Лабораторная работа 6

Решение интегральных уравнений Вольтерры

Выполнил: Гапанович А. В. (4 группа)
Вариант : 1

Для решения дано следующее уравнение:

$$x(t) = \int_0^t (t-s)x(s)ds + 2sinh(t), t \in [0;5]\,, \tau = 0.5$$

Цель: решить данное уравнение

- методом сведения его к ОДУ (с последующим решением полученного ОДУ аналитически или численно)
- указанным квадратурным правилом с заданным шагом сетки τ.

Аналитическое решение

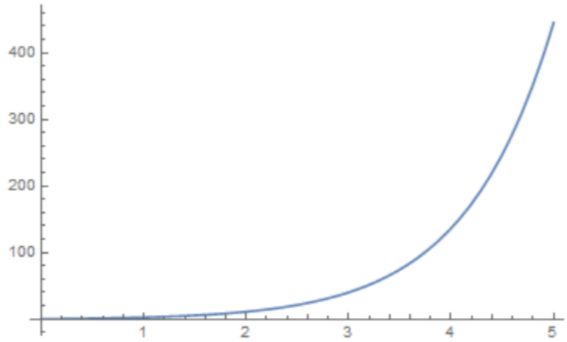
Решение самого интегрального уравнения в Wolfram Mathematica:

```
In[1]:= f = DSolveValue[x[t] == Integrate[(t - s) * x[s], {s, 0, t}] + 2 Sinh[t], x[t], {t, 0, 5}]
            |решение дифференциа···  |интегрировать                          |гиперболический синус

Out[1]= t Cosh[t] + Sinh[t]

In[2]:= Plot[f, {t, 0, 5}]
        |график функции
```

Out[2]=



Сведём интегральное уравнение к ОДУ, получим:

$$x'(t) = 2ch(t) + \int_0^t x(s)ds$$

$$x''(t) = 2sh(t) + x(t)$$

$$x(0) = \int_0^0 -sx(s)ds + 2sh(t) = 0$$

$$x'(0) = 2ch2 + \int_0^0 x(s)ds$$

Решим ОДУ средствами Wolfram Mathematica:

```
In[12]:= s = DSolve[{x''[t] == 2*Sinh[t] + x[t], x'[0] == 0, x[0] == 2}, x, {t, 0, 5}]
          решить дифференциал···   гиперболический синус
```

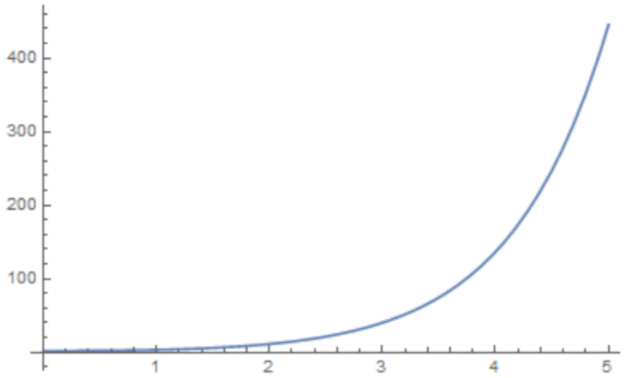
Out[12]= $\left\{\left\{x \to \text{Function}\left[\{t\}, \frac{1}{2} e^{-t} \left(3 + t + e^{2t} (1 + t)\right)\right]\right\}\right\}$

```
In[14]:= s = NDSolve[{x''[t] == 2*Sinh[t] + x[t], x'[0] == 0, x[0] == 2}, x, {t, 0, 5}]
          численно решить ДУ       гиперболический синус
```

```
Out[14]= {{x → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 5.}} Output: scalar ]}}
```

```
In[15]:= Plot[Evaluate[x[t] /. s], {t, 0, 5}]
         гра···  вычислить
```

Out[15]=



In [53]:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from typing import Callable
import numpy as np
import math
```

In [140]:

```
tau = 0.5
min = 0
max = 5

def k(t, s):
    return (t-s)

def f(t):
    return 2*math.sinh(t)

def fun_analytical():
    n_t = 60
    tau = int((max-min)/n_t)
    t = np.linspace(min, max, n_t)
    u = np.zeros((n_t, 1))
    for i in range(n_t):
        u[i] = t[i]*math.cosh(t[i])+math.sinh(t[i])
    return u, t

```

In [171]:

```
def Simpson_method(min, max, tau):
    t = np.arange(min, max + tau, tau)
    n = len(t)
    y = list(f(i) for i in t)
    solve = y
    for i in range(n):
        solve[i] = 0
        for j in range(2,i,2):
            solve[i]=solve[i] + (4*k(t[i], t[j])) * y[j]
        for j in range (1,i, 2):
            solve[i] =solve[i]+(2*k(t[i],t[j]))*y[j]
        solve[i] = solve[i] + k(t[i], t[1])*y[1] + k(t[i], t[i])*y[i]
        solve[i] = f(t[i]) + solve[i] * tau / 3
    solve = np.array(solve)
    return solve, t
```

In [172]:

```
def draw_Simpson_method():
    x_0, t_0 = fun_analytical()
    x_1, t_1 = Simpson_method(min, max, tau)
    fg = plt.figure(figsize=(11, 6), constrained_layout=True)
    gs = fg.add_gridspec(2, 2)
    fig_ax_2 = fg.add_subplot(gs[1, 0])
    plt.title('Решение методом трапеций')
    plt.grid(True)
    plt.plot(t_1, x_1)
    plt.plot(t_0, x_0)
    fig_ax_2.legend( ('Численное', 'Аналитическое'))
```

In [173]:

```
draw_Simpson_method()
```