

Integraltransformation

Zusammenfassung

Grasso Antonino

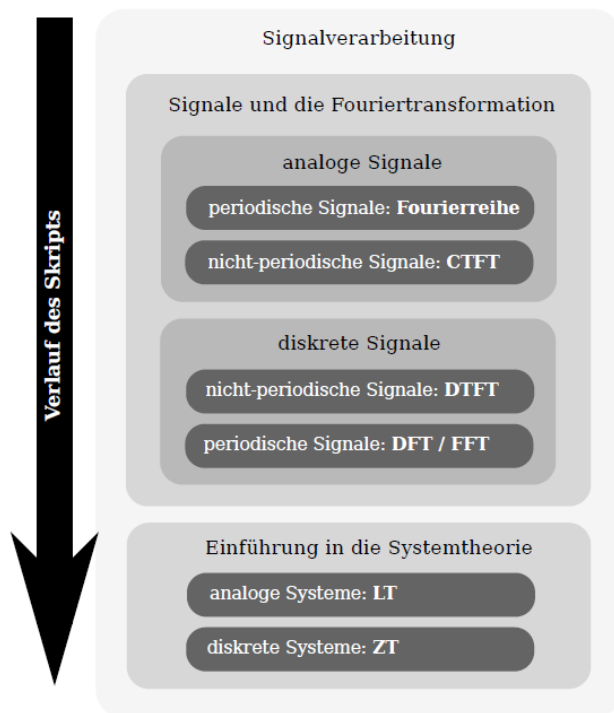
Sommersemester 21

Inhaltsverzeichnis

1	Verlauf und Rahmen	4
2	Klassifizierung von Signalen	4
3	Definitionen und Konstanten	4
3.1	Funktionen	4
3.1.1	sinc-Funktion $\text{sinc}(t)$	4
3.1.2	Sprungfunktion $\varepsilon(t)$	4
3.1.3	Zeitsignal $x(t)$	5
3.1.4	Frequenzspektrum $X(\omega)$	5
3.1.5	Abgetastetes Zeitsignal $x_A(t)$	5
3.1.6	Abgetastetes Frequenzspektrum $X_A(\omega)$	5
3.2	Analoge Signale	5
3.2.1	Periodendauer T_p	5
3.2.2	Frequenz f	5
3.2.3	Kreisfrequenz ω_p	5
3.2.4	Bandbreite B	6
3.3	Diskrete Signale	6
3.3.1	Abtastfrequenz f_A	6
3.3.2	Blocklänge N	6
3.3.3	Zeitabstände ΔT_A	6
3.3.4	Frequenzabstände $\Delta\omega_p$	6
3.3.5	Periodendauer im Zeitraum T_A	7
3.3.6	Periodendauer im Frequenzspektrum ω_p	7
4	Signale und Fouriertransformation	8
4.1	Analoge Signale	8
4.1.1	Fourierreihe (analoge, periodische Signale)	8
4.1.2	CTFT (analoge, nicht-periodische Signale)	9
4.1.3	Einschub: Die kontinuierliche Faltung	11
4.1.4	Einschub: Der Delta-Impuls	11
4.1.5	Faltung mit dem Delta-Impuls	12
4.1.6	Besonderheiten der CTFT	13
4.2	Diskrete Signale	16
4.2.1	Delta-Kamm	16
4.2.2	Abgetastetes Signal	16
4.2.3	DTFT (diskrete, nicht-periodische Signale)	17
4.2.4	Abtasttheorem	18
4.2.5	Rekonstruktion von abgetasteten Signalen	18
4.2.6	DFT (diskrete, periodische Signale)	20
4.2.7	Handlungsanweisung zur DFT	23
4.2.8	Einschub: Die diskrete Faltung	27

4.2.9	Besonderheiten der DFT	30
-------	----------------------------------	----

1 Verlauf und Rahmen



2 Klassifizierung von Signalen

$x(t) \setminus t$	zeitkontinuierlich	zeitdiskret
wertkontinuierlich	analoges Signal	abgetastetes/diskretes Signal
wertdiskret	quantisiertes Signal	<u>digitales</u> Signal

3 Definitionen und Konstanten

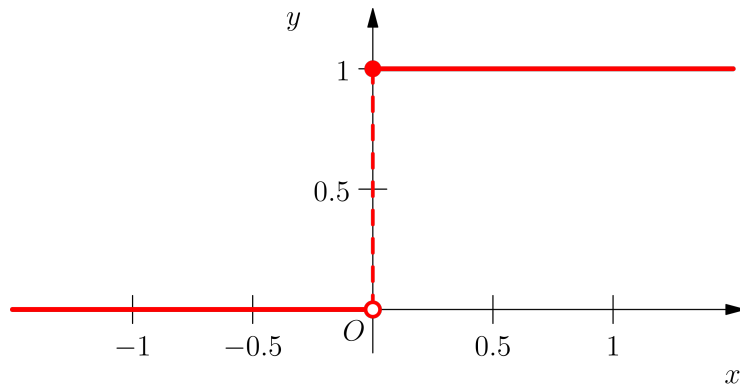
3.1 Funktionen

3.1.1 sinc-Funktion $\text{sinc}(t)$

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

3.1.2 Sprungfunktion $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) :=$$



3.1.3 Zeitsignal $x(t)$

$$x(t) := \text{Zeitsignal}$$

3.1.4 Frequenzspektrum $X(\omega)$

$$X(\omega) := \text{Frequenzspektrum}$$

3.1.5 Abgetastetes Zeitsignal $x_A(t)$

$$x_A(t) := \text{abgetastetes Zeitsignal}$$

3.1.6 Abgetastetes Frequenzspektrum $X_A(\omega)$

$$X_A(\omega) := \text{abgetastetes Frequenzspektrum}$$

3.2 Analoge Signale

3.2.1 Periodendauer T_p

$$x(t) := \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$T_p := x(t + n \cdot T_p) = x(t)$$

3.2.2 Frequenz f

$$f = \frac{1}{T_p} = \frac{\omega_p}{2\pi}$$

3.2.3 Kreisfrequenz ω_p

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$$

3.2.4 Bandbreite B

$$B :=$$

höchste vorkommende Frequenz

3.3 Diskrete Signale

3.3.1 Abtastfrequenz f_A

$$f_A = \frac{1}{\Delta T_A} = \frac{\omega_p}{2\pi}$$

3.3.2 Blocklänge N

$$N :=$$

Anzahl an Stellen des diskreten Signals

$$T_A \cdot \omega_P = 2\pi \cdot N$$

Das Produkt aus Periodendauern ist eine konstante Grösse, welche sich nur mit der Blocklänge N verändern lässt.

→ Unschärferelation der DFT (1. Variante)

$$\Delta T_A \cdot \Delta \omega_P = \frac{2\pi}{N}$$

Das Produkt der Abtastabstände ist ebenso eine konstante Grösse, welche sich nur durch Blocklänge N verändern lässt.

→ Unschärferelation der DFT (2. Variante)

3.3.3 Zeitabstände ΔT_A

$$\Delta T_A :=$$

Zeitabstände der Abtastung im Zeitraum

3.3.4 Frequenzabstände $\Delta \omega_p$

$$\Delta \omega_p :=$$

Frequenzabstände der Abtastung im Frequenzspektrum

$$\Delta \omega_P = \frac{2\pi}{T_A} \Rightarrow$$

Länge der Periode im Zeitraum legt Feinheit der Abtastung im Frequenzraum fest.

3.3.5 Periodendauer im Zeitraum T_A

$$T_A = N \cdot \Delta T_A :=$$

Periodendauer im Zeitraum = Signaldauer

3.3.6 Periodendauer im Frequenzspektrum ω_p

$$\omega_p = N \cdot \Delta \omega_P :=$$

Periodendauer im Frequenzraum = max. Signalfrequenz

$$\omega_p = \frac{2\pi}{\Delta T_A} \Rightarrow$$

Die Feinheit der Abtastung im Zeitraum legt die maximale angenommene Frequenz fest
→ Abtasttheorem!

4 Signale und Fouriertransformation

4.1 Analoge Signale

4.1.1 Fourierreihe (analoge, periodische Signale)

Jedes Signal $x(t)$ kann als unendliche Summe von überlagerten Sinus und Cosinus Funktionen dargestellt werden:

Sinus-Cosinus-Darstellung der Fourierreihe:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_p t) + b_n \cdot \sin(n\omega_p t)) \\ a_n &= \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot \cos(n\omega_p t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot \sin(n\omega_p t) dt \end{aligned} \quad (1)$$

a_n und b_n dienen hierbei als Ähnlichkeitsmass wie sehr sich die Ursprungsfunktion $x(t)$ der jeweiligen Elementarfunktion ($\sin(n\omega_p t)$ oder $\cos(n\omega_p t)$) ähnelt.

Bemerkungen:

- Die Fourierreihe nimmt an Sprungstellen den Mittelwert von linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert an
- Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten lässt sich das Integrationsintervall verschieben z.B. zu $(0, T_p)$.

Betrags-/Phasen-Darstellung der Fourierreihe:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_p t + \varphi_n) \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n &= -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Diese Darstellung lässt sich aus den Additionstheoremen von Sinus und Cosinus ableiten.

Komplexe Darstellung der Fourierreihe:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_p t} \\ c_n &= \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot e^{-jn\omega_p t} dt \end{aligned} \quad (3)$$

Herleitung:

Mit

$$e^{j\omega t} := \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)$$

erhält man

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

und daher:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_p t + \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_p t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_p t}$$

$$c_n = \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n}$$

$$c_{-n} = \frac{A_n}{2} e^{-j\varphi_n}$$

Umformungen:

	$\rightarrow a_n, b_n$
A_n, φ_n	$a_n = A_n \cos \varphi_n,$ $b_n = -A_n \sin \varphi_n$
$c_n, (c_{-n} := \bar{c}_n)$	$a_n = c_n + c_{-n},$ $b_n = j(c_n - c_{-n})$
	$\rightarrow A_n, \varphi_n$
a_n, b_n	$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$
$c_n, (c_{-n} := \bar{c}_n)$	$A_n = 2 c_n = 2\sqrt{\operatorname{Re}(c_n)^2 + \operatorname{Im}(c_n)^2},$ $\varphi_n = \arg(c_n)$
	$\rightarrow c_n, (c_{-n} := \bar{c}_n)$
a_n, b_n	$c_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n)$
A_n, φ_n	$c_n = \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n}$

Bedingungen für die Transformation:

- Die Funktion muss periodisch sein.
- Innerhalb einer Periode aufteilbar in endlich viele stetige Teilstücke.
- Es dürfen keine divergierende Sprungstellen auftauchen.

4.1.2 CTFT (analoge, nicht-periodische Signale)

Der Sinn der CTFT: Man möchte vom Zeitsignal $x(t)$ zum Frequenzspektrum $X(\omega)$.

Die Idee der CTFT: Man nimmt die Fourierreihe und lässt $T_p \rightarrow \infty$ gehen:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (CTFT/FT) \quad (\text{aus 5}) \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (ICTFT/IFT) \quad (\text{aus 6}) \end{aligned} \tag{4}$$

Herleitung:

Wir definieren eine Hilfsvariable: $\omega_n = n\omega_p$, sodass gilt: $\omega_{n+1} - \omega_n = \omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$ und beginnen mit:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

und

$$c_n := \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot e^{-j\omega_n t} dt$$

Wir definieren eine Funktion in Abhängigkeit von ω_n :

$$\begin{aligned} X(\omega_n) &:= \frac{2\pi}{\omega_p} c_n \quad (\Leftrightarrow c_n = \frac{\omega_p}{2\pi} X(\omega_n)) \\ &= \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot e^{-j\omega_n t} dt \end{aligned} \tag{5}$$

Das neu gewonnene c_n wird nun als Koeffizient in die ursprüngliche komplexe Fourierreihe eingesetzt:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_p}{2\pi} X(\omega_n) e^{j\omega_n t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega_n) e^{j\omega_n t} \omega_p \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega_n) e^{j\omega_n t} (\omega_{n+1} - \omega_n) \end{aligned} \tag{6}$$

Lässt man nun $T_p \rightarrow \infty$ gehen, wird ω_p immer kleiner und die Unterteilungen ω_n wandern dichter zueinander und im Grenzfall ein kontinuierlicher Verlauf ($\omega_n \rightarrow \omega$) und man erhält ein Riemann-Integral. Daraus folgt sich die oben aufgeführten Integrale für $x(t)$ und $X(\omega)$.

Bemerkungen:

- Stärke des Vorhandenseins einer Frequenz: $|X(\omega)|$
- Verschiebung der einzelnen Frequenzen: $\varphi = \arg(X(\omega))$
- Es gilt: $\overline{X(\omega)} = X(-\omega)$
- Bei reellen Signalen ist Betragsspektrum $|X(\omega)|$ symmetrisch um Null

4.1.3 Einschub: Die kontinuierliche Faltung

$$y(t) := x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau \quad (7)$$

(Integral)

Mit der Laufvariable τ läuft man x_1 forwards durch und x_2 rückwärts aber um t verschoben durch.

t ist hier als fester, bekannter Wert zu interpretieren.

(Faltung) (Man macht das was oben drüber steht für jedes beliebige t)

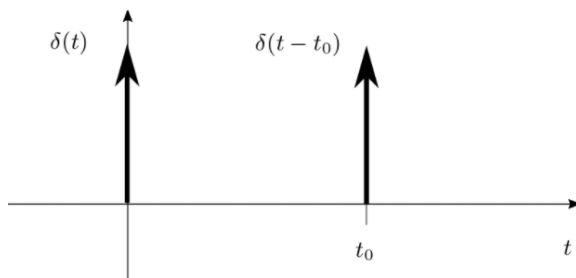
Man legt ein τ für x_1 und x_2 fest, verändert t laufend und sieht sich die Schnittfläche der beiden Funktionen an.

Main Purpose in der Signalverarbeitung: Abschwächung / Auslöschung von hohen Frequenzen.

4.1.4 Einschub: Der Delta-Impuls

Wir definieren eine Funktion:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0 \text{ for } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1 \end{aligned} \quad (8)$$



Verwendung des Delta-Impulses (Ausblendeigenschaft):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0) \cdot \delta(t - t_0) dt \\ &= x(t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt \\ &= x(t_0) \end{aligned} \quad (9)$$

$x(t)$ wird überall ignoriert ausser an der Stelle an der $\delta(t - t_0) \neq 0$, d.h. bei $t = t_0$.
Quasi eine Abtastung der Funktion $x(t)$ an Stelle t_0 .

Fouriertransformation des Delta-Impulses:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega 0} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t) \circ \bullet 1$$

Das Spektrum des Delta-Impulses enthält alle Frequenz mit Gewicht 1!

Die Stammfunktion des Delta-Impulses: $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \delta(t)$$

Fouriertransformation der Sprungfunktion:

$$\varepsilon(t) \circ \bullet \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

4.1.5 Faltung mit dem Delta-Impuls

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t - t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta((t - t_0) - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(\tau - (t - t_0)) d\tau \\ &= x(t - t_0) \end{aligned} \tag{10}$$

Kurz bedeutet das

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) ,$$

und für $t_0 = 0$

$$x(t) * \delta(t) = x(t) .$$

Der Delta-Impuls ist das Neutrale Element bezüglich der Faltung!

4.1.6 Besonderheiten der CTFT

Eigenschaften der CTFT:

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Frequenzbereich
Linearität	$k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \circ \longrightarrow k_1 X_1(\omega) + k_2 X_2(\omega)$
Symmetrie / Dualität	Gilt: $x(t) \circ \longrightarrow X(\omega)$ dann auch: $X(t) \circ \longrightarrow 2\pi x(-\omega)$
Zeitverschiebung	$x(t - \tau) \circ \longrightarrow X(\omega) e^{-j\omega\tau}$
Frequenzverschiebung	$x(t) e^{jWt} \circ \longrightarrow X(\omega - W)$

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Frequenzbereich
Zeitskalierung	$x(k \cdot t) \circ \longrightarrow \frac{1}{ k } \cdot X\left(\frac{1}{k} \cdot \omega\right)$
Frequenzskalierung	$\frac{1}{ k } \cdot x\left(\frac{1}{k} \cdot t\right) \circ \longrightarrow X(k \cdot \omega)$
Faltung (Zeit)	$x_1(t) * x_2(t) \circ \longrightarrow X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$
Faltung (Frequenz)	$2\pi \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \circ \longrightarrow X_1(\omega) * X_2(\omega)$

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Frequenzbereich
Differentiation (Zeit)	$\frac{d}{dt} x(t) \circ \longrightarrow j\omega X(\omega)$
Integration (Zeit)	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \circ \longrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi \cdot X(0) \cdot \delta(\omega)$
Reelle Signale $x(t)$	$X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$ und $ X(-\omega) = X(\omega) $

Signaldauer-Bandbreite-Produkt:

Signal	Zeitintervall	Dauer	Spektrum	Bereich	Bandbreite
$x(t)$	$[t_0, t_1]$	$t_1 - t_0$	$X(\omega)$	$[\omega_0, \omega_1]$	$\omega_1 - \omega_0$
$x(k t)$	$[\frac{1}{k} t_0, \frac{1}{k} t_1]$	$\frac{1}{k} (t_1 - t_0)$	$\frac{1}{ k } X(\frac{1}{k} \omega)$	$[k \omega_0, k \omega_1]$	$k (\omega_1 - \omega_0)$
$\frac{1}{ k } x(\frac{1}{k} t)$	$[k t_0, k t_1]$	$k (t_1 - t_0)$	$X(k \omega)$	$[\frac{1}{k} \omega_0, \frac{1}{k} \omega_1]$	$\frac{1}{k} (\omega_1 - \omega_0)$


Demnach ist das *Signaldauer–Bandbreite–Produkt* (oder *Zeit–Bandbreite–Produkt*) konstant, da $\frac{1}{k} (t_1 - t_0) \cdot k (\omega_1 - \omega_0) = k (t_1 - t_0) \cdot \frac{1}{k} (\omega_1 - \omega_0) = (t_1 - t_0) \cdot (\omega_1 - \omega_0)$:

Signaldauer \times Bandbreite = <i>const.</i>

Korrespondenzen der CTFT:

Zeitbereich $x(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	Frequenzbereich $X(\omega)$
$\delta(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	1
1	$\circ \text{---} \bullet$	$2\pi \delta(\omega)$
$\varepsilon(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$ t $	$\circ \text{---} \bullet$	$-\frac{2}{\omega^2}$
t^n	$\circ \text{---} \bullet$	$2\pi j^n \cdot \frac{d^n}{d\omega^n} \delta(\omega)$

Zeitbereich $x(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	Frequenzbereich $X(\omega)$
$e^{-a t }$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
$\varepsilon(t) \cdot e^{-at}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$\varepsilon(t) \cdot e^{-at} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{(j\omega + a)^n}$
$e^{j\omega_0 t}$	$\circ \text{---} \bullet$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

Zeitbereich $x(t)$	 Frequenzbereich $X(\omega)$
$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$\text{sinc}(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{\omega_0} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$
$e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\tau^2}t^2}$	$\sqrt{2\pi}\tau \cdot e^{-\frac{1}{2}\tau^2\omega^2}$

4.2 Diskrete Signale

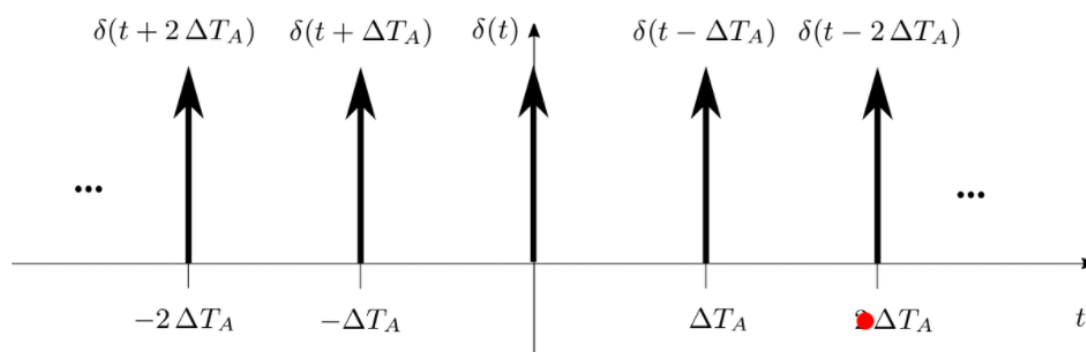
4.2.1 Delta-Kamm

Die Idee eines Delta-Kamms: Aus einer kontinuierlichen Funktion wird eine Zahlenfolge gemacht.

Um eine Zahlenfolge aus einer kontinuierlichen Funktion zu erhalten, muss diese abgetastet werden. Die Abtastung einer kontinuierlichen Funktion erfolgt mit einem Delta-Kamm:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) \quad (11)$$

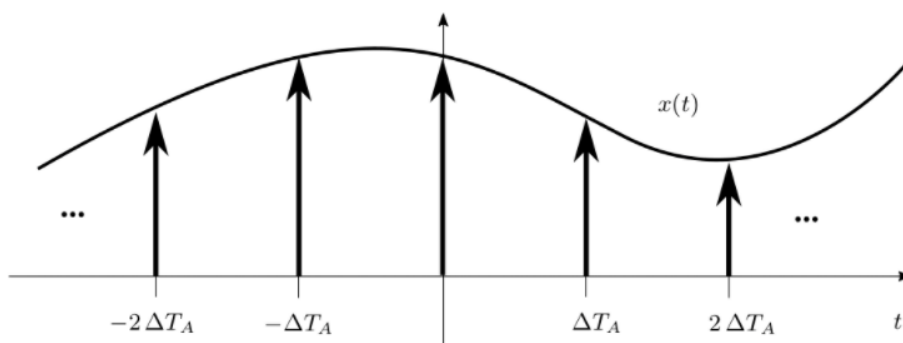
Der Delta-Kamm stellt eine Schar einzelner Delta-Impulsen an bestimmten gewünschten Abtastungsorten mit gleichem Abstand voneinander dar:



4.2.2 Abgetastetes Signal

Ein abgetastetes Signal ist mit Hilfe des Delta-Kamms definiert durch:

$$x_A(t) := x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) \quad (12)$$



$x_A(t)$ wird auch als Diskretes Signal bezeichnet.

4.2.3 DTFT (diskrete, nicht-periodische Signale)

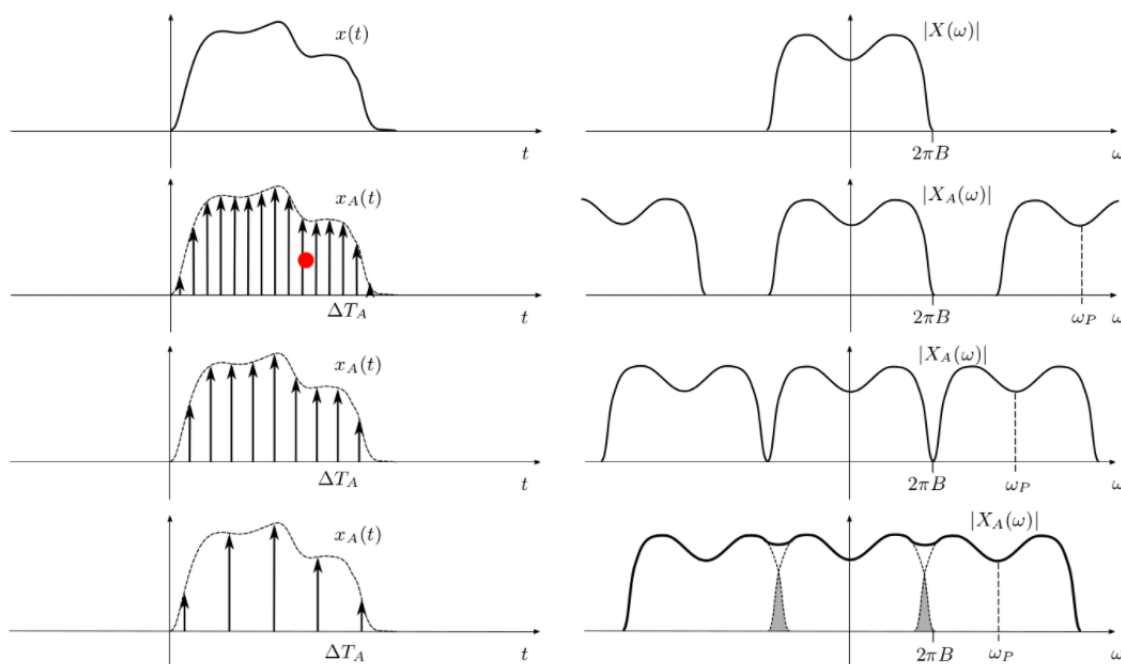
Mit Hilfe der Ausblendeigenschaft des Delta-Impulses kann man die Fouriertransformation eines solchen abgetasteten Signals bestimmen:

$$\begin{aligned}
 X_A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_A(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \cdot \delta(t - n\Delta T_A) dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta T_A) e^{-j\omega n\Delta T_A}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Bemerkungen:

- Ein diskretes Zeitsignal führt dennoch zu einem kontinuierlichen Frequenzspektrum
- Durch Abtastung eines Zeitsignals mit Zeitabständen ΔT_A wird Frequenzspektrum periodisch mit Periodendauer $\omega_p := \frac{2\pi}{\Delta T_A}$
- diskretes Zeitsignal $\circ \bullet$ periodisches Spektrum
- periodisches Zeitsignal $\circ \bullet$ diskretes Spektrum
- Zusammenhang CTFT und DTFT: $x_A(\omega) = \frac{1}{\Delta T_A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta T_A}\right)$

4.2.4 Abtasttheorem



Man folgert: $\omega_P > 2 \cdot 2\pi B$

Daraus ergibt sich das eigentliche Abtasttheorem:

$$f_A = \frac{1}{\Delta T_A} > 2 \cdot B \Rightarrow \Delta T_A < \frac{1}{2 \cdot B} \quad (14)$$

Ist das Abtasttheorem beim Abtasten eines Signales eingehalten, so kann versichert werden, dass keine Informationen des Originalsignals verloren gehen und eine Rekonstruktion ist möglich.

⇒ "Mindestens mit der doppelt so grossen Frequenz wie im Originalsignal vorhanden ist abtasten."

Bemerkungen:

- Die höchsten Frequenzen sind die, die zuerst unter der Verletzung des Abtasttheorems leiden (Unterabtastung)
- Informationsverlust ist nicht leicht zu beheben
- In der Praxis verwendet man häufig eine deutliche Überabtastung

4.2.5 Rekonstruktion von abgetasteten Signalen

Unter der Annahme, dass das Abtasttheorem mit Zeitintervallen ΔT_A nicht verletzt wird, kann aus den diskreten Abtastwerten $x(n\Delta T_A)$ die kontinuierliche Originalfunktion $x(t)$

rekonstruiert werden mit:

$$x(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta T_A) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - n\Delta T_A)\right) \quad (15)$$

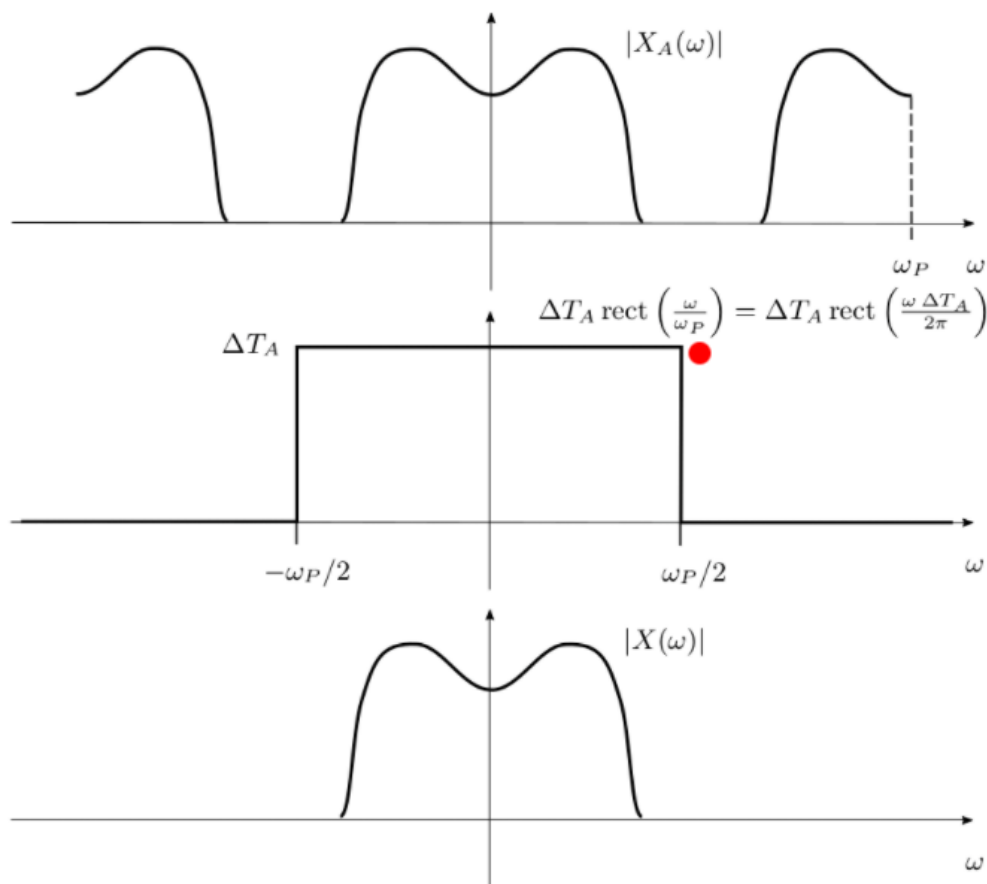
⇒ "Man interpoliert die diskreten Punkten mit der *sinc*-Funktion."

Herleitung:

1. Schritt: Isolieren einer Periode durch Fenstern

Man verwendet einen wichtigen Trick: Das sogenannte Fenstern von Signalen.

Man multipliziert die periodische Fouriertransformierte des Abtastsignals $X_A(\omega)$ mit einem Rechteckpuls der Breite ω_P , um die Fouriertransformierte des Originalsignals $X(\omega)$ zurück zu gewinnen:



Signal Fenstern mathematisch:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X_A(\omega) \cdot \Delta T_A \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_P}\right) \\ &= X_A(\omega) \cdot \Delta T_A \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega \Delta T_A}{2\pi}\right) \end{aligned} \quad (16)$$

2. Schritt: Zurücktransformieren

(Multiplikation im Spektrum \Rightarrow Faltung im Zeitsignal)

$$\begin{aligned}
X(\omega) &\circ\bullet x_A(t) * \text{sinc}\left(\frac{t\pi}{\Delta T_A}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n\Delta T_A) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - \tau)\right) d\tau \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - \tau)\right) \delta(\tau - n\Delta T_A) dt\tau \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta T_A) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - n\Delta T_A)\right) = x(t)
\end{aligned} \tag{17}$$

4.2.6 DFT (diskrete, periodische Signale)

Der Sinn der DFT: Man will nicht nur das Signal auf einer digitalen Rechen- oder Speichereinheit verarbeiten, sondern auch das Spektrum.

Die Idee der DFT:

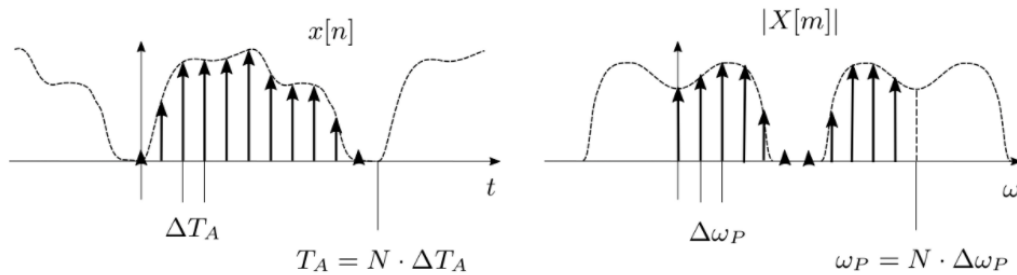
diskretes & periodisches Zeitsignal $\circ\bullet$ diskretes & periodisches Spektrum

$$\begin{aligned}
X[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{mn}{N}} \quad (DFT) \\
x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{j2\pi \frac{mn}{N}} \quad (IDFT) \\
&\text{wobei} \\
x[n] &:= x(n\Delta T_A) \\
X[m] &:= X(m\Delta\omega_P)
\end{aligned} \tag{18}$$

Es gilt für Zeitsignal und Frequenzspektrum in dieser Darstellung die gleiche Periode N , d.h. $X[m + N] = X[m]$ und $x[m + N] = x[n]$.

Bemerkungen:

- Man erhält für N abgetastete Werte des Originalsignals automatisch auch N Werte des Spektrums.
- Zusammenhang diskretes Zeit- und Spektralsignal:



- $X[N - m] = \overline{X[m]}$ und damit auch $|X[N - m]| = |\overline{X[m]}| = |X[m]|$
- Für ein reelles Signal $x[n]$ ist das Betragsspektrum $|X[m]|$ immer symmetrisch innerhalb einer Periode: $|X[m]| = |X[N - m]|$ für $m = 0, \dots, N - 1$

Die Herleitung der DFT wird in 5. Schritten aufgeteilt:

- Schritte 1-2: Erzeugen des diskreten und periodischen Zeitsignals für die DFT
- Schritte 3-5: Zusammenhang zwischen dem diskreten und periodischen Zeitsignal mit seinem diskreten und periodischen Spektrum
- Der Zusammenhang wird durch folgende Argumentation erreicht:
diskretes & periodisches Zeitsignal $\circ \bullet$ CTFT $\{\cdot\}$ $\bullet \circ$ ICTFT $\{\text{CTFT} \{\cdot\}\}$

1. Schritt

- kontinuierliches Zeitsignal $x(t)$ im Intervall $[0, T_A]$ fenstern, so dass wesentliche Signalinformation enthalten ist.
- gefensterte Signal künstlich periodisch fortsetzen und umbenennen zu $x_P(t)$.
- Potentielle Fehler: Falsch abschneiden fürs zukünftige Periodisieren.
→ Leakage Fehler

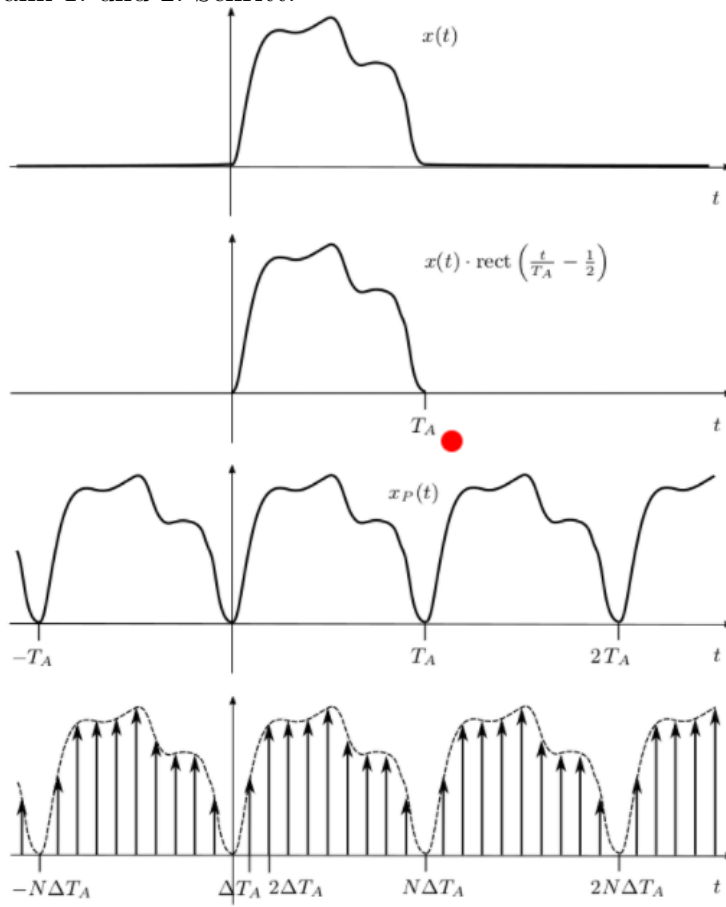
2. Schritt

- Abtastung des periodischen Signals $x_P(t)$ wobei N Abtastzeitpunkte im Grundintervall $[0, T_A]$ untergebracht werden. N wird als Blocklänge des diskreten Signals bezeichnet.
- Dadurch haben die Abtastzeitpunkte einen Abstand von $\Delta T_A := \frac{T_A}{N}$. D.h. wir betrachten das abgetastete Signal:

$$x_P(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A)$$

- Potentielle Fehler: Abtasttheorem verletzen.

Grafik 1. und 2. Schritt:



3. Schritt — Konkrete Herleitung erspart

- Fouriertransformation (CTFT) für das abgetastete Signal:

$$\begin{aligned}
 & x_P(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) \\
 \circ \bullet & \left[\frac{2\pi}{N\Delta T_A} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T_A) e^{-jn\Delta T_A \omega} \right] \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\Delta\omega_p) \right]
 \end{aligned} \tag{19}$$

- Es gilt im Grundintervall $[0, T_A]$, dass $x_P(n\Delta T_A) = x(n\Delta T_A)$.
- Es gilt im Grundintervall, dass die Konstante $\Delta\omega_p := \frac{2\pi}{N\Delta T_A}$ eingeführt wird.
- Wir stellen fest: Die Fouriertransformierte ist ein abgetastetes Signal mit Abtastorten $k\Delta\omega_p, k \in \mathbb{Z}$.

4. Schritt — Konkrete Herleitung erspart

- Inverse Fouriertransformation (ICTFT) auf das Spektrum, um wieder das Originalsignal an den Abtastorten zu erhalten:

$$\bullet \circ \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T_A) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} e^{j2\pi \frac{k}{N} \frac{t}{\Delta T_A}} \right] \cdot \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - l\Delta T_A) \right] \quad (20)$$

- Die fordere eckige Klammer ist identisch zu $x_p(t)$.
- Ist $t \in [0, T_A]$, ist die fordere eckige Klammer sogar identisch zu $x(t)$.
- Gilt auch für spezielle t : Für ein $t_0 \in [0, T_A] \Rightarrow x(t_0)$.

5. Schritt

- Die Erkenntnis von Schritt 4 für $t_0 = m\Delta T_A$ anwenden:

$$x(m\Delta T_A) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T_A) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \right] e^{j2\pi \frac{km}{N}} \quad (21)$$

- Die eckige Klammer =: $X(k\Delta\omega_P)$ (DFT)
- Der ganze Ausdruck =: IDFT

4.2.7 Handlungsanweisung zur DFT

Dieser Abschnitt behandelt die konkrete Anwendung der DFT für z.B. eine Spektralanalyse oder digitale Filterung.

Man beginnt mit einem realen, kontinuierlichen Signal und will auch nach der DFT und IDFT dort wieder ankommen.

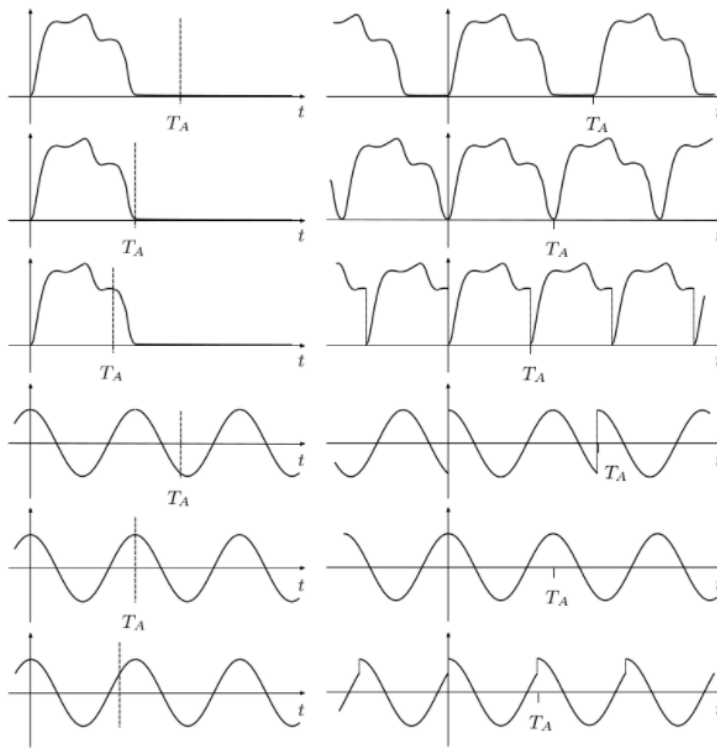
Die Handlungsanweisung beinhaltet 7.Schritte:

- Schritte 1-3: Theoretischer Analog-Digital-Wandler.
- Schritte 4-6: Untersuchung (= Spektralanalyse) und Veränderung (= Filterung) des Spektrums.
- Schritt 7: Theoretischer Digital-Analog-Wandler.

1. Schritt

- Fenstern eines gegebenen kontinuierlichen Zeitsignal so passend, dass bei periodischer Fortsetzung keine künstliche plötzliche Störung des Signals auftritt.

- Dadurch wird T_A festgelegt.
- Falsches fenstern führt zum Leakage Fehler
(Sprünge im Zeitsignal \rightarrow Falsche Frequenzen im Spektrum):



2. Schritt

- Bestimmen der Blocklänge N , sodass das Abtasttheorem nicht verletzt wird. D.h. für ein bandbegrenztes Signal mit Bandbreite B ergibt sich dies zu:

$$N \geq 2 B \cdot T_A$$

- Hat man nun das beliebige N , kann man daraus die verwendete Abtastabstände bestimmen:

$$\Delta T_A = \frac{T_A}{N}$$

- Verletzung des Abtasttheorems führt zu Aliasing-Effekt
(Unterabtastung \rightarrow Misinformation): verweis auf 4.2.4

3. Schritt

- Abtasten des Signals zu den Zeitpunkten $t = n\Delta T_A$, $n = 0, \dots, N-1$ und es ergeben sich die diskreten Signalwerte:

$$x[n] = x(n\Delta T_A)$$

4. Schritt

- DFT durchführen:

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{mn}{N}}, \quad m = 0, \dots, N-1$$

an den Abtastorten $\omega_m = m\Delta\omega_P = m\frac{2\pi}{T_A}$, $m = 0, \dots, N-1$.

5. Schritt

- Betrachten und/oder verändern des Spektrums. Da die Veränderung (Filterung) des Spektrums eine so zentrale Rolle in der digitalen Signalverarbeitung spielt, wird aus dem gegebenen Spektrum $X[m]$ ein neues Spektrum $Y[m]$ erzeugt, bspw. durch Multiplikation einer Gewichtsfunktion G :

$$Y[m] := G \cdot X[m], \quad m = 0, \dots, N-1$$

6. Schritt

- IDFT durchführen, um das gefilterte, diskrete Zeitsignal zu erhalten:

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} Y[m] e^{j2\pi \frac{mn}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

- In vielen Anwendungen der digitalen Signalverarbeitung hört man hier auf, wenn man sich nicht für eine kontinuierliche Version des gefilterten Signals interessiert, sonst Rekonstruktion.

7. Schritt

- An Schritt 6 anknüpfend kann man mit der Rekonstruktionsformel aus dem diskreten Signal die kontinuierliche, periodische Signalrekonstruktion bestimmen:

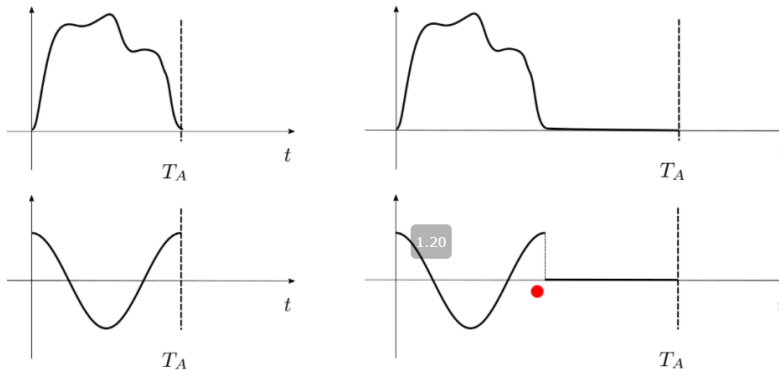
$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - n\Delta T_A)\right)$$

- Praktisch kann die unendliche Summe durch eine endliche Summe angenähert werden.
- Gute Annäherung:

$$\sum_{n=-N+1}^{2N-2}$$

Zero-Padding

- Beliebtes Mittel bei gegebenen Abtastabständen ΔT_A eine feinere Abtastung des Spektrums zu erreichen ist das *zero-padding*: $x[n]$ mit Nullen füllen
- Blocklänge N und Signaldauer T_A werden so künstlich vergrößert.
- $\Delta\omega_P$ wird so automatisch kleiner, d.h. feinere Frequenzabtastung.
- Echt periodische Signale werden dadurch evtl. verfälscht:



Gewichtetes Fenster

Um dem Leakage-Effekt mit nur geringen Nebenwirkungen zu reduzieren, werden Gewichtsfunktionen auf das Zeitsignal angewandt, eine sog. gewichtete Fensterung.

Dies wird dadurch erreicht, dass man das Originalsignal mit einer Gewichtsfunktion multipliziert, bei der am Intervallrand (bei 0 und $N - 1$) die Zeitwerte zur Null gedrückt werden und andererseits kaum neue künstliche Frequenzen eingeführt werden, d.h. die Gewichtsfunktion dazwischen einen möglichst gleichmässigen Verlauf hat in dem das Originalsignal sinnvoll repräsentiert wird:

$$x'[n] := w[n] \cdot x[n], \text{ for } n = 0, \dots, N-1,$$

mit der Gewichtsfunktion $w[n]$.

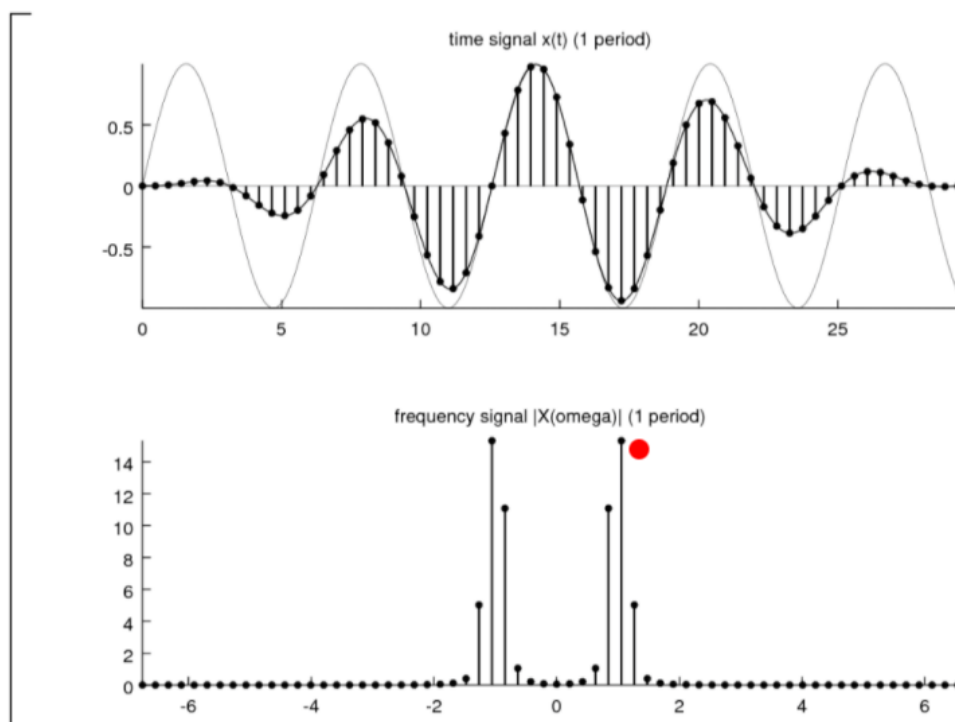
Hanning-Window:

$$w[n] := 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

Blackman-Window:

$$w[n] := 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right)$$

Beispiel:



4.2.8 Einschub: Die diskrete Faltung

Azyklische diskrete Faltung:

$$\begin{aligned}
 y[n] &:= x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \cdot x_2[n-k] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[n-k] \cdot x_2[k]
 \end{aligned} \tag{22}$$

Zyklische diskrete Faltung:

$$y[n] := x_p[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_p[n-k] \cdot h_p[k] \tag{23}$$

Im Normalfall wählt man die Funktionen $h[n]$ mit $h[n] = 0$ ausserhalb des Grundintervalls $[0, N-1]$, sodass die Periodisierung mit $h_p[n]$ einfach nur eine Wiederholung der Werte des Grundintervalls darstellt und $h_p[k]$ einfach mit $h[k]$ ersetzt werden kann.

Bemerkungen:

- Mit der Einführung des diskreten Delta-Impulses

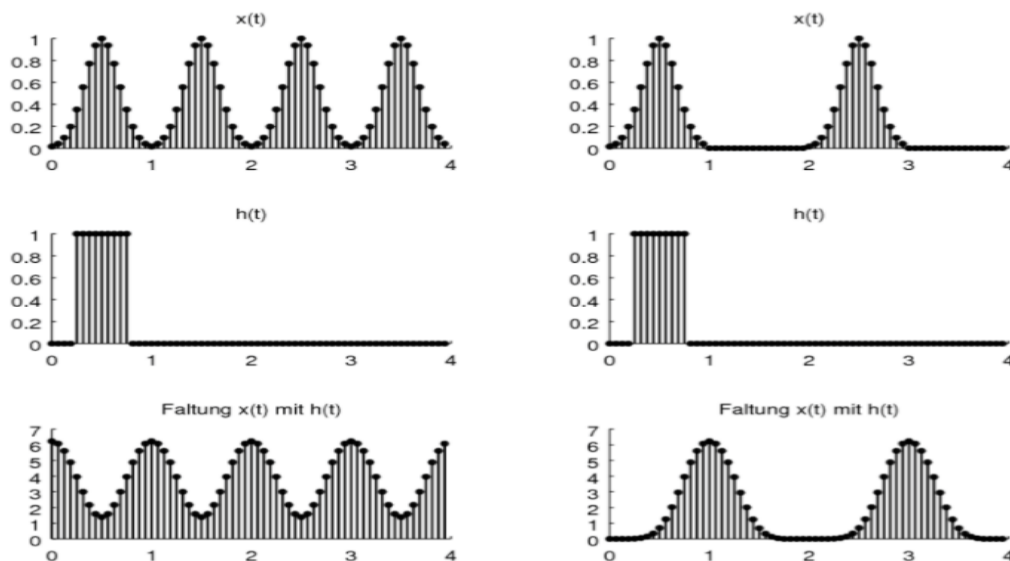
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases}$$

gibt es analog zu der Faltung mit analogen Signalen die Neutralitätseigenschaft der Faltung:

$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

- Wenn man mit der DFT arbeitet (und somit mit diskreten und periodischen Signalen) nimmt man die Periodisierung des Zeitsignals $x[n]$ in Kauf, um ein diskretes Spektrum $X[n]$ zu erhalten, jedoch schränkt man sich in der Betrachtung naturgemäß nur auf das Grundintervall $[0, N - 1]$ ein und ignoriert die Periodizität von $x[n]$ ausserhalb dieses Grundintervalls.

Bei der diskreten Faltung eines solchen Signals kann jedoch sehr einfach ein Übersprechen von benachbarten Perioden stattfinden, welches unerwünscht ist aber mit *zero-padding* vermieden werden kann:



Herleitung:

Azyklische diskrete Faltung \rightarrow Zyklische diskrete Faltung

Für die digitale Verarbeitung stört das ∞ in der Summe der Azyklischen diskreten Faltung. Sind die zu verarbeitenden Signale aber diskret und periodisch so ist möglich:

Betrachtet man das diskrete und periodische Signal $x_p[n]$ mit Periodendauer N , sowie ein allgemeines (nicht-periodisches) Signal $h[n]$. Für diesen Fall gilt mit der Definition

der diskreten Faltung und der Aufteilung der Faltungssumme in Teilsummen:

$$\begin{aligned}
 y[n] &:= x_P[n] * h[n] \\
 y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_P[n-k] \cdot h[k] \\
 y[n] &= \dots \sum_{k=-N}^{-1} x_P[n-k] \cdot h[k] + \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} x_P[n-k] \cdot h[k] + \dots
 \end{aligned} \tag{24}$$

Bringt man die Summen über Indexverschiebung zu den gleichen Summengrenzen:

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \dots \sum_{k=0}^{N-1} x_P[n-k+N] \cdot h[k-N] + \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} x_P[n-k] \cdot h[k] + \dots \\
 y[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_P[n-k-l \cdot N] \cdot h[k+l \cdot N]
 \end{aligned} \tag{25}$$

Einerseits gilt wegen der Periodizität $x_P[n-k-l \cdot N] = x_P[n-k]$ und somit

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_P[n-k] \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[k+l \cdot N]$$

und andererseits, stellt

$$h_p[k] := \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[k+l \cdot N]$$

eine periodisierte Version von $h[k]$ dar mit $h_p[k+v \cdot N] = h_p[k]$ für alle $v \in \mathbb{Z}$.

Mit dieser Definition ergibt sich die Faltung zu einer endlichen Summe bzw. zur zyklischen diskreten Faltung (verweis auf 23).

4.2.9 Besonderheiten der DFT

Eigenschaften der CTFT:

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Frequenzbereich
Periodizität	$x[n] \circ \longrightarrow \bullet X[m] = X[m + k \cdot N]$ für alle $k \in \mathbb{Z}$
Verschiebungssatz	$x[n - k] \circ \longrightarrow \bullet X[m] \cdot e^{-j 2\pi \frac{k}{N} m}$
Komplexe Konjugiertheit	$x[n] \text{ reell} \circ \longrightarrow \bullet X[k \cdot N - m] = \overline{X[m]}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Frequenzbereich
Faltung (Zeit)	$x_1[n] * x_2[n] \circ \longrightarrow \bullet X_1[m] \cdot X_2[m]$
Faltung (Frequenz)	$N \cdot x_1[n] \cdot x_2[n] \circ \longrightarrow \bullet X_1[m] * X_2[m]$