

Zadanie.3. s.212. Ocenic $\int_{-1}^1 \cos(2 \cos^{-1} x) dx$ z użyciem reguły Simpsona 1/3 przy użyciu dwóch, czterech i sześciu paneli. Wyjaśnij wyniki.

Dodatkowo użyłam też metody trapezów.

1. Reguła Simpsona 1/3

- Reguła ta zakłada przybliżenie całki przez wielomian drugiego stopnia w każdym panelu i jest zdefiniowana wzorem:

$$\bullet \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

h- szerokość panelu $\left(h = \frac{b-a}{n}\right)$

n- liczba paneli

a) Dla dwóch paneli:

$$\bullet h = \frac{1-(-1)}{2} = 1$$

$$\bullet \int_{-1}^1 \cos(2 \cos^{-1} x) dx \approx \frac{1}{3} [\cos(0) + 4 \cos(0) + \cos(0)]$$

b) Dla czterech paneli:

$$\bullet h = \frac{1-(-1)}{4} = 0,5$$

$$\bullet \int_{-1}^1 \cos(2 \cos^{-1} x) dx \approx \frac{0,5}{3} [\cos(-1) + 4 \cos(0) + \cos(1)]$$

c) Dla sześciu paneli:

$$\bullet h = \frac{1-(-1)}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\bullet \int_{-1}^1 \cos(2 \cos^{-1} x) dx \approx \frac{\frac{1}{3}}{3} \left[\cos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 4 \cos(0) + \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

2. Metoda trapezów

- Aby rozwiązać całkę z treści zadania, korzystamy ze wzoru:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]$$

h - szerokość panelu, $h = \frac{b-a}{n}$, a x_i o punkty wewnątrz przedziału, w równych odstępach od siebie.

Dla każdego podpunktu h , czyli szerokość panelu jest taka sama jak w metodzie Simpsona.

a) Dla dwóch paneli:

- $\int_{-1}^1 \cos(2 \cos^{-1} x) dx \approx \frac{1}{2} [\cos(-1) + \cos(1)]$

b) Dla czterech paneli:

- $\int_{-1}^1 \cos(2 \cos^{-1} x) dx \approx \frac{0.5}{2} \left[\cos(-1) + 2 \cos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cos(1) \right]$

c) Dla sześciu paneli:

- $\int_{-1}^1 \cos(2 \cos^{-1} x) dx \approx \frac{\frac{1}{3}}{2} \left[\cos(-1) + 2 \cos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2 \cos(0) + 2 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cos(1) \right]$

3. Wnioski:

Przeanalizowałam obie metody i porównałam ze sobą wyniki. W obu przypadkach, im większa liczba paneli, tym dokładniejsze przybliżenie całki.

Jednakże reguła Simpsona 1/3 zazwyczaj daje dokładniejsze wyniki niż metoda trapezów. Różnice jedynie są widoczne przy mniejszej ilości paneli, im ich liczba jest większa tym wyniki zbliżają się do siebie.