

Integraltransformation

Zusammenfassung

Grasso Antonino

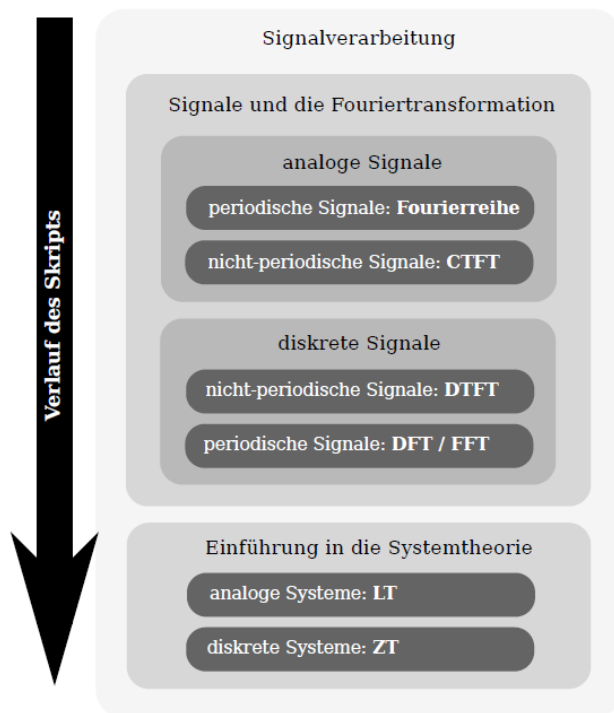
Sommersemester 21

Inhaltsverzeichnis

1	Verlauf und Rahmen	4
2	Definitionen und Konstanten	4
2.1	Funktionen	4
2.1.1	sinc-Funktion $\text{sinc}(t)$	4
2.1.2	Sprungfunktion $\varepsilon(t)$	4
2.1.3	Zeitsignal $x(t)$	5
2.1.4	Frequenzspektrum $X(\omega)$	5
2.1.5	Abgetastetes Zeitsignal $x_A(t)$	5
2.1.6	Abgetastetes Frequenzspektrum $X_A(\omega)$	5
2.2	Variablen von analogen Signalen	5
2.2.1	Periodendauer T_p	5
2.2.2	Frequenz f	5
2.2.3	Kreisfrequenz ω_p	5
2.2.4	Bandbreite B	5
2.3	Variablen von diskreten Signalen	5
2.3.1	Abtastfrequenz f_A	5
2.3.2	Blocklänge N	6
2.3.3	Zeitabstände ΔT_A	6
2.3.4	Frequenzabstände $\Delta\omega_p$	6
2.3.5	Periodendauer im Zeitraum T_A	6
2.3.6	Periodendauer im Frequenzspektrum ω_p	6
2.4	Systeme	7
2.4.1	LTI-System	7
3	Signale und Fouriertransformation	8
3.1	Klassifizierung von Signalen	8
3.2	Analoge Signale	8
3.2.1	Fourierreihe (analoge, periodische Signale)	8
3.2.2	CTFT (analoge, nicht-periodische Signale)	10
3.2.3	Einschub: Die kontinuierliche Faltung	11
3.2.4	Einschub: Der Delta-Impuls	11
3.2.5	Faltung mit dem Delta-Impuls	12
3.2.6	Besonderheiten der CTFT	13
3.3	Diskrete Signale	16
3.3.1	Delta-Kamm	16
3.3.2	Abgetastetes Signal	16
3.3.3	DTFT (diskrete, nicht-periodische Signale)	17
3.3.4	Abtasttheorem	18
3.3.5	Rekonstruktion von abgetasteten Signalen	18
3.3.6	DFT (diskrete, periodische Signale)	20
3.3.7	Handlungsanweisung zur DFT	23

3.3.8	Einschub: Die diskrete Faltung	27
3.3.9	Besonderheiten der DFT	30
4	Systemtheorie	31
4.1	Klassifizierung von Systemen	31
4.1.1	Linearität	31
4.1.2	Zeitinvarianz	32
4.1.3	Kausalität	32
4.1.4	BIBO-Stabilität	32
4.1.5	Erhaltung von Frequenzen beim Durchlaufen von LTI-Systemen .	33
4.1.6	Beispielsysteme: Grundarten von Filtern	34
4.2	Impuls- und Schrittantwort	35
4.2.1	Impulsantwort	35
4.2.2	Schrittantwort	36
4.3	Analoge LTI-Systeme	36
4.3.1	Grundregeln analoger LTI-Systeme	36
4.3.2	Darstellung analoger elektronischer Schaltungen als Differential- gleichungen	37
4.3.3	Laplace-Transformation	38
4.3.4	Besonderheiten der Laplace-Transformation	39
4.3.5	Übertragungsfunktion und Frequenzgang	41
4.3.6	Schrittantwort im Bildbereich	45
4.3.7	Typische Darstellungsformen von Systemen	45
4.4	Diskrete LTI-Systeme	47
4.4.1	Schema digitaler Systeme für die Bearbeitung von analogen Signalen	47
4.4.2	Darstellung diskreter Systeme als Differentialgleichung	48
4.4.3	Impulsantwort diskreter Systeme	51

1 Verlauf und Rahmen



2 Definitionen und Konstanten

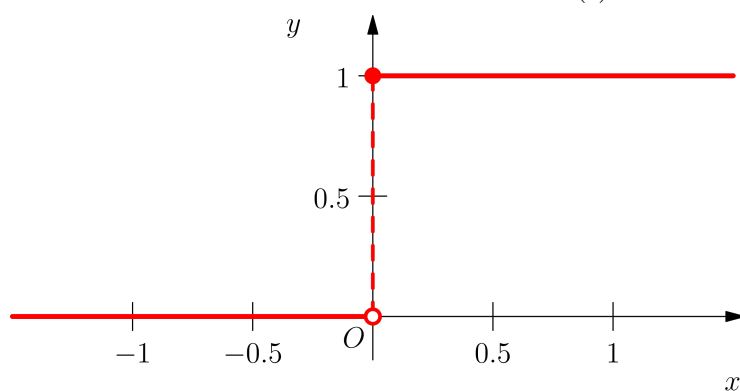
2.1 Funktionen

2.1.1 sinc-Funktion $\text{sinc}(t)$

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

2.1.2 Sprungfunktion $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) :=$$



2.1.3 Zeitsignal $x(t)$

$$x(t) := \text{Zeitsignal}$$

2.1.4 Frequenzspektrum $X(\omega)$

$$X(\omega) := \text{Frequenzspektrum}$$

2.1.5 Abgetastetes Zeitsignal $x_A(t)$

$$x_A(t) := \text{abgetastetes Zeitsignal}$$

2.1.6 Abgetastetes Frequenzspektrum $X_A(\omega)$

$$X_A(\omega) := \text{abgetastetes Frequenzspektrum}$$

2.2 Variablen von analogen Signalen**2.2.1 Periodendauer T_p**

$$x(t) := \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$T_p := x(t + n \cdot T_p) = x(t)$$

2.2.2 Frequenz f

$$f = \frac{1}{T_p} = \frac{\omega_p}{2\pi}$$

2.2.3 Kreisfrequenz ω_p

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$$

2.2.4 Bandbreite B

$$B :=$$

höchste vorkommende Frequenz

2.3 Variablen von diskreten Signalen**2.3.1 Abtastfrequenz f_A**

$$f_A = \frac{1}{\Delta T_A} = \frac{\omega_p}{2\pi}$$

2.3.2 Blocklänge N

$$N :=$$

Anzahl an Stellen des diskreten Signals

$$T_A \cdot \omega_P = 2\pi \cdot N$$

Das Produkt aus Periodendauern ist eine konstante Grösse, welche sich nur mit der Blocklänge N verändern lässt.

→ Unschärferelation der DFT (1. Variante)

$$\Delta T_A \cdot \Delta \omega_P = \frac{2\pi}{N}$$

Das Produkt der Abtastabstände ist ebenso eine konstante Grösse, welche sich nur durch Blocklänge N verändern lässt.

→ Unschärferelation der DFT (2. Variante)

2.3.3 Zeitabstände ΔT_A

$$\Delta T_A :=$$

Zeitabstände der Abtastung im Zeitraum

2.3.4 Frequenzabstände $\Delta \omega_p$

$$\Delta \omega_p :=$$

Frequenzabstände der Abtastung im Frequenzspektrum

$$\Delta \omega_P = \frac{2\pi}{T_A} \Rightarrow$$

Länge der Periode im Zeitraum legt Feinheit der Abtastung im Frequenzraum fest.

2.3.5 Periodendauer im Zeitraum T_A

$$T_A = N \cdot \Delta T_A :=$$

Periodendauer im Zeitraum = Signaldauer

2.3.6 Periodendauer im Frequenzspektrum ω_p

$$\omega_p = N \cdot \Delta \omega_P :=$$

Periodendauer im Frequenzraum = max. Signalfrequenz

$$\omega_p = \frac{2\pi}{\Delta T_A} \Rightarrow$$

Die Feinheit der Abtastung im Zeitraum legt die maximale angenommene Frequenz fest
→ Abtasttheorem!

2.4 Systeme

2.4.1 LTI-System

LTI-System $\hat{=}$ lineares und zeitinvariantes System

3 Signale und Fouriertransformation

3.1 Klassifizierung von Signalen

$x(t) \setminus t$	zeitkontinuierlich	zeitdiskret
wertkontinuierlich	analoges Signal	abgetastetes/diskretes Signal
wertdiskret	quantisiertes Signal	digitales Signal

3.2 Analoge Signale

3.2.1 Fourierreihe (analoge, periodische Signale)

Jedes Signal $x(t)$ kann als unendliche Summe von überlagerten Sinus und Cosinus Funktionen dargestellt werden:

Sinus-Cosinus-Darstellung der Fourierreihe:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_p t) + b_n \cdot \sin(n\omega_p t)) \\
 a_n &= \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot \cos(n\omega_p t) dt \\
 b_n &= \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot \sin(n\omega_p t) dt
 \end{aligned} \tag{1}$$

a_n und b_n dienen hierbei als Ähnlichkeitsmass wie sehr sich die Ursprungsfunktion $x(t)$ der jeweiligen Elementarfunktion ($\sin(n\omega_p t)$ oder $\cos(n\omega_p t)$) ähnelt.

Bemerkungen:

- Die Fourierreihe nimmt an Sprungstellen den Mittelwert von linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert an
- Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten lässt sich das Integrationsintervall verschieben z.B. zu $(0, T_p)$.

Betrags-/Phasen-Darstellung der Fourierreihe:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_p t + \varphi_n) \\
 A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\
 \varphi_n &= -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Diese Darstellung lässt sich aus den Additionstheoremen von Sinus und Cosinus ableiten.

Komplexe Darstellung der Fourierreihe:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_p t} \quad (3)$$

$$c_n = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot e^{-jn\omega_p t} dt$$

Herleitung:

Mit

$$e^{j\omega t} := \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)$$

erhält man

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

und daher:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_p t + \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_p t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_p t}$$

$$c_n = \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n}$$

$$c_{-n} = \frac{A_n}{2} e^{-j\varphi_n}$$

Umformungen:

	$\rightarrow a_n, b_n$
A_n, φ_n	$a_n = A_n \cos \varphi_n,$ $b_n = -A_n \sin \varphi_n$
$c_n, (c_{-n} := \bar{c}_n)$	$a_n = c_n + c_{-n},$ $b_n = j(c_n - c_{-n})$
	$\rightarrow A_n, \varphi_n$
a_n, b_n	$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$
$c_n, (c_{-n} := \bar{c}_n)$	$A_n = 2 c_n = 2\sqrt{\operatorname{Re}(c_n)^2 + \operatorname{Im}(c_n)^2},$ $\varphi_n = \arg(c_n)$
	$\rightarrow c_n, (c_{-n} := \bar{c}_n)$
a_n, b_n	$c_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n)$
A_n, φ_n	$c_n = \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n}$

Bedingungen für die Transformation:

- Die Funktion muss periodisch sein.
- Innerhalb einer Periode aufteilbar in endlich viele stetige Teilstücke.
- Es dürfen keine divergierende Sprungstellen auftauchen.

3.2.2 CTFT (analoge, nicht-periodische Signale)

Der Sinn der CTFT: Man möchte vom Zeitsignal $x(t)$ zum Frequenzspektrum $X(\omega)$.

Die Idee der CTFT: Man nimmt die Fourierreihe und lässt $T_p \rightarrow \infty$ gehen:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (CTFT/FT) \quad (\text{aus 5}) \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (ICTFT/IFT) \quad (\text{aus 6}) \end{aligned} \quad (4)$$

Herleitung:

Wir definieren eine Hilfsvariable: $\omega_n = n\omega_p$, sodass gilt: $\omega_{n+1} - \omega_n = \omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$ und beginnen mit:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

und

$$c_n := \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot e^{-j\omega_n t} dt$$

Wir definieren eine Funktion in Abhängigkeit von ω_n :

$$\begin{aligned} X(\omega_n) &:= \frac{2\pi}{\omega_p} c_n \quad (\Leftrightarrow c_n = \frac{\omega_p}{2\pi} X(\omega_n)) \\ &= \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot e^{-j\omega_n t} dt \end{aligned} \quad (5)$$

Das neu gewonnene c_n wird nun als Koeffizient in die ursprüngliche komplexe Fourierreihe eingesetzt:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_p}{2\pi} X(\omega_n) e^{j\omega_n t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega_n) e^{j\omega_n t} \omega_p \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega_n) e^{j\omega_n t} (\omega_{n+1} - \omega_n) \end{aligned} \quad (6)$$

Lässt man nun $T_p \rightarrow \infty$ gehen, wird ω_p immer kleiner und die Unterteilungen ω_n wandern dichter zueinander und im Grenzfall ein kontinuierlicher Verlauf ($\omega_n \rightarrow \omega$) und man erhält ein Riemann-Integral. Daraus folgt sich die oben aufgeführten Integrale für $x(t)$ und $X(\omega)$.

Bemerkungen:

- Stärke des Vorhandenseins einer Frequenz: $|X(\omega)|$

- Verschiebung der einzelnen Frequenzen: $\varphi = \arg(X(\omega))$
- Es gilt: $\overline{X(\omega)} = X(-\omega)$
- Bei reellen Signalen ist Betragsspektrum $|X(\omega)|$ symmetrisch um Null

3.2.3 Einschub: Die kontinuierliche Faltung

$$y(t) := x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau \quad (7)$$

(Integral)

Mit der Laufvariable τ läuft man x_1 vorwärts durch und x_2 rückwärts aber um t verschoben durch.

t ist hier als fester, bekannter Wert zu interpretieren.

(Faltung) (Man macht das was oben drüber steht für jedes beliebige t)

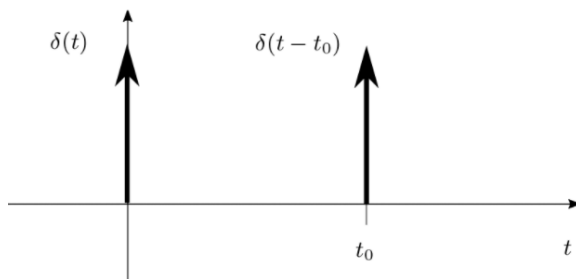
Man legt ein τ für x_1 und x_2 fest, verändert t laufend und sieht sich die Schnittfläche der beiden Funktionen an.

Main Purpose in der Signalverarbeitung: Abschwächung / Auslöschung von hohen Frequenzen.

3.2.4 Einschub: Der Delta-Impuls

Wir definieren eine Funktion:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0 \text{ for } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1 \end{aligned} \quad (8)$$



Verwendung des Delta-Impulses (Ausblendeigenschaft):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0) \cdot \delta(t - t_0) dt \\ &= x(t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt \\ &= x(t_0) \end{aligned} \quad (9)$$

$x(t)$ wird überall ignoriert ausser an der Stelle an der $\delta(t - t_0) \neq 0$, d.h. bei $t = t_0$.
Quasi eine Abtastung der Funktion $x(t)$ an Stelle t_0 .

Fouriertransformation des Delta-Impulses:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega 0} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t) \circ \bullet 1$$

Das Spektrum des Delta-Impulses enthält alle Frequenz mit Gewicht 1!

Die Stammfunktion des Delta-Impulses: $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \delta(t)$$

Fouriertransformation der Sprungfunktion:

$$\varepsilon(t) \circ \bullet \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

3.2.5 Faltung mit dem Delta-Impuls

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t - t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta((t - t_0) - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(\tau - (t - t_0)) d\tau \\ &= x(t - t_0) \end{aligned} \tag{10}$$

Kurz bedeutet das

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) ,$$

und für $t_0 = 0$

$$x(t) * \delta(t) = x(t) .$$

Der Delta-Impuls ist das Neutrale Element bezüglich der Faltung!

3.2.6 Besonderheiten der CTFT

Eigenschaften der CTFT:

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Frequenzbereich
Linearität	$k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \circ \longrightarrow k_1 X_1(\omega) + k_2 X_2(\omega)$
Symmetrie / Dualität	Gilt: $x(t) \circ \longrightarrow X(\omega)$ dann auch: $X(t) \circ \longrightarrow 2\pi x(-\omega)$
Zeitverschiebung	$x(t - \tau) \circ \longrightarrow X(\omega) e^{-j\omega\tau}$
Frequenzverschiebung	$x(t) e^{jWt} \circ \longrightarrow X(\omega - W)$

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Frequenzbereich
Zeitskalierung	$x(k \cdot t) \circ \longrightarrow \frac{1}{ k } \cdot X\left(\frac{1}{k} \cdot \omega\right)$
Frequenzskalierung	$\frac{1}{ k } \cdot x\left(\frac{1}{k} \cdot t\right) \circ \longrightarrow X(k \cdot \omega)$
Faltung (Zeit)	$x_1(t) * x_2(t) \circ \longrightarrow X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$
Faltung (Frequenz)	$2\pi \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \circ \longrightarrow X_1(\omega) * X_2(\omega)$

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Frequenzbereich
Differentiation (Zeit)	$\frac{d}{dt} x(t) \circ \longrightarrow j\omega X(\omega)$
Integration (Zeit)	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \circ \longrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi \cdot X(0) \cdot \delta(\omega)$
Reelle Signale $x(t)$	$X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$ und $ X(-\omega) = X(\omega) $

Signaldauer-Bandbreite-Produkt:

Signal	Zeitintervall	Dauer	Spektrum	Bereich	Bandbreite
$x(t)$	$[t_0, t_1]$	$t_1 - t_0$	$X(\omega)$	$[\omega_0, \omega_1]$	$\omega_1 - \omega_0$
$x(k t)$	$[\frac{1}{k} t_0, \frac{1}{k} t_1]$	$\frac{1}{k} (t_1 - t_0)$	$\frac{1}{ k } X(\frac{1}{k} \omega)$	$[k \omega_0, k \omega_1]$	$k (\omega_1 - \omega_0)$
$\frac{1}{ k } x(\frac{1}{k} t)$	$[k t_0, k t_1]$	$k (t_1 - t_0)$	$X(k \omega)$	$[\frac{1}{k} \omega_0, \frac{1}{k} \omega_1]$	$\frac{1}{k} (\omega_1 - \omega_0)$

Demnach ist das *Signaldauer–Bandbreite–Produkt* (oder *Zeit–Bandbreite–Produkt*) konstant, da $\frac{1}{k} (t_1 - t_0) \cdot k (\omega_1 - \omega_0) = k (t_1 - t_0) \cdot \frac{1}{k} (\omega_1 - \omega_0) = (t_1 - t_0) \cdot (\omega_1 - \omega_0)$:

$\text{Signaldauer} \times \text{Bandbreite} = \text{const.}$

Korrespondenzen der CTFT:

Zeitbereich $x(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	Frequenzbereich $X(\omega)$
$\delta(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	1
1	$\circ \text{---} \bullet$	$2\pi \delta(\omega)$
$\varepsilon(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$ t $	$\circ \text{---} \bullet$	$-\frac{2}{\omega^2}$
t^n	$\circ \text{---} \bullet$	$2\pi j^n \cdot \frac{d^n}{d\omega^n} \delta(\omega)$

Zeitbereich $x(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	Frequenzbereich $X(\omega)$
$e^{-a t }$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
$\varepsilon(t) \cdot e^{-at}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$\varepsilon(t) \cdot e^{-at} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{(j\omega + a)^n}$
$e^{j\omega_0 t}$	$\circ \text{---} \bullet$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

Zeitbereich $x(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	Frequenzbereich $X(\omega)$
$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$\text{sinc}(\omega_0 t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{\pi}{\omega_0} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$
$e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\tau^2}t^2}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\sqrt{2\pi}\tau \cdot e^{-\frac{1}{2}\tau^2\omega^2}$

3.3 Diskrete Signale

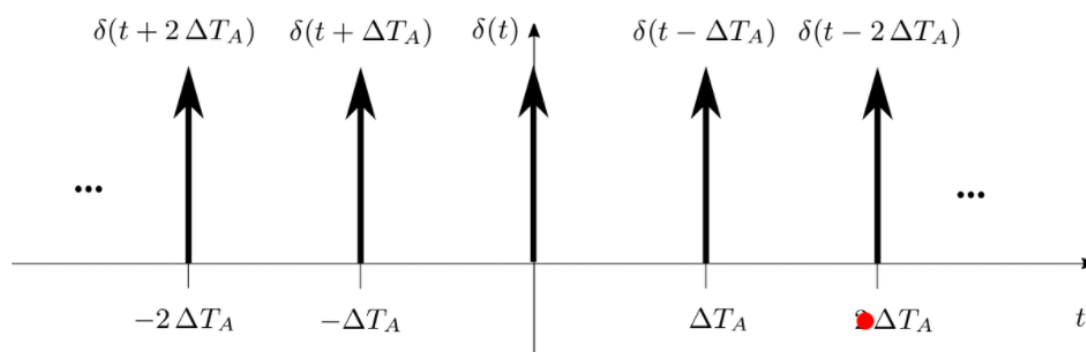
3.3.1 Delta-Kamm

Die Idee eines Delta-Kamms: Aus einer kontinuierlichen Funktion wird eine Zahlenfolge gemacht.

Um eine Zahlenfolge aus einer kontinuierlichen Funktion zu erhalten, muss diese abgetastet werden. Die Abtastung einer kontinuierlichen Funktion erfolgt mit einem Delta-Kamm:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) \quad (11)$$

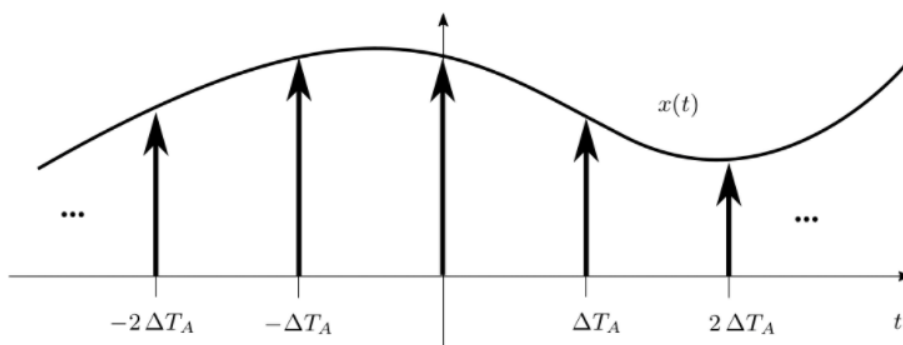
Der Delta-Kamm stellt eine Schar einzelner Delta-Impulsen an bestimmten gewünschten Abtastungsorten mit gleichem Abstand voneinander dar:



3.3.2 Abgetastetes Signal

Ein abgetastetes Signal ist mit Hilfe des Delta-Kamms definiert durch:

$$x_A(t) := x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) \quad (12)$$



$x_A(t)$ wird auch als Diskretes Signal bezeichnet.

3.3.3 DTFT (diskrete, nicht-periodische Signale)

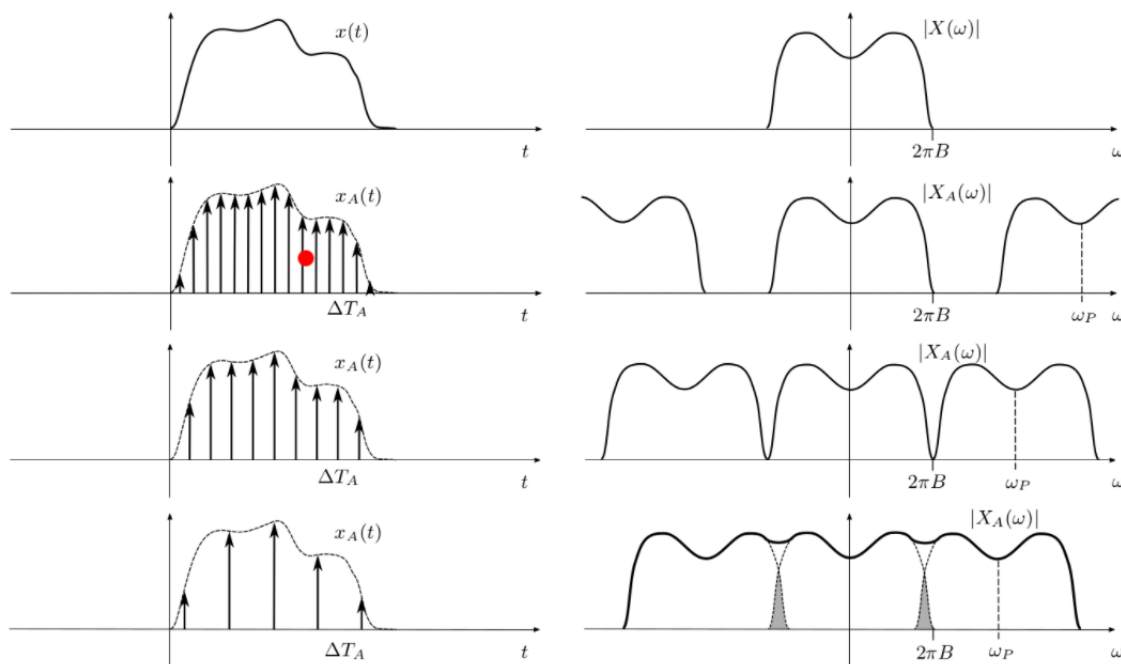
Mit Hilfe der Ausblendeigenschaft des Delta-Impulses kann man die Fouriertransformation eines solchen abgetasteten Signals bestimmen:

$$\begin{aligned}
 X_A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_A(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \cdot \delta(t - n\Delta T_A) dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta T_A) e^{-j\omega n\Delta T_A}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Bemerkungen:

- Ein diskretes Zeitsignal führt dennoch zu einem kontinuierlichen Frequenzspektrum
- Durch Abtastung eines Zeitsignals mit Zeitabständen ΔT_A wird Frequenzspektrum periodisch mit Periodendauer $\omega_p := \frac{2\pi}{\Delta T_A}$
- diskretes Zeitsignal $\circ \bullet$ periodisches Spektrum
- periodisches Zeitsignal $\circ \bullet$ diskretes Spektrum
- Zusammenhang CTFT und DTFT: $x_A(\omega) = \frac{1}{\Delta T_A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta T_A}\right)$

3.3.4 Abtasttheorem



Man folgert: $\omega_P > 2 \cdot 2\pi B$

Daraus ergibt sich das eigentliche Abtasttheorem:

$$f_A = \frac{1}{\Delta T_A} > 2 \cdot B \Rightarrow \Delta T_A < \frac{1}{2 \cdot B} \quad (14)$$

Ist das Abtasttheorem beim Abtasten eines Signales eingehalten, so kann versichert werden, dass keine Informationen des Originalsignals verloren gehen und eine Rekonstruktion ist möglich.

⇒ "Mindestens mit der doppelt so grossen Frequenz wie im Originalsignal vorhanden ist abtasten."

Bemerkungen:

- Die höchsten Frequenzen sind die, die zuerst unter der Verletzung des Abtasttheorems leiden (Unterabtastung)
- Informationsverlust ist nicht leicht zu beheben
- In der Praxis verwendet man häufig eine deutliche Überabtastung

3.3.5 Rekonstruktion von abgetasteten Signalen

Unter der Annahme, dass das Abtasttheorem mit Zeitintervallen ΔT_A nicht verletzt wird, kann aus den diskreten Abtastwerten $x(n\Delta T_A)$ die kontinuierliche Originalfunktion $x(t)$

rekonstruiert werden mit:

$$x(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta T_A) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - n\Delta T_A)\right) \quad (15)$$

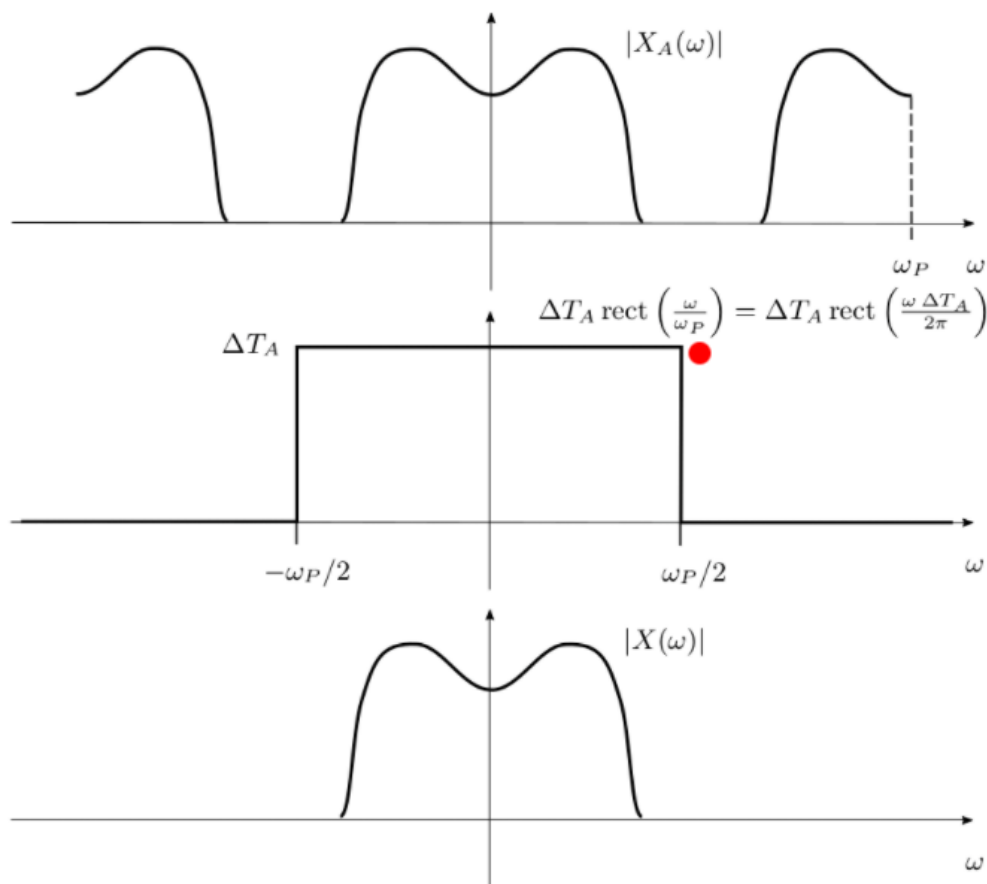
⇒ "Man interpoliert die diskreten Punkten mit der *sinc*-Funktion."

Herleitung:

1. Schritt: Isolieren einer Periode durch Fenstern

Man verwendet einen wichtigen Trick: Das sogenannte Fenstern von Signalen.

Man multipliziert die periodische Fouriertransformierte des Abtastsignals $X_A(\omega)$ mit einem Rechteckpuls der Breite ω_P , um die Fouriertransformierte des Originalsignals $X(\omega)$ zurück zu gewinnen:



Signal Fenstern mathematisch:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X_A(\omega) \cdot \Delta T_A \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_P}\right) \\ &= X_A(\omega) \cdot \Delta T_A \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega \Delta T_A}{2\pi}\right) \end{aligned} \quad (16)$$

2. Schritt: Zurücktransformieren

(Multiplikation im Spektrum \Rightarrow Faltung im Zeitsignal)

$$\begin{aligned}
X(\omega) &\circ\bullet x_A(t) * \text{sinc}\left(\frac{t\pi}{\Delta T_A}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n\Delta T_A) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - \tau)\right) d\tau \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - \tau)\right) \delta(\tau - n\Delta T_A) dt\tau \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta T_A) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - n\Delta T_A)\right) = x(t)
\end{aligned} \tag{17}$$

3.3.6 DFT (diskrete, periodische Signale)

Der Sinn der DFT: Man will nicht nur das Signal auf einer digitalen Rechen- oder Speichereinheit verarbeiten, sondern auch das Spektrum.

Die Idee der DFT:

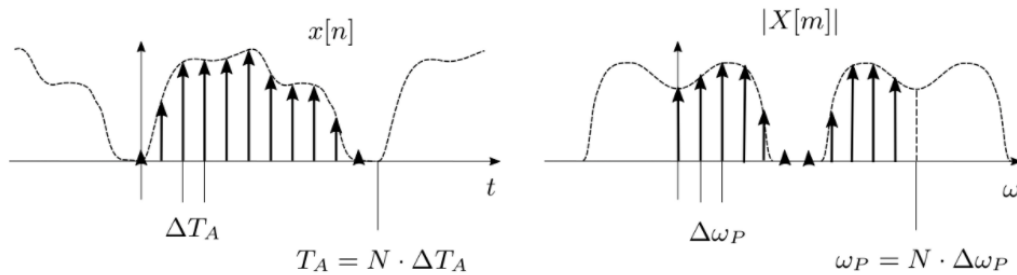
diskretes & periodisches Zeitsignal $\circ\bullet$ diskretes & periodisches Spektrum

$$\begin{aligned}
X[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{mn}{N}} \quad (DFT) \\
x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{j2\pi \frac{mn}{N}} \quad (IDFT) \\
&\text{wobei} \\
x[n] &:= x(n\Delta T_A) \\
X[m] &:= X(m\Delta\omega_P)
\end{aligned} \tag{18}$$

Es gilt für Zeitsignal und Frequenzspektrum in dieser Darstellung die gleiche Periode N , d.h. $X[m+N] = X[m]$ und $x[m+N] = x[n]$.

Bemerkungen:

- Man erhält für N abgetastete Werte des Originalsignals automatisch auch N Werte des Spektrums.
- Zusammenhang diskretes Zeit- und Spektralsignal:



- $X[N - m] = \overline{X[m]}$ und damit auch $|X[N - m]| = |\overline{X[m]}| = |X[m]|$
- Für ein reelles Signal $x[n]$ ist das Betragsspektrum $|X[m]|$ immer symmetrisch innerhalb einer Periode: $|X[m]| = |X[N - m]|$ für $m = 0, \dots, N - 1$

Die Herleitung der DFT wird in 5. Schritten aufgeteilt:

- Schritte 1-2: Erzeugen des diskreten und periodischen Zeitsignals für die DFT
- Schritte 3-5: Zusammenhang zwischen dem diskreten und periodischen Zeitsignal mit seinem diskreten und periodischen Spektrum
- Der Zusammenhang wird durch folgende Argumentation erreicht:
diskretes & periodisches Zeitsignal $\circ \bullet$ CTFT $\{\cdot\}$ $\bullet \circ$ ICTFT $\{\text{CTFT } \{\cdot\}\}$

1. Schritt

- kontinuierliches Zeitsignal $x(t)$ im Intervall $[0, T_A]$ fenstern, so dass wesentliche Signalinformation enthalten ist.
- gefensterte Signal künstlich periodisch fortsetzen und umbenennen zu $x_P(t)$.
- Potentielle Fehler: Falsch abschneiden fürs zukünftige Periodisieren.
→ Leakage Fehler

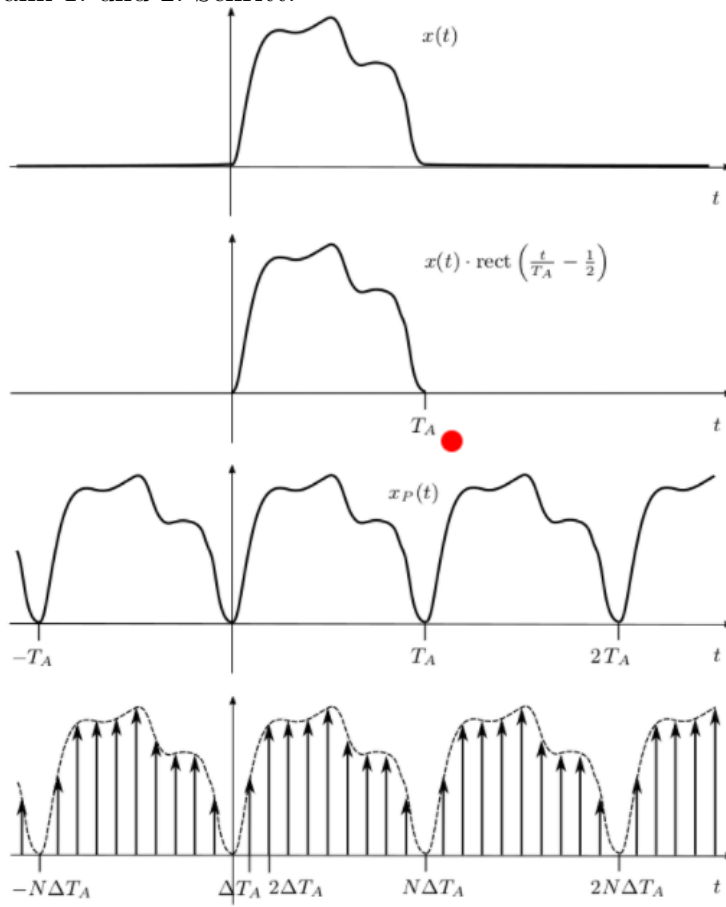
2. Schritt

- Abtastung des periodischen Signals $x_P(t)$ wobei N Abtastzeitpunkte im Grundintervall $[0, T_A]$ untergebracht werden. N wird als Blocklänge des diskreten Signals bezeichnet.
- Dadurch haben die Abtastzeitpunkte einen Abstand von $\Delta T_A := \frac{T_A}{N}$. D.h. wir betrachten das abgetastete Signal:

$$x_P(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A)$$

- Potentielle Fehler: Abtasttheorem verletzen.

Grafik 1. und 2. Schritt:



3. Schritt — Konkrete Herleitung erspart

- Fouriertransformation (CTFT) für das abgetastete Signal:

$$\begin{aligned}
 & x_P(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T_A) \\
 \circ \bullet & \left[\frac{2\pi}{N\Delta T_A} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T_A) e^{-jn\Delta T_A \omega} \right] \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\Delta\omega_p) \right] \quad (19)
 \end{aligned}$$

- Es gilt im Grundintervall $[0, T_A]$, dass $x_P(n\Delta T_A) = x(n\Delta T_A)$.
- Es gilt im Grundintervall, dass die Konstante $\Delta\omega_p := \frac{2\pi}{N\Delta T_A}$ eingeführt wird.
- Wir stellen fest: Die Fouriertransformierte ist ein abgetastetes Signal mit Abtastorten $k\Delta\omega_p, k \in \mathbb{Z}$.

4. Schritt — Konkrete Herleitung erspart

- Inverse Fouriertransformation (ICTFT) auf das Spektrum, um wieder das Originalsignal an den Abtastorten zu erhalten:

$$\bullet \circ \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T_A) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} e^{j2\pi \frac{k}{N} \frac{t}{\Delta T_A}} \right] \cdot \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - l\Delta T_A) \right] \quad (20)$$

- Die fordere eckige Klammer ist identisch zu $x_p(t)$.
- Ist $t \in [0, T_A]$, ist die fordere eckige Klammer sogar identisch zu $x(t)$.
- Gilt auch für spezielle t : Für ein $t_0 \in [0, T_A] \Rightarrow x(t_0)$.

5. Schritt

- Die Erkenntnis von Schritt 4 für $t_0 = m\Delta T_A$ anwenden:

$$x(m\Delta T_A) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T_A) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \right] e^{j2\pi \frac{km}{N}} \quad (21)$$

- Die eckige Klammer =: $X(k\Delta\omega_P)$ (DFT)
- Der ganze Ausdruck =: IDFT

3.3.7 Handlungsanweisung zur DFT

Dieser Abschnitt behandelt die konkrete Anwendung der DFT für z.B. eine Spektralanalyse oder digitale Filterung.

Man beginnt mit einem realen, kontinuierlichen Signal und will auch nach der DFT und IDFT dort wieder ankommen.

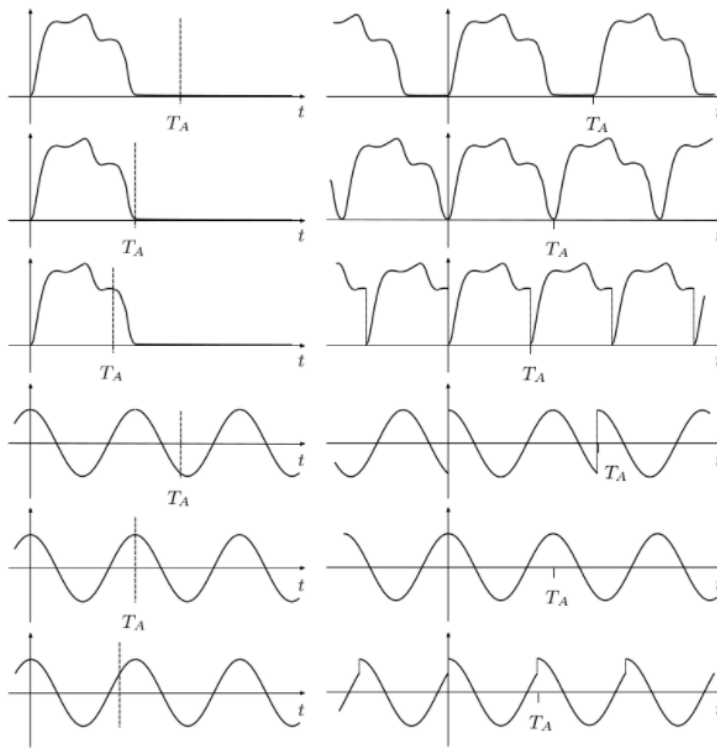
Die Handlungsanweisung beinhaltet 7.Schritte:

- Schritte 1-3: Theoretischer Analog-Digital-Wandler.
- Schritte 4-6: Untersuchung (= Spektralanalyse) und Veränderung (= Filterung) des Spektrums.
- Schritt 7: Theoretischer Digital-Analog-Wandler.

1. Schritt

- Fenstern eines gegebenen kontinuierlichen Zeitsignal so passend, dass bei periodischer Fortsetzung keine künstliche plötzliche Störung des Signals auftritt.

- Dadurch wird T_A festgelegt.
- Falsches fenstern führt zum Leakage Fehler
(Sprünge im Zeitsignal \rightarrow Falsche Frequenzen im Spektrum):



2. Schritt

- Bestimmen der Blocklänge N , sodass das Abtasttheorem nicht verletzt wird. D.h. für ein bandbegrenzte Signal mit Bandbreite B ergibt sich dies zu:

$$N \geq 2 B \cdot T_A$$

- Hat man nun das beliebige N , kann man daraus die verwendete Abtastabstände bestimmen:

$$\Delta T_A = \frac{T_A}{N}$$

- Verletzung des Abtasttheorems führt zu Aliasing-Effekt
(Unterabtastung \rightarrow Misinformation): verweis auf 3.3.4

3. Schritt

- Abtasten des Signals zu den Zeitpunkten $t = n\Delta T_A$, $n = 0, \dots, N-1$ und es ergeben sich die diskreten Signalwerte:

$$x[n] = x(n\Delta T_A)$$

4. Schritt

- DFT durchführen:

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{mn}{N}}, \quad m = 0, \dots, N-1$$

an den Abtastorten $\omega_m = m\Delta\omega_P = m\frac{2\pi}{T_A}$, $m = 0, \dots, N-1$.

5. Schritt

- Betrachten und/oder verändern des Spektrums. Da die Veränderung (Filterung) des Spektrums eine so zentrale Rolle in der digitalen Signalverarbeitung spielt, wird aus dem gegebenen Spektrum $X[m]$ ein neues Spektrum $Y[m]$ erzeugt, bspw. durch Multiplikation einer Gewichtsfunktion G :

$$Y[m] := G \cdot X[m], \quad m = 0, \dots, N-1$$

6. Schritt

- IDFT durchführen, um das gefilterte, diskrete Zeitsignal zu erhalten:

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} Y[m] e^{j2\pi \frac{mn}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

- In vielen Anwendungen der digitalen Signalverarbeitung hört man hier auf, wenn man sich nicht für eine kontinuierliche Version des gefilterten Signals interessiert, sonst Rekonstruktion.

7. Schritt

- An Schritt 6 anknüpfend kann man mit der Rekonstruktionsformel aus dem diskreten Signal die kontinuierliche, periodische Signalrekonstruktion bestimmen:

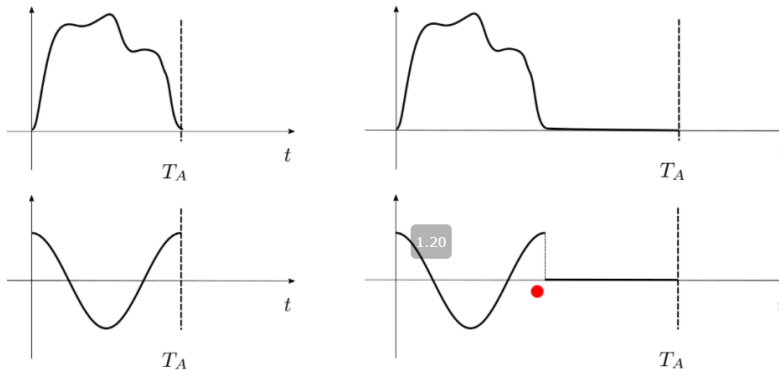
$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta T_A}(t - n\Delta T_A)\right)$$

- Praktisch kann die unendliche Summe durch eine endliche Summe angenähert werden.
- Gute Annäherung:

$$\sum_{n=-N+1}^{2N-2}$$

Zero-Padding

- Beliebtes Mittel bei gegebenen Abtastabständen ΔT_A eine feinere Abtastung des Spektrums zu erreichen ist das *zero-padding*: $x[n]$ mit Nullen füllen
- Blocklänge N und Signaldauer T_A werden so künstlich vergrößert.
- $\Delta\omega_P$ wird so automatisch kleiner, d.h. feinere Frequenzabtastung.
- Echt periodische Signale werden dadurch evtl. verfälscht:



Gewichtetes Fenster

Um dem Leakage-Effekt mit nur geringen Nebenwirkungen zu reduzieren, werden Gewichtsfunktionen auf das Zeitsignal angewandt, eine sog. gewichtete Fensterung.

Dies wird dadurch erreicht, dass man das Originalsignal mit einer Gewichtsfunktion multipliziert, bei der am Intervallrand (bei 0 und $N - 1$) die Zeitwerte zur Null gedrückt werden und andererseits kaum neue künstliche Frequenzen eingeführt werden, d.h. die Gewichtsfunktion dazwischen einen möglichst gleichmässigen Verlauf hat in dem das Originalsignal sinnvoll repräsentiert wird:

$$x'[n] := w[n] \cdot x[n], \text{ for } n = 0, \dots, N-1,$$

mit der Gewichtsfunktion $w[n]$.

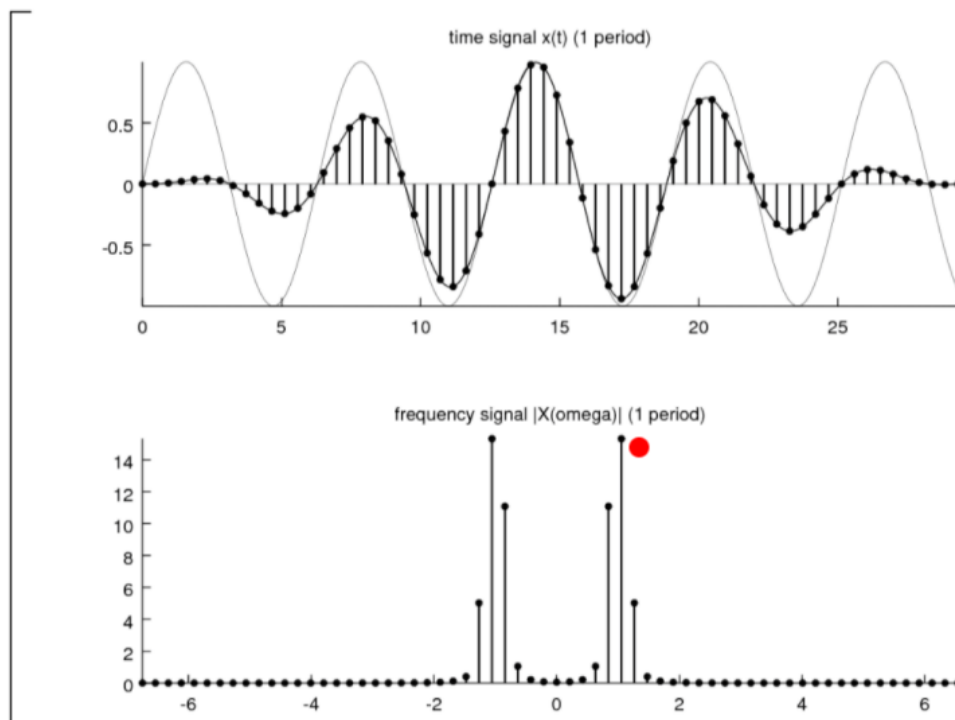
Hanning-Window:

$$w[n] := 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

Blackman-Window:

$$w[n] := 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right)$$

Beispiel:



3.3.8 Einschub: Die diskrete Faltung

Azyklische diskrete Faltung:

$$\begin{aligned}
 y[n] &:= x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \cdot x_2[n-k] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[n-k] \cdot x_2[k]
 \end{aligned} \tag{22}$$

Zyklische diskrete Faltung:

$$y[n] := x_p[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_p[n-k] \cdot h_p[k] \tag{23}$$

Im Normalfall wählt man die Funktionen $h[n]$ mit $h[n] = 0$ ausserhalb des Grundintervalls $[0, N-1]$, sodass die Periodisierung mit $h_p[n]$ einfach nur eine Wiederholung der Werte des Grundintervalls darstellt und $h_p[k]$ einfach mit $h[k]$ ersetzt werden kann.

Bemerkungen:

- Mit der Einführung des diskreten Delta-Impulses

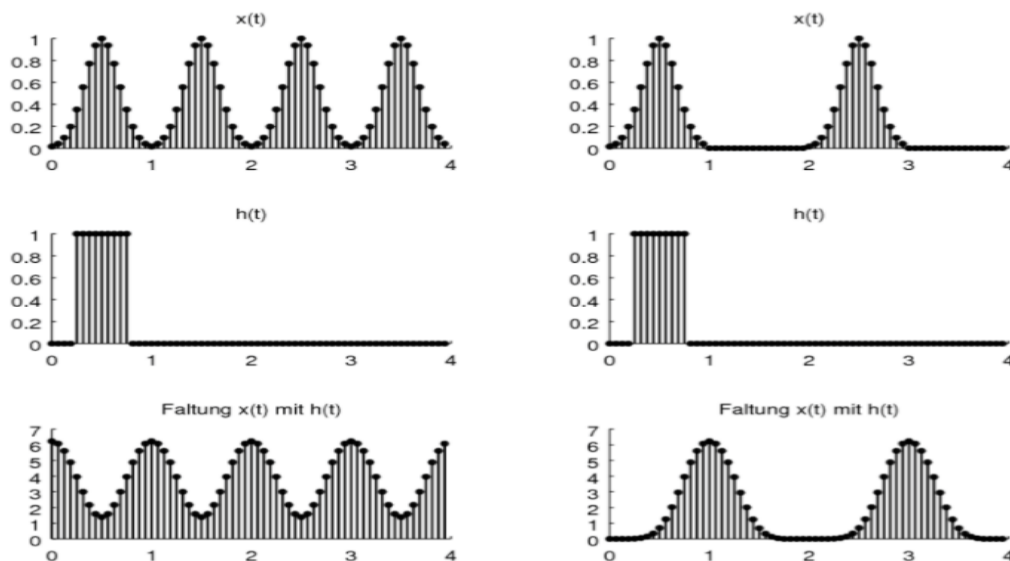
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases}$$

gibt es analog zu der Faltung mit analogen Signalen die Neutralitätseigenschaft der Faltung:

$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

- Wenn man mit der DFT arbeitet (und somit mit diskreten und periodischen Signalen) nimmt man die Periodisierung des Zeitsignals $x[n]$ in Kauf, um ein diskretes Spektrum $X[n]$ zu erhalten, jedoch schränkt man sich in der Betrachtung naturgemäß nur auf das Grundintervall $[0, N - 1]$ ein und ignoriert die Periodizität von $x[n]$ ausserhalb dieses Grundintervalls.

Bei der diskreten Faltung eines solchen Signals kann jedoch sehr einfach ein Übersprechen von benachbarten Perioden stattfinden, welches unerwünscht ist aber mit *zero-padding* vermieden werden kann:



Herleitung:

Azyklische diskrete Faltung \rightarrow Zyklische diskrete Faltung

Für die digitale Verarbeitung stört das ∞ in der Summe der Azyklischen diskreten Faltung. Sind die zu verarbeitenden Signale aber diskret und periodisch so ist möglich:

Betrachtet man das diskrete und periodische Signal $x_p[n]$ mit Periodendauer N , sowie ein allgemeines (nicht-periodisches) Signal $h[n]$. Für diesen Fall gilt mit der Definition

der diskreten Faltung und der Aufteilung der Faltungssumme in Teilsummen:

$$\begin{aligned}
 y[n] &:= x_P[n] * h[n] \\
 y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_P[n-k] \cdot h[k] \\
 y[n] &= \dots \sum_{k=-N}^{-1} x_P[n-k] \cdot h[k] + \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} x_P[n-k] \cdot h[k] + \dots
 \end{aligned} \tag{24}$$

Bringt man die Summen über Indexverschiebung zu den gleichen Summengrenzen:

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \dots \sum_{k=0}^{N-1} x_P[n-k+N] \cdot h[k-N] + \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} x_P[n-k] \cdot h[k] + \dots \\
 y[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_P[n-k-l \cdot N] \cdot h[k+l \cdot N]
 \end{aligned} \tag{25}$$

Einerseits gilt wegen der Periodizität $x_P[n-k-l \cdot N] = x_P[n-k]$ und somit

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_P[n-k] \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[k+l \cdot N]$$

und andererseits, stellt

$$h_p[k] := \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[k+l \cdot N]$$

eine periodisierte Version von $h[k]$ dar mit $h_p[k+v \cdot N] = h_p[k]$ für alle $v \in \mathbb{Z}$.

Mit dieser Definition ergibt sich die Faltung zu einer endlichen Summe bzw. zur zyklischen diskreten Faltung (verweis auf 23).

3.3.9 Besonderheiten der DFT

Eigenschaften der CTFT:

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \text{---} \bullet$ Frequenzbereich
Periodizität	$x[n] \circ \text{---} \bullet X[m] = X[m + k \cdot N]$ für alle $k \in \mathbb{Z}$
Verschiebungssatz	$x[n - k] \circ \text{---} \bullet X[m] \cdot e^{-j 2\pi \frac{k}{N} m}$
Komplexe Konjugiertheit	$x[n] \text{ reell} \circ \text{---} \bullet X[k \cdot N - m] = \overline{X[m]}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

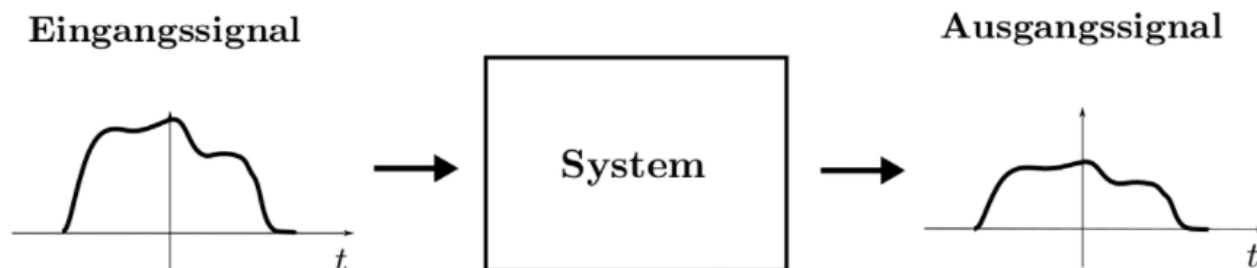
Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \text{---} \bullet$ Frequenzbereich
Faltung (Zeit)	$x_1[n] * x_2[n] \circ \text{---} \bullet X_1[m] \cdot X_2[m]$
Faltung (Frequenz)	$N \cdot x_1[n] \cdot x_2[n] \circ \text{---} \bullet X_1[m] * X_2[m]$

4 Systemtheorie

4.1 Klassifizierung von Systemen

Systeme transformieren Eingangssignale in Ausgangssignale. Die abstrakte mathematische Beschreibung dieses Vorgangs wird in der Systemtheorie behandelt.

Im Zentrum dieser Vorlesung stehen dabei sog. lineare und zeitinvariante Systeme.



Formal wird der Übergang von einem Eingangssignal $x(t)$ zu einem Ausgangssignal $y(t)$ mit

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

beschrieben, wobei in dem Pfeil \rightarrow die gesamte Systeminformation enthalten ist, wie man von $x(t)$ zu $y(t)$ gelangt.

4.1.1 Linearität

Man nennt ein System linear wenn

- Additionsprinzip: Die Summe von zwei beliebigen Eingangssignalen $x_1(t) + x_2(t)$ zu der Summe der jeweiligen Ausgangssignale $y_1(t) + y_2(t)$ führt, d.h.

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) \text{ und } x_2(t) \rightarrow y_2(t) \Rightarrow x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

- Verstärkungsprinzip: Die Verstärkung des Eingangssignal $kx(t)$ mit einem beliebigen reellen Verstärkungsfaktor $k \in \mathbb{R}$ zu einer identischen Verstärkung des Ausgangssignals $y(t)$ führt, d.h.

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow k \cdot x(t) \rightarrow k \cdot y(t)$$

Beispiele von linearen Systemen:

$$y(t) := \int x(t) dt \text{ und } y(t) := \frac{d}{dt} x(t)$$

Es gibt ebenfalls echt nichtlineare Systeme:

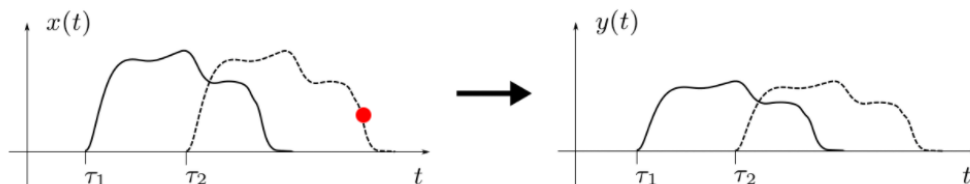
$$y(t) := (x(t))^2$$

4.1.2 Zeitinvarianz

Man nennt ein System zeitinvariant wenn

- das Signal sich mit der Zeit selbst nicht ändert, d.h. für ein beliebiges zeitverschobenes Eingangssignal $x(t - \tau)$ gilt, dass das Ausgangssignal genauso verschoben ist, d.h.

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t - \tau) \rightarrow y(t - \tau)$$



Es gibt ebenfalls zeitvariante Systeme:

$$y(t) := t \cdot x(t)$$

4.1.3 Kausalität

Man nennt ein System kausal wenn

- für ein Eingangssignal $x(t)$, für das gilt $x(t) = 0$ für $t < 0$
- ein Ausgangssignal $y(t)$ erhält, für das ebenso gilt, dass $y(t) = 0$ für $t < 0$.

In anderen Worten: Das System erzeugt frühestens ein Ausgangssignal wenn es auch ein Eingangssignal erhalten hat.

4.1.4 BIBO-Stabilität

Man nennt ein System BIBO-stabil wenn

- ein beschränktes Eingangssignal $x(t)$ zu einem beschränkten Ausgangssignal führt, d.h. für $A, B \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x(t)| \leq A < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq B < \infty$$

Das bedeutet insbesondere, dass das System das Eingangssignal nicht beliebig stark verändern kann.

4.1.5 Erhaltung von Frequenzen beim Durchlaufen von LTI-Systemen

Der wesentliche Aspekt ist: Was passiert mit den Frequenzen der Eingangssignale beim Durchlaufen von Systemen?

Nur in ein LTI-System eingehende Frequenzen eines Eingangssignals können auch Teil des Ausgangssignals sein.

Inbesondere kann ein LTI-System keine neuen Frequenzen erzeugen, die nicht schon Teil des Eingangssignals waren.

Natürlich werden die Frequenzen des Eingangssignals typischerweise durch den Systemdurchlauf im Ausgangssignal anders gewichtet sein.

Beweis:

Diese Erkenntnis wollen wir hier kurz mit den bisher erarbeiteten Argumenten begründen. Sei das Eingangssignal einer Einzelfrequenz ω gegeben, d.h.

$$x(t) := e^{j\omega t}.$$

Wir können – wie schon gezeigt – das Ausgangssignal als Faltung mit der Impulsantwort darstellen:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{j\omega t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= e^{j\omega t} \cdot H(\omega), \end{aligned}$$

mit $H(\omega)$ der Fouriertransformierten der Impulsantwort.

Das an dieser Stelle der Faktor $H(\omega)$ auftaucht ist nicht zufällig und wird in den anschließenden Abschnitten vertieft erklärt. Zu diesem Zeitpunkt ist jedoch entscheidend, dass wir damit folgenden Zusammenhang für LTI-Systeme gezeigt haben:

$$e^{j\omega t} \rightarrow e^{j\omega t} \cdot c,$$

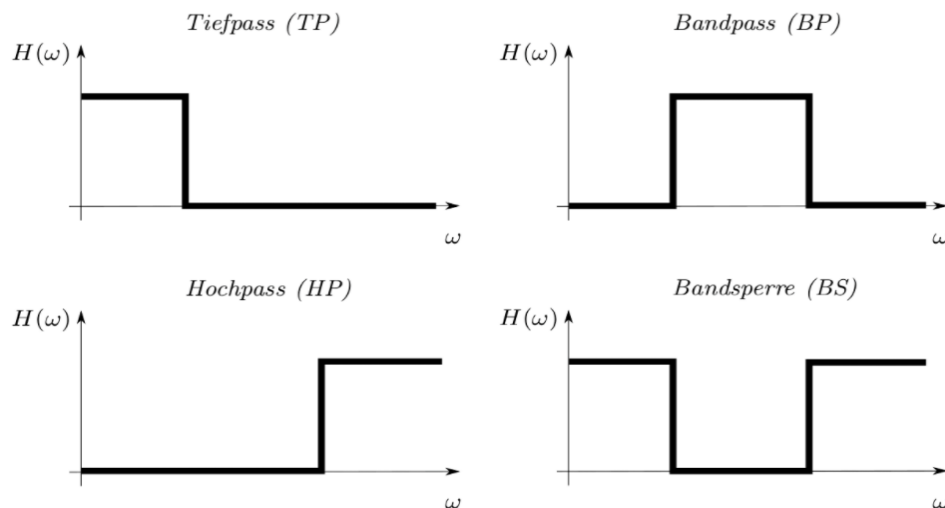
mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$.

- D.h. die Eingangsfrequenz ω taucht beim Systemdurchlauf wieder als Ausgangsfrequenz auf. Die Stärke dieser Frequenz wird mit einer Konstanten c gewichtet.
- Darüber hinaus halten wir fest: die Konstante c hängt stark mit der Impulsantwort zusammen. Man nennt komplexe Exponentialfunktionen auch die sog. *Eigenfunktionen* von LTI-Systemen.

4.1.6 Beispielsysteme: Grundarten von Filtern

Filter sind Systeme, die die Gewichtung von Frequenzen in Eingangssignalen bewusst verändern, um modifizierte Ausgangssignale zu erzeugen.

Es gibt vier Grundarten zur Manipulation der Frequenzen:



Genau solch dargestellte ideale Filterarten können praktisch nicht direkt realisiert werden, sondern werden nur angenähert.

- Die Hoch- und Null-Plateaus der Filter können nicht exakt konstant gehalten werden.
- Die exakten Sprungstellen in den Frequenzen würden zu unendlichen ausgebreiteten Signalen im Zeitraum (d.h. in positive und negative Zeitrichtung) führen, was in kausalen (also realisierbaren) Systemen nicht möglich ist (Fourierkorrespondenz sinc-Funktion - Rechteckpuls)

Tiefpassfilter:

Entfernen von hochfrequentem Rauschen von einem empfangenen Signal, oder um ein Eingangssignal vor einer Abtastung bandbegrenzt zu machen.

Hochpassfilter:

Kantenfindung in Signal, oder in Equalizern in der Musik zur Schwächung niedriger Frequenzen.

Bandpassfilter:

Zur Selektion gewisser Frequenzbänder, bspw. zur Auftrennung in verschiedene Frequenzkanäle in der Akustik (bspw. FM-Radio) oder Farbfilter in der Optik.

Bandsperre:

Abschwächung von Mittenfrequenzen bei einem Equalizer in der Akustik.

4.2 Impuls- und Schrittantwort

4.2.1 Impulsantwort

Wir definieren eine Funktion, nämlich die Impulsantwort $h(t)$, welche das Ausgangssignal eines LTI-Systems ist, wenn man einen Delta-Impuls $x(t) := \delta(t)$ als Eingangssignal wählt. Man schreibt:

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

Es gilt:

- Aufgrund des Verstärkungsprinzip von linearen Systemen:

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t) \rightarrow x(0) \cdot h(t) \quad (26)$$

- Nach dem Verschiebungssatz des Delta-Impulses und der Zeitinvarianz des Systems:

$$x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \rightarrow x(\tau) \cdot h(t - \tau) \quad (27)$$

- Integriert man dieses Signal nun (die Integration ist eine lineare Operation) ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

Es folgt:

$$x(t) \rightarrow x(t) * h(t) =: y(t) \quad (28)$$

1. Egal welches $x(t)$ eingesetzt wird, kennt man die Impulsantwort $h(t)$.
2. Das Ausgangssignal $y(t)$ kann man berechnen, indem man das Eingangssignal $x(t)$ mit der Impulsantwort $h(t)$ faltet.
3. Ist die Impulsantwort bekannt, kann man für jedes beliebige Eingangssignal $x(t)$ das Ausgangssignal $y(t)$ berechnen.

Verbindung mit kausalen Systemen:

Ein kausales LTI-System hat eine Impulsantwort für die gilt $h(t) = 0$ für $t < 0$.

Verbindung mit stabilen Systemen:

Durch die Berechenbarkeit von Ausgangssignalen bei LTI-Systemen, kann die BIBO-Stabilität für diesen Fall konkretisiert werden. Es muss gelten, dass für ein beschränktes Eingangssignal $|x(t)| \leq A$ ein beschränktes Ausgangssignal $|y(t)| \leq B$ erhalten wird. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung für Integrale gilt:

$$|y(t)| = |x(t) * h(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| \cdot |h(t - \tau)| d\tau \quad (29)$$

Setzt man nun den konstanten Maximalwert A für $|x(t)|$ ein, so ergibt sich daraus

$$|y(t)| \leq A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |h(t - \tau)| d\tau$$

was ja kleiner als ∞ sein muss und damit:

Ein BIBO-stabiles LTI-System hat eine Impulsantwort für die gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (30)$$

d.h. das Integral über den Absolutbetrag der Impulsantwort hat einen endlichen Wert.

4.2.2 Schrittantwort

Der Delta-Impuls ist nur mühsam anzunähern. Es stellt sich heraus, dass die enge Verbindung der Sprung- bzw. Heavyside-Funktion $\varepsilon(t)$ mit dem Delta-Impuls $\delta(t)$ hier enorme praktische Vorteile. Mit

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = \delta(t) \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Da wir kausale LTI-Systeme betrachten (und somit das Additionsprinzip mit der Integration gültig ist) und wir die Werte für $t < 0$ vernachlässigen können, erhalten wir daraus

$$\varepsilon(t) \rightarrow g(t) := \int_0^t h(\tau) d\tau \quad (31)$$

mit der Impulsantwort $h(t)$ und der sog. Schrittantwort $g(t)$.

4.3 Analoge LTI-Systeme

Typische Beispiele sind elektronische Schaltungen als analoge (d.h. zeitkontinuierliche) LTI-Systeme, welche aus in Reihe oder parallel geschalteten passiven Bauelementen, wie Widerständen, Spulen und Kondensatoren aufgebaut sind.

4.3.1 Grundregeln analoger LTI-Systeme

Es gelten für diese elementaren Bauteile folgende bekannten Grundregeln zwischen Stromfluss $i(t)$ und Spannungsabfall $u(t)$:

- Ohm'sches Gesetz - Widerstand R

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

- Kondensator mit Kapazität C

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

- Spule mit Induktivität L

$$u(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$$

sowie die Grundregeln der Verknüpfung dieser Bauelemente in Schaltungen mit Hilfe der Kirchhoff'schen Regeln:

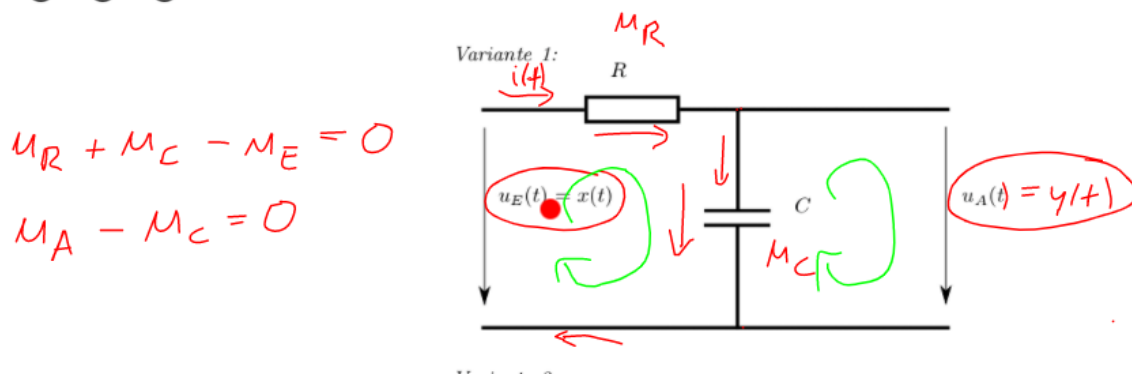
- Knotenregel für alle n Ströme die durch einen Knoten fließen

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$$

- Maschenregel für alle n Spannungsabfälle in einer Masche

$$\sum_{k=1}^n u_k(t) = 0$$

Beispiel Maschenregel (Grün):



4.3.2 Darstellung analoger elektronischer Schaltungen als Differentialgleichungen

Im Folgenden betrachten wir detailliert das obige Beispiel. Aus der linken und rechten Masche ergeben sich nach der Maschenregel:

$$u_E(t) - u_C(t) - u_R(t) = 0$$

$$u_A(t) - u_C(t) = 0$$

Löst man nach $u_E(t)$ bzw. nach $u_A(t)$ auf und setzt die bekannte Gleichung für die Spannung ein, so ergibt sich

$$u_E(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau + Ri(t)$$

$$u_A(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

Da uns der Zusammenhang zwischen Eingangsspannung $u_E(t)$ und Ausgangsspannung $u_A(t)$ interessiert, müssen wir $i(t)$ ersetzen mit Hilfe der Umformung der letzten Gleichungen zu

$$i(t) = C \frac{d}{dt} u_A(t)$$

ergibt sich die Differentialgleichung

$$u_E(t) = u_A(t) + RC \frac{d}{dt} u_A(t)$$

und in der bisherigen Notation

$$y(t) + RC \frac{d}{dt} y(t) = x(t)$$

oder auch

$$y(t) + RC \dot{y}(t) = x(t)$$

Im Allgemeinen ergeben sich für solche elektrischen Schaltungen (egal wie komplex) immer folgende Form von linearen Differentialgleichungen

$$a_0 y(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + \dots = b_0 x(t) + b_1 \dot{x}(t) + b_2 \ddot{x}(t) + \dots \quad (32)$$

mit konstanten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Das Lösen dieser Gleichung erfolgt mit der Laplace-Transformation.

Es gilt:

Systeme die durch den Zusammenhang zwischen Eingangssignal und Ausgangssignal mit Hilfe linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden können, sind automatisch LTI-Systeme.

4.3.3 Laplace-Transformation

LT = Laplace-Transformation. Bisher haben wir die Fouriertransformation in drei versch. Formen kennengelernt, CTFT für analoge Signale, DTFT für abgetastete Signale und DFT/FFT für abgetastete, periodische Signale.

Für die Untersuchung von analogen Systemen, wird eine echte Erweiterung der CTFT eingeführt, die sog. Laplace-Transformation:

$$X_{LT}(s) := \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (LT) \quad (33)$$

für echt komplexe Zahlen $s \in \mathbb{C}$ und wird auch die einseitige Laplace-Transformation genannt.

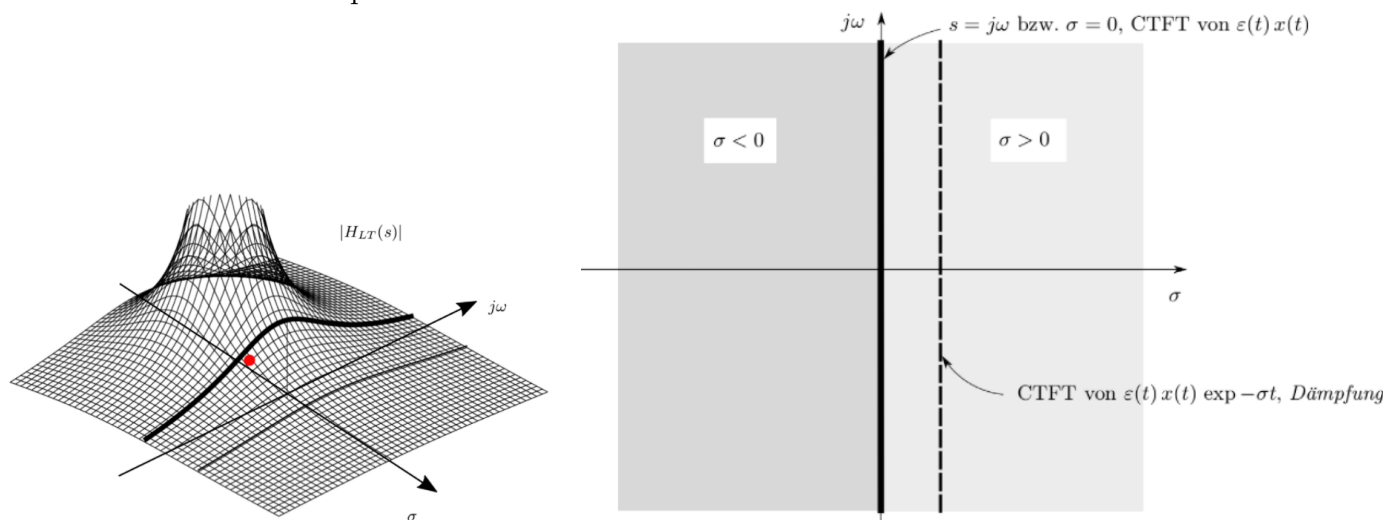
Bemerkungen:

- Man erhält für jede komplexe Zahl $s \in \mathbb{C}$ aus der komplexen Zahlenebene einen komplexen Wert $X_{LT}(s)$. Das tiefgestellte LT soll hierbei den Unterschied zwischen Fouriertransformation und Laplace-Transformation verdeutlichen.
- Man schreibt ebenso wie bei der Fouriertransformation $x(t) \circ \bullet X_{LT}(s)$, und spricht davon, dass $x(t)$ im Zeitbereich und $X_{LT}(s)$ im Bildbereich liegt.
- 0^- steht für die kleinstmögliche negative Zahl. Da wir kausale Systeme betrachten, kann das Integral nicht bei $-\infty$ beginnen.
- Zusammenhang zur Fouriertransformation:
Der Zusammenhang zur Fouriertransformation ergibt sich recht einfach, wenn man $s := \sigma + j\omega$ in Real- und Imaginärteil ($\sigma, \omega \in \mathbb{R}$) aufteilt. Dann ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned} X_{LT}(s) &= \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{[\varepsilon(t) x(t) e^{-\sigma t}]_{=: x'(t)}} \cdot e^{-j\omega t} dt = X'(\omega), \end{aligned}$$

mit der modifizierten Zeitfunktion $x'(t) = \varepsilon(t) x(t) e^{-\sigma t}$.

Anschauliches Bild der Laplace-Transformation:



4.3.4 Besonderheiten der Laplace-Transformation

Eigenschaften der Laplace-Transformation:

Aufgrund der Nähe zur CTFT, hat die Laplace-Transformation sehr ähnliche Eigenschaften wie die CTFT (man muss meinst nur $j\omega$ mit s ersetzen).

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Bildbereich
Linearität	$k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad k_1 X_{LT,1}(s) + k_2 X_{LT,2}(s)$
Zeitverschiebung	$x(t - \tau) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad X_{LT}(s) e^{-s\tau}$
Freq.verschiebung	$x(t) e^{St} \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad X_{LT}(s - S)$
Zeitskalierung	$x(k \cdot t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \frac{1}{k} \cdot X_{LT} \left(\frac{1}{k} \cdot s \right)$

Eigenschaft	Zeitbereich $\circ \longrightarrow \bullet$ Bildbereich
Faltung	$x_1(t) * x_2(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad X_{LT,1}(s) \cdot X_{LT,2}(s)$
Differentiation	$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad s X_{LT}(s) - x(0^-)$
Integration	$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \frac{1}{s} X_{LT}(s)$
Anfangswertsatz	$x(0^+) \quad \overset{=}{\circ \longrightarrow \bullet} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X_{LT}(s)$
Endwertsatz	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \quad \overset{=}{\circ \longrightarrow \bullet} \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X_{LT}(s)$

Korrespondenzen der Laplace-Transformation:

Zeitbereich $x(t)$		Bildbereich $X_{LT}(s)$	Konvergenzbereich
$\delta(t)$		1	alle s
$\varepsilon(t)$		$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$\varepsilon(t) \cdot t^n$		$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$\varepsilon(t) \cdot e^{-at}$		$\frac{1}{s+a}$	$\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$
$\varepsilon(t) \cdot a \cdot e^{-at}$		$\frac{a}{s+a}$	$\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$
$\delta(t) - \varepsilon(t) \cdot a \cdot e^{-at}$		$\frac{s}{s+a}$	$\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$

Zeitbereich $x(t)$		Bildbereich $X_{LT}(s)$	Konvergenzbereich
$\varepsilon(t) \cdot t^n \cdot e^{-at}$		$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$
$\varepsilon(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$		$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$\varepsilon(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$		$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$\varepsilon(t) \cdot \frac{\sin(\omega_0 t)}{t}$		$\arctan\left(\frac{\omega_0}{s}\right)$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$\varepsilon(t) \cdot e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t)$		$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$

4.3.5 Übertragungsfunktion und Frequenzgang

Mit Hilfe von Laplace-Transformation, Linearität, Differentiation und Faltung, kann man die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten sehr einfach transformieren. Es sei ein System wie folgt beschrieben:

$$a_0 y(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + \dots = b_0 x(t) + b_1 \dot{x}(t) + b_2 \ddot{x}(t) + \dots$$

mit konstanten Koeffizienten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ und dem Eingangssignal $x(t)$ und dem Ausgangssignal $y(t)$ (für das gilt: $y(t) = 0$ für $t < 0$)

Mit Anwendung der Laplace-Transformation auf beiden Seiten und der Differentiations-eigenschaft ($x(0^-) = 0$ und $y(0^-) = 0$) ergibt sich:

$$a_0 \cdot Y_{LT}(s) + a_1 \cdot s Y_{LT}(s) + a_2 \cdot s^2 Y_{LT}(s) + \dots = b_0 \cdot X_{LT}(s) + b_1 \cdot s X_{LT}(s) + b_2 \cdot s^2 X_{LT}(s) + \dots$$

Durch Ausklammern und Umformen erhalten wir:

$$Y_{LT}(s) = X_{LT}(s) \cdot \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \dots}{a_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \dots} \quad (34)$$

Wobei der Bruch als Übertragungsfunktion H_{LT} eines kontinuierlichen Systems definiert wird:

$$H_{LT} := \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \dots}{a_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \dots} \quad (35)$$

Die Übertragungsfunktion H_{LT} enthält alle Informationen der zu Grunde liegenden Differentialgleichung und damit alle Information des Systems.

Bemerkungen:

- Der gesamte Informationsgehalt des Systems ist unabhängig vom Eingangssignal $x(t)$ in H_{LT} komprimiert.
- Man kann Ausgangssignal $y(t)$ theoretisch errechnen, wenn man $X_{LT}(s) \cdot H_{LT}(s)$ berechnet und unter Zuhilfenahme der Korrespondenztabelle bzw. der Eigenschaften der Laplace-Transformation die zugehörige Zeitfunktion bestimmt.

Darüber hinaus ist uns die Faltungseigenschaft der Laplace-Transformation bekannt mit:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \circ \bullet \quad Y_{LT}(s) = X_{LT}(s) \cdot H_{LT}(s)$$

und somit erkennt man im Vergleich zur Definition der Impulsantwort:

$$\delta(t) \rightarrow h(t) \quad \circ \bullet \quad H_{LT}(s) \quad (36)$$

Die Laplace-Transformierte der Impulsantwort $h(t)$ eines LTI-Systems, ist genau die Übertragungsfunktion $H_{LT}(s)$.

Frequenzgang:

Darüber hinaus ist bekannt, dass die Laplace-Transformierte $X_{LT}(s)$ für Eingangssignale $x(t)$, mit $x(t) = 0$ für $t < 0$, identisch ist mit dem Fouriertransformierten $X(\omega)$, wenn man sich mit s auf $s = j\omega$ einschränkt, d.h.

$$X(\omega) = X_{LT}(j\omega)$$

Dies bedeutet (insofern natürlich all diese Transformierten existieren), für solche Signale ist die Fouriertransformierte $H(\omega)$ der Impulsantwort $h(t)$ nichts anderes als die Einschränkung der Übertragungsfunktion $H_{LT}(s)$ auf den Streifen $s = j\omega$:

$$h(t) \quad \circ \bullet \quad H(\omega) = H_{LT}(j\omega) \quad (37)$$

Es ergibt sich:

Wir nennen die Fouriertransformierte $H(\omega)$ der Impulsantwort $h(t)$ den sog. Frequenzgang des Systems. Dieser ist identisch mit der Übertragungsfunktion $H_{LT}(s)$ eingeschränkt auf den Streifen $s)j\omega$.

Wir nennen $|H(\omega)|$ den Amplitudengang und $\arg(H(\omega))$ den Phasengang des Systems.

Der Frequenzgang ist wichtig weil:

- Es ist wichtig in der Systemtheorie zu wissen, was mit dem Eingangssignal $x(t)$ beim Durchlaufen des Systems hin zum Ausgangssignal $y(t)$ passiert.
- Man kann die Effekte des Systems gut durch die Auswirkung auf die Frequenzen des Eingangssignals charakterisieren, so dass bspw. die Frequenzen des Eingangssignals verstärkt oder gedämpft werden.
- Der Amplitudengang beschreibt genau, wie die Frequenzen eines Eingangssignals durch das System gewichtet werden, und
- der Phasengang enthält Informationen über die zeitliche Verschiebung der Frequenzanteile des Eingangssignals.

Die Übertragungsfunktion ist wichtig weil:

- Sie ist die direkte Berechnung der Laplace-Transformierten der Impulsantwort, die sich oftmals als wesentlich einfacher zu berechnen ist als die direkte Berechnung der Fouriertransformierten.
- Systeme lassen sich meist sehr gut durch die Lage der Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion in der komplexen Zahlenebene vergleichen.

Beispiel RC-Glied (Variante 1):

Beispiel RC-Glied: Für das RC-Glied in *Variante 1* haben wir schon folgende Differentialgleichung gefunden:

$$y(t) + RC \dot{y}(t) = x(t) ,$$

welche unter Anwendung der Laplace-Transformation zu

$$Y_{LT}(s) + RC s Y_{LT}(s) = X_{LT}(s) ,$$

und damit zu der Übertragungsfunktion

$$H_{LT}(s) = \frac{1}{1 + RC s} = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + s}$$

führt.

Beim Blick in die Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation erhalten wir daher auch gleich die Impulsantwort des RC-Glieds

$$h(t) := \varepsilon(t) \cdot \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

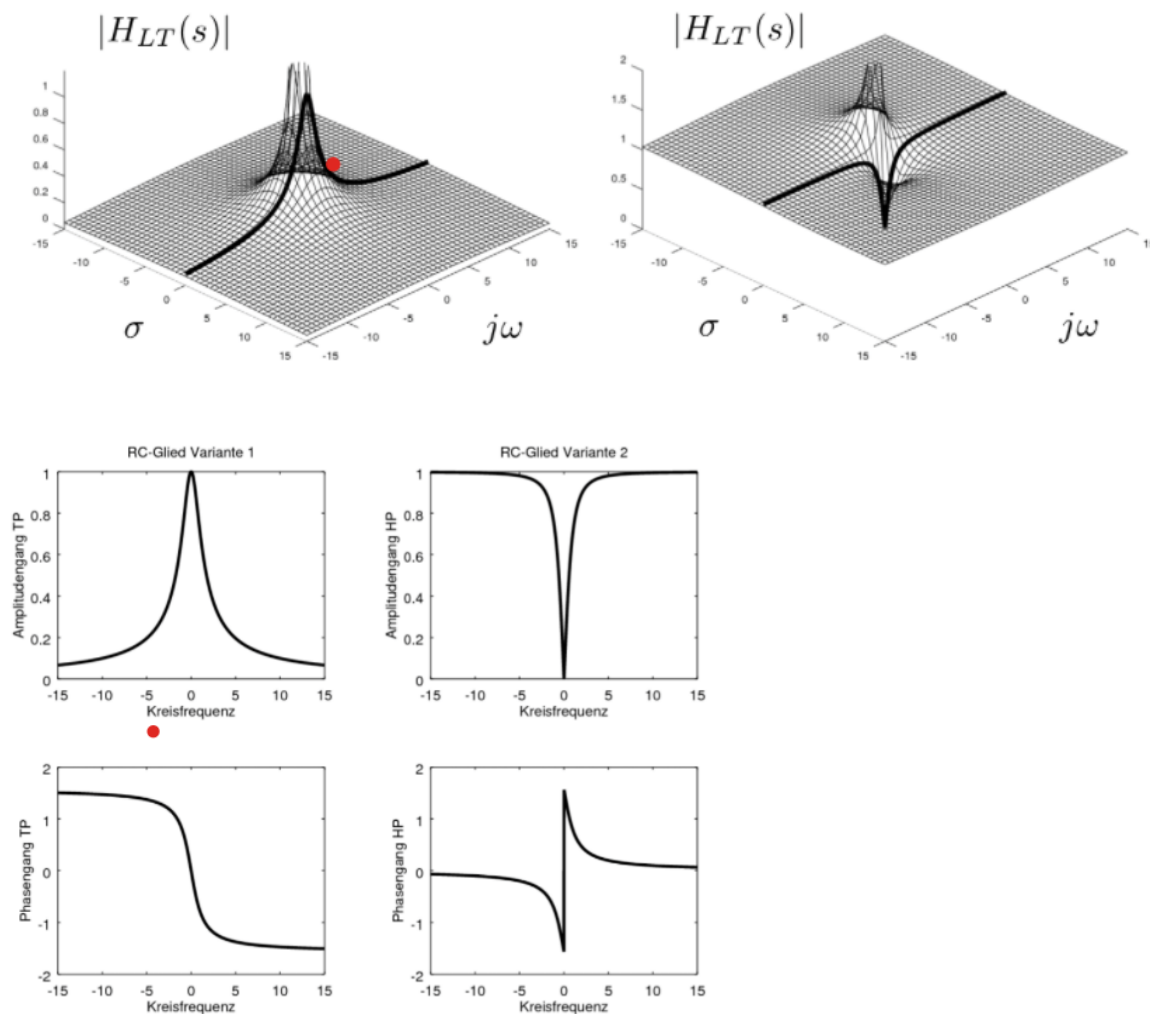
Darüber hinaus ergibt sich für den Frequenzgang (nachrechnen!)

$$H(\omega) = H_{LT}(j\omega) = \frac{1}{1 + RC j\omega} = \frac{1}{1 + (RC\omega)^2} - j \frac{RC\omega}{1 + (RC\omega)^2},$$

und damit für den Amplitudengang des RC-Glieds in *Variante 1*

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}.$$

Veranschaulichung der Schaltungen (Variante 1 und 2):



Handlungsanweisung zur Bestimmung von Amplituden- und Phasengang: Bestimme

- die Differentialgleichung
- daraus die Übertragungsfunktion $H_{LT}(s)$
- daraus den Frequenzgang $H(\omega) = H_{LT}(j\omega)$ (am Besten schon in Real und Imaginärteil aufgetrennt)
- daraus den Amplitudengang $|H(\omega)|$ bzw. den Phasengang $\arg(H(\omega))$

4.3.6 Schrittantwort im Bildbereich

Es ist messtechnisch einfacher die Schrittantwort zu bestimmen, weshalb auch nochmal der Zusammenhang zwischen Übertragungsfunktion und der Laplace-Transformation der Schrittantwort betrachtet wird mit:

$$\varepsilon(t) \rightarrow g(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau \circ \bullet G_{LT}(s) = \frac{1}{s} H_{LT}(s) \quad (38)$$

Man kann bspw. auch den stationären Endwert für $t \rightarrow \infty$ nach der Aufladung aller Speicherelemente des Systems mit Hilfe des Endwertsatzes bestimmen, da

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{LT}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} H_{LT}(s)$$

Beispiel RC-Glied (Variante 1):

Beispiel RC-Glied: Für das RC-Glied in *Variante 1* ergibt sich daher (nachrechnen mit Partialbruchzerlegung!)

$$G_{LT}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + RCs} = \frac{1}{s} - \frac{1}{\frac{1}{RC} + s},$$

was man mit der Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation im Zeitbereich mit

$$G_{LT}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{\frac{1}{RC} + s} \bullet \circ g(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \varepsilon(t) \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

identifizieren kann und genau den *Aufladevorgang des Kondensators* bei einer Schrittantwort beschreibt.

Wir erhalten daher für den stationären Endwert für $t \rightarrow \infty$ offensichtlich den Wert 1, welches wir noch einmal mit Hilfe des Endwertsatzes bestätigen können:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \bullet H_{LT}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + RCs} = 1.$$

4.3.7 Typische Darstellungsformen von Systemen

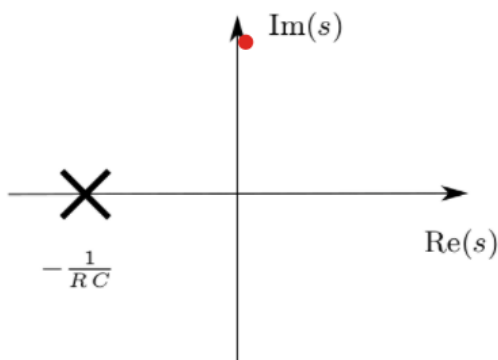
PN-Diagramme

Offensichtlich enthält die Übertragungsfunktion alle Eigenschaften des betrachteten Systems.

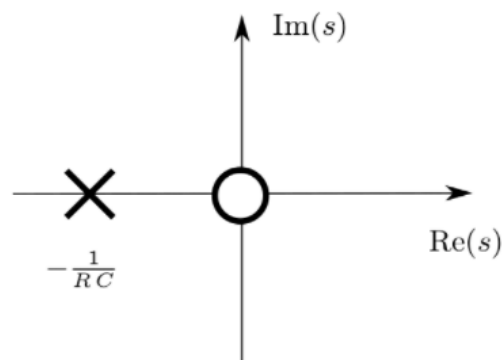
- Reale Systeme in der LTI-Näherung (ohne Übersteuerung) führen zu linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, welche als Übertragungsfunktion immer gebrochen-rationale Funktionen sind, d.h. ein Bruch bestehend aus Polynom im Nenner und Polynom im Zähler.
- Nicht wunderlich ist also, dass die Lage der Nullstellen im Nenner, sog. Pole der Übertragungsfunktion und die Nullstellen im Zähler, sog. Nullstellen der Übertragungsfunktion eine tiefgreifende Bedeutung für die Beschreibung solcher Systeme haben.
- Aus diesem Grund stellt man die Lage der Pole und Nullstellen in der komplexen Zahlenebene in sog. PN-Diagrammen dar, worin die Pole als Kreuze und die Nullstellen als Kreise dargestellt werden.
- **Ein System ist stabil, wenn der Polynomgrad des Zählers kleiner gleich des Polynomgrades des Nenners ist und alle Pole in der linken Halbebene liegen.**

Beispiel RC-Glied:

Variante 1 (Tiefpass):



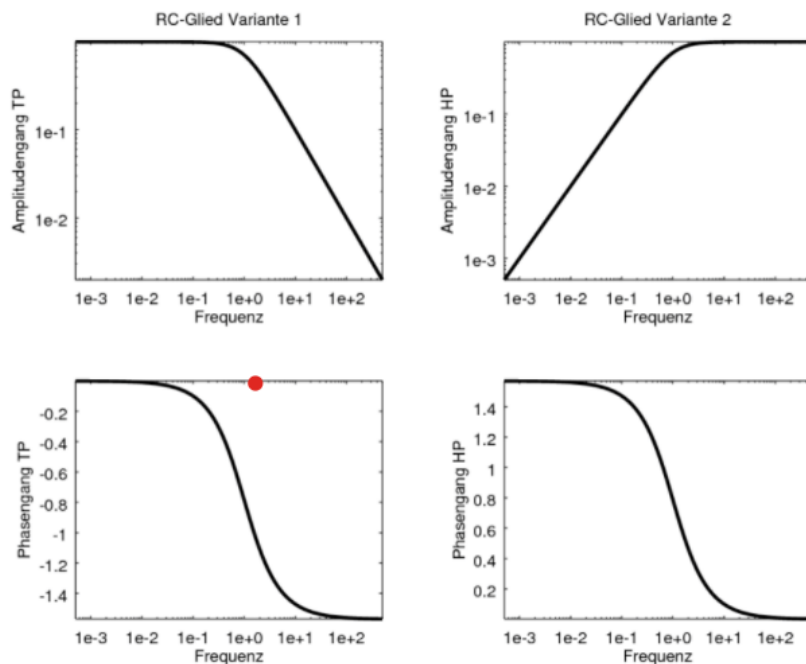
Variante 2 (Hochpass):



Bode-Diagramme

Ebenso sehr üblich ist die Darstellung des Amplituden- und Phasengangs in der sog. Bode-Darstellung. Dabei werden die (mathematisch nur positiven) Frequenzen f dargestellt mit $f = \frac{\omega}{2\pi}$ und diese auf einer logarithmischen Achse angetragen. Über diesen Frequenzen wird einerseits der Amplitudengang ebenso logarithmisch bzw., der Phasengang normal (d.h. linear) angetragen.

Beispiel RC-Glied:

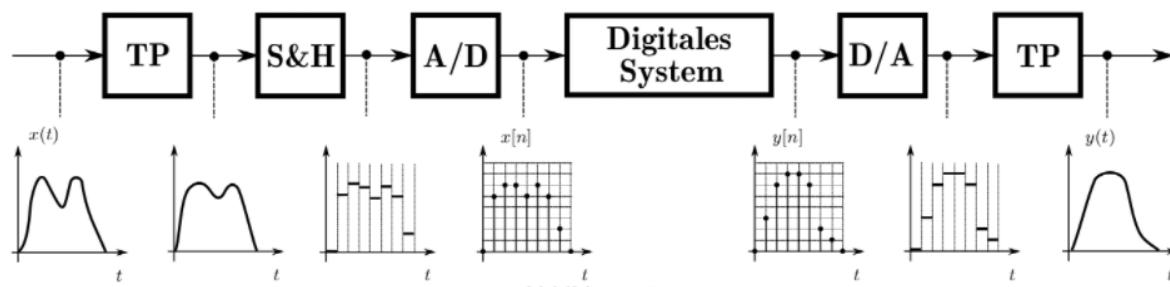


4.4 Diskrete LTI-Systeme

4.4.1 Schema digitaler Systeme für die Bearbeitung von analogen Signalen

Diskrete LTI-System, und insbesondere digitale LTI-Systeme (alle Parameterwerte dieser Systeme liegen in diskreten Schrittweiten vor), werden meist als stabile und flexible Alternative zu analogen LTI-Systemen zur Bearbeitung von kontinuierlichen Signalen verwendet.

Ablauf :



- **TP**: Anti-Aliasing-Filter, hat die Aufgabe das kontinuierliche Eingangssignal $x(t)$ künstlich auf Bandbreite B zu begrenzen, sodass bei der Diskretisierung des Signals das Abtasttheorem automatisch erfüllt ist.
- **S H**: Sample-And-Hold-Schaltung, hat die Aufgabe zeitdiskretisierung vorzubereiten, sodass das Signal zu Beginn des Abtastzeitintervalls mit Breite $\Delta T_A < \frac{1}{2B}$ einmal abgetastet wird und über das ganze Intervall konstant gehalten wird.

- **A/D:** Analog-Digital-Wandler, hat die Aufgabe die tatsächliche Abtastung des Signals in der Zeit mit Abtastfrequenz $f = \frac{1}{\Delta T_A}$ durchzuführen und quantisiert die erhaltenen Signalwerte.
- **Digitales System:** Hat die Aufgabe das digitale Eingangssignal $x[n]$ in das digitale Ausgangssignal $y[n]$ zu überführen.
- **D/A:** Digital-Analog-Wandler, hat die Aufgabe aus dem digitalen Signal $y[n]$ wieder ein zeitkontinuierliches Signal zu erstellen.
- **TP:** Hat die Aufgabe das Signal dass nach dem D/A-Wandler durch die hohen Sprungstellen extrem hohe Frequenzen enthält zu glätten (praktisch eine Interpolation).

4.4.2 Darstellung diskreter Systeme als Differentialgleichung

Die mathematische Beschreibung diskreter LTI-Systeme ist ähnlich zu den linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bei den analogen LTI-Systemen. Anstatt Differentialgleichungen werden im diskreten Fall Differenzengleichungen verwendet, die folgende grundsätzliche Struktur aufweisen:

$$\begin{aligned}
 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots &= b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots \\
 \Leftrightarrow y[n] &= \sum_{i=0}^N b_i \cdot x[n-i] - \sum_{i=1}^M a_i \cdot y[n-i]
 \end{aligned} \tag{39}$$

Es gilt dabei zu beachten, dass der Vorfaktor vor $y[n]$ ohne Einschränkungen der Allgemeinheit auf $a_0 = 1$ gesetzt wurde.

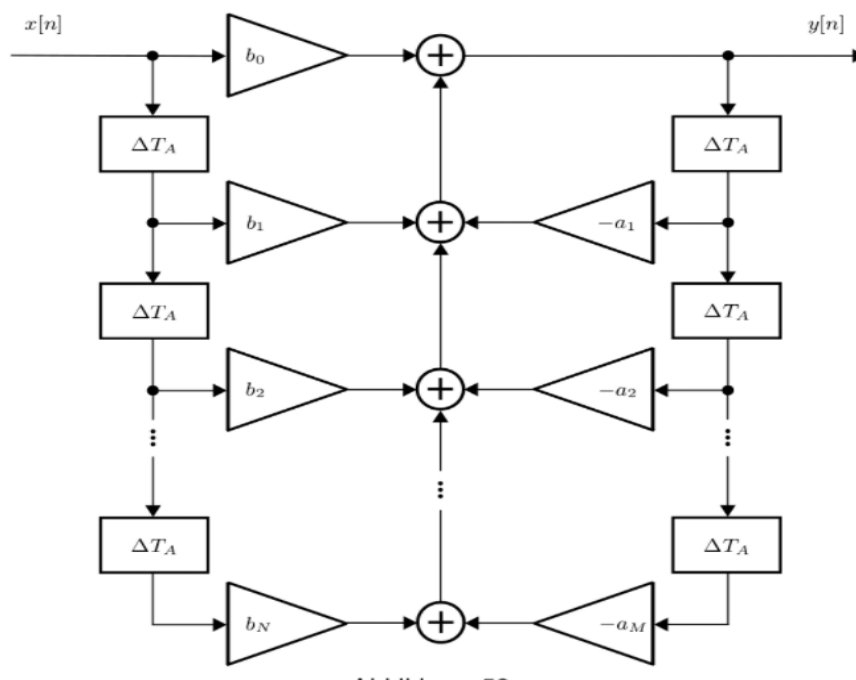
Wir erkennen, der aktuelle Wert $y[n]$ hängt im Allgemeinen sowohl von den Eingabewerten $x[n]$ als auch von früheren Ausgabewerten ab. Zuerst stellen wir fest, dass in der Definition der Gleichungen nur drei Operationen verwendet werden:

- Diskrete Systeme können als Differenzialgleichungen beschrieben werden, die aus nur drei Operationen bestehen.
- Multiplikation mit einer konstnaten: $a_0, x[n] \rightarrow a_0 \cdot x[n]$
- Addition: $x[n], x[m] \rightarrow x[n] + x[m]$
- Verzögerung: $y[n] \rightarrow y[n-k]$ (Verzögerung um k Schritte)
- D.h. Alle diskreten (und digitalen) LTI-Systeme lassen sich mit diesen drei Operationen komplett beschreiben

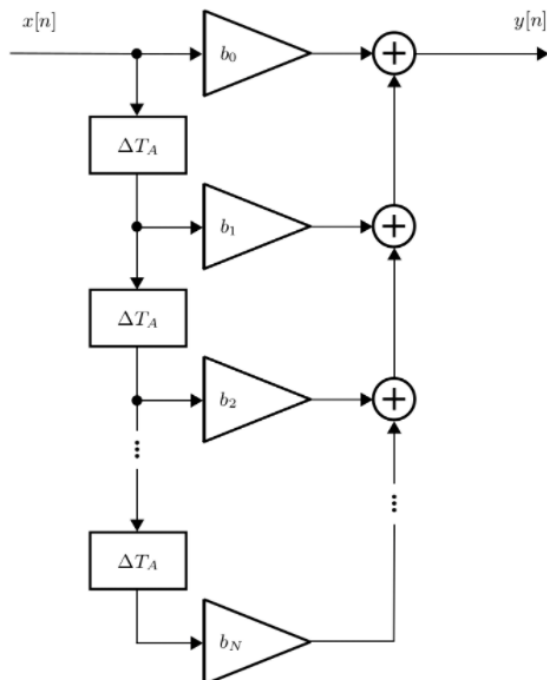
Des Weiteren wird aus der Definitionsgleichung 39 definiert, dass diskrete Systeme mit der allgemeinen Differenzialgleichung und ..

- ... mindestens ein $a_i \neq 0$, als sog. IIR-Systeme (IIR = infinite impuls response) bezeichnet werden, d.h. das System hängt von mindestens einem vergangenen Ausgangswert ab
- ... alle $a_i = 0$, als sog. FIR-System (FIR = finite impuls response) bezeichnet werden, d.h. das System hängt überhaupt nicht von vergangenen Ausgangswerten ab.

Blockdiagramm für alle IIR-Systeme:



Blockdiagramm für alle FIR-Systeme:



Beispiel diskretisiertes RC-Glied (Variante 1):

Beispiel diskretisiertes RC-Glied: Betrachten wir die Differentialgleichung des RC-Glieds (*Variante 1*)

$$y(t) + RC \dot{y}(t) = x(t) ,$$

so kann man diese Gleichung an diskreten Zeitpunkten $n \cdot \Delta T_A$, $n \in \mathbb{Z}$ mit $y[n] = y(n \cdot \Delta T_A)$ und $x[n] = x(n \cdot \Delta T_A)$ ohne Einschränkung umschreiben zu

$$y[n] + RC \dot{y}[n] = x[n] ,$$

und durch die Annäherung

$$\dot{y}[n] \approx \frac{y[n] - y[n-1]}{\Delta T_A}$$

erhält man eine Annäherung der Differentialgleichung mit

$$y[n] + RC \frac{y[n] - y[n-1]}{\Delta T_A} = x[n] ,$$

bzw.

$$y[n] = \frac{\Delta T_A}{\Delta T_A + RC} x[n] + \frac{RC}{\Delta T_A + RC} y[n-1] .$$

D.h. man kann das analoge RC-Glied annähern durch eine Differenzengleichung, wobei die Übereinstimmung immer besser wird für kleine ΔT_A .

4.4.3 Impulsantwort diskreter Systeme

Die allgemeine Beschreibung der Impulsantwort hat auch ihre Anwendung für diskrete Systeme (man muss sich im Hinterkopf einfach den Delta-Kamm an die kontinuierlichen Signale multipliziert vorstellen). Dennoch ist die Entsprechung mit dem diskreten Delta-Impuls $\delta[n]$ und der diskreten Sprungfunktion $\varepsilon[n]$ wichtig:

$$\delta[n] := \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon[n] := \begin{cases} 0 & , n < 0 \\ 1 & , n \geq 0 \end{cases} .$$

Die Impulsantwort $h[n]$ eines diskreten LTI-Systems ist das Ausgangssignal, wenn man einen Delta-Impuls $x[n] := \delta[n]$ als Eingangssignal wählt. Man schreibt:

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

Im Weiteren gilt ebenso im diskreten Fall, dass

$$x[n] \rightarrow x[n] * h[n] \quad (40)$$

was bedeutet, das Ausgangssignal $y[n]$ eines diskreten LTI-Systems für ein beliebiges Eingangssignal $x[n]$ ist die Faltung des Eingangssignals mit der Impulsantwort, d.h. $y[n] := x[n] * h[n]$.

Ebenso gilt: Ein diskretes LTI-System ist kausal, falls

$$h[n] = 0 \text{ for } n < 0$$

und es ist BIBO-stabil, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Impulsantwort für FIR-Systeme:

Insbesondere hat die Impulsantwort von FIR-Systemen eine interessante Eigenschaft da alle Koeffizienten $a_i = 0$:

$$\delta[n] \rightarrow h[n] = \sum_{i=0}^N b_i \cdot \delta[n - i] = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_N]$$

d.h. die Impulsantwort dauert nur endlich lange und hat ausserhalb der Zeitpunkte $n = 0, \dots, N$ immer den Wert Null. Daher auch der Name FIR = Finite Impulse Response.

Darüber hinaus besteht die Impulsantwort genau aus den Koeffizienten b_i der Differenzengleichung. Auch erkennt man daher, dass FIR-Systeme deshalb immer stabil sind, da

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^N |b[n]| < \infty$$

Bemerkung:

- Die Impulsantwort bei IIR-Systemen (also Systemen mit mindestens einem $a_i \neq 0$) ist nicht so einfach, wie bei den FIR-Systemen. In diesen Systemen können typischerweise Impulsantworten $h[n]$ entstehen, die unendlich lange andauern, daher auch IIR = Infinite Impulse Response)

Beispiel diskretisiertes RC-Glied (Variante 1):

Beispiel diskretisiertes RC-Glied: Wir konnten schon feststellen, dass für das diskretisierte RC-Glied (*Variante 1*) folgende Differenzengleichung gilt:

$$y[n] = \frac{\Delta T_A}{\Delta T_A + RC} x[n] + \frac{RC}{\Delta T_A + RC} y[n-1] .$$

Offensichtlich handelt es sich um ein *IIR-System*. Damit wir das unendlich lange Andauern der Impulsantwort nachvollziehen können, wollen wir uns die Zahlenfolge der Impulsantwort für $\delta[n] \rightarrow h[n]$ berechnen. Wir nehmen der Einfachheit halber $\Delta T_A = RC = 1$ an, dann vereinfacht sich die Differenzengleichung zu

$$y[n] = \frac{1}{2} x[n] + \frac{1}{2} y[n-1] .$$

Wir erhalten (da $x[0] = 1$, sonst $x[n] = 0$, und $y[-1] = 0$ – *Kausalität!*):

$$h[n] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots \right] ,$$

somit eine unendlich lange andauernde Impulsantwort.

Dieses System ist (zufälligerweise) tatsächlich sogar *stabil*, da ein (mit etwas mathematischen Geschick einzusehendes, aber hier nicht weiter thematisiertes) Ergebnis aus der Mathematik lautet, dass die unendliche Reihe einen endlichen Wert annimmt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty .$$

Man kann sich jedoch sehr leicht vorstellen, dass es auch *IIR-Systeme* gibt, die *nicht stabil* sind. Wie sieht die Impulsantwort $h[n]$ der *Variante 2* aus?