



سوال 1) برای ماتریس های زیر به صورت دستی SVD حساب کنید.

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

پاسخ) ماتریس اول:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} 8 - \lambda & 2 \\ 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (8 - \lambda)(5 - \lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0 \rightarrow \lambda = 4, 9$$

$$\lambda = 4 \rightarrow (A^T A - 4I) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 9 \rightarrow (A^T A - 9I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u = Av \rightarrow u = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, v = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, u = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

پاسخ) ماتریس دوم:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow A^T A = \begin{bmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda^2 - 100\lambda + 900 = 0 \rightarrow \lambda = 10, 90$$

$$\lambda = 10 \rightarrow (A^T A - 10I) = \begin{bmatrix} 64 & 32 \\ 32 & 96 \end{bmatrix} \rightarrow v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 90 \rightarrow (A^T A - 90I) = \begin{bmatrix} -16 & 32 \\ 32 & -64 \end{bmatrix} \rightarrow v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u = Av \rightarrow u = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 0 \rightarrow AA^T = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 50 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{90} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$