

Integraltransformation

Zusammenfassung

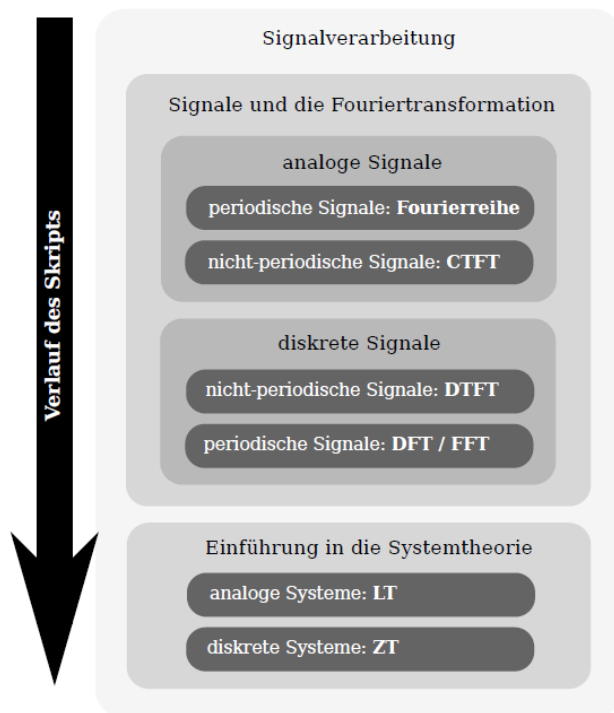
Grasso Antonino

Sommersemester 21

Inhaltsverzeichnis

1	Verlauf und Rahmen	3
2	Klassifizierung der Signale	3
3	Definitionen und Konstanten	3
3.1	Funktionen	3
3.1.1	sinc-Funktion $\text{sinc}(t)$	3
3.1.2	Sprungfunktion $\varepsilon(t)$	3
3.1.3	Zeitsignal $x(t)$	4
3.1.4	Frequenzspektrum $X(\omega)$	4
3.1.5	Abgetastetes Zeitsignal $x_A(t)$	4
3.1.6	Abgetastetes Frequenzspektrum $X_A(\omega)$	4
3.2	Analoge Signale	4
3.2.1	Periodendauer T_p	4
3.2.2	Frequenz f	4
3.2.3	Kreisfrequenz ω_p	4
3.3	Diskrete Signale	5
3.3.1	Abtastfrequenz f_A	5
3.3.2	Blocklänge N	5
3.3.3	Zeitabstände ΔT_A	5
3.3.4	Frequenzabstände $\Delta\omega_p$	5
3.3.5	Periodendauer im Zeitraum T_A	5
3.3.6	Periodendauer im Zeitraum ω_p	6
4	Signale und Fouriertransformation	7
4.1	Analoge Signale	7
4.1.1	Fourierreihe (analoge, periodische Signale)	7
4.1.2	CTFT (analoge, nicht-periodische Signale)	8
4.1.3	Einschub: Die kontinuierliche Faltung	10
4.1.4	Einschub: Der Delta-Impuls	10
4.1.5	Faltung mit dem Delta-Impuls	11
4.1.6	Besonderheiten der CTFT	12
4.2	Diskrete Signale	15
4.2.1	Delta-Kamm	15
4.2.2	Abgetastetes Signal	15
4.2.3	DTFT (diskrete, nicht-periodische Signale)	16
4.2.4	Abtasttheorem	17
4.2.5	Rekonstruktion von abgetasteten Signalen	17
4.2.6	DFT (diskrete, periodische Signale)	19

1 Verlauf und Rahmen



2 Klassifizierung der Signale

$x(t) \setminus t$	zeitkontinuierlich	zeitdiskret
wertkontinuierlich	analoges Signal	abgetastetes/diskretes Signal
wertdiskret	quantisiertes Signal	<u>digitales</u> Signal

3 Definitionen und Konstanten

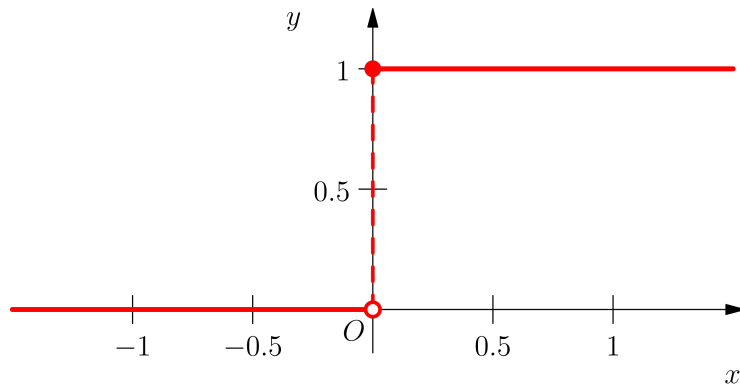
3.1 Funktionen

3.1.1 sinc-Funktion $\text{sinc}(t)$

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

3.1.2 Sprungfunktion $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) :=$$



3.1.3 Zeitsignal $x(t)$

$$x(t) := \text{Zeitsignal}$$

3.1.4 Frequenzspektrum $X(\omega)$

$$X(\omega) := \text{Frequenzspektrum}$$

3.1.5 Abgetastetes Zeitsignal $x_A(t)$

$$x_A(t) := \text{abgetastetes Zeitsignal}$$

3.1.6 Abgetastetes Frequenzspektrum $X_A(\omega)$

$$X_A(\omega) := \text{abgetastetes Frequenzspektrum}$$

3.2 Analoge Signale

3.2.1 Periodendauer T_p

$$x(t) := \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$T_p := x(t + n \cdot T_p) = x(t)$$

3.2.2 Frequenz f

$$f = \frac{1}{T_p} = \frac{\omega_p}{2\pi}$$

3.2.3 Kreisfrequenz ω_p

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$$

3.3 Diskrete Signale

3.3.1 Abtastfrequenz f_A

$$f_A = \frac{1}{\Delta T_A} = \frac{\omega_p}{2\pi}$$

3.3.2 Blocklänge N

$$N :=$$

Anzahl an Stellen des diskreten Signals

$$T_A \cdot \omega_P = 2\pi \cdot N$$

Das Produkt aus Periodendauern ist eine konstante Grösse, welche sich nur mit der Blocklänge N verändern lässt.

→ Unschärferelation der DFT (1. Variante)

$$\Delta T_A \cdot \Delta \omega_P = \frac{2\pi}{N}$$

Das Produkt der Abtastabstände ist ebenso eine konstante Grösse, welche sich nur durch Blocklänge N verändern lässt.

→ Unschärferelation der DFT (2. Variante)

3.3.3 Zeitabstände ΔT_A

$$\Delta T_A :=$$

Zeitabstände der Abtastung im Zeitraum

3.3.4 Frequenzabstände $\Delta \omega_p$

$$\Delta \omega_p :=$$

Frequenzabstände der Abtastung im Frequenzspektrum

$$\Delta \omega_P = \frac{2\pi}{T_A} \Rightarrow$$

Länge der Periode im Zeitraum legt Feinheit der Abtastung im Frequenzraum fest.

3.3.5 Periodendauer im Zeitraum T_A

$$T_A = N \cdot \Delta T_A :=$$

Periodendauer im Zeitraum = Signaldauer

3.3.6 Periodendauer im Zeitraum ω_p

$$\omega_p = N \cdot \Delta\omega_P :=$$

Periodendauer im Frequenzraum = max. Signalfrequenz

$$\omega_p = \frac{2\pi}{\Delta T_A} \Rightarrow$$

Die Feinheit der Abtastung im Zeitraum legt die maximale angenommene Frequenz fest
→ Abtasttheorem!

4 Signale und Fouriertransformation

4.1 Analoge Signale

4.1.1 Fourierreihe (analoge, periodische Signale)

Jedes Signal $x(t)$ kann als unendliche Summe von überlagerten Sinus und Cosinus Funktionen dargestellt werden:

Sinus-Cosinus-Darstellung der Fourierreihe:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_p t) + b_n \cdot \sin(n\omega_p t)) \\ a_n &= \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot \cos(n\omega_p t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot \sin(n\omega_p t) dt \end{aligned} \quad (1)$$

a_n und b_n dienen hierbei als Ähnlichkeitsmass wie sehr sich die Ursprungsfunktion $x(t)$ der jeweiligen Elementarfunktion ($\sin(n\omega_p t)$ oder $\cos(n\omega_p t)$) ähnelt.

Bemerkungen:

- Die Fourierreihe nimmt an Sprungstellen den Mittelwert von linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert an
- Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten lässt sich das Integrationsintervall verschieben z.B. zu $(0, T_p)$.

Betrags-/Phasen-Darstellung der Fourierreihe:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_p t + \varphi_n) \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n &= -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Diese Darstellung lässt sich aus den Additionstheoremen von Sinus und Cosinus ableiten.

Komplexe Darstellung der Fourierreihe:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_p t} \\ c_n &= \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot e^{-jn\omega_p t} dt \end{aligned} \quad (3)$$

Herleitung:

Mit

$$e^{j\omega t} := \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)$$

erhält man

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

und daher:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_p t + \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_p t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_p t}$$

$$c_n = \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n}$$

$$c_{-n} = \frac{A_n}{2} e^{-j\varphi_n}$$

Umformungen:

	$\rightarrow a_n, b_n$
A_n, φ_n	$a_n = A_n \cos \varphi_n,$ $b_n = -A_n \sin \varphi_n$
$c_n, (c_{-n} := \bar{c}_n)$	$a_n = c_n + c_{-n},$ $b_n = j(c_n - c_{-n})$
	$\rightarrow A_n, \varphi_n$
a_n, b_n	$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$
$c_n, (c_{-n} := \bar{c}_n)$	$A_n = 2 c_n = 2\sqrt{\operatorname{Re}(c_n)^2 + \operatorname{Im}(c_n)^2},$ $\varphi_n = \arg(c_n)$
	$\rightarrow c_n, (c_{-n} := \bar{c}_n)$
a_n, b_n	$c_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n)$
A_n, φ_n	$c_n = \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n}$

Bedingungen für die Transformation:

- Die Funktion muss periodisch sein.
- Innerhalb einer Periode aufteilbar in endlich viele stetige Teilstücke.
- Es dürfen keine divergierende Sprungstellen auftauchen.

4.1.2 CTFT (analoge, nicht-periodische Signale)

Der Sinn der CTFT: Man möchte vom Zeitsignal $x(t)$ zum Frequenzspektrum $X(\omega)$.

Die Idee der CTFT: Man nimmt die Fourierreihe und lässt $T_p \rightarrow \infty$ gehen:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (CTFT/FT) \quad (\text{aus 5}) \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (ICTFT/IFT) \quad (\text{aus 6}) \end{aligned} \tag{4}$$

Herleitung:

Wir definieren eine Hilfsvariable: $\omega_n = n\omega_p$, sodass gilt: $\omega_{n+1} - \omega_n = \omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$ und beginnen mit:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

und

$$c_n := \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot e^{-j\omega_n t} dt$$

Wir definieren eine Funktion in Abhängigkeit von ω_n :

$$\begin{aligned} X(\omega_n) &:= \frac{2\pi}{\omega_p} c_n \quad (\Leftrightarrow c_n = \frac{\omega_p}{2\pi} X(\omega_n)) \\ &= \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot e^{-j\omega_n t} dt \end{aligned} \tag{5}$$

Das neu gewonnene c_n wird nun als Koeffizient in die ursprüngliche komplexe Fourierreihe eingesetzt:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_p}{2\pi} X(\omega_n) e^{j\omega_n t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega_n) e^{j\omega_n t} \omega_p \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega_n) e^{j\omega_n t} (\omega_{n+1} - \omega_n) \end{aligned} \tag{6}$$

Lässt man nun $T_p \rightarrow \infty$ gehen, wird ω_p immer kleiner und die Unterteilungen ω_n wandern dichter zueinander und im Grenzfall ein kontinuierlicher Verlauf ($\omega_n \rightarrow \omega$) und man erhält ein Riemann-Integral. Daraus folgt sich die oben aufgeführten Integrale für $x(t)$ und $X(\omega)$.

Bemerkungen:

- Stärke des Vorhandenseins einer Frequenz: $|X(\omega)|$
- Verschiebung der einzelnen Frequenzen: $\varphi = \arg(X(\omega))$
- Es gilt: $\overline{X(\omega)} = X(-\omega)$
- Bei reellen Signalen ist Betragsspektrum $|X(\omega)|$ symmetrisch um Null

4.1.3 Einschub: Die kontinuierliche Faltung

$$y(t) := x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau \quad (7)$$

(Integral)

Mit der Laufvariable τ läuft man x_1 forwards durch und x_2 rückwärts aber um t verschoben durch.

t ist hier als fester, bekannter Wert zu interpretieren.

(Faltung) (Man macht das was oben drüber steht für jedes beliebige t)

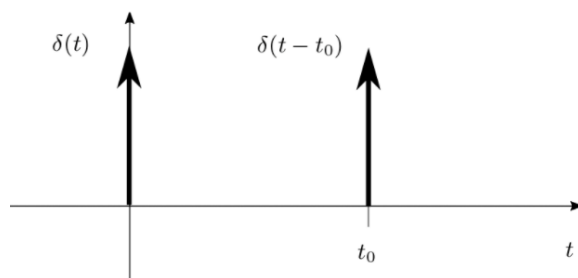
Man legt ein τ für x_1 und x_2 fest, verändert t laufend und sieht sich die Schnittfläche der beiden Funktionen an.

Main Purpose in der Signalverarbeitung: Abschwächung / Auslöschung von hohen Frequenzen.

4.1.4 Einschub: Der Delta-Impuls

Wir definieren eine Funktion:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0 \text{ for } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1 \end{aligned} \quad (8)$$



Verwendung des Delta-Impulses (Ausblendeigenschaft):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0) \cdot \delta(t - t_0) dt \\ &= x(t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt \\ &= x(t_0) \end{aligned} \quad (9)$$

$x(t)$ wird überall ignoriert ausser an der Stelle an der $\delta(t - t_0) \neq 0$, d.h. bei $t = t_0$.
Quasi eine Abtastung der Funktion $x(t)$ an Stelle t_0 .

Fouriertransformation des Delta-Impulses:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega 0} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t) \circ \bullet 1$$

Das Spektrum des Delta-Impulses enthält alle Frequenz mit Gewicht 1!

Die Stammfunktion des Delta-Impulses: $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \delta(t)$$

Fouriertransformation der Sprungfunktion:

$$\varepsilon(t) \circ \bullet \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

4.1.5 Faltung mit dem Delta-Impuls

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t - t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta((t - t_0) - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(\tau - (t - t_0)) d\tau \\ &= x(t - t_0) \end{aligned} \tag{10}$$

Kurz bedeutet das

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) ,$$

und für $t_0 = 0$

$$x(t) * \delta(t) = x(t) .$$

Der Delta-Impuls ist das Neutrale Element bezüglich der Faltung!

4.1.6 Besonderheiten der CTFT

Eigenschaften der CTFT:

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Frequenzbereich
Linearität	$k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \circ \longrightarrow k_1 X_1(\omega) + k_2 X_2(\omega)$
Symmetrie / Dualität	Gilt: $x(t) \circ \longrightarrow X(\omega)$ dann auch: $X(t) \circ \longrightarrow 2\pi x(-\omega)$
Zeitverschiebung	$x(t - \tau) \circ \longrightarrow X(\omega) e^{-j\omega\tau}$
Frequenzverschiebung	$x(t) e^{jWt} \circ \longrightarrow X(\omega - W)$

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Frequenzbereich
Zeitskalierung	$x(k \cdot t) \circ \longrightarrow \frac{1}{ k } \cdot X\left(\frac{1}{k} \cdot \omega\right)$
Frequenzskalierung	$\frac{1}{ k } \cdot x\left(\frac{1}{k} \cdot t\right) \circ \longrightarrow X(k \cdot \omega)$
Faltung (Zeit)	$x_1(t) * x_2(t) \circ \longrightarrow X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$
Faltung (Frequenz)	$2\pi \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \circ \longrightarrow X_1(\omega) * X_2(\omega)$

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Frequenzbereich
Differentiation (Zeit)	$\frac{d}{dt} x(t) \circ \longrightarrow j\omega X(\omega)$
Integration (Zeit)	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \circ \longrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi \cdot X(0) \cdot \delta(\omega)$
Reelle Signale $x(t)$	$X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$ und $ X(-\omega) = X(\omega) $

Signaldauer-Bandbreite-Produkt:

Signal	Zeitintervall	Dauer	Spektrum	Bereich	Bandbreite
$x(t)$	$[t_0, t_1]$	$t_1 - t_0$	$X(\omega)$	$[\omega_0, \omega_1]$	$\omega_1 - \omega_0$
$x(k t)$	$[\frac{1}{k} t_0, \frac{1}{k} t_1]$	$\frac{1}{k} (t_1 - t_0)$	$\frac{1}{ k } X(\frac{1}{k} \omega)$	$[k \omega_0, k \omega_1]$	$k (\omega_1 - \omega_0)$
$\frac{1}{ k } x(\frac{1}{k} t)$	$[k t_0, k t_1]$	$k (t_1 - t_0)$	$X(k \omega)$	$[\frac{1}{k} \omega_0, \frac{1}{k} \omega_1]$	$\frac{1}{k} (\omega_1 - \omega_0)$





Demnach ist das *Signaldauer–Bandbreite–Produkt* (oder *Zeit–Bandbreite–Produkt*) konstant, da $\frac{1}{k} (t_1 - t_0) \cdot k (\omega_1 - \omega_0) = k (t_1 - t_0) \cdot \frac{1}{k} (\omega_1 - \omega_0) = (t_1 - t_0) \cdot (\omega_1 - \omega_0)$:

$\text{Signaldauer} \times \text{Bandbreite} = \text{const.}$

Korrespondenzen der CTFT:

Zeitbereich $x(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	Frequenzbereich $X(\omega)$
$\delta(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	1
1	$\circ \text{---} \bullet$	$2\pi \delta(\omega)$
$\varepsilon(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$ t $	$\circ \text{---} \bullet$	$-\frac{2}{\omega^2}$
t^n	$\circ \text{---} \bullet$	$2\pi j^n \cdot \frac{d^n}{d\omega^n} \delta(\omega)$

Zeitbereich $x(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	Frequenzbereich $X(\omega)$
$e^{-a t }$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
$\varepsilon(t) \cdot e^{-at}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$\varepsilon(t) \cdot e^{-at} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{(j\omega + a)^n}$
$e^{j\omega_0 t}$	$\circ \text{---} \bullet$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

Zeitbereich $x(t)$		Frequenzbereich $X(\omega)$
$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$		$\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$\text{sinc}(\omega_0 t)$		$\frac{\pi}{\omega_0} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$
$e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\tau^2}t^2}$		$\sqrt{2\pi}\tau \cdot e^{-\frac{1}{2}\tau^2\omega^2}$

4.2 Diskrete Signale

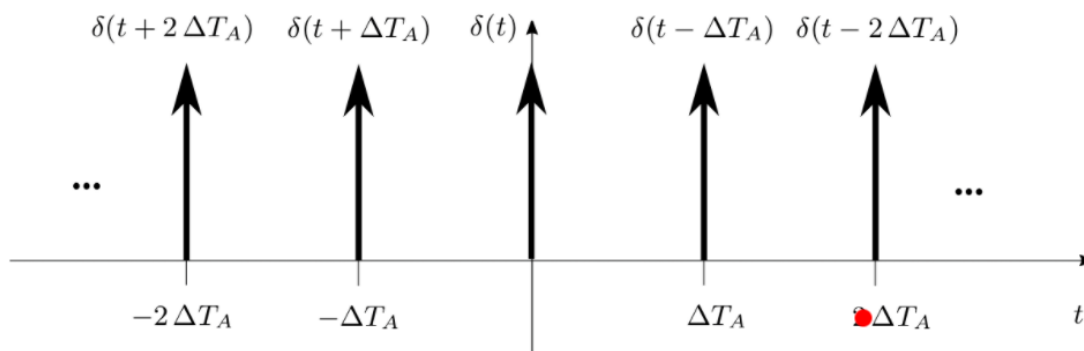
4.2.1 Delta-Kamm

Die Idee eines Delta-Kamms: Aus einer kontinuierlichen Funktion wird eine Zahlenfolge gemacht.

Um eine Zahlenfolge aus einer kontinuierlichen Funktion zu erhalten, muss diese abgetastet werden. Die Abtastung einer kontinuierlichen Funktion erfolgt mit einem Delta-Kamm:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) \quad (11)$$

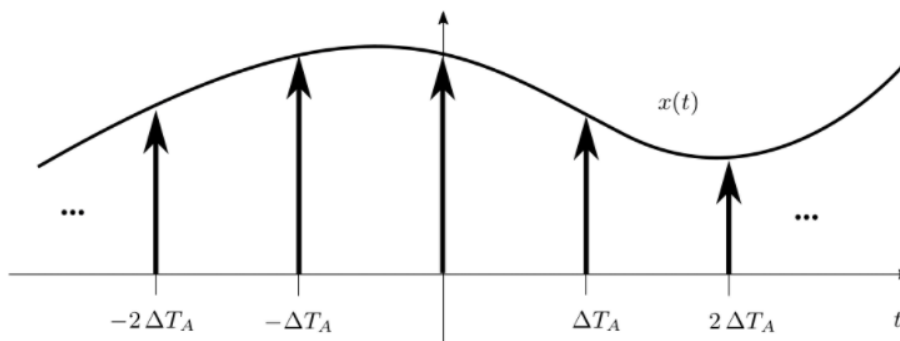
Der Delta-Kamm stellt eine Schar einzelner Delta-Impulsen an bestimmten gewünschten Abtastungsorten mit gleichem Abstand voneinander dar:



4.2.2 Abgetastetes Signal

Ein abgetastetes Signal ist mit Hilfe des Delta-Kamms definiert durch:

$$x_A(t) := x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) \quad (12)$$



$x_A(t)$ wird auch als Diskretes Signal bezeichnet.

4.2.3 DTFT (diskrete, nicht-periodische Signale)

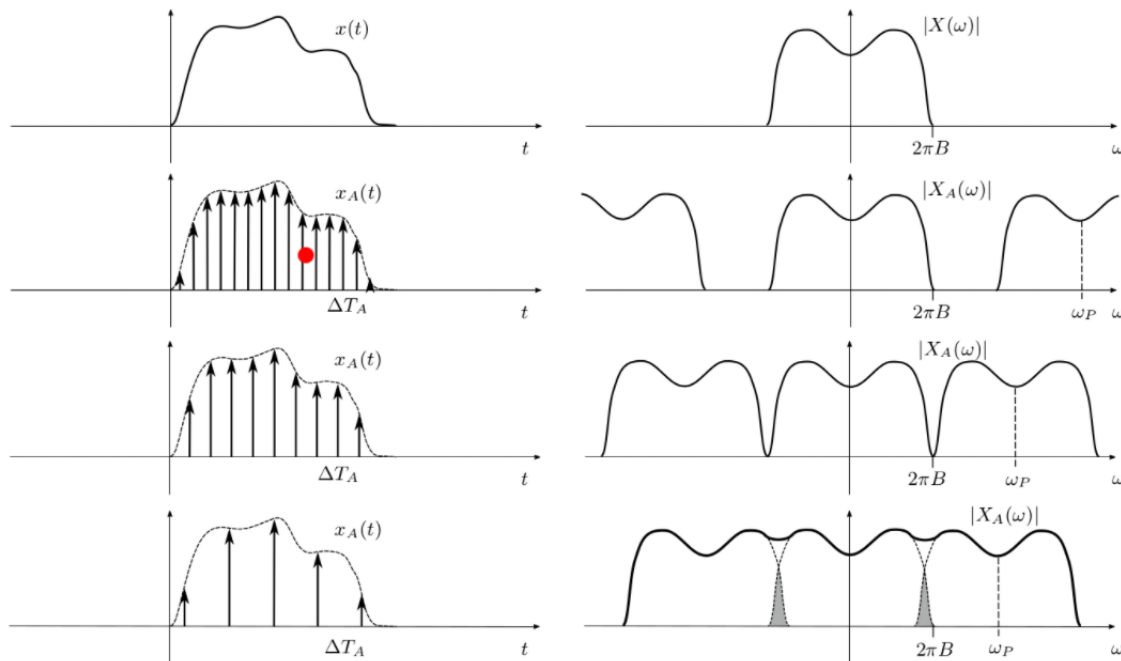
Mit Hilfe der Ausblendeigenschaft des Delta-Impulses kann man die Fouriertransformation eines solchen abgetasteten Signals bestimmen:

$$\begin{aligned}
 X_A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_A(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \cdot \delta(t - n\Delta T_A) dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta T_A) e^{-j\omega n\Delta T_A}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Bemerkungen:

- Ein diskretes Zeitsignal führt dennoch zu einem kontinuierlichen Frequenzspektrum
- Durch Abtastung eines Zeitsignals mit Zeitabständen ΔT_A wird Frequenzspektrum periodisch mit Periodendauer $\omega_p := \frac{2\pi}{\Delta T_A}$
- diskretes Zeitsignal $\circ \bullet$ periodisches Spektrum
- periodisches Zeitsignal $\circ \bullet$ diskretes Spektrum
- Zusammenhang CTFT und DTFT: $x_A(\omega) = \frac{1}{\Delta T_A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta T_A}\right)$

4.2.4 Abtasttheorem



Man folgert: $\omega_P > 2 \cdot 2\pi B$

Daraus ergibt sich das eigentliche Abtasttheorem:

$$f_A = \frac{1}{\Delta T_A} > 2 \cdot B \Rightarrow \Delta T_A < \frac{1}{2 \cdot B} \quad (14)$$

Ist das Abtasttheorem beim Abtasten eines Signales eingehalten, so kann versichert werden, dass keine Informationen des Originalsignals verloren gehen und eine Rekonstruktion ist möglich.

⇒ "Mindestens mit der doppelt so grossen Frequenz wie im Originalsignal vorhanden ist abtasten."

Bemerkungen:

- Die höchsten Frequenzen sind die, die zuerst unter der Verletzung des Abtasttheorems leiden (Unterabtastung)
- Informationsverlust ist nicht leicht zu beheben
- In der Praxis verwendet man häufig eine deutliche Überabtastung

4.2.5 Rekonstruktion von abgetasteten Signalen

Unter der Annahme, dass das Abtasttheorem mit Zeitintervallen ΔT_A nicht verletzt wird, kann aus den diskreten Abtastwerten $x(n\Delta T_A)$ die kontinuierliche Originalfunktion $x(t)$

rekonstruiert werden mit:

$$x(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta T_A) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - n\Delta T_A)\right) \quad (15)$$

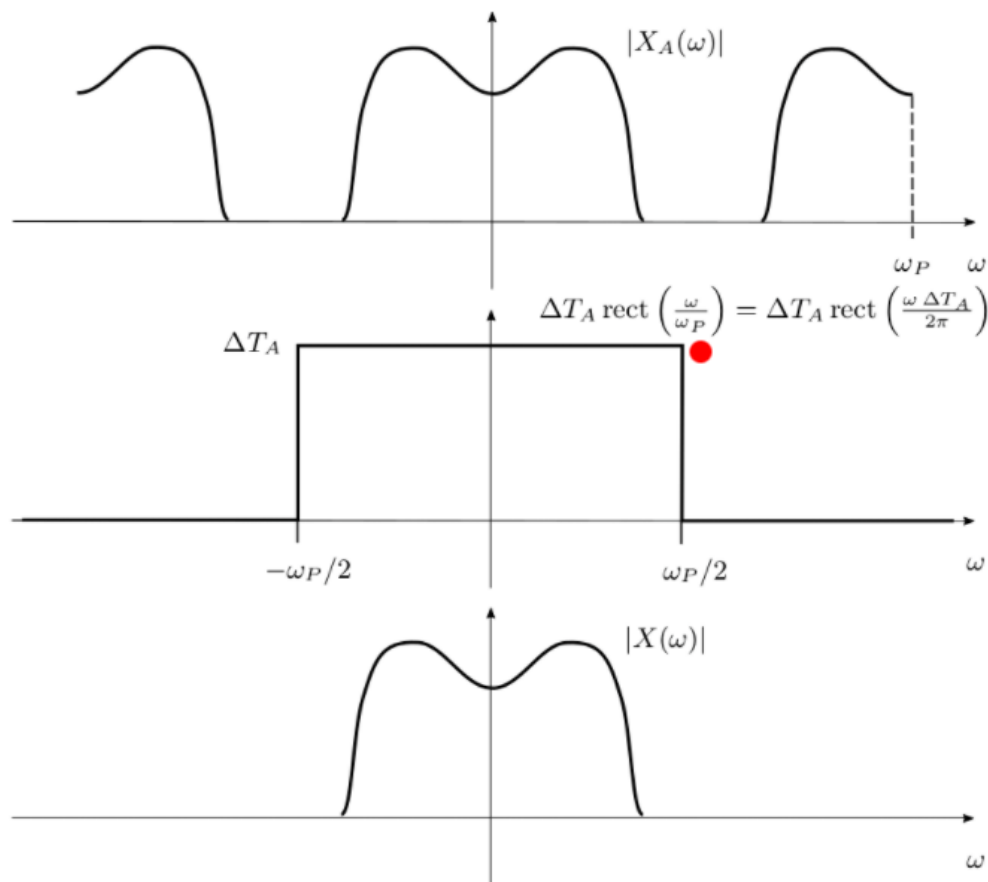
⇒ "Man interpoliert die diskreten Punkten mit der *sinc*-Funktion."

Herleitung:

1. Schritt: Isolieren einer Periode durch Fenstern

Man verwendet einen wichtigen Trick: Das sogenannte Fenstern von Signalen.

Man multipliziert die periodische Fouriertransformierte des Abtastsignals $X_A(\omega)$ mit einem Rechteckpuls der Breite ω_P , um die Fouriertransformierte des Originalsignals $X(\omega)$ zurück zu gewinnen:



Signal Fenstern mathematisch:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X_A(\omega) \cdot \Delta T_A \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_P}\right) \\ &= X_A(\omega) \cdot \Delta T_A \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega \Delta T_A}{2\pi}\right) \end{aligned} \quad (16)$$

2. Schritt: Zurücktransformieren

(Multiplikation im Spektrum \Rightarrow Faltung im Zeitsignal)

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &\circ\bullet x_A(t) * \text{sinc}\left(\frac{t\pi}{\Delta T_A}\right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n\Delta T_A) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - \tau)\right) d\tau \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - \tau)\right) \delta(\tau - n\Delta T_A) dt\tau \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta T_A) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - n\Delta T_A)\right) = x(t)
 \end{aligned} \tag{17}$$

4.2.6 DFT (diskrete, periodische Signale)

Der Sinn der DFT: Man will nicht nur das Signal auf einer digitalen Rechen- oder Speichereinheit verarbeiten, sondern auch das Spektrum.

Die Idee der DFT:

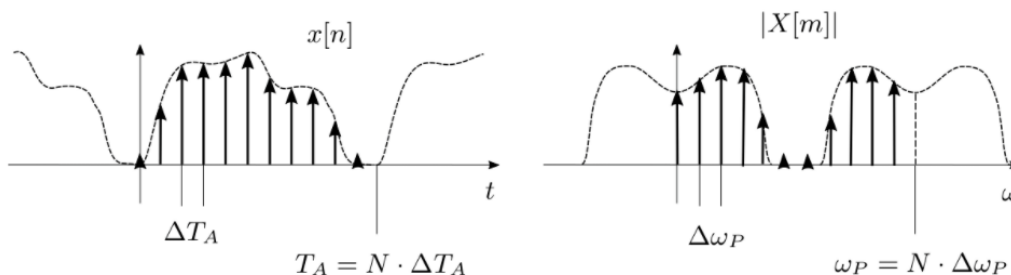
diskretes & periodisches Zeitsignal $\circ\bullet$ diskretes & periodisches Spektrum

$$\begin{aligned}
 X[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{mn}{N}} \quad (DFT) \\
 x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{j2\pi \frac{mn}{N}} \quad (IDFT) \\
 &\text{wobei} \\
 x[n] &:= x(n\Delta T_A) \\
 X[m] &:= X(m\Delta\omega_P)
 \end{aligned} \tag{18}$$

Es gilt für Zeitsignal und Frequenzspektrum in dieser Darstellung die gleiche Periode N , d.h. $X[m + N] = X[m]$ und $x[n + N] = x[n]$.

Bemerkungen:

- Man erhält für N abgetastete Werte des Originalsignals automatisch auch N Werte des Spektrums.
- Zusammenhang diskretes Zeit- und Spektralsignal:



- $X[N - m] = \overline{X[m]}$ und damit auch $|X[N - m]| = |\overline{X[m]}| = |X[m]|$
- Für ein reelles Signal $x[n]$ ist das Betragsspektrum $|X[m]|$ immer symmetrisch innerhalb einer Periode: $|X[m]| = |X[N - m]|$ für $m = 0, \dots, N - 1$

Die Herleitung der DFT wird in 5. Schritten aufgeteilt:

- Schritte 1-2: Erzeugen des diskreten und periodischen Zeitsignals für die DFT
- Schritte 3-5: Zusammenhang zwischen dem diskreten und periodischen Zeitsignal mit seinem diskreten und periodischen Spektrum
- Der Zusammenhang wird durch folgende Argumentation erreicht:
diskretes & periodisches Zeitsignal $\circ \bullet$ CTFT $\{\cdot\}$ $\bullet \circ$ ICTFT $\{\text{CTFT}\{\cdot\}\}$

1. Schritt

- kontinuierliches Zeitsignal $x(t)$ im Intervall $[0, T_A]$ fenstern, so dass wesentliche Signalinformation enthalten ist.
- gefensterte Signal künstlich periodisch fortsetzen und umbenennen zu $x_P(t)$.
- Potentielle Fehler: Falsch abschneiden fürs zukünftige Periodisieren.
→ Leakage Fehler

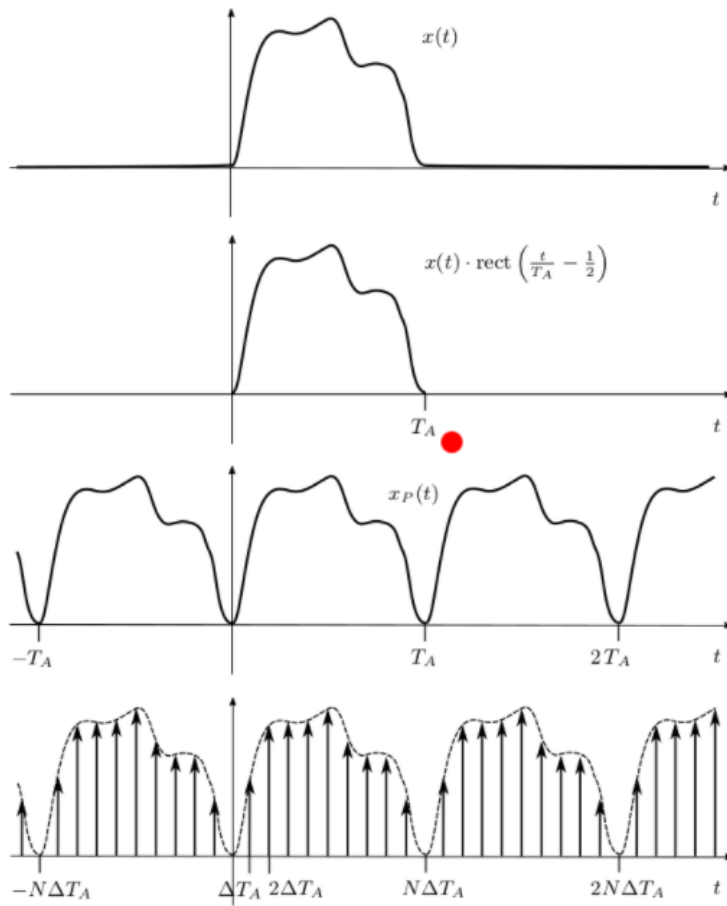
2. Schritt

- Abtastung des periodischen Signals $x_P(t)$ wobei N Abtastzeitpunkte im Grundintervall $[0, T_A]$ untergebracht werden. N wird als Blocklänge des diskreten Signals bezeichnet.
- Dadurch haben die Abtastzeitpunkte einen Abstand von $\Delta T_A := \frac{T_A}{N}$. D.h. wir betrachten das abgetastete Signal:

$$x_P(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A)$$

- Potentielle Fehler: Abtasttheorem verletzen.

Grafik 1. und 2. Schritt:



3. Schritt — Konkrete Herleitung erspart

- Fouriertransformation (CTFT) für das abgetastete Signal:

$$\begin{aligned}
 & x_P(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) \\
 \circ \bullet & \left[\frac{2\pi}{N\Delta T_A} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T_A) e^{-jn\Delta T_A \omega} \right] \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\Delta\omega_p) \right]
 \end{aligned} \tag{19}$$

- Es gilt im Grundintervall $[0, T_A]$, dass $x_P(n\Delta T_A) = x(n\Delta T_A)$.
- Es gilt im Grundintervall, dass die Konstante $\Delta\omega_p := \frac{2\pi}{N\Delta T_A}$ eingeführt wird.
- Wir stellen fest: Die Fouriertransformierte ist ein abgetastetes Signal mit Abtastorten $k\Delta\omega_p, k \in \mathbb{Z}$.

4. Schritt — Konkrete Herleitung erspart

- Inverse Fouriertransformation (ICTFT) auf das Spektrum, um wieder das Originalsignal an den Abtastorten zu erhalten:

$$\bullet \circ \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T_A) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} e^{j2\pi \frac{k}{N} \frac{t}{\Delta T_A}} \right] \cdot \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - l\Delta T_A) \right] \quad (20)$$

- Die fordere eckige Klammer ist identisch zu $x_p(t)$.
- Ist $t \in [0, T_A]$, ist die fordere eckige Klammer sogar identisch zu $x(t)$.
- Gilt auch für spezielle t : Für ein $t_0 \in [0, T_A] \Rightarrow x(t_0)$.

5. Schritt

- Die Erkenntnis von Schritt 4 für $t_0 = m\Delta T_A$ anwenden:

$$x(m\Delta T_A) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T_A) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \right] e^{j2\pi \frac{km}{N}} \quad (21)$$

- Die eckige Klammer =: $X(k\Delta\omega_P)$ (DFT)
- Der ganze Ausdruck =: IDFT