



سؤال ۱) ماتریس زیر را در نظر بگیرید و کرنل خطی آن را به دست آورید.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & 2.5 \\ 2.5 & 1 \\ 3.5 & 4 \\ 2 & 2.1 \end{bmatrix}$$

سؤال ۲) تابع کرنل چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید.

$$k(x, x') = (x^T x' + 1)^p$$

الف) نشان دهید برای $x, x' \in \mathbb{R}^2$ ماتریس $[x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2, \sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2, 1]^T$ یک نگاشت از کرنل $k(x, x') = (x^T x' + 1)^2$ است.

ب) ابعاد کرنل $k(x, x') = (x^T x' + 1)^p$ را پیدا کنید.

سؤال ۳) سه نقطه $(2.5, 1)$ و $(3.5, 4)$ و $(2, 2.1)$ را در نظر بگیرید.

الف) کرنل گوسی با استفاده از فاصله اقلیدوسی و واریانس 5 را بدست آورید.

ب) بردار ویژه و مقدار ویژه حاصل از قسمت الف این سوال را بدست آورید.

سؤال ۴) با توجه به الگوریتم زیر

Algorithm 7.2: Kernel Principal Component Analysis

KERNELPCA (\mathbf{D}, K, α):
 1 $\mathbf{K} = \{K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)\}_{i,j=1,\dots,n}$ // compute $n \times n$ kernel matrix
 2 $\bar{\mathbf{K}} = (\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}_{n \times n})\mathbf{K}(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}_{n \times n})$ // center the kernel matrix
 3 $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \text{eigenvalues}(\bar{\mathbf{K}})$ // compute eigenvalues
 4 $(\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_n) = \text{eigenvectors}(\bar{\mathbf{K}})$ // compute eigenvectors
 5 $\lambda_i = \frac{\eta_i}{n}$ for all $i = 1, \dots, n$ // compute variance for each component
 6 $\mathbf{c}_i = \sqrt{\frac{1}{\eta_i}} \cdot \mathbf{c}_i$ for all $i = 1, \dots, n$ // ensure that $\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = 1$
 7 $f(r) = \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$, for all $r = 1, 2, \dots, d$ // fraction of total variance
 8 Choose smallest r so that $f(r) \geq \alpha$ // choose dimensionality
 9 $\mathbf{C}_r = (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_r)$ // reduced basis
 10 $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_i \mid \mathbf{a}_i = \mathbf{C}_r^T \bar{\mathbf{K}}_i, \text{ for } i = 1, \dots, n\}$ // reduced dimensionality data

شکل ۱ الگوریتم kernel PCA

الف) دلیل بکار رفتن خط 6 در الگوریتم چیست؟

ب) در صورتی که α زیاد یا کم باشد رفتار الگوریتم چگونه تغییر پیدا می‌کند؟

ملاحظات:

- لطفا پاسخ سؤالات را تا تاریخ ذکر شده در سامانه ایلرن بارگذاری فرمایید. (تاخیر در تحویل با کسر امتیاز همراه است.)
- برای هر پروژه و یا تکلیف لازم است که گزارشی کامل، به زبان فارسی، زیبا و خوانا تهیه شود. و تمامی نکات، فرضها، فرمولها و در نهایت نتایج در آن ذکر گردند. (قطعا گزارش در روند تصحیح تمرینها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و در امتیاز شما اثر مستقیم دارد.)
- از دانشجویان انتظار میرود در تهیه تکالیف اخلاق علمی را رعایت فرمایند و از ارسال تکالیف با مشابهت حتی اندک پرهیز نمایند.