

# **Integraltransformation**

**Zusammenfassung**

Grasso Antonino

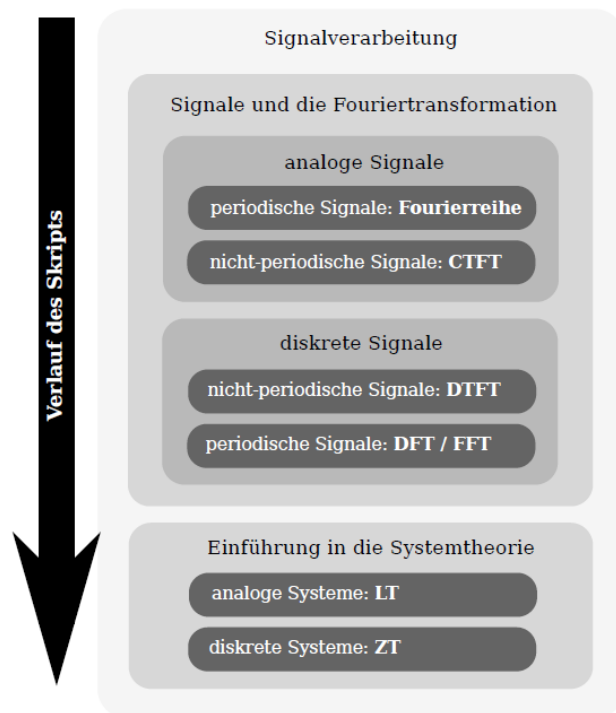
Sommersemester 21

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Verlauf und Rahmen</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Definitionen und Konstanten</b>	<b>4</b>
2.1	Funktionen . . . . .	4
2.1.1	sinc-Funktion $\text{sinc}(t)$ . . . . .	4
2.1.2	Sprungfunktion $\varepsilon(t)$ . . . . .	4
2.1.3	Zeitsignal $x(t)$ . . . . .	5
2.1.4	Frequenzspektrum $X(\omega)$ . . . . .	5
2.1.5	Abgetastetes Zeitsignal $x_A(t)$ . . . . .	5
2.1.6	Abgetastetes Frequenzspektrum $X_A(\omega)$ . . . . .	5
2.1.7	Impulsantwort $h(t)$ . . . . .	5
2.2	Variablen von analogen Signalen . . . . .	5
2.2.1	Periodendauer $T_p$ . . . . .	5
2.2.2	Frequenz $f$ . . . . .	5
2.2.3	Kreisfrequenz $\omega_p$ . . . . .	5
2.2.4	Bandbreite $B$ . . . . .	5
2.3	Variablen von diskreten Signalen . . . . .	6
2.3.1	Abtastfrequenz $f_A$ . . . . .	6
2.3.2	Blocklänge $N$ . . . . .	6
2.3.3	Zeitabstände $\Delta T_A$ . . . . .	6
2.3.4	Frequenzabstände $\Delta \omega_p$ . . . . .	6
2.3.5	Periodendauer im Zeitraum $T_A$ . . . . .	6
2.3.6	Periodendauer im Frequenzspektrum $\omega_p$ . . . . .	7
2.4	Systeme . . . . .	7
2.4.1	LTI-System . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Signale und Fouriertransformation</b>	<b>8</b>
3.1	Klassifizierung von Signalen . . . . .	8
3.2	Analoge Signale . . . . .	8
3.2.1	Fourierreihe (analoge, periodische Signale) . . . . .	8
3.2.2	CTFT (analoge, nicht-periodische Signale) . . . . .	10
3.2.3	Einschub: Die kontinuierliche Faltung . . . . .	11
3.2.4	Einschub: Der Delta-Impuls . . . . .	11
3.2.5	Faltung mit dem Delta-Impuls . . . . .	12
3.2.6	Besonderheiten der CTFT . . . . .	13
3.3	Diskrete Signale . . . . .	16
3.3.1	Delta-Kamm . . . . .	16
3.3.2	Abgetastetes Signal . . . . .	16
3.3.3	DTFT (diskrete, nicht-periodische Signale) . . . . .	17
3.3.4	Abtasttheorem . . . . .	18
3.3.5	Rekonstruktion von abgetasteten Signalen . . . . .	18
3.3.6	DFT (diskrete, periodische Signale) . . . . .	20

3.3.7	Handlungsanweisung zur DFT . . . . .	23
3.3.8	Einschub: Die diskrete Faltung . . . . .	27
3.3.9	Besonderheiten der DFT . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Systemtheorie</b>	<b>31</b>
4.1	Klassifizierung von Systemen . . . . .	31
4.1.1	Linearität . . . . .	31
4.1.2	Zeitinvarianz . . . . .	32
4.1.3	Kausalität . . . . .	32
4.1.4	BIBO-Stabilität . . . . .	32
4.1.5	Erhaltung von Frequenzen beim Durchlaufen von LTI-Systemen .	33
4.1.6	Beispielsysteme: Grundarten von Filtern . . . . .	34
4.2	Impuls- und Schrittantwort . . . . .	35
4.2.1	Impulsantwort . . . . .	35
4.2.2	Schrittantwort . . . . .	36
4.3	Analoge LTI-Systeme . . . . .	36
4.3.1	Grundregeln analoger LTI-Systeme . . . . .	36
4.3.2	Darstellung analoger elektronischer Schaltungen als Differential- gleichungen . . . . .	37
4.3.3	Laplace-Transformation . . . . .	38
4.4	Diskrete LTI-Systeme . . . . .	39

# 1 Verlauf und Rahmen



## 2 Definitionen und Konstanten

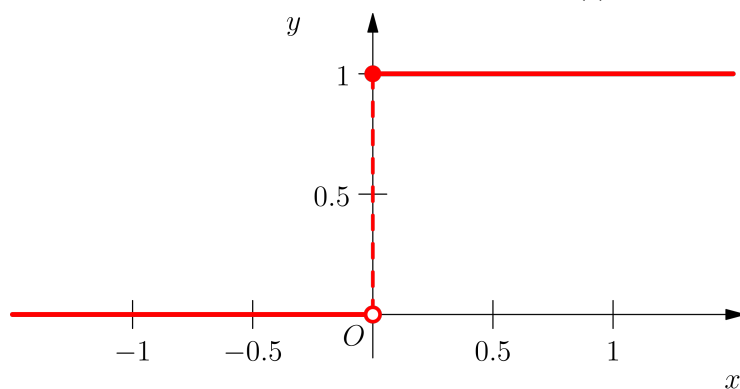
### 2.1 Funktionen

#### 2.1.1 sinc-Funktion $\text{sinc}(t)$

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

#### 2.1.2 Sprungfunktion $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) :=$$



**2.1.3 Zeitsignal  $x(t)$** 

$$x(t) := \text{Zeitsignal}$$

**2.1.4 Frequenzspektrum  $X(\omega)$** 

$$X(\omega) := \text{Frequenzspektrum}$$

**2.1.5 Abgetastetes Zeitsignal  $x_A(t)$** 

$$x_A(t) := \text{abgetastetes Zeitsignal}$$

**2.1.6 Abgetastetes Frequenzspektrum  $X_A(\omega)$** 

$$X_A(\omega) := \text{abgetastetes Frequenzspektrum}$$

**2.1.7 Impulsantwort  $h(t)$** 

Die Impulsantwort  $h(t)$  eines LTI-Systems ist das Ausgangssignal, wenn man einen Delta-Impuls  $x(t) := \delta(t)$  als Eingangssignal wählt:

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

”Man kann alles über ein System lernen wenn man einen Delta-Impuls hineingibt.”

**2.2 Variablen von analogen Signalen****2.2.1 Periodendauer  $T_p$** 

$$x(t) := \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$T_p := x(t + n \cdot T_p) = x(t)$$

**2.2.2 Frequenz  $f$** 

$$f = \frac{1}{T_p} = \frac{\omega_p}{2\pi}$$

**2.2.3 Kreisfrequenz  $\omega_p$** 

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$$

**2.2.4 Bandbreite  $B$** 

$$B :=$$

höchste vorkommende Frequenz

## 2.3 Variablen von diskreten Signalen

### 2.3.1 Abtastfrequenz $f_A$

$$f_A = \frac{1}{\Delta T_A} = \frac{\omega_p}{2\pi}$$

### 2.3.2 Blocklänge $N$

$$N :=$$

Anzahl an Stellen des diskreten Signals

$$T_A \cdot \omega_P = 2\pi \cdot N$$

Das Produkt aus Periodendauern ist eine konstante Grösse, welche sich nur mit der Blocklänge  $N$  verändern lässt.

→ Unschärferelation der DFT (1. Variante)

$$\Delta T_A \cdot \Delta \omega_P = \frac{2\pi}{N}$$

Das Produkt der Abtastabstände ist ebenso eine konstante Grösse, welche sich nur durch Blocklänge  $N$  verändern lässt.

→ Unschärferelation der DFT (2. Variante)

### 2.3.3 Zeitabstände $\Delta T_A$

$$\Delta T_A :=$$

Zeitabstände der Abtastung im Zeitraum

### 2.3.4 Frequenzabstände $\Delta \omega_p$

$$\Delta \omega_p :=$$

Frequenzabstände der Abtastung im Frequenzspektrum

$$\Delta \omega_P = \frac{2\pi}{T_A} \Rightarrow$$

Länge der Periode im Zeitraum legt Feinheit der Abtastung im Frequenzraum fest.

### 2.3.5 Periodendauer im Zeitraum $T_A$

$$T_A = N \cdot \Delta T_A :=$$

Periodendauer im Zeitraum = Signaldauer

### 2.3.6 Periodendauer im Frequenzspektrum $\omega_p$

$$\omega_p = N \cdot \Delta\omega_P :=$$

Periodendauer im Frequenzraum = max. Signalfrequenz

$$\omega_p = \frac{2\pi}{\Delta T_A} \Rightarrow$$

Die Feinheit der Abtastung im Zeitraum legt die maximale angenommene Frequenz fest  
→ Abtasttheorem!

## 2.4 Systeme

### 2.4.1 LTI-System

LTI-System  $\hat{=}$  lineares und zeitinvariantes System

## 3 Signale und Fouriertransformation

### 3.1 Klassifizierung von Signalen

$x(t) \setminus t$	zeitkontinuierlich	zeitdiskret
wertkontinuierlich	analoges Signal	abgetastetes/diskretes Signal
wertdiskret	quantisiertes Signal	digitales Signal

### 3.2 Analoge Signale

#### 3.2.1 Fourierreihe (analoge, periodische Signale)

Jedes Signal  $x(t)$  kann als unendliche Summe von überlagerten Sinus und Cosinus Funktionen dargestellt werden:

**Sinus-Cosinus-Darstellung der Fourierreihe:**

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_p t) + b_n \cdot \sin(n\omega_p t)) \\
 a_n &= \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot \cos(n\omega_p t) dt \\
 b_n &= \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot \sin(n\omega_p t) dt
 \end{aligned} \tag{1}$$

$a_n$  und  $b_n$  dienen hierbei als Ähnlichkeitsmass wie sehr sich die Ursprungsfunktion  $x(t)$  der jeweiligen Elementarfunktion ( $\sin(n\omega_p t)$  oder  $\cos(n\omega_p t)$ ) ähnelt.

**Bemerkungen:**

- Die Fourierreihe nimmt an Sprungstellen den Mittelwert von linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert an
- Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten lässt sich das Integrationsintervall verschieben z.B. zu  $(0, T_p)$ .

**Betrags-/Phasen-Darstellung der Fourierreihe:**

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_p t + \varphi_n) \\
 A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\
 \varphi_n &= -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)
 \end{aligned} \tag{2}$$



Diese Darstellung lässt sich aus den Additionstheoremen von Sinus und Cosinus ableiten.

### Komplexe Darstellung der Fourierreihe:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_p t} \quad (3)$$

$$c_n = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot e^{-jn\omega_p t} dt$$

Herleitung:

Mit

$$e^{j\omega t} := \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)$$

erhält man

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

und daher:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_p t + \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_p t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_p t}$$

$$c_n = \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n}$$

$$c_{-n} = \frac{A_n}{2} e^{-j\varphi_n}$$

### Umformungen:

	$\rightarrow a_n, b_n$
$A_n, \varphi_n$	$a_n = A_n \cos \varphi_n,$ $b_n = -A_n \sin \varphi_n$
$c_n, (c_{-n} := \bar{c}_n)$	$a_n = c_n + c_{-n},$ $b_n = j(c_n - c_{-n})$
	$\rightarrow A_n, \varphi_n$
$a_n, b_n$	$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$
$c_n, (c_{-n} := \bar{c}_n)$	$A_n = 2 c_n  = 2\sqrt{\operatorname{Re}(c_n)^2 + \operatorname{Im}(c_n)^2},$ $\varphi_n = \arg(c_n)$
	$\rightarrow c_n, (c_{-n} := \bar{c}_n)$
$a_n, b_n$	$c_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n)$
$A_n, \varphi_n$	$c_n = \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n}$

### Bedingungen für die Transformation:

- Die Funktion muss periodisch sein.
- Innerhalb einer Periode aufteilbar in endlich viele stetige Teilstücke.
- Es dürfen keine divergierende Sprungstellen auftauchen.

### 3.2.2 CTFT (analoge, nicht-periodische Signale)

Der Sinn der CTFT: Man möchte vom Zeitsignal  $x(t)$  zum Frequenzspektrum  $X(\omega)$ .

Die Idee der CTFT: Man nimmt die Fourierreihe und lässt  $T_p \rightarrow \infty$  gehen:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (CTFT/FT) \quad (\text{aus 5}) \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (ICTFT/IFT) \quad (\text{aus 6}) \end{aligned} \quad (4)$$

Herleitung:

Wir definieren eine Hilfsvariable:  $\omega_n = n\omega_p$ , sodass gilt:  $\omega_{n+1} - \omega_n = \omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$  und beginnen mit:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

und

$$c_n := \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot e^{-j\omega_n t} dt$$

Wir definieren eine Funktion in Abhängigkeit von  $\omega_n$ :

$$\begin{aligned} X(\omega_n) &:= \frac{2\pi}{\omega_p} c_n \quad (\Leftrightarrow c_n = \frac{\omega_p}{2\pi} X(\omega_n)) \\ &= \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot e^{-j\omega_n t} dt \end{aligned} \quad (5)$$

Das neu gewonnene  $c_n$  wird nun als Koeffizient in die ursprüngliche komplexe Fourierreihe eingesetzt:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_p}{2\pi} X(\omega_n) e^{j\omega_n t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega_n) e^{j\omega_n t} \omega_p \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega_n) e^{j\omega_n t} (\omega_{n+1} - \omega_n) \end{aligned} \quad (6)$$

Lässt man nun  $T_p \rightarrow \infty$  gehen, wird  $\omega_p$  immer kleiner und die Unterteilungen  $\omega_n$  wandern dichter zueinander und im Grenzfall ein kontinuierlicher Verlauf ( $\omega_n \rightarrow \omega$ ) und man erhält ein Riemann-Integral. Daraus folgt sich die oben aufgeführten Integrale für  $x(t)$  und  $X(\omega)$ .

#### Bemerkungen:

- Stärke des Vorhandenseins einer Frequenz:  $|X(\omega)|$

- Verschiebung der einzelnen Frequenzen:  $\varphi = \arg(X(\omega))$
- Es gilt:  $\overline{X(\omega)} = X(-\omega)$
- Bei reellen Signalen ist Betragsspektrum  $|X(\omega)|$  symmetrisch um Null

### 3.2.3 Einschub: Die kontinuierliche Faltung

$$y(t) := x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau \quad (7)$$

(Integral)

Mit der Laufvariable  $\tau$  läuft man  $x_1$  vorwärts durch und  $x_2$  rückwärts aber um  $t$  verschoben durch.

$t$  ist hier als fester, bekannter Wert zu interpretieren.

(Faltung) (Man macht das was oben drüber steht für jedes beliebige  $t$ )

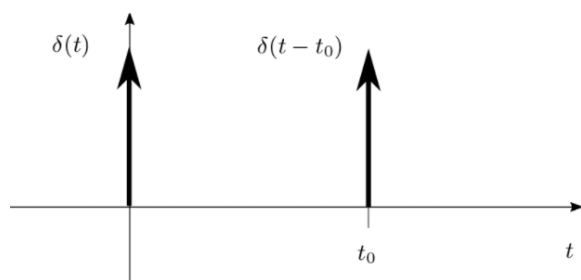
Man legt ein  $\tau$  für  $x_1$  und  $x_2$  fest, verändert  $t$  laufend und sieht sich die Schnittfläche der beiden Funktionen an.

Main Purpose in der Signalverarbeitung: Abschwächung / Auslöschung von hohen Frequenzen.

### 3.2.4 Einschub: Der Delta-Impuls

Wir definieren eine Funktion:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0 \text{ for } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1 \end{aligned} \quad (8)$$



Verwendung des Delta-Impulses (Ausblendeigenschaft):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0) \cdot \delta(t - t_0) dt \\ &= x(t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt \\ &= x(t_0) \end{aligned} \quad (9)$$

$x(t)$  wird überall ignoriert ausser an der Stelle an der  $\delta(t - t_0) \neq 0$ , d.h. bei  $t = t_0$ .  
Quasi eine Abtastung der Funktion  $x(t)$  an Stelle  $t_0$ .

**Fouriertransformation des Delta-Impulses:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega 0} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t) \circ \bullet 1$$

Das Spektrum des Delta-Impulses enthält alle Frequenz mit Gewicht 1!

**Die Stammfunktion des Delta-Impulses:  $\varepsilon(t)$ :**

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \delta(t)$$

**Fouriertransformation der Sprungfunktion:**

$$\varepsilon(t) \circ \bullet \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

### 3.2.5 Faltung mit dem Delta-Impuls

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t - t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta((t - t_0) - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(\tau - (t - t_0)) d\tau \\ &= x(t - t_0) \end{aligned} \tag{10}$$

Kurz bedeutet das

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) ,$$

und für  $t_0 = 0$

$$x(t) * \delta(t) = x(t) .$$

Der Delta-Impuls ist das Neutrale Element bezüglich der Faltung!

### 3.2.6 Besonderheiten der CTFT

#### Eigenschaften der CTFT:

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Frequenzbereich
Linearität	$k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \circ \longrightarrow k_1 X_1(\omega) + k_2 X_2(\omega)$
Symmetrie / Dualität	Gilt: $x(t) \circ \longrightarrow X(\omega)$ dann auch: $X(t) \circ \longrightarrow 2\pi x(-\omega)$
Zeitverschiebung	$x(t - \tau) \circ \longrightarrow X(\omega) e^{-j\omega\tau}$
Frequenzverschiebung	$x(t) e^{jWt} \circ \longrightarrow X(\omega - W)$

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Frequenzbereich
Zeitskalierung	$x(k \cdot t) \circ \longrightarrow \frac{1}{ k } \cdot X\left(\frac{1}{k} \cdot \omega\right)$
Frequenzskalierung	$\frac{1}{ k } \cdot x\left(\frac{1}{k} \cdot t\right) \circ \longrightarrow X(k \cdot \omega)$
Faltung (Zeit)	$x_1(t) * x_2(t) \circ \longrightarrow X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$
Faltung (Frequenz)	$2\pi \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \circ \longrightarrow X_1(\omega) * X_2(\omega)$

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Frequenzbereich
Differentiation (Zeit)	$\frac{d}{dt} x(t) \circ \longrightarrow j\omega X(\omega)$
Integration (Zeit)	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \circ \longrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi \cdot X(0) \cdot \delta(\omega)$
Reelle Signale $x(t)$	$X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$ und $ X(-\omega)  =  X(\omega) $

#### Signaldauer-Bandbreite-Produkt:

Signal	Zeitintervall	Dauer	Spektrum	Bereich	Bandbreite
$x(t)$	$[t_0, t_1]$	$t_1 - t_0$	$X(\omega)$	$[\omega_0, \omega_1]$	$\omega_1 - \omega_0$
$x(k t)$	$[\frac{1}{k} t_0, \frac{1}{k} t_1]$	$\frac{1}{k} (t_1 - t_0)$	$\frac{1}{ k } X(\frac{1}{k} \omega)$	$[k \omega_0, k \omega_1]$	$k (\omega_1 - \omega_0)$
$\frac{1}{ k } x(\frac{1}{k} t)$	$[k t_0, k t_1]$	$k (t_1 - t_0)$	$X(k \omega)$	$[\frac{1}{k} \omega_0, \frac{1}{k} \omega_1]$	$\frac{1}{k} (\omega_1 - \omega_0)$


Demnach ist das *Signaldauer–Bandbreite–Produkt* (oder *Zeit–Bandbreite–Produkt*) konstant, da  $\frac{1}{k} (t_1 - t_0) \cdot k (\omega_1 - \omega_0) = k (t_1 - t_0) \cdot \frac{1}{k} (\omega_1 - \omega_0) = (t_1 - t_0) \cdot (\omega_1 - \omega_0)$ :

$\text{Signaldauer} \times \text{Bandbreite} = \text{const.}$
---

### Korrespondenzen der CTFT:

Zeitbereich $x(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	Frequenzbereich $X(\omega)$
$\delta(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	1
1	$\circ \text{---} \bullet$	$2\pi \delta(\omega)$
$\varepsilon(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$ t $	$\circ \text{---} \bullet$	$-\frac{2}{\omega^2}$
$t^n$	$\circ \text{---} \bullet$	$2\pi j^n \cdot \frac{d^n}{d\omega^n} \delta(\omega)$

Zeitbereich $x(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	Frequenzbereich $X(\omega)$
$e^{-a t }$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
$\varepsilon(t) \cdot e^{-at}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$\varepsilon(t) \cdot e^{-at} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{(j\omega + a)^n}$
$e^{j\omega_0 t}$	$\circ \text{---} \bullet$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

Zeitbereich $x(t)$	 Frequenzbereich $X(\omega)$
$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$\text{sinc}(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{\omega_0} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$
$e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\tau^2}t^2}$	$\sqrt{2\pi}\tau \cdot e^{-\frac{1}{2}\tau^2\omega^2}$

### 3.3 Diskrete Signale

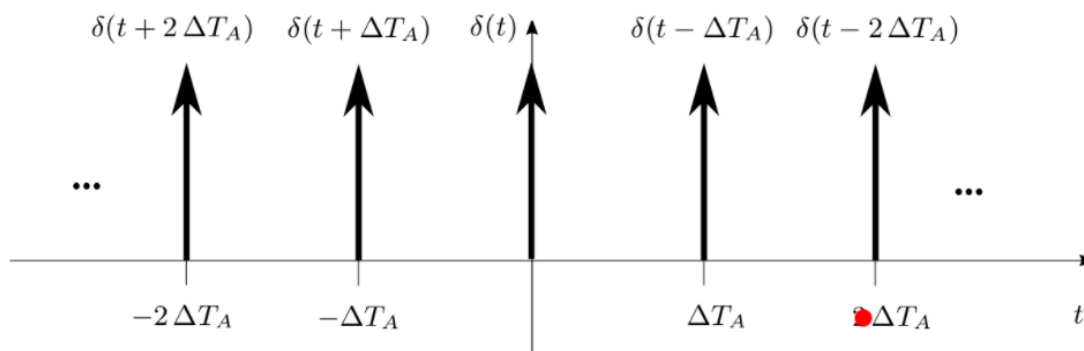
#### 3.3.1 Delta-Kamm

Die Idee eines Delta-Kamms: Aus einer kontinuierlichen Funktion wird eine Zahlenfolge gemacht.

Um eine Zahlenfolge aus einer kontinuierlichen Funktion zu erhalten, muss diese abgetastet werden. Die Abtastung einer kontinuierlichen Funktion erfolgt mit einem Delta-Kamm:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) \quad (11)$$

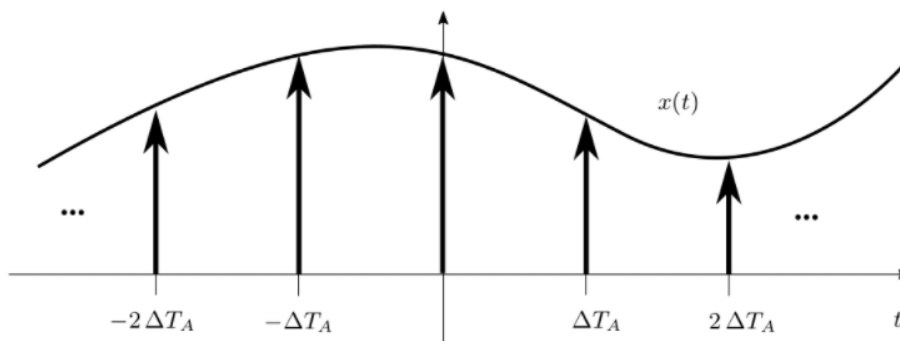
Der Delta-Kamm stellt eine Schar einzelner Delta-Impulsen an bestimmten gewünschten Abtastungsorten mit gleichem Abstand voneinander dar:



#### 3.3.2 Abgetastetes Signal

Ein abgetastetes Signal ist mit Hilfe des Delta-Kamms definiert durch:

$$x_A(t) := x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) \quad (12)$$



$x_A(t)$  wird auch als Diskretes Signal bezeichnet.



### 3.3.3 DTFT (diskrete, nicht-periodische Signale)

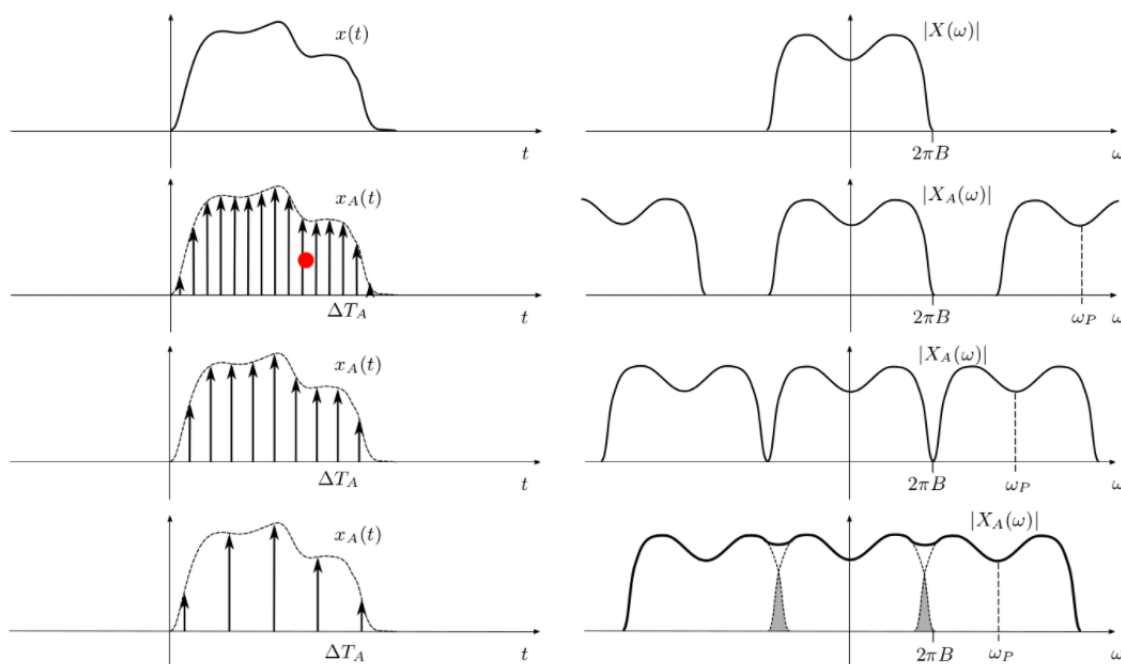
Mit Hilfe der Ausblendeigenschaft des Delta-Impulses kann man die Fouriertransformation eines solchen abgetasteten Signals bestimmen:

$$\begin{aligned}
 X_A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_A(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \cdot \delta(t - n\Delta T_A) dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta T_A) e^{-j\omega n\Delta T_A}
 \end{aligned} \tag{13}$$

#### Bemerkungen:

- Ein diskretes Zeitsignal führt dennoch zu einem kontinuierlichen Frequenzspektrum
- Durch Abtastung eines Zeitsignals mit Zeitabständen  $\Delta T_A$  wird Frequenzspektrum periodisch mit Periodendauer  $\omega_p := \frac{2\pi}{\Delta T_A}$
- diskretes Zeitsignal  $\circ \bullet$  periodisches Spektrum
- periodisches Zeitsignal  $\circ \bullet$  diskretes Spektrum
- Zusammenhang CTFT und DTFT:  $x_A(\omega) = \frac{1}{\Delta T_A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta T_A}\right)$

### 3.3.4 Abtasttheorem



Man folgert:  $\omega_P > 2 \cdot 2\pi B$

Daraus ergibt sich das eigentliche Abtasttheorem:

$$f_A = \frac{1}{\Delta T_A} > 2 \cdot B \Rightarrow \Delta T_A < \frac{1}{2 \cdot B} \quad (14)$$

Ist das Abtasttheorem beim Abtasten eines Signales eingehalten, so kann versichert werden, dass keine Informationen des Originalsignals verloren gehen und eine Rekonstruktion ist möglich.

⇒ "Mindestens mit der doppelt so grossen Frequenz wie im Originalsignal vorhanden ist abtasten."

#### Bemerkungen:

- Die höchsten Frequenzen sind die, die zuerst unter der Verletzung des Abtasttheorems leiden (Unterabtastung)
- Informationsverlust ist nicht leicht zu beheben
- In der Praxis verwendet man häufig eine deutliche Überabtastung

### 3.3.5 Rekonstruktion von abgetasteten Signalen

Unter der Annahme, dass das Abtasttheorem mit Zeitintervallen  $\Delta T_A$  nicht verletzt wird, kann aus den diskreten Abtastwerten  $x(n\Delta T_A)$  die kontinuierliche Originalfunktion  $x(t)$

rekonstruiert werden mit:

$$x(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta T_A) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - n\Delta T_A)\right) \quad (15)$$

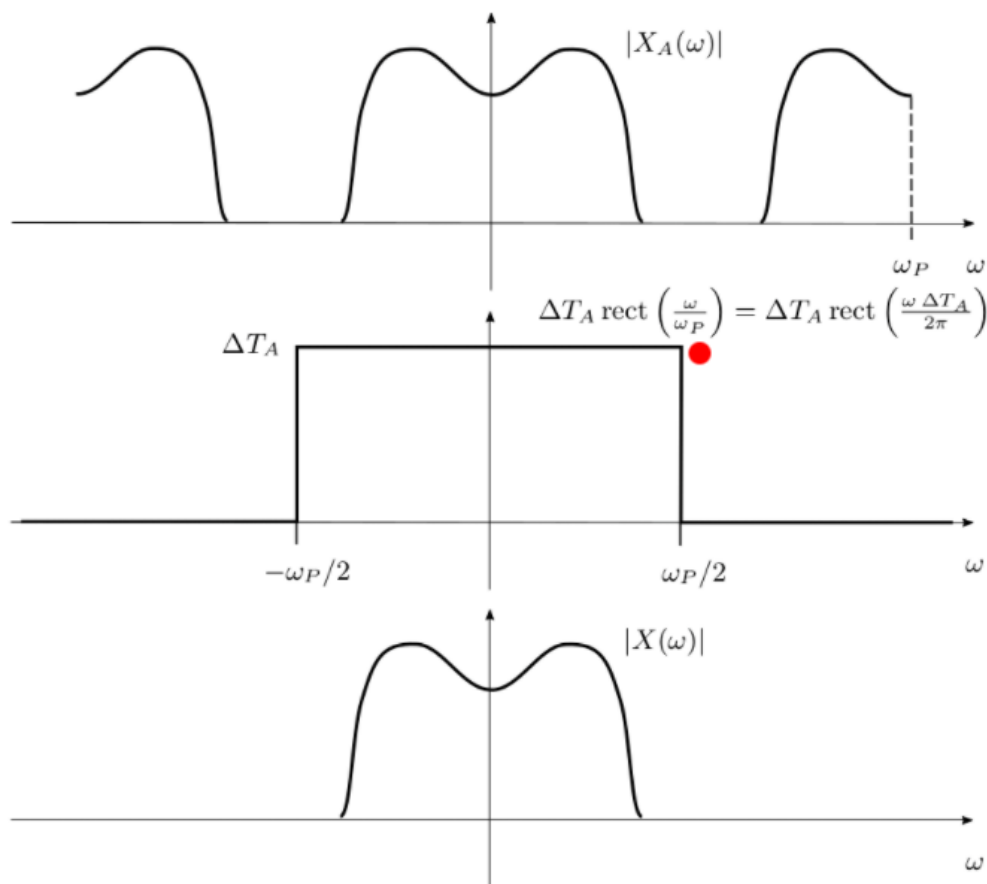
⇒ "Man interpoliert die diskreten Punkten mit der *sinc*-Funktion."

Herleitung:

1. Schritt: Isolieren einer Periode durch Fenstern

Man verwendet einen wichtigen Trick: Das sogenannte Fenstern von Signalen.

Man multipliziert die periodische Fouriertransformierte des Abtastsignals  $X_A(\omega)$  mit einem Rechteckpuls der Breite  $\omega_P$ , um die Fouriertransformierte des Originalsignals  $X(\omega)$  zurück zu gewinnen:



Signal Fenstern mathematisch:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X_A(\omega) \cdot \Delta T_A \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_P}\right) \\ &= X_A(\omega) \cdot \Delta T_A \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega \Delta T_A}{2\pi}\right) \end{aligned} \quad (16)$$

## 2. Schritt: Zurücktransformieren

(Multiplikation im Spektrum  $\Rightarrow$  Faltung im Zeitsignal)

$$\begin{aligned}
X(\omega) &\circ\bullet x_A(t) * \text{sinc}\left(\frac{t\pi}{\Delta T_A}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n\Delta T_A) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - \tau)\right) d\tau \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - \tau)\right) \delta(\tau - n\Delta T_A) dt\tau \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta T_A) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - n\Delta T_A)\right) = x(t)
\end{aligned} \tag{17}$$

**3.3.6 DFT (diskrete, periodische Signale)**

Der Sinn der DFT: Man will nicht nur das Signal auf einer digitalen Rechen- oder Speichereinheit verarbeiten, sondern auch das Spektrum.

Die Idee der DFT:

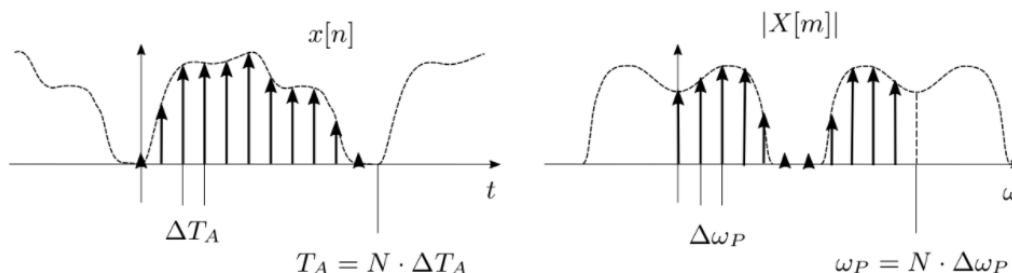
diskretes & periodisches Zeitsignal  $\circ\bullet$  diskretes & periodisches Spektrum

$$\begin{aligned}
X[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{mn}{N}} \quad (DFT) \\
x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{j2\pi \frac{mn}{N}} \quad (IDFT) \\
&\text{wobei} \\
x[n] &:= x(n\Delta T_A) \\
X[m] &:= X(m\Delta\omega_P)
\end{aligned} \tag{18}$$

Es gilt für Zeitsignal und Frequenzspektrum in dieser Darstellung die gleiche Periode  $N$ , d.h.  $X[m + N] = X[m]$  und  $x[m + N] = x[n]$ .

**Bemerkungen:**

- Man erhält für  $N$  abgetastete Werte des Originalsignals automatisch auch  $N$  Werte des Spektrums.
- Zusammenhang diskretes Zeit- und Spektralsignal:



- $X[N - m] = \overline{X[m]}$  und damit auch  $|X[N - m]| = |\overline{X[m]}| = |X[m]|$
- Für ein reelles Signal  $x[n]$  ist das Betragsspektrum  $|X[m]|$  immer symmetrisch innerhalb einer Periode:  $|X[m]| = |X[N - m]|$  für  $m = 0, \dots, N - 1$

Die Herleitung der DFT wird in 5. Schritten aufgeteilt:

- Schritte 1-2: Erzeugen des diskreten und periodischen Zeitsignals für die DFT
- Schritte 3-5: Zusammenhang zwischen dem diskreten und periodischen Zeitsignal mit seinem diskreten und periodischen Spektrum
- Der Zusammenhang wird durch folgende Argumentation erreicht:  
diskretes & periodisches Zeitsignal  $\circ \bullet$  CTFT  $\{\cdot\}$   $\bullet \circ$  ICTFT  $\{\text{CTFT } \{\cdot\}\}$

### 1. Schritt

- kontinuierliches Zeitsignal  $x(t)$  im Intervall  $[0, T_A]$  fenstern, so dass wesentliche Signalinformation enthalten ist.
- gefensterte Signal künstlich periodisch fortsetzen und umbenennen zu  $x_P(t)$ .
- Potentielle Fehler: Falsch abschneiden fürs zukünftige Periodisieren.  
→ Leakage Fehler

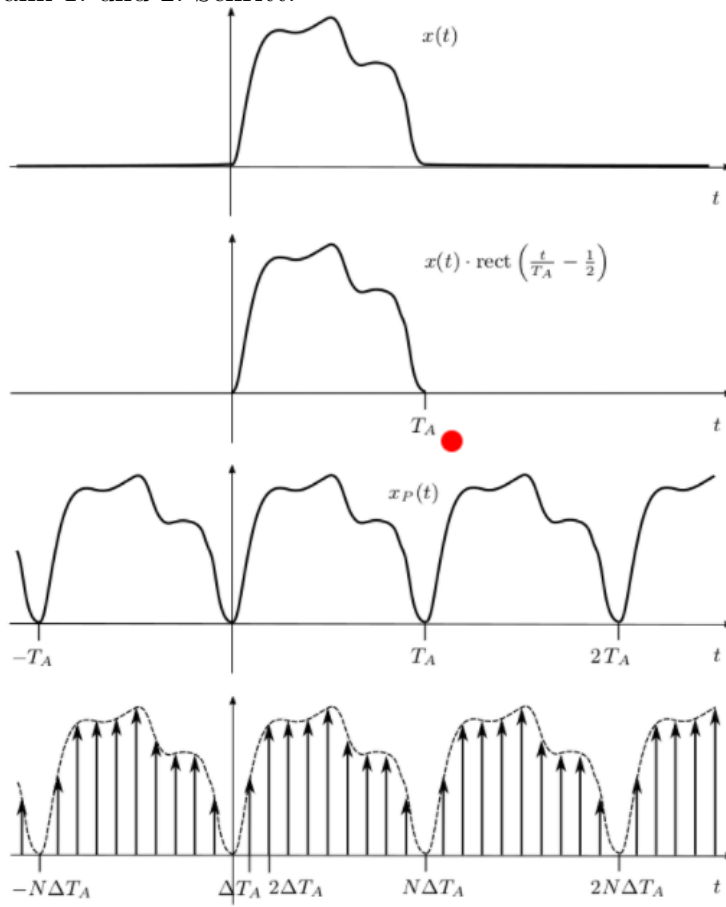
### 2. Schritt

- Abtastung des periodischen Signals  $x_P(t)$  wobei  $N$  Abtastzeitpunkte im Grundintervall  $[0, T_A]$  untergebracht werden.  $N$  wird als Blocklänge des diskreten Signals bezeichnet.
- Dadurch haben die Abtastzeitpunkte einen Abstand von  $\Delta T_A := \frac{T_A}{N}$ . D.h. wir betrachten das abgetastete Signal:

$$x_P(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A)$$

- Potentielle Fehler: Abtasttheorem verletzen.

Grafik 1. und 2. Schritt:



3. Schritt — Konkrete Herleitung erspart

- Fouriertransformation (CTFT) für das abgetastete Signal:

$$\begin{aligned}
 & x_P(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) \\
 \circ \bullet & \left[ \frac{2\pi}{N\Delta T_A} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T_A) e^{-jn\Delta T_A \omega} \right] \cdot \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\Delta\omega_p) \right] \quad (19)
 \end{aligned}$$

- Es gilt im Grundintervall  $[0, T_A]$ , dass  $x_P(n\Delta T_A) = x(n\Delta T_A)$ .
- Es gilt im Grundintervall, dass die Konstante  $\Delta\omega_p := \frac{2\pi}{N\Delta T_A}$  eingeführt wird.
- Wir stellen fest: Die Fouriertransformierte ist ein abgetastetes Signal mit Abtastorten  $k\Delta\omega_p, k \in \mathbb{Z}$ .

## 4. Schritt — Konkrete Herleitung erspart

- Inverse Fouriertransformation (ICTFT) auf das Spektrum, um wieder das Originalsignal an den Abtastorten zu erhalten:

$$\bullet \circ \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T_A) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} e^{j2\pi \frac{k}{N} \frac{t}{\Delta T_A}} \right] \cdot \left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - l\Delta T_A) \right] \quad (20)$$

- Die fordere eckige Klammer ist identisch zu  $x_p(t)$ .
- Ist  $t \in [0, T_A]$ , ist die fordere eckige Klammer sogar identisch zu  $x(t)$ .
- Gilt auch für spezielle  $t$ : Für ein  $t_0 \in [0, T_A] \Rightarrow x(t_0)$ .

## 5. Schritt

- Die Erkenntnis von Schritt 4 für  $t_0 = m\Delta T_A$  anwenden:

$$x(m\Delta T_A) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T_A) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \right] e^{j2\pi \frac{km}{N}} \quad (21)$$

- Die eckige Klammer =:  $X(k\Delta\omega_P)$  (DFT)
- Der ganze Ausdruck =: IDFT

**3.3.7 Handlungsanweisung zur DFT**

Dieser Abschnitt behandelt die konkrete Anwendung der DFT für z.B. eine Spektralanalyse oder digitale Filterung.

Man beginnt mit einem realen, kontinuierlichen Signal und will auch nach der DFT und IDFT dort wieder ankommen.

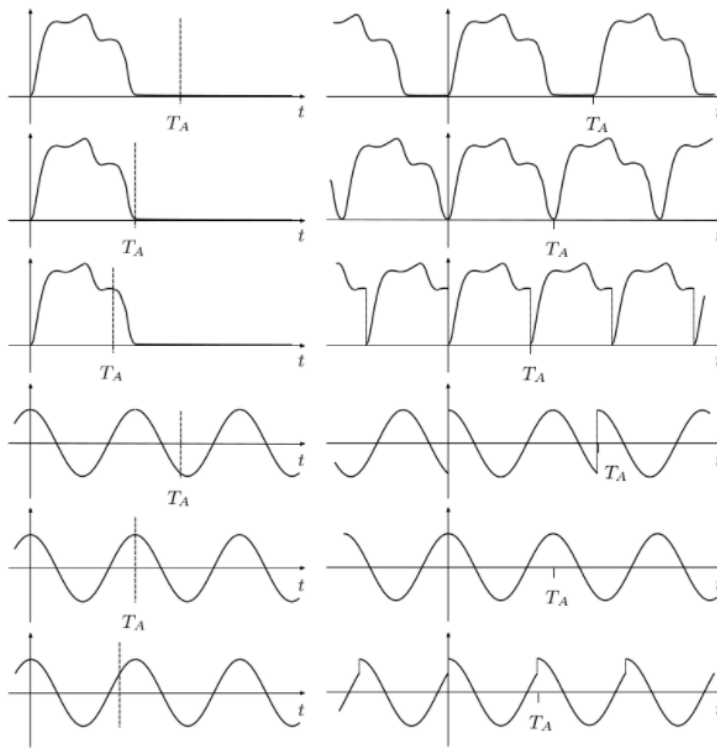
Die Handlungsanweisung beinhaltet 7.Schritte:

- Schritte 1-3: Theoretischer Analog-Digital-Wandler.
- Schritte 4-6: Untersuchung (= Spektralanalyse) und Veränderung (= Filterung) des Spektrums.
- Schritt 7: Theoretischer Digital-Analog-Wandler.

**1. Schritt**

- Fenstern eines gegebenen kontinuierlichen Zeitsignal so passend, dass bei periodischer Fortsetzung keine künstliche plötzliche Störung des Signals auftritt.

- Dadurch wird  $T_A$  festgelegt.
- Falsches fenstern führt zum Leakage Fehler  
(Sprünge im Zeitsignal  $\rightarrow$  Falsche Frequenzen im Spektrum):



## 2. Schritt

- Bestimmen der Blocklänge  $N$ , sodass das Abtasttheorem nicht verletzt wird. D.h. für ein bandbegrenztes Signal mit Bandbreite  $B$  ergibt sich dies zu:

$$N \geq 2 B \cdot T_A$$

- Hat man nun das beliebige  $N$ , kann man daraus die verwendete Abtastabstände bestimmen:

$$\Delta T_A = \frac{T_A}{N}$$

- Verletzung des Abtasttheorems führt zu Aliasing-Effekt  
(Unterabtastung  $\rightarrow$  Misinformation): verweis auf 3.3.4

## 3. Schritt

- Abtasten des Signals zu den Zeitpunkten  $t = n\Delta T_A$ ,  $n = 0, \dots, N-1$  und es ergeben sich die diskreten Signalwerte:

$$x[n] = x(n\Delta T_A)$$



#### 4. Schritt

- DFT durchführen:

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{mn}{N}}, \quad m = 0, \dots, N-1$$

an den Abtastorten  $\omega_m = m\Delta\omega_P = m\frac{2\pi}{T_A}$ ,  $m = 0, \dots, N-1$ .

#### 5. Schritt

- Betrachten und/oder verändern des Spektrums. Da die Veränderung (Filterung) des Spektrums eine so zentrale Rolle in der digitalen Signalverarbeitung spielt, wird aus dem gegebenen Spektrum  $X[m]$  ein neues Spektrum  $Y[m]$  erzeugt, bspw. durch Multiplikation einer Gewichtsfunktion  $G$ :

$$Y[m] := G \cdot X[m], \quad m = 0, \dots, N-1$$

#### 6. Schritt

- IDFT durchführen, um das gefilterte, diskrete Zeitsignal zu erhalten:

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} Y[m] e^{j2\pi \frac{mn}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

- In vielen Anwendungen der digitalen Signalverarbeitung hört man hier auf, wenn man sich nicht für eine kontinuierliche Version des gefilterten Signals interessiert, sonst Rekonstruktion.

#### 7. Schritt

- An Schritt 6 anknüpfend kann man mit der Rekonstruktionsformel aus dem diskreten Signal die kontinuierliche, periodische Signalrekonstruktion bestimmen:

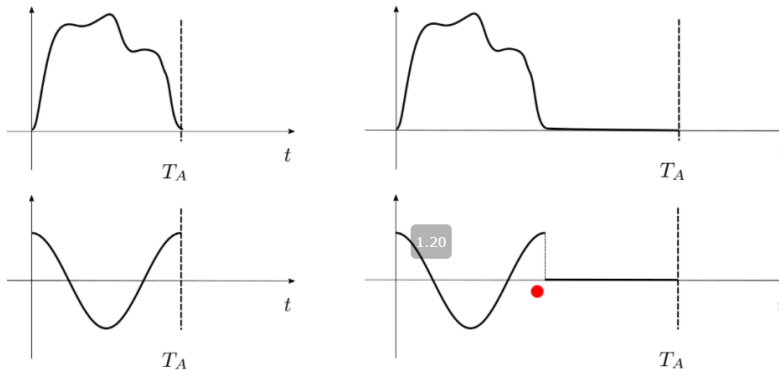
$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - n\Delta T_A)\right)$$

- Praktisch kann die unendliche Summe durch eine endliche Summe angenähert werden.
- Gute Annäherung:

$$\sum_{n=-N+1}^{2N-2}$$

## Zero-Padding

- Beliebtes Mittel bei gegebenen Abtastabständen  $\Delta T_A$  eine feinere Abtastung des Spektrums zu erreichen ist das *zero-padding*:  $x[n]$  mit Nullen füllen
- Blocklänge  $N$  und Signaldauer  $T_A$  werden so künstlich vergrößert.
- $\Delta\omega_P$  wird so automatisch kleiner, d.h. feinere Frequenzabtastung.
- Echt periodische Signale werden dadurch evtl. verfälscht:



## Gewichtetes Fenster

Um dem Leakage-Effekt mit nur geringen Nebenwirkungen zu reduzieren, werden Gewichtsfunktionen auf das Zeitsignal angewandt, eine sog. gewichtete Fensterung.

Dies wird dadurch erreicht, dass man das Originalsignal mit einer Gewichtsfunktion multipliziert, bei der am Intervallrand (bei 0 und  $N - 1$ ) die Zeitwerte zur Null gedrückt werden und andererseits kaum neue künstliche Frequenzen eingeführt werden, d.h. die Gewichtsfunktion dazwischen einen möglichst gleichmässigen Verlauf hat in dem das Originalsignal sinnvoll repräsentiert wird:

$$x'[n] := w[n] \cdot x[n], \text{ for } n = 0, \dots, N-1,$$

mit der Gewichtsfunktion  $w[n]$ .

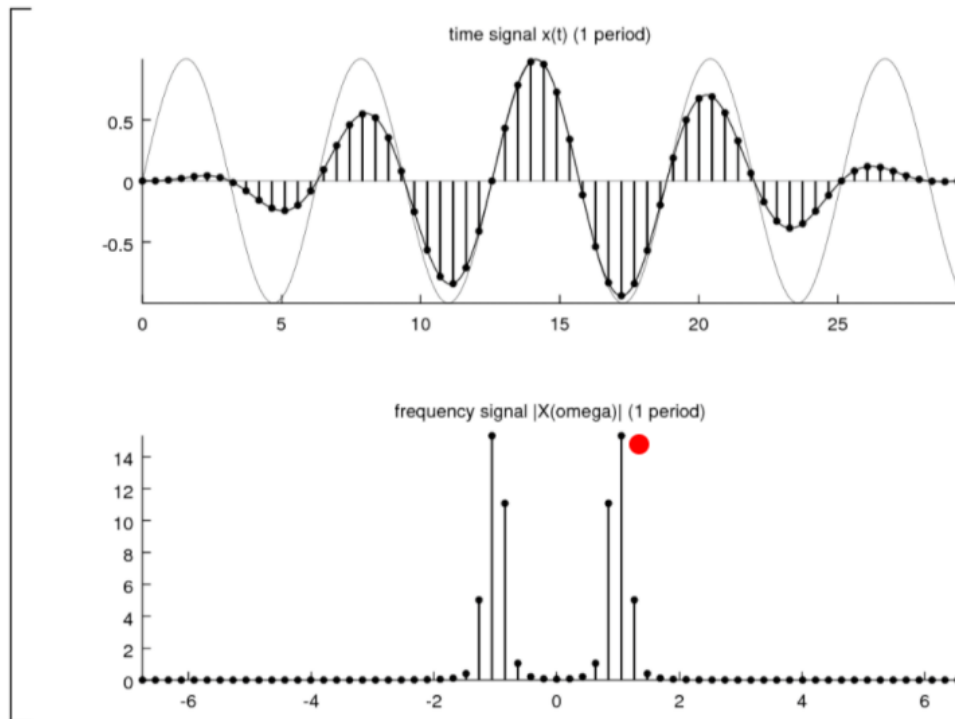
Hanning-Window:

$$w[n] := 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

Blackman-Window:

$$w[n] := 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right)$$

Beispiel:



### 3.3.8 Einschub: Die diskrete Faltung

Azyklische diskrete Faltung:

$$\begin{aligned}
 y[n] &:= x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \cdot x_2[n-k] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[n-k] \cdot x_2[k]
 \end{aligned} \tag{22}$$

Zyklische diskrete Faltung:

$$y[n] := x_p[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_p[n-k] \cdot h_p[k] \tag{23}$$

Im Normalfall wählt man die Funktionen  $h[n]$  mit  $h[n] = 0$  ausserhalb des Grundintervalls  $[0, N-1]$ , sodass die Periodisierung mit  $h_p[n]$  einfach nur eine Wiederholung der Werte des Grundintervalls darstellt und  $h_p[k]$  einfach mit  $h[k]$  ersetzt werden kann.

**Bemerkungen:**

- Mit der Einführung des diskreten Delta-Impulses

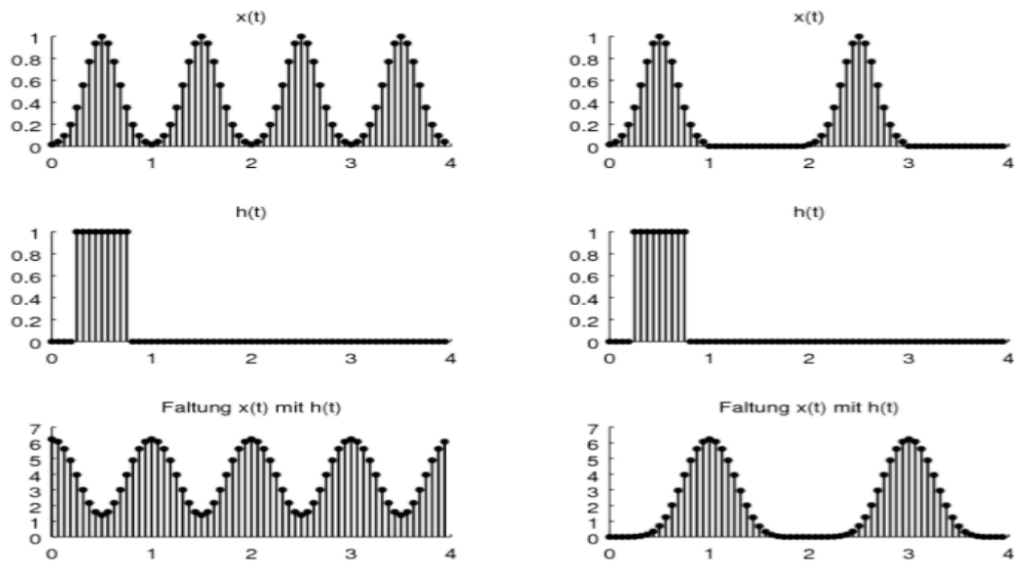
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases}$$

gibt es analog zu der Faltung mit analogen Signalen die Neutralitätseigenschaft der Faltung:

$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

- Wenn man mit der DFT arbeitet (und somit mit diskreten und periodischen Signalen) nimmt man die Periodisierung des Zeitsignals  $x[n]$  in Kauf, um ein diskretes Spektrum  $X[n]$  zu erhalten, jedoch schränkt man sich in der Betrachtung naturgemäß nur auf das Grundintervall  $[0, N - 1]$  ein und ignoriert die Periodizität von  $x[n]$  ausserhalb dieses Grundintervalls.

Bei der diskreten Faltung eines solchen Signals kann jedoch sehr einfach ein Übersprechen von benachbarten Perioden stattfinden, welches unerwünscht ist aber mit *zero-padding* vermieden werden kann:



Herleitung:

Azyklische diskrete Faltung  $\rightarrow$  Zyklische diskrete Faltung

Für die digitale Verarbeitung stört das  $\infty$  in der Summe der Azyklischen diskreten Faltung. Sind die zu verarbeitenden Signale aber diskret und periodisch so ist möglich:

Betrachtet man das diskrete und periodische Signal  $x_p[n]$  mit Periodendauer  $N$ , sowie ein allgemeines (nicht-periodisches) Signal  $h[n]$ . Für diesen Fall gilt mit der Definition

der diskreten Faltung und der Aufteilung der Faltungssumme in Teilsummen:

$$\begin{aligned}
 y[n] &:= x_P[n] * h[n] \\
 y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_P[n-k] \cdot h[k] \\
 y[n] &= \dots \sum_{k=-N}^{-1} x_P[n-k] \cdot h[k] + \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} x_P[n-k] \cdot h[k] + \dots
 \end{aligned} \tag{24}$$

Bringt man die Summen über Indexverschiebung zu den gleichen Summengrenzen:

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \dots \sum_{k=0}^{N-1} x_P[n-k+N] \cdot h[k-N] + \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} x_P[n-k] \cdot h[k] + \dots \\
 y[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_P[n-k-l \cdot N] \cdot h[k+l \cdot N]
 \end{aligned} \tag{25}$$

Einerseits gilt wegen der Periodizität  $x_P[n-k-l \cdot N] = x_P[n-k]$  und somit

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_P[n-k] \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[k+l \cdot N]$$

und andererseits, stellt

$$h_p[k] := \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[k+l \cdot N]$$

eine periodisierte Version von  $h[k]$  dar mit  $h_p[k+v \cdot N] = h_p[k]$  für alle  $v \in \mathbb{Z}$ .

Mit dieser Definition ergibt sich die Faltung zu einer endlichen Summe bzw. zur zyklischen diskreten Faltung (verweis auf 23).

### 3.3.9 Besonderheiten der DFT

#### Eigenschaften der CTFT:

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Frequenzbereich
Periodizität	$x[n] \circ \longrightarrow \bullet X[m] = X[m + k \cdot N]$ für alle $k \in \mathbb{Z}$
Verschiebungssatz	$x[n - k] \circ \longrightarrow \bullet X[m] \cdot e^{-j 2\pi \frac{k}{N} m}$
Komplexe Konjugiertheit	$x[n] \text{ reell} \circ \longrightarrow \bullet X[k \cdot N - m] = \overline{X[m]}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

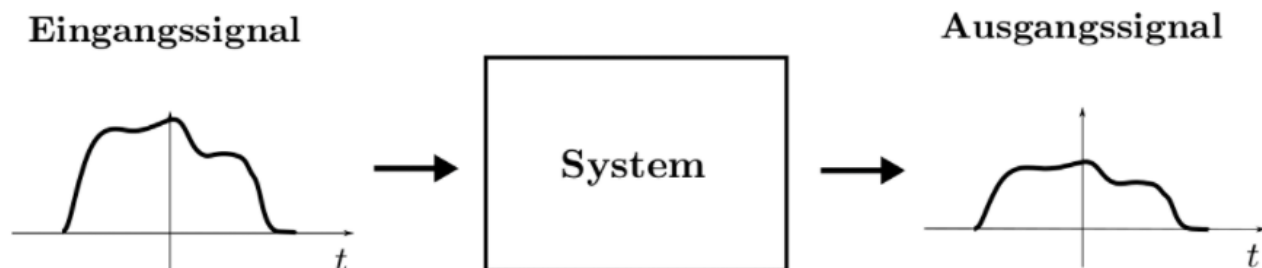
Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Frequenzbereich
Faltung (Zeit)	$x_1[n] * x_2[n] \circ \longrightarrow \bullet X_1[m] \cdot X_2[m]$
Faltung (Frequenz)	$N \cdot x_1[n] \cdot x_2[n] \circ \longrightarrow \bullet X_1[m] * X_2[m]$

## 4 Systemtheorie

### 4.1 Klassifizierung von Systemen

Systeme transformieren Eingangssignale in Ausgangssignale. Die abstrakte mathematische Beschreibung dieses Vorgangs wird in der Systemtheorie behandelt.

Im Zentrum dieser Vorlesung stehen dabei sog. lineare und zeitinvariante Systeme.



Formal wird der Übergang von einem Eingangssignal  $x(t)$  zu einem Ausgangssignal  $y(t)$  mit

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

beschrieben, wobei in dem Pfeil  $\rightarrow$  die gesamte Systeminformation enthalten ist, wie man von  $x(t)$  zu  $y(t)$  gelangt.

#### 4.1.1 Linearität

Man nennt ein System linear wenn

- **Additionsprinzip:** Die Summe von zwei beliebigen Eingangssignalen  $x_1(t) + x_2(t)$  zu der Summe der jeweiligen Ausgangssignale  $y_1(t) + y_2(t)$  führt, d.h.

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) \text{ und } x_2(t) \rightarrow y_2(t) \Rightarrow x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

- **Verstärkungsprinzip:** Die Verstärkung des Eingangssignal  $kx(t)$  mit einem beliebigen reellen Verstärkungsfaktor  $k \in \mathbb{R}$  zu einer identischen Verstärkung des Ausgangssignals  $y(t)$  führt, d.h.

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow k \cdot x(t) \rightarrow k \cdot y(t)$$

Beispiele von linearen Systemen:

$$y(t) := \int x(t) dt \text{ und } y(t) := \frac{d}{dt} x(t)$$

Es gibt ebenfalls echt nichtlineare Systeme:

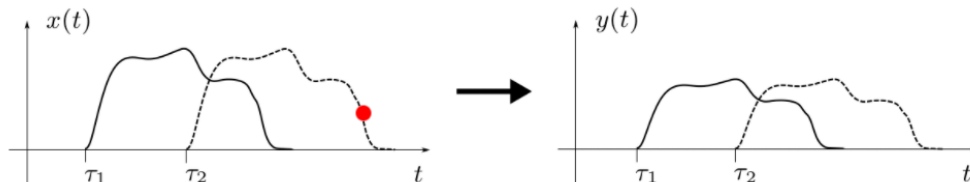
$$y(t) := (x(t))^2$$

### 4.1.2 Zeitinvarianz

Man nennt ein System zeitinvariant wenn

- das Signal sich mit der Zeit selbst nicht ändert, d.h. für ein beliebiges zeitverschobenes Eingangssignal  $x(t - \tau)$  gilt, dass das Ausgangssignal genauso verschoben ist, d.h.

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t - \tau) \rightarrow y(t - \tau)$$



Es gibt ebenfalls zeitvariante Systeme:

$$y(t) := t \cdot x(t)$$

### 4.1.3 Kausalität

Man nennt ein System kausal wenn

- für ein Eingangssignal  $x(t)$ , für das gilt  $x(t) = 0$  für  $t < 0$
- ein Ausgangssignal  $y(t)$  erhält, für das ebenso gilt, dass  $y(t) = 0$  für  $t < 0$ .

In anderen Worten: Das System erzeugt frühestens ein Ausgangssignal wenn es auch ein Eingangssignal erhalten hat.

### 4.1.4 BIBO-Stabilität

Man nennt ein System BIBO-stabil wenn

- ein beschränktes Eingangssignal  $x(t)$  zu einem beschränkten Ausgangssignal führt, d.h. für  $A, B \in \mathbb{R}$  gilt

$$|x(t)| \leq A < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq B < \infty$$

Das bedeutet insbesondere, dass das System das Eingangssignal nicht beliebig stark verändern kann.



### 4.1.5 Erhaltung von Frequenzen beim Durchlaufen von LTI-Systemen

Der wesentliche Aspekt ist: Was passiert mit den Frequenzen der Eingangssignale beim Durchlaufen von Systemen?

Nur in ein LTI-System eingehende Frequenzen eines Eingangssignals können auch Teil des Ausgangssignals sein.

Inbesondere kann ein LTI-System keine neuen Frequenzen erzeugen, die nicht schon Teil des Eingangssignals waren.

Natürlich werden die Frequenzen des Eingangssignals typischerweise durch den Systemdurchlauf im Ausgangssignal anders gewichtet sein.

Beweis:

Diese Erkenntnis wollen wir hier kurz mit den bisher erarbeiteten Argumenten begründen. Sei das Eingangssignal einer Einzelfrequenz  $\omega$  gegeben, d.h.

$$x(t) := e^{j\omega t}.$$

Wir können – wie schon gezeigt – das Ausgangssignal als Faltung mit der Impulsantwort darstellen:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{j\omega t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= e^{j\omega t} \cdot H(\omega), \end{aligned}$$

mit  $H(\omega)$  der Fouriertransformierten der Impulsantwort.

Das an dieser Stelle der Faktor  $H(\omega)$  auftaucht ist nicht zufällig und wird in den anschließenden Abschnitten vertieft erklärt. Zu diesem Zeitpunkt ist jedoch entscheidend, dass wir damit folgenden Zusammenhang für LTI-Systeme gezeigt haben:

$$e^{j\omega t} \rightarrow e^{j\omega t} \cdot c,$$

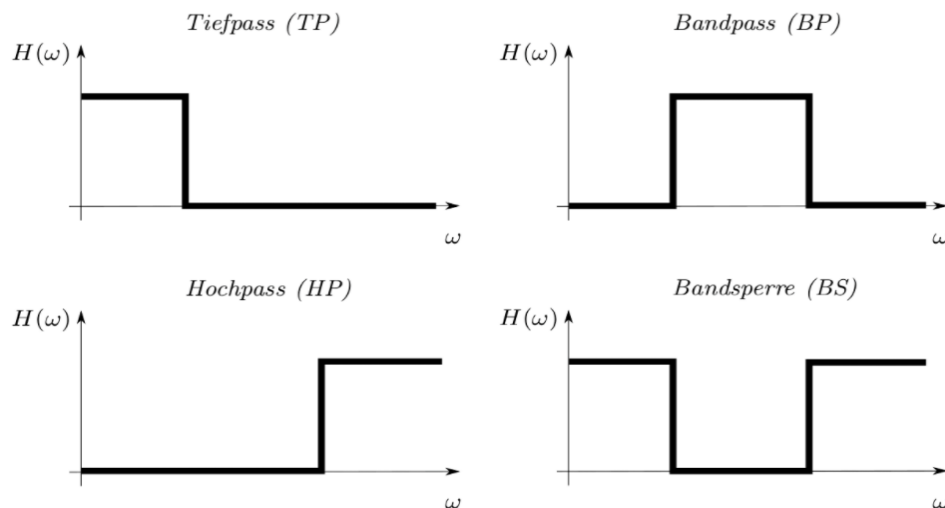
mit einer Konstanten  $c \in \mathbb{C}$ .

- D.h. die Eingangsfrequenz  $\omega$  taucht beim Systemdurchlauf wieder als Ausgangsfrequenz auf. Die Stärke dieser Frequenz wird mit einer Konstanten  $c$  gewichtet.
- Darüber hinaus halten wir fest: die Konstante  $c$  hängt stark mit der Impulsantwort zusammen. Man nennt komplexe Exponentialfunktionen auch die sog. *Eigenfunktionen* von LTI-Systemen.

### 4.1.6 Beispielsysteme: Grundarten von Filtern

Filter sind Systeme, die die Gewichtung von Frequenzen in Eingangssignalen bewusst verändern, um modifizierte Ausgangssignale zu erzeugen.

Es gibt vier Grundarten zur Manipulation der Frequenzen:



Genau solch dargestellte ideale Filterarten können praktisch nicht direkt realisiert werden, sondern werden nur angenähert.

- Die Hoch- und Null-Plateaus der Filter können nicht exakt konstant gehalten werden.
- Die exakten Sprungstellen in den Frequenzen würden zu unendlichen ausgebreiteten Signalen im Zeitraum (d.h. in positive und negative Zeitrichtung) führen, was in kausalen (also realisierbaren) Systemen nicht möglich ist (Fourierkorrespondenz sinc-Funktion - Rechteckpuls)

#### Tiefpassfilter:

Entfernen von hochfrequentem Rauschen von einem empfangenen Signal, oder um ein Eingangssignal vor einer Abtastung bandbegrenzt zu machen.

#### Hochpassfilter:

Kantenfindung in Signal, oder in Equalizern in der Musik zur Schwächung niedriger Frequenzen.

#### Bandpassfilter:

Zur Selektion gewisser Frequenzbänder, bspw. zur Auftrennung in verschiedene Frequenzkanäle in der Akustik (bspw. FM-Radio) oder Farbfilter in der Optik.

#### Bandsperre:

Abschwächung von Mittenfrequenzen bei einem Equalizer in der Akustik.

## 4.2 Impuls- und Schrittantwort

### 4.2.1 Impulsantwort

Wir definieren eine Funktion, nämlich die Impulsantwort  $h(t)$ , welche das Ausgangssignal eines LTI-Systems ist, wenn man einen Delta-Impuls  $x(t) := \delta(t)$  als Eingangssignal wählt. Man schreibt:

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

Es gilt:

- Aufgrund des Verstärkungsprinzip von linearen Systemen:

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t) \rightarrow x(0) \cdot h(t) \quad (26)$$

- Nach dem Verschiebungssatz des Delta-Impulses und der Zeitinvarianz des Systems:

$$x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \rightarrow x(\tau) \cdot h(t - \tau) \quad (27)$$

- Integriert man dieses Signal nun (die Integration ist eine lineare Operation) ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

Es folgt:

$$x(t) \rightarrow x(t) * h(t) =: y(t) \quad (28)$$

1. Egal welches  $x(t)$  eingesetzt wird, kennt man die Impulsantwort  $h(t)$ .
2. Das Ausgangssignal  $y(t)$  kann man berechnen, indem man das Eingangssignal  $x(t)$  mit der Impulsantwort  $h(t)$  faltet.
3. Ist die Impulsantwort bekannt, kann man für jedes beliebige Eingangssignal  $x(t)$  das Ausgangssignal  $y(t)$  berechnen.

### Verbindung mit kausalen Systemen:

Ein kausales LTI-System hat eine Impulsantwort für die gilt  $h(t) = 0$  für  $t < 0$ .

### Verbindung mit stabilen Systemen:

Durch die Berechenbarkeit von Ausgangssignalen bei LTI-Systemen, kann die BIBO-Stabilität für diesen Fall konkretisiert werden. Es muss gelten, dass für ein beschränktes Eingangssignal  $|x(t)| \leq A$  ein beschränktes Ausgangssignal  $|y(t)| \leq B$  erhalten wird. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung für Integrale gilt:

$$|y(t)| = |x(t) * h(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| \cdot |h(t - \tau)| d\tau \quad (29)$$

Setzt man nun den konstanten Maximalwert  $A$  für  $|x(t)|$  ein, so ergibt sich daraus

$$|y(t)| \leq A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |h(t - \tau)| d\tau$$

was ja kleiner als  $\infty$  sein muss und damit:

Ein BIBO-stabiles LTI-System hat eine Impulsantwort für die gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (30)$$

d.h. das Integral über den Absolutbetrag der Impulsantwort hat einen endlichen Wert.

#### 4.2.2 Schrittantwort

Der Delta-Impuls ist nur mühsam anzunähern. Es stellt sich heraus, dass die enge Verbindung der Sprung- bzw. Heavyside-Funktion  $\varepsilon(t)$  mit dem Delta-Impuls  $\delta(t)$  hier enorme praktische Vorteile. Mit

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = \delta(t) \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Da wir kausale LTI-Systeme betrachten (und somit das Additionsprinzip mit der Integration gültig ist) und wir die Werte für  $t < 0$  vernachlässigen können, erhalten wir daraus

$$\varepsilon(t) \rightarrow g(t) := \int_0^t h(\tau) d\tau \quad (31)$$

mit der Impulsantwort  $h(t)$  und der sog. Schrittantwort  $g(t)$ .

### 4.3 Analoge LTI-Systeme

Typische Beispiele sind elektronische Schaltungen als analoge (d.h. zeitkontinuierliche) LTI-Systeme, welche aus in Reihe oder parallel geschalteten passiven Bauelementen, wie Widerständen, Spulen und Kondensatoren aufgebaut sind.

#### 4.3.1 Grundregeln analoger LTI-Systeme

Es gelten für diese elementaren Bauteile folgende bekannten Grundregeln zwischen Stromfluss  $i(t)$  und Spannungsabfall  $u(t)$ :

- Ohm'sches Gesetz - Widerstand  $R$

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

- Kondensator mit Kapazität  $C$

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

- Spule mit Induktivität  $L$

$$u(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$$

sowie die Grundregeln der Verknüpfung dieser Bauelemente in Schaltungen mit Hilfe der Kirchhoff'schen Regeln:

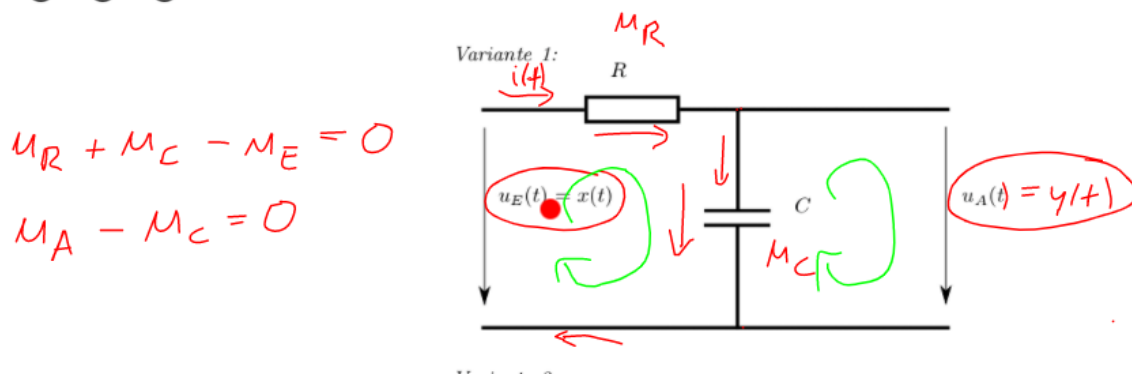
- Knotenregel für alle  $n$  Ströme die durch einen Knoten fließen

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$$

- Maschenregel für alle  $n$  Spannungsabfälle in einer Masche

$$\sum_{k=1}^n u_k(t) = 0$$

Beispiel Maschenregel (Grün):



#### 4.3.2 Darstellung analoger elektronischer Schaltungen als Differentialgleichungen

Im Folgenden betrachten wir detailliert das obige Beispiel. Aus der linken und rechten Masche ergeben sich nach der Maschenregel:

$$u_E(t) - u_C(t) - u_R(t) = 0$$

$$u_A(t) - u_C(t) = 0$$

Löst man nach  $u_E(t)$  bzw. nach  $u_A(t)$  auf und setzt die bekannte Gleichung für die Spannung ein, so ergibt sich

$$u_E(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau + Ri(t)$$

$$u_A(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

Da uns der Zusammenhang zwischen Eingangsspannung  $u_E(t)$  und Ausgangsspannung  $u_A(t)$  interessiert, müssen wir  $i(t)$  ersetzen mit Hilfe der Umformung der letzten Gleichungen zu

$$i(t) = C \frac{d}{dt} u_A(t)$$

ergibt sich die Differentialgleichung

$$u_E(t) = u_A(t) + RC \frac{d}{dt} u_A(t)$$

und in der bisherigen Notation

$$y(t) + RC \frac{d}{dt} y(t) = x(t)$$

oder auch

$$y(t) + RC \dot{y}(t) = x(t)$$

Im Allgemeinen ergeben sich für solche elektrischen Schaltungen (egal wie komplex) immer folgende Form von linearen Differentialgleichungen

$$a_0 y(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + \dots = b_0 x(t) + b_1 \dot{x}(t) + b_2 \ddot{x}(t) + \dots \quad (32)$$

mit konstanten  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ . Das Lösen dieser Gleichung erfolgt mit der Laplace-Transformation.

Es gilt:

Systeme die durch den Zusammenhang zwischen Eingangssignal und Ausgangssignal mit Hilfe linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden können, sind automatisch LTI-Systeme.

### 4.3.3 Laplace-Transformation

LT = Laplace-Transformation. Bisher haben wir die Fouriertransformation in drei versch. Formen kennengelernt, CTFT für analoge Signale, DTFT für abgetastete Signale und DFT/FFT für abgetastete, periodische Signale.

Für die Untersuchung von analogen Systemen, wird eine echte Erweiterung der CTFT eingeführt, die sog. Laplace-Transformation:

$$X_{LT}(s) := \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (LT) \quad (33)$$

für echt komplexe Zahlen  $s \in \mathbb{C}$  und wird auch die einseitige Laplace-Transformation genannt.

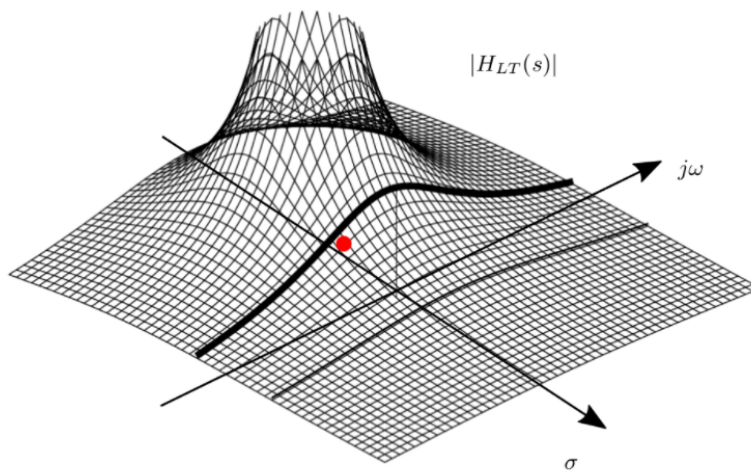
**Bemerkungen:**

- Man erhält für jede komplexe Zahl  $s \in \mathbb{C}$  aus der komplexen Zahlenebene einen komplexen Wert  $X_{LT}(s)$ . Das tiefgestellte  $LT$  soll hierbei den Unterschied zwischen Fouriertransformation und Laplace-Transformation verdeutlichen.
- Man schreibt ebenso wie bei der Fouriertransformation  $x(t) \circ \bullet X_{LT}(s)$ , und spricht davon, dass  $x(t)$  im Zeitbereich und  $X_{LT}(s)$  im Bildbereich liegt.
- $0^-$  steht für die kleinstmögliche negative Zahl. Da wir kausale Systeme betrachten, kann das Integral nicht bei  $-\infty$  beginnen.
- Zusammenhang zur Fouriertransformation:  
Der Zusammenhang zur Fouriertransformation ergibt sich recht einfach, wenn man  $s := \sigma + j\omega$  in Real- und Imaginärteil ( $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ ) aufteilt. Dann ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned} X_{LT}(s) &= \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{[\varepsilon(t) x(t) e^{-\sigma t}]_{=: x'(t)}} \cdot e^{-j\omega t} dt = X'(\omega), \end{aligned}$$

mit der modifizierten Zeitfunktion  $x'(t) = \varepsilon(t) x(t) e^{-\sigma t}$ .

Anschauliches Bild der Laplace-Transformation:



## 4.4 Diskrete LTI-Systeme