Lógica Y Programación

Problemas de λ-Calculus y Lógica Combinatoria

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Universidad de Granada

Lógica Y Programación

Curso

5to curso

Docente

Francisco Miguel García Olmedo

Autores

Alejandro Egea López
Nicolás Ramírez Rodiles

A fecha de
19 de noviembre de 2025

Índice

Ejercicio 1

Exponga y desarrolle justificadamente el tema de la “Notación de de Bruijn”.

Solución.

Ejercicio 2

Demuestre que para todo λ-término N, $\lambda x.x\,K\,N \# \lambda x.x\,S\,N$. (Nota: Recuérdese que $S \equiv \lambda xyz.xz(yz)$ y $K \equiv \lambda xy.x$).

Solución.

Ejercicio 3

Dibuje razonadamente el grafo $G_\beta(WWW)$, donde $W \equiv \lambda xy.xyy$.

Solución. *Primero, es interesante recordar la definición del grafo de β-conversión de un λ-término tal que*

> *El grafo de β-conversión de un λ-término T (o grafo de reducción de un λ-término T), que denotaremos por $G_\beta(T)$, verifica:*
>
> 1. *Un λ-término M es un nodo de $G_\beta(T)$ si $\lambda \vdash T = M$.*
> 2. *Si M_1, M_2 son nodos distintos de $G_\beta(T)$, entonces $M_1 \not\equiv M_2$ (en particular, admite $M_1 =_\beta M_2$).*
> 3. *$n \geq 1$ aristas unen nodo M_1 a nodo M_2 (pudiendo ser $M_1 \equiv M_2$) si, y solo si, $\lambda \vdash M_1 = M_2$*

Ejercicio 4

Encuentre razonadamente un λ-término M tal que $G_\beta(M)$ sea exactamente:

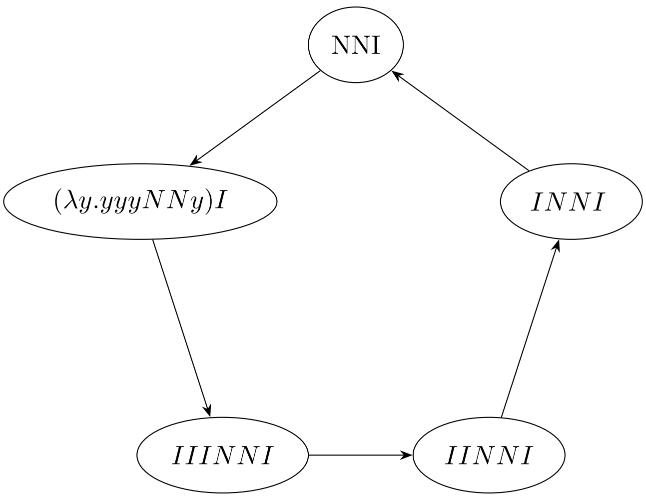
Solución. *Sea el candidato* $M \equiv NNI$ *donde*

$$N \equiv \lambda xy.yyyxxy \qquad \text{e} \qquad I \equiv \lambda x.x$$

y veamos que $G_\beta(M)$ *es el grafo del enunciado. Sabiendo que* $II \equiv (\lambda x.x)I = I$*, tenemos que*

$$\begin{aligned} NNI &\equiv (\lambda xy.yyyxxy)NI \\ &= (\lambda y.yyyNNy)I \\ &= IIINNI \\ &= IINNI \\ &= INNI \\ &= NNI \qquad \text{(¡hemos cerrado el ciclo!)} \end{aligned}$$

En efecto, tenemos cinco λ*-términos no iguales (en el sentido de* $\equiv$*). Y* $G_\beta(M)$ *es*



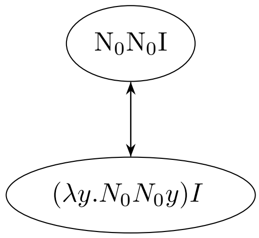
Vamos a explorar un poco más este λ*-término que hemos propuesto. Presentamos las siguientes definiciones:*

$$N_k = \lambda xy.\underbrace{y\cdots y}_{k \text{ veces}}xxy \qquad \text{y} \qquad C_{k+2} = N_kN_kI \qquad \text{para } k \in \mathbb{N}$$

Así pues, estas definiciones nos conducen a plantear el siguiente lema.

> $G_\beta(C_{k+2})$ *es un grafo de reducción cíclico de* $k+2$ *nodos para todo* $k \in \mathbb{N}$.

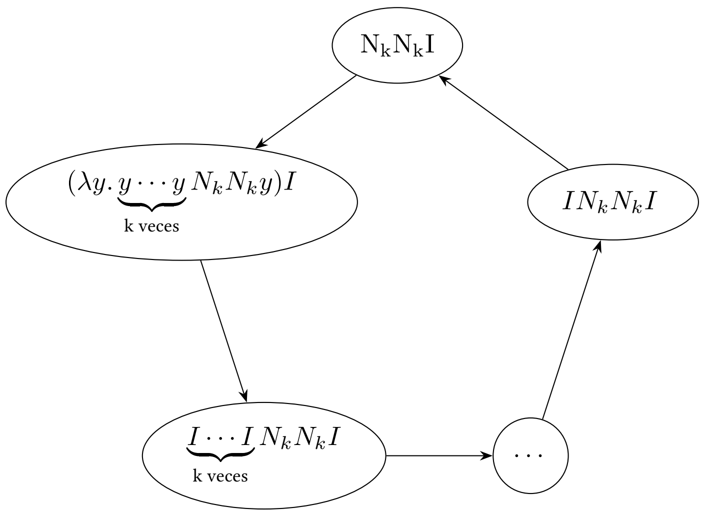
Por una parte, veamos el caso base $k = 0$ *tal que* $N_0 = \lambda xy.xxy$ *y por ende,* $C_2 = N_0N_0I$*. Tras la primera parte del ejercicio, es inmediato comprobar que* $(\lambda y.N_0N_0y)I = N_0N_0I$ *se trata de* $G_\beta(C_2)$ *cíclico de 2 nodos. Cabe destacar que el caso base constituye un caso degenerado, puesto que un ciclo de dos nodos no es más que el segmento que los une.*



Por otra parte, veamos el caso para un $k > 0$ arbitrario tal que $N_k = \lambda xy.\underbrace{y\cdots y}_{\text{k veces}}xxy$, es decir

$$
\begin{aligned}
C_{k+2} = N_kN_kI = (\lambda xy.\underbrace{y\cdots y}_{\text{k veces}}xxy)N_kI = & \\
& = (\lambda y.\underbrace{y\cdots y}_{\text{k veces}}N_kN_ky)I \\
& = \underbrace{I\cdots I}_{\text{k veces}}N_kN_kI \\
& = \underbrace{I\cdots I}_{\text{k-1 veces}}N_kN_kI \\
& = \dots \\
& = IN_kN_kI \\
& = N_kN_kI
\end{aligned}
$$

En conclusión, es inmediato observar que hay $k + 2$ λ-términos no iguales (en el sentido de $\equiv$) y así podemos hacer que $G_\beta(C_{k+2})$ sea un policiclo de cualquier número **finito** de nodos mayor o igual que 2.



Ejercicio 5

Sea el λ-término:

$$G \equiv \lambda yx.x(yx) \qquad \text{y} \qquad M \equiv (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy)).$$

1. Demuestre que M es un punto fijo de G.
2. Demuestre que si el combinador N es un punto fijo de G, entonces N es un operador de punto fijo.
3. Demuestre que M es un combinador de punto fijo.
4. Demuestre que si M es un combinador de punto fijo, entonces $M = GM$.

Solución.

(1) *Si aplicamos el Teorema del Punto Fijo al λ-término G, sean y tal que $y \notin FV(G)$, $W = \lambda z.G(zz)$ y $X = WW$, entonces obtenemos que $X = M$ es punto fijo de G. En efecto,*

$$\begin{aligned} X &\equiv \\ &\equiv WW \\ &= (\lambda yx.x(yyx))(\lambda yx.x(yyx)) \qquad \textit{por } (\dagger) \\ &\equiv (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy)) \qquad \textit{por } \alpha\textit{-congruencia} \end{aligned}$$

donde $(\dagger)$ resulta por

$$\begin{aligned} W &\equiv \\ &\equiv \lambda y.G(yy) \\ &\equiv \lambda y.(\lambda yx.x(yx))(yy) \\ &= \beta\lambda y.((\lambda x.x(yx))[y := yy]) \qquad \textit{por } \beta\textit{-conversión} \\ &\equiv \lambda y.\lambda x.x(yyx) \qquad \textit{por sustitución (1)} \\ &= \lambda yx.x(yyx) \end{aligned}$$

(2) *Supongamos que el combinador N es un punto fijo de G, es decir, $N = GN$. Por esto,*

$$\begin{aligned} N &= \\ &= GN \\ &\equiv (\lambda yx.x(yx))N \\ &= \lambda x.((x(yx))[y := N]) \qquad \textit{por } \beta\textit{-conversión} \\ &\equiv \lambda x.x(Nx) \qquad \textit{por sustitución 1} \end{aligned}$$

Y concluimos que, dado F un λ-término,

$$\begin{aligned} NF &= \\ &= (\lambda x.x(Nx))F \\ &= (x(Nx))[x := F] \qquad \textit{por } \beta\textit{-conversión} \\ &= F(NF) \qquad \textit{por sustitución 1} \end{aligned}$$

que es precisamente lo que se quería demostrar.

(3) *Vamos a presentar una forma inmediata de resolver el ejercicio y otra más didáctica.*

Por una parte, M *es claramente un combinador porque ninguna variable ocurra libre y, además, es punto fijo de* G *por el apartado (1). Tenemos que verifica las hipótesis del apartado (2) y por tanto,* M *es un operador (o combinador) de punto fijo.*

Por otra parte, si denotamos por $W := \lambda xy.y(xxy)$ *tenemos que*

$$\begin{aligned} M &= \\ &\equiv WW \\ &\equiv (\lambda xy.y(xxy))W \\ &= \lambda y.((y(xxy))[x := W]) \qquad \text{por } \beta\text{-conversión} \\ &\equiv \lambda y.y(WWy) \qquad \text{por sustitución 1} \\ &\equiv \lambda y.y(My) \qquad \text{denotamos por } (\dagger) \end{aligned}$$

Y llegamos a que, dado F *un* λ*-término,*

$$\begin{aligned} MF &= \\ &= (\lambda y.y(My))F \qquad \text{por } (\ddagger) \\ &= (y(My))[y := F] \qquad \text{por } \beta\text{-conversión} \\ &\equiv F(MF) \qquad \text{por sustitución 1} \end{aligned}$$

es decir, que M *es un combinador de punto fijo.*

(4) *Supongamos que* N *es un combinador de punto fijo, es decir, para todo* F λ*-término* $NF = F(NF)$*. Tomando el* G *del enunciado tenemos que*

$$\begin{aligned} GM &= \\ &\equiv (\lambda yx.x(yx))N \\ &= \lambda x.((x(yx))[y := N]) \qquad \text{por } \beta\text{-conversión} \\ &\equiv \lambda x.x(Nx) \qquad \text{por sustitución 1} \end{aligned}$$

Ahora bien, si tomamos $T = GN$ *llegamos a que*

$$\begin{aligned} TF &= \\ &= GNF \qquad \text{por regla 3} \\ &= (\lambda x.x(Nx))F \\ &= (x(Nx))[x := F] \qquad \text{por } \beta\text{-conversión} \\ &= F(NF) \qquad \text{por sustitución 1} \end{aligned}$$

Finalmente, aplicamos la hipótesis obteniendo que $TF = F(NF) = NF$*, y de nuevo, por la regla 3, tenemos que* $T = N$*.*

Como partíamos de que $T = GN$*, efectivamente llegamos a que* $N = GN$*, es decir,* N *es punto fijo de* G*.*

Ejercicio 6

Considere el combinador:

$$Y \equiv \lambda y.(\lambda x.y(xx))(\lambda x.y(xx))$$

y demuestre que $GY = Y$.

Solución.

Ejercicio 7

Considere la sucesión de combinadores $\{Y^n\}_n$ definida para todo número natural n como sigue:

$$Y^n = \begin{cases} Y, & \text{si } n = 0, \\ Y^{n-1}G, & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Demuestre que para todo $n \geq 0$, Y^n es un combinador de punto fijo.

Solución.

Ejercicio 8

Encuentre razonadamente el CL-término $(\lambda xy.xyy)_{CL}$.

Solución.

Ejercicio 9

Esquematice la relación entre el sistema λ y la lógica combinatoria.

Solución.