\ &= (y(My))[y := F] \qquad \textit{por } \beta\textit{-conversión} \\ &\equiv F(MF) \qquad \textit{por sustitución 1} \end{aligned}$$

es decir, que M *es un combinador de punto fijo.*

(4) *Supongamos que* N *es un combinador de punto fijo, es decir, para todo* F λ*-término* $NF = F(NF)$*. Tomando el* G *del enunciado tenemos que*

$$\begin{aligned} GM &= \\ &\equiv (\lambda yx.x(yx))N \\ &= \lambda x.((x(yx))[y := N]) \qquad \textit{por } \beta\textit{-conversión} \\ &\equiv \lambda x.x(Nx) \qquad \textit{por sustitución 1} \end{aligned}$$

Ahora bien, si tomamos $T = GN$ *llegamos a que*

$$\begin{aligned} TF &= \\ &= GNF \qquad \textit{por regla 3} \\ &= (\lambda x.x(Nx))F \\ &= (x(Nx))[x := F] \qquad \textit{por } \beta\textit{-conversión} \\ &= F(NF) \qquad \textit{por sustitución 1} \end{aligned}$$

Finalmente, aplicamos la hipótesis obteniendo que $TF = F(NF) = NF$*, y de nuevo, por la regla 3, tenemos que* $T = N$*.*

Como partíamos de que $T = GN$*, efectivamente llegamos a que* $N = GN$*, es decir,* N *es punto fijo de* G*.*

Ejercicio 6.

Considere el combinador:

$$Y \equiv \lambda y.(\lambda x.y(xx))(\lambda x.y(xx))$$

y demuestre que $GY = Y$.

Solución.

Ejercicio 7.

Considere la sucesión de combinadores $\{Y^n\}_n$ definida para todo número natural n como sigue:

$$Y^n = \begin{cases} Y, & \text{si } n = 0, \\ Y^{n-1}G, & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Demuestre que para todo $n \geq 0$, Y^n es un combinador de punto fijo.

Solución.

Ejercicio 8.

Encuentre razonadamente el CL-término $(\lambda xy.xyy)_{CL}$.

Solución.

Ejercicio 9.

Esquematice la relación entre el sistema λ y la lógica combinatoria.

Solución.