# Лабораторная работа 1

# Решение систем дифференциальных уравнений

Выполнил: Гапанович А. В. (4 группа)

Дана следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -y + 0.999z \\ \frac{dz}{dt} = -0.001z \end{cases}$$

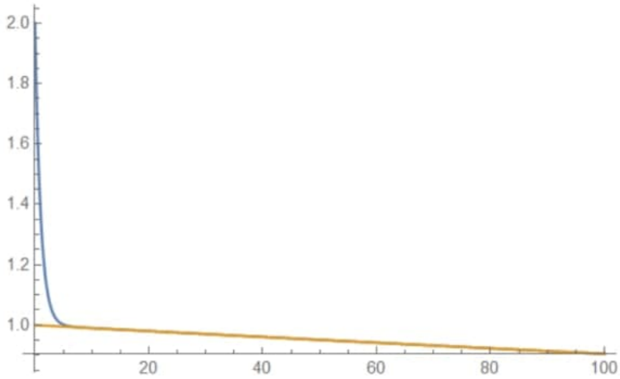
с начальными условиями:

$$y(0) = 2, z(0) = 1.$$

# 1. Аналитическое решение и число жесткости.

Решим систему с помощью программного пакета Wolfram Mathemathica:

```
s = DSolve[{y'[t] == -y[t] + 0.999 z[t], z'[t] == -0.001 z[t], y[0] == 2, z[0] == 1}, {y, z}, {t, 0, 100}]
    решить дифференциальные уравнения

{{y → Function[{t}, 1. e^(-1. t) + 1. e^(-0.001 t)], z → Function[{t}, 1. e^(-0.001 t)]}}

s = NDSolve[{y'[t] == -y[t] + 0.999 z[t], z'[t] == -0.001 z[t], y[0] == 2, z[0] == 1}, {y, z}, {t, 0, 100}]
    численно решить ДУ

{{y → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 100.}} Output: scalar ], z → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 100.}} Output: scalar ]}}

Plot[Evaluate[{y[t], z[t]} /. s], {t, 0, 100}, PlotRange → All]
гра··· вычислить                                  отображаемы··· всё
```




Запишем полученную систему:

$$\begin{cases} y(t) = e^{-t} + e^{-0.001t} \\ z(t) = e^{-0.001t} \end{cases}$$

Определим число жесткости:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0.999 \\ 0 & -0.001 \end{bmatrix}, det A = 0$$

$$det A = \begin{bmatrix} -1 - \lambda & 0.999 \\ 0 & -0.001 - \lambda \end{bmatrix} = 0 => \begin{matrix} \lambda_1 = -0.0006 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}$$

$$k = \frac{|\lambda|_{max}}{|\lambda|_{min}} = \frac{1}{0.006} = 166.7$$

In [1]:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy import optimize
import math
```

In [2]:

```
t = list()
u = list()
time_sum = 100
y_0 = 2  #начальное Y(0)
z_0 = 1  #начальное Z(0)
u0 = [y_0, z_0]
```

In [11]:

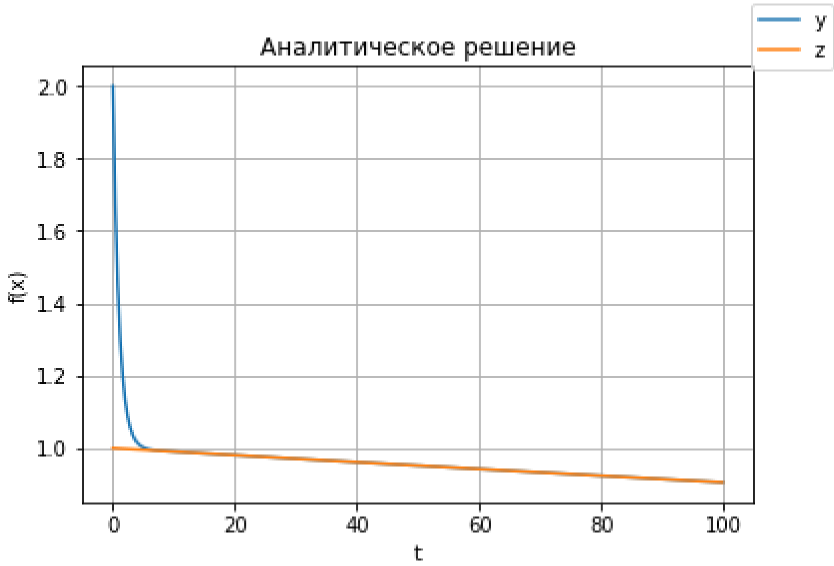
```
def system_0(t, u):
    return list([-1 * u[0] + 0.999 * u[1], 0 * u[0] - 0.001 * u[1]])

def system_solve(t, i: int):
    return list([ math.exp(-t[i]) +  math.exp(-0.001 * t[i]), 0 * math.exp(-t[i]) + math.ex

def fun_analytical(tau, time_sum, u0=[y_0, z_0]) -> list and list:
    time_numbers = int(time_sum // tau)
    t = np.linspace(0, time_numbers * tau, time_numbers + 1)
    u = np.zeros((time_numbers + 1, len(u0)))
    for i in range(time_numbers + 1):
        u[i] = system_solve(t, i)
    return u, t
```

In [4]:

```
def draw_fun_analytical(t, u):
    u, t = fun_analytical(tau, time_sum, u0)
    fig = plt.figure()
    plt.title('Аналитическое решение')
    plt.ylabel('f(x)')
    plt.xlabel('t')
    l1 = plt.plot(t, u)
    fig.legend((l1), ('yz'))
    plt.grid(True)
    plt.show()
```

In [5]:

```
tau = 0.2
draw_fun_analytical(t, u)
```




# 2. Явный метод Эйлера.

Запишим задачу Коши в векторном виде:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{u}), t > 0$$
$$\vec{u}(0) = \vec{u_0}$$

Введём равномерную расчетную сетку:

$$w_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \ldots, N_t\} => \vec{u}(t_n) = \vec{F}(t_n, \vec{u}(t_n)), t_n \in w_t$$

Тогда:

$$u'(t_n) = lim\frac{\vec{u}(t_n + \tau) - \vec{u}(t_n)}{\tau}$$

используя малый шаг получим:

$$\tau u'(t_n) \approx \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^{n}}{\tau}$$

Эта аппроксимация известна как разностная производная вперед с первым порядком точности. Исходя из этой апроксимации получим формулу для явного метода Эйлера:

$$\frac{\vec{y}^{n+1} - \vec{y}^{n}}{\tau} = \vec{F}(t_n, \vec{y}^{n}) => \vec{y}^{n+1} = \vec{y}^{n} + \tau\vec{F}(t_n, \vec{y}^{n})$$

In [8]:

```
def explicit_Euler_method(sustem_0, u0, tau, time_sum):
    time_numbers = int(time_sum // tau)
    t = np.linspace(0, time_numbers * tau, time_numbers + 1)
    u = np.zeros((time_numbers + 1, len(u0)))
    u[0] = u0
    for i in range(time_numbers):
        du_ = np.asarray(system_0(t[i], u[i]))
        u[i + 1] = u[i] + tau * du_
    return list(u), list(t)
```

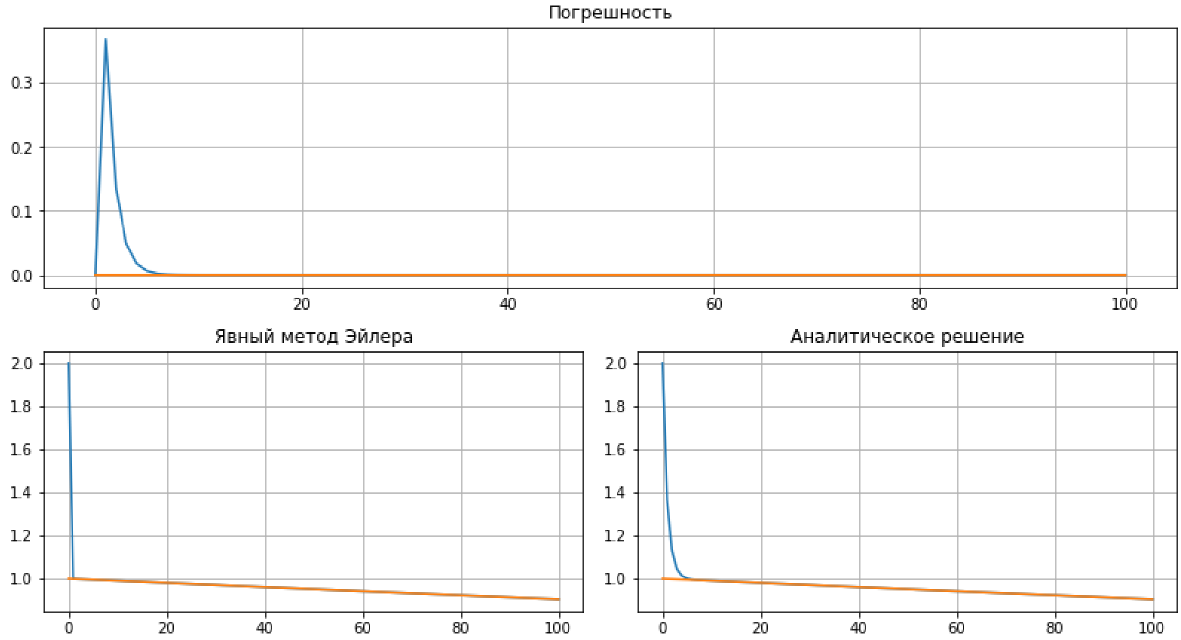
In [9]:

```
def draw_explicit_Euler_method(t, u):
    u, t = explicit_Euler_method(system_0, u0, tau, time_sum)
    u_0, t_0 = fun_analytical(tau, time_sum, u0)
    fg = plt.figure(figsize=(11, 6), constrained_layout=True)
    gs = fg.add_gridspec(2, 2)
    fig_ax_1 = fg.add_subplot(gs[0, :])
    plt.title('Погрешность')
    plt.grid(True)
    plt.plot(t, u_0-u)
    fig_ax_2 = fg.add_subplot(gs[1, 0])
    plt.title('Явный метод Эйлера')
    plt.grid(True)
    plt.plot(t, u)
    fig_ax_3 = fg.add_subplot(gs[1, 1])
    plt.title('Аналитическое решение')
    plt.grid(True)
    plt.plot(t_0, u_0)
```

Важно! В данном и всех дальнейших случаях график аналитического решения стоится с точно таким же шагом, как и результат самого метода. А под погрешностью понимается разность между значениями эти двумя значениями в получившихся точках.

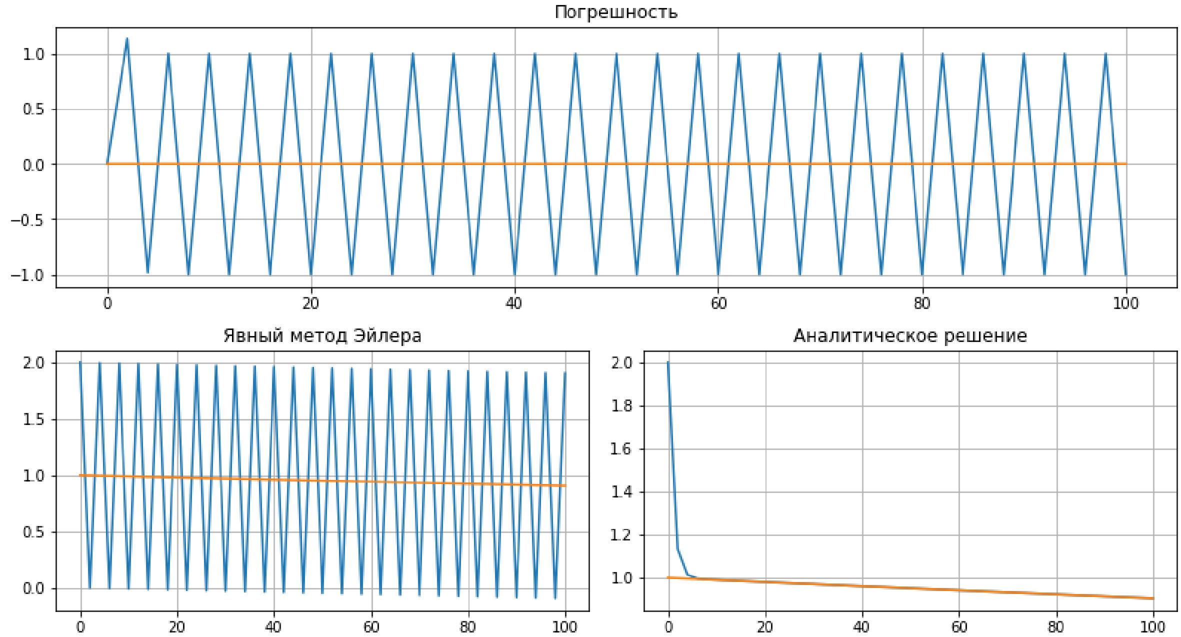
In [12]:

```
tau = 1
draw_explicit_Euler_method(t, u)
```



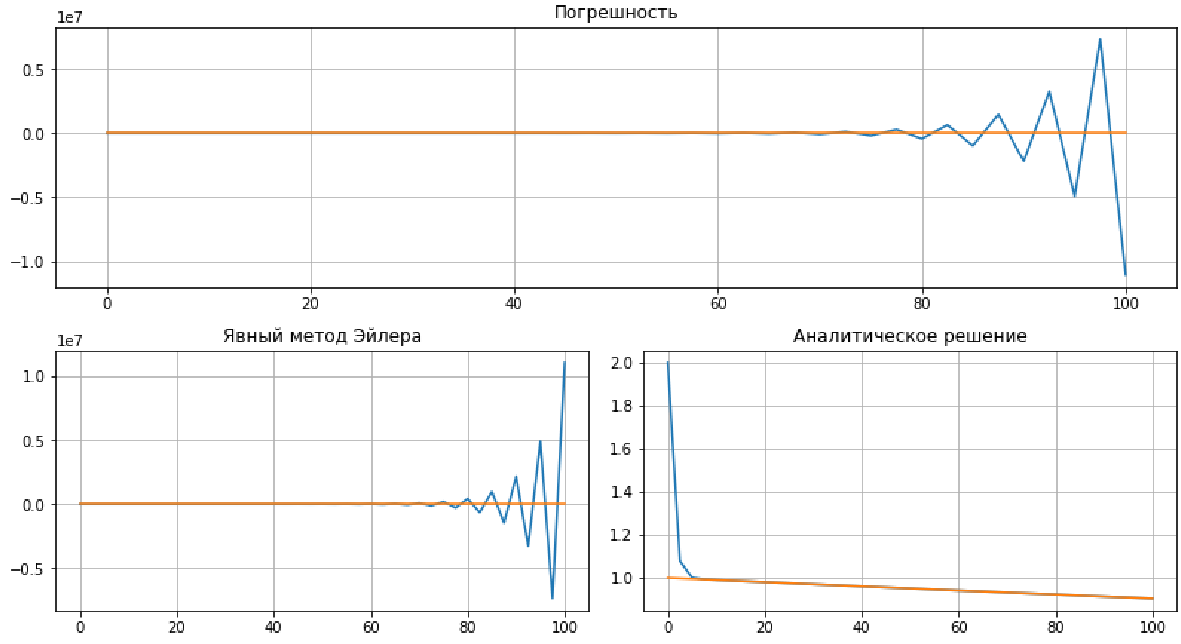

In [13]:

```
tau = 2
draw_explicit_Euler_method(t, u)
```



In [14]:

```
tau = 2.5
draw_explicit_Euler_method(t, u)
```




# 3. Неявный метод Эйлера.

Особенность неявного метода Эйлера заключается в том, что значение функции $F$ берется на новом временном слое:

$$\frac{\vec{y}^{n+1} - \vec{y}^{n}}{\tau} = \vec{F}(t_{n+1}, \vec{y}^{n+1})$$

Таким образом для нахождения приближенного значения искомой функции на новом временном слое $t_{n+1}$ нужно решить нелинейное уравнение относительно $\vec{y}^{n+1}$:

$$\vec{y}^{n+1} - \tau\vec{F}(t_{n+1}, \vec{y}^{n+1}) - \vec{y}^{n} = 0$$

In [15]:

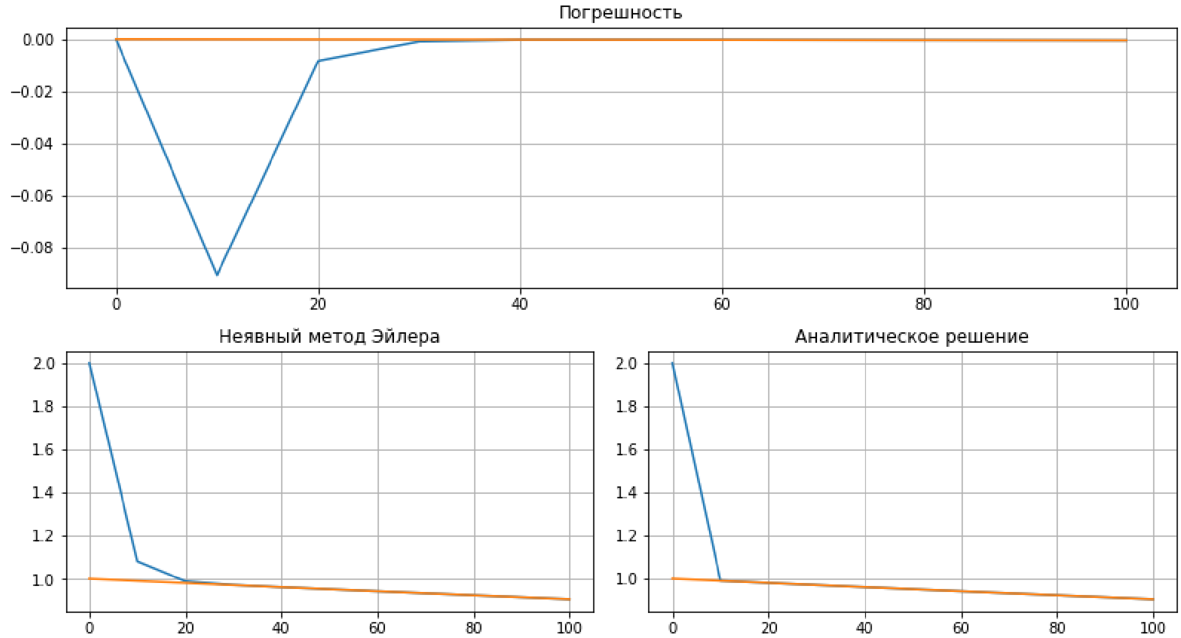
```
def implicit_Euler_method(system_0, u0, tau, time_sum):
    time_numbers = int(time_sum // tau)
    du_ = lambda t, u: np.asarray(system_0(t, u))
    t = np.linspace(0, time_numbers * tau, time_numbers + 1)
    u = np.zeros((time_numbers + 1, len(u0)))
    u[0] = u0
    def func(a, t, b):
        return a - tau * du_(t, a) - b
    for i in range(time_numbers):
        u[i + 1] = optimize.fsolve(func, u[i], (t[i + 1], u[i]))
    return list(u), list(t)
```

In [16]:

```
def draw_implicit_Euler_method(t, u):
    u, t = implicit_Euler_method(system_0, u0, tau, time_sum)
    u_0, t_0 = fun_analytical(tau, time_sum, u0)
    fg = plt.figure(figsize=(11, 6), constrained_layout=True)
    gs = fg.add_gridspec(2, 2)
    fig_ax_1 = fg.add_subplot(gs[0, :])
    plt.title('Погрешность')
    plt.grid(True)
    plt.plot(t, u_0-u)
    fig_ax_2 = fg.add_subplot(gs[1, 0])
    plt.title('Неявный метод Эйлера')
    plt.grid(True)
    plt.plot(t, u)
    fig_ax_3 = fg.add_subplot(gs[1, 1])
    plt.title('Аналитическое решение')
    plt.grid(True)
    plt.plot(t_0, u_0)
```

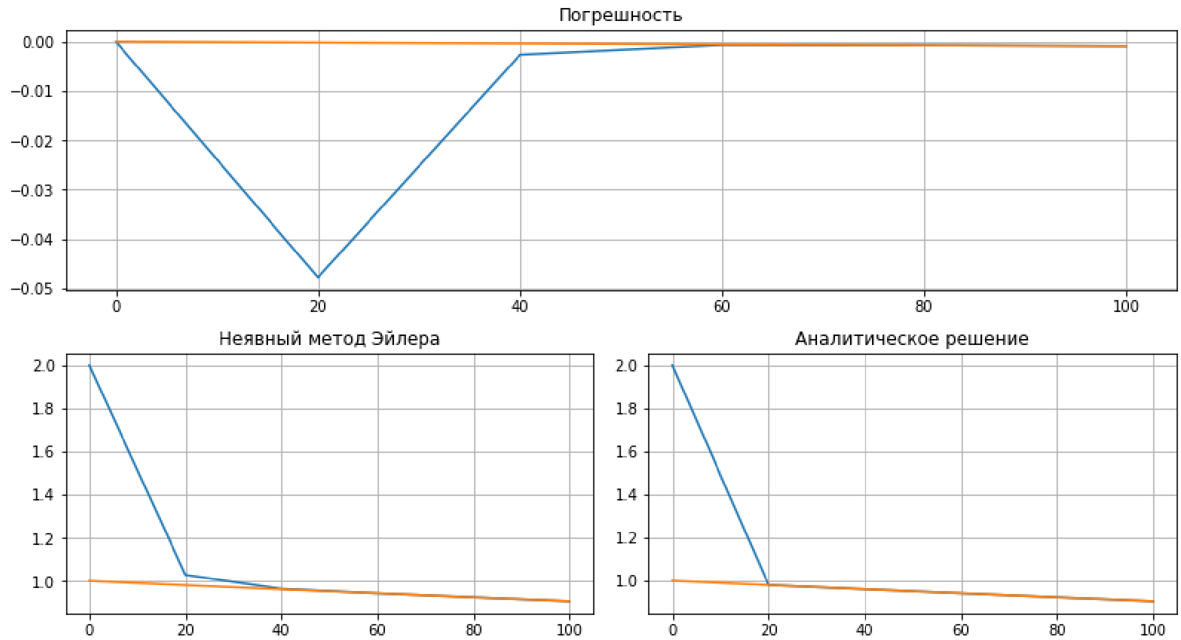
In [17]:

```
tau = 10
draw_implicit_Euler_method(t, u)
```



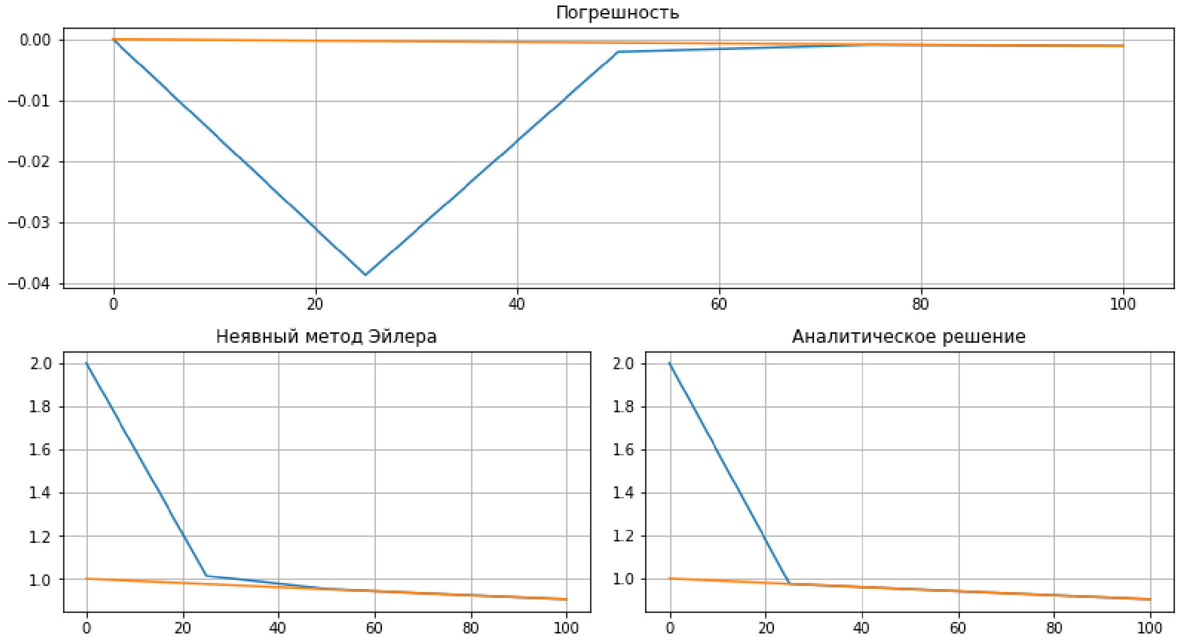

In [18]:

```
tau = 20
draw_implicit_Euler_method(t, u)
```



In [19]:

```
tau = 25
draw_implicit_Euler_method(t, u)
```




# 4. Усовершенствованный метод Эйлера второго порядка.

Рассмотрим участок между точками $[t_{n-1}, t_{n+1}]$ центром в которого является точка $t_n$,тогда:

$$y^{n+1} = y^n + \tau F(t_n, y^n) -> y^{n+1} = y^{n-1} + 2\tau F(t_n, y^n)$$

Данная формула применима только для $n \geqslant 1$, следовательно, значени $y^1$ по ней получить нельзя, поэтому $y^n$ находят по методу Эйлера, при этом для получения более точного результата поступают так: сразу по формуле явного метода Эйлера находят значение:

$$y^{\frac{1}{2}} = y^0 + \frac{\tau}{2} F(t_0, y^0)$$

В точке $t_{\frac{1}{2}} = t_0 + \frac{\tau}{2}$, а затем находится $y^1$ по формуле $y^{n+1} = y^{n-1} + 2\tau F(t_n, y^n)$ с шагом $\frac{\tau}{2}$:

$$y^1 = y^0 + \tau F(t_{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}})$$

После того как $y^1$ найдено дальнейшие вычисления при $n = 1, 2, 3, \ldots N$ производится по формуле

$$y^{n+1} = y^{n-1} + 2\tau F(t_n, y^n)$$

In [20]:

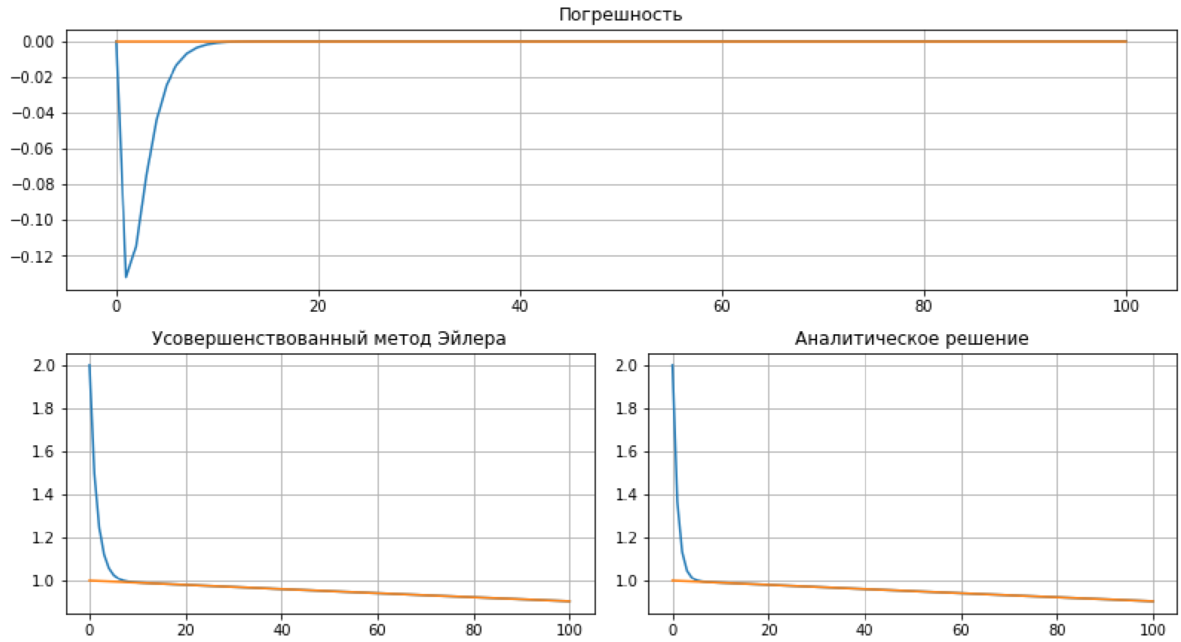
```
def improved_Euler_method(system_0, u0, tau, time_sum):
    time_numbers = int(time_sum // tau)
    du_ = lambda t, u: np.asarray(system_0(t, u))
    t = np.linspace(0, time_numbers * tau, time_numbers + 1)
    u = np.zeros((time_numbers + 1, len(u0)))
    u[0] = u0
    for i in range(0, time_numbers):
        t_ = t[i] + tau / 2
        u_ = u[i] + tau / 2 * du_(t[i], u[i])
        u[i + 1] = u[i] + tau * du_(t_, u_)
    return list(u), list(t)
```

In [22]:

```
def draw_improved_Euler_method(t, u):
    u, t = improved_Euler_method(system_0, u0, tau, time_sum)
    u_0, t_0 = fun_analytical(tau, time_sum, u0)
    fg = plt.figure(figsize=(11, 6), constrained_layout=True)
    gs = fg.add_gridspec(2, 2)
    fig_ax_1 = fg.add_subplot(gs[0, :])
    plt.title('Погрешность')
    plt.grid(True)
    plt.plot(t, u_0-u)
    fig_ax_2 = fg.add_subplot(gs[1, 0])
    plt.title('Усовершенствованный метод Эйлера')
    plt.grid(True)
    plt.plot(t, u)
    fig_ax_3 = fg.add_subplot(gs[1, 1])
    plt.title('Аналитическое решение')
    plt.grid(True)
    plt.plot(t_0, u_0)
```

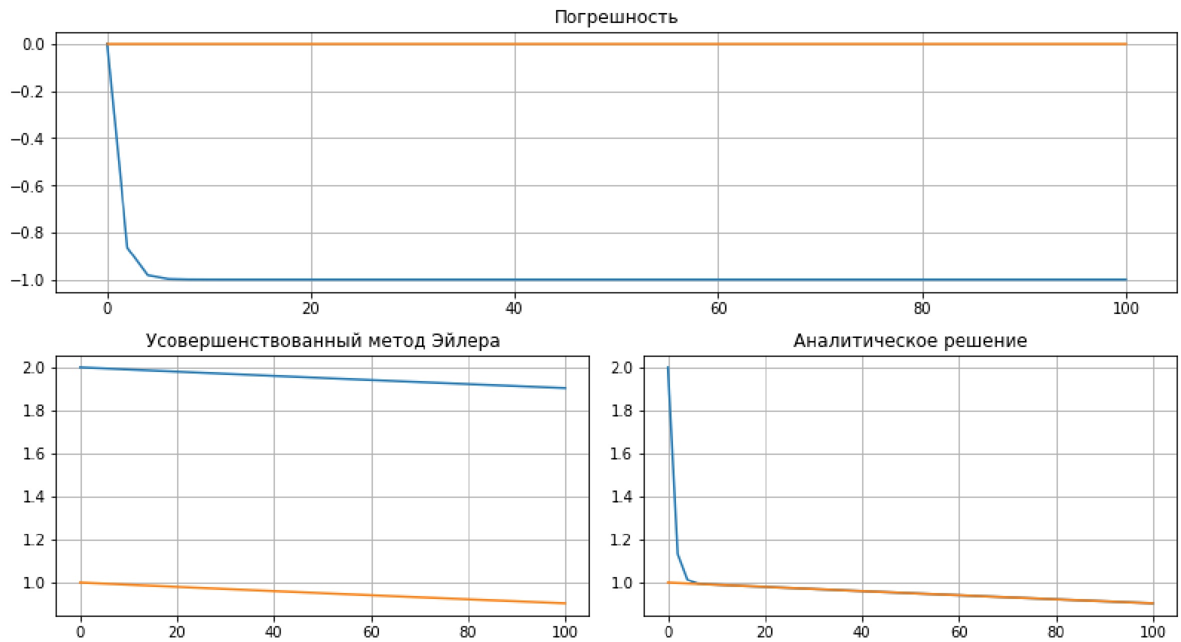
In [23]:

```
tau = 1
draw_improved_Euler_method(t, u)
```



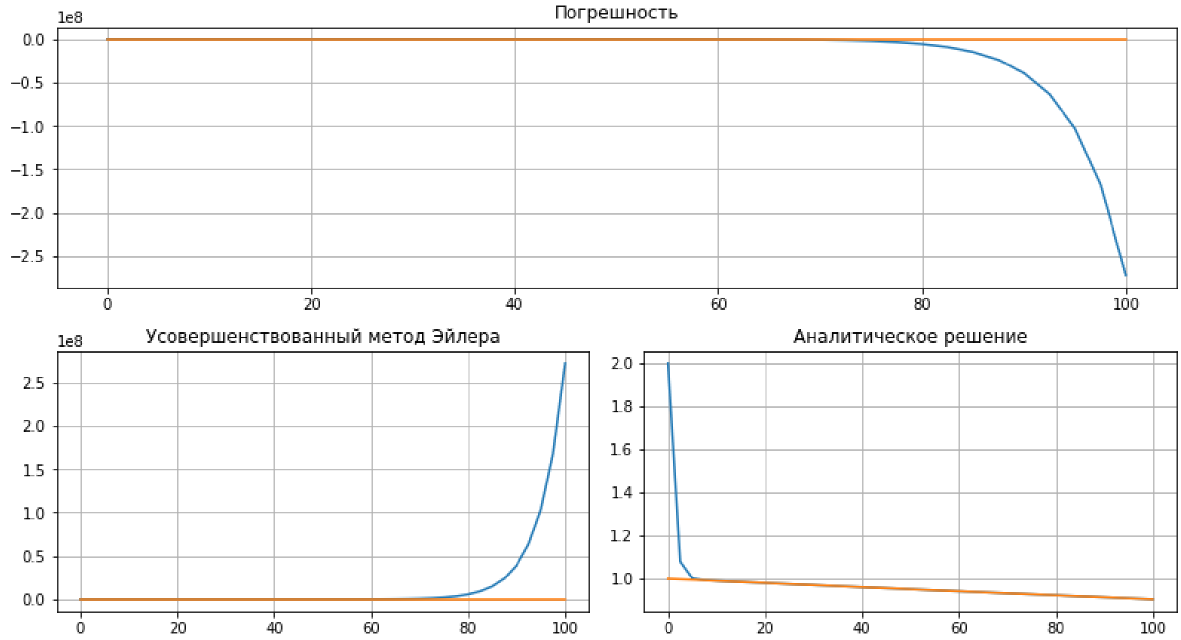

In [24]:

```
tau = 2
draw_improved_Euler_method(t, u)
```



In [25]:

```
tau = 2.5
draw_improved_Euler_method(t, u)
```




# 5. Методы Гира.

Для нахождения неизвестных значений $y^0, y^1, y^2, y^3$ необходимо использовать какой-либо иной метод, например метод Рунге-Кутта.

| Порядок метода | Формула |
|---|---|
| 1 | $y^n - y^{n-1} = \tau F(t_n, y^n)$ |
| 2 | $3y^n - 4y^{n-1} + y^{n-2} = 2\tau F(t_n, y^n)$ |
| 3 | $11y^n - 18y^{n-1} + 9y^{n-2} - 2y^{n-3} = 6\tau F(t_n, y^n)$ |
| 4 | $25y^n - 48y^{n-1} + 36y^{n-2} - 16y^{n-3} + y^{n-4} = 12\tau F(t_n, y^n)$ |

# 5.1 Метод Гира 1-го порядка

Исходя из формул, можно заметить, что неявный метод Эйлера это и есть метод Гира первого порядка.

In [26]:

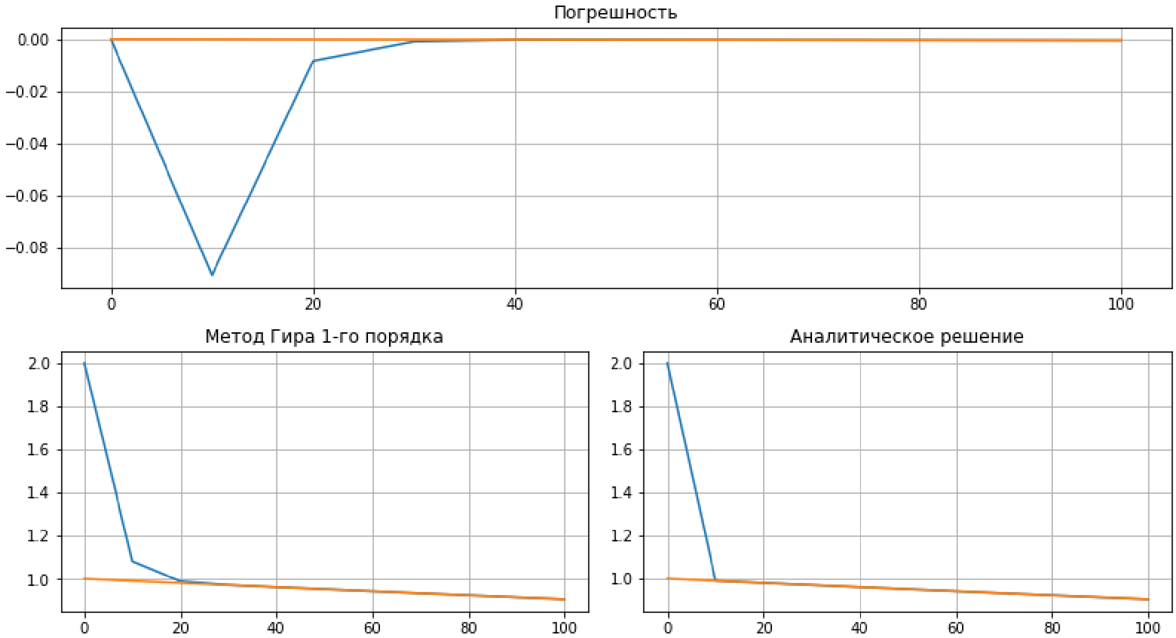
```
def Gears_first_order_method(system_0, u0, tau, time_sum):
    time_numbers = int(time_sum // tau)
    du_ = lambda t, u: np.asarray(system_0(t, u))
    t = np.linspace(0, time_numbers * tau, time_numbers + 1)
    u = np.zeros((time_numbers + 1, len(u0)))
    u[0] = u0
    def func(a, t, b):
        return a - tau * du_(t, a) - b
    for i in range(time_numbers):
        u[i + 1] = optimize.fsolve(func, u[i], (t[i + 1], u[i]))
    return list(u), list(t)
```

In [27]:

```
def draw_Gears_first_order_method(t, u):
    u, t = Gears_first_order_method(system_0, u0, tau, time_sum)
    u_0, t_0 = fun_analytical(tau, time_sum, u0)
    fg = plt.figure(figsize=(11, 6), constrained_layout=True)
    gs = fg.add_gridspec(2, 2)
    fig_ax_1 = fg.add_subplot(gs[0, :])
    plt.title('Погрешность')
    plt.grid(True)
    plt.plot(t, u_0-u)
    fig_ax_2 = fg.add_subplot(gs[1, 0])
    plt.title('Метод Гира 1-го порядка')
    plt.grid(True)
    plt.plot(t, u)
    fig_ax_3 = fg.add_subplot(gs[1, 1])
    plt.title('Аналитическое решение')
    plt.grid(True)
    plt.plot(t_0, u_0)
```

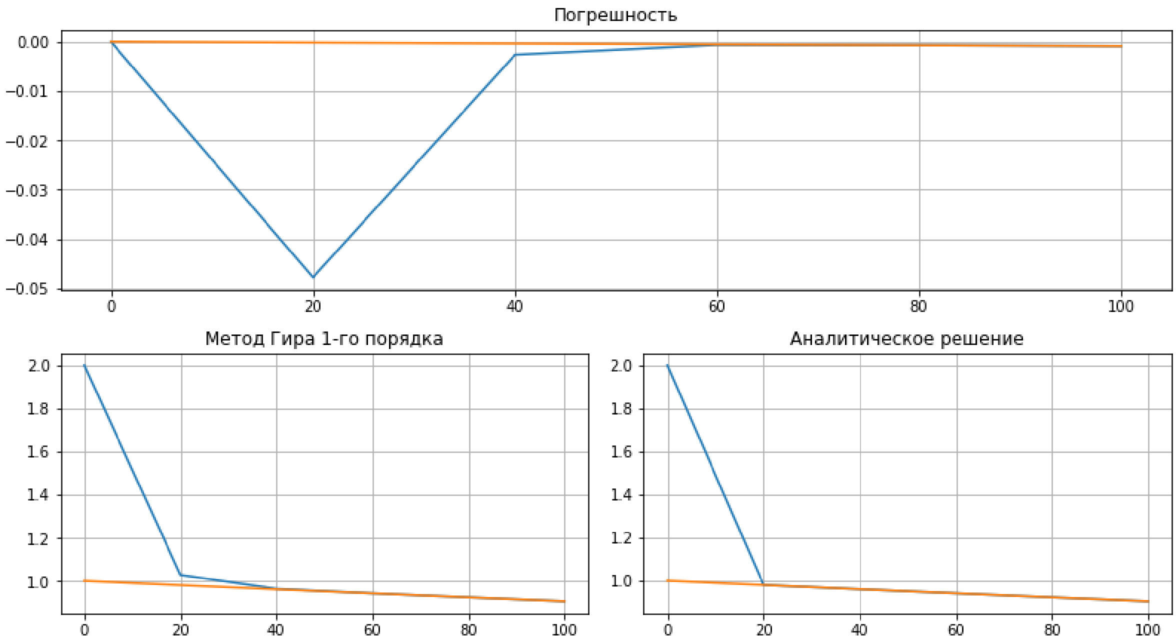
In [28]:

```
tau = 10
draw_Gears_first_order_method(t, u)
```




In [29]:

```
tau = 20
draw_Gears_first_order_method(t, u)
```




# 5.2 Метод Гира 2-го порядка

In [30]:

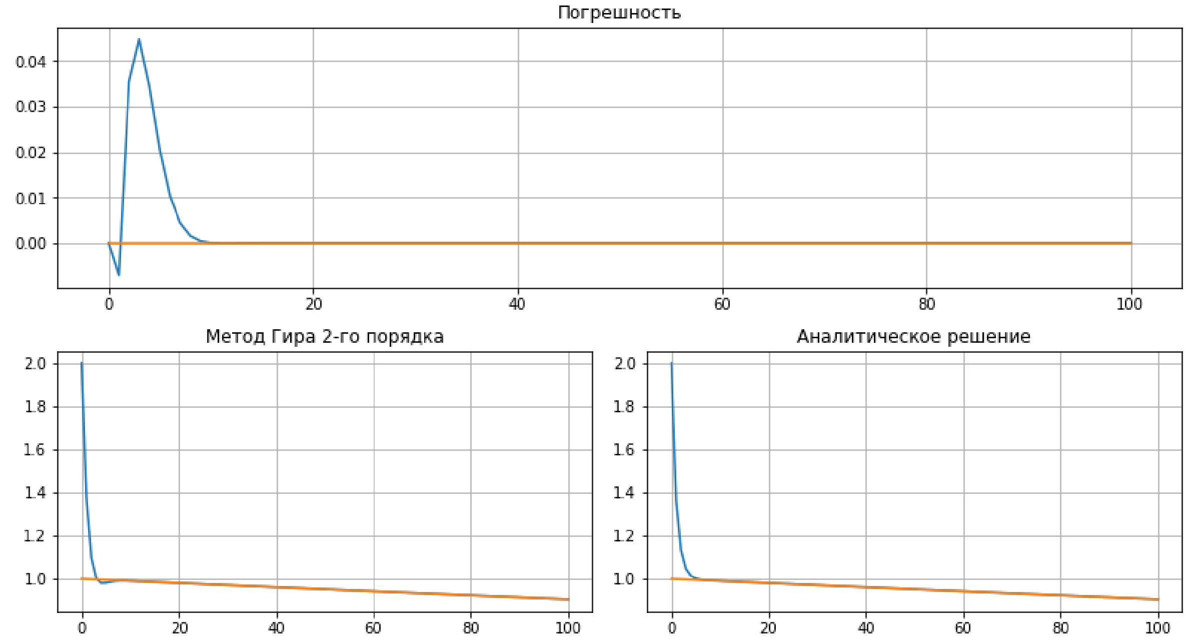
```
def Gears_second_order_method(system_0, u0, tau, time_sum):
    time_numbers = int(time_sum // tau)
    du_ = lambda t, u: np.asarray(system_0(t, u))
    t = np.linspace(0, time_numbers * tau, time_numbers + 1)
    u = np.zeros((time_numbers + 1, len(u0)))
    u[0] = u0
    for i in range(2 - 1):
      k1 = du_(t[i], u[i])
      k2 = du_(t[i] + tau / 2, u[i] + tau * k1  / 2)
      k3 = du_(t[i] + tau / 2, u[i] + tau * k2  / 2)
      k4 = du_(t[i] + tau, u[i] + tau * k3)
      u[i + 1] = u[i] + tau * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
    def func(a, t, b, c):
        return 3 * a - 4 * b + c - 2 * tau * du_(t, a)
    for i in range(time_numbers - 1):
        u[i + 2] = optimize.fsolve(func, u[i], (t[i + 2], u[i + 1], u[i]))
    return list(u), list(t)
```

In [31]:

```
def draw_Gears_second_order_method(t, u):
    u, t = Gears_second_order_method(system_0, u0, tau, time_sum)
    u_0, t_0 = fun_analytical(tau, time_sum, u0)
    fg = plt.figure(figsize=(11, 6), constrained_layout=True)
    gs = fg.add_gridspec(2, 2)
    fig_ax_1 = fg.add_subplot(gs[0, :])
    plt.title('Погрешность')
    plt.grid(True)
    plt.plot(t, u_0-u)
    fig_ax_2 = fg.add_subplot(gs[1, 0])
    plt.title('Метод Гира 2-го порядка')
    plt.grid(True)
    plt.plot(t, u)
    fig_ax_3 = fg.add_subplot(gs[1, 1])
    plt.title('Аналитическое решение')
    plt.grid(True)
    plt.plot(t_0, u_0)
```

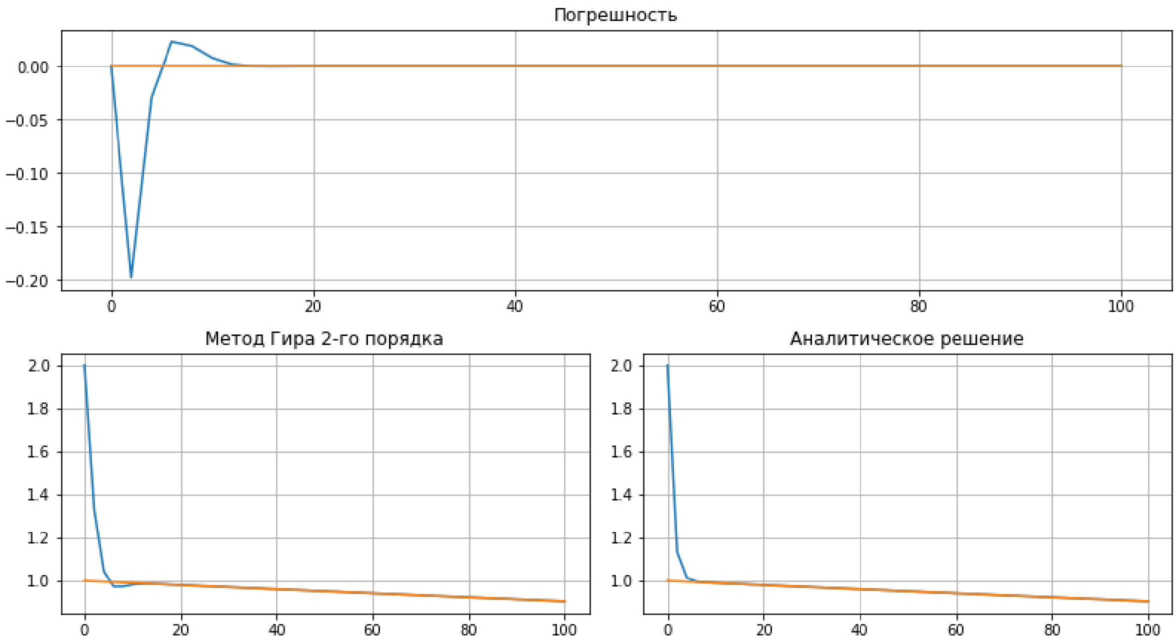
In [32]:

```
tau = 1
draw_Gears_second_order_method(t, u)
```




In [33]:

```
tau = 2
draw_Gears_second_order_method(t, u)
```




#5.3 Метод Гира 4-го порядка

In [34]:

```
def Gears_fourth_order_method(system_0, u0, tau, time_sum):
  time_numbers = int(time_sum // tau)
  du_ = lambda t, u: np.asarray(system_0(t, u))
  t = np.linspace(0, time_numbers * tau, time_numbers + 1)
  u = np.zeros((time_numbers + 1, len(u0)))
  u[0] = u0
  for i in range(4 - 1):
    k1 = du_(t[i], u[i])
    k2 = du_(t[i] + tau / 2, u[i] + tau * k1 / 2)
    k3 = du_(t[i] + tau / 2, u[i] + tau * k2 / 2)
    k4 = du_(t[i] + tau, u[i] + tau * k3)
    u[i + 1] = u[i] + tau * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
  def func(a, t, b, c, d, e):
      return 25 * a - 48 * b + 36 * c - 16 * d + 3*e - 12 * tau * du_(t, a)
  for i in range(time_numbers - 3):
    u[i + 4] = optimize.fsolve(func, u[i], (t[i + 4], u[i + 3], u[i + 2], u[i + 1], u[i]))
  return list(u), list(t)
```

In [36]:

```
def draw_Gears_fourth_order_method(t, u):
  u, t = Gears_fourth_order_method(system_0, u0, tau, time_sum)
  u_0, t_0 = fun_analytical(tau, time_sum, u0)
  fg = plt.figure(figsize=(11, 6), constrained_layout=True)
  gs = fg.add_gridspec(2, 2)
  fig_ax_1 = fg.add_subplot(gs[0, :])
  plt.title('Погрешность')
  plt.grid(True)
  plt.plot(t, u_0-u)
  fig_ax_2 = fg.add_subplot(gs[1, 0])
  plt.title('Метод Гира 4-го порядка')
  plt.grid(True)
  plt.plot(t, u)
  fig_ax_3 = fg.add_subplot(gs[1, 1])
  plt.title('Аналитическое решение')
  plt.grid(True)
  plt.plot(t_0, u_0)
```

In [37]:

```
tau = 1
draw_Gears_fourth_order_method(t, u)
```