Integraltransformation

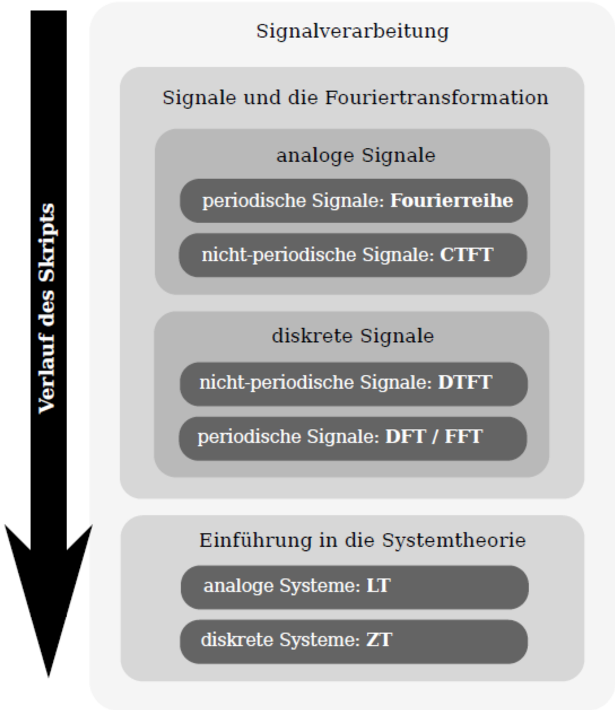
Zusammenfassung

Grasso Antonino

Sommersemester 21

Inhaltsverzeichnis

1 Verlauf und Rahmen



2 Klassifizierung der Signale

$x(t)$ \ t	zeitkontinuierlich	zeitdiskret
wertkontinuierlich	**analoges** Signal	**abgetastetes/diskretes** Signal
wertdiskret	**quantisiertes** Signal	**digitales** Signal

3 Definitionen und Konstanten

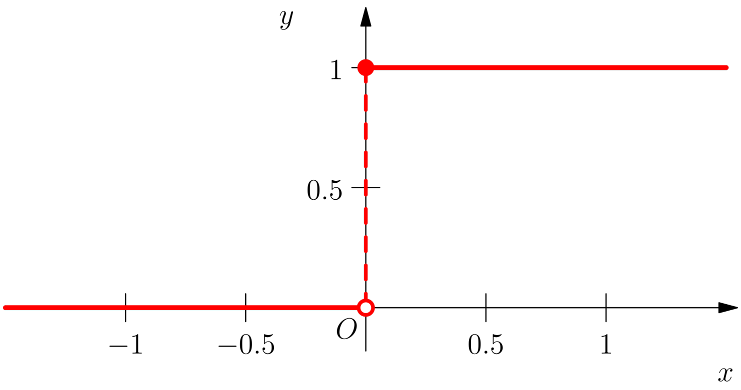
3.1 Funktionen

3.1.1 sinc-Funktion $sinc(t)$

$$sinc(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

3.1.2 Sprungfunktion $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) :=$$



3.1.3 Zeitsignal $x(t)$

$$x(t) := Zeitsignal$$

3.1.4 Frequenzspektrum $X(\omega)$

$$X(\omega) := Frequenzspektrum$$

3.1.5 Abgetastetes Zeitsignal $x_A(t)$

$$x_A(t) := abgetastetes\ Zeitsignal$$

3.1.6 Abgetastetes Frequenzspektrum $X_A(\omega)$

$$X_A(\omega) := abgetastetes\ Frequenzspektrum$$

3.2 Analoge Signale

3.2.1 Periodendauer T_p

$$x(t) := \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$T_p := x(t + n \cdot T_p) = x(t)$$

3.2.2 Frequenz f

$$f = \frac{1}{T_p} = \frac{\omega_p}{2\pi}$$

3.2.3 Kreisfrequenz ω_p

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$$

3.3 Diskrete Signale

3.4 Abtastfrequenz f_A

$$f_A = \frac{1}{\Delta T_A} = \frac{\omega_p}{2\pi}$$

3.4.1 Blocklänge N

$$N :=$$

Anzahl an Stellen des diskreten Signals

$$T_A \cdot \omega_P = 2\pi \cdot N$$

Das Produkt aus Periodendauern ist eine konstante Grösse, welche sich nur mit der Blocklänge N verändern lässt.
→ Unschärferelation der DFT (1. Variante)

$$\Delta T_A \cdot \Delta\omega_P = \frac{2\pi}{N}$$

Das Produkt der Abtastabstände ist ebenso eine konstante Grösse, welche sich nur durch Blocklänge N verändern lässt.
→ Unschärferelation der DFT (2. Variante)

3.4.2 Zeitabstände ΔT_A

$$\Delta T_A :=$$

Zeitabstände der Abtastung im Zeitraum

3.4.3 Frequenzabstände $\Delta\omega_p$

$$\Delta\omega_p :=$$

Frequenzabstände der Abtastung im Frequenzspektrum

$$\Delta\omega_P = \frac{2\pi}{T_A} \Rightarrow$$

Länge der Periode im Zeitraum legt Feinheit der Abstastung im Frequenzraum fest.

3.4.4 Periodendauer im Zeitraum T_A

$$T_A = N \cdot \Delta T_A :=$$

Periodendauer im Zeitraum = Signaldauer

3.4.5 Periodendauer im Zeitraum ω_p

$$\omega_p = N \cdot \Delta\omega_P :=$$

Periodendauer im Frequenzraum = max. Signalfrequenz

$$\omega_p = \frac{2\pi}{\Delta T_A} \Rightarrow$$

Die Feinheit der Abtastung im Zeitraum legt die maximale angenommene Frequenz fest → Abtasttheorem!

4 Signale und Fouriertransformation

4.1 Analoge Signale

4.1.1 Fourierreihe (analoge, periodische Signale)

Jedes Signal $x(t)$ kann als unendliche Summe von überlagerten Sinus und Cosinus Funktionen dargstellt werden:

Sinus-Cosinus-Darstellung der Fourierreihe:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cdot \cos(n\omega_p t) + b_n \cdot \sin(n\omega_p t)\big) \\ a_n &= \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot \cos(n\omega_p t)\ dt \\ b_n &= \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot \sin(n\omega_p t)\ dt \end{aligned} \tag{1}$$

a_n und b_n dienen hierbei als Ähnlichkeitsmass wie sehr sich die Ursprungsfunktion $x(t)$ der jeweiligen Elementarfunktion $\big(sin(n\omega_p t)$ oder $cos(n\omega_p t)\big)$ ähnelt.

Bemerkungen:

- Die Fourierreihe nimmt an Sprungstellen den Mittelwert von linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert an
- Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten lässt sich das Integrationsintervall verschieben z.B. zu $(0, T_p)$.

Betrags-/Phasen-Darstellung der Fourierreihe:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_p t + \varphi_n) \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n &= -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Diese Darstellung lässt sich aus den Additionstheoremen von Sinus und Cosinus ableiten.

Komplexe Darstellung der Fourierreihe:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_p t} \\ c_n &= \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot e^{-jn\omega_p t}\ dt \end{aligned} \tag{3}$$

Herleitung:
Mit

$$e^{j\omega t} := \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)$$

erhält man

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

und daher:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_p t + \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_p t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_p t}$$

$$c_n = \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n}$$

$$c_{-n} = \frac{A_n}{2} e^{-j\varphi_n}$$

Umformungen:

	$\rightarrow\ a_n, b_n$
A_n, φ_n	$a_n = A_n \cos\varphi_n$, $b_n = -A_n \sin\varphi_n$
c_n, $(c_{-n} := \bar{c}_n)$	$a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = j\,(c_n - c_{-n})$

	$\rightarrow\ A_n, \varphi_n$
a_n, b_n	$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\varphi_n = -\arctan\frac{b_n}{a_n}$
c_n, $(c_{-n} := \bar{c}_n)$	$A_n = 2\lvert c_n\rvert = 2\sqrt{\mathrm{Re}(c_n)^2 + \mathrm{Im}(c_n)^2}$, $\varphi_n = \arg(c_n)$

	$\rightarrow\ c_n$, $(c_{-n} := \bar{c}_n)$
a_n, b_n	$c_n = \frac{1}{2}(a_n - j\,b_n)$
A_n, φ_n	$c_n = \frac{A_n}{2}\,\mathrm{e}^{j\,\varphi_n}$

Bedingungen für die Transformation:

- Die Funktion muss periodisch sein.
- Innerhalb einer Periode aufteilbar in endlich viele stetige Teilstücke.
- Es dürfen keine divergierende Sprungstellen auftauchen.

4.1.2 CTFT (analoge, nicht-periodische Signale)

Der Sinn der CTFT: Man möchte vom Zeitsignal $x(t)$ zum Frequenzspektrum $X(\omega)$.
Die Idee der CTFT: Man nimmt die Fourierreihe und lässt $T_p \rightarrow \infty$ gehen:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt\ (CTFT/FT)\ (aus\ 5) \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t}\, d\omega\ (ICTFT/IFT)\ (aus\ 6) \end{aligned} \tag{4}$$

Herleitung:
Wir definieren eine Hilfsvariable: $\omega_n = n\omega_p$, sodass gilt: $\omega_{n+1} - \omega_n = \omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$ und beginnen mit:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

und

$$c_n := \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot e^{-j\omega_n t}\ dt$$

Wir definieren eine Funktion in Abhängigkeit von ω_n:

$$\begin{aligned} X(\omega_n) &:= \frac{2\pi}{\omega_p} c_n \quad \left(\Leftrightarrow c_n = \frac{\omega_p}{2\pi} X(\omega_n)\right) \\ &= \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot e^{-j\omega_n t}\ dt \end{aligned} \tag{5}$$

Das neu gewonnene c_n wird nun als Koeffizient in die ursprüngliche komplexe Fourierreihe eingesetzt:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_p}{2\pi} X(\omega_n) e^{j\omega_n t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega_n) e^{j\omega_n t} \omega_p \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega_n) e^{j\omega_n t}\ (\omega_{n+1} - \omega_n) \end{aligned} \tag{6}$$

Lässt man nun $T_p \to \infty$ gehen, wird ω_p immer kleiner und die Unterteilungen ω_n wandern dichter zueinander und im Grenzfall ein kontinuierlicher Verlauf ($\omega_n \to \omega$) und man erhält ein Riemann-Integral. Daraus folgert sich die oben aufgeführten Integrale für $x(t)$ und $X(\omega)$.

Bemerkungen:

- Stärke des Vorhandenseins einer Frequenz: $|X(\omega)|$
- Verschiebung der einzelenen Frequenzen: $\varphi = \arg(X(\omega))$
- Es gilt: $\overline{X(\omega)} = X(-\omega)$
- Bei reellen Signalen ist Betragsspektrum $|X(\omega)|$ symmetrich um Null

4.1.3 Einschub: Die kontinuierliche Faltung

$$y(t) := x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\ d\tau \tag{7}$$

(Integral)
Mit der Laufvariable τ läuft man x_1 forwärts durch und x_2 rückwärts aber um t verschoben durch.
t ist hier als fester, bekannter Wert zu interpretieren.

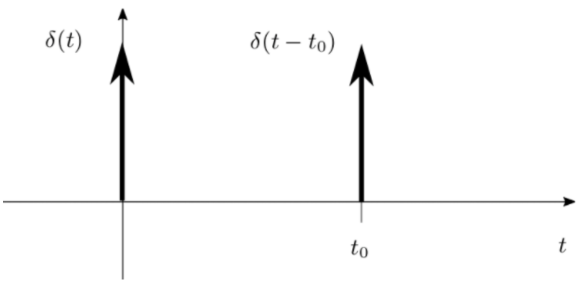
(Faltung) (Man macht das was oben drüber steht für jedes beliebige t)
Man legt ein τ für x_1 und x_2 fest, verändert t laufend und sieht sich die Schnittfläche der beiden Funktionen an.

Main Purpose in der Signalverarbeitung: Abschwächung / Auslöschung von hohen Frequenzen.

4.1.4 Einschub: Der Delta-Impuls

Wir definieren eine Funktion:

$$\begin{aligned} \delta(t) = 0 \quad for\ t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ dt = 1 \end{aligned} \tag{8}$$



Verwendung des Delta-Impulses (Ausblendeigenschaft):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t-t_0)\ dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0) \cdot \delta(t-t_0)\ dt \\ &= x(t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\ dt \\ &= x(t_0) \end{aligned} \tag{9}$$

$x(t)$ wird überall ignoriert ausser an der Stelle an der $\delta(t-t_0) \neq 0$, d.h. bei $t = t_0$.
Quasi eine Abtastung der Funktion $x(t)$ an Stelle t_0.

Fouriertransformation des Delta-Impulses:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t}\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega 0}\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$$

$$\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 1$$

Das Spektrum des Delta-Impulses enthält alle Frequenz mit Gewicht 1!

Die Stammfunktion des Delta-Impulses: $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\ d\tau \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\varepsilon(t) = \delta(t)$$

Fouriertransformation der Sprungfunktion:

$$\varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

4.1.5 Faltung mit dem Delta-Impuls

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t - t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta\big((t - t_0) - \tau\big)\ d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta\big(\tau - (t - t_0)\big)\ d\tau \\ &= x(t - t_0) \end{aligned} \tag{10}$$

Kurz bedeutet das

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)\ ,$$

und für $t_0 = 0$

$$x(t) * \delta(t) = x(t)\ .$$

Der Delta-Impuls ist das Neutrale Element bezüglich der Faltung!

4.1.6 Besonderheiten der CTFT

Eigenschaften der CTFT:

Eigenschaft	Zeitbereich	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	Frequenzbereich
Linearität	$k_1\,x_1(t) + k_2\,x_2(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$k_1\,X_1(\omega) + k_2\,X_2(\omega)$
Symmetrie / Dualität	Gilt: $x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(\omega)$
	dann auch: $X(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\,\pi\,x(-\omega)$
Zeitverschiebung	$x(t-\tau)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(\omega)\,\mathrm{e}^{-j\omega\tau}$
Frequenzverschiebung	$x(t)\,\mathrm{e}^{jWt}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(\omega - W)$

Eigenschaft	Zeitbereich	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	Frequenzbereich
Zeitskalierung	$x(k\cdot t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\lvert k\rvert}\cdot X\left(\frac{1}{k}\cdot\omega\right)$
Frequenzskalierung	$\frac{1}{\lvert k\rvert}\cdot x\left(\frac{1}{k}\cdot t\right)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(k\cdot\omega)$
Faltung (Zeit)	$x_1(t) * x_2(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$
Faltung (Frequenz)	$2\pi\cdot x_1(t)\cdot x_2(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X_1(\omega) * X_2(\omega)$

Eigenschaft	Zeitbereich	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	Frequenzbereich
Differentiation (Zeit)	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$j\omega\,X(\omega)$
Integration (Zeit)	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi\cdot X(0)\cdot\delta(\omega)$
Reelle Signale $x(t)$	$X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$	und	$\lvert X(-\omega)\rvert = \lvert X(\omega)\rvert$

Signaldauer-Bandbreite-Produkt:

Signal	Zeitintervall	Dauer	Spektrum	Bereich	Bandbreite
$x(t)$	$[t_0, t_1]$	$t_1 - t_0$	$X(\omega)$	$[\omega_0, \omega_1]$	$\omega_1 - \omega_0$
$x(k\,t)$	$[\frac{1}{k}\,t_0, \frac{1}{k}\,t_1]$	$\frac{1}{k}(t_1 - t_0)$	$\frac{1}{\lvert k\rvert}\,X(\frac{1}{k}\,\omega)$	$[k\,\omega_0, k\,\omega_1]$	$k\,(\omega_1 - \omega_0)$
$\frac{1}{\lvert k\rvert}\,x(\frac{1}{k}\,t)$	$[k\,t_0, k\,t_1]$	$k\,(t_1 - t_0)$	$X(k\,\omega)$	$[\frac{1}{k}\,\omega_0, \frac{1}{k}\,\omega_1]$	$\frac{1}{k}(\omega_1 - \omega_0)$

Demnach ist das *Signaldauer–Bandbreite–Produkt* (oder *Zeit–Bandbreite–Produkt*) konstant, da $\frac{1}{k}(t_1 - t_0) \cdot k\,(\omega_1 - \omega_0) = k\,(t_1 - t_0) \cdot \frac{1}{k}(\omega_1 - \omega_0) = (t_1 - t_0) \cdot (\omega_1 - \omega_0)$:

$$\boxed{\text{Signaldauer} \times \text{Bandbreite} = \textit{const.}}$$

Korrespondenzen der CTFT:

Zeitbereich $x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	Frequenzbereich $X(\omega)$
$\delta(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	1
1	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\,\pi\,\delta(\omega)$
$\varepsilon(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\lvert t\rvert$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$-\frac{2}{\omega^2}$
t^n	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\,\pi\,j^n \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}\,\delta(\omega)$

Zeitbereich $x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	Frequenzbereich $X(\omega)$
$\mathrm{e}^{-a\,\lvert t\rvert}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{2a}{\omega^2+a^2}$
$\varepsilon(t) \cdot \mathrm{e}^{-a\,t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{j\omega+a}$
$\varepsilon(t) \cdot \mathrm{e}^{-a\,t} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(j\omega+a)^n}$
$\mathrm{e}^{j\omega_0\,t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\,\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0\,t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\pi\,[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin(\omega_0\,t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$j\pi\,[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

Zeitbereich $x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	Frequenzbereich $X(\omega)$
$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$\mathrm{sinc}(\omega_0\,t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\pi}{\omega_0}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$
$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\tau^2}\,t^2}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\sqrt{2\,\pi}\,\tau\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau^2\,\omega^2}$

4.2 Diskrete Signale

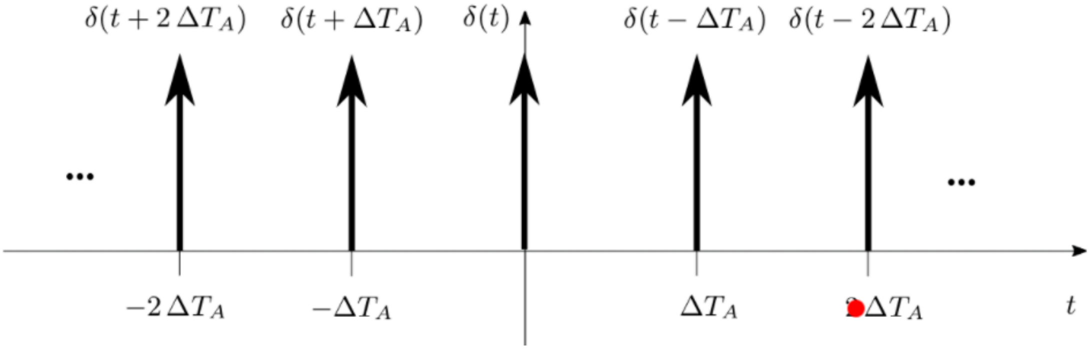
4.2.1 Delta-Kamm

Die Idee eines Delta-Kamms: Aus einer kontinuierlichen Funktion wird eine Zahlenfolge gemacht.

Um eine Zahlenfolge aus einer kontinuierlichen Funktion zu erhalten, muss diese abgetastet werden. Die Abtastung einer kontinuierlichen Funktion erfolgt mit einem Delta-Kamm:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) \tag{11}$$

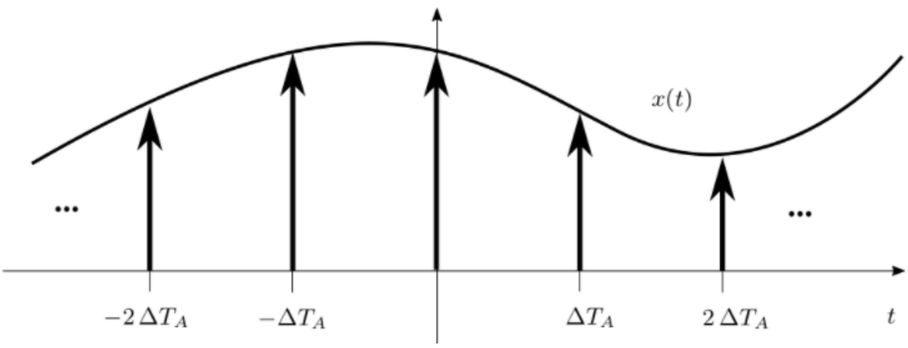
Der Delta-Kamm stellt eine Schar einzelner Delta-Impulsen an bestimmten gewünschten Abtastungsorten mit gleichem Abstand voneinander dar:



4.2.2 Abgetastetes Signal

Ein abgetastetes Signal ist mit Hilfe des Delta-Kamms definiert durch:

$$x_A(t) := x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) \tag{12}$$



$x_A(t)$ wird auch als Diskretes Signal bezeichnet.

4.2.3 DTFT (diskrete, nicht-periodische Signale)

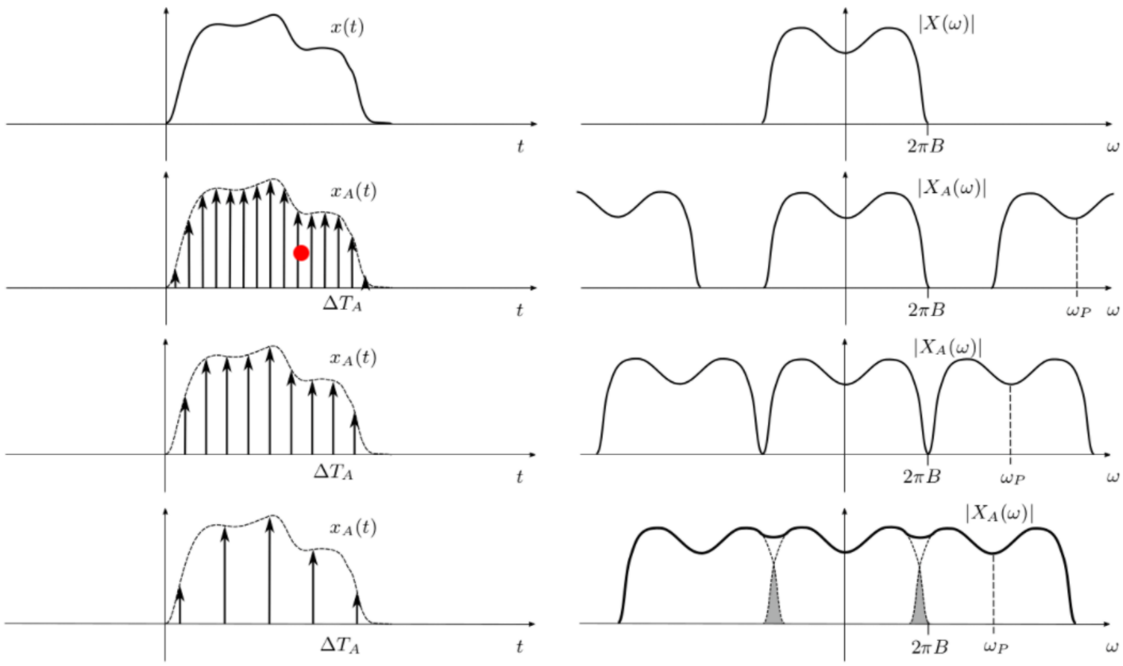
Mit Hilfe der Ausblendeigenschaft des Delta-Impulses kann man die Fouriertransformation eines solchen abgetasteten Signals bestimmen:

$$
\begin{aligned}
X_A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_A(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) e^{-j\omega t} \, dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \cdot \delta(t - n\Delta T_A) \, dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta T_A) e^{-j\omega n \Delta T_A}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Bemerkungen:

- Ein diskretes Zeitsignal führt dennoch zu einem kontinuierlichen Frequenzspektrum
- Durch Abtastung eines Zeitsignals mit Zeitabständen ΔT_A wird Frequenzspektrum periodisch mit Periodendauer $\omega_p := \frac{2\pi}{\Delta T_A}$
- diskretes Zeitsignal $\circ\!\!-\!\!\bullet$ periodisches Spektrum
- periodisches Zeitsignal $\circ\!\!-\!\!\bullet$ diskretes Spektrum
- Zusammenhang CTFT und DTFT: $x_A(\omega) = \frac{1}{\Delta T_A} \sum_{=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta T_A}\right)$

4.2.4 Abtasttheorem



Man folgert: $\omega_P > 2 \cdot 2\pi B$
Daraus ergibt sich das eigentliche Abtasttheorem:

$$f_A = \frac{1}{\Delta T_A} > 2 \cdot B \Rightarrow \Delta T_A < \frac{1}{2 \cdot B} \tag{14}$$

Ist das Abtasttheorem beim Abtasten eines Signales eingehalten, so kann versichert werden, dass keine Informationen des Originalsignals verloren gehen und eine Rekonstruktion ist möglich.
$\Rightarrow$ "Mindestens mit der doppelt so grossen Frequenz wie im Originalsignal vorhanden ist abtasten."

Bemerkungen:

- Die höchsten Frequenzen sind die, die zuerst unter der Verletzung des Abtasttheorems leiden (Unterabtastung)
- Informationsverlust ist nicht leicht zu beheben
- In der Praxis verwendet man häufig eine deutliche Überabtastung

4.2.5 Rekonstruktion von abgetasteten Signalen

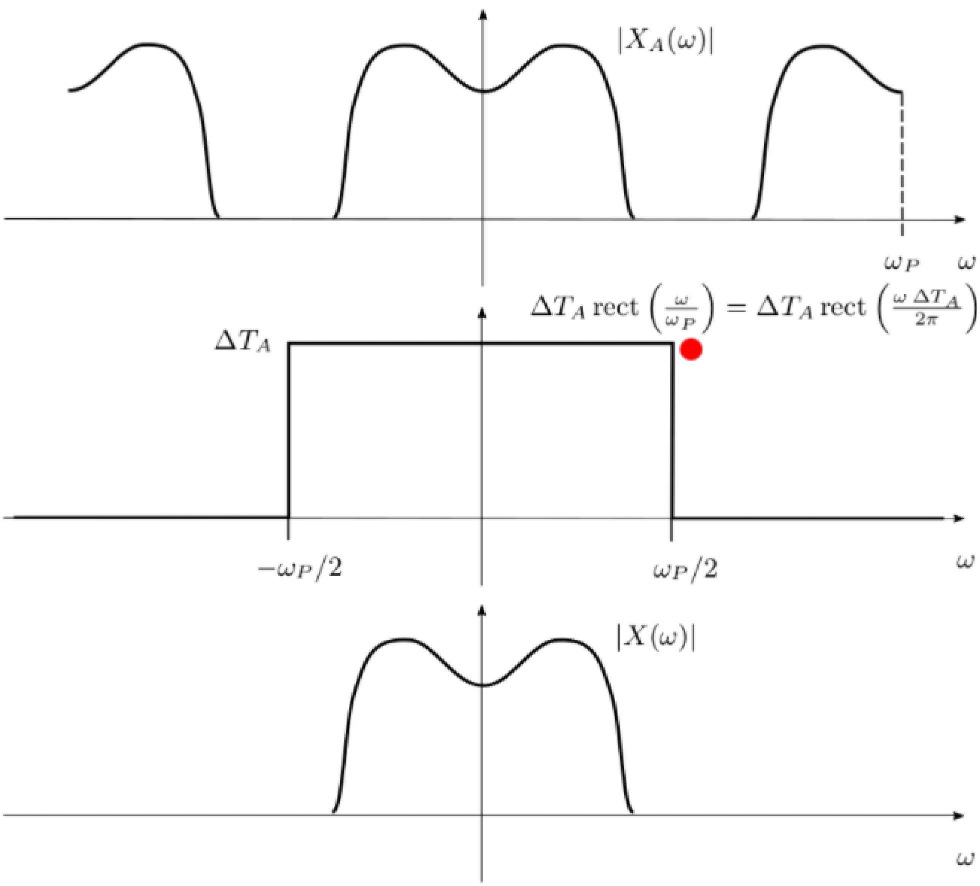
Unter der Annahme, dass das Abtasttheorem mit Zeitintervallen ΔT_A nicht verletzt wird, kann aus den diskreten Abtastwerten $x(n\Delta T_A)$ die kontinuierliche Originalfunktion $x(t)$

rekonstruiert werden mit:

$$x(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta T_A) \cdot sinc\Big(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - n\Delta T_A)\Big) \tag{15}$$

⇒ "Man interpoliert die diskreten Punkten mit der *sinc*-Funktion."

Herleitung:
1. Schritt: Isolieren einer Periode durch Fenstern
Man verwendet einen wichtigen Trick: Das sogenannte Fenstern von Signalen.
Man multipliziert die periodische Fouriertransformierte des Abtastsignals $X_A(\omega)$ mit einem Rechteckpuls der Breite ω_P, um die Fouriertransformierte des Originalsignals $X(\omega)$ zurück zu gewinnen:



Signal Fenstern mathematisch:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X_A(\omega) \cdot \Delta T_A \cdot rect\Big(\frac{\omega}{\omega_P}\Big) \\ &= X_A(\omega) \cdot \Delta T_A \cdot rect\Big(\frac{\omega \Delta T_A}{2\pi}\Big) \end{aligned} \tag{16}$$

2. Schritt: Zurücktransformieren

(Multiplikation im Spektrum ⇒ Faltung im Zeitsignal)

$$
\begin{aligned}
X(\omega) \circ\!\!-\!\!\bullet\ & x_A(t) * sinc(\frac{t\pi}{\Delta T_A}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n\Delta T_A) \cdot sinc\Big(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t-\tau)\Big)\ d\tau \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot sinc\Big(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t-\tau)\Big)\delta(\tau - n\Delta T_A)\ dt\tau \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta T_A) \cdot sinc\Big(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - n\Delta T_A)\Big) = x(t)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

4.2.6 DFT (diskrete, periodische Signale)

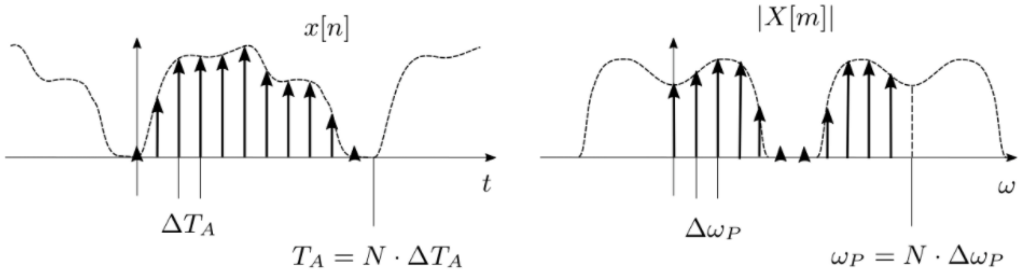
Der Sinn der DFT: Man will nicht nur das Signal auf einer digitalen Rechen- oder Speichereinheit verarbeiten, sondern auch das Spektrum.
Die Idee der DFT:
diskretes & periodisches Zeitsignal $\circ\!\!-\!\!\bullet$ diskretes & periodisches Spektrum

$$
\begin{aligned}
X[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi\frac{mn}{N}}\ (DFT) \\
x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{j2\pi\frac{mn}{N}}\ (IDFT) \\
&wobei \\
x[n] &:= x(n\Delta T_A) \\
X[m] &:= X(m\Delta\omega_P)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Es gilt für Zeitsignal und Frequenzspektrum in dieser Darstellung die gleiche Periode N, d.h. $X[m+N] = X[m]$ und $x[m+N] = x[n]$.

Bemerkungen:

- Man erhält für N abgetastete Werte des Originalsignals automatisch auch N Werte des Spektrums.
- Zusammenhang diskretes Zeit- und Spektralsignal:



- $X[N-m] = \overline{X[m]}$ und damit auch $|X[N-m]| = |\overline{X[m]}| = |X[m]|$
- Für ein reelles Signal x[n] ist das Betragsspektrum $|X[m]|$ immer symmetrich innerhalb einer Periode: $|X[m]| = |X[N-m]|$ für $m = 0, ..., N-1$

Die Herleitung der DFT wird in 5. Schritten aufgeteilt:

- Schritte 1-2: Erzeugen des diskreten und periodischen Zeitsignals für die DFT
- Schritte 3-5: Zusammenhang zwischen dem diskreten und periodischen Zeitsignal mit seinem diskreten und periodischen Spektrum
- Der Zusammenhang wird durch folgende Argumentation erreicht:
  diskretes & periodisches Zeitsignal $\circ\!\!-\!\!\bullet$ CTFT $\{\cdot\}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ ICTFT{CTFT $\{\cdot\}$}

1. Schritt

- kontinuierliches Zeitsignal $x(t)$ im Intervall $[0, T_A]$ fenstern, so dass wesentliche Signalinformation enthalten ist.
- gefensterte Signal künstlich periodisch fortsetzen und umbenennen zu $x_P(t)$.
- Potentielle Fehler: Falsch abschneiden fürs zukünftige Periodisieren.
  $\rightarrow$ Leakage Fehler

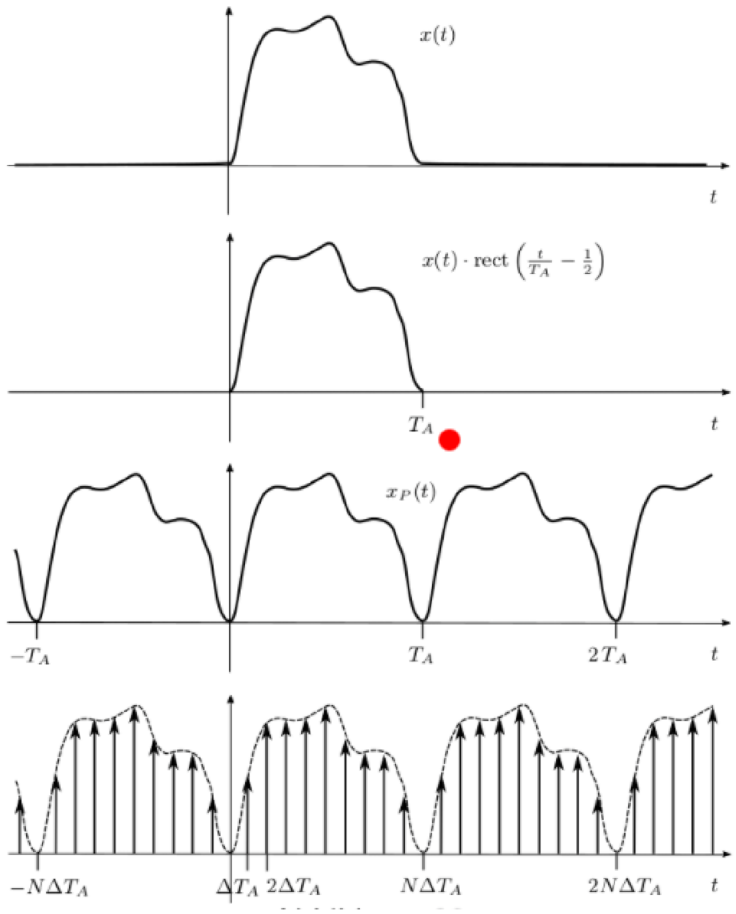
2. Schritt

- Abtastung des periodischen Signals $x_P(t)$ wobei N Abtastzeitpunkte im Grundintervall $[0, T_A]$ untergebracht werden. N wird als Blocklänge des diskreten Signals bezeichnet.
- Dadurch haben die Abtastzeitpunkte einen Abstand von $\Delta T_A := \frac{T_A}{N}$. D.h. wir betrachten das abgetastete Signal:

$$x_P(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A)$$

- Potentielle Fehler: Abtasttheorem verletzen.

Grafik 1. und 2. Schritt:



3. Schritt — Konkrete Herleitung erspart

- Fouriertransformation (CTFT) für das abgetastete Signal:

$$\begin{aligned} &x_P(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet \left[\frac{2\pi}{N\Delta T_A} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T_A) e^{-jn\Delta T_A \omega}\right] \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\Delta\omega_p)\right] \end{aligned} \tag{19}$$

- Es gilt im Grundintervall $[0, T_A]$, dass $x_p(n\Delta T_A) = x(n\Delta T_A)$.
- Es gilt im Grundintervall, dass die Konstante $\Delta\omega_p := \frac{2\pi}{N\Delta T_A}$ eingeführt wird.
- Wir stellen fest: Die Fouriertransformierte ist ein abgetastetes Signal mit Abtastorten $k\Delta\omega_p, k \in \mathbb{Z}$.

4. Schritt — Konkrete Herleitung erspart

- Inverse Fouriertransformation (ICTFT) auf das Spektrum, um wieder das Originalsignal an den Abtastorten zu erhalten:

$$\bullet\!\!-\!\!\circ \left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T_A) e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} e^{j2\pi\frac{k}{N}\frac{t}{\Delta T_A}}\right] \cdot \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - l\Delta T_A)\right] \tag{20}$$

- Die fordere eckige Klammer ist identisch zu $x_p(t)$.
- Ist $t \in [0, T_A]$, ist die fordere eckige Klammer sogar identisch zu x(t).
- Gilt auch für spezielle t: Für ein $t_0 \in [0, T_A] \Rightarrow x(t_0)$.

5. Schritt

- Die Erkenntnis von Schritt 4 für $t_0 = m\Delta T_A$ anwenden:

$$x(m\Delta T_A) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T_A) e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}\right] e^{j2\pi\frac{km}{N}} \tag{21}$$

- Die eckige Klammer =: $X(k\Delta\omega_P)$ (DFT)
- Der ganze Ausdruck =: IDFT