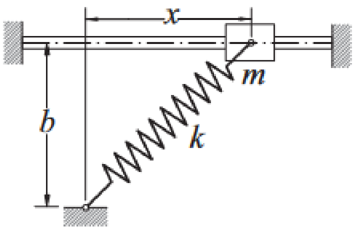
SPRAWOZDANIE

Aleksandra Rusak

Fizyka medyczna

Zadanie 13/214



The mass m is attached to a spring of free length b and stiffness k. The coefficient of friction between the mass and the horizontal rod is μ. The acceleration of the mass can be shown to be (you may wish to prove this) $\ddot{x} = -f(x)$, where

$$f(x) = \mu g + \frac{k}{m}(\mu b + x)\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}}\right)$$

If the mass is released from rest at $x = b$, its speed at $x = 0$ is given by

$$v_0 = \sqrt{2\int_0^b f(x)dx}$$

Compute v_0 by numerical integration using the data $m = 0.8$ kg, $b = 0.4$ m, $\mu = 0.3$, $k = 80$ N/m, and $g = 9.81$ m/s^2.

Cel zadania:

Znaleźć v_0 poprzez całkowanie numeryczne korzystając z danych podanych w treści zadania.

Teoria:

Całkowanie numeryczne – wzory całkowania numerycznego pozwalają na obliczenie przybliżonej wartości całki

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{1}$$

Podstawiając w miejsce funkcji podcałkowej *f(x)* wielomian algebraiczny

$$\varphi(x) = f_0 N_0(x) + f_1 N_1(x) + \cdots + f_n N_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i N_i(x) \tag{2}$$

otrzymamy tzw. wzór kwadraturowy.

<u>Kwadratura całkowania</u> – wzorem kwadraturowym (kwadraturą) nazywamy:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f_i \int_a^b N_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f_i = S(f) \tag{3}$$

w którym

$$w_i = \int_a^b N_i(x)dx, \;\; i = 0,1,2,\dots,n \tag{4}$$

są tzw. współczynnikami wagowymi (wagami). Wartość w_i określa wielkość udziału rzędnej $f_i \equiv f(x_i)$ w wartości całej sumy $S(f)$.

W zależności od sposobu postępowania przy wyborze położeń węzłów interpolacji w przedziale całkowania kwadratury dzielimy na dwie grupy:

1. kwadratury Newtona - Cotesa, węzły są rozmieszczone równomiernie w całym przedziale całkowania (zamknięte końce);
2. kwadratury Gaussa, węzły są rozmieszczone nierównomiernie, tak aby zminimalizować błąd kwadratury (otwarte końce).

<u>Kwadratury Newtona – Cotesa:</u>

- Wzór prostokątów – po zastosowaniu interpolacji funkcji podcałkowej $f(x)$ za pomocą wielomianu
$$\varphi(x) = f(x_0) = const. \tag{5}$$
otrzymujemy:
$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(x_0)dx \rightarrow S(f) = (b-a)f(x_0) \tag{6}$$
W zależności od wyboru położenia węzła x_0 otrzymujemy wzory:
  a) lewych prostokątów, gdy $x_0 = a$
  b) środkowych prostokątów, gdy $x_0 = \frac{(a+b)}{2}$
  c) prawych prostokątów, gdy $x_0 = b$

- wzór trapezów – jeśli do interpolacji funkcji $f(x)$ zastosujemy interpolację za pomocą wielomianu liniowego Lagrange'a, to otrzymamy wzór kwadraturowy, nazywany wzorem trapezów.

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b [f_0 L_0 + f_1 L_1]\, dx = \int_a^b \left[f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}\right] dx \rightarrow S(f) = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] \tag{7}$$

- wzór Simpsona – zastosowanie kwadraturowej interpolacji Lagrange'a prowadzi do wzoru:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b [f_0 L_0 + f_1 L_1 + f_2 L_2]dx = \int_a^b \left[f_0 \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} + f_1 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + f_2 \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}\right] dx \tag{8}$$

Ostatecznie kwadratura (wzór) Simpsona przyjmuje postać:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}h(f_0 + 4f_1 + f_2) = S(f), \;\; h = \frac{b-a}{2} \tag{9}$$

Wzór Simpsona jest rzędu czwartego, co oznacza, że jest dokładny nie tylko dla wielomianów stopnia drugiego, lecz także dla wielomianów stopnia trzeciego tzn. $I(W_3)=S(W_3)$ oraz $I(W_4)\neq S(W_4)$.

Kwadratury Gaussa – dokładność kwadratury można zwiększyć rezygnując z warunku równomiernego rozmieszczenia węzłów interpolacji. Wartości wag oraz położenia węzłów całkowania ustala się tak aby kwadratura całkowania przybliżona była wzorem dokładnym dla jednomianu możliwie wysokiego stopnia.

$$\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^k = \int_a^b x^k dx, \;\; k = 0,1,2,\ldots,2n+1 \tag{10}$$

W praktyce wagi i punkty Gaussa nie wyznacza się z powyższego warunku. Są one stablicowane dla rodziny pewnych wielomianów ortogonalnych (z wagą) w przedziale $< -1, 1 >$.

$l.p.$	$\xi_i, \quad i = 0, \ldots, n$	$w_i, \quad i = 0, \ldots, n$
1	$\xi_0 = 0$	$w_0 = 2$
2	$\xi_0 = +1/\sqrt{3}$ $\xi_1 = -1/\sqrt{3}$	$w_0 = 1$ $w_1 = 1$
3	$\xi_0 = +\sqrt{0.6}$ $\xi_1 = 0$ $\xi_2 = -\sqrt{0.6}$	$w_0 = 5/9$ $w_1 = 8/9$ $w_2 = 5/9$
4	$\xi_0 = +0.86113631$ $\xi_1 = +0.33998104$ $\xi_2 = -0.33998104$ $\xi_3 = -0.86113631$	$w_0 = 0.34785485$ $w_1 = 0.65214515$ $w_2 = 0.65214515$ $w_3 = 0.34785485$

W ogólnym przypadku gdy liczymy całkę z dowolnego przedziału (a,b), konieczna jest transformacja liniowa między danym przedziałem a przedziałem $< -1, 1 >$, tak aby można było zastosować dane z tabeli. Wzory na transformację $(a, b) \rightarrow < -1, 1 >$:

$$\xi = \frac{2x - a - b}{b - a} \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi \tag{11}$$

$$d\xi = \frac{2}{b-a}dx \Leftrightarrow dx = \frac{b-a}{2}d\xi \tag{12}$$

co daje:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi\right)d\xi \tag{13}$$

oraz wzór kwadraturowy Gaussa:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} w_i f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi_i\right) \tag{14}$$

Wzory złożone (sumacyjne) – bardzo skutecznym sposobem podwyższania dokładności całkowania numerycznego jest dokonanie podziału przedziału $[a, b]$ na podprzedziały $[a_j, b_j], j = 1, 2, \ldots, N$ przy zachowaniu związków:

$$a_1 = a, b_N = b, b_i = a_{i+1}, i = 1,2,\ldots,N-1 \tag{15}$$

Teraz można zapisać:

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=\sum_{j=1}^{N}\int_{a_j}^{b_j} f(x)dx=I_1(f)+I_2(f)+\cdots+I_N(f) \tag{16}$$

Do obliczania każdego składnika $I_i(f)$ sumy można wykorzystać dowolny wzór kwadraturowy.

<u>Metoda lewych, środkowych i prawych prostokątów:</u>

a) $\int_a^b f(x)dx \approx H\sum_{j=1}^{N} f(x_{j-1}) = H(f_0+f_1+f_2+\cdots+f_{N-1})$

b) $\int_a^b f(x)dx \approx H\sum_{j=1}^{N} f\left(\frac{x_j-x_{j-1}}{2}\right) = H(f_{01}+f_{12}+f_{23}+\cdots+f_{N-1N})$

gdzie $f_{j-1j}=f\left(\frac{x_{j-1}+x_j}{2}\right), j=1,2,\dots,N$

c) $\int_a^b f(x)dx \approx H\sum_{j=1}^{N} f(x_j) = H(f_1+f_2+\cdots+f_N)$

<u>Metoda trapezów:</u>

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}H\sum_{j=1}^{N}\left[f(x_{j-1})+f(x_j)\right] = H\left(\frac{1}{2}f_0+f_1+f_2+\cdots+12f_N\right) \tag{17}$$

lub

$$\int_a^b f(x)dx \approx H\left[\frac{1}{2}f_0+\sum_{j=1}^{N-1} f_j+\frac{1}{2}f_N\right] \tag{18}$$

<u>Metoda Simpsona:</u>

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}H[(f_0+f_N)+4(f_1+f_3+\cdots+f_{N-1})+2\,(f_2+f_3+\cdots+f_{N-2})] \tag{19}$$

przy czym $H=\frac{x_N-x_0}{N}$, N – liczba parzysta.

<u>Metoda Gaussa:</u>

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\frac{b-a}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{lpc=2} w_i f(X_i) \tag{20}$$

gdzie

$$X_i=\frac{x_j+x_{j+1}}{2}+\frac{x_{j+1}-x_j}{2}\xi_i \tag{21}$$

<u>Metody Rungego-Kutty</u> – w metodach tych nachylenie szacowane jest na podstawie kilku punktów wewnątrz przedziału. Różne metody RK klasyfikowane są ze względu na ich rząd (odpowiadający liczbie punktów wziętych do szacowania nachylenia).

Metody Rungego-Kutty drugiego rzędu:

$$y_{i+1}=y_i+(c_1K_1+c_2K_2)h \tag{22}$$

gdzie:

$K_1=f(x_i,y_i)$

$K_2=f(x_i+a_2h,y_i+b_{21}hK_1)$

Stałe c_1, c_2, a_2, b_{21} zależą od wybranej metody drugiego rzędu.

Zmodyfikowana metoda Eulera w postaci metody RK drugiego rzędu:

$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, a_2 = 1, b_{21} = 1$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)h \tag{23}$$

gdzie:

$K_1 = f(x_i, y_i)$

$K_2 = f(x_i + h, y_i + hK_1)$

$y_{i+1} = y_i + h\frac{f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})}{2}$

Metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu:

$$y_{i+1} = y_i + (c_1K_1 + c_2K_2 + c_3K_3 + c_4K_4)h \tag{24}$$

gdzie:

$K_1 = f(x_i, y_i)$

$K_2 = f(x_i + a_2h, y_i + b_{21}hK_1)$

$K_3 = f(x_i + a_3h, y_i + b_{31}hK_1 + b_{32}hK_2)$

$K_4 = f(x_i + a_4h, y_i + b_{41}hK_1 + b_{42}hK_2 + b_{43}hK_3)$

Rozwiązanie zadania:

Zadanie zaczynamy od obliczenia całki numerycznie za pomocą metody Newtona-Cotesa (kwadratury trapezoidalnej). Używamy scipy.integrate.quad do obliczenia numerycznej całki oznaczonej zadanej funkcji w granicach od *0* do *b*. Zgodnie ze wzorem na v_0 otrzymany wcześniej wynik z całki pierwiastkujemy. Następnie definiujemy układ równań różniczkowych, który opisuje ruch masy oraz ustalamy warunki początkowe (*x(t=0), v(t=0)*), $\ddot{x} = -f(x)$. Do rozwiązania równań różniczkowych wykorzystujemy scipy.integrate.solve_ivp. Określamy: przedział czasu od *0* do *b*, warunki początkowe, ilość punktów czasowych oraz metodę numeryczną. Wykorzystujemy metodę Rungego-Kutty czwartego rzędu. Na koniec rysujemy wykresy zależności *x(t)* oraz *v(t).*

W kodzie wykorzystaliśmy następujące biblioteki:

- numpy (operacje numeryczne),
- scipy.integrate.quad (obliczenia numerycznej całki),
- scipy.integrate.solve_ivp (rozwiązywanie układu równań różniczkowych),
- matplotlib.pyplot (stworzenie wykresu).

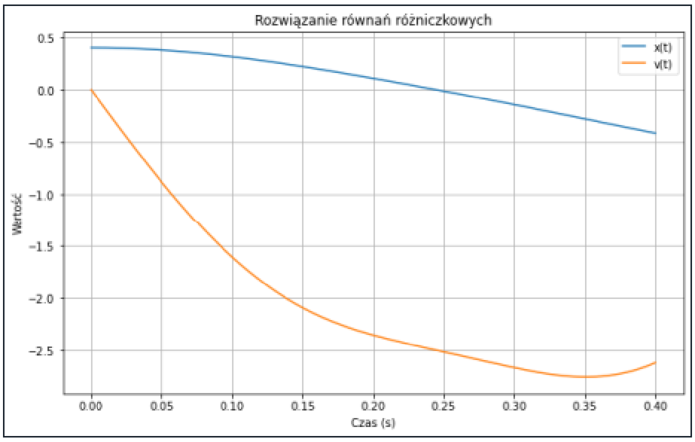
Kod w Pythonie wykorzystany do obliczeń wygląda następująco:

```python
import numpy as np
from scipy.integrate import quad, solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt

m = 0.8
b = 0.4
μ = 0.3
k = 80
g = 9.81

def f(x):
    return μ * g + (k / m) * (μ * b + x) * (1 - b / np.sqrt(b**2 + x**2))

integral_result, _ = quad(lambda x: 2 * f(x), 0, b)
v0 = np.sqrt(integral_result)

def system_equations(t, y):
    x, v = y
    acceleration = -f(x)
    return [v, acceleration]


initial_conditions = [b, 0]
solution = solve_ivp(system_equations, [0, b], initial_conditions, t_eval=np.linspace(0, b, 1000), method='RK45')


plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(solution.t, solution.y[0], label='x(t)')
plt.plot(solution.t, solution.y[1], label='v(t)')
plt.title('Rozwiązanie równań różniczkowych')
plt.xlabel('Czas (s)')
plt.ylabel('Wartość')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

print(f"Prędkość przy x = 0 wynosi około {v0:.2f} m/s")
```

Rys. 1. Kod wykorzystany do obliczenia zadania w Pythonie.

Ostatecznie otrzymujemy wynik równy: $\boldsymbol{v_0 = 2.50\ \frac{m}{s}}$.

oraz następujący wykres zależności *x(t)* oraz *v(t)*:



Rys. 2. Wykres zależności *x(t)* oraz *v(t)*.

Literatura:

https://www.cce.pk.edu.pl/~pplucin/ms/lib/exe/fetch.php?media=pl:wyciag1011.pdf

https://www.if.pw.edu.pl/~agatka/numeryczne/wyklad_08.pdf

https://ccfd.github.io/courses/info2_lab04.html