

Apuntes Mecánica Clásica I

Andrés Laín Sanclemente, Miguel Calvo Arnal* y otros**

16 de diciembre de 2018

*Ilustre ilustrador.

**Una especial mención a Alejandro Cano Jones, quien ha realizado varias correcciones a lo largo de todos los apuntes. Los demás autores han hecho contribuciones menores y aparecen mencionados debajo de los respectivos apartados.

Índice

1. Principios de mecánica	5
1.1. Introducción	5
1.2. Conceptos básicos: espacio y tiempo	6
1.3. Leyes de Newton	7
1.4. Principio de superposición	9
1.5. Definición de masa y propiedad aditiva	9
1.6. Preliminares matemáticos	12
1.7. Fuerzas centrales y fuerzas conservativas (1 ^{era} parte)	12
1.7.1. Fuerzas centrales	12
1.7.2. Fuerzas conservativas	13
1.7.3. Ejemplos de fuerzas centrales conservativas	14
1.8. Ligaduras	16
1.9. Momento lineal	18
1.10. Momento angular	20
1.11. Momento de fuerzas	21
1.12. Energía	22
1.12.1. Energía cinética E_C , T	22
1.12.2. Trabajo de una fuerza	22
1.12.3. Energía potencial E_p , V	22
1.12.4. Energía mecánica E_m , E	23
1.13. Fuerzas conservativas (2 ^a parte)	24
2. Cálculo de variaciones. Ecuaciones de Euler-Lagrange	32
2.1. Expresión de la posición, la velocidad y la aceleración en coordenadas cilíndricas y esféricas (ejercicio para casa)	32
2.1.1. Coordenadas polares r, φ	32
2.1.2. Coordenadas cilíndricas r, φ, z	32
2.1.3. Coordenadas esféricas r, φ, θ	33
2.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange	34
2.2.1. Preliminares matemáticos	34
2.2.2. Deducción matemática	36
2.2.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange en física	42
2.3. Coordenadas generalizadas y demás	42
2.4. Ligaduras	43
2.5. Tipos de sistemas	43
2.6. Principio de Hamilton. Ecuaciones de Lagrange	44
2.7. Momentos y fuerzas generalizadas	46
2.8. Fuerzas de ligadura Q'_i	49
2.9. Principio de d'Alembert y principio de los trabajos virtuales	52
2.9.1. Definiciones previas	52
2.9.2. Principio de D'Alembert	52
2.9.3. Principio de los trabajos virtuales (estática)	54
2.10. Ecuaciones de Lagrange para sistemas con fuerzas no conservativas	56
2.11. Hamiltoniano	63
2.11.1. Conservación del Hamiltoniano	64
2.11.2. Ecuaciones de Hamilton	65
3. Movimiento oscilatorio	70
3.1. Ejemplos introductorios	70
3.2. Oscilaciones armónicas	70
3.2.1. Oscilación armónica libre	71
3.3. Aproximaciones de un desplazamiento cualquiera a una oscilación armónica simple	72

3.4.	Preliminares de ecuaciones diferenciales ordinarias	77
3.5.	Resolución de la ecuación	78
3.6.	Oscilación armónica simple	79
3.6.1.	Deducción en la forma compleja	79
3.7.	Oscilaciones amortiguadas	82
3.7.1.	Amortiguamiento débil	83
3.7.2.	Energía	83
3.8.	Oscilaciones amortiguadas	84
3.8.1.	Amortiguamiento débil	84
3.8.2.	Amortiguamiento fuerte	84
3.8.3.	Amortiguamiento crítico	85
3.8.4.	Comparación entre todo los tipos de amortiguamiento	85
3.8.5.	Ejemplos	86
3.9.	Ejemplo resumen	86
3.10.	Oscilaciones forzadas. Resonancia	87
3.10.1.	Fijación de ω_1 y cambio de ω_0	88
3.10.2.	Fijación de ω_0 y cambio de ω_1	88
3.11.	Caso de varias fuerzas periódicas, cada una con una frecuencia diferente	89
3.12.	Oscilador armónico isótropo	90
4.	Fuerzas centrales conservativas	94
4.1.	Leyes de conservación	94
4.1.1.	Fuerzas centrales	94
4.1.2.	Fuerzas conservativas	95
4.1.3.	Parámetros de un movimiento con una fuerza central conservativa	95
4.1.4.	Ejemplo: caso del oscilador armónico isótropo	96
4.1.5.	Cambio de órbitas, caso particular: oscilador armónico isótropo en órbita circular	97
4.2.	Ley cuadrática inversa	98
4.3.	Órbitas	100
4.3.1.	Caso particular	101
4.3.2.	Valores de la excentricidad e	102
4.3.3.	Nota sobre hipérbolas	104
4.4.	Obtención de la ecuación en cartesianas	105
4.4.1.	Para la parábola	105
4.4.2.	Para elipses e hipérbolas	105
4.5.	Periodo de la órbita elíptica	107
4.6.	Impulsos radiales	108
4.7.	Dispersión de partículas	110
5.	El problema de dos cuerpos	113
5.1.	Sistema de referencia centro de masas	115
5.2.	Interacción gravitatoria	116
5.3.	Colisiones elásticas	117
5.3.1.	Repaso de primero	117
5.3.2.	Colisiones elásticas	117
5.3.3.	¿Siguiente sección?	119
5.4.	Secciones eficaces (Sistemas centro de masas y laboratorio)	120
5.5.	Colisión elástica de dos bolas de billar \equiv esferas rígidas de la misma masa	122
5.6.	Dispersión de Rutherford de $m_1 = m_2$ y $q_1 = q_2 = e$	123

6. Sistemas de referencia no inerciales	124
6.1. Caso particular $\vec{R} = \vec{0}$ y $\vec{r} = \vec{r}'$	124
6.1.1. Caso particular $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$	126
6.1.2. Vectores constantes para S'	126
6.1.3. Desplazamiento del origen en el caso de $\vec{\omega}$ constante para S'	126
6.1.4. Vectores no constantes para S'	126
6.2. Comparación de velocidades y aceleraciones	128
6.2.1. Sistemas con origen común	128
6.2.2. Sistemas con distinto origen	129

1. Principios de mecánica

1.1. Introducción

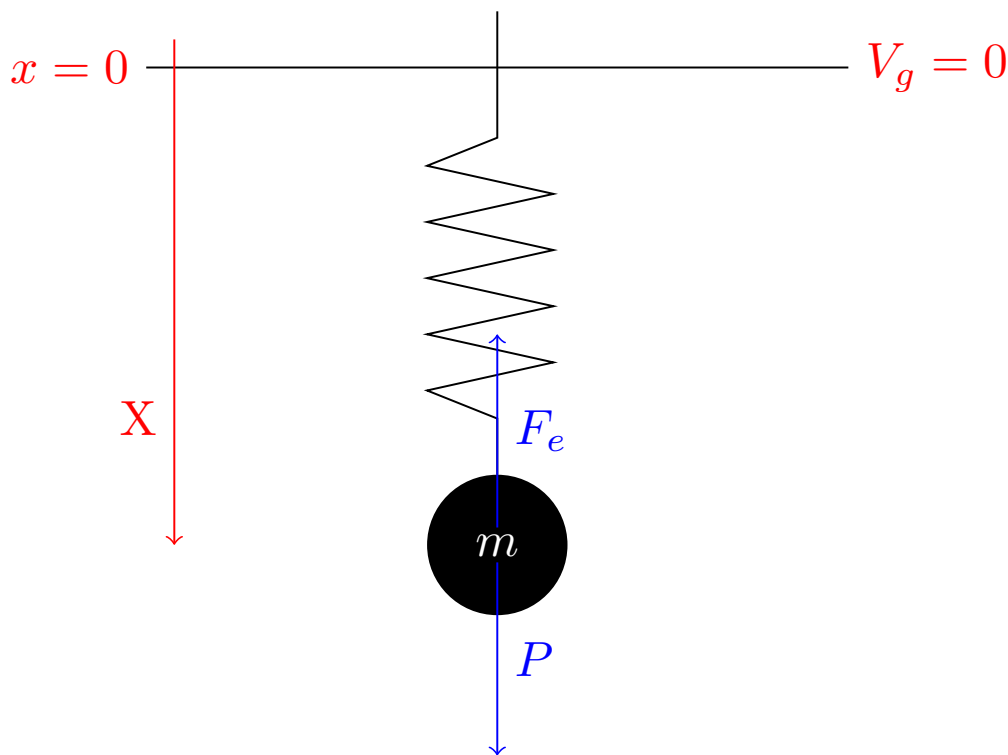
La mecánica Newtoniana se centra en los vectores, como la fuerza y el momento de fuerzas:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{N}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt}$$

Sin embargo, también podemos centrarnos en escalares mediante los conceptos: trabajo W , energía potencial V y energía cinética T . Iremos desarrollando este otro enfoque a lo largo del curso.

Ejercicio 1. Tenemos un muelle de masa m y constante k que cuelga del techo. Sobre él actúa la fuerza gravitatoria.



Solución (Resolución por dinámica). Si escogemos el eje x positivo hacia abajo, las dos fuerzas que actúan son $F_e = kx$ y $P = mg$. De esta forma, aplicamos la segunda ley de Newton $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$ y llegamos a la ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + mg$$

Alternativamente, en notación de Newton:

$$m\ddot{x} = -kx + mg$$

Nota 1. En este curso vamos a usar la notación de Newton:

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \quad \ddot{x} \equiv \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Solución (Resolución por energías). Es importante remarcar que todas las fuerzas que actúan son conservativas. Tomamos el origen de referencia para el potencial gravitatorio en la posición de equilibrio $x = 0$. De esta forma, las diferentes expresiones para las energías presentes son:

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

$$V_g = -mgx$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

De esta forma, la energía mecánica es:

$$E_m = V_e + V_g + T = \frac{1}{2}kx^2 - mgx + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Aplicamos el teorema de la energía mecánica $\Delta E_m = W_{FNC}$. Como no hay fuerzas no conservativas, podemos escribir:

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow kx\dot{x} - mg\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow$$

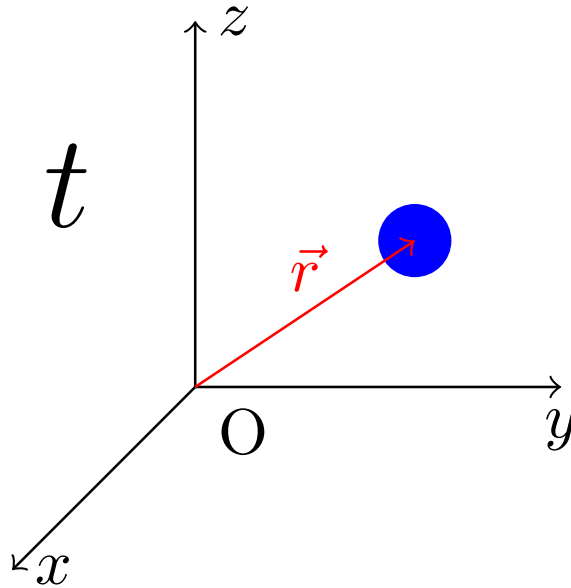
$$\Leftrightarrow \dot{x}(kx - mg + m\ddot{x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ kx - mg + m\ddot{x} = 0 \end{cases}$$

Y llegamos a la misma ecuación del movimiento que por Newton.

1.2. Conceptos básicos: espacio y tiempo

Veamos cómo son los conceptos de espacio y tiempo dentro del ámbito de la mecánica clásica:

1. Son magnitudes continuas.
2. Son magnitudes universales.
3. El tiempo es absoluto (igual para todos los observadores).
4. La geometría del espacio es euclídea.
5. La precisión es infinita.
6. Principio de relatividad: la posición y la velocidad no son absolutas, dependen del observador. Lo importante son la posición y la velocidad relativas. Sin embargo, la aceleración sí es absoluta; siempre que el valor de la aceleración sea nulo, la velocidad es constante, independientemente del sistema de referencia. Dicho de otra forma, no puede distinguirse el movimiento a velocidad constante del reposo y todos los observadores situados en sistemas no acelerados son equivalentes.
7. Sistema de referencia inercial: (en cartesianas) tiene un origen, unos ejes (siempre destrógiros) y un tiempo cumpliendo que la aceleración que sufren es nula. Aquí es donde están en vigor las leyes de Newton.



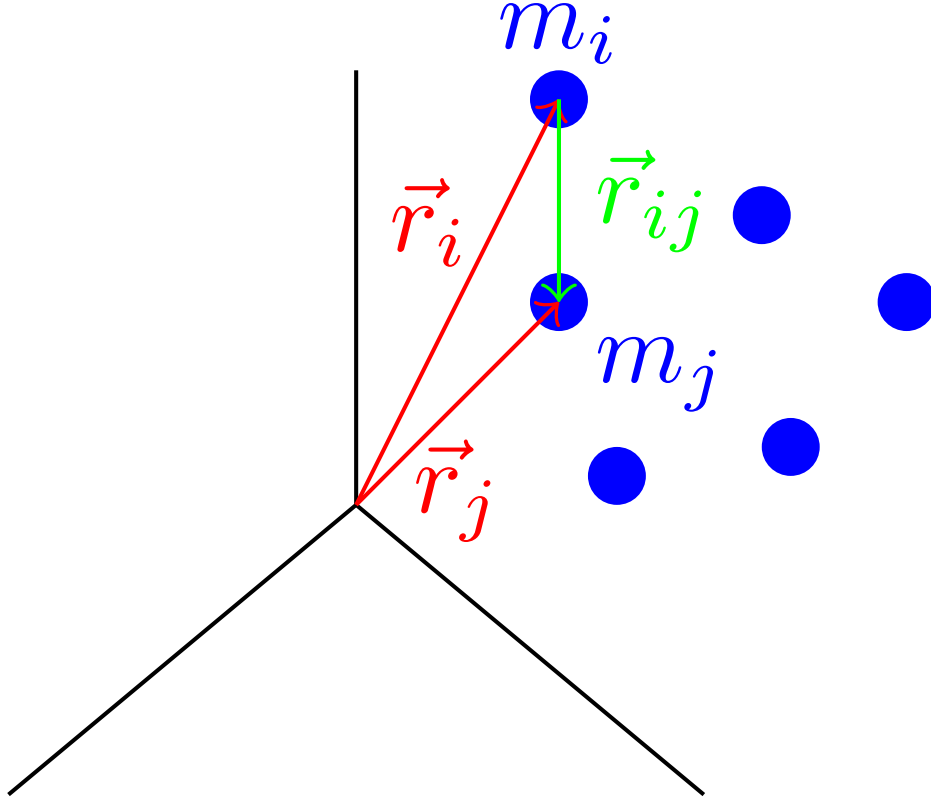
8. Existen magnitudes vectoriales y magnitudes escalares.

1.3. Leyes de Newton

Representaremos las posiciones con \vec{r}_i , las velocidades con $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$ y las aceleraciones con $\vec{a}_i = \dot{\vec{v}}_i = \ddot{\vec{r}}_i$. Es interesante recordar el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{r} & \xrightarrow{\frac{d}{dt}} & \vec{v} & \xrightarrow{\frac{d}{dt}} & \vec{a} \\ & \xleftarrow{\int dt} & & \xleftarrow{\int dt} & \end{array}$$

Imaginemos un sistema con n cuerpos aislados entre sí, cada uno con una masa m_i , entonces las leyes de Newton son las que siguen:



Axioma 1 (Segunda ley de Newton). Sea S un sistema aislado de n cuerpos, de manera que el cuerpo i -ésimo tiene masa m_i y está situado en la posición \vec{r}_i . Entonces, la suma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo i -ésimo es igual al producto de la masa de dicho cuerpo y la aceleración que sufre. Matemáticamente:

$$\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad (1.1)$$

donde

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1; j \neq i}^n \vec{F}_{i \leftarrow j}$$

donde $\vec{F}_{i \leftarrow j}$ es la fuerza que el cuerpo j ejerce sobre el i .

Teorema 1 (Primera ley de Newton: Ley de inercia). Sea C un cuerpo cualquiera. Las siguientes situaciones son equivalentes:

1. La fuerza total que actúa sobre C es nula: $\vec{F} = \vec{0}$.
2. La aceleración que sufre C es nula: $\vec{a} = \vec{0}$.
3. La velocidad del cuerpo C es constante: $\vec{v} = \overrightarrow{cte}$

Alternativamente:

$$\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = \overrightarrow{cte} \quad (1.2)$$

Demostración. Supongamos que el cuerpo C tiene masa $m \neq 0$. Por la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow m\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \int \vec{a} dt = \int \vec{0} dt = \vec{cte} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{cte}$$

Q.E.D.

Axioma 2 (Tercera ley de Newton: ley de acción y reacción). Sea S un sistema de n cuerpos. La fuerza que el cuerpo j -ésimo ejerce sobre el cuerpo i -ésimo tiene mismo módulo y dirección que la fuerza que ejerce el cuerpo i -ésimo sobre el cuerpo j -ésimo; pero tiene sentido contrario. Matemáticamente:

$$\vec{F}_{i \leftarrow j} = -\vec{F}_{j \leftarrow i} \quad (1.3)$$

Observación 1. En general, la fuerza entre dos partículas i y j será función de sus posiciones y velocidades relativas.

$$\vec{F}_{ij} = \mathfrak{F}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{v}_i, \vec{v}_j) = \mathfrak{F}(\vec{r}_{ij}, \vec{v}_{ij})$$

De esta forma, definimos la distancia relativa entre i y j :

$$\vec{r}_{ij} := \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

Y, como consecuencia:

$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_i - \vec{v}_j$$

Nota 2. Usualmente usaremos la notación \vec{F}_{ij} para referirnos a la fuerza que ejerce el cuerpo j -ésimo sobre el i -ésimo. Es decir:

$$\vec{F}_{ij} \equiv \vec{F}_{i \leftarrow j}$$

1.4. Principio de superposición

Proposición 1. El principio de superposición afirma que cuando las ecuaciones de comportamiento que rigen un problema físico son lineales, entonces el resultado de una medida o la solución O de un problema práctico relacionado con una magnitud extensiva asociada al fenómeno, cuando están presentes los conjuntos de factores causantes I_1, \dots, I_k con $k \in \mathbb{N}$, puede obtenerse como la suma de los efectos de cada uno.

Demostración. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal que relaciona dos magnitudes físicas I (input) y O (output). Supongamos, además, que contamos con $k \in \mathbb{N}$ subsistemas tales que cada uno produce una magnitud física de entrada I_u . Queremos calcular cuál es el valor de O . Para ello:

$$O = f(I_1 + \dots + I_k) = f\left(\sum_{u=1}^k I_u\right)$$

Y, como f es lineal por hipótesis:

$$O = \sum_{u=1}^k f(I_u)$$

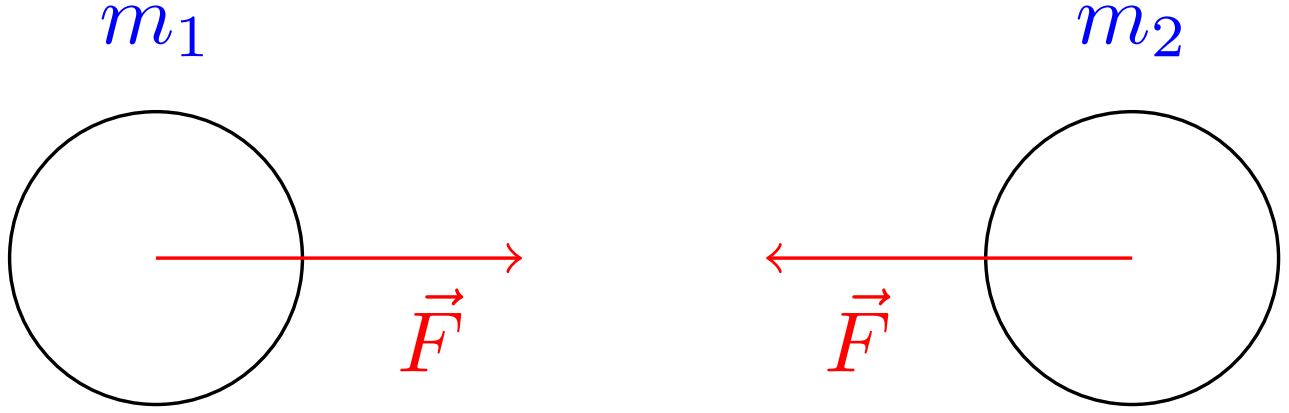
Q.E.D.

1.5. Definición de masa y propiedad aditiva

Definición 1. Llamamos **masa inercial** de un cuerpo C a la resistencia que presenta dicho cuerpo ante un cambio de velocidad (una aceleración), medido desde un sistema de referencia inercial.

Observación 2. Esta definición sólo tiene sentido dentro del ámbito de la mecánica clásica.

Ejemplo 1. Imaginemos que contamos con dos cuerpos de masas m_1 y m_2 que se chocan entre sí:



Tenemos, entonces, por la tercera ley de Newton:

$$F = m_1 \ddot{r}_1 = m_2 \ddot{r}_2 \Leftrightarrow m_2 = m_1 \frac{\ddot{r}_1}{\ddot{r}_2}$$

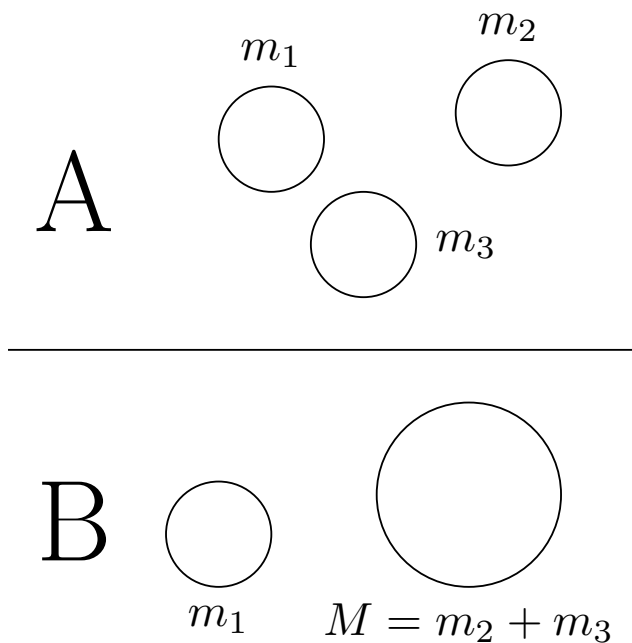
Proposición 2. Sea S_A un sistema con n cuerpos de masas m_1, \dots, m_n tales que todas sufran la misma aceleración $\vec{A} := \ddot{r}_1 = \dots = \ddot{r}_n$. Sea S_B un sistema con un único cuerpo de masa $M = \sum_{i=1}^n m_i$ que sufre una aceleración \vec{A} . Si \vec{F}_T es la fuerza externa total que sufren las partículas del sistema S_A , entonces la fuerza total que actúa sobre el sistema S_B también es \vec{F}_T , y viceversa. En otras palabras, los sistemas S_A y S_B son equivalentes.

Demostración. La fuerza total que actúa sobre el sistema S_A es, por el principio de superposición:

$$\vec{F}_{T,S_A} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{A} = \vec{A} \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i}_{=M} = M \vec{A} = \vec{F}_{T,S_B}$$

Q.E.D.

Ejemplo 2. Cambiemos ahora a la siguiente situación:



Supongamos en ambas situaciones $\vec{F}_T = 0 \Leftrightarrow m\vec{a} = \vec{0}$; es decir, que no actúan fuerzas externas.

■ Situación A:

Entonces, las fuerzas netas que actúan sobre cada una de las masas de A son:

$$\vec{F}_{T,1} = m_1\vec{a}_1$$

$$\vec{F}_{T,2} = m_2\vec{a}_2$$

$$\vec{F}_{T,3} = m_3\vec{a}_3$$

Usando el principio de superposición:

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 = \vec{0}$$

Si suponemos $\vec{A} = \vec{a}_2 = \vec{a}_3$, la expresión de arriba queda:

$$m_1\vec{a}_1 + (m_2 + m_3)\vec{A} = \vec{0}$$

■ Situación B:

Las fuerzas que actúan son:

$$\vec{F}_{T,1} = m_1\vec{a}_1$$

$$\vec{F}_{T,M} = M\vec{A}$$

De nuevo, principio de superposición:

$$m_1\vec{a}_1 + M\vec{A} = \vec{0}$$

De la última ecuación se sigue:

$$M = m_1 \left(-\frac{a_1}{A} \right) = m_2 + m_3$$

1.6. Preliminares matemáticos

Definición 2. Sea Ω un conjunto abierto de \mathbb{R}^3 y sea $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar tal que $\exists \frac{\partial \varphi}{\partial j}(\vec{r}) \quad \forall j = x, y, z; \forall \vec{r} \in \Omega$. Llamamos **gradiente** de φ a la función vectorial:

$$\begin{aligned} \text{grad} \varphi &\equiv \frac{d}{d\vec{r}} \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi : \quad \Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ \vec{r} &\longrightarrow \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\vec{r}), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\vec{r}), \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\vec{r}) \right) \end{aligned}$$

Definición 3. Sea Ω un conjunto abierto de \mathbb{R}^3 y sea $\vec{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función vectorial tal que $\exists \frac{\partial A_i}{\partial j}(\vec{r}) \quad \forall i, j = x, y, z; \forall \vec{r} \in \Omega$. Llamamos **rotacional** de \vec{A} a la función vectorial:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{A} &\equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} : \quad \Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ \vec{r} &\longrightarrow \quad \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x, A_y, A_z) \right) (\vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} (\vec{r}) \end{aligned}$$

Teorema 2 (Teorema de Stokes). Sea $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función vectorial tal que $\exists \frac{\partial A_i}{\partial j} \quad \forall i, j = x, y, z$ y sea S una superficie abierta. Entonces la integral del rotacional de \vec{A} a lo largo de la superficie S tiene el mismo valor que la integral de \vec{A} a lo largo de la curva C que delimita la superficie abierta S .

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (1.4)$$

Insertar dibujo superficie y curva

Teorema 3 (Teorema del gradiente). Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^n y sea $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Sea, además, γ cualquier curva que une dos puntos $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^n$. Entonces, la integral a lo largo de la curva γ del gradiente de φ es igual al valor de la función φ en \vec{q} menos el valor de la función φ en \vec{p} .

$$\varphi(\vec{q}) - \varphi(\vec{p}) = \int_{\gamma(\vec{p}, \vec{q})} \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Proposición 3. Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^3 y sea $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar de clase $C^{(2)}(\Omega, \mathbb{R})$. Entonces el rotacional de su gradiente es la función nula en \mathbb{R}^3 :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = \vec{0}$$

Demostración. Aplicamos la definición:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right)$$

Como la función es de clase $C^{(2)}$, sus derivadas parciales conmutan y, en consecuencia:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

Q.E.D.

1.7. Fuerzas centrales y fuerzas conservativas (1^{era} parte)

1.7.1. Fuerzas centrales

Definición 4 (Fuerza central). Decimos que una fuerza es **central** cuando siempre está dirigida hacia un punto O llamado centro del movimiento. Es decir, sea \vec{R} cualquier punto de \mathbb{R}^3 , entonces:

$$\vec{F} \text{ es central} \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{R}) = \mathfrak{F}(\vec{RO})$$

Nota 3 (Terminología relacionada con \mathfrak{F}). Sean f una función arbitraria, $n \in \mathbb{N}$ y t_1, \dots, t_n variables cualesquiera. Sean $a, b, c \in [1, n] \cap \mathbb{N}$; definimos la siguiente «tabla de equivalencias»:

$$\begin{array}{lll} f = \mathfrak{F}(t_a, t_b) & \longleftrightarrow & f \text{ es función de } t_a \text{ y de } t_b. \text{ Puede ser función de más variables.} \\ f = \mathfrak{F}!(t_a, t_b, t_c) & \longleftrightarrow & f \text{ es únicamente función de } t_a, t_b \text{ y } t_c. \\ f \neq \mathfrak{F}(t_a) & \longleftrightarrow & f \text{ no es función de } t_a. \end{array}$$

Usaremos indistintamente la terminología anterior para referirnos a funciones vectoriales o escalares. Siempre podremos deducir del contexto de qué tipo se trata.

1.7.2. Fuerzas conservativas

Proposición 4. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función vectorial y $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1. Existe una función escalar $V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

2. Para cualquier trayectoria cerrada C se tiene:

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

- 3.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$$

Demostración.

- $3 \Rightarrow 2$:

Sea S cualquier superficie abierta cuya frontera es la curva C .

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0} \Rightarrow \iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) \right) \cdot d\vec{S} = 0$$

Ahora, por el teorema de Stokes (ver 2 en la página anterior), tenemos que lo anterior es equivalente a:

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

- $2 \Rightarrow 1$:

Definamos la función $V(\vec{r})$ como:

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

con \vec{r}_0 algún punto de \mathbb{R}^3 . Nótese que la función anterior está bien definida por la propiedad 2: si la integral a lo largo de un camino cerrado es nula, la integral entre dos puntos no depende del camino escogido (en otras palabras, es única). Ahora, por el teorema del gradiente (3 en la página anterior)

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

- $1 \Rightarrow 3$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}V) = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}V)$$

Y por la proposición 3 en la página anterior, el rotacional de un gradiente es siempre cero, así que:

$$-\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}V) = \vec{0}$$

Definición 5 (Fuerza conservativa). Decimos que una fuerza es **conservativa** si cumplen las propiedades mencionadas en la proposición 4 en la página anterior y es únicamente función de la posición $\vec{F} = \mathfrak{F}!(\vec{r})$.

Observación 3. Las fuerzas centrales y conservativas son función de las distancias relativas de los cuerpos (conservativas) y que van en la dirección de las líneas que unen las partículas (centrales). Es decir, son de la forma:

$$\vec{F}_{ij} = \mathfrak{F}!(r_{ij}) \hat{r}_{ij}$$

1.7.3. Ejemplos de fuerzas centrales conservativas

Tenemos estos tipos:

- Gravitatoria (Ley de Newton de gravitación universal):

Sean m_1, m_2 dos masas y \vec{r}_{12} el vector que va de la masa 1 a la 2, entonces la fuerza que 1 ejerce sobre 2 es:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (1.5)$$

donde $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

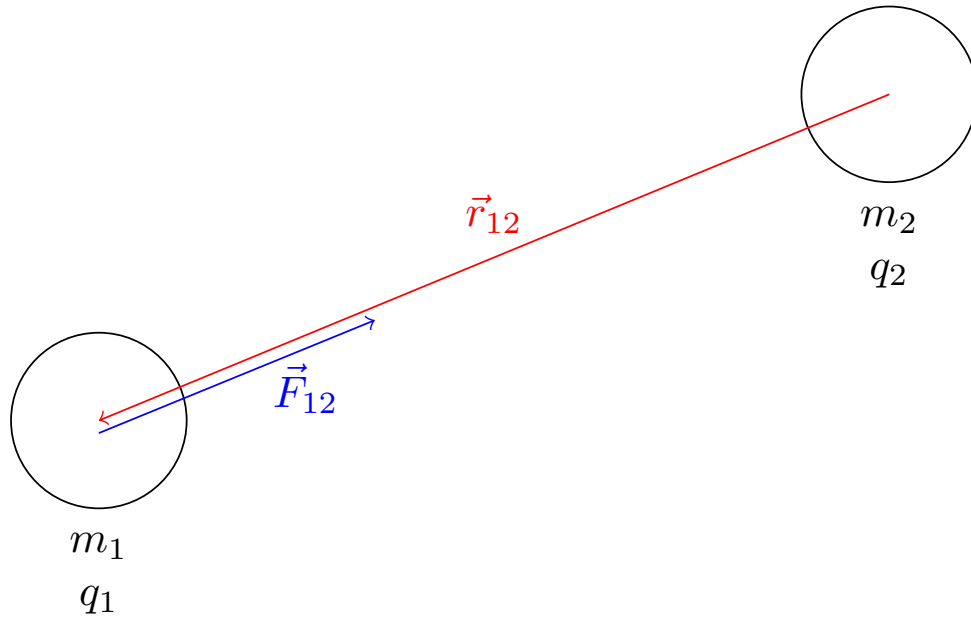
- Electroestática (Ley de Coulomb):

Sean q_1, q_2 dos cargas y \vec{r}_{12} el vector que va de la carga 1 a la carga 2, entonces la fuerza que 1 ejerce sobre 2 es:

$$\vec{F}_{21} = K \frac{q_1q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (1.6)$$

donde $K = 8,99 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$.

Podemos verlo gráficamente en:

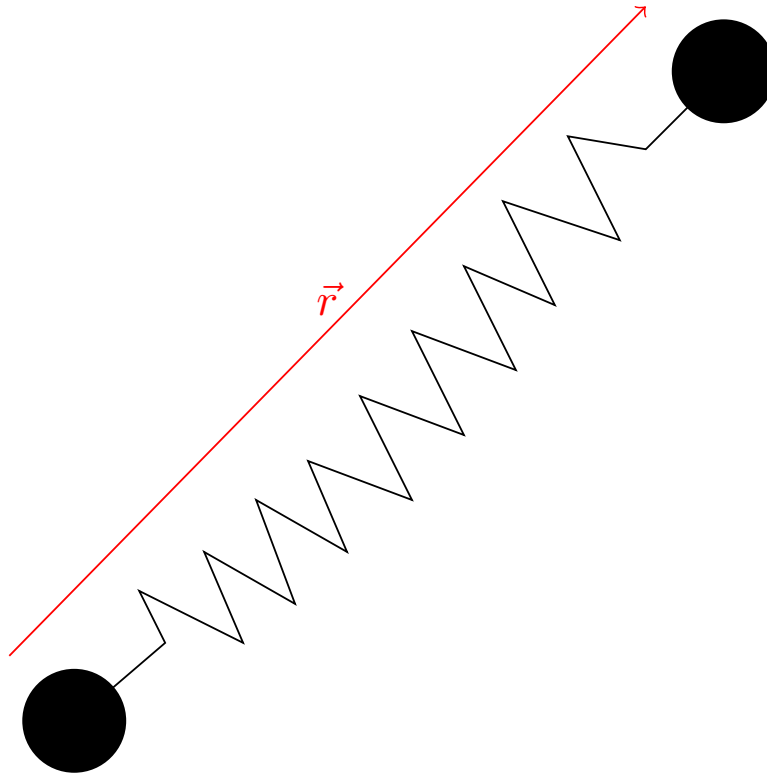


Nota 4. ¡Ojo! Con \vec{F}_{12} nos referimos a la fuerza que 2 hace sobre 1.

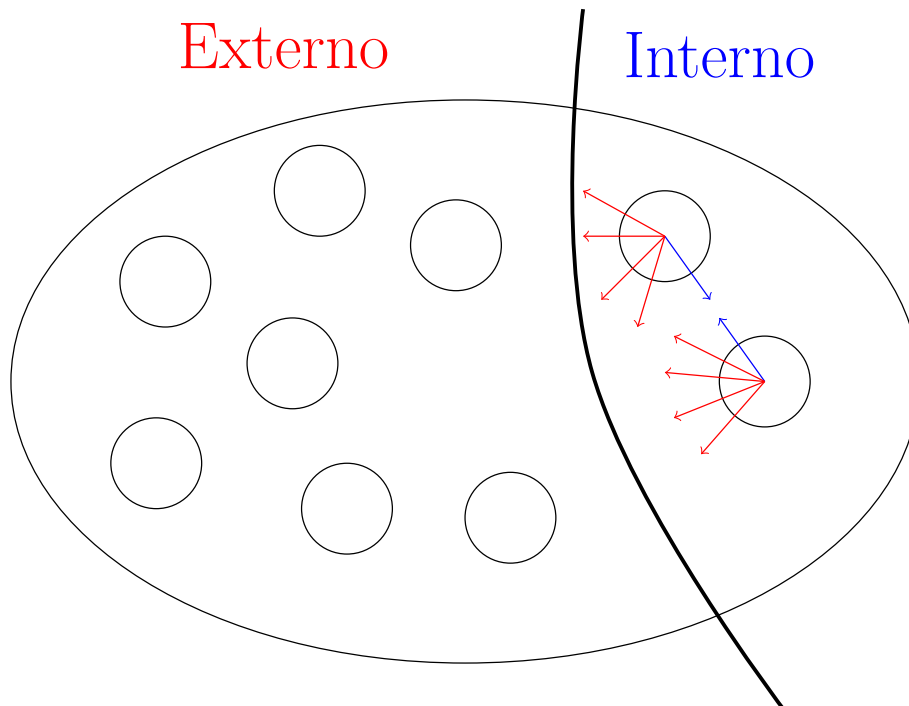
- Oscilador armónico isótropo:

$$\vec{F} = -k\vec{r} = -kr\hat{r} \quad (1.7)$$

Gráficamente:



Consideremos un sistema de partículas. Así tenemos fuerzas internas y externas, como podemos ver en el dibujo:



Definición 6. Llamamos **fuerzas externas** a las ejercidas por cuerpos ajenos al sistema que estamos considerando, mientras que llamamos fuerzas internas a las que ejercidas entre las partículas del sistema estudiado.

1.8. Ligaduras

Definición 7. Una **ligadura** es una condición que limita el movimiento relativo de las partículas. Normalmente, éstas vendrán dadas por ecuaciones matemáticas de la siguiente forma:

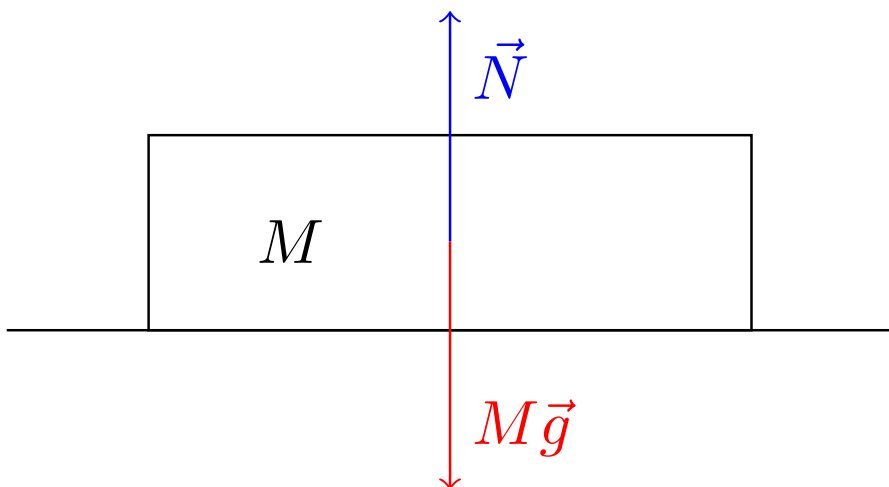
$$G(q, \dot{q}, t) = 0$$

donde G es una función que depende de una variable q (una coordenada generalizada, veremos lo que significa eso más adelante), de su derivada y del tiempo.

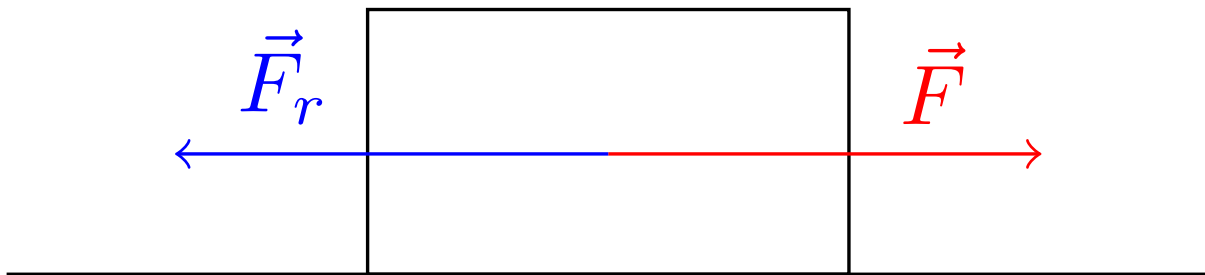
Definición 8. Llamamos **fuerza de ligadura** a aquella que impone una ligadura en el movimiento de una partícula.

Ejemplos de fuerzas de ligadura son las siguientes:

- La normal, que en nuestro ejemplo impone la condición $y = y_0$ donde $y_0 \in \mathbb{R}$:



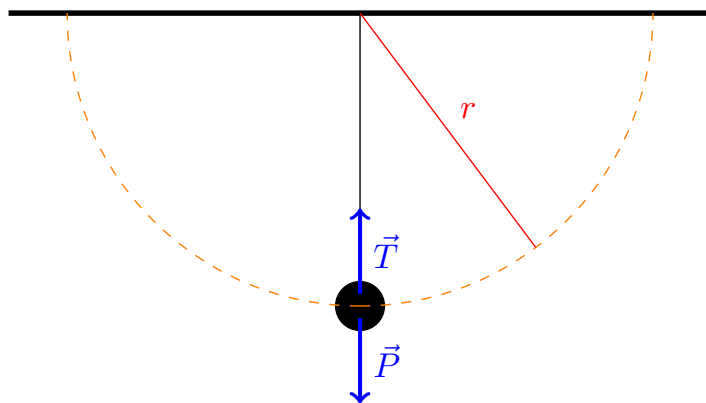
- La fuerza de rozamiento estática:



con la ecuación de ligadura:

$$x = x_0$$

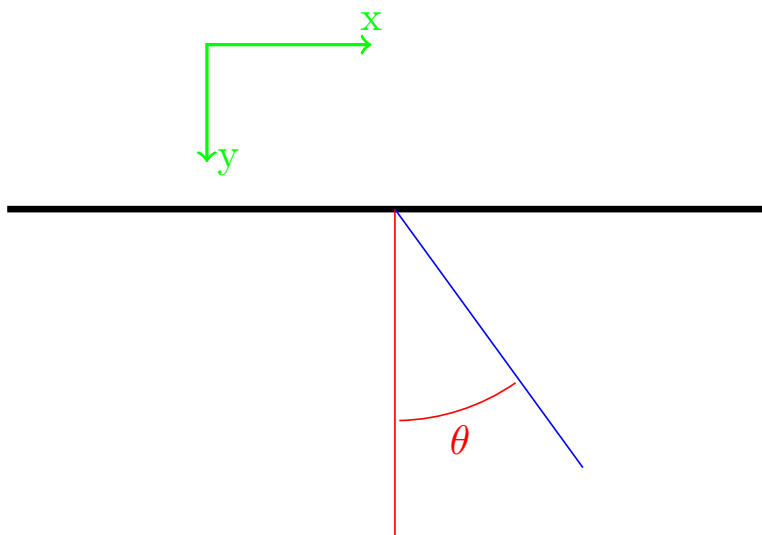
- La tensión:



con la ecuación de ligadura:

$$r = r_0$$

- Una articulación: Consideremos el caso de un sólido rígido (una varilla que cuelga del techo):

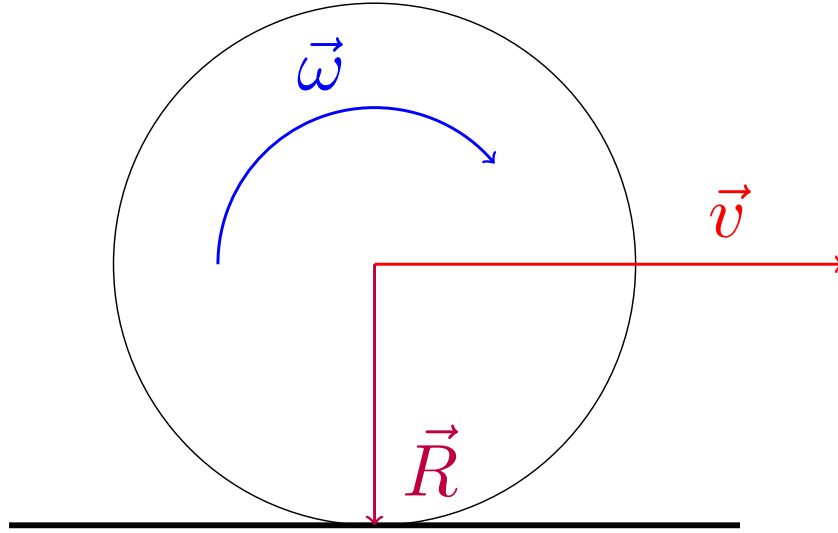


cuyas ecuaciones de ligadura son:

$$y - \frac{L}{2} \cos \theta = 0$$

$$x - \frac{L}{2} \sin \theta = 0$$

- Movimientos de rodadura:



En todos los movimientos en los que se rueda, se cumple:

$$\vec{v}_A = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{R}$$

donde A es el punto de contacto del cuerpo que gira con el suelo. Sin embargo, si no hay deslizamiento, sabemos que $\vec{v}_A = \vec{0}$; de esta forma, obtenemos la ecuación de ligadura:

$$0 = v_A = v - \omega R \Leftrightarrow v = \omega R$$

Integrando, obtenemos:

$$x - \theta R = 0$$

En cada instante de tiempo, el punto que está tocando el suelo (el punto A) es el eje de giro.

1.9. Momento lineal

Definición 9 (Una partícula). El **momento lineal** de una partícula es una magnitud física que describe la tendencia de una partícula a continuar con su estado de movimiento, indicando la dirección y el sentido de aquél. Matemáticamente, el momento lineal de una partícula de masa m y posición \vec{r} se define como:

$$\vec{p} := m\dot{\vec{r}} \quad (1.8)$$

Corolario 1. La fuerza que actúa sobre una partícula coincide con la derivada de su momento lineal con respecto al tiempo.

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

Demostración.

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = m \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}) = \frac{d}{dt} (m\dot{\vec{r}}) = \frac{d}{dt} (\vec{p}) \equiv \dot{\vec{p}}$$

Q.E.D.

Definición 10 (n partículas). Definimos el **momento lineal total** de un sistema de partículas como la suma de los momentos lineales de cada una de las partículas que lo forman.

$$\vec{P} := \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}} \quad (1.9)$$

donde $\dot{\vec{R}}$ representa la velocidad del centro de masas, siendo \vec{R} la posición del centro de masas:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

y $M = \sum_{i=1}^n m_i$.

Proposición 5. *La suma de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema constituye el cambio del momento lineal del sistema:*

$$\vec{F}^{(e)} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \dot{\vec{P}}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{P}} &= \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \left[\vec{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{i \leftarrow j} \right] = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{i \leftarrow j} = \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \left(\vec{F}_{i \leftarrow j} + \vec{F}_{j \leftarrow i} \right) \end{aligned}$$

Por la tercera ley de Newton (2 en la página 9), $\vec{F}_{i \leftarrow j} = -\vec{F}_{j \leftarrow i}$ y, por consiguiente:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \underbrace{\left(\vec{F}_{i \leftarrow j} + \vec{F}_{j \leftarrow i} \right)}_{=0 \ \forall i,j} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}^{(e)}$$

Q.E.D.

Teorema 4 (Teorema de conservación del momento lineal). *El momento lineal se conserva si y sólo si la suma de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema es cero.*

$$\vec{F}^{(e)} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} = \vec{cte} \quad (1.10)$$

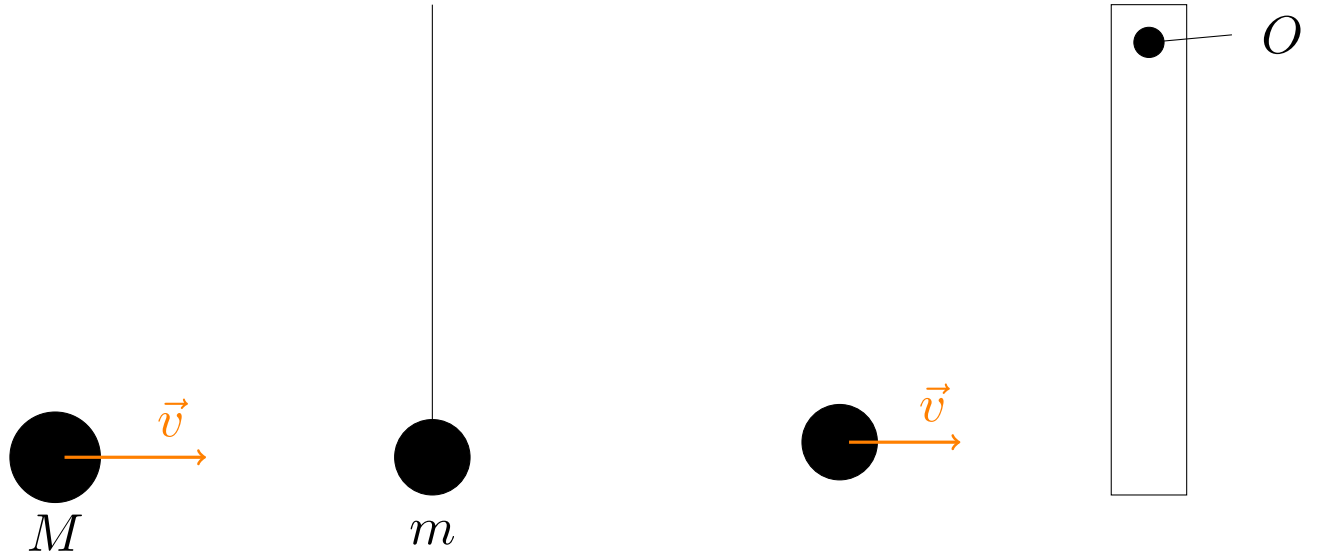
Demostración. La demostración es trivial a partir de la proposición 5.

Q.E.D.

Definición 11 (Impulso lineal). El **impulso lineal** es una magnitud física que representa la variación de momento lineal que se produce en un intervalo de tiempo (normalmente pequeño). Resulta útil para estudiar los choques.

$$\vec{I} := \Delta \vec{p} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}_i(\tau) d\tau$$

Un dibujo para representar estos conceptos:

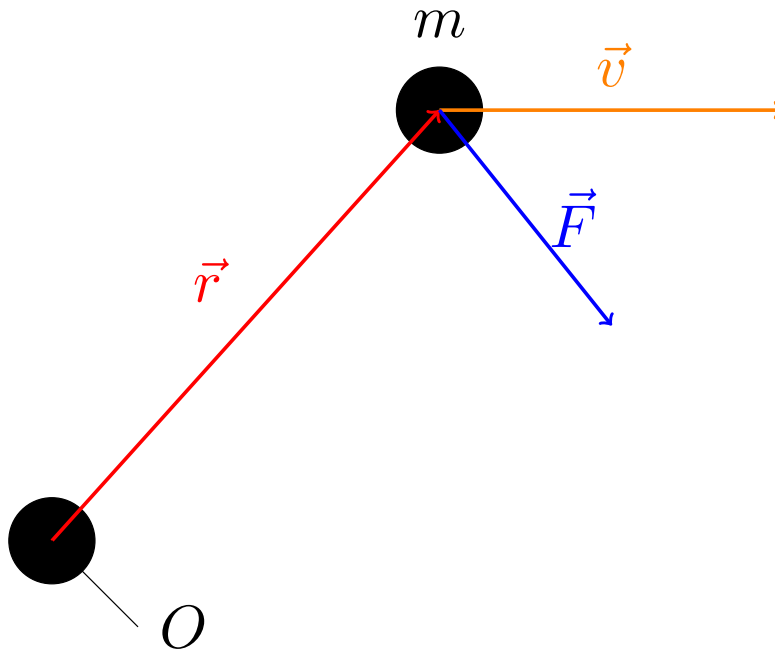


1.10. Momento angular

Definición 12 (Una partícula). Llamamos **momento angular** de una partícula de masa m situada en la posición \vec{r} y con momento lineal \vec{p} desde un punto O a la magnitud física:

$$\vec{L}_O := \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (1.11)$$

Uno puede escoger el punto desde el cual calcular el momento angular. Gráficamente:



Definición 13 (n partículas). Definimos el **momento angular** de un sistema de n partículas respecto al punto O como la suma de los momentos angulares de cada uno de sus integrantes respecto al punto O :

$$\vec{L}_O := \sum_{i=1}^n L_{O,i} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (1.12)$$

Observación 4. Como podemos ver, el momento angular de un sistema de partículas no se puede calcular mediante la posición y velocidad del centro de masas junto con la masa total:

$$\vec{L}_O \neq M\vec{R} \times \dot{\vec{R}}$$

Eso se debe a que $\vec{L}^* \neq \vec{0}$ (veremos lo que esto significa más adelante).

1.11. Momento de fuerzas

Definición 14 (Una partícula). Llamamos **momento de fuerzas** de una partícula situada en el punto \vec{r} , sobre la que actúa una fuerza \vec{F} , desde un punto O a la magnitud física:

$$\vec{N}_O := \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \quad (1.13)$$

Proposición 6. El momento de fuerzas de una partícula medido desde el punto O es igual a la variación de momento angular medida desde el punto O :

$$\vec{N}_O = \dot{\vec{L}}_O$$

Demostración. Por la definición de momento angular para una partícula (12):

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{p}}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{p}}}_{=m\dot{\vec{r}}} + \underbrace{\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}}_{=\vec{0}} = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}_{=\vec{0}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}_O$$

Q.E.D.

Definición 15 (n partículas). Definimos el **momento de fuerzas** para n partículas como la suma de los momentos de fuerza de cada una de las partículas que componen el sistema:

$$\vec{N}_O^{(e)} := \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \dot{\vec{L}}_O \quad (1.14)$$

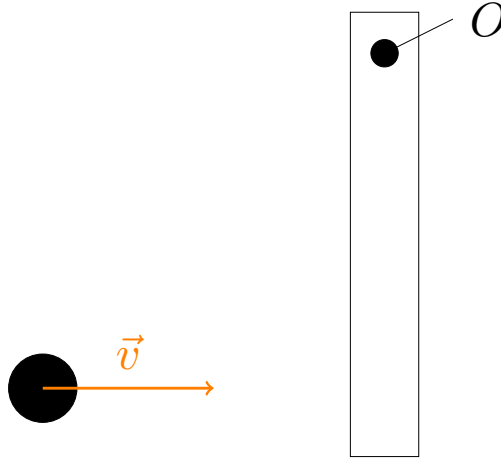
Teorema 5 (Teorema de conservación del momento angular). El momento total de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema es nulo si y sólo si el momento angular del sistema permanece constante.

$$\vec{N}_O^{(e)} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{L}_O = \vec{cte}$$

Demostración. La demostración es inmediata a partir de la proposición 6 y de la definición 15.

Q.E.D.

Ejemplo 3. En este caso, se conserva el momento angular desde el punto O :



Definición 16 (Impulso angular). El **impulso angular** es una magnitud física que representa la variación de momento angular que se produce en un intervalo de tiempo (normalmente pequeño).

$$\Delta \vec{L}_O := \int_t^{t+\Delta t} \vec{N}_O(\tau) d\tau$$

1.12. Energía

1.12.1. Energía cinética E_C , T

Definición 17. Llamamos **energía cinética** a la que posee un cuerpo debido a su movimiento. Matemáticamente, definimos la energía cinética de un cuerpo de masa m y posición \vec{r} como:

$$T := \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \quad (1.15)$$

Observación 5. En coordenadas cartesianas la expresión de la energía cinética queda:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

1.12.2. Trabajo de una fuerza

Definición 18. Sean $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3$. Llamamos **trabajo de una fuerza** \vec{F} a la energía que transfiere la fuerza al cuerpo para desplazarlo entre la posición inicial \vec{r}_1 y la posición final \vec{r}_2 :

$$W_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} := \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.16)$$

Teorema 6 (Teorema de la energía cinética o teorema de las fuerzas vivas). *El trabajo realizado por la fuerza neta que actúa sobre una partícula entre una posición \vec{r}_1 y una posición \vec{r}_2 es igual al incremento de energía cinética de la partícula entre las posiciones \vec{r}_1 y \vec{r}_2 :*

$$W_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} = T_{\vec{r}_2} - T_{\vec{r}_1} = \Delta T \quad (1.17)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} W_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}) d\vec{r} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d(\dot{\vec{r}}) \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{=\dot{\vec{r}}} = \\ &= m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \dot{\vec{r}} d(\dot{\vec{r}}) = m \left[\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right]_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_2^2 - \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_1^2 = T_{\vec{r}_2} - T_{\vec{r}_1} \end{aligned}$$

Q.E.D.

1.12.3. Energía potencial E_p , V

Definición 19. Llamamos **energía potencial** a la energía asociada a la posición de un cuerpo dentro de un campo de fuerzas conservativo. Matemáticamente viene dada por una función que depende únicamente de la posición y denominamos energía potencial $V(\vec{r})$ con referencia en \vec{r}_0 a:

$$V(\vec{r}) := - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.18)$$

Observación 6. Nótese cómo la función $V(\vec{r})$ de la definición anterior sólo está bien definida si la fuerza \vec{F} es conservativa. Si la fuerza \vec{F} no fuese conservativa, el valor de la integral $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ no sería único, dependería del camino escogido.

Observación 7. En la definición anterior hemos tomado el punto \vec{r}_0 como punto de referencia y \vec{F} no depende ni de t ni de v . Nótese que $V(\vec{r})$ no es un incremento; es una función que definimos como el resultado de la integral, cuyo extremo inferior está siempre fijo y viene con la definición de V . Hacemos esto para poder decir que la función V toma un valor para cada punto de \mathbb{R}^3 ; lo cual no tendría sentido si fuese un incremento.

Observación 8. La energía potencial asociada a una fuerza conservativa no es única. Pero todas ellas difieren únicamente en una constante que depende del \vec{r}_0 tomado para la definición de la energía potencial.

Corolario 2. Sean \vec{r}_1, \vec{r}_2 dos puntos de \mathbb{R}^3 y sean \vec{F} una fuerza conservativa y V uno de sus potenciales asociados. La diferencia de energía potencial entre los puntos \vec{r}_2 y \vec{r}_1 coincide con el opuesto del valor del trabajo que realiza la fuerza \vec{F} asociada al potencial V para desplazar el cuerpo de la posición \vec{r}_1 a la posición \vec{r}_2 y también coincide con la diferencia entre la energía cinética inicial (posición \vec{r}_1) y final (posición \vec{r}_2).

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = -W_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} = T_{\vec{r}_1} - T_{\vec{r}_2}$$

Alternativamente, se usa la notación resumida:

$$\Delta V = -W = -\Delta T$$

Demostración. Por definición de energía potencial, tenemos:

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ahora, por la definición de trabajo (18 en la página anterior):

$$- \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2}$$

Por último, por el teorema de la energía cinética (6 en la página anterior):

$$-W_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} = -(T_{\vec{r}_2} - T_{\vec{r}_1}) = T_{\vec{r}_1} - T_{\vec{r}_2}$$

Q.E.D.

1.12.4. Energía mecánica E_m , E

Definición 20 (Energía mecánica). Llamamos **energía mecánica** a la capacidad de un cuerpo de producir un trabajo mecánico debido a su posición o su velocidad. Matemáticamente, es la suma de la energía cinética y potencial de dicho cuerpo.

$$E_m := T + V \tag{1.19}$$

Teorema 7 (Teorema de conservación). La energía total de un cuerpo no varía con el tiempo si y sólo si la fuerza total que actúa sobre él es conservativa.

$$\boxed{\vec{F} \text{ es conservativa} \Leftrightarrow E = \text{cte}} \tag{1.20}$$

Demostración.

Q.E.D.

■ \Rightarrow :

Sean \vec{r}_1, \vec{r}_2 dos puntos de \mathbb{R}^3 y sea V el potencial asociado a \vec{F} . Por el corolario 2, sabemos que si una fuerza es conservativa, se cumple:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) &= T_{\vec{r}_1} - T_{\vec{r}_2} \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underbrace{V(\vec{r}_2) + T_{\vec{r}_2}}_{=E_{\vec{r}_2}} &= \underbrace{V(\vec{r}_1) + T_{\vec{r}_1}}_{=E_{\vec{r}_1}} \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow E_{\vec{r}_2} = E_{\vec{r}_1} \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow E = \text{cte} \end{aligned}$$

■ \Leftarrow :

Definimos:

$$V_{\vec{r}_2} := E - T_{\vec{r}_2}$$

$$V_{\vec{r}_1} := E - T_{\vec{r}_1}$$

Si estudiamos:

$$V_{\vec{r}_2} - V_{\vec{r}_1} = -T_{\vec{r}_2} + T_{\vec{r}_1} = -(T_{\vec{r}_2} - T_{\vec{r}_1})$$

Por el teorema de la energía cinética (6 en la página 22):

$$V_{\vec{r}_2} - V_{\vec{r}_1} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ahora bien, como la resta $V_{\vec{r}_2} - V_{\vec{r}_1}$ únicamente depende de \vec{r}_2 y \vec{r}_1 , la integral también debe depender únicamente de \vec{r}_2 y \vec{r}_1 . En consecuencia, la mencionada integral no puede depender del camino escogido. En cuyo caso es:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

para cualquier curva cerrada C y, por consiguiente, la fuerza \vec{F} es conservativa.

Corolario 3. *La energía total de un sistema de partículas S con n partículas se conserva si todas las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas. El recíproco no es cierto, en general.*

Demostración. Por el principio de superposición (ver proposición 1 en la página 9), puede tratarse un sistema de varias partículas como la suma de varios subsistemas de una partícula. Por tanto, la energía total del sistema es:

$$E_T = \sum_{i=1}^n E_i$$

Ahora, estudiamos:

$$\dot{E}_T = \sum_{i=1}^n \dot{E}_i$$

Como todas las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas del sistema son conservativas, tenemos por el teorema anterior que $E_i = \text{cte} \Rightarrow \dot{E}_i = 0$; y esto se cumple $\forall i = 1, \dots, n$. En consecuencia:

$$\dot{E}_i = 0 \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \dot{E}_T = 0 \Leftrightarrow E_T = \text{cte}$$

Q.E.D.

Observación 9. En general, no es necesario que todas las fuerzas que actúan sobre una partícula sean conservativas para que la fuerza total que actúa sobre la partícula sea conservativa. Por ejemplo, si tenemos un cuerpo que se desliza en un plano inclinado sin rozamiento, sobre él actúan dos fuerzas, el peso y la normal, la primera es conservativa, pero la segunda no. Sin embargo, su suma es conservativa, pues la normal no hace trabajo.

1.13. Fuerzas conservativas (2ª parte)

Proposición 7. *La energía potencial V asociada a una fuerza conservativa \vec{F} no puede depender explícitamente del tiempo t .*

Demostración. Demostramos que es condición necesaria para que la fuerza sea conservativa que la función V no dependa explícitamente del tiempo. Supongamos que se cumple $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$. Ahora bien, supongamos que nuestra función V es de la forma $V(x(t), y(t), z(t), t)$. Entonces, su derivada con respecto del tiempo es:

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V} := \sum_{j=x,y,z,t} \frac{\partial V}{\partial j} \frac{\partial j}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial V}{\partial t} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} V + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Por otra parte:

$$\dot{T} = m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} + m\dot{z}\ddot{z} = m\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}$$

Calculemos $\dot{E}_m = \dot{T} + \dot{V}$. Si la fuerza es conservativa, debe ser cero:

$$\dot{T} + \dot{V} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} + \dot{\vec{r}} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} V}_{-\vec{F}} + \frac{\partial V}{\partial t} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Por tanto:

$$\dot{E}_m = 0 \Leftrightarrow \dot{T} + \dot{V} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Es decir, nuestra función V no puede depender directamente del tiempo para ser conservativa.

Q.E.D.

Conclusión 1.

$$\boxed{\vec{F} \text{ es conservativa} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{F} = \mathfrak{F}'(\vec{r}) \end{cases}} \quad (1.21)$$

Ejercicio 2. Ver si la siguiente fuerza es conservativa y calcular su potencial asociado (si existe):

$$\vec{F} = 6xy\hat{i} + 3x^2\hat{j} + 4z\hat{k}$$

Solución. Para ello, calculamos su rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (6x - 6x)\hat{i} + (0 - 0)\hat{j} + (0 - 0)\hat{k} = \vec{0}$$

El rotacional es nulo y obviamente $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = 0$; en consecuencia \vec{F} no depende explícitamente ni del tiempo ni de la velocidad, luego la fuerza es conservativa.

Nuestro siguiente objetivo es calcular el potencial. Para ello, sabemos:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

Hacemos la «integral» a ambos lados y obtenemos:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r} = - \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y_0, z_0)} F_x dx - \int_{(x, y_0, z_0)}^{(x, y, z_0)} F_y dy - \int_{(x, y, z_0)}^{(x, y, z)} F_z dz = \\ &= - \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y_0, z_0)} 6xy dx - \int_{(x, y_0, z_0)}^{(x, y, z_0)} 3x^2 dy - \int_{(x, y, z_0)}^{(x, y, z)} 4z dz = \\ &= - [3x^2 y]_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y_0, z_0)} - [3x^2 y]_{(x, y_0, z_0)}^{(x, y, z_0)} - [2z^2]_{(x, y, z_0)}^{(x, y, z)} = \\ &= 3x_0^2 y_0 - 3x^2 y_0 + 3x^2 y_0 - 3x^2 y + 2z_0^2 - 2z^2 \end{aligned}$$

Observación 10. Podemos descomponer la integral vectorial en tres integrales escalares, pues al ser la fuerza conservativa, el trabajo no va a depender del camino escogido; eso quiere decir que podemos escoger el camino que hace que realizar la integral sea más sencillo.

Alternativamente, podemos hallar el potencial a través de las ecuaciones:

$$F_x = \frac{dV}{dx} = 6xy \Rightarrow V = 3x^2 y + k(x_0, y_0, z_0)$$

$$F_y = \frac{dV}{dy} = 3x^2 \Rightarrow V = 3x^2y + k(x_0, y_0, z_0)$$

$$F_z = \frac{dV}{dz} = 4z \Rightarrow V = 2z^2 + k(x_0, y_0, z_0)$$

Luego si hacemos $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, obtenemos una solución:

$$V = -3x^2y - 2z^2$$

Ejemplo 4. Tenemos una partícula de masa m , que sufre una fuerza:

$$F = -cx^3$$

donde $c > 0$. También conocemos $\dot{x}(x=a) = 0$. Nos piden hallar la velocidad de la partícula cuando $x = 0$. Calculemos la energía potencial:

$$V(x) = - \int_{x_0}^x F dx = \int_{x_0}^x c\chi^3 d\chi = \frac{c}{4} (x^4 - x_0^4) = \frac{c}{4} x^4 + C$$

donde C es una constante. Como la fuerza es conservativa, sabemos que:

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{cx^4}{4} = \text{cte}$$

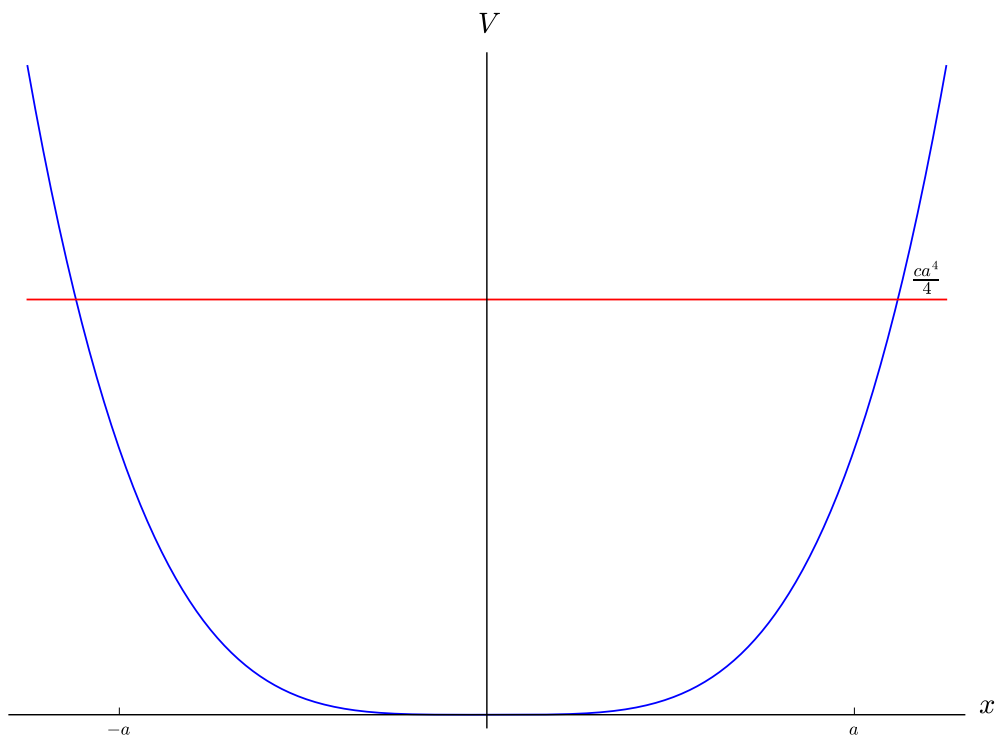
Si evaluamos en $x = a$, podemos hallar el valor de la energía:

$$E_m = \frac{ca^4}{4}$$

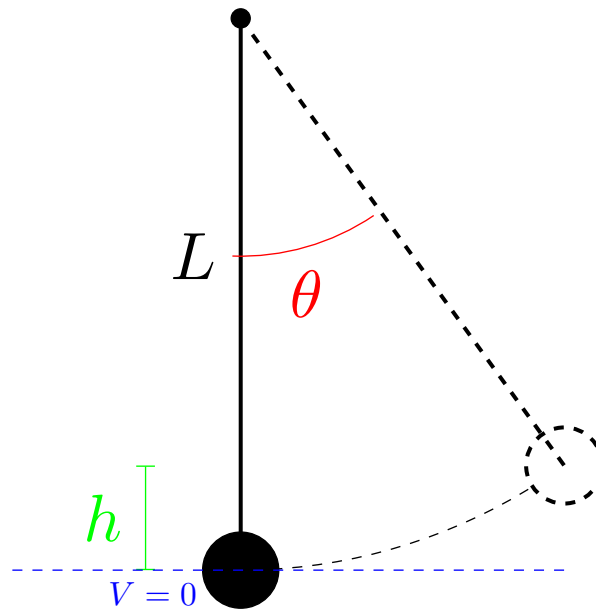
Queremos calcular la velocidad cuando $x = 0$:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = \frac{ca^4}{4} \Leftrightarrow v_0 = a^2 \sqrt{\frac{c}{2m}}$$

Veamos la situación gráficamente:



Ejemplo 5. Tenemos un péndulo simple; es decir una varilla con masa nula y de longitud L . De la varilla cuelga una partícula de masa m .



$$h = L - L \cos \theta$$

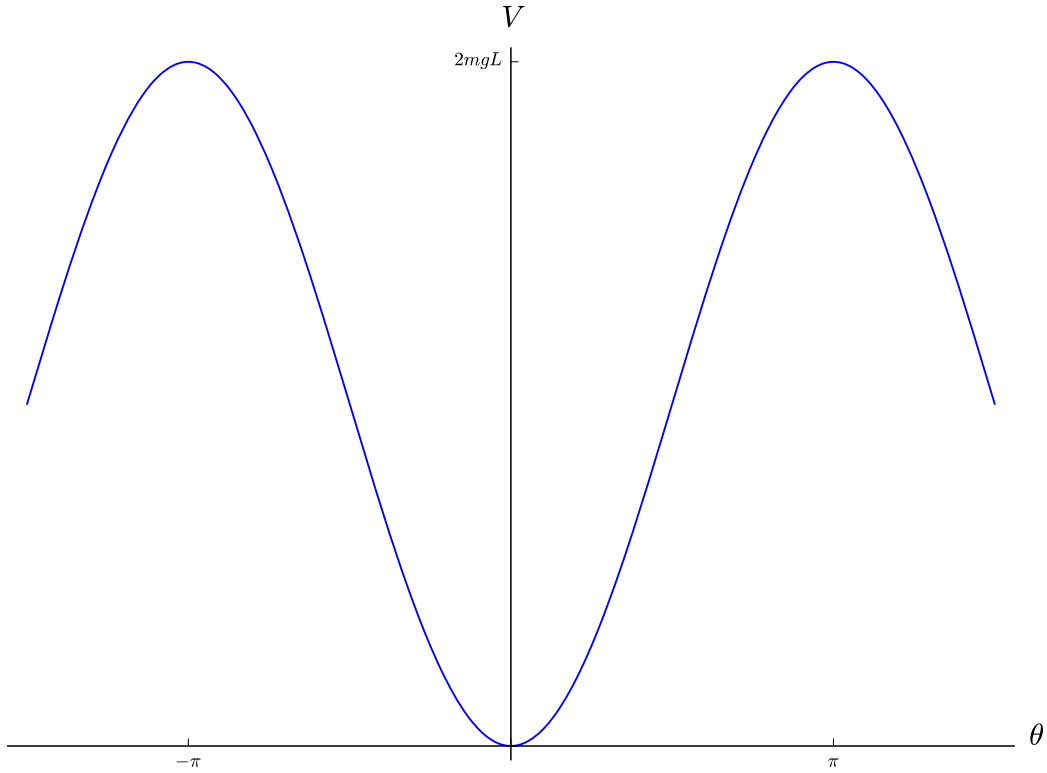
Ejemplo 6. Tenemos un alambre rígido sin masa de longitud L . Nos piden determinar los tipos de movimiento en función de v . Estudiamos la energía potencial:

$$V = mgh = mg(L - L \cos \theta)$$

Vemos que:

$$\begin{aligned} \theta = 0 &\Rightarrow V = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow V = mgL \end{aligned}$$

Si pintamos la gráfica V en función de θ , obtenemos un función sinusoidal.



Examinamos el intervalo $[-\pi, \pi]$. Calculemos la energía total:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) = E(\theta = 0) = \frac{1}{2}mv^2 = V(\theta_{\text{máx}}) = mgL(1 - \cos \theta_{\text{máx}}) \Leftrightarrow$$

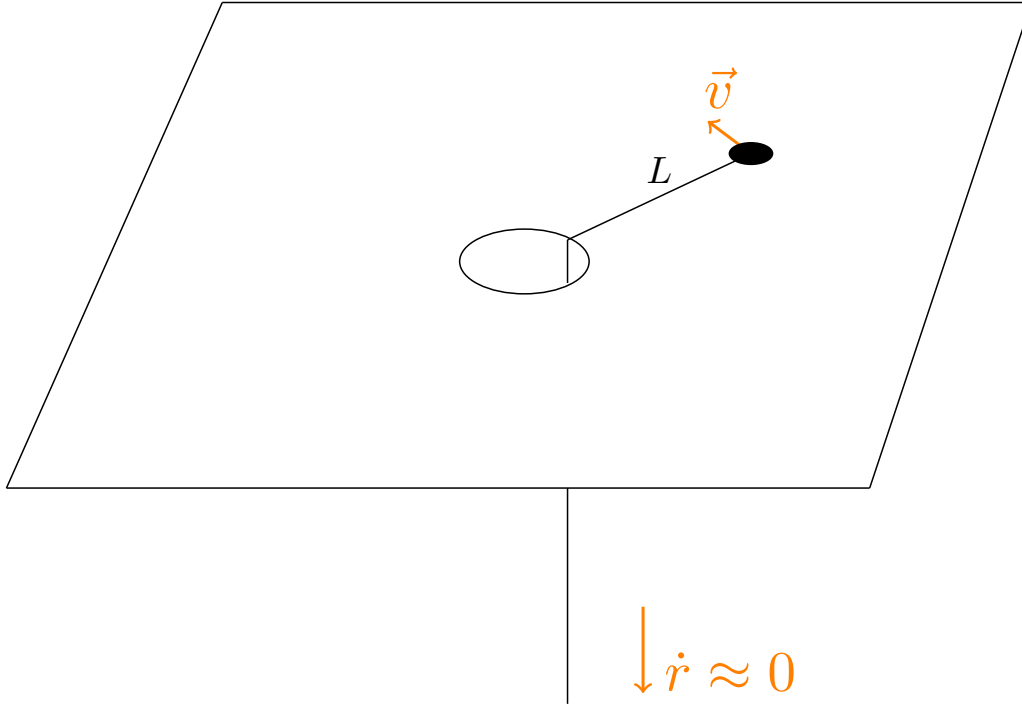
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}v^2 = gL - gL \cos \theta_{\text{máx}} \Leftrightarrow gL \cos \theta_{\text{máx}} = gL - \frac{1}{2}v^2 \Leftrightarrow \cos \theta_{\text{máx}} = 1 - \frac{v^2}{2gL}$$

Si la energía es justo $E = 2mgL$, la bola llegará arriba con $v = 0$. Si $E > 2mgL$, entonces la bola llegará con $v > 0$ y continuará girando.

Examinemos qué ocurriría si el alambre fuese una cuerda. En ese caso, tendríamos una tensión. Visto de otra forma, la distancia entre el punto de anclaje y la bola es constante en el caso del alambre mientras que puede variar en el caso de la cuerda. Es decir:

$$\begin{array}{ll} \text{alambre:} & \dot{r} = 0 \\ \text{cuerda:} & \dot{r} \leq 0 \end{array}$$

Ejemplo 7. Tenemos:



$$v_0 = \omega_0 L$$

El momento angular se conserva:

$$mL^2\omega_0 = mr^2\omega \Leftrightarrow \omega(r) = \frac{L^2}{r^2}\omega_0$$

Sacamos la tensión:

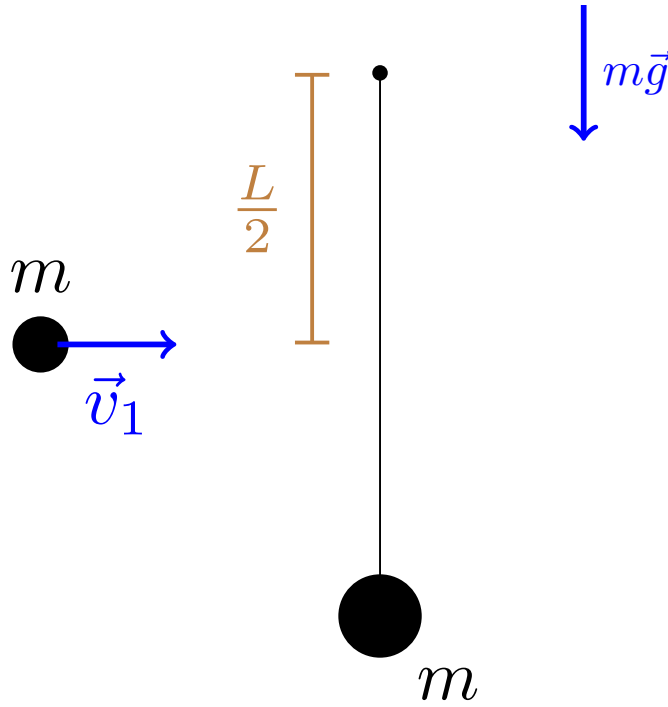
$$T(r) = m\omega^2 r = m\frac{L^4}{r^3}\omega_0^2$$

Ahora tenemos que comprobar que $\Delta T = W_T$.

$$T(r) - T(L) = \frac{1}{2}mr^2\frac{L^4}{r^4}\omega_0^2 - \frac{1}{2}mL^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}mL^2\omega_0^2\left(\frac{L^2}{r^2} - 1\right)$$

$$W_{L \rightarrow r} = \int \vec{T}(\rho) d\rho = - \int_L^r \frac{mL^4\omega_0^2}{\rho^3} d\rho = \left[\frac{mL^4\omega_0^2}{2\rho^2} \right]_L^r = \frac{1}{2}mL^2\omega_0^2\left(\frac{L^2}{r^2} - 1\right)$$

Ejemplo 8. Tenemos una bola que cuelga de una varilla de longitud L y otra bola que impacta con la varilla a distancia $\frac{L}{2}$ del punto de anclaje.



Se conserva el momento angular desde el punto de anclaje, porque todas las fuerzas externas actúan allí. Hallemos el momento inicial y final:

$$L_{0i} = mv_0 \frac{L}{2}$$

$$L_{0f} = m\omega \left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\omega L^2$$

De esta forma, como se conserva el momento angular:

$$mv_0 \frac{L}{2} = m\omega \left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\omega L^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega L \left(\frac{L}{4} + L\right) = v_0 \frac{L}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega = v_0 \frac{4}{5 \cdot 2L} = \frac{2v_0}{5L}$$

Si la varilla tuviera masa, sería un sólido rígido y tendríamos que usar momentos de inercia. Ahora calculemos el momento lineal inicial y el final y veamos si ha ganado o perdido momento el sistema:

$$P_i = mv_0$$

$$P_f = m\omega \left(\frac{L}{2} + L\right) = \frac{3}{2}m\omega L = \frac{3}{2}m \frac{2v_0}{5L} L = \frac{3}{5}mv_0 < mv_0 = P_i$$

Es decir, el momento lineal ha disminuido. Esto implica que la fuerza que ha actuado sobre el punto de anclaje iba hacia la izquierda. Veamos la pérdida habida en energía cinética:

$$E_i = \frac{1}{2} \frac{P_i^2}{m} = \frac{1}{2} mv_0^2$$

$$E_f = \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{L^2}{4} + L^2\right)\left(\frac{2v_0}{5L}\right)^2 = \frac{1}{10}mv_0^2$$

Luego:

$$\Delta T = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\right)mv_0^2 = -\frac{2}{5}mv_0^2$$

2. Cálculo de variaciones. Ecuaciones de Euler-Lagrange

2.1. Expresión de la posición, la velocidad y la aceleración en coordenadas cilíndricas y esféricas (ejercicio para casa)

2.1.1. Coordenadas polares r, φ

Recordemos:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Insertar dibujo coordenadas polares

$$|\vec{R}|^2 = x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2$$

Luego:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin(\varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos(\varphi) \dot{\varphi} \end{cases} \\ + \quad & \begin{aligned} \dot{x}^2 &= \dot{r}^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 - 2\dot{r}r \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{y}^2 &= \dot{r}^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + 2\dot{r}r \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi} \end{aligned} \\ \hline & |\vec{V}|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r} \sin(\varphi) \dot{\varphi} - r [\cos(\varphi) \ddot{\varphi}^2 + \sin(\varphi) \ddot{\varphi}] \\ \ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r} \cos(\varphi) \dot{\varphi} + r [-\sin(\varphi) \ddot{\varphi}^2 + \cos(\varphi) \ddot{\varphi}] \end{cases} \\ \ddot{x}^2 &= \ddot{r}^2 \cos^2 \varphi + 4\dot{r}^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + r^2 [\cos^2(\varphi) \ddot{\varphi}^4 + \sin^2(\varphi) \ddot{\varphi}^2 + 2 \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) \ddot{\varphi}] + \\ & + 4r\dot{r} \sin(\varphi) \dot{\varphi} [\cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \sin(\varphi) \ddot{\varphi}] - 2\ddot{r} \cos \varphi [2\dot{r} \sin(\varphi) \dot{\varphi} + r [\cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \sin(\varphi) \ddot{\varphi}]] \\ + \quad \ddot{y}^2 &= \ddot{r}^2 \sin^2 \varphi + 4\dot{r}^2 \cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + r^2 [\sin^2(\varphi) \ddot{\varphi}^4 + \cos^2(\varphi) \ddot{\varphi}^2 - 2 \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) \ddot{\varphi}] + \\ & + 4r\dot{r} \cos(\varphi) \dot{\varphi} [-\sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi) \ddot{\varphi}] + 2\ddot{r} \sin \varphi [2\dot{r} \cos(\varphi) \dot{\varphi} + r [-\sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi) \ddot{\varphi}]] \\ \hline & |\vec{A}|^2 = \ddot{r}^2 + 4\dot{r}^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \ddot{\varphi}^4 + r^2 \ddot{\varphi}^2 - 2\ddot{r} \dot{\varphi}^2 + 4r\dot{r} \dot{\varphi} \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

2.1.2. Coordenadas cilíndricas r, φ, z

Recordemos:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

Insertar dibujo coordenadas cilíndricas

$$|\vec{R}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + z^2 = r^2 + z^2$$

Luego:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin(\varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos(\varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases} \\ + \quad & \begin{aligned} \dot{x}^2 &= \dot{r}^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 - 2\dot{r}r \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{y}^2 &= \dot{r}^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + 2\dot{r}r \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{z}^2 &= \dot{z}^2 \end{aligned} \\ \hline & |\vec{V}|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r} \sin(\varphi) \dot{\varphi} - r [\cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \sin(\varphi) \ddot{\varphi}] \\ \ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r} \cos(\varphi) \dot{\varphi} + r [-\sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi) \ddot{\varphi}] \\ \ddot{z} = \ddot{z} \end{cases} \\
& \begin{aligned} \ddot{x}^2 &= \ddot{r}^2 \cos^2 \varphi + 4\dot{r}^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + r^2 [\cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^4 + \sin^2(\varphi) \ddot{\varphi}^2 + 2 \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) \ddot{\varphi}] + \\ &+ 4r\dot{r} \sin(\varphi) \dot{\varphi} [\cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \sin(\varphi) \ddot{\varphi}] - 2\ddot{r} \cos \varphi [2\dot{r} \sin(\varphi) \dot{\varphi} + r [\cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \sin(\varphi) \ddot{\varphi}]] \\ + \ddot{y}^2 &= \ddot{r}^2 \sin^2 \varphi + 4\dot{r}^2 \cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + r^2 [\sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^4 + \cos^2(\varphi) \ddot{\varphi}^2 - 2 \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) \ddot{\varphi}] + \\ &+ 4r\dot{r} \cos(\varphi) \dot{\varphi} [-\sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi) \ddot{\varphi}] + 2\ddot{r} \sin \varphi [2\dot{r} \cos(\varphi) \dot{\varphi} + r [-\sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi) \ddot{\varphi}]] \\ \ddot{z}^2 &= \ddot{z}^2 \end{aligned} \\
& \hline
& |\vec{A}|^2 = \ddot{r}^2 + 4\dot{r}^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\varphi}^4 + r^2 \ddot{\varphi}^2 - 2\ddot{r} \dot{\varphi}^2 + 4r\dot{r} \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \ddot{z}^2
\end{aligned}$$

2.1.3. Coordenadas esféricas r, φ, θ

Recordemos:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Insertar dibujo coordenadas esféricas

$$|\vec{R}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta = r^2$$

Luego:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r [\cos(\theta) \dot{\theta} \cos \varphi - \sin \theta \sin(\varphi) \dot{\varphi}] \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r [\cos(\theta) \dot{\theta} \sin \varphi + \sin \theta \cos(\varphi) \dot{\varphi}] \\ \dot{z} = \dot{r} \cos \theta - r \sin(\theta) \dot{\theta} \end{cases} \\
& \begin{aligned} \dot{x}^2 &= \dot{r}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 [\cos^2 \theta \cos^2(\varphi) \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 - 2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos(\varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi}] + \\ &+ 2\dot{r}r \sin \theta \cos \varphi [\cos \theta \cos(\varphi) \dot{\theta} - \sin \theta \sin(\varphi) \dot{\varphi}] \\ + \dot{y}^2 &= \dot{r}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 [\cos^2 \theta \sin^2(\varphi) \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + 2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos(\varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi}] + \\ &+ 2\dot{r}r \sin \theta \sin \varphi [\cos \theta \sin(\varphi) \dot{\theta} + \sin \theta \cos(\varphi) \dot{\varphi}] \\ \dot{z}^2 &= \dot{r}^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2 - 2\dot{r}r \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta} \end{aligned} \\
& \hline
& |\vec{V}|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r} \sin \theta \cos \varphi + 2\dot{r} [\cos(\theta) \dot{\theta} \cos \varphi - \sin \theta \sin(\varphi) \dot{\varphi}] + \\ + r [-\sin(\theta) \dot{\theta}^2 \cos \varphi + \cos \theta [\ddot{\theta} \cos \varphi - \dot{\theta} \sin(\varphi) \dot{\varphi}] - \cos(\theta) \dot{\theta} \sin(\varphi) \dot{\varphi} - \sin \theta [\cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \sin(\varphi) \ddot{\varphi}]] \\ \ddot{y} = \ddot{r} \sin \theta \sin \varphi + 2\dot{r} [\cos(\theta) \dot{\theta} \sin \varphi + \sin \theta \cos(\varphi) \dot{\varphi}] + \\ + r [-\sin(\theta) \dot{\theta} \sin \varphi + \cos \theta [\ddot{\theta} \sin \varphi + \dot{\theta} \cos(\varphi) \dot{\varphi}] + \cos(\theta) \dot{\theta} \cos(\varphi) \dot{\varphi} + \sin \theta [-\sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi) \ddot{\varphi}]] \\ \ddot{z} = \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r} \sin(\theta) \dot{\theta} - r [\cos(\theta) \dot{\theta}^2 + \sin(\theta) \ddot{\theta}] \end{cases}$$

2.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange

2.2.1. Preliminares matemáticos

Definición 21. Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^n y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable (eso significa que existen las derivadas parciales con respecto a todas sus variables). Sea $\vec{a} \in \Omega$. Entonces, llamaremos **diferencial de la función f en el punto \vec{a}** a la aplicación lineal:

$$df(\vec{a}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) x_i$$

donde df representa «diferencial de la función f ».

Alternativamente, podemos definir la aplicación lineal como:

$$df(\vec{a}) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) dx_n$$

donde dx_i es el elemento de la base dual canónica correspondiente a la coordenada x_i .

Definición 22. Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^n y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Llamamos **diferencial de f** a la aplicación lineal:

$$df : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\vec{a} \longmapsto df(\vec{a})$$

donde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ representa el conjunto de aplicaciones lineales entre \mathbb{R}^n y \mathbb{R} .

Definición 23. Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^n y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable que depende de las variables x_1, \dots, x_n . Entonces, llamamos **derivada total de f respecto a una variable t** a:

$$\frac{df}{dt} := df((x_1(t), \dots, x_n(t))) \circ d(x_1(t), \dots, x_n(t)) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \cdot \left(\frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t) \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

Definición 24. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se llama **funcional** a toda aplicación $F : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathbb{K}$ que lleva una función a un cuerpo, donde con \mathcal{F}_n denotamos el anillo de las funciones con n variables y con \mathbb{K} denotamos un cuerpo.

Ejemplos:

$$A : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \longrightarrow f(0)$$

$$B : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \longrightarrow f'(0) e^2$$

donde con $'$ denotamos derivada.

$$C : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \longrightarrow \sum_{i=1}^{10} f(i)$$

$$D : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \longrightarrow \int_{-5}^5 f(x) dx$$

$$E : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

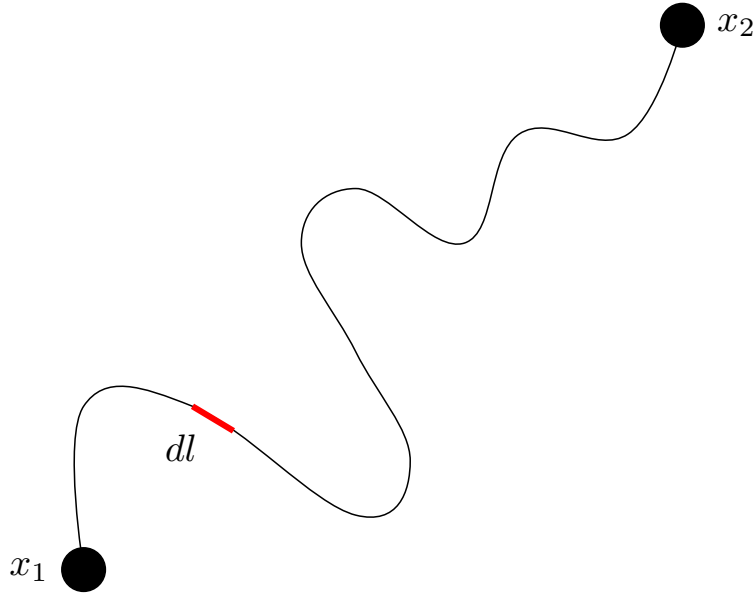
$$f(x) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^3 dx$$

$$\begin{aligned}
F : \mathcal{F}_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
f(x, t) &\longrightarrow \int_{-a}^a \frac{\partial f}{\partial x} \left[f(x, t) + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 \right] dx
\end{aligned}$$

donde con \mathcal{F}_2 denotamos el anillo de funciones de dos variables.

Observación 11. En física, vamos a usar en general funcionales de tipo integral como el D y el E . Por ejemplo, podemos definir un funcional que dada una curva en \mathbb{R}^2 expresada como $\vec{c}(x) = (x, y(x))$, nos devuelva su longitud entre dos puntos $x = x_1$ y $x = x_2$:

$$\begin{aligned}
L : \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x, y(x)) &\longrightarrow \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx
\end{aligned}$$



Por ejemplo, creamos un funcional t que, dadas dos funciones $y(x)$ y $z(x)$, de manera que $\vec{r} = (x, y(x), z(x))$, calcule el tiempo que le cuesta a luz recorrer dicha trayectoria desde el punto $\vec{r}_1 = (x_1, y(x_1), z(x_1))$ hasta el punto $\vec{r}_2 = (x_2, y(x_2), z(x_2))$. Conociendo que la trayectoria tiene lugar en un medio de índice de refracción n , el funcional buscado es:

$$\begin{aligned}
t : \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(y(x), z(x)) &\longrightarrow \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{n}{c}}_{=v} \sqrt{1 + [y'(x)]^2 + [z'(x)]^2} dx
\end{aligned}$$

En una notación alternativa, definiríamos t como:

$$t(y(x), z(x)) := \int_{x_1}^{x_2} \frac{n}{c} \sqrt{1 + [y'(x)]^2 + [z'(x)]^2} dx$$

Observación 12. Como puede verse en el ejemplo F , el funcional puede ser todo lo complicado que se quiera.

Definición 25. Llamaremos **extremal** de un funcional a aquella función que haga que el valor del funcional sea un máximo o mínimo local (en su entorno). Nótese que la definición es equivalente a la de extremo relativo de una función sustituyendo «función» por «funcional» y «extremo» por «extremal».

Definición 26. Sea $F : \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional diferenciable y sea $f \in \mathcal{F}_n$. Diremos que f es **punto crítico** de F si $dF(f) = 0$; en otras palabras, si la diferencial del funcional F evaluado en f es la aplicación nula.

Proposición 8. Sea $F : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathbb{K}$ un funcional diferenciable y sea $f \in \mathcal{F}_n$ tal que f es extremal de F . Entonces f es punto crítico de F . Es decir: $dF(f) = 0$.

Definición 27. Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^n y sean $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $A \subseteq \Omega$. Llamamos **norma** de f sobre el conjunto A a:

$$\|f\|_A := \max_{\vec{x} \in A} |f(\vec{x})|$$

Proposición 9. Sea B un conjunto cerrado no acotado de \mathcal{F}_n y sea $F : B \rightarrow \mathbb{K}$ un funcional continuo tal que $\lim_{\|f\|_B \rightarrow \infty} F(f) = +\infty$, entonces F alcanza en B un mínimo absoluto.

2.2.2. Deducción matemática

Lema 1. Sea (x_1, x_2) un intervalo de \mathbb{R} . Además, sean $g(x)$ y $h(x)$ dos funciones continuas en (x_1, x_2) con $h(x) \neq 0$ para al menos algún $x \in (x_1, x_2)$, entonces:

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x) h(x) dx = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2)$$

Teorema 8 (Ecuación de Euler-Lagrange). Sea Ω un abierto en \mathbb{R} y sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua arbitraria tal que $f = \mathfrak{F}(y(x), y'(x), x)$; es decir, una función que depende de otra función $y(x)$, de su derivada y' de x ; si bien implícitamente depende únicamente de x . Por otra parte, sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 \neq x_2$, $F := \int_{x_1}^{x_2} f dx$. Toda función $f \in A$ que sea extremal de F debe cumplir la condición:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0} \quad (2.1)$$

Además, si el funcional F está acotado inferiormente $\forall f \in A$ y la solución de la ecuación diferencial anterior es única, entonces dicha solución es un punto de mínimo de F .

Demostración. (Requiere leer los preliminares matemáticos. Posiblemente incluya errores matemáticos. Difícil de comprender. Hay una demostración alternativa abajo.)

Sean $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{FF} := \{y \in \mathcal{F}_1 \text{ t.q. } y(x_1) = y_1 \text{ y } y(x_2) = y_2\}$. Ahora, sea F un funcional del tipo:

$$\begin{aligned} F : \mathcal{FF} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y(x) &\longrightarrow \int_{x_1}^{x_2} f dx \end{aligned}$$

con $y' = \frac{dy}{dx}$ y $f = \mathfrak{F}(y(x), y'(x), x)$. Con \mathfrak{F} denotamos una función cualquiera que depende explícitamente de los argumentos suministrados entre paréntesis. Es decir, en nuestro caso, el integrando depende explícitamente de y , y' y x . Sin embargo, como $y = \mathfrak{F}(x)$ y $y' = \mathfrak{F}'(x)$, el integrando depende implícitamente únicamente de x (es una función de una variable); esto es importante para que la integral tenga sentido. Nuestro objetivo es ahora hallar la función f que hace que el valor de F sea mínimo. Un mínimo debe ser punto crítico, luego, como hemos visto en los preliminares, debe cumplirse:

$$\delta F = 0$$

Recordemos:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f dx$$

Si hacemos la diferencial en ambos lados, obtenemos:

$$\delta F = \delta \left(\int_{x_1}^{x_2} f dx \right)$$

Como estamos en física, podemos suponer que nuestra función f es diferenciable; por lo que la integral y la diferencial conmutan:

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx$$

Por tanto, nuestro problema consiste ahora en resolver:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta f dx = 0$$

Para ello, recordemos nuestra definición de diferencial de una función y calculemos δf :

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

Recordemos que y e y' son funciones, por eso hemos usado un δ ; mientras que x es una variable. Ahora bien, fijémonos en que:

$$\delta y' \equiv \delta \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

Si suponemos que nuestra función f es de clase C^2 , el orden de la diferencial y la parcial no importa y podemos reescribir:

$$\delta y' = \frac{d}{dx} (\delta y)$$

De esta forma,

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) + \frac{\partial f}{\partial x} dx \right) dx$$

Ahora, de los tres términos del integrando, sabemos que el tercero se va a anular pues es $(dx)^2 = 0$ ¹. En consecuencia:

$$\begin{aligned} \delta F &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} d(\delta y) \end{aligned}$$

Nótese que aunque haya desaparecido el dx en la segunda integral, en el fondo la integral depende implícitamente de x , luego los límites de integración no necesitan ser cambiados. Quedémonos con la segunda integral e intentemos resolverla mediante integración por partes:

$$\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}}_u \underbrace{d(\delta y)}_{dv} = \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \underbrace{\delta y}_{= \int d(\delta y)} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} d \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y$$

Si multiplicamos y dividimos por dx en la integral, obtenemos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} d(\delta y) = \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

Como $y \in \mathcal{FF}$, se cumple $y(x_1) = y_1$ y $y(x_2) = y_2$ independientemente de la forma de y , luego δy en esos puntos debe ser necesariamente cero (el valor de la función y nunca varía en esos puntos); por lo que el primer sumando es cero. Por consiguiente:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} d(\delta y) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

¹Esto se debe a que $(dx)^2 \equiv |d\hat{x} \times d\hat{x}| = 0$. Más información aquí.

Volviendo a nuestra expresión para δF :

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

Juntando ambas integrales, se obtiene:

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx$$

Recordemos $\delta F = 0$; luego:

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx$$

Suponiendo que todas las funciones involucradas son continuas (algo normal en física) podemos aplicar el nada trivial teorema que dice que: sean $g(x)$ y $h(x)$ dos funciones continuas con $h(x) \neq 0$ para al menos algún x , entonces $\int g(x) h(x) dx = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \forall x$. En nuestro caso, como δy no es necesariamente cero, el otro factor debe ser nulo. Es decir, obtenemos la condición:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

Q.E.D.

Demostración. Requiere leer los preliminares matemáticos igualmente, pero es más fácil de comprender. Recomendado estudiar ésta.

Tenemos una integral de la forma:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(Y(x), Y'(x), x) dx$$

donde $Y' \equiv \frac{dY}{dx}$ y $Y(x)$ es una curva desconocida que une los puntos $(x_1, y_1 = Y(x_1))$ y $(x_2, y_2 = Y(x_2))$. Entre todas las posibles funciones $Y(x)$ queremos hallar aquella que hace que el valor de S sea mínimo. Cabe destacar que aunque $f = \mathfrak{F}(Y'(x), Y(x), x)$ (recordamos que con \mathfrak{F} queremos indicar una función cualquiera que depende explícitamente de los argumentos entre paréntesis; es decir, se lee «es función de»), el integrando depende implícitamente únicamente de x , pues tanto Y como Y' dependen sólo de x . En otras palabras, el integrando es una función real de una variable real.

Bien, ahora llamemos $y(x)$ a la función que constituye un extremal de S , aunque desconozcamos cuál es. Siempre vamos a poder escribir una función cualquiera $Y(x)$ como:

$$Y(x) = y(x) + \alpha \eta(x) \quad (2.2)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\eta(x)$ es cualquier función. Derivando obtenemos:

$$Y' = y' + \alpha \eta' \quad (2.3)$$

Ahora bien:

$$\begin{cases} Y(x_1) = y_1 \\ Y(x_2) = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x_1) + \alpha \eta(x_1) = y_1 \\ y(x_2) + \alpha \eta(x_2) = y_2 \end{cases}$$

Como $y(x)$ es del tipo $Y(x) = y(x) + \alpha \eta(x)$, $y(x_1)$ debe ser necesariamente y_1 y $y(x_2)$ debe ser necesariamente y_2 . Por tanto:

$$\begin{cases} y_1 + \alpha \eta(x_1) = y_1 \\ y_2 + \alpha \eta(x_2) = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \eta(x_1) = 0 \\ \alpha \eta(x_2) = 0 \end{cases}$$

Como α puede ser cualquier número real (es decir, no siempre es cero), debe ser:

$$\eta(x_1) = 0 = \eta(x_2)$$

Con lo hecho hasta ahora hemos conseguido que la integral S me dependa del parámetro α y de $\eta(x)$, pero ya no me depende de $y(x)$, pues está fija. Al hacer esto, hemos convertido un problema complicado que requeriría de matemáticas avanzadas en un problema clásico de cálculo elemental de funciones de una variable. Sabemos que el punto crítico $Y(x) = y(x)$ se produce cuando $\alpha = 0$. Luego debe ser obligatoriamente:

$$\frac{dS}{d\alpha} = 0 \quad (2.4)$$

cuando $\alpha = 0$. Calculemos, entonces:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left(\int_{x_1}^{x_2} f(Y, Y', x) dx \right)$$

Como f es continua, la derivada y la integral conmutan:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{d\alpha} dx \quad (2.5)$$

Ahora, aplicando la regla de la cadena² llegamos a:

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha}$$

Como x no depende de α , $\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0$ y el tercero sumando se anula. Es decir, queda:

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial Y} \underbrace{\frac{\partial Y}{\partial \alpha}}_{=\eta} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \underbrace{\frac{\partial Y'}{\partial \alpha}}_{=\eta'}$$

Los valores de las parciales se obtienen al derivar las ecuaciones 2.2 en la página anterior y 2.3 en la página anterior. En consecuencia:

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' \quad (2.6)$$

En este momento, nos interesaría que en la expresión anterior apareciera $\frac{\partial f}{\partial y}$ en vez de $\frac{\partial f}{\partial Y}$ y $\frac{\partial f}{\partial y'}$ en vez de $\frac{\partial f}{\partial Y'}$. Para ello, calculemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial Y} \underbrace{\frac{\partial Y}{\partial y}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \underbrace{\frac{\partial Y'}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0} \\ \frac{\partial f}{\partial y'} &= \frac{\partial f}{\partial Y} \underbrace{\frac{\partial Y}{\partial y'}}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \underbrace{\frac{\partial Y'}{\partial y'}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y'}}_{=0} \end{aligned}$$

Nótese $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$ porque x no depende de y , aunque es $\frac{\partial y}{\partial x} \neq 0$. Lo mismo sucede con $\frac{\partial x}{\partial y'}$ y $\frac{\partial y'}{\partial x}$. Esto se debe a que con derivadas parciales no siempre se cumple $\frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^{-1}$ ³. El valor del resto de las derivadas parciales se obtiene al derivar las ecuaciones 2.2 en la página anterior y 2.3 en la página anterior. En consecuencia, obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial Y}$$

²Si no queda claro cómo aplicamos la regla de la cadena, aquí se explica de qué manera se debe aplicar la regla de la cadena a las derivadas parciales.

³Más información aquí .

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial Y'}$$

Por tanto, sustituyendo en 2.6 en la página anterior, obtenemos:

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'$$

A continuación, sustituyendo en 2.5 en la página anterior, llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) dx \\ \frac{dS}{d\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \eta dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' dx \end{aligned} \quad (2.7)$$

Implementemos la integración por partes para intentar resolver la segunda integral:

$$\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}}_u \underbrace{\eta'}_{dv} dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \eta \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

Recordemos que era $\eta(x_1) = 0 = \eta(x_2)$, luego el primer sumando es cero. Por tanto:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' dx = - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

Sustituyendo en 2.7, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \eta dx - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx \end{aligned}$$

Recordando 2.4 en la página anterior, concluimos:

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx$$

Como $\eta(x)$ no es necesariamente cero, por el lema 1 en la página 36, llegamos a:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

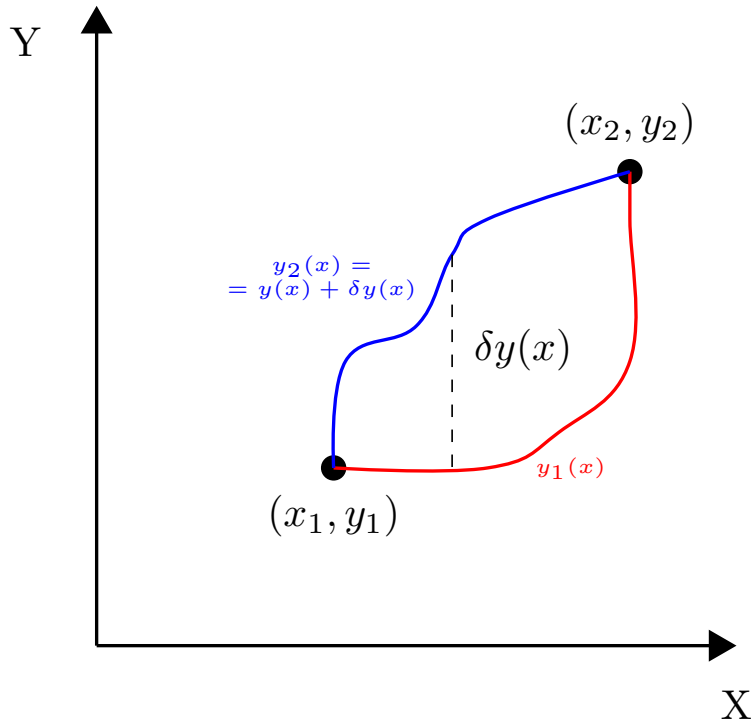
Por consiguiente, hemos conseguido demostrar que el extremal de S se alcanza cuando f cumple la condición dada arriba.

Ahora, supongamos que $\forall f \in A$, tenemos que F está acotada inferiormente. Entonces, si $\|f\|_A \rightarrow \infty$, necesariamente, debe darse $|S| \rightarrow +\infty$. En consecuencia, por la proposición 9 en la página 36, F debe tener un mínimo absoluto en A . Además, como, por hipótesis, la solución de la ecuación diferencial anterior es única, F únicamente tiene un extremal. En consecuencia, dicho extremal será el mínimo de F en A . *Q.E.D.*

Observación 13. En general, no será fácil saber si la solución de la ecuación de Euler-Lagrange es un punto de mínimo, de máximo o silla. Esto es algo a tener en cuenta; si bien es verdad que en lo que atañe a este curso, este no será el caso.

Observación 14. Gráficamente estamos intentando resolver este problema:

Imaginemos la siguiente situación:



Yo quiero hallar el camino más corto entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) ; es decir, mi objetivo es hallar la función $y(x)$ tal que la longitud de la curva $\vec{c} = (x, y(x))$ sea lo más pequeña posible (esa longitud era justo el funcional F que yo quería minimizar). Aquí podemos entender bien el concepto de diferencial de función. Del mismo modo que al integrar respecto de dx uno recorre todos los posibles valores de x , si integramos respecto de δy recorreremos todas las formas posibles de la función y . Gráficamente, vemos muy bien por qué hemos impuesto antes $\delta y(x_1) = 0 = \delta y(x_2) = 0$. Nuestro objetivo es, por tanto, hallar $y(x)$ o cuando menos obtener alguna condición que debe cumplir y . Eso es justo la ecuación de Euler-Lagrange.

Ejemplo 9. Vamos a comprobar que en la geometría euclídea el camino más rápido entre dos puntos es la línea recta que los une:

Recordemos que la longitud de una curva $\vec{c} = (x, y(x))$ entre los puntos $(x_1, y(x_1))$ y $(x_2, y(x_2))$ viene dada por:

$$L(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Es decir, nuestra función f es:

$$f = \sqrt{1 + y'^2}$$

De esta forma, llegamos a las ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{cte} := a$$

Esto último es cierto pues al ser la derivada total de $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ no puede depender ni explícita- ni implícitamente de x , luego no puede depender ni de y' ni de y . Por tanto, debe ser constante. De esta forma, la función:

$$y = ax + b$$

es solución de la ecuación.

2.2.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange en física

Observación 15 (Notación que vamos a usar en física). Para nosotros las funciones que aparecen en el funcional van a ser $q_1(t), \dots, q_n(t)$, del mismo modo que la variable independiente no va a ser x sino t :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) dt$$

La ecuación de Euler-Lagrange quedará expresada de esta forma:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n} \quad (2.8)$$

una ecuación diferencial de segundo orden.

2.3. Coordenadas generalizadas y demás

Definición 28. Sea S un sistema arbitrario de N partículas. Llamamos **coordenadas generalizadas** a un conjunto de parámetros q_1, \dots, q_n (longitudes, ángulos, magnitudes de cualquier tipo) independientes tales que la posición de cada una de las partículas del sistema puede expresarse como una función de q_1, \dots, q_n y del tiempo t .

$$\vec{r}_i = \mathfrak{F}!(q_1, \dots, q_n, t) \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Nótese que en general $N \neq n$; de hecho, al conjunto $\{q_k\}_{k=1, \dots, n}$ se le llama sistema o **conjunto de coordenadas** y n es el **número de grados de libertad del sistema**.

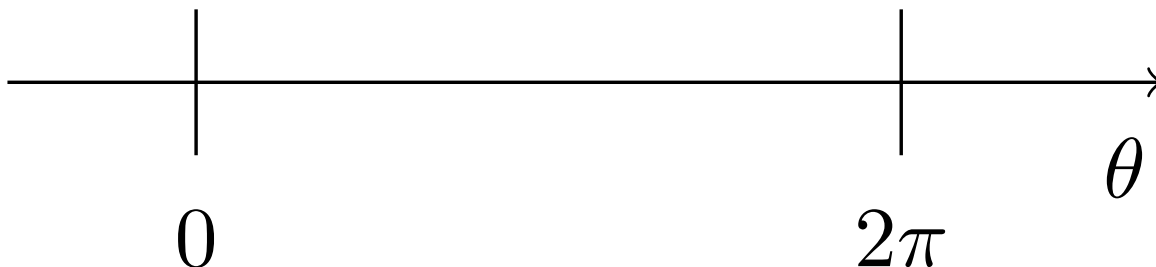
Observación 16. El máximo grado de libertad de un sistema es $3N$, ya que todos los cuerpos viven en \mathbb{R}^3 . Además, si el grado de libertad no es $3N$, entonces es que hay al menos una ligadura; de hecho, todo sistema tiene $3N - n$ ligaduras.

Definición 29. Sea S un sistema arbitrario de N partículas y sea $\{q_k\}_{k=1, \dots, n}$ un conjunto de coordenadas generalizadas. Llamamos **velocidades** (generalizadas) a las magnitudes $\dot{q}_i \quad \forall i = 1, \dots, n$. Nótese que estas velocidades pueden ser tanto «lineares» como «angulares».

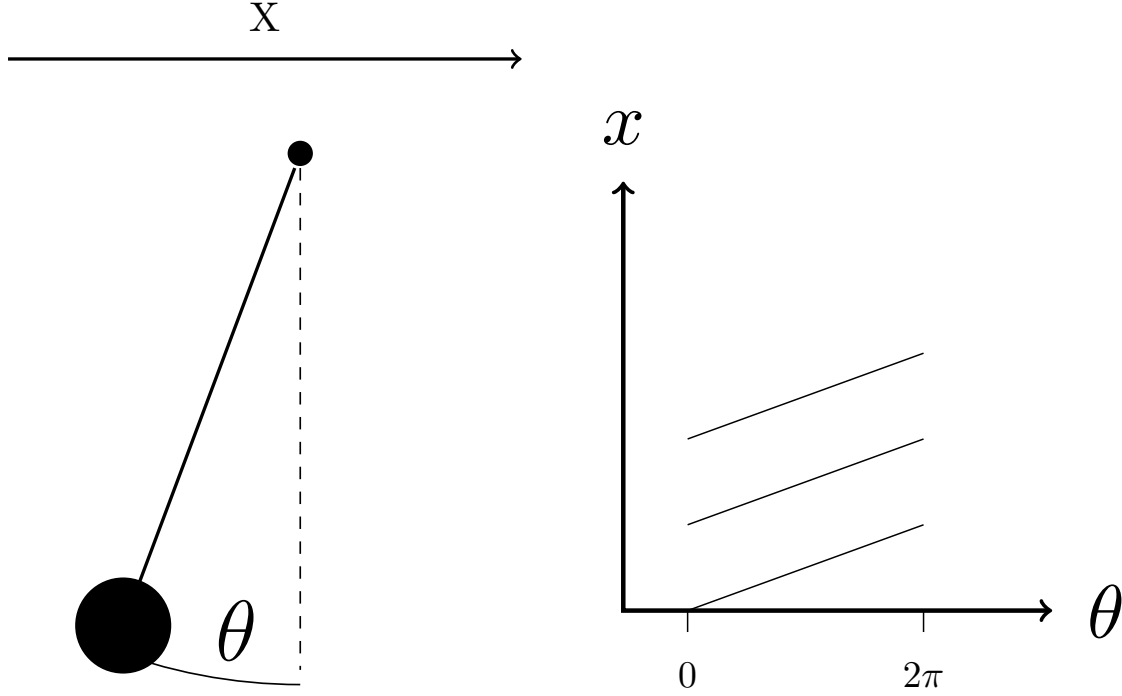
Definición 30. Sea S un sistema arbitrario de N partículas y sea $\{q_k\}_{k=1, \dots, n}$ un conjunto de coordenadas generalizadas. Llamamos **espacio de configuración** a un espacio vectorial con n dimensiones en el que cada posición del sistema se representa como un punto. La curva determinada por las funciones $q_1(t), \dots, q_n(t)$ en el espacio de configuración se llama **trayectoria**, **órbita**, **camino** o **itinerario** del sistema.

Ejemplos:

- El péndulo: aquí sólo tenemos un grado de libertad, el ángulo θ que puede variar de 0 a 2π , pues el radio está fijo.



- Un péndulo cuyo punto de anclaje se puede mover en una dirección: en este caso,



2.4. Ligaduras

Recordemos la definición de ligadura dada en 7 en la página 16.

Definición 31. Se llama condición de ligadura **holónoma** a toda ligadura $G(q_i, t) = 0$ tal que en ella no aparecen velocidades.

Por ejemplo $G(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$, $G(q_i, t) \leq 0$ y $G(q_i, t) \geq 0$ no serían holónomas.

Definición 32. Se llama ligadura **reológica** a toda ligadura $G(q_i, \dot{q}_i, t)$ en la que aparece el tiempo.

Definición 33. Se llama ligadura **esclerómina** a toda ligadura $G(q_i, \dot{q}_i)$ en la que no aparece el tiempo.

Veamos unos ejemplos:

- $G(q_i, t) = 0$ holónoma reológica.
- $G(q_i) = 0$ holónoma esclerómina.

2.5. Tipos de sistemas

Definición 34. Sea S un sistema de N partículas. Un conjunto de coordenadas $\{q_k\}_{k=1, \dots, n}$ del sistema S se dice **natural** sistema si la relación entre la posición de cada una de las partículas y las coordenadas generalizadas es independiente del tiempo. Es decir, si:

$$\vec{r}_i = \mathfrak{F}!(q_1, \dots, q_n) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

En este caso, la energía cinética T es función cuadrática homogénea cualquiera de las velocidades $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$.

Definición 35. Sea S un sistema de N partículas. Un conjunto de coordenadas $\{q_k\}_{k=1, \dots, n}$ del sistema S se dice **forzado** si el tiempo aparece en la relación entre la posición de alguna de las partículas de S y $\{q_k\}_{k=1, \dots, n}$.

$$\vec{r}_i = \mathfrak{F}(t)$$

para al menos algún $i \in [1, N] \cap \mathbb{N}$.

Definición 36. Llamamos sistema mecánico **ideal** a aquel que o bien es aislado, o bien su entorno influye de forma despreciable en él. En ambos casos es necesario, además, que el sistema no tenga grados de libertad internos.

2.6. Principio de Hamilton. Ecuaciones de Lagrange

Definición 37. Llamamos **lagrangiano** o **función lagrangiana** de un sistema ideal S (con n partículas y tal que todas las fuerzas totales que actúan sobre cada cuerpo del sistema son conservativas) descrito mediante las coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n a la función:

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) := T - V \quad (2.9)$$

Observación 17. La condición de que las fuerzas sean conservativas es necesaria para que exista la función V .

Observación 18. Nótese que el lagrangiano es una función únicamente de las posiciones, de las velocidades y del tiempo.

$$\mathcal{L} = \mathfrak{F}(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Axioma 3 (Principio de Hamilton o principio de mínima acción). *Sea S un sistema con n grados de libertad y sean $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \ni t_1 < t_2$. Las trayectorias reales que siguen las partículas de dicho sistema entre dos puntos \vec{r}_1 y \vec{r}_2 en un intervalo de tiempo (t_1, t_2) son tales que la acción:*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

es estacionaria cuando se toma a lo largo de los itinerarios reales.

Corolario 4. *Por la ecuación 2.8 en la página 42 tenemos que el lagrangiano expresado en función de las coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n de un sistema ideal S (tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas) debe cumplir:*

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

Proposición 10. *Para el caso de una partícula sobre la que actúa una fuerza conservativa, la segunda ley de Newton y el principio de Hamilton son equivalentes.*

Demostración. Por el corolario 4, sabemos que el principio de Hamilton es equivalente a las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano. Si representamos la posición de la partícula a través de las coordenadas generalizadas x, y, z , obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) = m\ddot{z} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = F_y \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = F_z$$

Lo anterior es cierto si y sólo si:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

Q.E.D.

Observación 19. El lagrangiano va a resultar una forma muy útil de resolver los problemas de mecánica ya que nos va a permitir trabajar con escalares (las coordenadas generalizadas), pudiendo olvidarnos de los vectores. Además, tampoco tendremos que descomponer las fuerzas, lo que evitará errores en ese aspecto. La única desventaja que tiene el método del lagrangiano es que incluye una gran cantidad de derivadas.

Ejemplo 10 (1 partícula en 3 dimensiones). Necesitamos tres coordenadas para describir su posición $\vec{r} = (x, y, z)$. Sabemos que:

$$T = \frac{1}{2}m\vec{r}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

y:

$$V = \mathfrak{F}(x, y, z)$$

De forma que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

Por tanto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}$$

Por el corolario 4 en la página anterior debe ser:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = m\ddot{x}$$

Análogamente para y y z :

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = m\ddot{y}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = m\ddot{z}$$

2.7. Momentos y fuerzas generalizadas

Definición 38. Sea S un sistema ideal tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de sus partículas son conservativas y sea \mathcal{L} el lagrangiano asociado a dicho sistema S descrito con coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n . Se llama **momento generalizado** i -ésimo a la derivada parcial del lagrangiano con respecto a la variación con respecto al tiempo de la coordenada i -ésima:

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.11)$$

Observación 20. Nótese que no se distingue entre momento angular y momento lineal.

Definición 39. Sea S un sistema ideal tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de sus partículas son conservativas y sea \mathcal{L} el lagrangiano asociado a dicho sistema S descrito con coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n . Se llama **fuerza generalizada** i -ésima. a la derivada parcial del lagrangiano con respecto a la coordenada i -ésima.:

$$Q_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (2.12)$$

Observación 21. Tanto el momento generalizado como la fuerza generalizada son escalares, no vectores.

Proposición 11. Sea S un sistema ideal tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de sus partículas son conservativas y sea \mathcal{L} el lagrangiano asociado a dicho sistema S descrito con coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n . La fuerza generalizada i -ésima es la derivada con respecto al tiempo del momento generalizado i -ésimo.

$$Q_i = \dot{p}_i$$

Demostración. Por el corolario 4 en la página 44 es:

$$\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=Q_i} = \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}_{=p_i} \right)$$

Q.E.D.

Observación 22. Nótese que:

$$\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=Q_i} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}_{=p_i} = \text{cte}$$

Proposición 12. Sea S un sistema ideal con N partículas tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas. Entonces la fuerza generalizada j -ésima puede expresarse como:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Demostración. Por la definición de fuerza generalizada (39):

$$Q_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$$

Ahora, por la definición de lagrangiano (37 en la página 44):

$$Q_j = \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial q_j}}_{=0} - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

donde el primer término se anula, dado que por la definición de energía cinética (17 en la página 22), ésta sólo puede depender de las velocidades y nunca de las posiciones. Así:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Ahora, por la regla de la cadena, podemos expresar q_j en función de las posiciones de todas las partículas de mi sistema (pues la relación tiene que ser biyectiva). Así:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}}_{=\vec{F}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Nótese que $-\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V = -\vec{F}_i$. En consecuencia, llegamos a:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Q.E.D.

Lo anterior motiva la siguiente definición:

Definición 40 (Definición generalizada de fuerza generalizada). Sea S un sistema ideal con N partículas y sea $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$ un conjunto de coordenadas generalizadas. Independiente de si las fuerzas que actúan sobre las partículas de S son conservativas o no, llamamos **fuerza generalizada** (generalizada) a j -ésima a:

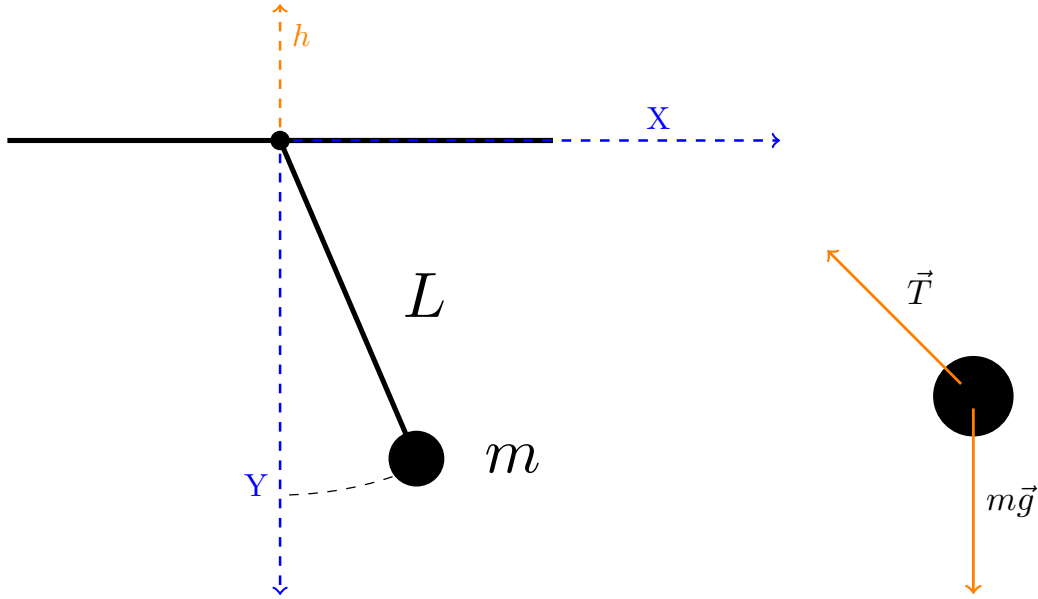
$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Observación 23. La definición anterior no es más que una generalización de la definición de fuerza generalizada para fuerzas conservativas. De esta forma, el concepto de fuerza generalizada adquiere sentido aunque no exista el lagrangiano de un sistema. Veremos la utilidad de esto más adelante.

Definición 41. Sea S un sistema ideal tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de sus partículas son conservativas y sea \mathcal{L} el lagrangiano asociado a dicho sistema S descrito con coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n . Si el lagrangiano \mathcal{L} no depende de q_i , se dice que q_i es una **coordenada cíclica**.

$$q_i \text{ es coordenada cíclica} \Leftrightarrow \mathcal{L} \neq \mathfrak{F}(q_i)$$

Ejercicio 3 (el péndulo (2 coordenadas generalizadas)).



Solución (Mediante el lagrangiano del sistema). Lo primero es encontrar la ecuación de ligadura:

$$x^2 + y^2 - L^2 = 0$$

Es decir, nuestro sistema tiene un grado de libertad. Podemos expresar x e y como:

$$x = L \sin \theta \quad y = L \cos \theta$$

$$\dot{x} = L \cos(\theta) \dot{\theta} \quad \dot{y} = -L \sin(\theta) \dot{\theta}$$

De esta forma:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$V = -mgy = -mgL \cos \theta$$

Por tanto:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL \cos \theta$$

Calculamos las parciales que aparecen en la ecuación de Euler-Lagrange (corolario 4 en la página 44):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgL \sin \theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mL^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = mL^2 \ddot{\theta}$$

Aplicando el corolario 4 en la página 44, se llega a:

$$mL^2 \ddot{\theta} = -mgL \sin \theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Solución (Mediante Newton). Sabemos que la aceleración tangencial es:

$$a_t = L\ddot{\theta}$$

Aplicando la segunda ley de Newton, llegamos a:

$$-mg \sin \theta = mL\ddot{\theta} \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Solución (Por momento angular medido desde el punto de anclaje del péndulo).

$$\underbrace{N_O}_{-mgL \sin \theta} = \underbrace{I_O \ddot{\theta}}_{mL^2 \ddot{\theta}} \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Resolución (parcial) de la ecuación diferencial resultante: Primero, debemos notar que:

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt} (\dot{\theta}) = \frac{d}{d\theta} (\dot{\theta}) \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta} &= -\frac{g}{L} \sin \theta \Leftrightarrow \dot{\theta} d\dot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta d\theta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\dot{\theta} &= -\frac{g}{L} \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \Theta d\Theta \Leftrightarrow \left[\frac{\dot{\theta}^2}{2} \right]_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} = \frac{g}{L} [\cos \Theta]_{\theta_0}^{\theta} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2) &= \frac{g}{L} (\cos \theta - \cos \theta_0) \end{aligned}$$

2.8. Fuerzas de ligadura Q'_i

El lagrangiano normal nos es útil para obtener las ecuaciones de movimiento, pues uno puede dejar de lado las fuerzas de ligadura. Sin embargo, en ocasiones necesitaremos conocer dichas fuerzas. En la práctica, por ejemplo, un diseñador de una montaña rusa necesita conocer el valor de la fuerza normal de la vía sobre el coche para poder construir dicha vía.

Del mismo modo que para resolver el problema de hallar extremos de una función f condicionados a una variedad diferenciable trabajamos con la función $\phi = f - \sum_{i=1}^M \lambda_i G_i$ donde $\{G_i\}_{i=1,\dots,M}$ son las ecuaciones que describen la variedad de ligadura de la variedad y los λ_i son los multiplicadores de Lagrange; aquí vamos a hacer algo similar con el lagrangiano.

Definición 42. Sea un sistema ideal S con N partículas y M ligaduras holónomas $G_k(q, t) = 0 \forall k = 1, \dots, M$. Supongamos, además que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas del sistema son conservativas. Llamaremos **lagrangiano modificado** o «lagrangiano prima» a:

$$\mathcal{L}' := \mathcal{L} + \sum_{k=1}^M \lambda_k G_k$$

donde λ_k son los multiplicadores de Lagrange y hemos obtenido el lagrangiano \mathcal{L} respecto a un sistema de coordenadas q_1, \dots, q_{3N} . Es decir, hemos desarrollado el lagrangiano para el mayor grado de libertad posible (con $3N$ coordenadas), independientemente de cuál sea el número de grados de libertad real. De esta forma, tendremos $3N$ ecuaciones de Lagrange, M ecuaciones de ligadura, $3N$ aceleraciones y M multiplicadores λ_k .

Teorema 9. Sea S un sistema ideal (tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de sus partículas son conservativas) con M ligaduras holónomas $\{G_k\}_{k=1,\dots,M}$ y sean q_1, \dots, q_{3N} las coordenadas con respecto a las cuales hemos hallado el lagrangiano del sistema \mathcal{L} . Entonces, se cumple:

$$\sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad \forall i = 1, \dots, 3N$$

Demostración. El lagrangiano modificado cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange por el teorema de los multiplicadores de Lagrange⁴. En consecuencia, por el corolario 4 en la página 44:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\mathcal{L} + \sum_{k=1}^M \lambda_k G_k \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\mathcal{L} + \sum_{k=1}^M \lambda_k G_k \right) = 0 \end{aligned}$$

Como la derivada parcial es una aplicación lineal:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} = 0$$

Nótese que $\frac{\partial G_k}{\partial \dot{q}_i} = 0$, pues $G_k(q, t) \neq \mathfrak{F}(\dot{q}_i) \quad \forall i$, ya que las ligaduras son holónomas. De esta forma, la ecuación queda:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} = 0$$

Pasando el tercer sumando al otro lado, obtenemos:

$$\sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

Q.E.D.

Definición 43. Sea S un sistema ideal (tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de sus partículas son conservativas), cuyo lagrangiano \mathcal{L} hemos hallado mediante las coordenadas q_1, \dots, q_{3N} . Entonces, llamamos **fuerza de ligadura en la coordenada q_i** a:

$$Q'_i := \sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (2.13)$$

Ejemplo 11 (El péndulo). Tenemos dos coordenadas:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \\ y = r \cos \theta \end{cases}$$

Y una ecuación de ligadura:

$$G_1 = r - L = 0$$

Desconocemos, por ahora, el valor de λ_1 . Calculemos el \mathcal{L}' . Para ello:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right)$$

⁴Este teorema no es nada fácil de demostrar; requiere un estudio profundo del análisis funcional que está muy fuera del alcance de este curso. Por ello, simplemente nos creemos este resultado.

$$V = -mgr \cos \theta$$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + mgr \cos \theta + \lambda_1 (r - L)$$

Calculemos las parciales:

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta + \lambda_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{r}} \right) = m \ddot{r}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \theta} = -mgr \sin \theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\theta}} \right) = m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta}$$

Por el corolario 4 en la página 44:

$$m \ddot{r} = m r \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta + \lambda_1$$

$$-mgr \sin \theta = m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta}$$

Usando las condiciones $r = L$, $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$, llegamos a:

$$m L \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta + \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = - \left(m L \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \right)$$

$$m L^2 \ddot{\theta} = -mgL \sin \theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Aplicando la definición 43 en la página anterior, llegamos a:

$$Q'_r = \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial r} = \lambda_1 = - \left(m L \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \right) = -T$$

$$Q'_\theta = \lambda_1 \underbrace{\frac{\partial G_1}{\partial \theta}}_{=0} = 0$$

Nótese que $Q'_r = -T$ donde T es la tensión a la que se ve sometida la masa. El hecho de que $Q'_\theta = 0$ indica que la tensión no tiene componente en el eje $\hat{\theta}$.

2.9. Principio de d'Alembert y principio de los trabajos virtuales

2.9.1. Definiciones previas

Vamos a establecer unas equivalencias entre el uso de ecuaciones de Lagrange y las leyes de Newton para la resolución de problemas.

Lagrange	Newton
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0$	$\Delta E = 0$
$\exists \mathcal{L}', \lambda \Leftrightarrow \exists Q'_i \Leftrightarrow \exists \text{ ligaduras}$	subsistemas

Definición 44. Llamaremos **desplazamiento virtual** a aquél que no depende del tiempo.

Observación 24. El lector no debe centrarse en intentar encontrar sentido físico a un desplazamiento independiente del tiempo. Es una creación matemática que usamos porque nos es útil; pero no tiene sentido físico. La idea es que el aparato matemático de la mecánica clásica permite ese tipo de desplazamientos y dichos desplazamientos tienen propiedades que nos pueden ayudar a resolver problemas reales. Como en un desplazamiento virtual la variación de posición no depende del tiempo, su derivada respecto al tiempo es cero.

Notación 1. Usaremos d para indicar un cambio en la posición respecto al tiempo, mientras que usaremos δ para referirnos a desplazamientos virtuales (cambios de posición «instantáneos» en los que el tiempo no juega ningún papel).

Definición 45. Llamaremos **trabajo virtual** a aquél que realiza una fuerza \vec{F} sobre un cuerpo C de manera que el desplazamiento que le produce es virtual, es decir, éste no depende del tiempo.

Definición 46. Decimos que una **fuerza de ligadura** \vec{F}' es **ideal** si no realiza trabajo virtual.

Proposición 13. Una fuerza de ligadura \vec{F}' es ideal si y sólo si es perpendicular al movimiento de la partícula en todo momento.

Demostración. Para todo t tenemos:

$$dW = \vec{F}' \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{F}' \perp d\vec{r}$$

Q.E.D.

Observación 25. En la práctica las fuerzas de ligadura no son siempre ideales. Siempre serán ideales en el caso de sólidos rígidos y partículas puntuales, es decir, siempre que los cuerpos involucrados no se deformen.

2.9.2. Principio de D'Alembert

Teorema 10 (Principio de D'Alembert). Sea S un sistema de N partículas, de manera que sobre cada una de ellas actúa una fuerza aplicada \vec{F}_i y una fuerza de ligadura \vec{F}'_i . Si todas las fuerzas de ligaduras son ideales, entonces la diferencia entre la fuerza aplicada \vec{F}_i y la fuerza inercial $\dot{\vec{p}}_i$ no hace trabajo virtual. En otras palabras, siendo $\delta \vec{r}_i$ un desplazamiento virtual cualquiera, tenemos:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Demostración. Partimos de la segunda ley de Newton (ver axioma 1 en la página 8):

$$\vec{F}_{T,i} = m \ddot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{p}}_i \quad \forall i = 1, \dots, N$$

donde $\vec{F}_{T,i}$ es la fuerza total que actúa sobre la partícula i y $\dot{\vec{p}}_i$ es la fuerza inercial, que coincide con la fuerza total. Pasando términos al otro lado, tenemos:

$$\vec{F}_{T,i} - \dot{\vec{p}}_i = \vec{0} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Multiplicando escalarmente por un desplazamiento virtual arbitrario $\delta \vec{r}_i$ y sumando a todas las partículas, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_{T,i} - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{0} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Si ahora sustituimos la fuerza total que actúa sobre cada partícula por la suma de la fuerza aplicada más la fuerza de ligadura que actúan sobre dicha partícula; es decir, $\vec{F}_{T,i} = \vec{F}_i + \vec{F}'_i$, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i + \vec{F}'_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^N \overbrace{\vec{F}'_i \cdot \delta \vec{r}_i}^{=0 \ \forall i=1, \dots, N}}_{=0} = 0$$

Por hipótesis, las fuerzas de ligadura son ideales y, en consecuencia, no realizan trabajo virtual. Por consiguiente, llegamos a:

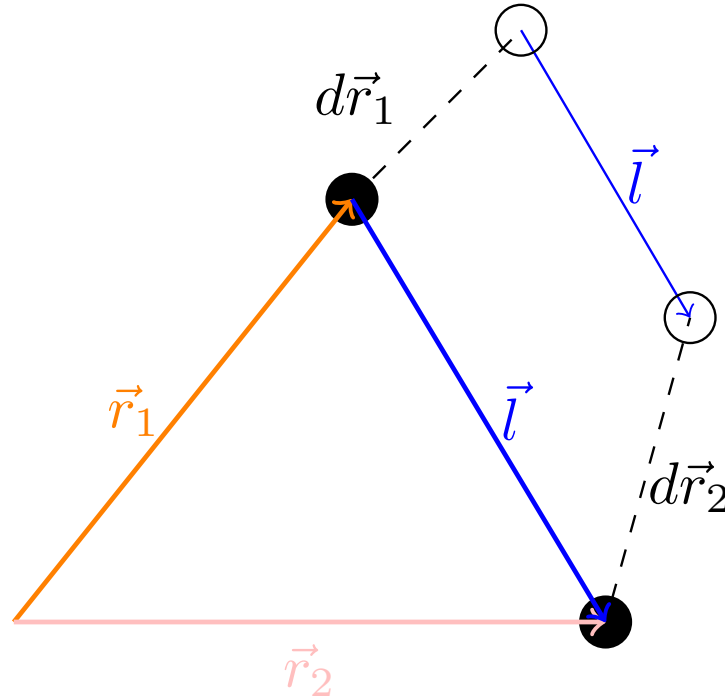
$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Q.E.D.

Observación 26. Hemos enunciado el teorema anterior de esta forma porque es como aparece en la literatura. Sin embargo, aunque *a priori* no lo parezca, lo anterior es equivalente a $\left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, N$. Esto se debe a que la igualdad debe cumplirse para cualquier desplazamiento arbitrario $\delta \vec{r}_i$.

Observación 27. Nótese que la δW es una diferencial virtual inexacta. Es virtual, porque es «imaginaria» y no depende del tiempo y es inexacta puesto que no representa una variación del trabajo; simplemente indica que el trabajo es «pequeño».

Ejemplo 12 (Un ejemplo de que se cumple el principio de D'Alembert). Consideremos esta situación:



¿La tensión realiza trabajo al desplazar el conjunto de dos bolas? Si realizamos una traslación, vemos que el la tensión hace el mismo trabajo en ambas partículas, pero al ser las tensiones de signo contrario, el trabajo total realizado sobre el sistema es cero. Nos quedaría una duda sobre las rotaciones. No obstante, aquí ofrecemos la demostración completa.

Sabemos:

$$\vec{l} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Ahora bien, la longitud de la varilla que une ambas masas no varía, es siempre constante. En consecuencia:

$$\text{cte} = \vec{l}^2 = \vec{l} \cdot \vec{l} = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 - 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$$

Por tanto, también:

$$\delta(l^2) = 0$$

De lo anterior, se sigue:

$$\begin{aligned} \delta(l^2) &= \delta(\vec{l} \cdot \vec{l}) = 2\vec{l} \cdot \delta\vec{l} = \\ &= 2\vec{r}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 + 2\vec{r}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 - 2\vec{r}_1 \cdot \delta\vec{r}_2 - 2\delta\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(\delta\vec{r}_2 - \delta\vec{r}_1) \end{aligned}$$

Así pues, vemos que:

$$\delta(l^2) = 2\vec{l} \cdot \delta\vec{l} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \delta\vec{l} = \vec{0} \Leftrightarrow \delta\vec{r}_1 = \delta\vec{r}_2 & \Leftrightarrow \text{traslación} \\ \text{o} \\ \vec{l} \perp \delta\vec{l} & \Leftrightarrow \text{rotación} \end{cases}$$

Luego, en las traslaciones y las rotaciones el trabajo neto es nulo.

En la traslación de nuestro sistema de dos bolas, suponiendo que actuara la fuerza \vec{f}_1 sobre la bola 1 y la fuerza \vec{f}_2 sobre la partícula 2, llegamos a:

$$\vec{f}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{f}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 = 0 \stackrel{\delta\vec{r}_1 = \delta\vec{r}_2}{\Leftrightarrow} \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$$

Es decir, ambas fuerzas deben ser iguales, pero de signo contrario.

2.9.3. Principio de los trabajos virtuales (estática)

Corolario 5 (Principio de los trabajos virtuales). *Sea S un sistema con N partículas tal que todas las fuerzas de ligadura (totales) que actúan sobre sus partículas son ideales. En condiciones de estática, el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas $\{\vec{F}_i\}_{i=1, \dots, N}$ es nulo:*

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

Demostración. Por el principio de D'Alembert (teorema anterior), tenemos:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

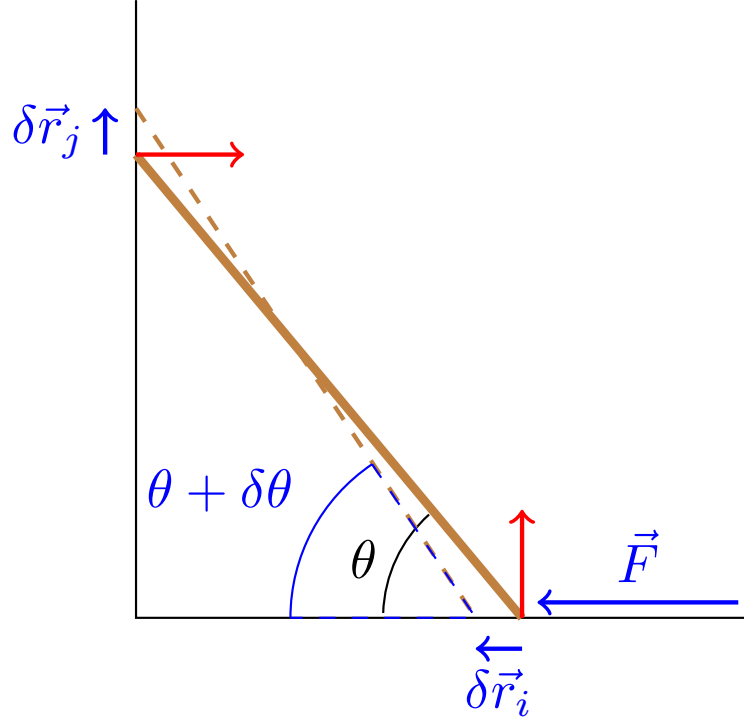
En condiciones de estática es $\dot{\vec{p}}_i = \vec{0} \forall i = 1, \dots, N$, luego tenemos:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

Q.E.D.

Observación 28. Al igual que en caso del principio de D'Alembert, hemos enunciado el teorema anterior de esta forma porque es como aparece en la literatura. Sin embargo, aunque *a priori* no lo parezca, lo anterior es equivalente a $\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \forall i = 1, \dots, N$. Esto se debe a que la igualdad debe cumplirse para cualquier desplazamiento arbitrario $\delta \vec{r}_i$.

Ejemplo 13. Si lo aplicamos a esta situación:



obtenemos:

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{r}_F + m\vec{g} \cdot \delta \vec{r}_P = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F\delta x_F - mg\delta y_P = 0$$

Por otra parte:

$$x_F = L \cos \theta \Rightarrow \delta x_F = -L \sin(\theta) \delta \theta$$

$$y_P = \frac{L}{2} \sin \theta \Rightarrow \delta y_P = \frac{L}{2} \cos(\theta) \delta \theta$$

Corolario 6. Sea S un sistema ideal con N partículas tal que todas las fuerzas de ligadura (totales) que actúan sobre sus partículas son ideales. En condiciones de estática, la fuerza generalizada j -ésima es igual al cociente entre el trabajo realizado por la fuerza \vec{F}_j asociada y la variación de la coordenada q_j ; es decir:

$$Q_j = \frac{\delta W}{\delta q_j}$$

Demostración. Mediante la regla de la cadena, podemos expresar un desplazamiento virtual cualquiera $\delta \vec{r}_i$ en función de las variaciones virtuales de las coordenadas que usamos para estudiar el sistema $\{q_i\}_{i=1, \dots, n}$:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

La regla de la cadena queda como un sumatorio porque la función que relaciona las coordenadas generalizadas $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$ con \vec{r}_i es de la forma $f: \begin{matrix} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (q_1, \dots, q_n) & \longrightarrow & \vec{r}_i \end{matrix}$ cuyo jacobiano sería $Jf = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \end{pmatrix}$. Nótese que $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \left(\frac{\partial r_i^x}{\partial q_j}, \frac{\partial r_i^y}{\partial q_j}, \frac{\partial r_i^z}{\partial q_j} \right)$ es un vector, donde los superíndices indican las coordenadas. Sustituyendo la expresión hallada para $\delta \vec{r}_i$ en el teorema anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \delta W &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{=Q_j} \delta q_j = 0 \end{aligned}$$

Por la definición generalizada de fuerza generalizada (40 en la página 47) Q_j es lo indicado entre llaves en la fórmula. Por consiguiente, debe ser:

$$\delta W = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = 0$$

Por el mismo argumento dado en las observaciones 26 en la página 53 y 28 en la página anterior, como la igualdad anterior debe cumplirse para cualquier variación virtual δq_j , lo anterior es equivalente a:

$$\delta W = 0 = Q_j \delta q_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Despejando Q_j obtenemos:

$$Q_j = \frac{\delta W}{\delta q_j} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Q.E.D.

2.10. Ecuaciones de Lagrange para sistemas con fuerzas no conservativas

Agradecimientos 1. [Gracias a Alejandro Camón Fernández y Jorge Arcega Royo por cesión de apuntes. Errata corregida gracias a Sergio Gracia Borobia.](#)

Lema 2. Sea S un sistema ideal de N partículas y sea $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$ un sistema de coordenadas generalizadas del sistema S . Entonces, si $\delta \vec{r}_i$ es un desplazamiento virtual cualquiera, se cumple:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

**Demostración (No entra).* Por la definición de momento lineal y al ser $\frac{dm}{dt} = 0$, tenemos:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m \dot{\vec{r}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n m \underbrace{\frac{d \dot{\vec{r}}_i}{dt}}_{=dv} \cdot \underbrace{\delta \vec{r}_i}_{=u}$$

En la ecuación anterior aplicamos: $d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv \Leftrightarrow u \cdot dv = d(uv) - du \cdot v$, de forma que obtenemos:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \left[m \frac{d}{dt} \left(\delta \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \right) - m \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_i) \right]$$

Ahora, si expresamos $\delta \vec{r}_i$ en función de las coordenadas generalizadas. Recordemos que era:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad \forall i = 1, \dots, N$$

En consecuencia:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \left[m \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) - m \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \right]$$

Como la derivada es una aplicación lineal:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N \left[m \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) - m \sum_{j=1}^n \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^n \left[m \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) - m \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \right] \right] \end{aligned}$$

Por la propiedad distributiva, tenemos:

$$\sum_{i=1}^N \left(A_i \sum_{j=1}^n B_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(B_j \sum_{i=1}^N A_i \right)$$

de manera que:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) - \sum_{i=1}^N m \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \right]$$

Asombrosamente, se cumple:

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{dt}{\partial q_j} = \frac{\frac{d \vec{r}_i}{dt}}{\frac{dq_j}{dt}} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad \forall i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n$$

Además, como δq_j es un desplazamiento virtual; es decir, por definición, no depende del tiempo, llegamos a:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j - \sum_{i=1}^N m \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \right]$$

Toda función posición en física debe ser al menos de clase $C^{(2)}$ (para que tenga sentido hablar de aceleraciones); en particular $\vec{r}_i \in C^{(2)} \quad \forall i = 1, \dots, N$, de manera que su parcial respecto a q_j y su derivada respecto al tiempo conmutan:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j - \sum_{i=1}^N m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right]$$

Ahora, nótese que por la regla de la cadena, tenemos:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_i^2 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} 2 m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}$$

Por tanto:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j - \sum_{i=1}^N m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right]$$

Como la derivada es lineal, se puede meter el sumatorio dentro de la derivada en el término de la izquierda. Así:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\overbrace{\sum_{i=1}^N m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j}}^{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}} \right) \delta q_j - \sum_{i=1}^N m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right] = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j - \frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j \right] = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j \end{aligned}$$

Q.E.D.

Teorema 11. Sea S un sistema ideal de N partículas y sea $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$ un sistema de coordenadas generalizadas del sistema S . Entonces, se tiene la siguiente relación:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j} \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

Demostración. Por la segunda ley de Newton (ver 1 en la página 8), tenemos:

$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i \Leftrightarrow \vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = \vec{0} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Multiplicando escalarmente por un desplazamiento virtual arbitrario $\delta \vec{r}_i$ y sumando a todas las partículas, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \end{aligned}$$

Por el lema 2 en la página 56 y recordando cómo podemos expresar el desplazamiento virtual en función de las coordenadas generalizadas:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad \forall i = 1, \dots, N$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j - \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{=Q_j} \delta q_j - \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j &= 0 \end{aligned}$$

Por la definición 40 en la página 47 Q_j es lo indicado entre llaves en la fórmula. Así, obtenemos:

$$\sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j - \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(Q_j - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \right)}_{=0} \delta q_j$$

El término con la llave por debajo debe ser forzosamente cero, pues la igualdad debe ser cierta para cualquier variación virtual δq_j . Q.E.D.

Observación 29. Nótese que lo anterior es equivalente a lo siguiente en Newton:

$$W = \Delta T$$

Corolario 7. Sea S un sistema ideal de N partículas tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas y sea $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$ un sistema de coordenadas generalizadas del sistema S . Entonces, debe cumplirse:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Demostración. Como las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas, sabemos que existe una función $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ tal que:

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla} V(\vec{r}_i) = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Entonces, aplicando la proposición 12 en la página 46, llegamos a:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

pues $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0 \quad \forall i \neq j$ y $\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_j} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_j} = \frac{\partial V}{\partial q_j}$. Por consiguiente, aplicando el teorema anterior, debe cumplirse:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Q.E.D.

Teorema 12. Sea S un sistema ideal de N partículas y sea $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$ un sistema de coordenadas generalizadas del sistema S . Consideramos $Q_j = Q_j^{\text{conservativa}} + Q_j^{\text{no conservativa}} \quad \forall j = 1, \dots, n$. En este caso, la siguiente propiedad debe satisfacerse:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{\text{no conservativa}} \quad \forall j = 1, \dots, n} \quad (2.15)$$

donde $\mathcal{L} = T - V$ es tal que $Q_j^{\text{conservativa}} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \forall j = 1, \dots, n$.

Demostración. Sea $V(q_1, \dots, q_n)$ tal que:

$$Q_j^{\text{conservativa}} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Debe ser:

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

en consecuencia:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Como la derivada parcial es una aplicación lineal, se sigue:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) \right) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Y, por la definición de lagrangiano (37 en la página 44), se sigue:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Recordemos, que, por hipótesis, era:

$$Q_j = Q_j^{\text{conservativa}} + Q_j^{\text{no conservativa}} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Ahora bien, por la proposición 12 en la página 46 sabemos que $Q_j^{\text{conservativas}} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$, de forma que:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{\text{no conservativas}} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Utilizando el teorema 11 en la página 58 y todo lo hallado anteriormente, tenemos:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}}_{= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right)} &= \underbrace{Q_j}_{= -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{\text{no conservativas}}} \quad \forall j = 1, \dots, n \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{\text{no conservativas}} \quad \forall j = 1, \dots, n \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} &= Q_j^{\text{no conservativas}} \quad \forall j = 1, \dots, n \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) &= Q_j^{\text{no conservativas}} \quad \forall j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

De nuevo, al ser la derivada parcial una aplicación lineal:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right) = Q_j^{\text{no conservativas}} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

De nuevo, por la definición de lagrangiano (37 en la página 44), tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{\text{no conservativas}} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Q.E.D.

Observación 30. Lo anterior es equivalente en Newton a:

$$W_{nc} = \Delta E$$

Teorema 13. Sea S un sistema ideal con M ligaduras holónomas $\{G_k\}_{k=1, \dots, M}$ y sean q_1, \dots, q_{3N} las coordenadas con respecto a las cuales hemos hallado el lagrangiano del sistema \mathcal{L} . Consideramos $Q_j = Q_j^{\text{conservativa}} + Q_j^{\text{no conservativa}} \quad \forall j = 1, \dots, n$. En este caso, la siguiente propiedad debe satisfacerse:

$$\sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} + Q_j^{\text{no conservativa}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad \forall i = 1, \dots, 3N$$

donde $\mathcal{L} = T - V$ es tal que $Q_j^{\text{conservativa}} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \forall j = 1, \dots, 3N$.

Demostración. El lagrangiano modificado cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange por el teorema de los multiplicadores de Lagrange⁵. En consecuencia, por el teorema 12 en la página 59:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_i} &= Q_j^{\text{no conservativa}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\mathcal{L} + \sum_{k=1}^M \lambda_k G_k \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\mathcal{L} + \sum_{k=1}^M \lambda_k G_k \right) &= Q_j^{\text{no conservativa}} \end{aligned}$$

Como la derivada parcial es una aplicación lineal:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} = Q_j^{\text{no conservativa}}$$

Nótese que $\frac{\partial G_k}{\partial \dot{q}_i} = 0$, pues $G_k(q, t) \neq \mathfrak{F}(\dot{q}_i) \forall i$, ya que las ligaduras son holónomas. De esta forma, la ecuación queda:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} = Q_j^{\text{no conservativa}}$$

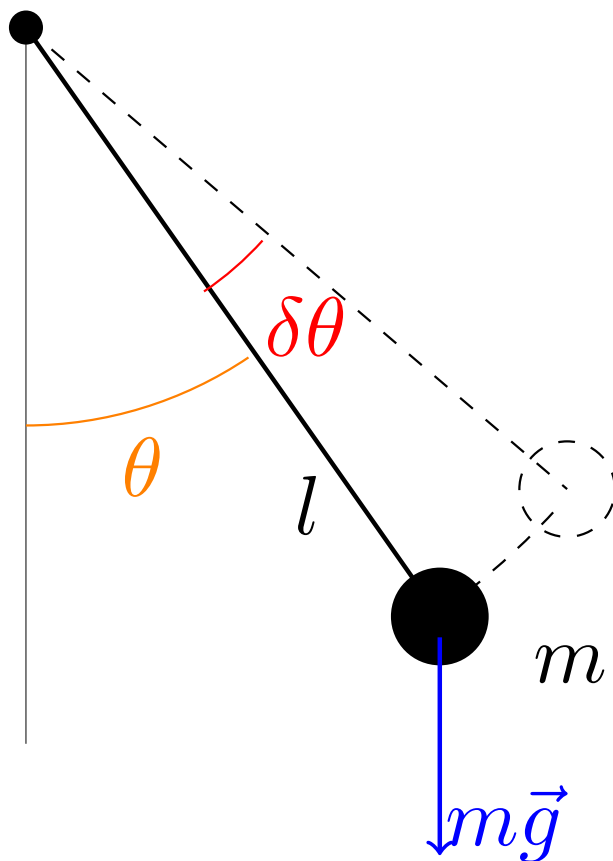
Pasando el tercer sumando al otro lado, obtenemos:

$$\sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} + Q_j^{\text{no conservativa}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

Q.E.D.

Ejemplo 14. Tenemos el péndulo de siempre:

⁵Este teorema no es nada fácil de demostrar; requiere un estudio profundo del análisis funcional que está muy fuera del alcance de este curso. Por ello, simplemente nos creemos este resultado.



La energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Calculemos el trabajo virtual:

$$\delta W = m\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_p = -mg \sin(\theta) l \delta\theta$$

De esta forma:

$$Q_\theta = \frac{\delta W}{\delta\theta} = -mgl \sin \theta$$

Obtengamos las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

En consecuencia:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta}$$

Aplicando el teorema 11 en la página 58, llegamos a:

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

2.11. Hamiltoniano

Agradecimientos 2. Gracias a Alejandro Camón Fernández por cesión de apuntes.

Definición 47. Sea S un sistema ideal de N partículas tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas y sean $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$ un sistema de coordenadas generalizadas del sistema S y $\{p_k\}_{k=1,\dots,n}$ un conjunto de momentos generalizados de S . Llamamos **función hamiltoniana** o **hamiltoniano** a:

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) := \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \underbrace{\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)}_{=T-V}$$

Proposición 14. S un sistema ideal de N partículas tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas y sean $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$ un sistema de coordenadas generalizadas **naturales** del sistema S y $\{p_k\}_{k=1,\dots,n}$ un conjunto de momentos generalizados de S . Entonces, el hamiltoniano del sistema coincide con la energía:

$$\mathcal{H} = T + V$$

Demostración. Por la definición de energía cinética (17 en la página 22), tenemos:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

Por la regla de la cadena, podemos expresar $\dot{\vec{r}}_i$ en función de las velocidades $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ como sigue:

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}}_{=0}$$

Como las coordenadas son naturales, debe ser $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$. De esta forma:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

En consecuencia:

$$\dot{\vec{r}}_i^2 = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)$$

Así:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)$$

Por la definición de momento generalizado (ver 38 en la página 46), tenemos:

$$p_u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_u} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_u} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_u} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_u} \right] = \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_u} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

Para hallar la derivada anterior hemos tenido en cuenta lo siguiente: lo primero, nótese que $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_u} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = 0$ $\forall i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n$. Ahora, para realizar la derivada hemos aplicado la regla del producto. Nótese que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_u} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_u}.$$

A continuación, tenemos:

$$\sum_{u=1}^n p_u \dot{q}_u = \sum_{u=1}^n \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_u} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_u = \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{u=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_u} \dot{q}_u \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = 2T$$

Finalmente, aplicando la definición de hamiltoniano (ver 47 en la página anterior) y la de lagrangiano (ver 37 en la página 44), tenemos:

$$\mathcal{H} = \sum_{u=1}^n p_u \dot{q}_u - \mathcal{L} = 2T - (T - U) = T + U$$

Q.E.D.

Corolario 8. *Sea un sistema ideal de N partículas tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas y sean $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$ un sistema de coordenadas generalizadas **naturales** del sistema S y $\{p_k\}_{k=1,\dots,n}$ un conjunto de momentos generalizados de S . Si, además, el sistema es conservativo, tenemos:*

$$E = H = \text{cte}$$

Observación 31. Si no se cumplen las condiciones mencionadas en la proposición 14 en la página anterior, podemos intentar conseguir un término T' que contenga la dependencia respecto a la velocidad de V y un término V' que contenga la dependencia respecto del tiempo de T . Es decir, conseguir un $H = T' + V'$ que cumpla los requisitos anteriores. Nótese que en ese caso $H \neq E$.

2.11.1. Conservación del Hamiltoniano

Teorema 14. *Sea S un sistema ideal de N partículas tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas y sean $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$ un sistema de coordenadas generalizadas del sistema S y $\{p_k\}_{k=1,\dots,n}$ un conjunto de momentos generalizados de S . Sea \mathcal{H} el hamiltoniano del sistema. Entonces, si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, el hamiltoniano se conserva.*

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

Demostración. Estudiamos cómo varía el hamiltoniano en función del tiempo:

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}$$

Aplicando la regla de la cadena, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \sum_{j=1}^n (\dot{p}_j \dot{q}_j + p_j \ddot{q}_j) - \left[\sum_{j=1}^n \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}}_{=\dot{p}_j} \dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right] = \\ &= \sum_{j=1}^n (\dot{p}_j \dot{q}_j + p_j \ddot{q}_j) - \sum_{j=1}^n (\dot{p}_j \dot{q}_j + p_j \ddot{q}_j) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{aligned}$$

Quizás sea importante recordar $\dot{q}_j \equiv \frac{\partial q_j}{\partial t}$ y $\ddot{q}_j \equiv \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t}$. Por tanto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H} = \text{cte}$$

Q.E.D.

2.11.2. Ecuaciones de Hamilton

Teorema 15. Sea S un sistema ideal de N partículas tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas y sean $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$ un sistema de coordenadas generalizadas del sistema S y $\{p_k\}_{k=1,\dots,n}$ un conjunto de momentos generalizados de S . Sea \mathcal{H} el hamiltoniano del sistema. Entonces, $\forall i = 1, \dots, n$ se cumple:

1. Primera ecuación de Hamilton:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (2.16)$$

2. Segunda ecuación de Hamilton:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad (2.17)$$

Demostración. Sea q_i una coordenada concreta y recordemos $\mathcal{H} = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}$, entonces:

1. Como $\mathcal{L} = \mathfrak{F}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$, tenemos por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^n \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_i}}_{=0} \right) \\ &= \dot{q}_i + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} = \dot{q}_i \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \dot{q}_j = \dot{q}_i \text{ pues } \frac{\partial p_j}{\partial p_i} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \text{ pues los momentos generalizados no dependen uno de otro.}$$

Al estar en una suma, el único término que «sobrevive» es $\frac{\partial p_i}{\partial p_i} \dot{q}_i = \dot{q}_i$. Por otra parte, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = p_j$ porque esa es justo la definición de p_j . En el último sumando de la primera línea hemos aplicado la regla de la cadena para derivadas parciales, sin embargo como las posiciones no dependen de los momentos, $\frac{\partial q_j}{\partial p_i} = 0$. En consecuencia:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} &= \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_i}}_{=0} \dot{q}_j - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=\dot{p}_i} - \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} = \\ &= \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \dot{p}_i = -\dot{p}_i \end{aligned}$$

$\frac{\partial p_j}{\partial q_i} = 0$, pues los momentos generalizados nunca dependen de las posiciones. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i$, porque esa es la propia definición de p_i . Por último, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i = \dot{p}_i$ por la definición 38 y la proposición 11. De esta forma, llegamos a la segunda ecuación de Hamilton:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

Q.E.D.

Observación 32. Las ecuaciones de Hamilton se dicen canónicas conjugadas.

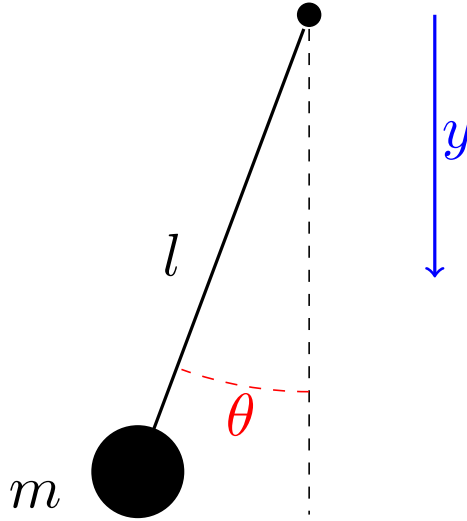
Observación 33. El hamiltoniano resulta especialmente útil si las coordenadas son cíclicas. Cabe resaltar que siempre se pueden realizar transformaciones de Jacobi de manera que todas las coordenadas sean cíclicas (algo que queda fuera del alcance de este curso). En ese caso, por el corolario 4 en la página 44:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}_{=p_i} \right) = 0 \Leftrightarrow p_i = \text{cte}$$

Ahora, por la primera ecuación del teorema 15 en la página anterior:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \Leftrightarrow q_i = C + \int \dot{q}_i dt$$

Ejemplo 15 (El péndulo). Tenemos:



Hallamos el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

Y el momento generalizado:

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}$$

Escribimos el hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = p_\theta \dot{\theta} - \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = ml^2 \dot{\theta}^2 - \left(\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \right) = \underbrace{\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2}_{=T} - \underbrace{mgl \cos \theta}_{=V}$$

Nótese que en este caso $\mathcal{H} = E$. Tenemos que conseguir expresar el hamiltoniano de manera que no dependa de la velocidad, haciendo que aparezca el momento en su lugar:

$$\mathcal{H}(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta$$

Ahora podemos aplicar la primera ecuación del teorema 15 en la página anterior:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

Y la segunda ecuación del teorema 15 en la página 65:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -\dot{p}_\theta \Rightarrow -mgl \sin \theta = \dot{p}_\theta = ml^2 \ddot{\theta} \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Nótese que al haber obtenido el hamiltoniano a través del lagrangiano, la primera ecuación de Hamilton nos dice lo que ya sabemos del lagrangiano. En el caso de que hubiéramos podido escribir el hamiltoniano sin haber escrito el lagrangiano, la primera ecuación de Hamilton nos habría permitido sacar la velocidad. En este ejemplo lo siguiente es cierto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H} = \text{cte} \stackrel{E=\mathcal{H}}{\Leftrightarrow} E = \text{cte}$$

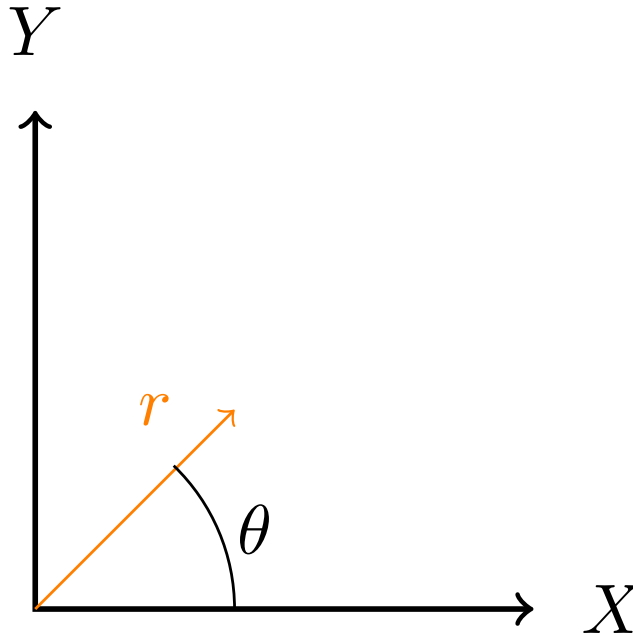
Nótese cómo hemos obtenido la ecuación del movimiento de siempre.

Ejercicio 4. Ecuaciones de Hamilton para una partícula en un campo cuyo potencial depende únicamente de la distancia al centro.

Solución. Al depender el potencial únicamente de la distancia al centro, sabemos que la fuerza será:

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dr} \hat{r}$$

En cualquier caso, aquí tenemos una representación gráfica de la situación:



Vamos a usar coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

De forma que:

$$T = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right)$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) - V(r)$$

Nótese que $\mathcal{L} \neq \mathfrak{F}(\theta)$, de manera que θ es una coordenada cíclica. Eso implica que $p_\theta = \text{cte}$, como hemos probado antes. Escribamos el hamiltoniano:

$$\mathcal{H}(r, p_r, \theta, p_\theta) = \underbrace{p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta}}_{=2T} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) + V(r)$$

$p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} = 2T$ por lo siguiente:

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} = m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 = 2 \left(\frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right] \right) = 2T$$

Ahora tengo que escribir el hamiltoniano en función de los momentos:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + V(r)$$

Aplicando la primera ecuación del teorema 15 en la página 65, llegamos a:

$$\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} = \dot{r}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} = \dot{\theta}$$

Ahora si usamos la segunda ecuación del teorema 15 en la página 65, obtenemos:

$$-\dot{p}_r = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$-\dot{p}_\theta = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow p_\theta = \text{cte} \Leftrightarrow mr^2\dot{\theta} = \text{cte}$$

De la primera ecuación obtenemos, al ser $\dot{p}_r = m\ddot{r}$:

$$m\ddot{r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr}$$

Ahora definimos un potencial efectivo U de manera que:

$$-\frac{dU}{dr} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U = V + \frac{p_\theta^2}{2mr^2}$$

En consecuencia, yo puedo escribir el Hamiltoniano como:

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{1}{2m}p_r^2}_{=T} + \underbrace{\frac{\overbrace{p_\theta^2}^{=cte}}{2mr^2}}_{=U} + V(r) = \mathfrak{F}(r, p_r) = \text{cte}$$

Por consiguiente, al ser $H = E$, podemos escribir la energía como:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)$$

Podemos combinar las ecuaciones anteriores y obtenemos:

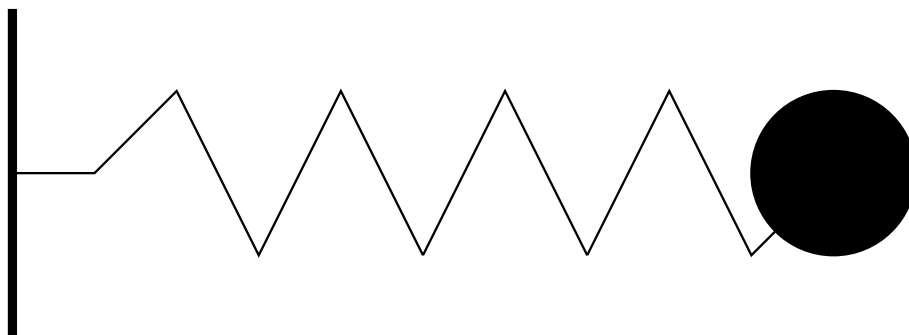
$$\frac{p_\theta^2}{mr^3} = m\dot{\theta}^2$$

que es la ecuación de una fuerza centrífuga.

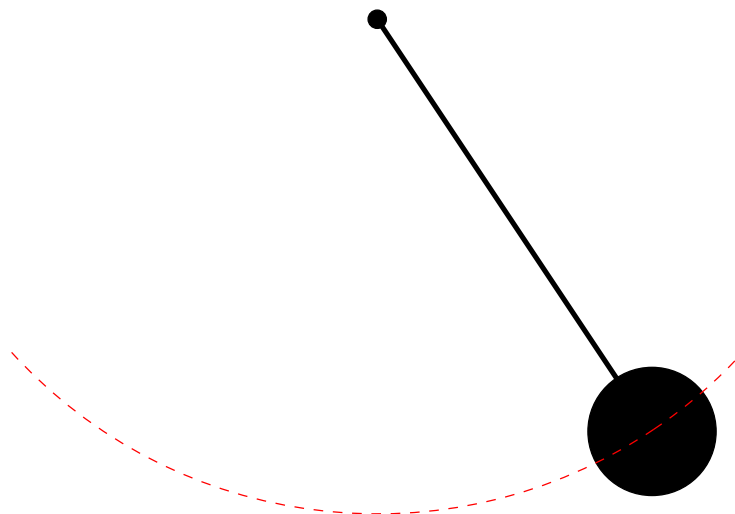
3. Movimiento oscilatorio

3.1. Ejemplos introductorios

- Un muelle con una constante de rigidez k unido a una masa m que no está inmóvil.



- Un péndulo



- Magnitudes físicas en un circuito
- Una onda

3.2. Oscilaciones armónicas

Definición 48. Se dice que una partícula sigue una oscilación armónica si su posición puede expresarse matemáticamente como:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

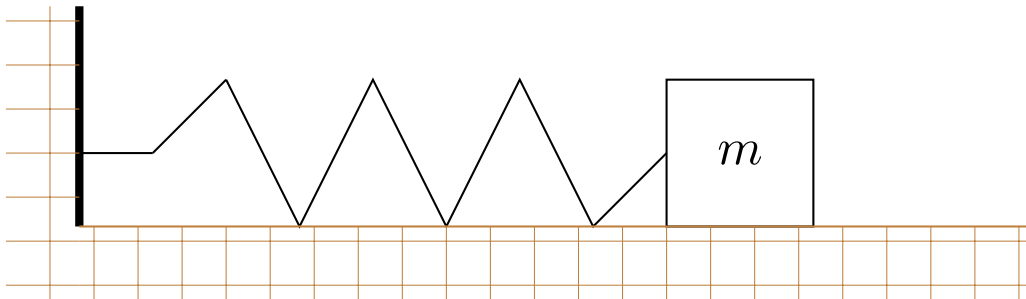
donde A es la amplitud de la oscilación, ω es la frecuencia de la oscilación y ϕ es la fase de la oscilación.

Observación 34. Se puede describir cualquier tipo de oscilación a partir de combinaciones lineales de oscilaciones armónicas.

3.2.1. Oscilación armónica libre

Definición 49. Una oscilación armónica se dice libre si la amplitud A es constante, de forma que la frecuencia del movimiento ω va a ser la frecuencia natural ω_0 .

Ejemplo 16. Tenemos:



Sea x lo que se ha alargado el muelle, entonces, por la segunda ley de Newton y por la ley de Hooke debe cumplirse:

$$-kx = m\ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} = - \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega_0^2} x$$

Alternativamente, si llamamos x a la posición de la partícula y x_{eq} a la posición de equilibrio (donde la fuerza que actúa es cero), podemos expresar la fuerza que actúa sobre la partícula es:

$$\vec{F} = -m\omega_0^2 (x - x_{eq}) \hat{i} \quad (3.1)$$

Como, hemos dicho antes, se cumple:

$$x = x_{eq} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$$

Vamos ahora con el cálculo de la energía potencial:

$$V = - \int_{x_0}^x \vec{F} \cdot d\vec{\chi} = \left[\frac{1}{2} k \chi^2 \right]_{x_0}^x = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$$

Recordando $k = m\omega_0^2$, llegamos a:

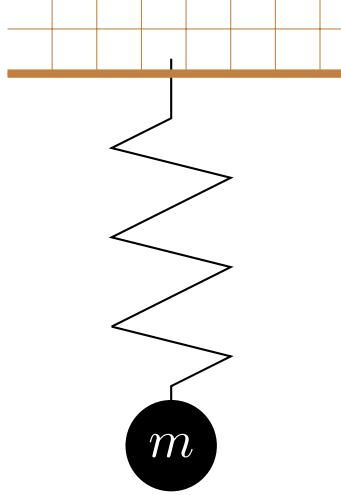
$$V = \frac{1}{2} m\omega_0^2 (x - x_{eq})^2 \quad (3.2)$$

De manera que se cumple:

$$\vec{F} = - \frac{dV}{dx} \hat{i}$$

y la fuerza elástica es conservativa. Por tanto, en los movimientos armónicos simples, se conserva la energía: $E = \text{cte}$.

Ejemplo 17. Ahora, tenemos:



Sea x la posición de la masa m y l_0 la longitud natural del muelle. Entonces la fuerza que actúa sobre la masa m puedo escribirla como:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= mg - k(x - l_0) = -k\left(-\frac{mg}{k} + x - l_0\right)\hat{j} = -k\left[x - \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)\right]\hat{j} = \\ &= -k\frac{m}{m}\left[x - \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)\right]\hat{j} = -m\omega_0^2\left[x - \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)\right]\hat{j}\end{aligned}$$

La idea es que siempre que tengamos una fuerza constante o una fuerza lineal con x , vamos a ser capaces de llegar a una expresión del estilo $-m\omega_0^2(x - x_{eq})$ por complicado que sea el término x_{eq} mediante transformaciones matemáticas (extrayendo factor común, sobre todo).

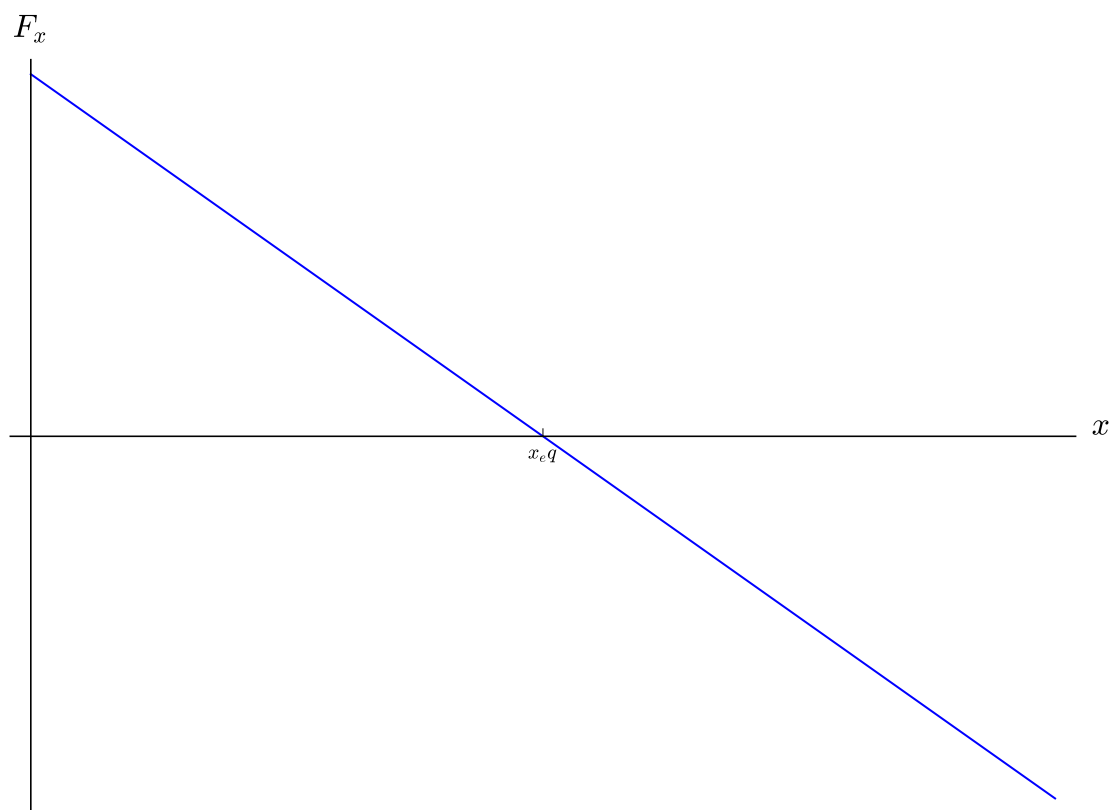
Bien, ahora vamos con la energía potencial:

$$V = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 - mgx = \frac{1}{2}k\left(x - \frac{kl_0 + mg}{k}\right)^2 + \text{cte}$$

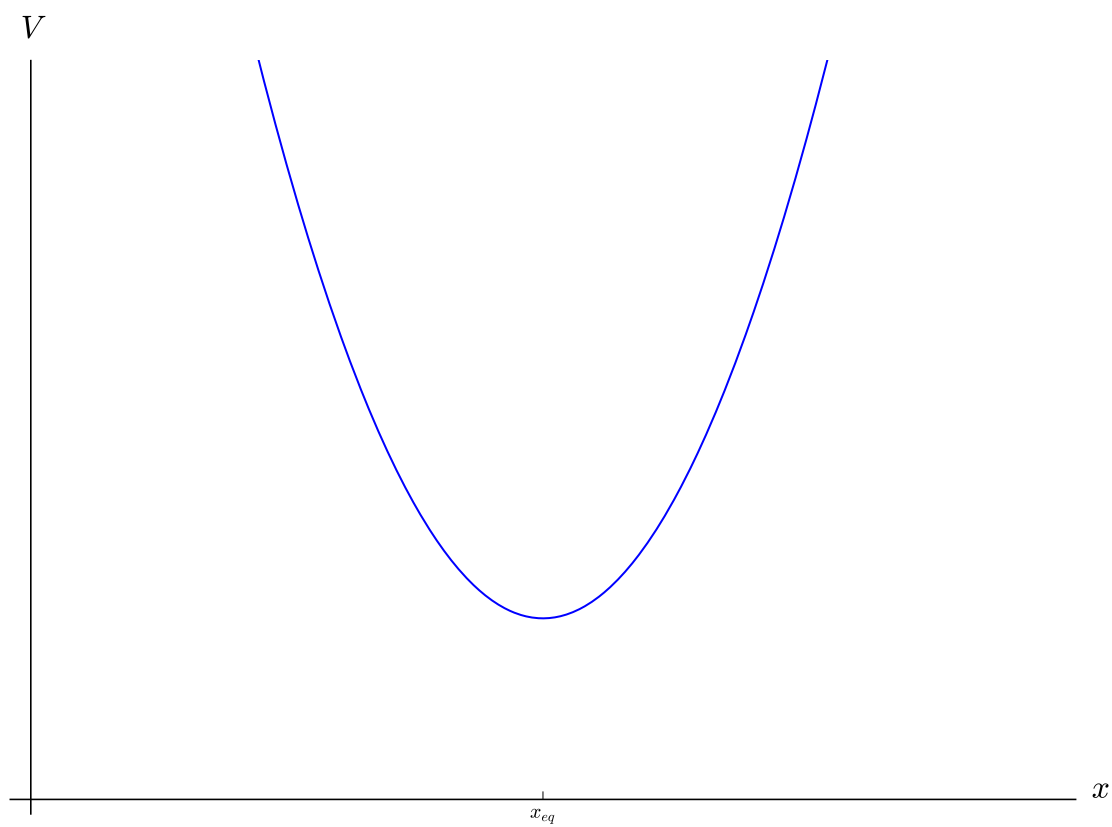
De forma similar a lo que ocurría antes, siempre que la fuerza que actúe sobre la partícula sea constante o lineal con x , podremos expresar el potencial con dos términos: uno será del estilo $\frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2$ y el otro término será constante y lo podremos suponer cero para facilitarnos los cálculos.

3.3. Aproximaciones de un desplazamiento cualquiera a una oscilación armónica simple

Una fuerza de tipo elástico cumplirá que su representación será de la forma:



Y la representación de su energía potencia asociada será de la forma:



Sin embargo, en muchas ocasiones, la fuerza que tengamos que estudiar no cumplirá estas condiciones, pero sí que puede ser que tenga un mínimo para algún $x = x_{eq}$. En ese caso, para desplazamientos pequeños en los que el valor de x es próximo a x_{eq} podremos aproximar la energía potencial asociada a la fuerza por una función parabólica de segundo grado mediante Taylor, obteniendo una fuerza lineal que genera una oscilación armónica libre.

Es decir, si se cumple:

$$\frac{dV}{dx}(x_{eq}) = 0 \Rightarrow V(x_{eq}) = \text{cte}$$

Podemos aproximar la función potencial por su polinomio de Taylor de segundo orden centrado en x_{eq} .

$$\begin{aligned} V(x) &\approx V(x_{eq}) + \underbrace{\frac{dV}{dx}(x_{eq})}_{=0} (x - x_{eq}) + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2}(x_{eq}) (x - x_{eq})^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow V(x) \approx V(x_{eq}) + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2}(x_{eq}) (x - x_{eq})^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por analogía con 3.2, debe ser:

$$\omega_0^2 = \frac{\frac{d^2V}{dx^2}(x_{eq})}{m}$$

Igualmente, podemos hacer un desarrollo en serie de Taylor (lineal, de primer orden) centrado en x_{eq} para la fuerza:

$$\begin{aligned} F(x) &\approx \underbrace{F(x_{eq})}_{=0} + \frac{dF}{dx}(x_{eq}) (x - x_{eq}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow F(x) \approx \frac{dF}{dx}(x_{eq}) (x - x_{eq}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

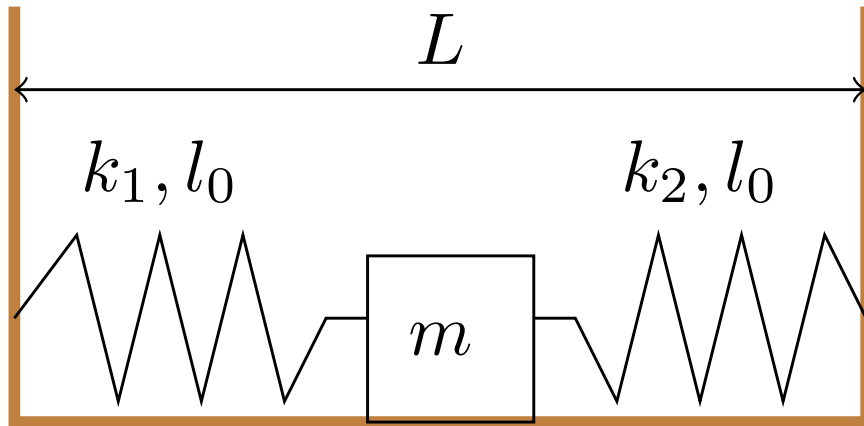
Por analogía con 3.1:

$$\omega_0^2 = -\frac{\frac{dF}{dx}(x_{eq})}{m}$$

Nótese que se sigue cumpliendo:

$$F = -\frac{dV}{dx}$$

Ejercicio 5. Tenemos la siguiente situación:



Solución. Sea x_1 la posición de la masa. Entonces, el potencial queda:

$$V = \frac{1}{2}k_1(x_1 - l_0)^2 + \frac{1}{2}k_2(2l_0 + L - x_1 - l_0)^2$$

Definimos un x tal que $x_1 = x + l_0$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2(L - x)^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2 - k_2Lx + \frac{1}{2}k_2L^2 = \\ &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\left(x - \frac{k_2}{k_1 + k_2}L\right)^2 + \frac{1}{2}k_2L^2 - \frac{k_2^2}{k_1 + k_2}\frac{L^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{(k_1 + k_2)}_{=m\omega_0^2}\left(x - \frac{k_2}{k_1 + k_2}L\right)^2 + \frac{L^2}{2}\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2} \end{aligned}$$

Ahora:

$$F_1 = k_1x = F_2 = k_2(L - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k_2L}{k_1 + k_2}$$

De esta forma:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

Ejercicio 6. Tenemos dos muelles en serie:



Ejercicio 7. Sean $x, k, c \in \mathbb{R}$ tales que $x, k, c > 0$. Tenemos una fuerza dada por:

$$F(x) = -kx + \frac{c}{x}$$

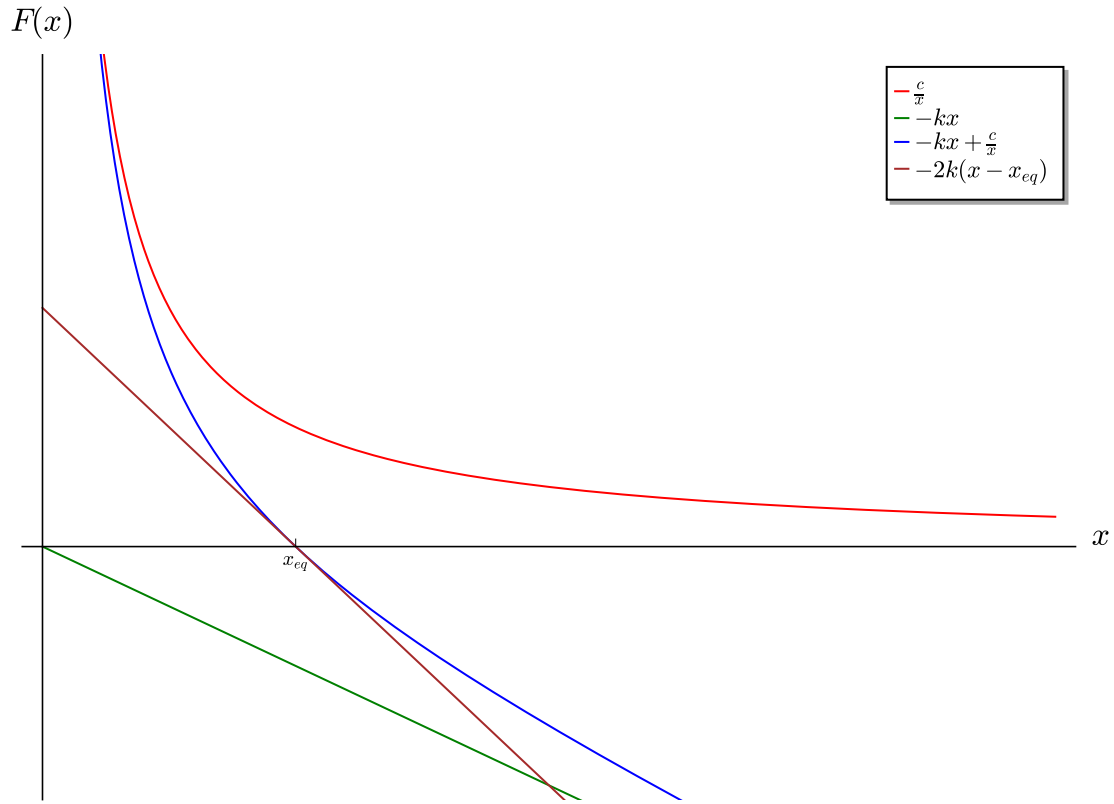
Obtenemos la posición de equilibrio:

$$F = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{c}{k}} =: x_{eq}$$

$$\frac{dF}{dx}(x) = -k - \frac{c}{x^2} = -k - \frac{c}{x_{eq}^2} = -k - \frac{c}{c/k} = -2k$$

Ahora, por 3.4, lo anterior debe ser igual a $-m\omega_0^2$. De forma que:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$



Podemos obtener lo mismo con el potencial:

$$V(x) - V(x_0) = - \int_{x_0}^x F d\chi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V(x) = V(x_0) + \left[\frac{1}{2} k \chi^2 - c \ln \chi \right]_{x_0}^x$$

Suponiendo $V(x_0) = 0$:

$$V(x) = \frac{1}{2} k (x^2 - x_0^2) - c \ln \frac{x}{x_0} = \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k x_0^2 - c \ln x + c \ln x_0 =$$

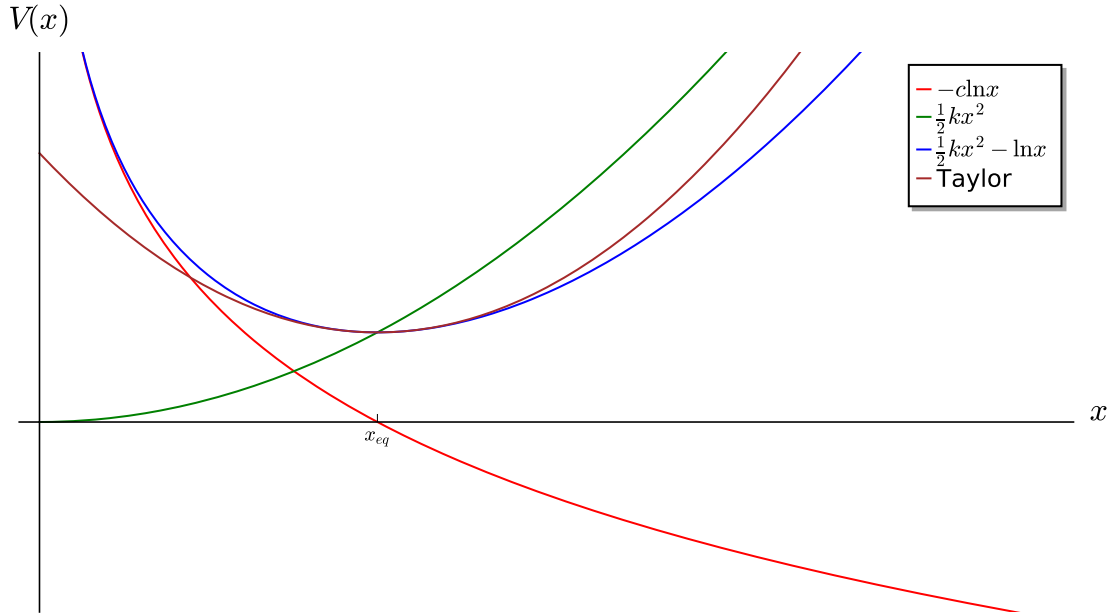
$$= \frac{1}{2} k x^2 - c \ln x - \frac{1}{2} k x_0^2 + c \ln x_0$$

Ahora, queremos hallar un x_0 tal que:

$$\frac{1}{2} k x_0^2 - c \ln x_0 = 0$$

Ahora, si quisiéramos hallar la frecuencia de oscilación, simplemente usaríamos:

$$\frac{d^2 V}{dx^2}(x_{eq}) = m \omega_0^2$$



3.4. Preliminares de ecuaciones diferenciales ordinarias

Proposición 15. Sean $n \in \mathbb{N}$, $y(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^{(n)}$. Si $y(t)$ cumple la ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = 0$$

donde $a_i \in \mathbb{R} \forall i = 0, \dots, n-1$. Entonces la solución general $y(t)$ debe ser de la forma:

$$y(t) = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} p_i(t)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son las raíces distintas del polinomio característico:

$$p(s) = s^n - a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

y $p_i(t)$ es un polinomio complejo arbitrario de grado menor que m_i (la multiplicidad de la raíz λ_i).

Proposición 16. Sean $n \in \mathbb{N}$, $y(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^{(n)}$ y $f(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $y(t)$ cumple la ecuación diferencial no homogénea de coeficientes constantes:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = f(t)$$

donde $a_i \in \mathbb{R} \forall i = 0, \dots, n-1$. Entonces la solución general $y(t)$ debe ser de la forma:

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t)$$

donde $y_n(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea $y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = 0$ e $y_p(t)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea:

$$y_p(t) = \int_{t_0}^t \gamma(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

para un $t_0 \in I$ cualquiera donde $\gamma(t-\tau)$ es la solución de la ecuación diferencial homogénea $\gamma^{(n)}(t) + a_{n-1}\gamma^{(n-1)}(t) + \dots + a_2\ddot{\gamma}(t) + a_1\dot{\gamma}(t) + a_0\gamma(t) = 0$ con condiciones iniciales $\gamma(0) = 0, \dots, \gamma^{(n-2)}(0) = 0, \gamma^{(n-1)}(0) = 1$.

Proposición 17 (Método de los coeficientes indeterminados). Sean $n \in \mathbb{N}$, $y(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^{(n)}$ y $f(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $y(t)$ cumple la ecuación diferencial no homogénea de coeficientes constantes:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = f(t)$$

donde $a_i \in \mathbb{R} \forall i = 0, \dots, n-1$. Si

3.5. Resolución de la ecuación

$$\vec{F} = -m\omega_0^2 x \hat{i} = m\ddot{x} \hat{i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Lo anterior es una ecuación lineal de segundo orden. Hay dos constantes de integración (resolver en casa según visto en EDO). De forma que la solución es:

$$x = c \cos \omega t + d \sin \omega t$$

Lo anterior es equivalente:

$$x = a \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\dot{x} = a\omega \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t - \varphi_0\right)$$

Como hay dos constantes, necesitamos dos condiciones iniciales. Por ejemplo, supongamos: $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$.

$$\dot{x} = -c\omega \sin \omega t + d\omega \cos \omega t$$

De forma que llegamos al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_0 = c \\ v_0 = \omega d \end{cases}$$

Demostremos que $x = a \cos(\omega t + \varphi_0)$ es equivalente a la otra formulación. Aplicando la fórmula para el coseno del ángulo suma:

$$x = a \cos(\omega t + \varphi_0) = a \cos \omega t \cos \varphi_0 - a \sin \omega t \sin \varphi_0$$

De forma que, vemos que:

$$c = a \cos \varphi_0 = x_0$$

$$d = -a \sin \varphi_0 = \frac{v_0}{\omega}$$

La forma de obtener directamente los valores de a y φ_0 es:

$$\tan \varphi_0 = -\frac{v_0}{x_0 \omega}$$

$$a^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

A a la llamaremos amplitud.

A $\omega t + \varphi_0$ la llamaremos fase.

A φ_0 la llamaremos fase inicial.

Definimos el periodo como:

$$T := \frac{2\pi}{\omega}$$

donde $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y $[\frac{1}{T} \equiv \nu] = \text{Hz}$

3.6. Oscilación armónica simple

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{x} = \omega_0 a \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ddot{x} = \omega_0^2 a \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$$

18/10/2018 Dibujo 1

La ecuación diferencial es:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Recordamos la otra expresión equivalente:

$$x = c \cos \omega t + d \sin \omega t$$

donde $c = a \cos \varphi_0$ y $d = -a \sin \varphi_0$.

Volviendo a lo anterior, podemos descomponer el ángulo independiente en:

$$\varphi_0 + \Delta\varphi_0$$

1. Si $\Delta\varphi_0 = 0$, están en fase.
2. $\Delta\varphi_0 = \pi$, en oposición de fase.
3. $\Delta\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ en cuadratura de fase.

Como podemos ver x y \dot{x} están en cuadratura de fase, mientras que x y \ddot{x} están en oposición de fase.

La energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

18/10/2018 Dibujo 2 (Gráfica de energía cinética y potencial)

3.6.1. Deducción en la forma compleja

La solución de la ecuación diferencial también se puede expresar en forma compleja.

$$x = C e^{i\omega t} + C^* e^{-i\omega t} = 2\text{Re}(C) \cos \omega t - 2\text{Im}(C) \sin \omega t$$

Podemos ver que:

$$c = 2\text{Re}(c) = a \cos \varphi_0$$

$$d = 2\text{Im}(c) = a \sin \varphi_0$$

La expresión anterior es equivalente a:

$$x = \frac{a}{2} e^{i\varphi_0} e^{i\omega t} + \frac{a}{2} e^{-i\varphi_0} e^{-i\omega t}$$

$$x = \operatorname{Re} \left[a e^{i(\omega t + \varphi_0)} \right] = \operatorname{Re} \left[\underbrace{A}_{=: a e^{i\varphi_0}} e^{i\omega t} \right]$$

donde A es la amplitud compleja. Recapitulando:

$$x = \operatorname{Re} (A e^{i\omega_0 t})$$

donde $A = a e^{i\varphi_0}$ y φ_0 es la fase inicial.

Si llamamos:

$$z := A e^{i\omega_0 t}$$

se deduce lo siguiente:

$$x = \operatorname{Re} (z)$$

$$\dot{x} = \operatorname{Re} (\dot{z})$$

$$\ddot{x} = \operatorname{Re} (\ddot{z})$$

$$\ddot{z} = -\omega_0^2 z$$

Ahora:

$$\dot{x} = \operatorname{Re} (\dot{z}) = \operatorname{Re} (+i\omega_0 A e^{i\omega_0 t}) = -\omega_0 \operatorname{Im} (A e^{i\omega_0 t})$$

$$\ddot{x} = \operatorname{Re} (\ddot{z}) = \operatorname{Re} (-\omega_0^2 z) = -\omega_0^2 a \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Vale, ahora descomponemos z como:

$$z := z + iy$$

De forma que:

$$z = \dot{x} + i\dot{y}$$

$$\ddot{z} = \ddot{x} + i\ddot{y}$$

Gráficamente, en el plano complejo tenemos:

[18/10/2018 Dibujo 3](#)

[18/10/2018 Dibujo 4](#)

Ejercicio 8. Tenemos una partícula de masa $m = 10 \text{ g} = 0,01 \text{ kg}$ unida a un muelle de constante $k = 36 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

[18/10/2018 Dibujo 5](#)

En $t = 0$, $x_0 = 50 \text{ mm} = 0,05 \text{ m}$, moviéndose a una velocidad de $v_0 = 1,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcular el periodo, la amplitud, la fase inicial, la energía y la posición en función del tiempo; escribiendo también la expresión compleja de la misma. ¿Para qué t pasará por el reposo $\dot{x} = 0$ por primera vez?

Solución. Sabemos que ω_0 es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 60 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 104,7 \text{ ms} = 0,1047 \text{ s}$$

Sabiendo:

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x(0) = x_0 = a \cos \varphi_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -\omega_0 a \sin \varphi_0$$

Sumando, obtenemos:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = 0,05757 \text{ m}$$

$$\tan \varphi_0 = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0} = -0,56 \Rightarrow \varphi_0 = -29,5^\circ = -0,5155 \text{ rad}$$

Obtenemos la siguiente «abominación»:

$$x(t) = 0,05747 \cos(60t - 0,5155)$$

$$E = \frac{1}{2} k a^2 = \frac{1}{2} m \underbrace{\omega_0^2 a^2}_{v_{\text{máx}}^2} = \frac{1}{2} 36 \cdot 0,05747^2 = 0,059 \text{ J}$$

$$z = 0,05747 e^{i(60t - 0,5155)}$$

$$\dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow \omega_0 t + \varphi_0 = 0, \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_0 t = \begin{cases} 0 - \varphi_0 \Rightarrow t = 8,6 \text{ ms} \\ \pi - \varphi_0 \Rightarrow t = 60,9 \text{ ms} \end{cases}$$

Problemas para hacer: 2.3, 2.4, 2.6, 2.8.

3.7. Oscilaciones amortiguadas

19/10/2018 Dibujo 1

Supongamos que sobre la masa actúa también una fuerza del estilo:

$$\vec{F}_{am} = -\lambda \dot{x} \hat{i}$$

$$\frac{dE}{dt} = P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\lambda \dot{x}^2 < 0 \Rightarrow E \Downarrow$$

Llegaríamos a la ecuación diferencial:

$$-kx - \lambda \dot{x} = m\ddot{x}$$

La solución es:

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Definimos:

$$2\gamma := \frac{\lambda}{m}$$

De manera que la ecuación diferencial queda:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Voy a ver si $x_1 = e^{pt}$ es solución:

$$x_1 = e^{pt}$$

$$\dot{x}_1 = pe^{pt}$$

$$\ddot{x}_1 = p^2 e^{pt}$$

$$(p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2) e^{pt} = 0 \Leftrightarrow p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{(2\gamma)^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \begin{cases} -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} := p_1 \\ -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} := p_2 \end{cases}$$

Si $p_1 \neq p_2$, la solución es:

$$x = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$$

Si $\gamma = 0$:

$$p_1 = i\omega_0$$

$$p_2 = -i\omega_0$$

3.7.1. Amortiguamiento débil

#Si $\gamma \ll \omega_0$, tenemos un sistema subestático:

Si $\gamma < \omega_0$:

$$p = -\gamma \pm i\omega$$

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

La solución general queda:

$$x = Ce^{i\omega t - \gamma t} + C^* e^{-i\omega t - \gamma t} = \operatorname{Re} (Ae^{i\omega t} e^{-\gamma t}) =$$

$$= ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

donde $A = ae^{i\varphi_0}$.

19/10/2018 Dibujo 2 (oscilación amortiguada)

Definición 50. Llamamos τ al tiempo de relajación. Es el tiempo tal que la amplitud de la oscilación es $\frac{a}{e}$. Coincide con:

$$\tau = \frac{1}{\gamma}$$

Definición 51. Llamamos factor de calidad Q a:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

Cuando $\omega_0 > \gamma$, debe ser obligatoriamente $Q > \frac{1}{2}$.

Proposición 18. El número de periodos en un intervalo τ es igual a:

$$n = \frac{Q}{\pi}$$

$$e^{-\frac{\pi}{QT}t} = e^{-\gamma t} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

Si aproximamos $\omega \approx \omega_0$ y, por tanto, $T \approx T_0$:

$$e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} = e^{-\frac{2\pi}{T_0 2Q}t}$$

Luego:

$$\frac{\tau}{T} = \frac{Q}{\pi}$$

Si suponemos $\gamma = \frac{\omega_0}{10}$: $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \approx 0,5\%$.

3.7.2. Energía

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Si usamos la expresión de x para amortiguaciones débiles:

$$x(t) = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Llegamos a:

$$E = \frac{1}{2} m a_0^2 e^{-2\gamma t} [\omega_0^2 + \gamma^2 [\cos^2(\omega t + \varphi_0) - \sin^2(\omega t + \varphi_0)] + 2\gamma\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \cos(\omega t + \varphi_0)]$$

Si suponemos $\gamma \ll \omega_0$:

$$E \approx \frac{1}{2} m \omega_0^2 a_0^2 e^{-2\gamma t} = \frac{1}{2} k a^2$$

En este caso:

$$P = \frac{dE}{dt} = -2\gamma E$$

3.8. Oscilaciones amortiguadas

La ecuación diferencial es:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Leftrightarrow x = A e^{ip_1 t} + B e^{ip_2 t}$$

donde:

$$p_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$p_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

3.8.1. Amortiguamiento débil

Si la amortiguación es débil:

$$x = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

donde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ y se cumple $\gamma < \omega_0$.

3.8.2. Amortiguamiento fuerte

Si la amortiguación es fuerte:

$$x = A e^{-\gamma_+ t} + B e^{-\gamma_- t}$$

donde $\omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ $\gamma_+ = \gamma + \omega = -p_2$ y $\gamma_- = \gamma - \omega = -p_1$. Además, se cumple $\gamma > \omega_0$. Podemos reescribir x como:

$$x = a_0 e^{-\gamma t} \cosh(\omega t + \varphi_0)$$

donde es preciso recordar que $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Probemos que ambas formas son equivalentes:

$$x = a_0 e^{-\gamma t} \left(\frac{e^{\omega t + \varphi_0} + e^{-(\omega t + \varphi_0)}}{2} \right)$$

$$x = A e^{-\gamma t - \omega t} + B e^{-\gamma t + \omega t}$$

De forma que:

$$A = \frac{a_0}{2} e^{-\varphi_0}$$

$$B = \frac{a_0}{2} e^{\varphi_0}$$

En consecuencia:

$$AB = \frac{a_0^4}{4}$$

$$\frac{B}{A} = e^{2\varphi_0}$$

Ahora se cumple:

$$\tau = \frac{1}{\gamma_-}$$

Veamos dos gráficas para oscilamientos fuertes donde $\gamma = 2\omega_0$.

23/10/2018 Dibujo 1 (gráfica $x_0 = x_{máx}$ y $v_0 = 0$, Andrés)

23/10/2018 Dibujo 2 (gráfica $x_0 = 0$ y $v = v_{máx}$, Andrés)

3.8.3. Amortiguamiento crítico

La ecuación diferencial sería:

$$\ddot{x} + 2\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

donde $p_1 = p_2 = -\omega_0$. Sabemos que la solución va ser de la forma:

$$x_1 = e^{-\omega_0 t}$$

$$x_2 = te^{-\omega_0 t}$$

al ser la raíz del polinomio característico doble. Ahora:

$$\dot{x}_2 = e^{-\omega_0 t} + t(-\omega_0)e^{-\omega_0 t} = e^{-\omega_0 t}(1 - \omega_0 t)$$

$$\ddot{x}_2 = -\omega_0 e^{-\omega_0 t} - \omega_0 e^{-\omega_0 t} + t\omega_0^2 e^{-\omega_0 t} = e^{-\omega_0 t}(-2\omega_0 + \omega_0^2 t)$$

Ahora podemos comprobar que efectivamente \ddot{x}_2 cumple la ecuación diferencial. La solución es, por tanto, de la forma:

$$x = (a + bt)e^{-\omega_0 t}$$

y el tiempo característico es:

$$\tau = \frac{1}{\omega_0}$$

Gráficamente es:

23/10/2018 Dibujo 4 ($x_0 = x_{máx}$, $v = 0$, Andrés)

3.8.4. Comparación entre todo los tipos de amortiguamiento

Veamos la siguiente gráfica, donde $\omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

23/10/2018 Dibujo 3 ($\frac{1}{\tau}$ frente a γ , Andrés)

3.8.5. Ejemplos

Ejemplo 18. Tenemos las condiciones iniciales $\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = 0 \end{cases}$. Calculemos $x(t)$.

Para un $\gamma < \omega_0$ sabemos que la solución es:

$$x = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

donde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. ¿Va ser $x_0 = \varphi_0$? La respuesta es no. Veamos la razón:

$$\dot{x} = a_0 e^{-\gamma t} (-\omega) \sin(\omega t + \varphi_0) + (-\gamma) a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Ahora:

$$\begin{aligned} x(0) &= a_0 \cos \varphi_0 = x_0 \\ \dot{x}(0) &= a_0 (-\omega) \sin \varphi_0 - \gamma a_0 \cos \varphi_0 = 0 \end{aligned}$$

De la segunda obtenemos:

$$\gamma = -\frac{a_0 \omega \sin \varphi_0}{a_0 \cos \varphi_0} \Leftrightarrow \tan \varphi_0 = -\frac{\gamma}{\omega}$$

Además, podemos escribir:

$$\begin{aligned} a_0^2 \cos^2 \varphi_0 &= x_0^2 = \frac{a_0^2}{1 + \tan^2 \varphi_0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_0^2 = x_0^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2} \right) \end{aligned}$$

De forma que:

$$x = x_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}} e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

3.9. Ejemplo resumen

Con las condiciones iniciales $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$:

Tipo	$x(t)$	ω	φ_0
débil $\gamma < \omega_0$	$x = x_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}} e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0)$	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$	$\tan \varphi_0 = -\frac{\gamma}{\omega}$
crítico $\gamma = \omega_0$	$x = x_0 (1 + \gamma t) e^{-\gamma t}$	$\omega = 0$	
fuerte $\gamma > \omega_0$	$x = \frac{x_0}{2} e^{-\gamma t} \left[\left(1 - \frac{\gamma}{\omega}\right) e^{-\omega t} + \left(1 + \frac{\gamma}{\omega}\right) e^{\omega t} \right]$	$\omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$	

Cuentas para el crítico:

$$x = (a + bt) e^{-\gamma t} \Rightarrow x_0 = a$$

$$\dot{x} = [-\gamma(a + bt) + b] e^{-\gamma t}$$

$$0 = -\gamma a + b = -\gamma x_0 + b \Rightarrow b = \gamma x_0$$

Cuentas para el fuerte:

$$x = e^{-\gamma t} [A e^{-\omega t} + B e^{\omega t}] \Rightarrow x_0 = A + B$$

$$\dot{x} = [-\gamma x + (-\omega A e^{-\omega t} + \omega B e^{\omega t})] e^{-\gamma t}$$

$$B - A = \frac{\gamma x_0}{\omega}$$

$$A = \frac{x_0}{2} \left(1 - \frac{\gamma}{\omega}\right)$$

$$B = \frac{x_0}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{\omega}\right)$$

3.10. Oscilaciones forzadas. Resonancia

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

24/10/2018 Dibujo 1

Podemos expresar la solución de la no homogénea como la suma de una solución de la homogénea más una solución de la no homogénea:

$$x = x_0(t) + x_1(t)$$

Si tomamos $F(t) = F_1 \cos \omega_1 t$, podemos tomar:

$$F(t) = \operatorname{Re}(F_1 e^{i\omega_1 t})$$

De manera que:

$$x_1 = \operatorname{Re}(z_1)$$

donde:

$$z_1 = A_1 e^{i\omega_1 t} = a_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)}$$

Entonces:

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_1}{m} e^{i\omega_1 t}$$

Ahora:

$$z = a_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)}$$

$$\dot{z} = i\omega_1 a_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)}$$

$$\ddot{z} = -\omega_1^2 a_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)}$$

$$[-\omega_1^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2] a_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)} = \frac{F_1}{m} e^{i\omega_1 t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2i\gamma\omega] a_1 = \frac{F_1}{m} e^{-i\varphi_1} = \frac{F_1}{m} [\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega_1^2) a_1 = \frac{F_1}{m} \cos \varphi_1 \\ 2\gamma\omega_1 a_1 = -\frac{F_1}{m} \sin \varphi_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \varphi_1 = \frac{-2\gamma\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \\ \frac{F_1^2}{m^2} = a_1^2 [(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\gamma^2\omega_1^2] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{\frac{F_1}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_1^2}} \\ \tan \varphi_1 = \frac{-2\gamma\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \end{cases}$$

De forma que la solución transitoria es:

$$x(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\dot{x} = \underbrace{a_1 \omega_1}_{:=v_1} \cos\left(\omega_1 t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_1 = a_1 \omega_1 = \frac{\frac{F_1}{m}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{\omega_1}\right)^2 + 4\gamma^2}}$$

Definición 52. Se llama resonancia en amplitud cuando a_1 es máxima.

Definición 53. Se llama resonancia en energía cuando v_1 es máxima.

3.10.1. Fijación de ω_1 y cambio de ω_0

Es decir, ¿para qué valores de ω_{0r} será a_1 máxima o v_1 máxima?

Si tomamos $\omega_{0r} = \omega_1$:

$$a_{1m} = \frac{F_1}{m2\gamma\omega_1}$$

$$v_{1m} = \frac{F_1}{2m\gamma}$$

3.10.2. Fijación de ω_0 y cambio de ω_1

La resonancia en energía se dará cuando $\omega_{1r} = \omega_0$:

$$v_{1m} = \frac{F_1}{2\gamma m}$$

25/10/2018 Dibujo 1 (gráfica v_1 frente a ω_1)

En este caso $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ y F y \dot{x} están en fase. En consecuencia la potencia que está aportando la fuerza externa al movimiento es máxima.

$$P = \vec{F} \cdot \dot{\vec{x}} = F\dot{x} > 0 \forall t$$

Dicho de otra forma, la transferencia de energía es máxima.

Veamos la resonancia en amplitud. Vamos a minimizar el denominador de la función que nos da a , para hallar su máximo.

$$f(\omega_1) := \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_1^2}$$

$$f'(\omega_1) = \frac{2(\omega_0^2 - \omega_1^2)(-2\omega_1) + 8\gamma^2 \omega_1}{2\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_1^2}}$$

Ahora, descartando $\omega_1 = 0$ como solución:

$$f'(\omega_1) = 0 \Leftrightarrow \omega_{1r} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

25/10/2018 Dibujo 2 (gráfica a_1 frente a ω_1 y φ_1 frente a ω_1)

Para definir la anchura, usamos la altura $\frac{a_1 m}{\sqrt{2}}$, llegamos a:

$$\omega_{1a} = \sqrt{\omega_{1r}^2 - 2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

$$\omega_{1b} = \sqrt{\omega_{1r}^2 + 2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

Para $\gamma \ll \omega_0$:

$$\omega_a \approx \sqrt{\omega_{1r}^2 - 2\gamma\omega_0} = \omega_{1r} \sqrt{1 - \frac{2\gamma\omega_0}{\omega_{1r}^2}}$$

$$\omega_b \approx \sqrt{\omega_{1r}^2 + 2\gamma\omega_0} = \omega_{1r} \sqrt{1 + \frac{2\gamma\omega_0}{\omega_{1r}^2}}$$

Ahora, hagamos un desarrollo en serie de Taylor $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \dots$:

$$\omega_a \approx \omega_{1r} \left[1 - \frac{\gamma\omega_0}{\omega_{1r}^2} \right]$$

$$\omega_b \approx \omega_{1r} \left[1 + \frac{\gamma\omega_0}{\omega_{1r}^2} \right]$$

Ahora como $\gamma \ll \omega_0 \Rightarrow \omega_{1r} \approx \omega_0$:

$$\omega_a \approx \omega_{1r} \left[1 - \frac{\gamma}{\omega_{1r}} \right] = \omega_{1r} - \gamma$$

$$\omega_b \approx \omega_{1r} \left[1 + \frac{\gamma}{\omega_{1r}} \right] = \omega_{1r} + \gamma$$

Otro caso, cuando $\gamma = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$. Entonces $\omega_{1r} = 0$ y $a_1 = \frac{F_1}{m\omega_0^2}$. En este caso la fuerza aplicada será constante y no se producirá oscilación.

Caso particular $\gamma = \omega_0$:

$$a_1 = \frac{\frac{F_1}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\omega_0^2\omega_1^2}} = \frac{F_1}{m(\omega_0^2 + \omega_1^2)}$$

También:

$$\omega_1 > 0$$

$$a_1(\omega_1) < a(\omega_1 = 0)$$

3.11. Caso de varias fuerzas periódicas, cada una con una frecuencia diferente

$$F(t) = F_1 e^{i\omega_1 t} + F_2 e^{i\omega_2 t} + \dots = \sum_r F_r e^{i\omega_r t}$$

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F(t)}{m}$$

$$z = z_1 + z_2 + z_3 + \dots$$

$$\sum_r (\ddot{z}_r + 2\gamma + \dot{z}_r) = \sum_r \frac{F_r e^{i\omega_r t}}{m}$$

Entonces:

$$x = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots = \operatorname{Re} \left(\sum_r \underbrace{A_r}_{=a_r e^{i\varphi_r}} e^{i\omega_r t} \right)$$

Una fuerza de este estilo podría ser:

26/10/2018 Dibujo 1 (gráfica periódica chungu)

Cualquier función periódica se puede poner como suma de funciones cuya frecuencia es múltiplos uno de otro. Esta suma se llama serie de Fourier.

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} F_n e^{in\omega t}$$

Presentamos la transformada de Fourier:

$$F_m = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) e^{-im\omega t} dt$$

Ahora:

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{-i(n-m)\omega t} dt = \delta_{n,m}$$

Ahora, recordando la definición de $F(t)$ y obteniendo su transformada de Fourier:

$$F_m = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_n F_n e^{in\omega t} \right) e^{-im\omega t} dt = \sum_n F_n \frac{1}{T} \int e^{i\omega(n-m)t} = \sum_n F_n \delta_{n,m} = F_m$$

Ahora, si tenemos una fuerza cualquiera (no tiene por qué ser periódica):

$$F(t) = \int F_\omega e^{i\omega t} d\omega$$

3.12. Oscilador armónico isótropo

30/10/2018 Dibujo 1 (Muelle 3D)

Obedece la ecuación:

$$\vec{F} = -k\vec{r} = -kr\hat{r}$$

Nótese que la fuerza es central. Además es conservativa, pues si yo calculo el potencial asociado a la fuerza, obtengo:

$$V = \frac{1}{2}kr^2$$

Mediante la segunda ley de Newton, obtenemos:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{k}{m}\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \\ \ddot{z} + \omega^2 z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t \\ y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \omega t \\ z = z_0 \cos \omega t + \frac{v_{0z}}{\omega} \sin \omega t \end{cases}$$

Es decir:

$$\vec{r} = \vec{c} \cos \omega t + \vec{d} \sin \omega t$$

donde $\vec{c} = \vec{r}_0$ y $\vec{d} = \frac{\vec{v}_0}{\omega}$. La velocidad es:

$$\dot{\vec{r}} = -\vec{c}\omega \sin \omega t + \vec{d}\omega \cos \omega t$$

Nótese que el movimiento es en el plano definido por \vec{c} y \vec{d} al ser \vec{r} y $\dot{\vec{r}}$ para cualquier t una combinación lineal de \vec{c} y \vec{d} .

30/10/2018 Dibujo 2 (elipse)

Ahora, probemos:

$$\vec{L}_O = \text{cte}$$

Por otra parte, como $\vec{c} = m\vec{r}_0 \times \vec{v}_0$

$$\vec{L}_O = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m\omega \vec{c} \times \vec{d} = m \left[\vec{c} \cos \omega t + \vec{d} \sin \omega t \right] \times \omega \left[-\vec{c} \sin \omega t + \vec{d} \cos \omega t \right]$$

Ahora, recordemos $\vec{c} \times \vec{c} = \vec{0} = \vec{d} \times \vec{d}$, de manera que me quedan únicamente los términos cruzados:

$$\vec{L}_O = m\omega \left[\vec{c} \times \vec{d} \right] \left[\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t \right] = m\omega \vec{c} \times \vec{d}$$

A continuación vamos a comprobar que la energía cinética se conserva:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2}k\vec{r}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kr_0^2 = \frac{1}{2}\overbrace{m\omega^2}^=k d^2 + \frac{1}{2}kc^2 + \frac{1}{2}k(c^2 + d^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 (c^2 + d^2)$$

Resumen: En todo movimiento armónico isótropo se cumple:

$$\vec{L}_O = m\omega \vec{c} \times \vec{d}$$

$$E = \frac{1}{2}k(\vec{c}^2 + \vec{d}^2)$$

Bien, ahora vamos a intentar demostrar que la trayectoria seguida por la partícula es una elipse. Es decir me interesa poder expresar la posición como:

$$\vec{r} = \vec{a} \cos(\omega t + \theta) + \vec{b} \sin(\omega t + \theta)$$

con un valor de a y b tal que $\vec{a} \perp \vec{b}$. En este caso, podremos coger los ejes cartesianos paralelos a \vec{a} y \vec{b} y, en consecuencia:

$$\begin{cases} x = a \cos(\omega t + \theta) \\ y = b \sin(\omega t + \theta) \end{cases}$$

Elevando al cuadrado, llegamos a:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es justo la ecuación de una elipse. Vamos a obtener la relación entre \vec{a}, \vec{b} y \vec{c}, \vec{d} .

$$\dot{\vec{r}} = -\omega \vec{a} \sin(\omega t + \theta) + \omega \vec{b} \cos(\omega t + \theta)$$

Llegamos a las ecuaciones:

$$\vec{r}_0 = \vec{c} = \vec{a} \cos \theta + \vec{b} \sin \theta \quad (3.5)$$

$$\vec{d} = -\vec{a} \sin \theta + \vec{b} \cos \theta \quad (3.6)$$

$$\vec{v}_0 = \omega \vec{d} - \omega \vec{a} \sin \theta + \omega \vec{b} a \theta$$

Ahora, vemos que estas ecuaciones tienen una similitud con una rotación. De forma que podemos hallar la inversa de la matriz rotación, obteniendo:

$$\vec{a} = \vec{c} \cos \theta - \vec{d} \sin \theta$$

$$\vec{b} = \vec{c} \sin \theta + \vec{d} \cos \theta$$

Esto también se puede probar haciendo $(3,1) \cos \theta - (3,2) \sin \theta$. A continuación, imponemos $\vec{a} \perp \vec{b}$:

$$(\vec{c} \cos \theta - \vec{d} \sin \theta) \cdot (\vec{c} \sin \theta + \vec{d} \cos \theta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 \cos \theta \sin \theta - d^2 \sin \theta \cos \theta + \vec{c} \cdot \vec{d} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c^2 - d^2) \frac{\sin 2\theta}{2} + \vec{c} \cdot \vec{d} \cos 2\theta = 0$$

Llegamos a:

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta = \frac{2\vec{c} \cdot \vec{d}}{d^2 - c^2}$$

Ahora, queremos expresar \vec{L}_O y E en función de \vec{a} y \vec{b} . Para ello:

$$\vec{r} = \vec{a} \cos(\omega t + \theta) + \vec{b} \sin(\omega t + \theta)$$

$$\dot{\vec{r}} = -\vec{a}\omega \sin(\omega t + \theta) + \omega \vec{b} \cos(\omega t + \theta)$$

Si yo escojo un $t \ni \vec{r} = \vec{a} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \omega \vec{b}$, entonces llego a:

$$\vec{L}_O = m\omega \vec{a} \times \vec{b}$$

$$E = \frac{1}{2} k (\vec{a}^2 + \vec{b}^2)$$

También, debe cumplirse:

$$\begin{cases} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d} \Leftrightarrow ab = cd \sin \alpha \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \end{cases}$$

En consecuencia, llegamos a la ecuación:

$$a^4 - (c^2 + d^2) a^2 + c^2 d^2 \sin^2 \alpha = 0$$

En función de la energía y el momento la ecuación anterior queda:

$$a^4 - \frac{2E}{k} a^2 + \frac{L_O^2}{m^2 \omega^2} = 0$$

Ejercicio 9. $\begin{cases} \vec{r}_0 = 2\hat{i} + \hat{j} \\ \vec{v}_0 = 4\hat{i} - 8\hat{j} \end{cases}$. Calcular la órbita y analizar el efecto de ω . Obtener también la energía el momento angular.

Solución.

Lo primero es notar:

$$\vec{c} = \vec{r}_0$$

$$\omega \vec{d} = \vec{v}_0$$

Ahora:

$$\tan 2\theta = \frac{2\hat{i} \cdot \vec{d}}{d^2 - c^2} = 0 \Rightarrow 2\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{r}_0 \cdot \frac{\vec{v}_0}{\omega} = 0$$

Obtenemos:

$$c^2 = 5 \quad d^2 = \frac{16 \cdot 5}{\omega^2}$$

Si hacemos $\omega = 4$, obtenemos $c = d$ y tenemos una circunferencia. Si hacemos $\omega < 4$, entonces $d > c$, mientras que si $\omega > 4$ entonces $c > d$. En estos dos casos, obtenemos una elipse.

31/10/2018 Dibujo 1 (ejes \vec{r}_0, \vec{v}_0 , varios casos)

Estudiamos ahora todos los posibles valores de θ :

$$\vec{a} = \vec{c} \cos \theta - \vec{d} \sin \theta$$

$$\vec{b} = \vec{c} \sin \theta + \vec{d} \cos \theta$$

- Si $\theta = 0$:

$$\vec{a} = \vec{c}$$

$$\vec{b} = \vec{d}$$

- Si $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\vec{a} = -\vec{d}$$

$$\vec{b} = \vec{c}$$

- Si $\theta = \pi$:

$$\vec{a} = -\vec{c}$$

$$\vec{b} = -\vec{d}$$

- Si $\theta = \frac{3\pi}{2}$:

$$\vec{a} = \vec{d}$$

$$\vec{b} = -\vec{c}$$

Ahora calculamos la energía:

$$E = \frac{1}{2}k(a^2 + b^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 \left(5 + \frac{80}{\omega^2}\right)$$

$$L_O = m\vec{r}_0 \times \vec{v}_0 = -20m\vec{k}$$

Pregunta 1. Tenemos una partícula a distancia δ del centro de fuerzas. ¿Cuáles son las condiciones para que la trayectoria sea circular?

Solución. Tiene que cumplirse $\vec{r}_0 \perp \vec{v}_0$ y $v_0 = \omega r_0$.

31/10/2018 Dibujo 2 (órbita circular, impulso)

Si realizamos un impulso en dirección radial:

$$\vec{I} = m\Delta\vec{v}$$

Obtendríamos, donde con prima denotamos los valores tras aplicar el impulso:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{I}{m}\right)^2 + E = E' > E$$

$$r'_0 = r_0$$

$$v'_0 > v_0$$

$$L'_O = L_O$$

$$L'_O = m\omega ab$$

4. Fuerzas centrales conservativas

Adelanto: Toda fuerza central conservativa es de la forma:

$$\vec{F} = f(r)\hat{r}$$

4.1. Leyes de conservación

4.1.1. Fuerzas centrales

07/11/2018 Dibujo 1 (O centro de fuerzas)

Cuando la fuerza que actúa sobre una partícula es central, se da:

$$\vec{N}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$$

donde O es el centro de fuerzas. Como $\vec{N}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$, debe cumplirse:

$$m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{L}_O = \vec{cte}$$

Observación 35. Para que el momento angular se conserve, basta con que la fuerza sea central; no es necesario que además sea conservativa, por ejemplo:

$$\vec{F} = a\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right)\vec{r}$$

Como el momento angular es constante, el movimiento debe ser unidimensional o bidimensional, pero nunca será tridimensional. Es decir, el movimiento de nuestra partícula estará contenida en un plano. Por otra, parte si utilizamos coordenadas polares:

$$v_r = \dot{r}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

Con estas coordenadas, el momento angular queda:

$$L_O = mrv_\theta = mr^2\dot{\theta} \Leftrightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

Y, en consecuencia:

$$v_\theta = \frac{L}{mr}$$

Observación 36. En general, $\dot{\theta}$ y v_θ no serán constantes. Sólo serán constantes en el caso en el que $r = \text{cte}$, es decir, cuando la trayectoria sea una circunferencia.

4.1.2. Fuerzas conservativas

Una fuerza es conservativa cuando $\exists V \ni \vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$ donde el potencial únicamente depende de la posición. Cuando la fuerza es conservativa, se cumple:

$$\text{cte} = E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(\vec{r}) = \text{cte}$$

Usando coordenadas esféricas:

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$F_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$F_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

Proposición 19. Si la fuerza es conservativa y además es central, como la fuerza únicamente puede depender de la distancia al centro de fuerzas es:

$$F_r \neq 0 \quad F_\theta = 0 \quad F_\phi = 0$$

y la fuerza es de la forma:

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dr} \hat{r}$$

Nota: Hacer proposición con si y solo si para la forma.

4.1.3. Parámetros de un movimiento con una fuerza central conservativa

Tenemos:

$$E = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + V(r)$$

$$L = mr^2 \dot{\theta}$$

Podríamos usar el Hamiltoniano (hacer en casa si hay tiempo). Pero, vamos a hacerlo de forma clásica. Despejando $\dot{\theta}$ en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

que se llama ecuación radial de la energía. Como $E = \text{cte}$, $\frac{dE}{dt} = 0$. Así, obtendríamos la ecuación del movimiento. Pero nosotros no vamos a hacer eso ahora (hacer en casa). Si llamamos $V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$, obtenemos:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

Resulta que si escogemos:

$$\vec{F} = m\dot{\theta}^2 \vec{r}$$

entonces:

$$F = \frac{L^2}{m^2 r^4} m r = \frac{L^2}{m r^3}$$

Y el potencial asociado es:

$$V = - \int F dr = \frac{L^2}{2mr^2}$$

De manera que el término $\frac{L^2}{2mr^2}$ es debido a una fuerza centrífuga (que, aunque no lo parezca es central y conservativa). Esta fuerza centrífuga coincide con la que vería un observador que se moviera con el ángulo θ . (Explicar en sentido inverso).

4.1.4. Ejemplo: caso del oscilador armónico isótropo

En el caso del oscilador armónico isótropo (caso del tema anterior):

07/11/2018 Dibujo 2 (gráfica V frente a r)

tanto en a como en b se da $\dot{r} = 0$. a y b son justo los semiejes de la elipse:

07/11/2018 Dibujo 3 (elipse)

En el caso del oscilador armónico isótropo, el centro de fuerzas está en el centro de la elipse. Pero en una órbita donde $F = \frac{k}{r^2}$, el centro de fuerzas estará en algún punto del eje mayor. En este último caso, los únicos dos puntos en los que $\dot{r} = 0$ será en la intersección de la trayectoria con el eje mayor de la elipse.

Si en la gráfica del potencial frente a la distancia al centro de fuerzas, la partícula tiene energía E' , la partícula únicamente podrá encontrarse a distancia r . Por lo que $\dot{r} = 0$ y la trayectoria es una circunferencia.

Observación 37. Esto último es importante, si tuviéramos algo del estilo:

07/11/2018 Dibujo 4 (potencial chungo)

En E_1 tendríamos una circunferencia y en E_2 tendríamos o bien una circunferencia o bien una elipse dependiendo de las condiciones iniciales.

Ejercicio 10. Hallar r para el caso $\dot{r} = 0$ del oscilador armónico isótropo:

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

Solución. $r_0^4 = \frac{L^2}{mk}$

Si ahora sustituimos en la ecuación radial de la energía el valor hallado de r_0 y derivando, podemos minimizar el potencial:

$$V_{eff,min} = L\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$V = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

Comprobar en casa:

$$T = V = \frac{E}{2}$$

Esto ocurre en el caso del oscilador armónico isótropo cuando la trayectoria es una circunferencia.

Volviendo a la gráfica [07/11/2018 Dibujo 2](#) en los puntos a y b se cumple que el potencial efectivo es igual a la energía total de manera que el valor de a y b son las raíces del polinomio:

$$r^4 - \frac{2E}{k}r^2 + \frac{L^2}{mk} = 0$$

(Demostrar que las soluciones siempre son reales: discriminante)

Si ahora, nuestra energía es el mínimo del potencial efectiva (órbita circular), tendríamos:

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = 0 \Leftrightarrow r_0^4 = \frac{L^2}{mk}$$

esto también es para el caso del oscilador armónico isótropo.

Ahora, como $L = mr_0^2\dot{\theta}$, sustituyendo tenemos:

$$r_0^4 = \frac{(mr_0^2\dot{\theta})^2}{mk} \Leftrightarrow 1 = m\frac{\dot{\theta}^2}{k} \Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{k}{m}$$

Pongamos las energías en el caso de la órbita circular $r = \text{cte}$.

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad V = \frac{1}{2}kr_0^2$$

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2mr_0^2} + \frac{1}{2}kr_0^2$$

Sustituimos $r_0^2 = \frac{L}{\sqrt{mk}}$ y llegamos a:

$$V = \frac{1}{2}k\frac{L}{\sqrt{mk}} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{L^2}{2mr_0^2} = \frac{L^2\sqrt{mk}}{2mL} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

En consecuencia, en este caso:

$$T = V = \frac{E}{2}$$

4.1.5. Cambio de órbitas, caso particular: oscilador armónico isótropo en órbita circular

Partimos de un movimiento circular de radio R con una energía E_i y momento angular L_i .

[08/11/2018 Dibujo 1 \(circunferencia 1\)](#)

Fuerza radial: Ahora, le damos un impulso radial hacia fuera con una velocidad v_r . Nos preguntamos cuál es la energía final y el momento angular final. Como vimos antes, $L_f = L_i$ pues una fuerza radial no hace momento de fuerzas y, en consecuencia el momento angular no cambia. Así, al ser $v^2 = R^2\dot{\theta}^2 + v_r^2$, E_f es de la forma:

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kR^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{I}{m}\right)^2 + E_i$$

donde $\frac{I}{m} = v_r$.

Fuera tangencial: Aplicamos una fuerza tangencial tal que $v_f = \frac{v_i}{2}$. En consecuencia:
08/11/2018 Dibujo 2 (circunferencia 2)

$$L_f = \frac{L_i}{2}$$

$$E_f = \frac{T_i}{4} + V_i$$

08/11/2018 Dibujo 3 (gráficas)

Podemos fácilmente localizar la nueva energía cualitativamente en la gráfica, porque en el punto de estudio se sigue cumpliendo $\dot{r} = 0$, por lo que la gráfica de la energía debe cortar al nuevo potencial efectivo cuando $\dot{r} = 0$.
(Hacer en casa el caso en el que aumenta la energía)

08/11/2018 Dibujo 4 (gráficas)

4.2. Ley cuadrática inversa

A partir de este momento vamos a considerar:

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$$

si $k > 0$ la fuerza es repulsiva y si $k < 0$ la fuerza es atractiva. De forma que, al ser $F = -\frac{dV}{dr}$.

$$V(r) = \frac{k}{r}$$

Y:

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}$$

En el caso de $k > 0$, tendríamos:

08/11/2018 Dibujo 5 (gráfica $\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}$)

Ejercicio 11. Una partícula de carga q se mueve en el campo creado por q' ($qq' > 0$), fija en O . Inicialmente q se encuentra muy lejos de O con v cuya dirección dista b de O . (b se llama parámetro de impacto). ¿Cuál es la mínima distancia de la partícula a O ? b es lo que aparece en el siguiente dibujo:

08/11/2018 Dibujo 1 (b)

Solución 1. En nuestro caso $k = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}$ y es $k > 0$ y $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$. La gráfica de r :

08/11/2018 Dibujo 2 (gráfica V frente a r)

Va a ocurrir lo representado en:

08/11/2018 Dibujo 3 (dispersión)

Va a ser $V = \frac{k}{r}$. Claramente, vemos que la energía cinética disminuye conforme disminuye r , pues entonces aumenta el potencial efectivo. Sabemos que en el punto en el punto r_1 en el que la carga q se encontrará más cerca de O será cuando $\dot{r} = 0 \Leftrightarrow E = V_{eff}$

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Podemos calcular la energía, sabiendo que cuando está muy lejos la velocidad es v y el potencial es despreciable en el infinito.

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

De la misma forma:

$$L = mbv$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{m^2b^2v^2}{2mr_1^2} + \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1}$$

Vamos a definir un parámetro a :

$$a := \frac{k}{2E} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 mv^2}$$

Con este parámetro obtenemos:

$$1 = \frac{b^2}{r_1^2} + 2\frac{a}{r_1} \Leftrightarrow r_1^2 - 2ar_1 - b^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_1 = a + \underbrace{\sqrt{a^2 + b^2}}_{=:c} = a + c$$

(La solución negativa no tiene sentido porque se cumple $\sqrt{a^2 + b^2} \geq a$). Gráficamente, obtenemos:
[08/11/2018 Dibujo 4 \(hipérbolas\)](#)

Ejercicio 12. Hacemos el mismo caso anterior cuando $k < 0$.

Solución.

[08/11/2018 Dibujo 5 \(caso \$k > 0\$ \)](#)

Nótese como hay una asíntota horizontal cuando $y = 0$.

Llamando $l := \frac{L^2}{m|k|}$, obtenemos:

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{|k|}{r} = |k| \left(\frac{l}{2r^2} - \frac{1}{r} \right)$$

Buscamos el punto que cumple:

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = 0 \Leftrightarrow \frac{-l}{r^3} + \frac{1}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = l$$

$$V_{eff,min} = |k| \left(\frac{l}{2l^2} - \frac{1}{l} \right) = -\frac{|k|}{2l} = \frac{V(l)}{2}$$

- Si $E = V_{eff,min} = -\frac{|k|}{2l}$, entonces el movimiento es circular y su radio es l . Además, tenemos:

$$T = E - V(l) = -\frac{V(l)}{2} = T \Leftrightarrow E = \frac{V(l)}{2}$$

Ahora, podemos sacar la velocidad:

$$\frac{|k|}{2l} = T = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{|k|}{ml}}$$

- Si $V_{eff,min} < E < 0$, entonces tendremos una órbita cerrada; $r_1 \leq r \leq r_2$ (una elipse)

[08/11/2018 Dibujo 6 \(elipse\)](#)

- Si $E = 0$, $r_1 = \frac{l}{2}$ y $v = 0$ cuando $r = \infty$, tenemos una parábola. $\nexists r_2$

[08/11/2018 Dibujo 7 \(parábola\)](#)

- Si $E > 0 \exists r_1, \nexists r_2$ y $v > 0$ cuando $r = \infty$; tenemos una hipérbola.

Ejercicio 13. Partimos de una órbita circular y la partícula sufre un impulso tangencial. $r = l$; $E = -\frac{|k|}{2l}$

Solución. Gráficamente tenemos:

$$L' = \frac{L}{2}$$

$$E' < E$$

4.3. Órbitas

Tenemos la ecuación radial de la energía:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

Recordemos:

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

Vamos a encontrar $r(\theta)$. Para ello vamos a reescribir:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta}$$

Ahora, hacemos el cambio de variable $u = \frac{1}{r} \Leftrightarrow r = \frac{1}{u}$ y en consecuencia:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}$$

A partir de lo anterior, obtenemos:

$$\dot{r} = \frac{L}{m} u^2 \left(-\frac{1}{u^2} \right) \frac{du}{d\theta} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta}$$

Así, sustituyendo en la ecuación radial de la energía, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \frac{L^2}{m^2} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{2m} u^2 + V\left(\frac{1}{u}\right) &= E \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{L^2}{2m} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] + V\left(\frac{1}{u}\right) &= E \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 &= \frac{2m}{L^2} \left[E - V\left(\frac{1}{u}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ahora, vamos a derivar lo anterior con respecto a θ :

$$2 \frac{du}{d\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} + 2u \frac{du}{d\theta} = -\frac{2m}{L^2} \underbrace{\frac{dV}{dr}}_{=-f(r)=-f\left(\frac{1}{u}\right) \neq \frac{dV}{du}} \frac{dr}{d\theta}$$

Sustituyendo $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}$, llegamos a:

$$\begin{aligned} 2 \frac{du}{d\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} + 2u \frac{du}{d\theta} &= -\frac{2m}{L^2} \frac{dV}{dr} \left(-\frac{1}{u^2} \right) \frac{du}{d\theta} \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= -\frac{m}{L^2} \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2} \end{aligned}$$

Observación 38. Haciendo estas cuentas, si yo conozco la trayectoria, puedo obtener la fuerza y viceversa.

4.3.1. Caso particular

Si consideramos $V(r) = \frac{k}{r} \Leftrightarrow V\left(\frac{1}{u}\right) = ku \Rightarrow f\left(\frac{1}{u}\right) = ku^2$. De esta forma, obtenemos:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-mk}{L^2}$$

Tomando el cambio de variable $u' = u + \frac{mk}{L^2}$. Si llamamos $l = \frac{L^2}{m|k|}$, el cambio de variable queda $u' = u + \frac{k}{l|k|}$. Y ahora, hacemos otro cambio de variable $z = lu' = lu + \underbrace{\frac{k}{|k|}}_{=\pm 1}$. De esta forma, llegamos a la ecuación:

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z = 0$$

Haciendo el mencionado cambio de variable de z en la ecuación 4.1, llegaríamos a:

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 + z^2 = e^2 \Rightarrow z = e \cos(\theta - \theta_0)$$

Pero nosotros vamos a hacerlo resolviendo la ecuación diferencial lineal en z . Definimos:

$$e^2 = \frac{2El}{|k|} + 1$$

Sabemos que dicha ecuación tendrá como solución:

$$z = a \cos(\theta - \theta_0)$$

Si sustituimos en 4.1, obtenemos:

$$[-a \sin(\theta - \theta_0)]^2 + [a \cos(\theta - \theta_0)]^2 = e^2 \Leftrightarrow a = e$$

En consecuencia, llegamos a:

$$z = e \cos(\theta - \theta_0) = \frac{l}{r} \pm 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r[e \cos(\theta - \theta_0) \mp 1] = l$$

donde el menos es para el caso $k > 0$ y el más es para el caso $k < 0$. La ecuación anterior es la de una cónica con uno de los focos en el origen de las coordenadas polares (r, θ) .

Si suponemos el caso particular $\theta = \theta_0$, llegamos a:

$$r_1 = \frac{l}{e \mp 1}$$

12/11/2018 Dibujo 1 (elipse, parábola, etc)

Si suponemos el caso particular $\theta = \theta_0 + \pi$, obtenemos:

$$r_2 = \frac{l}{-e \mp 1}$$

Si suponemos el caso particular $\theta = \theta_0 + \frac{\pi}{2}$:

$$r = \mp l$$

Observación 39. θ_0 es el ángulo que forma el punto más cercano al origen de coordenadas.

4.3.2. Valores de la excentricidad e

1. $e = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{circunferencia} \\ E = -\frac{|k|}{2l} \end{cases}$
2. $0 < e < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{elipse} \\ E < 0 \end{cases}$
3. $e = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{parábola} \\ E = 0 \end{cases}$
4. $e > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{hipérbola} \\ E > 0 \end{cases}$

Ahora, vamos a suponer que la fuerza es atractiva:

1. $e = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{circunferencia} \\ E = \frac{k}{2l} \\ r_1 = r_2 = l \end{cases}$
2. $0 < e < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{elipse} \\ E < 0 \\ r_1 = \frac{l}{1+e} \\ r_2 = \frac{l}{1-e} \end{cases}$

Ahora, recuperamos la generalidad, es decir para fuerzas atractivas y repulsivas.

1. $e = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{parábola} \\ E = 0 \\ r_1 = \frac{l}{2} \end{cases}$
2. $e > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{hipérbola} \\ E > 0 \\ r_1 = \frac{l}{e-1} \text{ si } k > 0 \\ r_1 = \frac{l}{e+1} \text{ si } k < 0 \end{cases}$

A partir de la ecuación anterior de la trayectoria, tenemos que en el caso $r \rightarrow \infty$, debe ser necesariamente:

$$l \in \mathbb{R} = \underbrace{r}_{\rightarrow \infty} \underbrace{[e \cos(\theta - \theta_0) \mp 1]}_{\rightarrow 0}$$

para que l pueda ser un número real. Entonces:

$$e \cos(\theta - \theta_0) \mp 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta - \theta_0) = \pm \frac{1}{e}$$

12/11/2018 Dibujo 2 (hipérbola con asíntotas)

Problemas para casa: 3.16-3.19

Ejemplo 19. Tomamos un $V = \frac{k}{r^2} = ku^2 \Leftrightarrow f(r) = f\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{dV}{dr} = \frac{2k}{r^3} = 2ku^3$
Partimos de:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mf\left(\frac{1}{u}\right)}{L^2u^2}$$

Sustituimos:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{2ku^3}{u^2} \Leftrightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + \underbrace{\left(1 + \frac{m2k}{L^2}\right)}_{=:k'} u = 0$$

Ahora, llegamos a varios casos dependiendo del signo de k' :

1. Si $k' > 0$:

$$u = a \cos \left(\sqrt{k'} (\theta - \theta_0) \right)$$

Sustituyendo en $\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2} [E - V(\frac{1}{u})]$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 &= \frac{2mE}{L^2} - \frac{2m}{L^2} k u^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \underbrace{\left(1 + \frac{2mk}{L^2}\right)}_{=k'} &= \frac{2mE}{L^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 k' &= \frac{2mE}{L^2} \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{2mE}{k' L^2}} \end{aligned}$$

2. Si $k' < 0$:

$$u = a \cosh \left(\sqrt{k'} (\theta - \theta_0) \right)$$

3. Si $k' = 0$:

$$u = a (\theta - \theta_0)$$

Ejemplo 20. Velocidad de escape de la superficie de la Tierra.

Esa es la velocidad inicial tal que el cuerpo llegue al infinito con velocidad nula. Es decir, estamos en el caso $E = 0$. Por tanto:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$$

donde $g = \frac{GM}{R^2}$. En el caso de la Tierra con los datos $R = 6370$ km y $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$, obtenemos: $v_e = 11,2 \frac{km}{s}$

Ejemplo 21. ¿A qué distancia llegará un objeto lanzado con la mitad de la velocidad de escape? Es decir:

$$v' = \frac{v_e}{2} = \sqrt{\frac{GM}{2R}}$$

13/11/2018 Dibujo 1 (escape)

Ahora:

$$E' = V_{eff} = \frac{L^2}{2mr_2^2} - \frac{GMm}{r_2} = -\frac{3}{4} \frac{GMm}{R}$$

Ahora, haciendo $L = mRv' \sin \alpha$, llegamos a:

$$3r^2 - 4Rr + R^2 \sin^2 \alpha = 0$$

La solución de la ecuación anterior es:

$$r = \frac{2}{3} R \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha} \right]$$

La solución positiva se corresponde a r^2 y la negativa se corresponde a r_1 . Calculemos la mayor altura que se puede alcanzar sobre la superficie de la Tierra:

$$h_2 = r_2 - R = \frac{R}{3} \left[-1 - \sqrt{4 - 3 \sin^2 \alpha} \right] < \frac{R}{3}$$

Queremos hallar la ecuación de la trayectoria:

$$l = r [e \cos (\theta - \theta_0) + 1]$$

Para ello:

$$l = \frac{L^2}{m|k|} = \frac{R}{2} \sin^2 \alpha$$

$$e^2 = \frac{2El}{|k|} + 1 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha$$

También podríamos hallar e y l a través de las ecuaciones:

$$r_1 = \frac{l}{1+e} \quad r_2 = \frac{l}{1-e}$$

13/11/2018 Dibujo 2 (anterior ampliado)

Vamos con el alcance:

14/11/2018 Dibujo 2 (trayectoria Tierra)

El alcance negro es $(\theta_1 - \theta_2) R$, mientras que el verde es $(\theta_2 - \theta_1) R$. ¿Cómo obtenemos los valores de θ_1 y θ_2 ? Pues con lo siguiente:

$$l = r [e \cos (\theta - \theta_0) + 1]$$

Ahora, cuando $r = R$, obtenemos:

$$\cos (\theta_i - \theta_0) = \left[\frac{l}{R} - 1 \right] \frac{1}{e} = \frac{\frac{1}{2} \sin^2 \alpha - 1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha}}$$

Como $\theta_1 - \theta_0 = -(\theta_2 - \theta_0)$ por simetría, debe ser:

$$\text{alcance} = (\theta_2 - \theta_1) R = [(\theta_2 - \theta_0) - (\theta_1 - \theta_0)] R = 2 (\theta_2 - \theta_0) R$$

Ahora, obtengamos el alcance máximo. Para ello vamos a hallar:

$$0 = \frac{d}{d\alpha} [\cos (\theta_i - \theta_0)] \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha = 54,7^\circ$$

Sustituyendo, llegamos a:

$$\cos (\theta_i - \theta_0) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow \theta_i - \theta_0 = \pm 160,5^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 - \theta_0 = -160,5^\circ = 199,47^\circ \\ \theta_2 - \theta_0 = 160,5^\circ \end{cases}$$

De manera que el alcance máximo es:

$$\text{alcance} = (199,47^\circ - 160,5^\circ) \frac{\pi}{180} R = 0,68 R$$

O, también podemos dar el alcance como 2π menos el valor anterior:

$$\text{alcance} = (2\pi - 0,68) R$$

4.3.3. Nota sobre hipérbolas

14/11/2018 Dibujo 1 (hipérbola con asíntotas)

$$l = r [e \cos (\theta - \theta_0) \mp 1]$$

Cuando $r \rightarrow \infty$, debe ser:

$$\cos (\theta - \theta_0) = \pm \frac{1}{e}$$

donde la solución positiva se corresponde con $k > 0$ (fuerzas repulsivas) y la solución negativa para fuerzas atractivas $k < 0$. La hipérbola representada antes puede corresponderse con dos valores de θ_0 : $\theta_0 = 0$ o $\theta_0 = \pi$.

1. Si $\theta_0 = 0$, entonces obtenemos $\cos \theta = \pm \frac{1}{e}$, donde el valor positivo se corresponde con la rama repulsiva de la hipérbola y el valor negativo se corresponde con la rama atractiva de la hipérbola. En este caso es:

$$r_{1,at} = \frac{1}{e+1} \quad r_1 = \frac{l}{e \mp 1} \quad r_{1,re} = \frac{1}{1-e}$$

2. Si, por el contrario, $\theta_0 = \pi$, entonces obtenemos:

$$\pm \frac{1}{e} = \cos(\theta - \pi) = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \mp \frac{1}{e}$$

En este caso, el valor negativo se corresponde con la rama repulsiva, y el positivo se corresponde con la rama atractiva.ç

4.4. Obtención de la ecuación en cartesianas

4.4.1. Para la parábola

$$\text{parábola} \Leftrightarrow e = 1 \Leftrightarrow E = 0 \Leftrightarrow k < 0 \stackrel{\theta_0=0}{\Leftrightarrow} r[\cos \theta + 1] = l$$

Ahora, tomamos:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

Por tanto, se cumple:

$$x + r = l \Leftrightarrow r = l - x$$

$$r^2 = (l - x)^2$$

Sustituyendo:

$$x^2 + y^2 = l^2 + x^2 - 2lx \Leftrightarrow y^2 = -2l \left(x - \frac{l}{2} \right)$$

Que es la ecuación de una parábola tumbada. Recordemos que una parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado foco y una recta llamada eje. El foco de la parábola es el centro de fuerzas de nuestro sistema. Gráficamente:

15/11/2018 Dibujo 1 (parábola Andrés)

4.4.2. Para elipses e hipérbolas

Recordemos que las ecuaciones de la hipérbola y la elipse en cartesianas son:

$$1. \text{ Hipérbola: } 1 = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

$$2. \text{ Elipse: } 1 = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

En ambos casos se cumple: $e = \frac{c}{a}$. En el caso de la elipse se cumple también $a^2 = b^2 + c^2$ y en la hipérbola se cumple $c^2 = a^2 - b^2$.

15/11/2018 Dibujo 2 (elipse e hipérbola)

Bien, ahora obtengamos las ecuaciones. Tomando $\theta_0 = 0$, por simplicidad:

$$e \neq 1 \Leftrightarrow r[e \cos \theta \mp 1] = l \Leftrightarrow re \cos \theta \mp r = l \Leftrightarrow ex \pm r = l \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mp r)^2 = (l - ex)^2 \Leftrightarrow [x^2(1 - e^2) + y^2 + 2elx](1 - e^2) = l^2(1 - e^2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \frac{[x(1-e^2) + el]^2}{l^2} + \frac{y^2(1-e^2)}{l^2} - e^2 l^2 = \frac{l^2}{l^2} - e^2 l^2 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\frac{\frac{x}{l}}{1-e^2} + e \right]^2 + \left(\frac{y}{l\sqrt{1-e^2}} \right)^2 = 1 & \text{si } e < 1 \\ \left[\frac{\frac{x}{l}}{e^2-1} - e \right]^2 - \left(\frac{y}{l\sqrt{e^2-1}} \right)^2 = 1 & \text{si } e > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\left[x - \left(-\frac{el}{1-e^2} \right) \right]^2}{\left[\frac{l}{1-e^2} \right]^2} + \frac{(y-0)^2}{l^2(1-e^2)} = 1 & \text{si } e < 1 \\ \frac{\left[x - \frac{el}{e^2-1} \right]^2}{\left[\frac{l}{e^2-1} \right]^2} - \frac{y^2}{l^2(e^2-1)} = 1 & \text{si } e > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

En el caso de la elipse, hemos obtenido:

15/11/2018 Dibujo 3 (elipse con foco en el origen)

Nótese como el centro de fuerzas está en un foco de la elipse y que el centro de la elipse queda a la izquierda.

Ahora combinando las ecuaciones (para la elipse):

$$r_1 = \frac{l}{1+e} \quad r_2 = \frac{l}{1-e} \quad r_1 + r_2 = 2a$$

Llegamos a:

$$a = \frac{l}{1-e^2} \quad b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1-e^2) = 2\frac{l^2}{1-e^2} = al$$

Claramente:

$$x_0 = -\frac{el}{1-e^2} = -ae = -c$$

En función de los parámetros de nuestra órbita, obtenemos los siguientes valores para los parámetros de la elipse:

$$\begin{cases} l = \frac{L^2}{m|k|} \\ e^2 = \frac{2El}{|k|} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{l}{-2El|k|} = -\frac{|k|}{2E} = \frac{|k|}{2|E|} = \frac{k}{2E} \Leftrightarrow E = \frac{k}{2a} \\ b^2 = \frac{L^2}{m|k|} \frac{|k|}{2|E|} = \frac{L^2}{2m|E|} \end{cases}$$

En el caso de la hipérbola, hemos obtenido:

15/11/2018 Dibujo 4 (hipérbola)

En el caso de la hipérbola, tenemos un valor para r_1 cuando $k > 0$ y un valor para r_2 cuando $k < 0$. Definamos:

$$\begin{aligned}
r_{1+} &:= r_1 \text{ cuando } k > 0 \\
r_{1-} &:= r_2 \text{ cuando } k < 0
\end{aligned}$$

Operando:

$$r_{1+} = a + c = \frac{l}{e-1}$$

$$r_{1-} = c - a = \frac{l}{e+1}$$

$$r_{1-} + r_{1+} = 2c$$

$$r_{1+} - r_{1-} = 2a$$

En este caso obtenemos:

$$a = \frac{l}{e^2-1} \quad b^2 = al \quad \cos \theta = \frac{1}{e} = \frac{a}{c}$$

y θ es el ángulo de dispersión (hablaremos de ello más adelante).

Claramente:

$$x_0 = \frac{el}{e^2 - 1} = ae$$

En función de los parámetros de nuestra órbita, obtenemos los siguientes valores para los parámetros de la hipérbola:

$$\begin{cases} l = \frac{L^2}{m|k|} \\ e^2 = \frac{2El}{|k|} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{l}{2E - \frac{L^2}{m|k|}} = \frac{|k|}{2E} \Leftrightarrow E = \frac{|k|}{2a} \\ b^2 = \frac{L^2}{m|k|} \frac{|k|}{2E} = \frac{L^2}{2mE} \end{cases}$$

Ahora, queremos sacar el ángulo de dispersión. Sabemos que debe ser cierto:

$$\pi - 2\theta = \Theta$$

Mirando el dibujo, vemos que es:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{b}{a} = \tan \left(\frac{\pi - \Theta}{2} \right) = \cot \frac{\Theta}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b &= a \cot \frac{\Theta}{2} = \frac{|k|}{mv^2} \cot \frac{\Theta}{2} \end{aligned}$$

Ejercicios para casa: 3.16, 3.18, 3.3, 3.5, 3.8, 3.11, 3.14, 3.15

4.5. Periodo de la órbita elíptica

Recordemos que por ser una fuerza central, $L = \text{cte}$ y se cumple:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Esto se cumple para cualquier fuerza central. Ahora, como el área de la elipse es $A = \pi ab$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{L}{2m} = \frac{\pi ab}{T} \\ \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 &= \frac{(mab)^2}{L^2} = \frac{m^2 a^2}{L^2} al = \frac{m^2 a^3}{L^2} \frac{L^2}{m|k|} \stackrel{|k|=GMm}{=} \frac{a^3}{GM} = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \end{aligned}$$

20/11/2018 Dibujo 1 (periastro, apoastro)

El punto más cercano de la órbita al cuerpo central se llama periastro y el más alejado se llama apoastro. Tradicionalmente, se sustituye 'astro' por el astro correspondiente (perigeo, apogeo, perihelio, apohelio).

Ejercicio 14. Fijémonos en el dibujo anterior. Supongamos que es la órbita de la Tierra alrededor del Sol, que tiene una excentricidad $e = 0,0167$. Calculemos la diferencia en días del tiempo que le cuesta recorrer el área verde y el área morada.

20/11/2018 Dibujo 2 (áreas verde y morada)

$$A_{\text{verde}} = \frac{\pi ab}{2} + bc$$

$$A_{\text{morado}} = \frac{\pi ab}{2} - bc$$

$$A = \frac{\pi ab}{2} \pm bae = ba \left[\frac{\pi}{2} \pm e \right]$$

Ahora, debe cumplirse, comparando con la media elipse:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta A}{A} = \frac{2eab}{\left(\frac{\pi}{2} + e\right)ab} = \frac{2e}{\frac{\pi}{2} + e} \approx \frac{4e}{\pi} \approx 2,1 \%$$

O, alternativamente, comparando con la elipse entera:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{2eba}{\pi ab} = 1,06 \% \cdot 1 \text{ año} = 3,88 \text{ días}$$

4.6. Impulsos radiales

Ejemplo 22. Tenemos una órbita circular de radio R :

20/11/2018 Dibujo 3

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$E = -\frac{GMm}{2R}$$

$$V = -\frac{GMm}{R}$$

$$T = \frac{GMm}{2R} = -\frac{V}{2}$$

$$l = R$$

$$L = mR\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Ahora, le damos un impulso radial hacia dentro de velocidad $v_r = v_c$. Obtenemos:

$$L' = L \quad l' = l$$

$$E' = E + \frac{1}{2}mv_r^2 = E + T = T + V + T = V + 2T = V - V = 0$$

En consecuencia:

$$r_1 = \frac{R}{2} \quad e = 1 \quad E = 0$$

Ejemplo 23. Tenemos, de nuevo, otra órbita circular de radio R y al objeto que orbita le damos un impulso radial con $v_r = \frac{v_c}{2}$. Obtenemos:

$$L' = L \quad l' = l$$

$$E' = E + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_c}{2}\right)^2 = E + \frac{T}{4} = T + V + \frac{T}{4} = V + \frac{5T}{4} = V - \frac{5}{8}V = \frac{3}{8}V = -\frac{3}{8}\frac{GMm}{R}$$

Ahora, como debe ser:

$$E = -\frac{GMm}{2a} \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}R$$

$$b^2 = al = \frac{4}{3}R^2$$

A continuación:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{4}{9}R^2 \Leftrightarrow c = \frac{2}{3}R$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 24. Tenemos, de nuevo, otra órbita circular de radio R y al objeto que orbita le damos un impulso radial con $v_r = 2v_c$. Obtenemos:

$$L' = L \quad l' = l$$

$$E = \frac{3}{2} \frac{GMm}{R}$$

Debe cumplirse:

$$E = \frac{GMm}{2a} \Leftrightarrow a = \frac{R}{3}$$

$$b^2 = al = \frac{R^2}{3}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{4}{9}R^2 \Leftrightarrow c = \frac{2}{3}R$$

Y, en consecuencia:

$$e = 2$$

Hacer estos ejemplos más detalladamente en casa.

Ejemplo 25. Supongamos la siguiente situación:

20/11/2018 Dibujo 4

Es decir, supongamos que la órbita de la Tierra es circular y tenemos un cometa que describe una órbita con los parámetros $r_1 = \frac{R}{2}$ y $v_1 = 2v_c = 2\sqrt{\frac{GM_S}{R}}$ donde v_c es la velocidad de la órbita circular de la Tierra.

Obtenemos el tipo de órbita del cometa. Para ello, hallemos la energía:

$$E = -\frac{2GM_S m}{R} + \frac{1}{2}m4\frac{GM_S}{R} = 0$$

Luego tenemos una parábola. También, tenemos $l = R$.

Ahora, obtenemos la velocidad que tiene el cometa cuando intersecta la órbita de la Tierra. Lo hacemos por energías:

$$E = 0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Ahora, calculemos el ángulo α que forma el vector velocidad con la trayectoria de la órbita de la Tierra.

Para ello, calculemos el momento angular. Podemos hallarlo en el punto r_1 donde sabemos que $\dot{r}_1 = 0$ y, en consecuencia, r y v son perpendiculares:

$$L = m\frac{R}{2}2\sqrt{\frac{GM}{R}} = m\sqrt{GMR}$$

Como el momento angular se conserva, el momento angular en el punto de intersección debe ser el momento angular inicial:

$$m\sqrt{GMR} = mR\sqrt{\frac{2GM}{R}} \sin \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

¿Cuánto tiempo está el cometa dentro de la órbita terrestre?

4.7. Dispersión de partículas

Imaginemos una esfera lisa y rígida de radio R (que será el blanco).

21/11/2018 Dibujo 1 (esfera, partículas)

Supongamos que los choques son elásticos. Entonces en el choque la fuerza que actúa sobre la partícula en el choque es central conservativa. El momento lineal **no** se conserva en este caso; pero sí se conserva el momento angular (porque la fuerza es central). Al ser un choque elástico, se conserva la energía y, en consecuencia:

$$E = \text{cte} \Rightarrow T = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \text{cte} \Rightarrow v = \text{cte}$$

Como se conserva el momento angular:

$$L_O = \text{cte} \Rightarrow v_\theta = \text{cte} \Rightarrow p_\theta = \text{cte}$$

21/11/2018 Dibujo 2 (esfera, rebote, reflexión)

21/11/2018 Dibujo 3 (esfera, rebote, reflexión, con parámetro de impacto y $\theta = \pi - 2\alpha$)

Por trigonometría obtenemos:

$$b = R \sin \alpha = R \sin \left(\frac{\pi - \theta}{2} \right) = R \cos \frac{\theta}{2}$$

21/11/2018 Dibujo 4 (flujo, esferas)

Definición 54. Llamamos flujo de partículas o intensidad del haz a:

$$\phi := \frac{\# \text{partículas}}{At}$$

donde A es el área de la superficie y t es el tiempo. Si además, definimos:

$$N = \frac{\# \text{partículas}}{t}$$

Entonces, podemos dar el flujo en forma diferencial:

$$\Phi = \frac{dN}{dA}$$

También, podemos escribir N como:

$$N = \phi \pi R^2 = \phi \sigma$$

donde σ es la sección eficaz total.

21/11/2018 Dibujo 5 (choque, detector, db , $d\theta$, dibujo complementario, poner a la derecha)

Alternativamente, gracias al dibujo anterior, podemos definir la sección eficaz de la siguiente forma:

$$d\sigma = b d\varphi |db|$$

El ángulo sólido es:

$$d\Omega = \frac{dA}{L^2} = \frac{L^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{L^2} = \sin \theta d\theta d\varphi$$

Esto nos permite definir la sección eficaz diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

Ahora, podemos hacer:

$$db = -\frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$d\sigma = b d\varphi |db| = \frac{R^2}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta d\varphi$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4} \Leftrightarrow \sigma = \int d\sigma = \pi R^2$$

$$dN = \phi \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dA}{L^2}$$

Definimos n como el número de blancos por unidad de volumen:

$$n = \frac{\#\text{blancos}}{V}$$

22/11/2018 Dibujo 1 (Volumen con n, σ, v, x)

En este dV hay $n\sigma x$ choques. Si ahora yo divido lo que ha avanzado mi partícula por el número de choques obtengo:

$$\lambda := \frac{x}{n\sigma x} = \frac{1}{n\sigma}$$

que es el recorrido libre medio. La interpretación física de esto es la distancia media que recorre mi partícula entre choque y choque.

22/11/2018 Dibujo 2 (3D, paralelepípedo)

Entonces la diferencia entre el número de partículas que entran y que salen por unidad de tiempo es:

$$A\Phi(x) - A\Phi(x+dx) = \Phi(x) A\sigma n dx \Leftrightarrow$$

$$\Phi(x) - \Phi(x+dx) = \Phi(x) \sigma n dx$$

Ahora como por definición de derivada es:

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\Phi(x+dx) - \Phi(x)}{dx}$$

Tenemos:

$$\frac{d\Phi}{dx} = -\sigma n \Phi(x) \Leftrightarrow \frac{d\Phi}{\Phi} = -\sigma n dx \Leftrightarrow [\ln \phi]_{\Phi(0)}^{\Phi(x)} = [-\sigma \chi]_0^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi(x) = \Phi(0) e^{-n\sigma x} = \phi(0) e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

Ejemplo 26. ¿Cómo es un problema de dispersión en física atómica? Cogemos un blanco (una capa fina de material) que contiene N_1 átomos donde $N_1 = nV$. Sea x el espesor del blanco. Por lo probado antes, tendré:

$$\Phi(0) - \Phi(x) = \Phi(0) (1 - e^{-n\sigma x})$$

Cuando $x \ll \lambda$, mediante Taylor (hacerlo en casa), lo anterior puede aproximarse por:

$$\Phi(0) - \Phi(x) \approx \Phi(0) n\sigma x = \Phi(0) \frac{x}{\lambda}$$

En este caso, será:

$$dN = A\Phi(0) n d\sigma x = N_1 \phi d\sigma$$

y, en consecuencia, multiplicando y dividiendo por $d\Omega$:

$$dN = N_1 \Phi(0) \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dA}{L^2}$$

(Esto ponerlo en una proposición, no en un ejemplo)

Ejemplo 27 (Dispersión de Rutherford (1911)). Se utilizaron partículas alfa, que son núcleos de átomos de helio, es decir, con $q = +2e$. De manera que, si yo tengo:

22/11/2018 Dibujo 3 (cargas q, q')

y no sé cuál es el valor de la carga q' , puedo hacer lo siguiente. Primero calcularemos la sección eficaz. Para ello, lanzamos una partícula v , que sabemos que trazará una trayectoria hiperbólica (por lo que hemos visto de órbitas). Nótese que en el fondo una fuerza central es equivalente a un choque, pues cumple las mismas condiciones que una fuerza de impacto.

22/11/2018 Dibujo 4 (hipérbola a, b, c)

Tenemos, entonces:

$$b = a \cot \frac{\theta}{2}$$

donde $a = \frac{k}{2E}$ donde $k = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}$ y $E = \frac{1}{mv^2}$ porque la partícula sale muy lejos del blanco de manera que la energía potencial es despreciable. Entonces:

$$a = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{mv^2}$$

Ahora, debemos obtener db .

$$db = \frac{ad\theta}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Por tanto:

$$d\sigma = \frac{a^2 \cos \frac{\theta}{2}}{2\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta d\varphi = \frac{2a^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{4\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\theta d\varphi$$

Dividiendo a ambos lados por $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4\sin^4 \frac{\theta}{2}} \propto q'^2 \propto Z^2$$

de esta forma la sección eficaz depende de Z^2 .

Ahora, calculemos r_1 .

$$r_1 = a + c = a + \sqrt{a^2 + b^2} = r_1$$

Me interesa, por tanto, partículas muy energéticas que salgan rebotadas en ángulos grandes. Porque si θ es muy grande, $\cot \frac{\theta}{2}$ es muy pequeño y, en consecuencia si, además b es pequeño, entonces a es pequeño y reduciremos el valor de r_1 , acercándonos al radio del átomo. Cuando lleguemos a un límite, de forma que no podamos hacer que el ángulo crezca más, habremos encontrado el radio del átomo.

Sin embargo, si hacemos la integral, ésta diverge:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \infty$$

De hecho, en mecánica clásica, cualquier potencial que decaiga con $\frac{1}{r^\alpha}$ con $\alpha \geq 1$, la sigma diverge a infinito. Sin embargo, en mecánica cuántica, sabemos que si el potencial decae igual o más rápido que $\frac{1}{r^2}$, es decir, por ejemplo, con $\frac{1}{r^3}$ o $\frac{1}{r^4}$, entonces σ es finita.

Volviendo a nuestro problema, no me interesa la sigma total (que ya vemos que diverge, aunque, en realidad esto no es exacto pues cuando estamos fuera del radio atómico la carga total del átomo es nula), sólo me interesa la sigma de los ángulos grandes. Entonces, calculando σ para un θ mayor que θ_0 , tenemos:

$$\int_{\theta=\theta_0}^{\infty} d\sigma =$$

5. El problema de dos cuerpos

Tenemos un sistema aislado (que no haya fuerzas externas o que las fuerzas externas sean constantes) con dos cuerpos de masas m_1 y m_2 .

27/11/2018 Dibujo 1 (sistema de referencia, dos cuerpos)

Llamamos \vec{F} a la fuerza que ejerce 2 sobre 1 y \vec{F}_1 y \vec{F}_2 son las fuerzas externas que actúan sobre 1 y 2, respectivamente.

Por la segunda ley de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, tenemos:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F} + \vec{F}_1 \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F} + \vec{F}_2 \end{cases}$$

Si sumamos ambas ecuaciones obtenemos:

$$\underbrace{m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2}_{=M\ddot{\vec{R}}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

pues $\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ y $M = m_1 + m_2$. Obtenemos que la aceleración del centro de masas por la masa total del sistema es igual a la suma de las fuerzas externas.

Ahora, llamemos $\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Dividiendo por m_1 y m_2 en la primera y segunda ecuación, respectivamente, y restando ambas ecuaciones llegamos a:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}}{m_1} + \frac{\vec{F}_1}{m_1} + \frac{\vec{F}}{m_2} - \frac{\vec{F}_2}{m_2}$$

Si $\exists \vec{g}$ tal que:

$$\frac{\vec{F}_1}{m_1} = \vec{g} = \frac{\vec{F}_2}{m_2}$$

es decir, tenemos un campo de fuerzas externo que es constante, la ecuación anterior se simplifica a:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}_{=:\frac{1}{\mu}} = \frac{\vec{F}}{\mu} \Leftrightarrow \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Si \vec{F} fuese la fuerza gravitatoria:

$$\vec{F} = -\frac{G(m_1 + m_2)\mu}{r^2}\hat{r}$$

es decir, lo mismo que en el tema anterior, sólo que con masas la masa total y la masa reducida en vez de m_1 y m_2 .

Ejemplo 28. La estrella sirio es un sistema binario con estrellas A y B . Conocemos:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{r_1^*}{r_2^*} \approx 2, 2$$

Ejemplo 29. Sistema Tierra-Luna en torno al sol (primera aproximación, explicar) valor del campo el mismo, dirección casi igual, despreciamos.

Supongamos:

$$\vec{F}_1 = m_1\vec{g}$$

$$\vec{F}_2 = m_2\vec{g}$$

Teníamos:

$$M\ddot{\vec{R}} = M\vec{g} \Leftrightarrow \ddot{\vec{R}} = \vec{g}$$

Si $\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow M\dot{\vec{R}} = \text{cte} \Rightarrow \vec{P} = \text{cte}$.

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Haciendo cuentas con las dos ecuaciones anteriores, llegamos a:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}_1^*$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}_2^*$$

De forma que debe ser:

$$\vec{r}_2^* = -\frac{m_1}{M}\vec{r}$$

$$\vec{r}_1^* = \frac{m_2}{M}\vec{r}$$

Tomando módulos y dividiendo, obtengo:

$$\frac{r_2^*}{r_1^*} = \frac{m_1}{m_2}$$

Hacer desarrollo entero en casa:

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= m_1\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + m_1\vec{r}_1^* \times \dot{\vec{r}}_1^* + m_2\vec{r}_2^* \times \dot{\vec{r}}_2^* = \\ &= M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + m_1 \left(\frac{m_2}{M}\vec{r} \right) \times \left(\frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}} \right) + m_2 \left(\frac{m_1}{M} \right)^2 (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \\ &= M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \left[m_1 \left(\frac{m_2}{M} \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{M} \right)^2 \right] \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \underbrace{\mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}}_{=:\vec{L}^*} \\ T &= \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{*2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^{*2} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2}_{=:T^*}\end{aligned}$$

$$\vec{P}^* = \vec{0}$$

$$m_1\dot{\vec{r}}_1^* = -m_2\dot{\vec{r}}_2^*$$

Ahora, si \vec{F} es conservativa, es función $\mathfrak{F}(\vec{r})$, tiene un potencial asociado $V_{int}(\vec{r})$. Por otra parte, podemos escribir el potencial de un campo externo constante como $V = -m\vec{g} \cdot \vec{r}$.

27/11/2018 Dibujo 2 (potencial de un campo constante)

En estas condiciones, estudiemos el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - [m_1\vec{g}\vec{r}_1 - m_2\vec{g}\vec{r}_2 + V_{int}(\vec{r})] =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + M \vec{g} \cdot \vec{R} \right]}_{\text{centro de masas}} + \underbrace{\left[\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V_{int}(\vec{r}) \right]}_{\text{distancia relativa}}$$

Como, podemos ver, el lagrangiano es susceptible de separarse en dos lagrangianos, uno para el centro de masas y otro para la distancia relativa. Es decir, resolver un problema de dos cuerpos de estas características es equivalente a resolver dos problemas de un cuerpo.

5.1. Sistema de referencia centro de masas

28/11/2018 Dibujo 1 (Centro de masas)

A pesar de ser un sistema de referencia acelerado, el sistema de referencia «centro de masas» ofrece las siguientes ventajas:

$$\vec{R}^* = \vec{0} \quad \vec{P}^* = \vec{0}$$

Ahora, definimos:

$$\vec{p}^* = \vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^*$$

De forma que:

$$\vec{p}^* = m_1 \dot{\vec{r}}_1 = \underbrace{\frac{m_1 m_2}{M}}_{=\mu} \dot{\vec{r}} = \mu \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{r}_1^* = \frac{m_2}{M} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2^* = -\frac{m_1}{M} \vec{r}$$

$$I^* = m_1 \vec{r}_1^{*2} + m_2 \vec{r}_2^{*2} = \mu r^2$$

La estrategia para resolver los problemas de este tipo será:

1. Resolver el problema del tema anterior y hallar r .
2. Obtener \vec{r}_1^* y \vec{r}_2^* .
3. Determinar \vec{r}_1 y \vec{r}_2 .

Obtengamos el momento lineal de cada partícula:

$$\vec{p}_1 = m_1 \dot{\vec{r}}_1 = m_1 \dot{\vec{R}} + \vec{p}^*$$

$$\vec{p}_2 = m_2 \dot{\vec{r}}_2 = m_2 \dot{\vec{R}} - \vec{p}^*$$

Además:

$$\vec{L}^* = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{p}^*$$

$$T^* = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 = \frac{\vec{p}^{*2}}{2\mu}$$

Destacamos que todo lo anterior únicamente sirve para un sistema de dos partículas sometidas a un campo externo constante. Adicionalmente, (estas expresiones valen para cualquier sistema de partículas):

$$\vec{P} = M \dot{\vec{R}}$$

$$\vec{L} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{L}^*$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + T^*$$

5.2. Interacción gravitatoria

28/11/2018 Dibujo 2 (Tierra-Luna)

Ejemplo 30. Influencia de la masa de luna en su periodo orbital. Sabemos:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_T M_L}{r^2} \hat{r} = -\frac{G(M_T + m_L)\mu}{r^2} \hat{r}$$

Ahora podemos usar la tercera ley de Kepler:

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^3 = \frac{a^3}{G(M_T + M_L)}$$

Sabiendo $\frac{M_T}{M_L} = 18,3$ y $\frac{M_{Plutón}}{M_{Caronte}} = 81,3$. Si calculamos el periodo despreciando la masa de la luna, obtenemos:

$$27,44 \text{ días} = 2370960 \text{ s}$$

Mientras que si no despreciamos la masa de la luna, obtenemos:

$$2356512 \text{ s}$$

La diferencia en el periodo es de unas cuatro horas $\Delta T \approx 4 \text{ h}$.

Ejemplo 31. Consideremos la órbita del sistema Tierra-Luna en torno al Sol.

28/11/2018 Dibujo 3 (Tierra-Luna-Sol)

$$\vec{r}_2^* = -\frac{m_1}{M} \vec{r}$$

$$\vec{r}_1^* = \frac{m_2}{M} \vec{r}$$

$$a_2 = a_T = \frac{m_1}{M} a = \frac{m_L}{m_T + m_L} a = \frac{81,3}{82,3} a = a_L$$

$$a_1 = a_L = \frac{m_2}{M} a = \frac{m_T}{m_T + m_L} a = \frac{1}{82,3} a = a_T = 4670 \text{ km}$$

$$A = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$$

$$\frac{a_2}{A} = 3,11 \cdot 10^{-5} \text{ km}$$

La posición del sol vista desde la Tierra varía un ángulo $6,4''$ al mes.

29/11/2018 Dibujo 1 (Elipse, m_1 , m_2 . centro de masas)

29/11/2018 Dibujo 2 (órbitas en torno al centro de masas, elipses)

29/11/2018 Dibujo 3 (órbitas en torno al centro de masas, circunferencias)

29/11/2018 Dibujo 4 (órbitas en torno al centro de masas, parábolas)

29/11/2018 Dibujo 5 (órbitas en torno al centro de masas, hipérbola)

5.3. Colisiones elásticas

5.3.1. Repaso de primero

29/11/2018 Dibujo 6 (colisiones)

En un colisión siempre se cumple:

$$\vec{P} = \vec{cte} \Rightarrow \vec{V} = \vec{cte}$$

Consideramos el factor de pérdida de energía:

$$Q = T_f - T_i = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

Si $Q = 0$ el choque es elástico, mientras que si $Q < 0$ entonces se pierde energía. Estudiemos el coeficiente de restitución par una variable es:

29/11/2018 Dibujo 7 (velocidades alineadas)

$$e := \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = \frac{u_2^* - u_1^*}{v_1^* - v_2^*}$$

Cuando el choque es elástico, es $e = 1$ y cuando es completamente inelástico es $e = 0$. En general es: $0 \leq e \leq 1$. Vamos a suponer que las partículas que chocan no son puntuales.

5.3.2. Colisiones elásticas

En los choques elásticos se da $T = \text{cte}$ y $Q = 0$. Visto desde el centro de masas:

29/11/2018 Dibujo 8 (choque desde centro de masas)

Queremos conocer q^* y θ^* . Para ello:

$$T_i^* = \frac{p^{*2}}{2\mu}$$

$$T_f^* = \frac{q^{*2}}{2\mu}$$

$$T_i^* = T_f^* \Leftrightarrow p^* = q^*$$

El sistema de referencia centro de masas hace que nos sea muy fácil resolver el problema, pero obtener θ^* resulta más difícil. Por ello, vamos a ver el problema desde el sistema de referencia «laboratorio». En este sistema, es $\vec{P}_2 = \vec{0}$.

29/11/2018 Dibujo 9 (choque desde sistema laboratorio)

Veamos qué ecuaciones tenemos:

$$\vec{P} = \vec{cte} \Leftrightarrow \vec{p}_1 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$$

$$T = \text{cte} \Leftrightarrow \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{q_1^2}{2m_1} + \frac{q_2^2}{2m_2}$$

Como la fuerza que actúa es central, el choque se desarrolla en un plano.

29/11/2018 Dibujo 10 (choque α)

$$\begin{cases} p_1 = q_2 \cos \alpha + q_1 \cos \theta \\ 0 = q_1 \sin \theta - q_2 \sin \alpha \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{q_2}{q_1} \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} q_1 \cos \theta = p_1 - q_2 \cos \alpha \\ q_2 \sin \theta = q_2 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_1^2 = p_1^2 + q_2^2 - 2p_1q_2 \cos \alpha$$

$$p_1^2 = q_1^2 + \frac{m_1}{m_2}q_2^2 = p_1^2 + q_2^2 - 2p_1q_2 \cos \alpha + \frac{m_1}{m_2}q_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q_2^2 - 2p_1 q_2 \cos \alpha + \frac{m_1}{m_2} q_2^2 = 0$$

Suponiendo $q_2 \neq 0$, lo anterior es equivalente a:

$$q_2 - 2p_1 \cos \alpha + \frac{m_1}{m_2} q_2 = 0 \Leftrightarrow q_2 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \cos \alpha$$

Ahora, veámoslo desde el centro de masas:

$$\begin{cases} \vec{p}_1 = m_1 \dot{\vec{R}} + \vec{p}^* \\ \vec{p}_2 = m_2 \dot{\vec{R}} - \vec{p}^* \\ \vec{q}_1 = m_1 \dot{\vec{R}} + \vec{q}^* \\ \vec{q}_2 = m_2 \dot{\vec{R}} - \vec{q}^* \end{cases}$$

Lo anterior es válido para cualquier sistema de referencia. Pero, en el sistema de referencia laboratorio $\vec{p}_2 = \vec{0}$.

$$\dot{\vec{R}} = \frac{\vec{p}^*}{m_2}$$

Obtenemos:

$$\begin{cases} \vec{p}_1 = \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) \vec{p}^* = \frac{M}{m_2} \vec{p}^* \\ \vec{q}_1 = \frac{m_1}{m_2} \vec{p}^* + \vec{q}^* \\ \vec{q}_2 = \vec{p}^* - \vec{q}^* \end{cases}$$

Si el choque es elástico, entonces $p^* = q^*$.

30/11/2018 Dibujo 1 (triángulo mágico)

30/11/2018 Dibujo 2 (triángulo mágico dos)

Si $p^* = q^*$, el triángulo es isósceles y se cumple:

$$\theta^* + 2\alpha = \pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{(\pi - \theta^*)}{2}$$

$$q_2 = 2p^* \sin\left(\frac{\theta^*}{2}\right)$$

Bien, ahora reconvirtamos esto al sistema laboratorio:

$$q_2 = 2 \frac{m_2}{m_2 + m_1} p_1 \cos \alpha$$

En estos problemas suele ser común hallar T_2 (la energía transferida al blanco).

$$T_2 = \frac{q_2^2}{2m_2} = \frac{2p^{*2}}{m_2} \sin^2\left(\frac{\theta^*}{2}\right)$$

$$T = \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{M^2}{2m_1} \frac{p^{*2}}{m_2^2}$$

$$T^* = \frac{p^{*2}}{2\mu} = \frac{M}{2m_1 m_2} p^{*2}$$

De forma que:

$$\frac{T^*}{T} = \frac{m_2}{M}$$

En consecuencia:

$$\frac{T_2}{T} = \frac{4m_1m_2}{M^2} \sin^2 \left(\frac{\theta^*}{2} \right)$$

Este cociente es máximo cuando $\theta^* = \pi \Leftrightarrow \alpha = 0$. Ahora, por otra parte:

$$\left(\frac{T_2}{T} \right)_{\text{máx}} = \frac{4m_1m_2}{M^2} = \begin{cases} \frac{4m_1}{m_2} \rightarrow 0 & m_1 \ll m_2 & \theta^* = \pi \\ 1 & m_1 = m_2 \\ \frac{4m_2}{m_1} \rightarrow 0 & m_1 \gg m_2 & \theta^* = 0 \end{cases}$$

Lo de abajo va aparte.

$$\tan \theta = \frac{q^* \sin \theta^*}{\frac{m_1}{m_2} p^* + q^* \cos \theta^*}$$

Si $p^* = q^*$:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta^*}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta^*}$$

Si $m_1 = m_2$, entonces $\theta = \frac{\theta^*}{2}$. (Poner fórmulas del ángulo mitad y sale). Por tanto, en este caso, también se cumple $\frac{\pi}{2} = \theta + \alpha$.

Ejemplo 32. Si tenemos un choque entre un protón y una partícula alfa con $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{4}$, la máxima energía transferida es un 64 %.

Ejemplo 33. En el caso de un choque entre un electrón y un protón:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{1836} = 0,2 \%$$

5.3.3. ¿Siguiente sección?

Notemos que:

$$\theta^* \in [0, \pi]$$

$$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

correspondiéndose $\theta^* = 0$ con $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $\theta^* = \pi$ con $\alpha = 0$. Sin embargo θ , en general, no puede variar desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$.

04/12/2018 Dibujo 1 (triángulo mágico con circunferencia)

De hecho:

$$\sin \theta_{\text{máx}} = \frac{q^*}{\frac{m_1}{m_2} p^*} = \frac{m_2}{m_1}$$

Si $m_1 \gg m_2$, entonces, $\theta = 0$ independientemente del valor de θ^* .

Si $m_1 \ll m_2$, entonces:

04/12/2018 Dibujo 2 (triángulo mágico con circunferencia v2)

$$\theta^* = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\theta^* = \pi \Rightarrow \theta = \pi$$

Si $m_1 = m_2$, entonces:

04/12/2018 Dibujo 3 (triángulo p^* , p^*)

$$\theta^* = \pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

04/12/2018 Dibujo 4 (triángulo que relaciona θ y θ^*)

$$\theta = \frac{\theta^*}{2}$$

5.4. Secciones eficaces (Sistemas centro de masas y laboratorio)

04/12/2018 Dibujo 5 (choques con varias partículas)

Sabemos que θ depende de b (el parámetro de impacto). Nuestro objetivo es expresar b en función de θ .

$$b + db \longrightarrow \theta + d\theta$$

Teníamos:

$$d\sigma = b |db| d\varphi$$

Por otra parte:

$$dN = N_1 \phi d\sigma \frac{1}{d\Omega} \frac{dA}{L^2} = N_1 \phi \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dA}{L^2}$$

donde $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ es la sección eficaz.

04/12/2018 Dibujo 6 ($\alpha \neq \alpha'$)

Nótese que desde el sistema centro de laboratorio $\alpha \neq \alpha'$ de manera que va a ser difícil hallar la relación que buscamos. Por tanto, veamos la situación desde el sistema centro de masas.

04/12/2018 Dibujo 7 (sección eficaz total)

$$m_1 \vec{v}_1 = m_2 \vec{v}_2$$

El volumen de las partículas que chocan es:

$$V_{\text{chocan}} = n_1 \sigma (v_1 + v_2) dt$$

Llamemos V al volumen del blanco. Entonces se cumple:

$$N = n_1 \sigma (v_1 + v_2) dt n_2 V \Leftrightarrow$$

$$dN = n_1 d\sigma (v_1 + v_2) n_2 V$$

$$\phi = n_1 (v_1 + v_2)$$

$$n_2 V = N_1$$

donde N_1 es el número de partículas de mi blanco.

$$dN = n_1 n_2 (v_1 + v_2) V d\sigma = N_1 \phi d\sigma =$$

$$= N_1 \phi \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \frac{dA}{L^2}$$

donde $d\Omega^* = \sin \theta^* d\theta^* d\varphi$.

No entiendo nada.

05/12/2018 Dibujo 1 (esferas choque en centro de masas)

α es el ángulo entre la dirección de incidencia y la dirección de la interacción (la dirección del choque). Definimos:

$$R = R_1 + R_2$$

De manera que:

$$b = R \sin \alpha = R \cos \frac{\theta^*}{2}$$

$$d\sigma = b d\varphi |db|$$

$$db = -R \sin \frac{\theta^*}{2} \frac{d\theta^*}{2}$$

$$d\sigma = \frac{R^2}{2} \sin \theta^* \frac{d\theta^*}{2} d\varphi$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{R^2}{4}$$

Ahora, nuestro objetivo es obtener $\frac{d\sigma}{d\Omega}$. Para ello:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \frac{d\Omega^*}{d\Omega}$$

Desconocemos este último término:

$$\frac{d\Omega^*}{d\Omega} = \frac{\sin \theta^* d\theta^*}{\sin \theta d\theta} = \frac{d(\cos \theta^*)}{d(\cos \theta)} =: \frac{dz^*}{dz}$$

Sabemos que:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta^*}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta^*}$$

$$z^2 = \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2} + z^*\right)^2}{1 + 2\frac{m_1}{m_2}z^* + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2}$$

Ahora, tendría que calcular $\frac{dz^*}{dz}$:

$$2z dz = f(z^*) dz^* \Leftrightarrow \frac{dz^*}{dz} = \frac{2z}{f(z^*)}$$

■ Si es $m_1 > m_2$, a cada θ le corresponden dos θ^* ; es decir, la relación no es unívoca.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{d\sigma}{d\Omega^*} \right]_{\theta_1^*} \left| \left[\frac{d\Omega^*}{d\Omega} \right]_{\theta_1^*} \right| + \left[\frac{d\sigma}{d\Omega^*} \right]_{\theta_2^*} \left| \left[\frac{d\Omega^*}{d\Omega} \right]_{\theta_2^*} \right| = \overbrace{\frac{d\sigma}{d\Omega^*}}^{\frac{R^2}{4}} \left(\left| \left[\frac{d\Omega^*}{d\Omega} \right]_{\theta_1^*} \right| + \left| \left[\frac{d\Omega^*}{d\Omega} \right]_{\theta_2^*} \right| \right)$$

Ahora, vamos a calcular la sección eficaz de las partículas blanco.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \frac{d\Omega^*}{d\Omega_2}$$

donde $d\Omega_2 = \sin \alpha d\alpha d\Psi$ y $\Psi = \varphi + \pi$. Como $\theta^* = \pi - 2\alpha$:

$$\cos \theta^* = -\cos 2\alpha = -\cos^2 \alpha + \sin \alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha$$

En consecuencia:

$$\left| \frac{d(\cos \theta^*)}{d(\cos \alpha)} \right| = |-4 \cos \alpha|$$

Y, entonces:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} 4 \cos \alpha = R^2 \cos \alpha$$

5.5. Colisión elástica de dos bolas de billar \equiv esferas rígidas de la misma masa

11/12/2018 Dibujo 1 (colisión)

11/12/2018 Dibujo 2 (triángulo mágico)

$$b = R \sin \alpha$$

$$\theta^* + 2\alpha = \pi$$

Como $m_1 = m_2$:

$$\theta = \frac{\theta^*}{2}$$

$$R = r_1 + r_2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \frac{d\Omega^*}{d\Omega_2} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} 4 \cos \alpha = R^2 \cos \alpha$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{d\Omega^*}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{dz^*}{dz}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta^*}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta^*}$$

$$z = \cos \theta$$

$$z^* = \cos \theta^*$$

$$z^2 = \frac{\left[\frac{m_1}{m_2} + z^*\right]^2}{1 + 2\frac{m_1}{m_2}z^* + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2} = \frac{(1 + z^*)^2}{2(1 + z^*)} = \frac{1 + z^*}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2z^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{dz^*}{dz} = 4z$$

De manera que obtenemos que para el caso $m_1 = m_2$ es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{R^2}{4}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = R^2 \cos \alpha$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = R^2 \cos \theta$$

Alternativamente, en este caso particular de las bolas de pillar, podríamos haber obtenido $\frac{d\sigma}{d\Omega_2}$ a partir del valor de $b = R \sin \alpha$ como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = \frac{bd\Psi |db|}{\sin \alpha d\alpha d\Psi}$$

donde $\Psi = \pi + \varphi$. También:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{bd\varphi |db|}{\sin \theta^* d\theta^* d\varphi}$$

Entonces, en sistema laboratorio es $b = R \cos \theta$ y haciendo:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{bd\varphi |db|}{\sin \theta d\theta d\varphi}$$

11/12/2018 Dibujo 3 (colisión con «bolitas»)

5.6. Dispersión de Rutherford de $m_1 = m_2$ y $q_1 = q_2 = e$

$$\mu = \frac{m}{2}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

Este problema es equivalente a tener una partícula sin masa y de carga e generadora del campo eléctrico y luego otra partícula de masa μ y carga e a distancia r de la carga generadora del campo.

11/12/2018 Dibujo 4 (electrón «orbitando» en sistema centro de masas)

11/12/2018 Dibujo 5 (parámetro de impacto)

11/12/2018 Dibujo 6 (electrón hipérbola)

$$\tan \beta = \frac{b}{a}$$

$$\beta = \frac{\pi - \theta^*}{2}$$

$$b = a \cot \frac{\theta^*}{2}$$

donde:

$$a = \frac{k}{2|E|} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu v^2} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 m v^2}$$

Ahora:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{|db| bd\varphi}{\sin \theta^* d\theta^* d\varphi} = \frac{a^2}{4 \sin^4 \frac{\theta^*}{2}}$$

Usando $\theta^* + 2\alpha = \pi$ y $\varphi + \pi = \Psi$, llegamos a:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} 4 \cos \alpha = \frac{a^2}{4 \sin^4 \frac{\theta^*}{2}} 4 \cos \alpha = \frac{a^2}{\cos^4 \alpha} \cos \alpha = \frac{a^2}{\cos^3 \alpha}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} = 4 \cos \theta = \frac{a^2}{4 \sin^4 \frac{\theta^*}{2}} 4 \cos \theta = \frac{a^2}{\sin^4 \theta} \cos \theta$$

$$b = a \cot \frac{\theta^*}{2} = a \tan \alpha = a \cot \theta$$

11/12/2018 Dibujo 7 (ángulo β)

Donde está mi detector se da $\theta = \beta$ y $\alpha = \beta$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\beta} = a^2 \cos \beta \left(\frac{1}{\cos^4 \beta} + \frac{1}{\sin^4 \beta} \right)$$

donde $d\Omega_\beta = \sin \beta d\beta d\varphi$.

Volvamos a ver esto de otra forma:

12/12/2018 Dibujo 1 (hipérbola con e , varias hipérbolas)

Como es

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} \hat{r}$$

la trayectoria del electrón viene dada por:

$$r [e \cos(\theta - \theta_0) - 1] = l$$

Cuando $r \rightarrow \infty$, debe ser $e \cos(\theta - \theta_0) - 1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \cos(\theta - \theta_0) = \frac{1}{e}$. Además, nótese que según el dibujo que hemos hecho es $\theta_0 = \pi$. Recordemos que era:

$$\vec{r}_1^* = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2^* = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Si multiplicamos la ecuación de la trayectoria por $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$, obtenemos:

$$\underbrace{\frac{m_2}{m_1 + m_2} r}_{=: r_1^*} \left[e \cos \left(\theta - \underbrace{\theta_0}_{=\pi} \right) - 1 \right] = \underbrace{\frac{m_2}{m_1 + m_2} l}_{=: l_1}$$

Análogamente, multiplicando por $\frac{m_1}{m_1 + m_2}$:

$$\underbrace{\frac{m_1}{m_1 + m_2} r}_{=: r_2^*} \left[e \cos \left(\theta - \underbrace{\theta_0}_{=0} \right) - 1 \right] = \underbrace{\frac{m_1}{m_1 + m_2} l}_{=: l_2}$$

Nótese que en ambos casos obtenemos una hipérbola de la misma excentricidad, únicamente cambia l . Por ello, el ángulo que forman entre sí las asíntotas de la hipérbola es el mismo en el sistema centro de masas que visto desde el sistema laboratorio (estudiando el movimiento relativo), este ángulo es θ^* .

6. Sistemas de referencia no inerciales

Sea S un sistema de partículas cuyo observador O es inercial: $S : (O, x, y, z)$. Para dicho observador, se cumple la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$. Sin embargo, sea S' el mismo sistema visto desde un observador O' no inercial de forma que $S' : (O', x_1, x_2, x_3)$ donde x_1, x_2, x_3 se llaman ángulos de Euler, entonces para el observador O' el equivalente de la segunda ley de Newton queda: $\vec{F} + \vec{F}_{\text{inercia}} = m\vec{a}'$. Esto es lo que vamos a ver ahora. Los ejes del observador O' son ortonormales al igual que los de O .

12/12/2018 Dibujo 2 (Observadores O, O')

Entonces, claramente:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

6.1. Caso particular $\vec{R} = \vec{0}$ y $\vec{r}' = \vec{r}$

Tenemos:

$$S : \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$S' : \vec{r} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3$$

Si \vec{r} no es constante para S' , entonces al menos una de sus coordenadas x_1, x_2, x_3 no puede ser constante. Análogamente, si \vec{r} no es constante para S , entonces al menos una de sus coordenadas x, y, z no puede ser constante.

Notación: utilizaremos notación de Leibniz para designar una derivada temporal para el sistema S y la notación de Newton para indicar una derivada temporal para el sistema S' . Por ejemplo, siempre va a ser:

$$\dot{\hat{e}}_1 = \vec{0}$$

Pero, en general, será:

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_1 \neq \vec{0}$$

Observación 40. La derivada de un escalar respecto al tiempo es la misma en ambos sistemas de referencia.

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

Como $\frac{d\hat{e}_i}{dt}$ es un vector, en particular podemos expresarlo como combinación lineal de la base $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$. Entonces tenemos que $\exists a_{ij} \forall i, j = 1, 2, 3$ tales que:

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \hat{e}_j$$

Como la base del observador O' es ortonormal, tenemos:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

Por tanto, derivando a ambos lados en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\hat{e}_i \frac{d\hat{e}_j}{dt} + \frac{d\hat{e}_i}{dt} \hat{e}_j = 0$$

$$\hat{e}_i \sum_{k=1}^n a_{jk} \hat{e}_k + \sum_{k=1}^n a_{ik} \hat{e}_k \hat{e}_j = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{ji} + a_{ij} = 0 \forall i, j = 1, 2, 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ji} = -a_{ij} \forall i = 1, 2, 3 \ni i \neq j \\ 2a_{ii} = 0 \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

En consecuencia, la matriz formada por los a_{ij} es antisimétrica:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Definimos el vector $\vec{\omega}$ como:

$$\vec{\omega} := (a_{23}, -a_{13}, a_{12})$$

De esta forma, se cumple:

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_i$$

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$$

En general, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ **no** representan la variación de ningún ángulo.

6.1.1. Caso particular $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$

Queremos ver que \hat{e}_1, \hat{e}_2 están girando en torno a \hat{e}_3 . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\hat{e}_3 = \hat{k}$.
13/12/2018 Dibujo 1 (Ejes en el plano, observadores O, O')

En este caso, obtenemos:

$$\frac{d\hat{e}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_1 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega \hat{e}_2$$

$$\frac{d\hat{e}_2}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_2 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\omega \hat{e}_1$$

$$\frac{d\hat{e}_3}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_3 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Si tomamos $\vec{r} = \hat{e}_1$:

$$\frac{d\hat{e}_1}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega \hat{e}_2 = \vec{\omega} \times \hat{e}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

6.1.2. Vectores constantes para S'

Sea $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquiera tal que es constante para S' . Podemos descomponer \vec{A} de la siguiente forma:

$$\vec{A} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3$$

así $x_1, x_2, x_3 = \text{cte}$. Ahora:

$$\sum_{i=1}^3 x_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} = \sum_{i=1}^3 x_i (\vec{\omega} \times \hat{e}_i) = \vec{\omega} \times \left(\sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i \right) = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

6.1.3. Desplazamiento del origen en el caso de $\vec{\omega}$ constante para S'

13/12/2018 Dibujo 2 (movimiento circular)

Tenemos dos sistemas de referencia alineados O_1 y O_2 a lo largo del eje z . El vector posición de una partícula es \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , respectivamente. En cualquier sistema de referencia a lo largo del eje z se da:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

6.1.4. Vectores no constantes para S'

Sea $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquiera. Podemos descomponer \vec{A} respecto del sistema S' de la siguiente forma:

$$\vec{A} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^3 \overbrace{\dot{x}_i}^{\frac{dx_i}{dt}} \hat{e}_i}_{=\dot{\vec{A}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^3 x_i \frac{d\hat{e}_i}{dt}}_{=\vec{\omega} \times \vec{A}} = \dot{\vec{A}} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

Ejemplo 34 (Fuerza de Lorentz y ciclotrón).

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{-\frac{q}{m}\vec{B} \times \vec{v}}_{=\vec{\omega}_c} = \vec{\omega}_c \times \vec{v}$$

donde $\omega_c = \frac{qB}{m}$. Así una partícula sobre la que actúa una fuerza magnética constante siempre describirá un movimiento circular.

Por otra parte es:

$$\omega_c v = \frac{v^2}{\rho} \Leftrightarrow \rho = \frac{v^2}{\omega_c v} = \frac{v}{\omega_c} = \frac{mv}{qB} = \rho$$

Este es el principio que se usa en el ciclotrón. Veámoslo gráficamente:

13/12/2018 Dibujo 3 (ciclotrón)

donde sometemos ambas partes del ciclotrón a una diferencia de potencial $V = V_0 \cos \omega_c t$ y la velocidad máxima que se puede obtener es:

$$v_{\text{máx}} = \frac{qBR}{m}$$

Cuando la velocidad de la partícula es cercana a la de la luz, hay que tener en cuenta efectos relativistas y entonces la frecuencia ω_c disminuye si la velocidad aumenta.

Ejemplo 35 (Fuerza eléctrica y magnética).

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{E} - \frac{q}{m}\vec{B} \times \vec{v}$$

Si, ahora suponemos que $\vec{B} = B\hat{k}$ y $\vec{E} = E\hat{j}$, tenemos:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m}v_y B$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m}E - \frac{q}{m}v_x B$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0$$

Si $E = 0$:

$$v_x = v_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$v_y = -v_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Seguimos suponiendo $E = 0$ y despejamos v_y en:

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m}v_x B \Leftrightarrow v_y = -\frac{q}{m}B \underbrace{\int v_x dt}_{=x} = -\frac{q}{m}xB + C$$

Llegaríamos a la ecuación diferencial, cuyas soluciones son las que hemos puesto antes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{q}{m}B\right)^2 x = \text{cte}$$

Ahora, volvemos al caso $E \neq 0$, para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ahora, lo que hacemos es un cambio de variable $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_1$ tal que $\begin{cases} v_{1x} = \frac{E}{B} \\ v_{1y} = 0 \end{cases}$ y así obtenemos las ecuaciones:

$$v_y = v'_y + v_{1y}$$

$$v_x = v'_x + v_{1x}$$

$$\begin{cases} \frac{dv'_x}{dt} = \frac{q}{m} v'_y B \\ \frac{dv'_y}{dt} = -\frac{q}{m} v'_x B \end{cases}$$

Obtenemos las soluciones:

$$v'_x = v_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$v'_y = -v_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$v_x = \frac{E}{B} + v_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$v_y = -v_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Resolvamos para el caso particular $\begin{cases} x(0) = 0, y(0) = 0 \\ v_x(0) = (0), v_y(0) = 0 \end{cases}$. Nótese que:

$$v_y = 0 \Leftrightarrow \sin \phi = 0 \Leftrightarrow \phi = 0, \pi$$

$$v_x = 0 \Leftrightarrow \frac{E}{B} + v_0 \cos \phi \Leftrightarrow \phi = \pi, v_0 = \frac{E}{B}$$

Así, tenemos:

$$v_x = \frac{E}{B} (1 - \cos \omega t) \Rightarrow x(t) = A + \int \frac{E}{B} (1 - \cos \omega t) dt = A + \frac{E}{B} t - \frac{E}{B\omega} \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{E}{B} \sin \omega t \Rightarrow C + \int \frac{E}{B} \sin \omega t dt = C - \frac{E}{B} \cos \omega t$$

Como $x(0) = 0$, tenemos $A = 0$. Y, como $y(0) = 0$, tenemos $C = \frac{E}{B}$. Así:

$$x(t) = \frac{E}{B} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$$

$$y(t) = \frac{E}{B} (1 - \cos \omega t)$$

14/12/2018 Dibujo 1 (parametric plot 2d, foto trayectoria)

6.2. Comparación de velocidades y aceleraciones

6.2.1. Sistemas con origen común

Supongamos $O = O'$ de manera que $\vec{r} = \vec{r}'$. Recordemos que $\forall \vec{A} \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{\vec{A}} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

14/12/2018 Dibujo 2 (O,O' ejes)

Así:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{=\vec{a}} = \underbrace{\dot{\vec{v}}}_{\neq \vec{a}'} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Por otra parte:

$$\dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

Nótese que:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\omega}}_{=\vec{0}}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times [\dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r}] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underbrace{\vec{a}}_S &= \underbrace{\vec{a}'}_{S'} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{aceleración centrípeta}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}}_{\text{aceleración de Coriolis}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}}_{\substack{\text{aceleración} \\ \text{azimutal} \\ \text{o} \\ \text{aceleración} \\ \text{de Euler} \\ \text{transversal}}} \end{aligned}$$

6.2.2. Sistemas con distinto origen

14/12/2018 Dibujo 3 (orígenes diferentes con ejes)

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{V} + (\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{V}}{dt}}_{=\vec{A}} + \frac{d}{dt} [\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}']$$

$$\vec{V} = \vec{v}_{O'}$$

$$\vec{A} = \vec{a}_{O'}$$

Así, tenemos:

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$$

Ahora, consideremos una fuerza desde el sistema S $\vec{F} = m\vec{a}$, tenemos, que desde S' :

$$m\vec{a}' = \vec{F} \underbrace{-m\vec{a}_{O'}}_{\text{fuerza de arrastre}} \underbrace{-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{fuerza centrífuga}} \underbrace{-2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}')}_{\text{fuerza de Coriolis}} \underbrace{-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}_{\text{fuerza azimutal}}$$

Observación 41. Nótese que hay aceleración centrípeta (hacia dentro), pero fuerza centrífuga (hacia fuera), con signo negativo. De forma similar la aceleración acimutal y la aceleración de Coriolis tienen signo positivo, mientras que las fuerzas acimutales y de Coriolis tienen signo negativo.

Observación 42. La fuerza de Coriolis sólo existe en el caso de que el cuerpo lleve velocidad medido desde el sistema S' y la fuerza azimutal sólo existe en el caso de que la velocidad angular no sea constante.