

# Mecánica Clásica I

Andrés Laín Sanclemente, Miguel Calvo Arnal<sup>1</sup> y otros<sup>2</sup>

Curso 2018-2019 versión 1.0.3

<sup>1</sup>Ilustre ilustrador.

<sup>2</sup>Los demás autores han hecho contribuciones menores y aparecen mencionados tras el índice.

# Índice general

<b>1. Principios de mecánica</b>	<b>5</b>
1.1. Introducción . . . . .	5
1.1.1. Ejemplos . . . . .	5
1.1.2. Conceptos básicos: espacio y tiempo . . . . .	6
1.1.3. Leyes de Newton . . . . .	7
1.1.4. Principio de superposición . . . . .	9
1.1.5. Definición de masa y propiedad aditiva . . . . .	9
1.2. Preliminares matemáticos . . . . .	11
1.3. Fuerzas centrales y fuerzas conservativas (1ª parte) . . . . .	12
1.3.1. Fuerzas centrales . . . . .	12
1.3.2. Fuerzas conservativas . . . . .	13
1.3.3. Ejemplos de fuerzas centrales conservativas . . . . .	14
1.4. Ligaduras . . . . .	15
1.5. Momentos . . . . .	18
1.5.1. Momento lineal . . . . .	18
1.5.1.1. Definición y primeras propiedades . . . . .	18
1.5.1.2. Teorema de conservación . . . . .	19
1.5.1.3. Impulso lineal . . . . .	19
1.5.2. Momento angular . . . . .	20
1.5.3. Momento de fuerzas . . . . .	21
1.5.3.1. Definición y primeras propiedades . . . . .	21
1.5.3.2. Teorema de conservación del momento angular . . . . .	21
1.5.3.3. Resultados sobre fuerzas centrales y conservativas . . . . .	22
1.5.3.4. Impulso angular . . . . .	23
1.6. Energía . . . . .	23
1.6.1. Energía cinética $E_C$ , $T$ . . . . .	23
1.6.2. Trabajo de una fuerza . . . . .	24
1.6.3. Energía potencial $E_p$ , $V$ . . . . .	24
1.6.4. Energía mecánica $E_m$ , $E$ . . . . .	25
1.6.5. Fuerzas conservativas (2ª parte) . . . . .	26
1.6.5.1. Ejemplos . . . . .	27
1.7. Cálculo de variaciones. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	33
1.7.1. Expresión de la posición, la velocidad y la aceleración en coordenadas cilíndricas y esféricas (ejercicio para casa) . . . . .	33
1.7.1.1. Coordenadas polares $r, \varphi$ . . . . .	33
1.7.1.2. Coordenadas cilíndricas $r, \varphi, z$ . . . . .	34
1.7.1.3. Coordenadas esféricas $r, \varphi, \theta$ . . . . .	34
1.7.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	35
1.7.2.1. Preliminares matemáticos . . . . .	35
1.7.2.2. Deducción matemática . . . . .	38
1.7.2.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange en física . . . . .	44
1.8. Coordenadas generalizadas y ligaduras . . . . .	44
1.8.1. Ligaduras . . . . .	45
1.8.2. Coordenadas naturales y forzadas . . . . .	45

1.9.	Principio de Hamilton. Ecuaciones de Lagrange . . . . .	46
1.9.1.	Momentos y fuerzas generalizadas . . . . .	47
1.9.1.1.	Definiciones . . . . .	47
1.9.1.2.	Propiedades . . . . .	47
1.9.1.3.	Generalizaciones y coordenadas cíclicas . . . . .	48
1.9.1.4.	Ejemplos . . . . .	49
1.9.2.	Fuerzas de ligadura $Q'_i$ . . . . .	50
1.9.2.1.	Definiciones y propiedades . . . . .	50
1.9.2.2.	Ejemplos . . . . .	52
1.10.	Principio de d'Alembert y principio de los trabajos virtuales . . . . .	53
1.10.1.	Definiciones previas . . . . .	53
1.10.2.	Principio de D'Alembert . . . . .	53
1.10.3.	Principio de los trabajos virtuales (estática) . . . . .	54
1.10.4.	Reelaboración del principio de los trabajos virtuales . . . . .	54
1.10.5.	Fuerzas generalizadas en función del trabajo virtual . . . . .	58
1.11.	Ecs. de Lagrange para sistemas con fuerzas no conservativas . . . . .	59
1.11.1.	Sin ligaduras . . . . .	59
1.11.2.	Con ligaduras . . . . .	64
1.12.	Hamiltoniano . . . . .	65
1.12.1.	Definición y primeras propiedades . . . . .	65
1.12.2.	Conservación del Hamiltoniano . . . . .	66
1.12.3.	Ecuaciones de Hamilton . . . . .	67
1.12.4.	Ejemplos . . . . .	68
<b>2.</b>	<b>Movimiento oscilatorio</b> . . . . .	<b>72</b>
2.1.	Ejemplos introductorios . . . . .	72
2.2.	Preliminares matemáticos . . . . .	73
2.3.	Conceptos previos . . . . .	74
2.4.	Oscilaciones lineales no amortiguadas (armónicas) . . . . .	75
2.4.1.	Solución de la ecuación diferencial . . . . .	76
2.4.1.1.	La solución como exponenciales complejas . . . . .	76
2.4.1.2.	La solución como seno y coseno . . . . .	76
2.4.1.3.	La solución como coseno desplazado en fase . . . . .	77
2.4.1.4.	La solución como la parte real de una exponencial compleja . . . . .	79
2.4.2.	Solución del oscilador lineal no amortiguado cuya posición de equilibrio no es nula . . . . .	81
2.4.3.	Conservación de la energía mecánica . . . . .	81
2.4.4.	Ejemplos . . . . .	83
2.4.5.	Muelles en serie y en paralelo . . . . .	86
2.4.6.	Estudio de las condiciones iniciales . . . . .	89
2.4.7.	Aproximaciones de un desplazamiento cualquiera a una oscilación armónica . . . . .	91
2.5.	Oscilaciones amortiguadas . . . . .	96
2.5.1.	Primeros conceptos . . . . .	96
2.5.2.	Amortiguamiento débil, amortiguamiento subcrítico o subamortiguamiento . . . . .	98
2.5.2.1.	Definición y expresión de la solución . . . . .	98
2.5.2.2.	Propiedades . . . . .	100
2.5.2.3.	Energía mecánica . . . . .	102
2.5.3.	Amortiguamiento fuerte, amortiguamiento supercrítico o sobreamortiguamiento . . . . .	104
2.5.4.	Amortiguamiento crítico . . . . .	108
2.5.5.	Estudio de las condiciones iniciales . . . . .	109
2.5.6.	Comparación entre todo los tipos de amortiguamiento . . . . .	113
2.6.	Resumen (oscilaciones libres amortiguadas y no amortiguadas) . . . . .	114
2.7.	Oscilaciones forzadas . . . . .	115
2.8.	Resonancia . . . . .	118
2.8.1.	Resonancia fijando la frecuencia de la fuerza externa $\omega_f$ y variando la frecuencia natural del sistema $\omega_0$ . . . . .	118

2.8.2.	Resonancia fijando la frecuencia natural del sistema $\omega_0$ y variando la frecuencia de la fuerza externa $\omega_f$ . . . . .	120
2.8.2.1.	Resonancia en amplitud . . . . .	120
2.8.2.2.	Resonancia en energía . . . . .	125
2.8.3.	La fase en resonancia (*No lo vimos más que con dibujos en clase) . . . . .	127
2.8.4.	Ejemplos varios de la vida real . . . . .	128
2.9.	Series de Fourier . . . . .	128
2.10.	Oscilaciones tridimensionales. Oscilador armónico isótropo . . . . .	131
2.10.1.	Definición y primeras propiedades . . . . .	131
2.10.2.	Solución del oscilador armónico isótropo . . . . .	131
2.10.3.	Un oscilador armónico isótropo es central y conservativo . . . . .	132
2.10.4.	Forma de la trayectoria . . . . .	134
2.10.5.	Métodos de cálculo para $ \vec{a} $ y $ \vec{b} $ . . . . .	136
2.10.6.	Ejemplos . . . . .	138
<b>3.</b>	<b>Fuerzas centrales conservativas</b> . . . . .	<b>141</b>
3.1.	Leyes de conservación . . . . .	141
3.1.1.	Momento angular en coordenadas polares y relaciones con la velocidad . . . . .	141
3.1.2.	Parámetros del movimiento debido a una fuerza central conservativa . . . . .	142
3.1.3.	Caso del oscilador armónico isótropo . . . . .	144
3.1.3.1.	Análisis cualitativo de la energía potencial efectiva $V_{eff}$ . . . . .	144
3.1.3.2.	Cambio de órbitas, caso particular: oscilador armónico isótropo en órbita circular . . . . .	148
3.2.	Cónicas . . . . .	151
3.2.1.	Elipse . . . . .	151
3.2.1.1.	Relaciones . . . . .	152
3.2.1.2.	Circunferencia . . . . .	152
3.2.2.	Hipérbola . . . . .	153
3.2.2.1.	Relaciones . . . . .	154
3.2.3.	Parábola . . . . .	154
3.2.3.1.	Relaciones . . . . .	155
3.3.	Ley cuadrática inversa . . . . .	155
3.3.1.	Caso $k > 0$ . . . . .	156
3.3.2.	Caso $k < 0$ . . . . .	160
3.4.	Órbitas . . . . .	164
3.4.1.	Resultados generales . . . . .	164
3.4.2.	Órbitas y trayectorias para la ley cuadrática inversa . . . . .	166
3.4.2.1.	Ecuación de la trayectoria en coordenadas polares . . . . .	166
3.4.2.2.	Resumen . . . . .	173
3.4.2.3.	Ejemplos . . . . .	174
3.4.2.4.	Obtención de la ecuación en cartesianas . . . . .	178
3.4.2.5.	Relación de los parámetros de las órbitas con la energía y el momento angular . . . . .	181
3.4.2.6.	Ángulo de dispersión en trayectorias hiperbólicas . . . . .	184
3.4.2.7.	Periodo de la órbita elíptica . . . . .	187
3.4.2.8.	Ejemplos . . . . .	190
3.5.	Dispersión de partículas . . . . .	196
3.5.1.	Colisión entre una partícula móvil y una esfera fija de radio $R$ . . . . .	196
3.5.2.	Colisión entre un conjunto de proyectiles móviles y una lámina de blancos fijos . . . . .	197
3.5.2.1.	Sin tener en cuenta la dirección tras la dispersión . . . . .	197
3.5.2.2.	Teniendo en cuenta la dirección de la dispersión . . . . .	199
3.5.2.3.	Cálculo de la sección eficaz diferencial . . . . .	204
3.5.3.	Colisión entre un conjunto de proyectiles móviles y un volumen de blancos fijos . . . . .	207
3.5.4.	Dispersión de Rutherford (1911) . . . . .	212

<b>4. El problema de dos cuerpos</b>	<b>215</b>
4.1. Centro de masas y coordenadas relativas . . . . .	215
4.2. Sistema de referencia centro de masas . . . . .	217
4.3. Interacción gravitatoria . . . . .	224
4.4. Colisiones . . . . .	228
4.4.1. Descripción desde el sistema centro de masas . . . . .	231
4.4.2. Descripción desde el sistema de laboratorio . . . . .	232
4.4.3. Descripción en el sistema laboratorio a partir del sistema centro de masas . . . . .	233
4.4.4. Casos particulares . . . . .	237
4.5. Secciones eficaces (sistemas centro de masas y laboratorio) . . . . .	241
4.5.1. Repaso de conceptos de dispersión . . . . .	241
4.5.2. Relación entre la sección eficaz diferencial entre el sistema centro de masas y el sistema laboratorio . . . . .	243
4.5.3. Partículas «rechazadas» del blanco . . . . .	245
4.5.4. Ejemplos . . . . .	246
<b>5. Sistemas de referencia no inerciales</b>	<b>252</b>
5.1. Rotación de sistemas de referencia . . . . .	252
5.1.1. Rotaciones . . . . .	253
5.1.2. Traslaciones . . . . .	257
5.1.3. Ejemplos . . . . .	258
5.1.4. Caso general . . . . .	261
5.1.5. Comparación de velocidades y aceleraciones . . . . .	261
5.1.6. Ejemplos . . . . .	264
5.2. Movimiento cerca de la superficie de la Tierra o en ella . . . . .	268
5.2.1. Dirección de la fuerza de Coriolis . . . . .	269
5.2.2. Gravedad aparente . . . . .	271
5.2.3. El efecto de las fuerzas de Coriolis . . . . .	273
5.2.3.1. Caída libre . . . . .	273
5.2.3.2. Movimiento sobre la superficie de la Tierra . . . . .	276
5.2.3.3. Consecuencias meteorológicas . . . . .	277
5.3. El péndulo de Foucault . . . . .	278
5.4. Efecto Larmor . . . . .	281
5.5. Las mareas . . . . .	283
5.5.1. Obtención de las fuerzas de marea . . . . .	284
5.5.2. Magnitud de las mareas . . . . .	287
<b>A. Registro de cambios</b>	<b>290</b>
A.1. Versión 1.0.0 . . . . .	290
A.1.1. Versión 1.0.1 . . . . .	290
A.1.2. Versión 1.0.2 . . . . .	291
A.1.3. Versión 1.0.3 . . . . .	291

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons “Reconocimiento-NoCommercial-CompartirIgual 3.0 España”.



*Agradecimientos 1* (Mención al trabajo de Alejandro Cano Jones). Un especial agradecimiento a Alejandro Cano Jones por su revisión completa de los apuntes, la corrección de innumerables erratas y sus sugerencias.

*Agradecimientos 2* (Agradecimientos varios). Gracias a Alejandro Camón Fernández y Jorge Arcega Royo por cesión de apuntes. Gracias, también, a Juan Guerrero Marcos, Sergio Picazo Perales y Sergio Gracia Borobia por corrección de erratas.

# Capítulo 1

## Principios de mecánica

### 1.1. Introducción

La mecánica Newtoniana se centra en los vectores, como la fuerza y el momento de fuerzas:

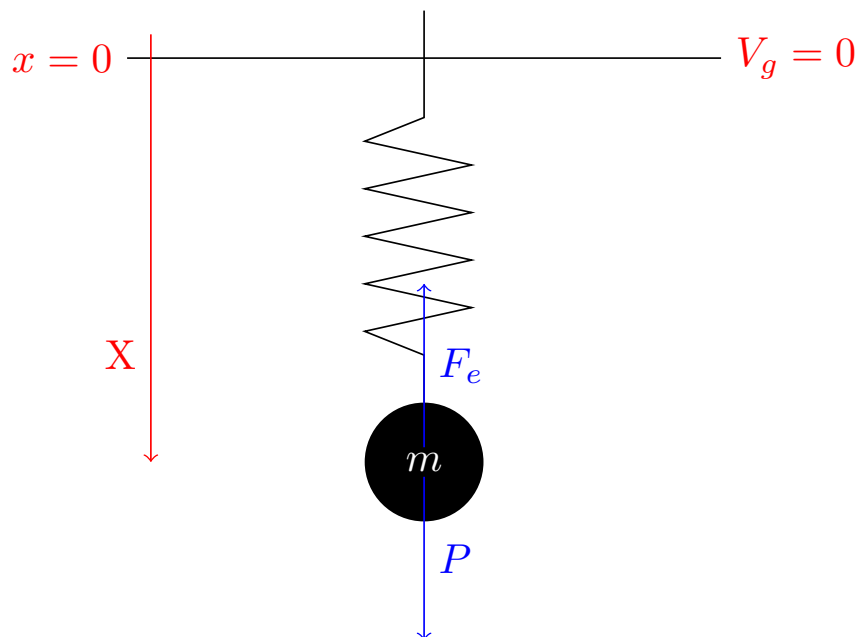
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{N}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt}$$

Sin embargo, también podemos centrarnos en escalares mediante los conceptos: trabajo  $W$ , energía potencial  $V$  y energía cinética  $T$ . Iremos desarrollando este otro enfoque a lo largo del curso.

#### 1.1.1. Ejemplos

**Ejercicio 1.** Tenemos un muelle de masa  $m$  y constante  $k$  que cuelga del techo. Sobre él actúa la fuerza gravitatoria.



**Solución** (Resolución por dinámica). Si escogemos el eje  $x$  positivo hacia abajo, las dos fuerzas que actúan son  $F_e = kx$  y  $P = mg$ . De esta forma, aplicamos la segunda ley de Newton  $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$  y llegamos a la ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + mg$$

Alternativamente, en notación de Newton:

$$m\ddot{x} = -kx + mg$$

*Nota 1.* En este curso vamos a usar la notación de Newton:

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \quad \ddot{x} \equiv \frac{d^2 x}{dt^2}$$

**Solución** (Resolución por energías). Es importante remarcar que todas las fuerzas que actúan son conservativas. Tomamos el origen de referencia para el potencial gravitatorio en la posición de equilibrio  $x = 0$ . De esta forma, las diferentes expresiones para las energías presentes son:

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

$$V_g = -mgx$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

De esta forma, la energía mecánica es:

$$E_m = V_e + V_g + T = \frac{1}{2}kx^2 - mgx + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Aplicamos el teorema de la energía mecánica  $\Delta E_m = W_{FNC}$ . Como no hay fuerzas no conservativas, podemos escribir:

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow kx\dot{x} - mg\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}(kx - mg + m\ddot{x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ kx - mg + m\ddot{x} = 0 \end{cases}$$

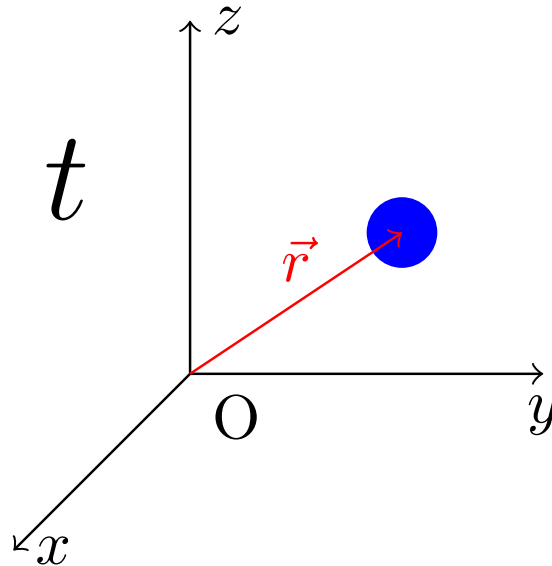
Y llegamos a la misma ecuación del movimiento que por Newton.

### 1.1.2. Conceptos básicos: espacio y tiempo

Veamos cómo son los conceptos de espacio y tiempo dentro del ámbito de la mecánica clásica:

1. Son magnitudes continuas.
2. Son magnitudes universales.
3. El tiempo es absoluto (igual para todos los observadores).
4. La geometría del espacio es euclídea.
5. La precisión es infinita.
6. Principio de relatividad: la posición y la velocidad no son absolutas, dependen del observador. Lo importante son la posición y la velocidad relativas. Sin embargo, la aceleración sí es absoluta; siempre que el valor de la aceleración sea nulo, la velocidad es constante, independientemente del sistema de referencia. Dicho de otra forma, no puede distinguirse el movimiento a velocidad constante del reposo y todos los observadores situados en sistemas no acelerados son equivalentes.

7. Sistema de referencia inercial: (en cartesianas) tiene un origen, unos ejes (siempre destrógiros) y un tiempo cumpliendo que la aceleración que sufren es nula. Aquí es donde están en vigor las leyes de Newton.



8. Existen magnitudes vectoriales y magnitudes escalares.

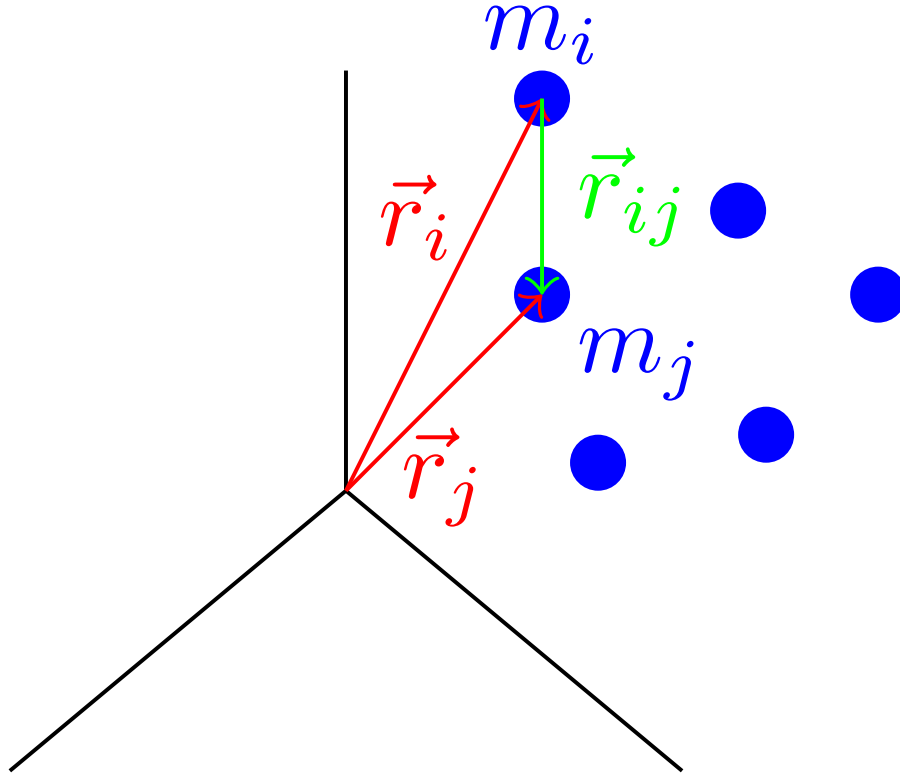
### 1.1.3. Leyes de Newton

Representaremos las posiciones con  $\vec{r}_i$ , las velocidades con  $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$  y las aceleraciones con  $\vec{a}_i = \dot{\vec{v}}_i = \ddot{\vec{r}}_i$ . Es interesante recordar el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{r} & \xrightarrow{\frac{d}{dt}} & \vec{v} & \xrightarrow{\frac{d}{dt}} & \vec{a} \\ & \xleftarrow{\int dt} & & \xleftarrow{\int dt} & \\ & & \vec{v} & & \vec{a} \end{array}$$

Imaginemos un sistema con  $n$  cuerpos aislados entre sí, cada uno con una masa  $m_i$ , entonces las leyes de Newton son las que siguen:





**Axioma 1** (Segunda ley de Newton). Sea  $S$  un sistema aislado de  $n$  cuerpos, de manera que el cuerpo  $i$ -ésimo tiene masa  $m_i$  y está situado en la posición  $\vec{r}_i$ . Entonces, la suma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo  $i$ -ésimo es igual al producto de la masa de dicho cuerpo y la aceleración que sufre. Matemáticamente:

$$\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad (1.1.1)$$

donde

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1; j \neq i}^n \vec{F}_{i \leftarrow j}$$

donde  $\vec{F}_{i \leftarrow j}$  es la fuerza que el cuerpo  $j$  ejerce sobre el  $i$ .

**Teorema 1** (Primera ley de Newton: Ley de inercia). Sea  $C$  un cuerpo cualquiera. Las siguientes situaciones son equivalentes:

1. La fuerza total que actúa sobre  $C$  es nula:  $\vec{F} = \vec{0}$ .
2. La aceleración que sufre  $C$  es nula:  $\vec{a} = \vec{0}$ .
3. La velocidad del cuerpo  $C$  es constante:  $\vec{v} = \vec{c}t\vec{e}$

Alternativamente:

$$\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{c}t\vec{e} \quad (1.1.2)$$

*Demostración.* Supongamos que el cuerpo  $C$  tiene masa  $m \neq 0$ . Por la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow m\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \int \vec{a} dt = \int \vec{0} dt = \vec{c}t\vec{e} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{c}t\vec{e}$$

*Q.E.D.*

**Axioma 2** (Tercera ley de Newton: ley de acción y reacción). Sea  $S$  un sistema de  $n$  cuerpos. La fuerza que el cuerpo  $j$ -ésimo ejerce sobre el cuerpo  $i$ -ésimo tiene mismo módulo y dirección que la fuerza que ejerce el cuerpo  $i$ -ésimo sobre el cuerpo  $j$ -ésimo; pero tiene sentido contrario. Matemáticamente:

$$\vec{F}_{i \leftarrow j} = -\vec{F}_{j \leftarrow i} \quad (1.1.3)$$

*Observación 1.* En general, la fuerza entre dos partículas  $i$  y  $j$  será función de sus posiciones y velocidades relativas.

$$\vec{F}_{ij} = \mathfrak{F}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{v}_i, \vec{v}_j) = \mathfrak{F}(\vec{r}_{ij}, \vec{v}_{ij})$$

De esta forma, definimos la distancia relativa entre  $i$  y  $j$ :

$$\vec{r}_{ij} := \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

Y, como consecuencia:

$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_i - \vec{v}_j$$

*Nota 2.* Usualmente usaremos la notación  $\vec{F}_{ij}$  para referirnos a la fuerza que ejerce el cuerpo  $j$ -ésimo sobre el  $i$ -ésimo. Es decir:

$$\vec{F}_{ij} \equiv \vec{F}_{i \leftarrow j}$$

#### 1.1.4. Principio de superposición

**Proposición 1.** El principio de superposición afirma que cuando las ecuaciones de comportamiento que rigen un problema físico son lineales, entonces el resultado de una medida o la solución  $O$  de un problema práctico relacionado con una magnitud extensiva asociada al fenómeno, cuando están presentes los conjuntos de factores causantes  $I_1, \dots, I_k$  con  $k \in \mathbb{N}$ , puede obtenerse como la suma de los efectos de cada uno.

*Demostración.* Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación lineal que relaciona dos magnitudes físicas  $I$  (input) y  $O$  (output). Supongamos, además, que contamos con  $k \in \mathbb{N}$  subsistemas tales que cada uno produce una magnitud física de entrada  $I_u$ . Queremos calcular cuál es el valor de  $O$ . Para ello:

$$O = f(I_1 + \dots + I_k) = f\left(\sum_{u=1}^k I_u\right)$$

Y, como  $f$  es lineal por hipótesis:

$$O = \sum_{u=1}^k f(I_u)$$

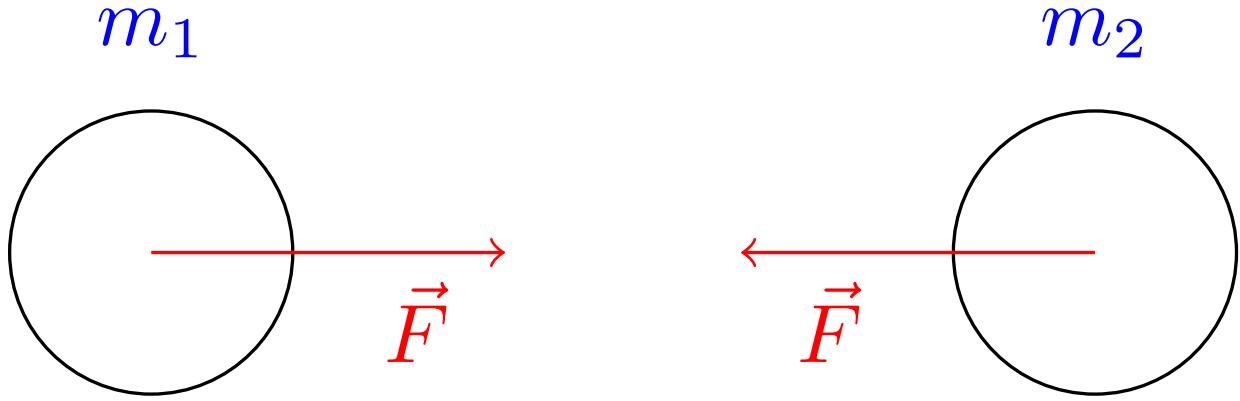
*Q.E.D.*

#### 1.1.5. Definición de masa y propiedad aditiva

**Definición 1.** Llamamos **masa inercial** de un cuerpo  $C$  a la resistencia que presenta dicho cuerpo ante un cambio de velocidad (una aceleración), medido desde un sistema de referencia inercial.

*Observación 2.* Esta definición sólo tiene sentido dentro del ámbito de la mecánica clásica.

**Ejemplo 1.** Imaginemos que contamos con dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  que se chocan entre sí:



Tenemos, entonces, por la tercera ley de Newton:

$$F = m_1 \ddot{r}_1 = m_2 \ddot{r}_2 \Leftrightarrow m_2 = m_1 \frac{\ddot{r}_1}{\ddot{r}_2}$$

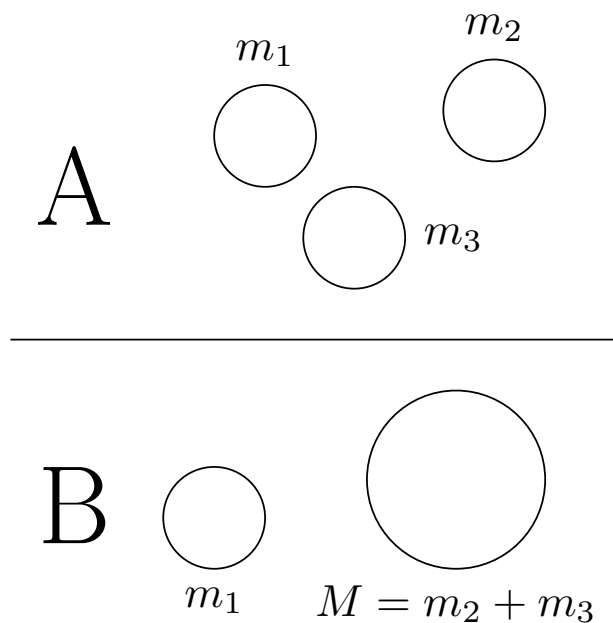
**Proposición 2.** Sea  $S_A$  un sistema con  $n$  cuerpos de masas  $m_1, \dots, m_n$  tales que todas sufran la misma aceleración  $\vec{A} := \ddot{r}_1 = \dots = \ddot{r}_n$ . Sea  $S_B$  un sistema con un único cuerpo de masa  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  que sufre una aceleración  $\vec{A}$ . Si  $\vec{F}_T$  es la fuerza externa total que sufren las partículas del sistema  $S_A$ , entonces la fuerza total que actúa sobre el sistema  $S_B$  también es  $\vec{F}_T$ , y viceversa. En otras palabras, los sistemas  $S_A$  y  $S_B$  son equivalentes.

*Demostración.* La fuerza total que actúa sobre el sistema  $S_A$  es, por el principio de superposición:

$$\vec{F}_{T,S_A} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{A} = \vec{A} \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i}_{=M} = M \vec{A} = \vec{F}_{T,S_B}$$

*Q.E.D.*

**Ejemplo 2.** Cambiemos ahora a la siguiente situación:



Supongamos en ambas situaciones  $\vec{F}_T = 0 \Leftrightarrow m\vec{a} = \vec{0}$ ; es decir, que no actúan fuerzas externas.

■ Situación A:

Entonces, las fuerzas netas que actúan sobre cada una de las masas de A son:

$$\vec{F}_{T,1} = m_1\vec{a}_1$$

$$\vec{F}_{T,2} = m_2\vec{a}_2$$

$$\vec{F}_{T,3} = m_3\vec{a}_3$$

Usando el principio de superposición:

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 = \vec{0}$$

Si suponemos  $\vec{A} = \vec{a}_2 = \vec{a}_3$ , la expresión de arriba queda:

$$m_1\vec{a}_1 + (m_2 + m_3)\vec{A} = \vec{0}$$

■ Situación B:

Las fuerzas que actúan son:

$$\vec{F}_{T,1} = m_1\vec{a}_1$$

$$\vec{F}_{T,M} = M\vec{A}$$

De nuevo, principio de superposición:

$$m_1\vec{a}_1 + M\vec{A} = \vec{0}$$

De la última ecuación se sigue:

$$M = m_1 \left( -\frac{a_1}{A} \right) = m_2 + m_3$$

## 1.2. Preliminares matemáticos

**Definición 2.** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar tal que  $\exists \frac{\partial \varphi}{\partial j}(\vec{r}) \quad \forall j = x, y, z; \forall \vec{r} \in \Omega$ . Llamamos **gradiente** de  $\varphi$  a la función vectorial:

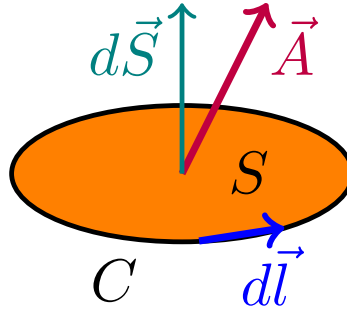
$$\begin{aligned} \text{grad}\varphi &\equiv \frac{d}{d\vec{r}}\varphi \equiv \vec{\nabla}\varphi : \quad \Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ \vec{r} &\longrightarrow \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\vec{r}), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\vec{r}), \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\vec{r}) \right) \end{aligned}$$

**Definición 3.** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\vec{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función vectorial tal que  $\exists \frac{\partial A_i}{\partial j}(\vec{r}) \quad \forall i, j = x, y, z; \forall \vec{r} \in \Omega$ . Llamamos **rotacional** de  $\vec{A}$  a la función vectorial:

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{A} &\equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} : \quad \Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ \vec{r} &\longrightarrow \quad \left( \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x, A_y, A_z) \right) (\vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} (\vec{r}) \end{aligned}$$

**Teorema 2** (Teorema de Stokes). Sea  $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función vectorial tal que  $\exists \frac{\partial A_i}{\partial j} \quad \forall i, j = x, y, z$  y sea  $S$  una superficie abierta. Entonces la integral del rotacional de  $\vec{A}$  a lo largo de la superficie  $S$  tiene el mismo valor que la integral de  $\vec{A}$  a lo largo de la curva  $C$  que delimita la superficie abierta  $S$ .

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (1.2.1)$$



**Teorema 3** (Teorema del gradiente). Sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Sea, además,  $\gamma$  cualquier curva que une dos puntos  $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, la integral a lo largo de la curva  $\gamma$  del gradiente de  $\varphi$  es igual al valor de la función  $\varphi$  en  $\vec{q}$  menos el valor de la función  $\varphi$  en  $\vec{p}$ .

$$\varphi(\vec{q}) - \varphi(\vec{p}) = \int_{\gamma(\vec{p}, \vec{q})} \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

**Proposición 3.** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar de clase  $C^{(2)}(\Omega, \mathbb{R})$ . Entonces el rotacional de su gradiente es la función nula en  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = \vec{0}$$

*Demostración.* Aplicamos la definición:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right)$$

Como la función es de clase  $C^{(2)}$ , sus derivadas parciales conmutan y, en consecuencia:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

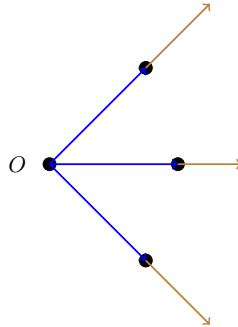
*Q.E.D.*

## 1.3. Fuerzas centrales y fuerzas conservativas (1ª parte)

### 1.3.1. Fuerzas centrales

**Definición 4** (Fuerza central). Decimos que una fuerza es **central** cuando siempre está dirigida hacia un punto  $O$  llamado centro del movimiento. Es decir, sea  $\vec{R}$  cualquier punto de  $\mathbb{R}^3$ , entonces:

$$\vec{F} \text{ es central} \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{R}) = \mathfrak{F}(\vec{RO})$$



*Nota 3* (Terminología relacionada con  $\mathfrak{F}$ ). Sean  $f$  una función arbitraria,  $n \in \mathbb{N}$  y  $t_1, \dots, t_n$  variables cualesquiera. Sean  $a, b, c \in [1, n] \cap \mathbb{N}$ ; definimos la siguiente «tabla de equivalencias»:

$$\begin{array}{lll} f = \mathfrak{F}(t_a, t_b) & \longleftrightarrow & f \text{ es función de } t_a \text{ y de } t_b. \text{ Puede ser función de más variables.} \\ f = \mathfrak{F}!(t_a, t_b, t_c) & \longleftrightarrow & f \text{ es únicamente función de } t_a, t_b \text{ y } t_c. \\ f \neq \mathfrak{F}(t_a) & \longleftrightarrow & f \text{ no es función de } t_a. \end{array}$$

Usaremos indistintamente la terminología anterior para referirnos a funciones vectoriales o escalares. Siempre podremos deducir del contexto de qué tipo se trata.

### 1.3.2. Fuerzas conservativas

**Proposición 4.** Sea  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función vectorial y  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ . Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1. Existe una función escalar diferenciable  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

2. Para cualquier trayectoria cerrada  $C$  se tiene:

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

- 3.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$$

*Demostración.*

- $3 \Rightarrow 2$ :

Sea  $S$  cualquier superficie abierta cuya frontera es la curva  $C$ .

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0} \Rightarrow \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})) \cdot d\vec{S} = 0$$

Ahora, por el teorema de Stokes (ver 2 en la página 11), tenemos que lo anterior es equivalente a:

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

- $2 \Rightarrow 1$ :

Definamos la función  $V(\vec{r})$  como:

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{\rho}) \cdot d\vec{\rho}$$

con  $\vec{r}_0$  algún punto de  $\mathbb{R}^3$ . Nótese que la función anterior está bien definida por la propiedad 2: si la integral a lo largo de un camino cerrado es nula, la integral entre dos puntos no depende del camino escogido (en otras palabras, es única). Ahora, por el teorema del gradiente (3 en la página anterior)

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

- $1 \Rightarrow 3$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}V) = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}V)$$

Y por la proposición 3 en la página anterior, el rotacional de un gradiente es siempre cero, así que:

$$-\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}V) = \vec{0}$$

*Q.E.D.*

**Definición 5** (Fuerza conservativa). Decimos que una fuerza es **conservativa** si cumplen las propiedades mencionadas en la proposición 4 en la página anterior y es únicamente función de la posición  $\vec{F} = \mathfrak{F}!(\vec{r})$ .

*Observación 3.* Las fuerzas centrales y conservativas son función de las distancias relativas de los cuerpos (conservativas) y que van en la dirección de las líneas que unen las partículas (centrales). Es decir, son de la forma:

$$\vec{F}_{ij} = \mathfrak{F}!(r_{ij}) \hat{r}_{ij}$$

### 1.3.3. Ejemplos de fuerzas centrales conservativas

Tenemos estos tipos:

- Gravitatoria (Ley de Newton de gravitación universal):

Sean  $m_1, m_2$  dos masas y  $\vec{r}_{12}$  el vector que va de la masa 1 a la 2, entonces la fuerza que 1 ejerce sobre 2 es:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (1.3.1)$$

donde  $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ .

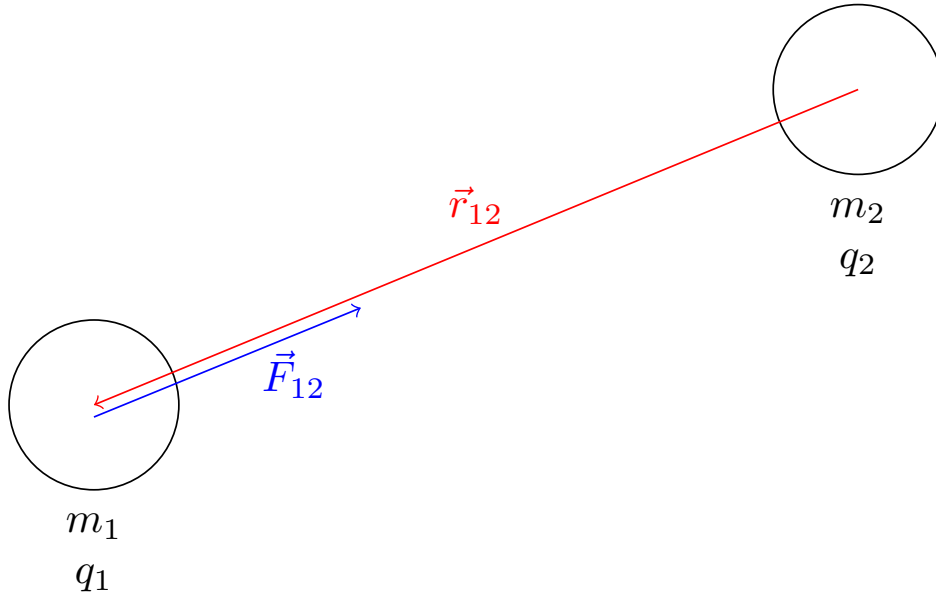
- Electroestática (Ley de Coulomb):

Sean  $q_1, q_2$  dos cargas y  $\vec{r}_{12}$  el vector que va de la carga 1 a la carga 2, entonces la fuerza que 1 ejerce sobre 2 es:

$$\vec{F}_{21} = K \frac{q_1q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (1.3.2)$$

donde  $K = 8,99 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$ .

Podemos verlo gráficamente en:

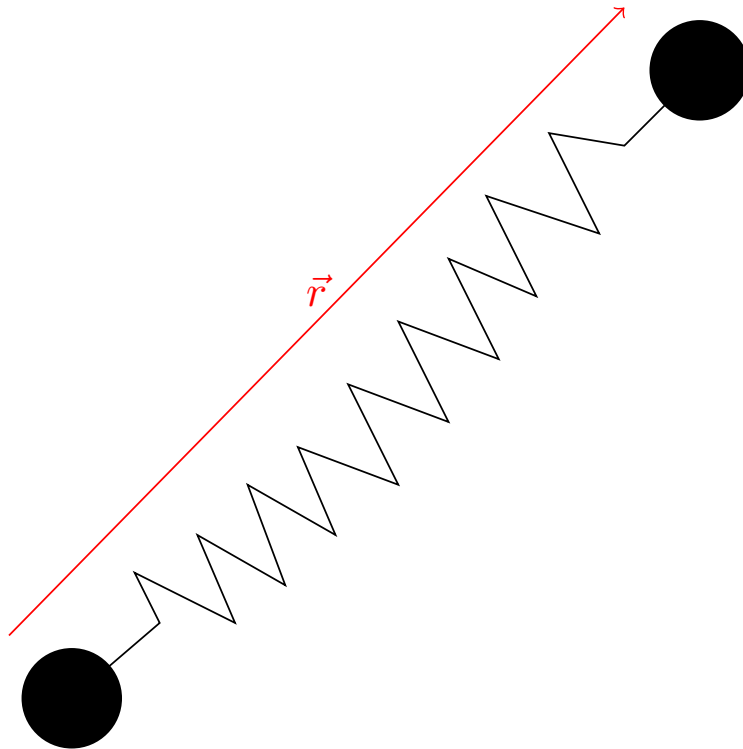


*Nota 4.* ¡Ojo! Con  $\vec{F}_{12}$  nos referimos a la fuerza que 2 hace sobre 1.

- Oscilador armónico isótropo:

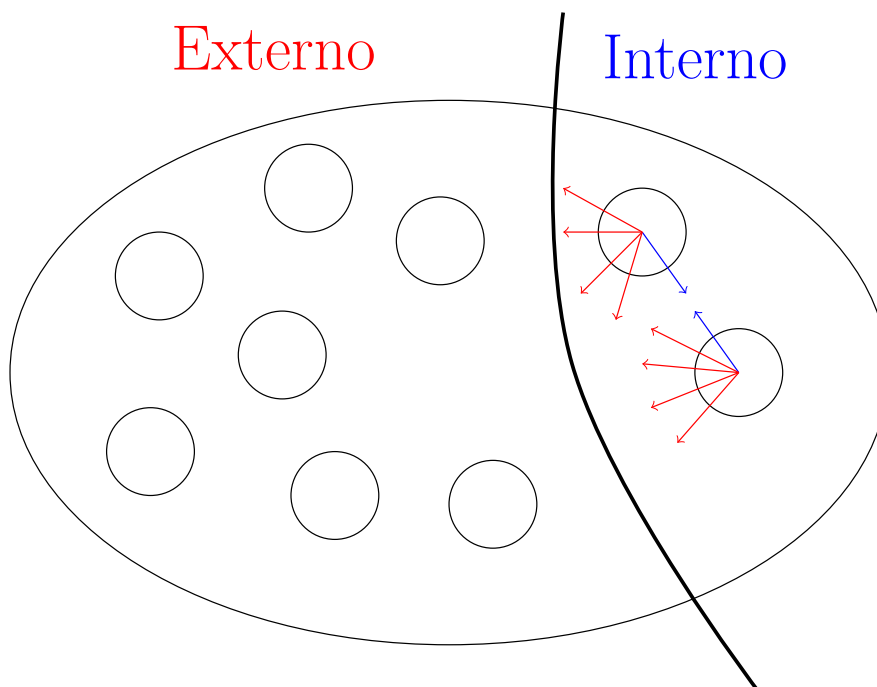
$$\vec{F} = -k\vec{r} = -kr\hat{r} \quad (1.3.3)$$

Gráficamente:



## 1.4. Ligaduras

Consideremos un sistema de partículas. Así tenemos fuerzas internas y externas, como podemos ver en el dibujo:



**Definición 6.** Llamamos **fuerzas externas** a las ejercidas por cuerpos ajenos al sistema que estamos considerando, mientras que llamamos **fuerzas internas** a las que ejercidas entre las partículas del sistema estudiado.



**Definición 7.** Una **ligadura** es una condición que limita el movimiento relativo de las partículas. Normalmente, éstas vendrán dadas por ecuaciones matemáticas de la siguiente forma:

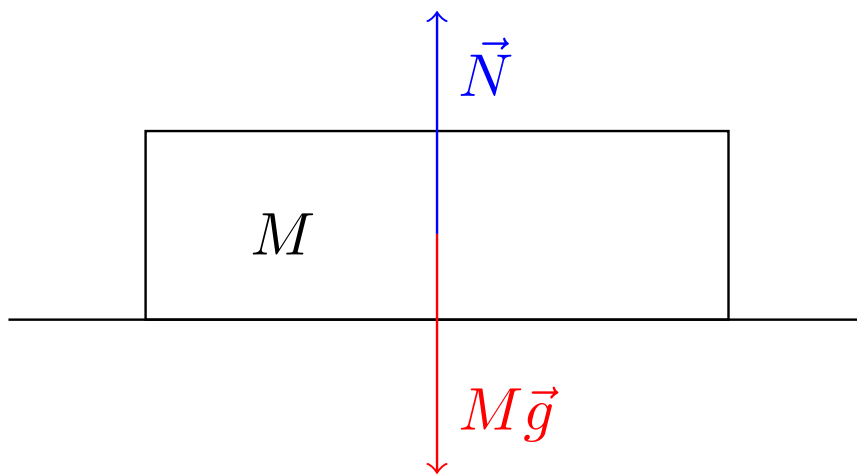
$$G(q, \dot{q}, t) = 0$$

donde  $G$  es una función que depende de una variable  $q$  (una coordenada generalizada, veremos lo que significa eso más adelante), de su derivada y del tiempo.

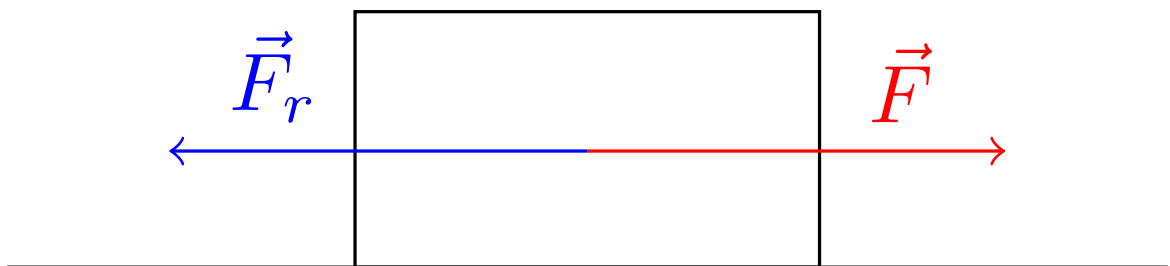
**Definición 8.** Llamamos **fuerza de ligadura** a aquella que impone una ligadura en el movimiento de una partícula.

Ejemplos de fuerzas de ligadura son las siguientes:

- La normal, que en nuestro ejemplo impone la condición  $y = y_0$  donde  $y_0 \in \mathbb{R}$ :



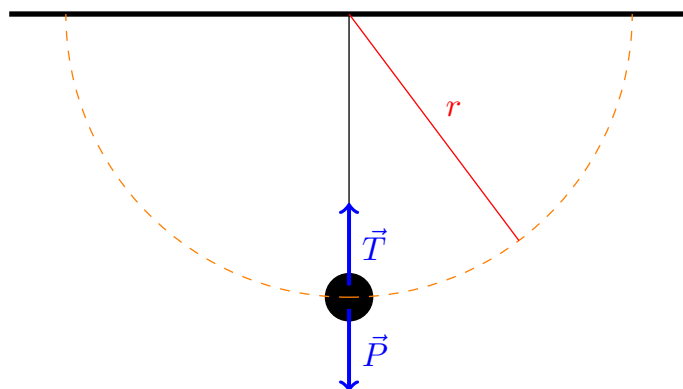
- La fuerza de rozamiento estática:



con la ecuación de ligadura:

$$x = x_0$$

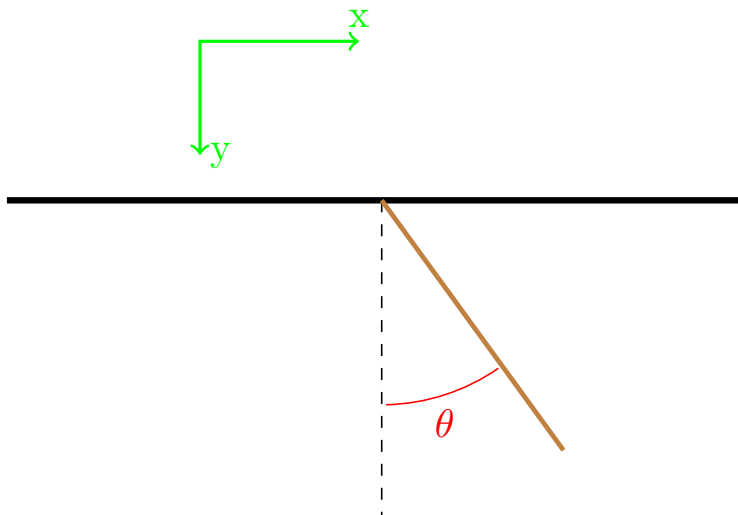
- La tensión:



con la ecuación de ligadura:

$$r = r_0$$

- Una articulación: Consideremos el caso de un sólido rígido (una varilla que cuelga del techo):

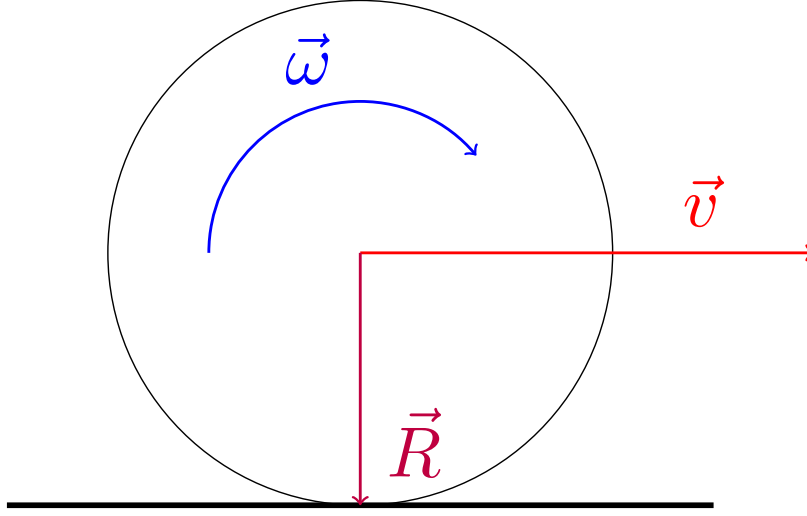


cuyas ecuaciones de ligadura son:

$$y - \frac{L}{2} \cos \theta = 0$$

$$x - \frac{L}{2} \sin \theta = 0$$

- Movimientos de rodadura:



En todos los movimientos en los que se rueda, se cumple:

$$\vec{v}_A = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{R}$$

donde  $A$  es el punto de contacto del cuerpo que gira con el suelo. Sin embargo, si no hay deslizamiento, sabemos que  $\vec{v}_A = \vec{0}$ ; de esta forma, obtenemos la ecuación de ligadura:

$$0 = v_A = v - \omega R \Leftrightarrow v = \omega R$$

Integrando, obtenemos:

$$x - \theta R = 0$$

En cada instante de tiempo, el punto que está tocando el suelo (el punto  $A$ ) es el eje de giro.

## 1.5. Momentos

### 1.5.1. Momento lineal

#### 1.5.1.1. Definición y primeras propiedades

**Definición 9** (Una partícula). El **momento lineal** de una partícula es una magnitud física que describe la tendencia de una partícula a continuar con su estado de movimiento, indicando la dirección y el sentido de aquél. Matemáticamente, el momento lineal de una partícula de masa  $m$  y posición  $\vec{r}$  se define como:

$$\vec{p} := m\dot{\vec{r}} \quad (1.5.1)$$

**Corolario 1.** La fuerza que actúa sobre una partícula coincide con la derivada de su momento lineal con respecto al tiempo.

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

*Demostración.*

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = m \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}) = \frac{d}{dt} (m\dot{\vec{r}}) = \frac{d}{dt} (\vec{p}) \equiv \dot{\vec{p}}$$

*Q.E.D.*

**Definición 10** ( $n$  partículas). Definimos el **momento lineal total** de un sistema de partículas como la suma de los momentos lineales de cada una de las partículas que lo forman.

$$\vec{P} := \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}} \quad (1.5.2)$$

donde  $\dot{\vec{R}}$  representa la velocidad del centro de masas, siendo  $\vec{R}$  la posición del centro de masas:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

y  $M = \sum_{i=1}^n m_i$ .

**Proposición 5.** *La suma de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema constituye el cambio del momento lineal del sistema:*

$$\vec{F}^{(e)} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \dot{\vec{P}}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \dot{\vec{P}} &= \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \left[ \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{i \leftarrow j} \right] = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{i \leftarrow j} = \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \left( \vec{F}_{i \leftarrow j} + \vec{F}_{j \leftarrow i} \right) \end{aligned}$$

Por la tercera ley de Newton ( 2 en la página 9),  $\vec{F}_{i \leftarrow j} = -\vec{F}_{j \leftarrow i}$  y, por consiguiente:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \underbrace{\left( \vec{F}_{i \leftarrow j} + \vec{F}_{j \leftarrow i} \right)}_{=0 \ \forall i,j} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}^{(e)}$$

*Q.E.D.*

#### 1.5.1.2. Teorema de conservación

**Teorema 4** (Teorema de conservación del momento lineal). *El momento lineal se conserva si y sólo si la suma de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema es cero.*

$$\vec{F}^{(e)} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} = \vec{cte} \quad (1.5.3)$$

*Demostración.* La demostración es trivial a partir de la proposición 5.

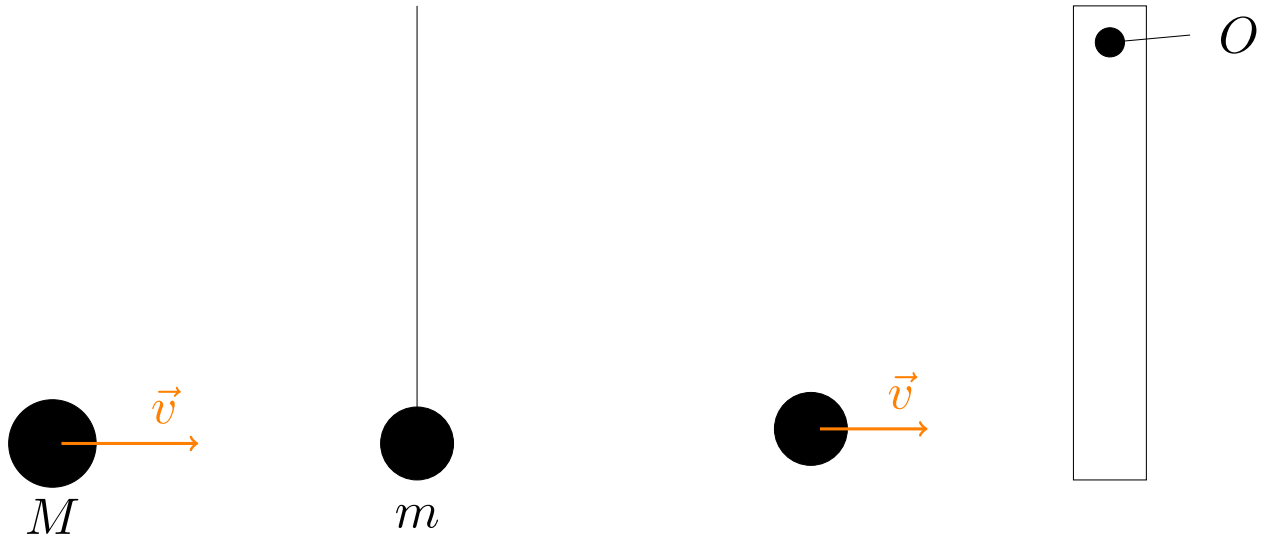
*Q.E.D.*

#### 1.5.1.3. Impulso lineal

**Definición 11** (Impulso lineal). El **impulso lineal** es una magnitud física que representa la variación de momento lineal que se produce en un intervalo de tiempo (normalmente pequeño). Resulta útil para estudiar los choques.

$$\vec{I} := \Delta \vec{p} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}_i(\tau) d\tau$$

Un dibujo para representar estos conceptos:

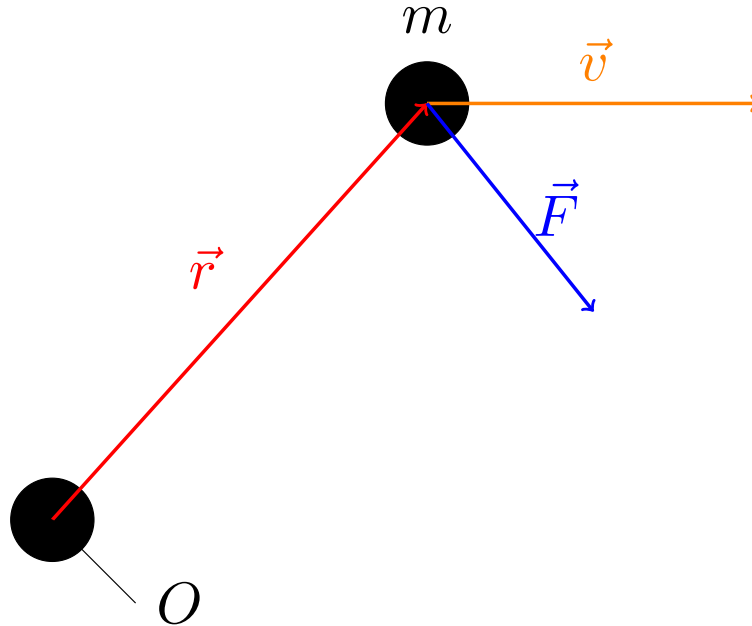


### 1.5.2. Momento angular

**Definición 12** (Una partícula). Llamamos **momento angular** de una partícula de masa  $m$  situada en la posición  $\vec{r}$  y con momento lineal  $\vec{p}$  desde un punto  $O$  a la magnitud física:

$$\vec{L}_O := \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (1.5.4)$$

Uno puede escoger el punto desde el cual calcular el momento angular. Gráficamente:



**Definición 13** ( $n$  partículas). Definimos el **momento angular** de un sistema de  $n$  partículas respecto al punto  $O$  como la suma de los momentos angulares de cada uno de sus integrantes respecto al punto  $O$ :

$$\vec{L}_O := \sum_{i=1}^n L_{O,i} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (1.5.5)$$

*Observación 4.* Como podemos ver, el momento angular de un sistema de partículas no se puede calcular mediante la posición y velocidad del centro de masas junto con la masa total:

$$\vec{L}_O \neq M\vec{R} \times \dot{\vec{R}}$$

Eso se debe a que  $\vec{L}^* \neq \vec{0}$  (veremos lo que esto significa más adelante).

### 1.5.3. Momento de fuerzas

#### 1.5.3.1. Definición y primeras propiedades

**Definición 14** (Una partícula). Llamamos **momento de fuerzas** de una partícula situada en el punto  $\vec{r}$ , sobre la que actúa una fuerza  $\vec{F}$ , desde un punto  $O$  a la magnitud física:

$$\vec{N}_O := \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \quad (1.5.6)$$

**Proposición 6.** El momento de fuerzas de una partícula medido desde el punto  $O$  es igual a la variación de momento angular medida desde el punto  $O$ :

$$\vec{N}_O = \dot{\vec{L}}_O$$

*Demostración.* Por la definición de momento angular para una partícula ( 12 en la página anterior):

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \underbrace{\vec{p}}_{=m\dot{\vec{r}}} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}_O$$

*Q.E.D.*

**Definición 15** ( $n$  partículas). Definimos el **momento de fuerzas** para  $n$  partículas como la suma de los momentos de fuerza de cada una de las partículas que componen el sistema:

$$\vec{N}_O^{(e)} := \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \dot{\vec{L}}_O \quad (1.5.7)$$

#### 1.5.3.2. Teorema de conservación del momento angular

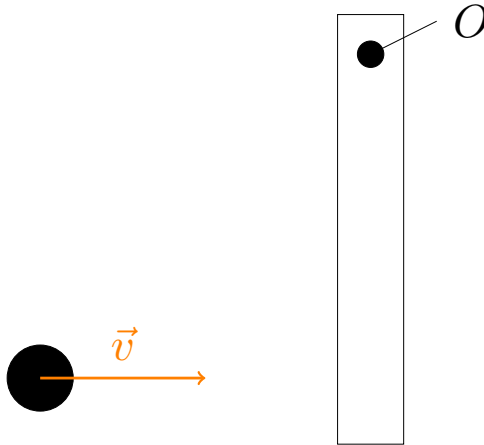
**Teorema 5** (Teorema de conservación del momento angular). El momento total de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema es nulo si y sólo si el momento angular del sistema permanece constante.

$$\vec{N}_O^{(e)} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{L}_O = \vec{c}t\vec{e}$$

*Demostración.* La demostración es inmediata a partir de la proposición 6 y de la definición 15.

*Q.E.D.*

**Ejemplo 3.** En este caso, se conserva el momento angular desde el punto  $O$ :



## 1.5.3.3. Resultados sobre fuerzas centrales y conservativas

**Proposición 7.** *El momento angular de una partícula de masa  $m$  respecto de un punto  $O$  se conserva si y sólo si la fuerza total  $\vec{F}$  que actúa sobre ella es central respecto de  $O$ .*

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{cte} \Leftrightarrow \vec{F} \text{ es central}$$

*Demostración.* Recordemos que el momento de fuerzas de una partícula era (ver definición 14 en la página anterior) :

$$\vec{N}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

Por el teorema 5 en la página anterior, tenemos que:

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{cte} \Leftrightarrow \vec{N}_O = \vec{0}$$

y

$$\vec{N}_O = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{r} \parallel \vec{F}$$

Bien, si la fuerza es central respecto de  $O$ , entonces  $\vec{F}$  llevará la misma dirección que  $\vec{r}$  (será paralelo a  $\vec{r}$ ) y por lo visto arriba, el momento angular se conserva. Recíprocamente, si el momento angular se conserva  $\vec{F}$  y  $\vec{r}$  deben ser vectores paralelos. En otras palabras  $\vec{F}$  debe tener la misma dirección que  $\vec{r}$  y, en consecuencia, es central. *Q.E.D.*

**Corolario 2.** *Si la fuerza total  $\vec{F}$  que actúa sobre una partícula es central, entonces su movimiento será unidimensional si  $\vec{L}_O = \vec{0}$  y bidimensional si  $\vec{L}_O \neq \vec{0}$ , pero nunca será tridimensional. En el caso bidimensional, la trayectoria de la partícula estará contenida en el plano formado por su posición  $\vec{r}(t_0)$  y su velocidad  $\dot{\vec{r}}(t_0)$  en cualquier instante  $t_0$ .*

*Demostración.* Por la proposición anterior, sabemos que si la fuerza es central, el momento angular es constante  $\vec{L}_O = \overrightarrow{cte}$ . Por definición de momento angular de una partícula con respecto al punto  $O$  (ver definición 14 en la página anterior), tenemos:

$$\vec{L}_O = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

Si es  $\vec{L}_O = \vec{0}$ , como es  $m \neq 0$ , necesariamente será  $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{r} \parallel \dot{\vec{r}}$ . Es decir, el vector posición y el vector velocidad de la partícula tendrán la misma dirección. En ese caso, como la velocidad es la variación de la posición y la velocidad tiene la misma dirección que la posición, la variación de la posición se producirá únicamente en la dirección de la posición. Es decir, el movimiento tiene lugar únicamente a lo largo de la dirección de  $\vec{r}$ .

Si es  $\vec{L}_O \neq \vec{0}$ , entonces, si fijamos un  $t_0$  tenemos:

$$\vec{L}_O = m\vec{r}(t_0) \times \dot{\vec{r}}(t_0)$$

Pero, como es  $\vec{L}_O = \overrightarrow{cte}$ , debe darse:

$$m\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) = m\vec{r}(t_0) \times \dot{\vec{r}}(t_0) \quad \forall t$$

Por tanto, necesariamente,  $\vec{r}$  y  $\dot{\vec{r}}$  deben estar contenidos siempre en el mismo plano para cualquier  $t$ . *Q.E.D.*

**Lema 1.** *El gradiente de una función escalar  $\phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  en coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$  viene dado por la expresión:*

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$$

**Proposición 8.** *Una fuerza  $\vec{F}$  es central y conservativa si y sólo si existe una función escalar  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable que permite expresar  $\vec{F}$  como sigue:*

$$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}$$

para algún origen de coordenadas  $O$ .

*Demostración.*

■  $\Leftarrow$ :

Si  $\vec{F} = -\frac{dV}{dr}\hat{r}$ , entonces el momento de fuerzas de la partícula respecto al punto  $O$  es:

$$\vec{N}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left( -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} \right) = -\frac{\partial V}{\partial r} \underbrace{\vec{r} \times \hat{r}}_{=\vec{0}} = 0$$

En consecuencia, por el teorema 5 en la página 21, el momento angular  $\vec{L}_O$  se conserva. Y, ahora, por la proposición 7 en la página anterior, como el momento angular se conserva,  $\vec{F}$  es central.

Por otra, parte  $\vec{F}$  es trivialmente una fuerza conservativa ya que existe una función escalar  $V$  tal que  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ .

■  $\Rightarrow$ :

Como  $\vec{F}$  es una fuerza conservativa, sabemos que existe una función escalar  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable que permite expresar  $\vec{F}$  como:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

que, según el lema 1 en la página anterior, en coordenadas esféricas puede expresarse como:

$$\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$$

Ahora, como  $\vec{F}$  es una fuerza central, por la proposición 7 en la página anterior y el teorema 5 en la página 21, el momento de fuerzas de la partícula debe ser cero:

$$\begin{aligned} \vec{0} = \vec{N}_O &= \vec{r} \times \vec{F} = -\vec{r} \times \vec{\nabla}V = -\vec{r} \times \left( \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \right) = \\ &= -\frac{\partial V}{\partial r} \underbrace{\vec{r} \times \hat{r}}_{=\vec{0}} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{r} \times \hat{\theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{r} \times \hat{\varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{r} \times \hat{\theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{r} \times \hat{\varphi} \end{aligned}$$

La única forma de que lo anterior sea cero para todo  $\vec{r}$  es que  $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial V}{\partial \varphi}$ , en consecuencia:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r}$$

y, así, la fuerza debe tener la forma descrita en el enunciado.

*Q.E.D.*

#### 1.5.3.4. Impulso angular

**Definición 16** (Impulso angular). El **impulso angular** es una magnitud física que representa la variación de momento angular que se produce en un intervalo de tiempo (normalmente pequeño).

$$\Delta \vec{L}_O := \int_t^{t+\Delta t} \vec{N}_O(\tau) d\tau$$

## 1.6. Energía

### 1.6.1. Energía cinética $E_C$ , $T$

**Definición 17.** Llamamos **energía cinética** a la que posee un cuerpo debido a su movimiento. Matemáticamente, definimos la energía cinética de un cuerpo de masa  $m$  y posición  $\vec{r}$  como:

$$T := \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \quad (1.6.1)$$

*Observación 5.* En coordenadas cartesianas la expresión de la energía cinética queda:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$



### 1.6.2. Trabajo de una fuerza

**Definición 18.** Sean  $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3$ . Llamamos **trabajo de una fuerza**  $\vec{F}$  a la energía que transfiere la fuerza al cuerpo para desplazarlo entre la posición inicial  $\vec{r}_1$  y la posición final  $\vec{r}_2$  :

$$W_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} := \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.6.2)$$

**Teorema 6** (Teorema de la energía cinética o teorema de las fuerzas vivas). *El trabajo realizado por la fuerza neta que actúa sobre una partícula entre una posición  $\vec{r}_1$  y una posición  $\vec{r}_2$  es igual al incremento de energía cinética de la partícula entre las posiciones  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ :*

$$W_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} = T_{\vec{r}_2} - T_{\vec{r}_1} = \Delta T \quad (1.6.3)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} W_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}} \right) d\vec{r} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d \left( \dot{\vec{r}} \right) \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{=\vec{r}} = \\ &= m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \dot{\vec{r}} d \left( \dot{\vec{r}} \right) = m \left[ \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right]_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_2^2 - \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_1^2 = T_{\vec{r}_2} - T_{\vec{r}_1} \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

### 1.6.3. Energía potencial $E_p$ , $V$

**Definición 19.** Llamamos **energía potencial** a la energía asociada a la posición de un cuerpo dentro de un campo de fuerzas conservativo. Matemáticamente viene dada por una función que depende únicamente de la posición y denominamos energía potencial  $V(\vec{r})$  con referencia en  $\vec{r}_0$  a:

$$V(\vec{r}) := - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{\rho}) \cdot d\vec{\rho} \quad (1.6.4)$$

*Observación 6.* Nótese cómo la función  $V(\vec{r})$  de la definición anterior sólo está bien definida si la fuerza  $\vec{F}$  es conservativa. Si la fuerza  $\vec{F}$  no fuese conservativa, el valor de la integral  $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  no sería único, dependería del camino escogido.

*Observación 7.* En la definición anterior hemos tomado el punto  $\vec{r}_0$  como punto de referencia y  $\vec{F}$  no depende ni de  $t$  ni de  $v$ . Nótese que  $V(\vec{r})$  no es un incremento; es una función que definimos como el resultado de la integral, cuyo extremo inferior está siempre fijo y viene con la definición de  $V$ . Hacemos esto para poder decir que la función  $V$  toma un valor para cada punto de  $\mathbb{R}^3$ ; lo cual no tendría sentido si fuese un incremento.

*Observación 8.* La energía potencial asociada a una fuerza conservativa no es única. Pero todas ellas difieren únicamente en una constante que depende del  $\vec{r}_0$  tomado para la definición de la energía potencial.

**Corolario 3.** Sean  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  dos puntos de  $\mathbb{R}^3$  y sean  $\vec{F}$  una fuerza conservativa y  $V$  uno de sus potenciales asociados. La diferencia de energía potencial entre los puntos  $\vec{r}_2$  y  $\vec{r}_1$  coincide con el opuesto del valor del trabajo que realiza la fuerza  $\vec{F}$  asociada al potencial  $V$  para desplazar el cuerpo de la posición  $\vec{r}_1$  a la posición  $\vec{r}_2$  y también coincide con la diferencia entre la energía cinética inicial (posición  $\vec{r}_1$ ) y final (posición  $\vec{r}_2$ ).

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = -W_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} = T_{\vec{r}_1} - T_{\vec{r}_2}$$

*Alternativamente, se usa la notación resumida:*

$$\Delta V = -W = -\Delta T$$

*Demostración.* Por definición de energía potencial, tenemos:

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ahora, por la definición de trabajo ( 18 en la página anterior):

$$-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2}$$

Por último, por el teorema de la energía cinética ( 6 en la página anterior):

$$-W_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} = -(T_{\vec{r}_2} - T_{\vec{r}_1}) = T_{\vec{r}_1} - T_{\vec{r}_2}$$

*Q.E.D.*

#### 1.6.4. Energía mecánica $E_m$ , $E$

**Definición 20** (Energía mecánica). Llamamos **energía mecánica** a la capacidad de un cuerpo de producir un trabajo mecánico debido a su posición o su velocidad. Matemáticamente, es la suma de la energía cinética y potencial de dicho cuerpo.

$$E_m := T + V \quad (1.6.5)$$

**Teorema 7** (Teorema de conservación). *La energía total de un cuerpo no varía con el tiempo si y sólo si la fuerza total que actúa sobre él es conservativa.*

$$\boxed{\vec{F} \text{ es conservativa} \Leftrightarrow E = \text{cte}} \quad (1.6.6)$$

*Demostración.*

*Q.E.D.*

■  $\Rightarrow$ :

Sean  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  dos puntos de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $V$  el potencial asociado a  $\vec{F}$ . Por el corolario 3 en la página anterior, sabemos que si una fuerza es conservativa, se cumple:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) &= T_{\vec{r}_1} - T_{\vec{r}_2} \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underbrace{V(\vec{r}_2) + T_{\vec{r}_2}}_{=E_{\vec{r}_2}} &= \underbrace{V(\vec{r}_1) + T_{\vec{r}_1}}_{=E_{\vec{r}_1}} \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow E_{\vec{r}_2} = E_{\vec{r}_1} \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow E = \text{cte} \end{aligned}$$

■  $\Leftarrow$ :

Definimos:

$$V_{\vec{r}_2} := E - T_{\vec{r}_2}$$

$$V_{\vec{r}_1} := E - T_{\vec{r}_1}$$

Si estudiamos:

$$V_{\vec{r}_2} - V_{\vec{r}_1} = -T_{\vec{r}_2} + T_{\vec{r}_1} = -(T_{\vec{r}_2} - T_{\vec{r}_1})$$

Por el teorema de la energía cinética ( 6 en la página anterior):

$$V_{\vec{r}_2} - V_{\vec{r}_1} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ahora bien, como la resta  $V_{\vec{r}_2} - V_{\vec{r}_1}$  únicamente depende de  $\vec{r}_2$  y  $\vec{r}_1$ , la integral también debe depender únicamente de  $\vec{r}_2$  y  $\vec{r}_1$ . En consecuencia, la mencionada integral no puede depender del camino escogido. En cuyo caso es:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

para cualquier curva cerrada  $C$  y, por consiguiente, la fuerza  $\vec{F}$  es conservativa.

**Corolario 4.** *La energía total de un sistema de partículas  $S$  con  $n$  partículas se conserva si todas las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas. El recíproco no es cierto, en general.*

*Demostración.* Por el principio de superposición (ver proposición 1 en la página 9), puede tratarse un sistema de varias partículas como la suma de varios subsistemas de una partícula. Por tanto, la energía total del sistema es:

$$E_T = \sum_{i=1}^n E_i$$

Ahora, estudiamos:

$$\dot{E}_T = \sum_{i=1}^n \dot{E}_i$$

Como todas las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas del sistema son conservativas, tenemos por el teorema anterior que  $E_i = \text{cte} \Rightarrow \dot{E}_i = 0$ ; y esto se cumple  $\forall i = 1, \dots, n$ . En consecuencia:

$$\dot{E}_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \dot{E}_T = 0 \Leftrightarrow E_T = \text{cte}$$

*Q.E.D.*

*Observación 9.* En general, no es necesario que todas las fuerzas que actúan sobre una partícula sean conservativas para que la fuerza total que actúa sobre la partícula sea conservativa. Por ejemplo, si tenemos un cuerpo que se desliza en un plano inclinado sin rozamiento, sobre él actúan dos fuerzas, el peso y la normal, la primera es conservativa, pero la segunda no. Sin embargo, su suma es conservativa, pues la normal no hace trabajo.

### 1.6.5. Fuerzas conservativas (2ª parte)

**Proposición 9.** La energía potencial  $V$  asociada a una fuerza conservativa  $\vec{F}$  no puede depender explícitamente del tiempo  $t$ .

*Demostración.* Demostramos que es condición necesaria para que la fuerza sea conservativa que la función  $V$  no dependa explícitamente del tiempo. Supongamos que se cumple  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ . Ahora bien, supongamos que nuestra función  $V$  es de la forma  $V(x(t), y(t), z(t), t)$ . Entonces, su derivada con respecto del tiempo es:

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V} := \sum_{j=x,y,z,t} \frac{\partial V}{\partial j} \frac{\partial j}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial V}{\partial t} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} V + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Por otra parte:

$$\dot{T} = m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} + m\dot{z}\ddot{z} = m\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}$$

Calculemos  $\dot{E}_m = \dot{T} + \dot{V}$ . Si la fuerza es conservativa, debe ser cero:

$$\dot{T} + \dot{V} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} + \underbrace{\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} V}_{-\vec{F}} + \frac{\partial V}{\partial t} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Por tanto:

$$\dot{E}_m = 0 \Leftrightarrow \dot{T} + \dot{V} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Es decir, nuestra función  $V$  no puede depender directamente del tiempo para ser conservativa.

*Q.E.D.*

*Conclusión 1.*

$$\boxed{\vec{F} \text{ es conservativa} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{F} = \mathfrak{F}'(\vec{r}) \end{cases}} \quad (1.6.7)$$

## 1.6.5.1. Ejemplos

**Ejercicio 2.** Ver si la siguiente fuerza es conservativa y calcular su potencial asociado (si existe):

$$\vec{F} = 6xy\hat{i} + 3x^2\hat{j} + 4z\hat{k}$$

**Solución.** Para ello, calculamos su rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (6x - 6x)\hat{i} + (0 - 0)\hat{j} + (0 - 0)\hat{k} = \vec{0}$$

El rotacional es nulo y obviamente  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{z}} = 0$ ; en consecuencia  $\vec{F}$  no depende explícitamente ni del tiempo ni de la velocidad, luego la fuerza es conservativa.

Nuestro siguiente objetivo es calcular el potencial. Para ello, sabemos:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

Hacemos la «integral» a ambos lados y obtenemos:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r} = - \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z_0)} F_x dx - \int_{(x, y_0, z_0)}^{(x, y, z_0)} F_y dy - \int_{(x, y, z_0)}^{(x, y, z)} F_z dz = \\ &= - \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y_0, z_0)} 6xy dx - \int_{(x, y_0, z_0)}^{(x, y, z_0)} 3x^2 dy - \int_{(x, y, z_0)}^{(x, y, z)} 4z dz = \\ &= - [3x^2y]_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y_0, z_0)} - [3x^2y]_{(x, y_0, z_0)}^{(x, y, z_0)} - [2z^2]_{(x, y, z_0)}^{(x, y, z)} = \\ &= 3x_0^2y_0 - 3x^2y_0 + 3x^2y_0 - 3x^2y + 2z_0^2 - 2z^2 \end{aligned}$$

*Observación 10.* Podemos descomponer la integral vectorial en tres integrales escalares, pues al ser la fuerza conservativa, el trabajo no va a depender del camino escogido; eso quiere decir que podemos escoger el camino que hace que realizar la integral sea más sencillo.

Alternativamente, podemos hallar el potencial a través de las ecuaciones:

$$F_x = \frac{dV}{dx} = 6xy \Rightarrow V = 3x^2y + k(x_0, y_0, z_0)$$

$$F_y = \frac{dV}{dy} = 3x^2 \Rightarrow V = 3x^2y + k(x_0, y_0, z_0)$$

$$F_z = \frac{dV}{dz} = 4z \Rightarrow V = 2z^2 + k(x_0, y_0, z_0)$$

Luego si hacemos  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ , obtenemos una solución:

$$V = -3x^2y - 2z^2$$

**Ejemplo 4.** Tenemos una partícula de masa  $m$ , que sufre una fuerza:

$$F = -cx^3$$

donde  $c > 0$ . También conocemos  $\dot{x}(x=a) = 0$ . Nos piden hallar la velocidad de la partícula cuando  $x = 0$ . Calculemos la energía potencial:

$$V(x) = - \int_{x_0}^x F dx = \int_{x_0}^x c\chi^3 d\chi = \frac{c}{4} (x^4 - x_0^4) = \frac{c}{4} x^4 + C$$

donde  $C$  es una constante. Como la fuerza es conservativa, sabemos que:

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{cx^4}{4} = \text{cte}$$

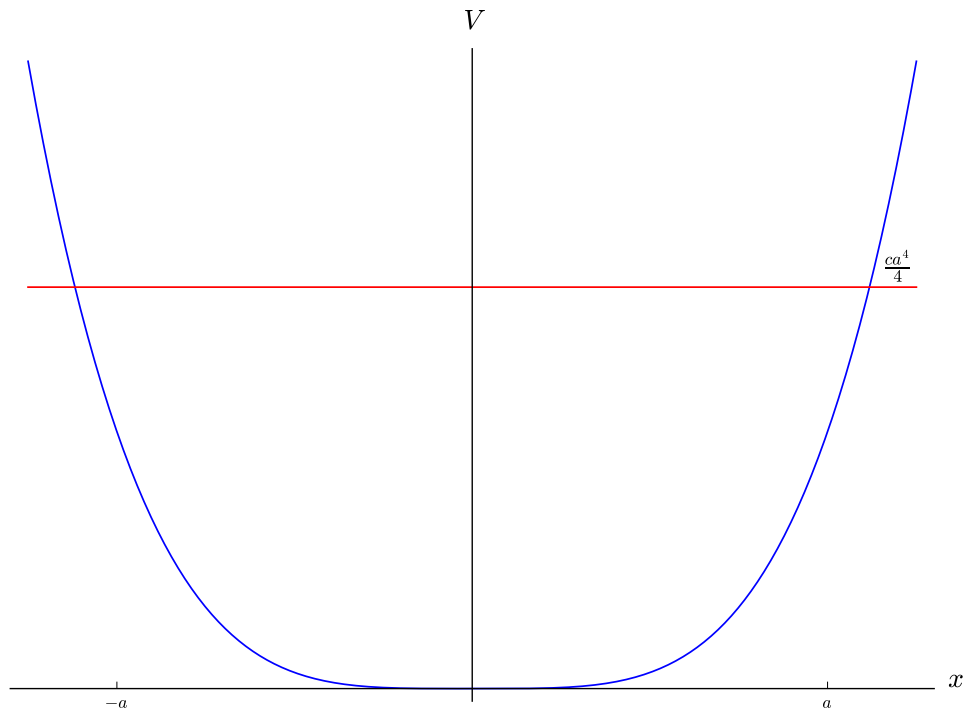
Si evaluamos en  $x = a$ , podemos hallar el valor de la energía:

$$E_m = \frac{ca^4}{4}$$

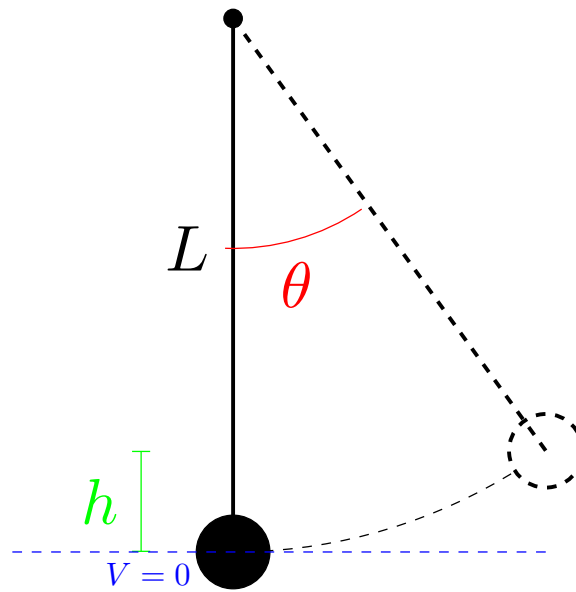
Queremos calcular la velocidad cuando  $x = 0$ :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{ca^4}{4} \Leftrightarrow v_0 = a^2 \sqrt{\frac{c}{2m}}$$

Veamos la situación gráficamente:



**Ejemplo 5.** Tenemos un péndulo simple; es decir una varilla con masa nula y de longitud  $L$ . De la varilla cuelga una partícula de masa  $m$ .



$$h = L - L \cos \theta$$

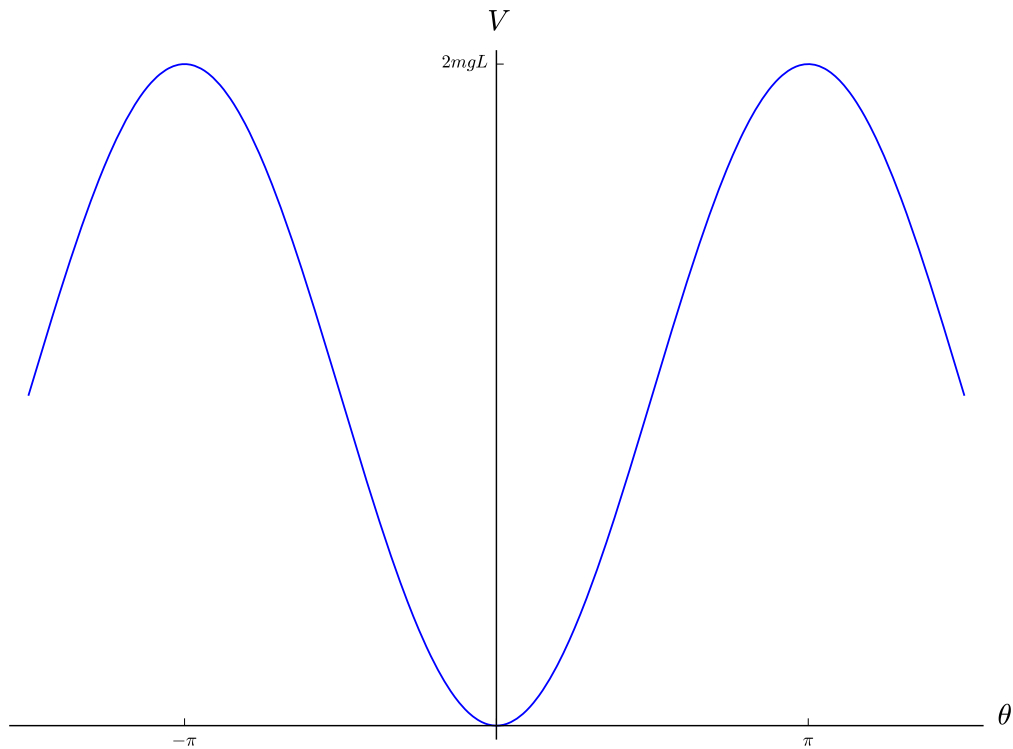
**Ejemplo 6.** Tenemos un alambre rígido sin masa de longitud  $L$ . Nos piden determinar los tipos de movimiento en función de  $v$ . Estudiamos la energía potencial:

$$V = mgh = mg(L - L \cos \theta)$$

Vemos que:

$$\begin{aligned} \theta = 0 &\Rightarrow V = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow V = mgL \end{aligned}$$

Si pintamos la gráfica  $V$  en función de  $\theta$ , obtenemos un función sinusoidal.



Examinamos el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Calculemos la energía total:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) = E(\theta = 0) = \frac{1}{2}mv^2 = V(\theta_{\text{máx}}) = mgL(1 - \cos \theta_{\text{máx}}) \Leftrightarrow$$

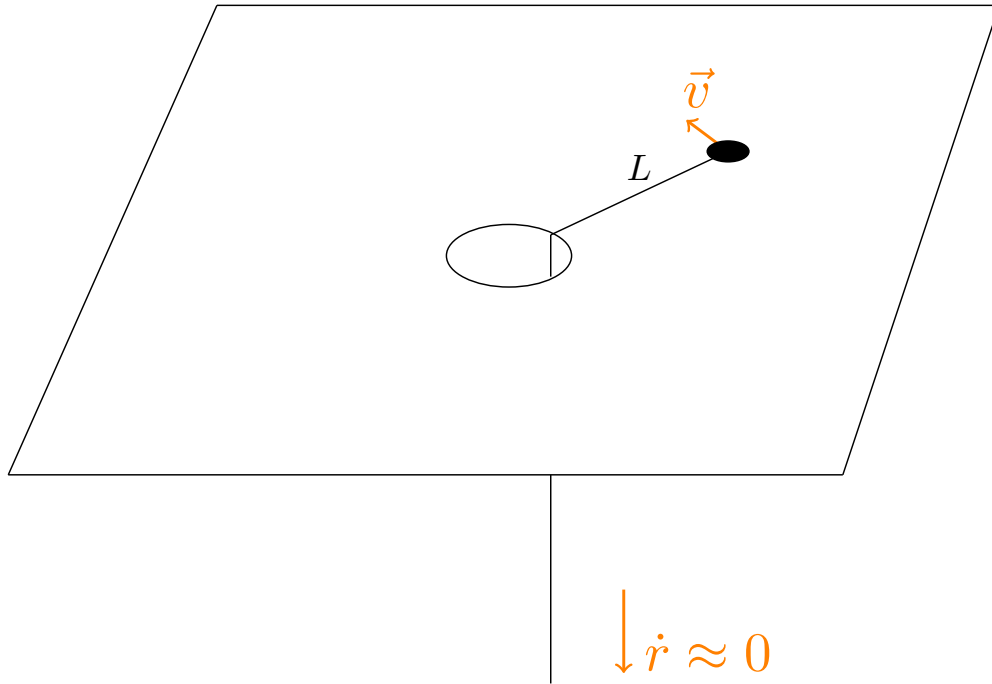
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}v^2 = gL - gL \cos \theta_{\text{máx}} \Leftrightarrow gL \cos \theta_{\text{máx}} = gL - \frac{1}{2}v^2 \Leftrightarrow \cos \theta_{\text{máx}} = 1 - \frac{v^2}{2gL}$$

Si la energía es justo  $E = 2mgL$ , la bola llegará arriba con  $v = 0$ . Si  $E > 2mgL$ , entonces la bola llegará con  $v > 0$  y continuará girando.

Examinemos qué ocurriría si el alambre fuese una cuerda. En ese caso, tendríamos una tensión. Visto de otra forma, la distancia entre el punto de anclaje y la bola es constante en el caso del alambre mientras que puede variar en el caso de la cuerda. Es decir:

$$\begin{array}{ll} \text{alambre:} & \dot{r} = 0 \\ \text{cuerda:} & \dot{r} \leq 0 \end{array}$$

**Ejemplo 7.** Tenemos:



$$v_0 = \omega_0 L$$

El momento angular se conserva:

$$mL^2\omega_0 = mr^2\omega \Leftrightarrow \omega(r) = \frac{L^2}{r^2}\omega_0$$

Sacamos la tensión:

$$T(r) = m\omega^2 r = m \frac{L^4}{r^3} \omega_0^2$$

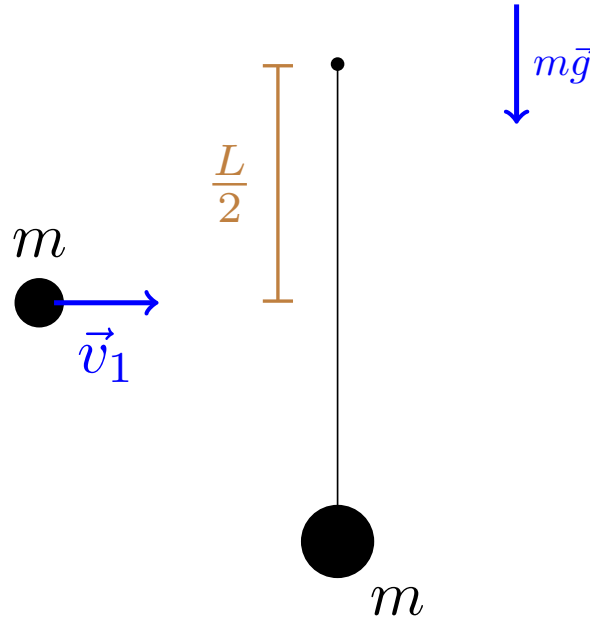
Ahora tenemos que comprobar que  $\Delta T = W_T$ .

$$T(r) - T(L) = \frac{1}{2}mr^2 \frac{L^4}{r^4} \omega_0^2 - \frac{1}{2}mL^2 \omega_0^2 = \frac{1}{2}mL^2 \omega_0^2 \left( \frac{L^2}{r^2} - 1 \right)$$

$$W_{L \rightarrow r} = \int \vec{T}(\rho) d\rho = - \int_L^r \frac{mL^4 \omega_0^2}{\rho^3} d\rho = \left[ \frac{mL^4 \omega_0^2}{2\rho^2} \right]_L^r = \frac{1}{2}mL^2 \omega_0^2 \left( \frac{L^2}{r^2} - 1 \right)$$

**Ejemplo 8.** Tenemos una bola que cuelga de una varilla de longitud  $L$  y otra bola que impacta contra la varilla a distancia  $\frac{L}{2}$  del punto de anclaje.





Se conserva el momento angular desde el punto de anclaje, porque todas las fuerzas externas actúan allí. Hallemos el momento inicial y final:

$$L_{0i} = mv_0 \frac{L}{2}$$

$$L_{0f} = m\omega \left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\omega L^2$$

De esta forma, como se conserva el momento angular:

$$mv_0 \frac{L}{2} = m\omega \left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\omega L^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega L \left(\frac{L}{4} + L\right) = v_0 \frac{L}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega = v_0 \frac{4}{5 \cdot 2L} = \frac{2v_0}{5L}$$

Si la varilla tuviera masa, sería un sólido rígido y tendríamos que usar momentos de inercia. Ahora calculemos el momento lineal inicial y el final y veamos si ha ganado o perdido momento el sistema:

$$P_i = mv_0$$

$$P_f = m\omega \left(\frac{L}{2} + L\right) = \frac{3}{2}m\omega L = \frac{3}{2}m \frac{2v_0}{5L} L = \frac{3}{5}mv_0 < mv_0 = P_i$$

Es decir, el momento lineal ha disminuido. Esto implica que la fuerza que ha actuado sobre el punto de anclaje iba hacia la izquierda. Veamos la pérdida habida en energía cinética:

$$E_i = \frac{1}{2} \frac{P_i^2}{m} = \frac{1}{2} mv_0^2$$

$$E_f = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{L^2}{4} + L^2\right) \left(\frac{2v_0}{5L}\right)^2 = \frac{1}{10} mv_0^2$$

Luego:

$$\Delta T = \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{2} \right) m v_0^2 = -\frac{2}{5} m v_0^2$$

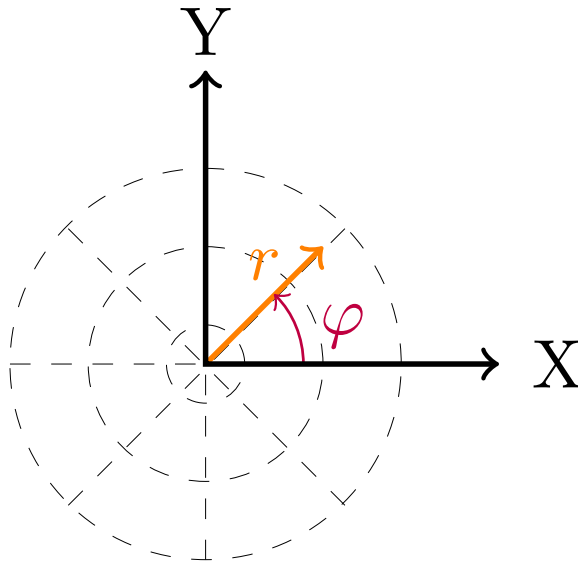
## 1.7. Cálculo de variaciones. Ecuaciones de Euler-Lagrange

### 1.7.1. Expresión de la posición, la velocidad y la aceleración en coordenadas cilíndricas y esféricas (ejercicio para casa)

#### 1.7.1.1. Coordenadas polares $r, \varphi$

Recordemos:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$



$$|\vec{R}|^2 = x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2$$

Luego:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin(\varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos(\varphi) \dot{\varphi} \end{cases} \\ & \begin{aligned} \dot{x}^2 &= \dot{r}^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 - 2\dot{r}r \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi} \\ + \dot{y}^2 &= \dot{r}^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + 2\dot{r}r \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi} \end{aligned} \\ & \frac{|\vec{V}|^2}{=} = \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}{=} \end{aligned}$$

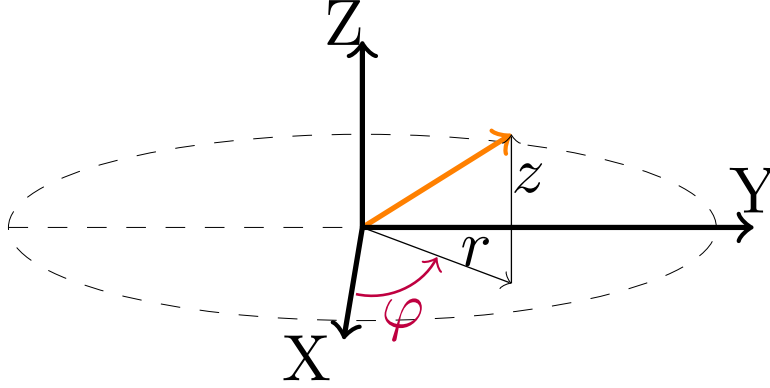
Por último:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r} \sin(\varphi) \dot{\varphi} - r [\cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \sin(\varphi) \ddot{\varphi}] \\ \ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r} \cos(\varphi) \dot{\varphi} + r [-\sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi) \ddot{\varphi}] \end{cases} \\ & \begin{aligned} \ddot{x}^2 &= \ddot{r}^2 \cos^2 \varphi + 4\dot{r}^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + r^2 [\cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^4 + \sin^2(\varphi) \ddot{\varphi}^2 + 2 \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) \ddot{\varphi}] + \\ & + 4r\dot{r} \sin(\varphi) \dot{\varphi} [\cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \sin(\varphi) \ddot{\varphi}] - 2\ddot{r} \cos \varphi [2\dot{r} \sin(\varphi) \dot{\varphi} + r [\cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \sin(\varphi) \ddot{\varphi}]] \\ + \ddot{y}^2 &= \ddot{r}^2 \sin^2 \varphi + 4\dot{r}^2 \cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + r^2 [\sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^4 + \cos^2(\varphi) \ddot{\varphi}^2 - 2 \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) \ddot{\varphi}] + \\ & + 4r\dot{r} \cos(\varphi) \dot{\varphi} [-\sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi) \ddot{\varphi}] + 2\ddot{r} \sin \varphi [2\dot{r} \cos(\varphi) \dot{\varphi} + r [-\sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi) \ddot{\varphi}]] \end{aligned} \\ & \frac{|\vec{A}|^2}{=} = \frac{\ddot{r}^2 + 4\dot{r}^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\varphi}^4 + r^2 \ddot{\varphi}^2 - 2\ddot{r} \dot{\varphi}^2 + 4r\dot{r} \dot{\varphi} \ddot{\varphi}}{=} \end{aligned}$$

**1.7.1.2. Coordenadas cilíndricas  $r, \varphi, z$** 

Recordemos:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$



$$|\vec{R}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + z^2 = r^2 + z^2$$

Luego:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin(\varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos(\varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases} \\ + \quad &\begin{aligned} \dot{x}^2 &= \dot{r}^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 - 2\dot{r}r \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{y}^2 &= \dot{r}^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + 2\dot{r}r \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{z}^2 &= \dot{z}^2 \end{aligned} \\ \hline &|\vec{V}|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \end{aligned}$$

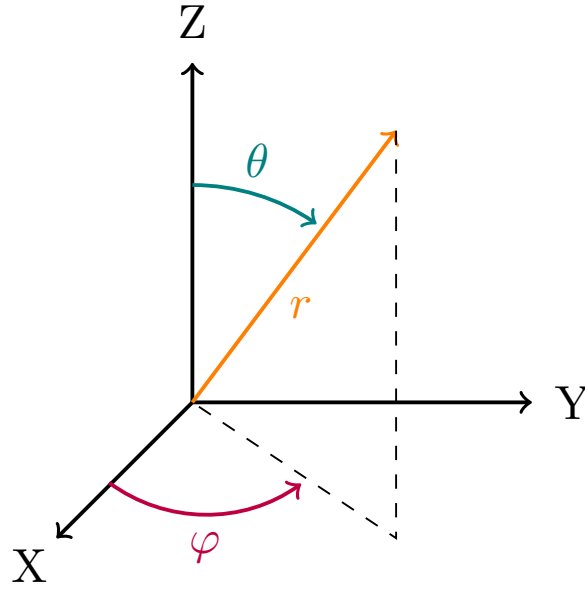
Por último:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r} \sin(\varphi) \dot{\varphi} - r [\cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \sin(\varphi) \ddot{\varphi}] \\ \ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r} \cos(\varphi) \dot{\varphi} + r [-\sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi) \ddot{\varphi}] \\ \ddot{z} = \ddot{z} \end{cases} \\ + \quad &\begin{aligned} \ddot{x}^2 &= \ddot{r}^2 \cos^2 \varphi + 4\dot{r}^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + r^2 [\cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^4 + \sin^2(\varphi) \ddot{\varphi}^2 + 2 \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) \ddot{\varphi}] + \\ &+ 4r\dot{r} \sin(\varphi) \dot{\varphi} [\cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \sin(\varphi) \ddot{\varphi}] - 2\ddot{r} \cos \varphi [2\dot{r} \sin(\varphi) \dot{\varphi} + r [\cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \sin(\varphi) \ddot{\varphi}]] \\ \ddot{y}^2 &= \ddot{r}^2 \sin^2 \varphi + 4\dot{r}^2 \cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + r^2 [\sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^4 + \cos^2(\varphi) \ddot{\varphi}^2 - 2 \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) \ddot{\varphi}] + \\ &+ 4r\dot{r} \cos(\varphi) \dot{\varphi} [-\sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi) \ddot{\varphi}] + 2\ddot{r} \sin \varphi [2\dot{r} \cos(\varphi) \dot{\varphi} + r [-\sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi) \ddot{\varphi}]] \\ \ddot{z}^2 &= \ddot{z}^2 \end{aligned} \\ \hline &|\vec{A}|^2 = \ddot{r}^2 + 4\dot{r}^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\varphi}^4 + r^2 \ddot{\varphi}^2 - 2\ddot{r} \dot{\varphi}^2 + 4r\dot{r} \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \ddot{z}^2 \end{aligned}$$

**1.7.1.3. Coordenadas esféricas  $r, \varphi, \theta$** 

Recordemos:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$



$$\left| \vec{R} \right|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta = r^2$$

Luego:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r \left[ \cos(\theta) \dot{\theta} \cos \varphi - \sin \theta \sin(\varphi) \dot{\varphi} \right] \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r \left[ \cos(\theta) \dot{\theta} \sin \varphi + \sin \theta \cos(\varphi) \dot{\varphi} \right] \\ \dot{z} = \dot{r} \cos \theta - r \sin(\theta) \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= \dot{r}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \left[ \cos^2 \theta \cos^2(\varphi) \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 - 2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos(\varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi} \right] + \\ &\quad + 2 \dot{r} r \sin \theta \cos \varphi \left[ \cos \theta \cos(\varphi) \dot{\theta} - \sin \theta \sin(\varphi) \dot{\varphi} \right] \\ + \dot{y}^2 &= \dot{r}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \left[ \cos^2 \theta \sin^2(\varphi) \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + 2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos(\varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi} \right] + \\ &\quad + 2 \dot{r} r \sin \theta \sin \varphi \left[ \cos \theta \sin(\varphi) \dot{\theta} + \sin \theta \cos(\varphi) \dot{\varphi} \right] \\ \dot{z}^2 &= \dot{r}^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2 - 2 \dot{r} r \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta} \\ \hline \left| \vec{V} \right|^2 &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r} \sin \theta \cos \varphi + 2 \dot{r} \left[ \cos(\theta) \dot{\theta} \cos \varphi - \sin \theta \sin(\varphi) \dot{\varphi} \right] + \\ + r \left[ -\sin(\theta) \dot{\theta}^2 \cos \varphi + \cos \theta \left[ \ddot{\theta} \cos \varphi - \dot{\theta} \sin(\varphi) \dot{\varphi} \right] - \cos(\theta) \dot{\theta} \sin(\varphi) \dot{\varphi} - \sin \theta \left[ \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \sin(\varphi) \ddot{\varphi} \right] \right] \\ \ddot{y} = \ddot{r} \sin \theta \sin \varphi + 2 \dot{r} \left[ \cos(\theta) \dot{\theta} \sin \varphi + \sin \theta \cos(\varphi) \dot{\varphi} \right] + \\ + r \left[ -\sin(\theta) \dot{\theta} \sin \varphi + \cos \theta \left[ \ddot{\theta} \sin \varphi + \dot{\theta} \cos(\varphi) \dot{\varphi} \right] + \cos(\theta) \dot{\theta} \cos(\varphi) \dot{\varphi} + \sin \theta \left[ -\sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi) \ddot{\varphi} \right] \right] \\ \ddot{z} = \ddot{r} \cos \theta - 2 \dot{r} \sin(\theta) \dot{\theta} - r \left[ \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + \sin(\theta) \ddot{\theta} \right] \end{cases}$$

### 1.7.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange

#### 1.7.2.1. Preliminares matemáticos

**Definición 21.** Sea  $\Omega$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable (eso significa que existen las derivadas parciales con respecto a todas sus variables). Sea  $\vec{a} \in \Omega$ . Entonces, llamaremos **diferencial de la función  $f$  en el punto  $\vec{a}$**  a la aplicación lineal:

$$df(\vec{a}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) x_i$$

donde  $df$  representa «diferencial de la función  $f$ ».

Alternativamente, podemos definir la aplicación lineal como:

$$df(\vec{a}) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) dx_n$$

donde  $dx_i$  es el elemento de la base dual canónica correspondiente a la coordenada  $x_i$ .

**Definición 22.** Sea  $\Omega$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Llamamos **diferencial de  $f$**  a la aplicación lineal:

$$df : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\vec{a} \longrightarrow df(\vec{a})$$

donde  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  representa el conjunto de aplicaciones lineales entre  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}$ .

**Definición 23.** Sea  $\Omega$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable que depende de las variables  $x_1, \dots, x_n$ . Entonces, llamamos **derivada total de  $f$  respecto a una variable  $t$**  a:

$$\frac{df}{dt} := df((x_1(t), \dots, x_n(t))) \circ d(x_1(t), \dots, x_n(t)) =$$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \cdot \left( \frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t) \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

**Definición 24.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Se llama **funcional** a toda aplicación  $F : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathbb{K}$  que lleva una función a un cuerpo, donde con  $\mathcal{F}_n$  denotamos el anillo de las funciones con  $n$  variables y con  $\mathbb{K}$  denotamos un cuerpo.

**Ejemplos:**

$$A : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \longrightarrow f(0)$$

$$B : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \longrightarrow f'(0) e^2$$

donde con  $'$  denotamos derivada.

$$C : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \longrightarrow \sum_{i=1}^{10} f(i)$$

$$D : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \longrightarrow \int_{-5}^5 f(x) dx$$

$$E : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^3 dx$$

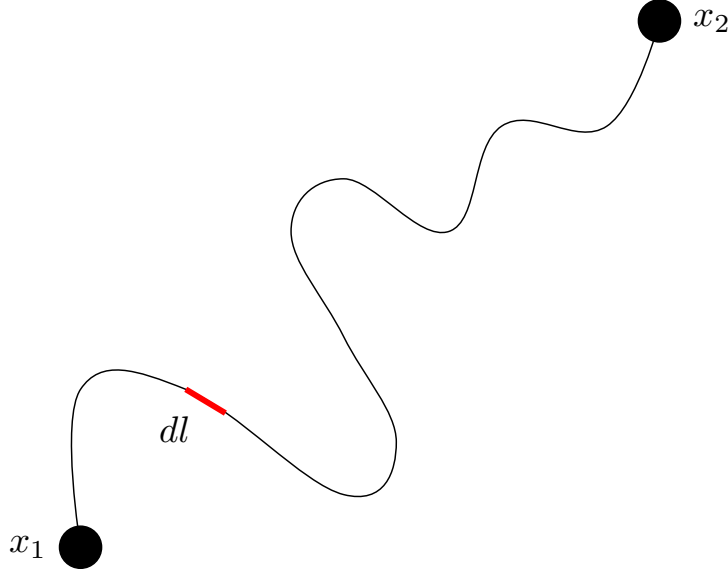
$$F : \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, t) \longrightarrow \int_{-a}^a \frac{\partial f}{\partial x} \left[ f(x, t) + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 \right] dx$$

donde con  $\mathcal{F}_2$  denotamos el anillo de funciones de dos variables.

*Observación 11.* En física, vamos a usar en general funcionales de tipo integral como el  $D$  y el  $E$ . Por ejemplo, podemos definir un funcional que dada una curva en  $\mathbb{R}^2$  expresada como  $\vec{c}(x) = (x, y(x))$ , nos devuelva su longitud entre dos puntos  $x = x_1$  y  $x = x_2$ :

$$\begin{aligned} L : \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y(x)) &\longrightarrow \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \end{aligned}$$



Por ejemplo, creamos un funcional  $t$  que, dadas dos funciones  $y(x)$  y  $z(x)$ , de manera que  $\vec{r} = (x, y(x), z(x))$ , calcule el tiempo que le cuesta a luz recorrer dicha trayectoria desde el punto  $\vec{r}_1 = (x_1, y(x_1), z(x_1))$  hasta el punto  $\vec{r}_2 = (x_2, y(x_2), z(x_2))$ . Conociendo que la trayectoria tiene lugar en un medio de índice de refracción  $n$ , el funcional buscado es:

$$\begin{aligned} t : \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (y(x), z(x)) &\longrightarrow \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{n}{c}}_{=v} \sqrt{1 + [y'(x)]^2 + [z'(x)]^2} dx \end{aligned}$$

En una notación alternativa, definiríamos  $t$  como:

$$t(y(x), z(x)) := \int_{x_1}^{x_2} \frac{n}{c} \sqrt{1 + [y'(x)]^2 + [z'(x)]^2} dx$$

*Observación 12.* Como puede verse en el ejemplo  $F$ , el funcional puede ser todo lo complicado que se quiera.

**Definición 25.** Llamaremos **extremal** de un funcional a aquella función que haga que el valor del funcional sea un máximo o mínimo local (en su entorno). Nótese que la definición es equivalente a la de extremo relativo de una función sustituyendo «función» por «funcional» y «extremo» por «extremal».

**Definición 26.** Sea  $F : \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathbb{K}$  un funcional diferenciable y sea  $f \in \mathcal{F}_n$ . Diremos que  $f$  es **punto crítico** de  $F$  si  $dF(f) = 0$ ; en otras palabras, si la diferencial del funcional  $F$  evaluado en  $f$  es la aplicación nula.

**Proposición 10.** Sea  $F : \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathbb{K}$  un funcional diferenciable y sea  $f \in \mathcal{F}_n$  tal que  $f$  es extremal de  $F$ . Entonces  $f$  es punto crítico de  $F$ . Es decir:  $dF(f) = 0$ .

**Definición 27.** Sea  $\Omega$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$  y sean  $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  y  $A \subseteq \Omega$ . Llamamos **norma** de  $f$  sobre el conjunto  $A$  a:

$$\|f\|_A := \max_{\vec{x} \in A} |f(\vec{x})|$$

**Proposición 11.** Sea  $B$  un conjunto cerrado no acotado de  $\mathcal{F}_n$  y sea  $F : B \longrightarrow \mathbb{K}$  un funcional continuo tal que  $\lim_{\|f\|_B \rightarrow \infty} F(f) = +\infty$ , entonces  $F$  alcanza en  $B$  un mínimo absoluto.

## 1.7.2.2. Deducción matemática

**Lema 2.** Sea  $(x_1, x_2)$  un intervalo de  $\mathbb{R}$ . Además, sean  $g(x)$  y  $h(x)$  dos funciones continuas en  $(x_1, x_2)$  con  $h(x) \neq 0$  para al menos algún  $x \in (x_1, x_2)$ , entonces:

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x) h(x) dx = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2)$$

**Teorema 8** (Ecuación de Euler-Lagrange). Sea  $\Omega$  un abierto en  $\mathbb{R}$  y sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua arbitraria tal que  $f = \mathfrak{F}(y(x), \dot{y}(x), x)$ ; es decir, una función que depende de otra función  $y(x)$ , de su derivada  $y'$  y de  $x$ ; si bien implícitamente depende únicamente de  $x$ . Por otra parte, sean  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $x_1 \neq x_2$ ,  $F := \int_{x_1}^{x_2} f dx$ . Toda función  $f \in A$  que sea extremal de  $F$  debe cumplir la condición:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (1.7.1)$$

Además, si el funcional  $F$  está acotado inferiormente  $\forall f \in A$  y la solución de la ecuación diferencial anterior es única, entonces dicha solución es un punto de mínimo de  $F$ .

*Demostración.* (Requiere leer los preliminares matemáticos. Posiblemente incluya errores matemáticos. Difícil de comprender. Hay una demostración alternativa abajo.)

Sean  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ . Sea  $\mathcal{FF} := \{y \in \mathcal{F}_1 \text{ t.q. } y(x_1) = y_1 \text{ y } y(x_2) = y_2\}$ . Ahora, sea  $F$  un funcional del tipo:

$$\begin{aligned} F : \mathcal{FF} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y(x) &\longrightarrow \int_{x_1}^{x_2} f dx \end{aligned}$$

con  $y' = \frac{dy}{dx}$  y  $f = \mathfrak{F}(y(x), y'(x), x)$ . Con  $\mathfrak{F}$  denotamos una función cualquiera que depende explícitamente de los argumentos suministrados entre paréntesis. Es decir, en nuestro caso, el integrando depende explícitamente de  $y, y'$  y  $x$ . Sin embargo, como  $y = \mathfrak{F}(x)$  y  $y' = \mathfrak{F}'(x)$ , el integrando depende implícitamente únicamente de  $x$  (es una función de una variable); esto es importante para que la integral tenga sentido. Nuestro objetivo es ahora hallar la función  $f$  que hace que el valor de  $F$  sea mínimo. Un mínimo debe ser punto crítico, luego, como hemos visto en los preliminares, debe cumplirse:

$$\delta F = 0$$

Recordemos:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f dx$$

Si hacemos la diferencial en ambos lados, obtenemos:

$$\delta F = \delta \left( \int_{x_1}^{x_2} f dx \right)$$

Como estamos en física, podemos suponer que nuestra función  $f$  es diferenciable; por lo que la integral y la diferencial conmutan:

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx$$

Por tanto, nuestro problema consiste ahora en resolver:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta f dx = 0$$

Para ello, recordemos nuestra definición de diferencial de una función y calculemos  $\delta f$ :

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

Recordemos que  $y$  e  $y'$  son funciones, por eso hemos usado un  $\delta$ ; mientras que  $x$  es una variable. Ahora bien, fijémonos en que:

$$\delta y' \equiv \delta \left( \frac{dy}{dx} \right)$$

Si suponemos que nuestra función  $f$  es de clase  $C^2$ , el orden de la diferencial y la parcial no importa y podemos reescribir:

$$\delta y' = \frac{d}{dx} (\delta y)$$

De esta forma,

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) + \frac{\partial f}{\partial x} dx \right) dx$$

Ahora, de los tres términos del integrando, sabemos que el tercero se va a anular pues es  $(dx)^2 = 0$ <sup>1</sup>. En consecuencia:

$$\begin{aligned} \delta F &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} d(\delta y) \end{aligned}$$

Nótese que aunque haya desaparecido el  $dx$  en la segunda integral, en el fondo la integral depende implícitamente de  $x$ , luego los límites de integración no necesitan ser cambiados. Quedémonos con la segunda integral e intentemos resolverla mediante integración por partes:

$$\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}}_u \underbrace{d(\delta y)}_{dv} = \left[ \frac{\partial f}{\partial y'} \underbrace{\delta y}_{= \int d(\delta y)} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} d \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y$$

Si multiplicamos y dividimos por  $dx$  en la integral, obtenemos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} d(\delta y) = \left[ \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

Como  $y \in \mathcal{FF}$ , se cumple  $y(x_1) = y_1$  y  $y(x_2) = y_2$  independientemente de la forma de  $y$ , luego  $\delta y$  en esos puntos debe ser necesariamente cero (el valor de la función  $y$  nunca varía en esos puntos); por lo que el primer sumando es cero. Por consiguiente:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} d(\delta y) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

Volviendo a nuestra expresión para  $\delta F$ :

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

Juntando ambas integrales, se obtiene:

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx$$

Recordemos  $\delta F = 0$ ; luego:

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx$$

<sup>1</sup>Esto se debe a que  $(dx)^2 \equiv |d\hat{x} \times d\hat{x}| = 0$ . Más información en <https://math.stackexchange.com/a/854915>.



Suponiendo que todas las funciones involucradas son continuas (algo normal en física) podemos aplicar el nada trivial teorema que dice que: sean  $g(x)$  y  $h(x)$  dos funciones continuas con  $h(x) \neq 0$  para al menos algún  $x$ , entonces  $\int g(x)h(x)dx = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \forall x$ . En nuestro caso, como  $\delta y$  no es necesariamente cero, el otro factor debe ser nulo. Es decir, obtenemos la condición:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

*Q.E.D.*

*Demostración.* (Extraído de Taylor (2013) [2]) **Requiere leer los preliminares matemáticos igualmente, pero es más fácil de comprender. Recomendado estudiar ésta.**

Tenemos una integral de la forma:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(Y(x), Y'(x), x) dx$$

donde  $Y' \equiv \frac{dY}{dx}$  y  $Y(x)$  es una curva desconocida que une los puntos  $(x_1, y_1 = Y(x_1))$  y  $(x_2, y_2 = Y(x_2))$ . Entre todas las posibles funciones  $Y(x)$  queremos hallar aquella que hace que el valor de  $S$  sea mínimo. Cabe destacar que aunque  $f = \mathfrak{F}(Y'(x), Y(x), x)$  (recordamos que con  $\mathfrak{F}$  queremos indicar una función cualquiera que depende explícitamente de los argumentos entre paréntesis; es decir, se lee «es función de»), el integrando depende implícitamente únicamente de  $x$ , pues tanto  $Y$  como  $Y'$  dependen sólo de  $x$ . En otras palabras, el integrando es una función real de una variable real.

Bien, ahora llamemos  $y(x)$  a la función que constituye un extremal de  $S$ , aunque desconozcamos cuál es. Siempre vamos a poder escribir una función cualquiera  $Y(x)$  como:

$$Y(x) = y(x) + \alpha \eta(x) \quad (1.7.2)$$

donde  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\eta(x)$  es cualquier función. Derivando obtenemos:

$$Y' = y' + \alpha \eta' \quad (1.7.3)$$

Ahora bien:

$$\begin{cases} Y(x_1) = y_1 \\ Y(x_2) = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x_1) + \alpha \eta(x_1) = y_1 \\ y(x_2) + \alpha \eta(x_2) = y_2 \end{cases}$$

Como  $y(x)$  es del tipo  $Y(x) = y(x) + \alpha \eta(x)$ ,  $y(x_1)$  debe ser necesariamente  $y_1$  y  $y(x_2)$  debe ser necesariamente  $y_2$ . Por tanto:

$$\begin{cases} y_1 + \alpha \eta(x_1) = y_1 \\ y_2 + \alpha \eta(x_2) = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \eta(x_1) = 0 \\ \alpha \eta(x_2) = 0 \end{cases}$$

Como  $\alpha$  puede ser cualquier número real (es decir, no siempre es cero), debe ser:

$$\eta(x_1) = 0 = \eta(x_2)$$

Con lo hecho hasta ahora hemos conseguido que la integral  $S$  dependa del parámetro  $\alpha$  y de  $\eta(x)$ , pero ya no me depende de  $y(x)$ , pues está fija. Al hacer esto, hemos convertido un problema complicado que requeriría de matemáticas avanzadas en un problema clásico de cálculo elemental de funciones de una variable. Sabemos que el punto crítico  $Y(x) = y(x)$  se produce cuando  $\alpha = 0$ . Luego debe ser obligatoriamente:

$$\frac{dS}{d\alpha} = 0 \quad (1.7.4)$$

cuando  $\alpha = 0$ . Calculemos, entonces:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left( \int_{x_1}^{x_2} f(Y, Y', x) dx \right)$$

Como  $f$  es continua, la derivada y la integral conmutan:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{d\alpha} dx \quad (1.7.5)$$

Ahora, aplicando la regla de la cadena<sup>2</sup> llegamos a:

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha}$$

Como  $x$  no depende de  $\alpha$ ,  $\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0$  y el tercero sumando se anula. Es decir, queda:

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial Y} \underbrace{\frac{\partial Y}{\partial \alpha}}_{=\eta} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \underbrace{\frac{\partial Y'}{\partial \alpha}}_{=\eta'}$$

Los valores de las parciales se obtienen al derivar las ecuaciones 1.7.2 en la página anterior y 1.7.3 en la página anterior. En consecuencia:

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' \quad (1.7.6)$$

En este momento, nos interesaría que en la expresión anterior apareciera  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en vez de  $\frac{\partial f}{\partial Y}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y'}$  en vez de  $\frac{\partial f}{\partial Y'}$ . Para ello, calculemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial Y} \underbrace{\frac{\partial Y}{\partial y}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \underbrace{\frac{\partial Y'}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0} \\ \frac{\partial f}{\partial y'} &= \frac{\partial f}{\partial Y} \underbrace{\frac{\partial Y}{\partial y'}}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \underbrace{\frac{\partial Y'}{\partial y'}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y'}}_{=0} \end{aligned}$$

Nótese  $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$  porque  $x$  no depende de  $y$ , aunque es  $\frac{\partial y}{\partial x} \neq 0$ . Lo mismo sucede con  $\frac{\partial x}{\partial y'}$  y  $\frac{\partial y'}{\partial x}$ . Esto se debe a que con derivadas parciales no siempre se cumple  $\frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^{-1}$ <sup>3</sup>. El valor del resto de las derivadas parciales se obtiene al derivar las ecuaciones 1.7.2 en la página anterior y 1.7.3 en la página anterior. En consecuencia, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial Y} \\ \frac{\partial f}{\partial y'} &= \frac{\partial f}{\partial Y'} \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo en 1.7.6, obtenemos:

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'$$

A continuación, sustituyendo en 1.7.5, llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) dx \\ \frac{dS}{d\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \eta dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' dx \end{aligned} \quad (1.7.7)$$

Implementemos la integración por partes para intentar resolver la segunda integral:

<sup>2</sup>Si no queda claro cómo aplicamos la regla de la cadena, en la página <http://wwwf.imperial.ac.uk/~jdg/AECHAIN.PDF> se explica de qué manera se debe aplicar la regla de la cadena a las derivadas parciales.

<sup>3</sup>Más información en la página <http://wwwf.imperial.ac.uk/~jdg/AECHAIN.PDF>.

$$\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}}_u \underbrace{\eta' dx}_{dv} = \left[ \frac{\partial f}{\partial y'} \eta \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

Recordemos que era  $\eta(x_1) = 0 = \eta(x_2)$ , luego el primer sumando es cero. Por tanto:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' dx = - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

Sustituyendo en 1.7.7 en la página anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \eta dx - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx \end{aligned}$$

Recordando 1.7.4 en la página 40, concluimos:

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx$$

Como  $\eta(x)$  no es necesariamente cero, por el lema 2 en la página 38, llegamos a:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

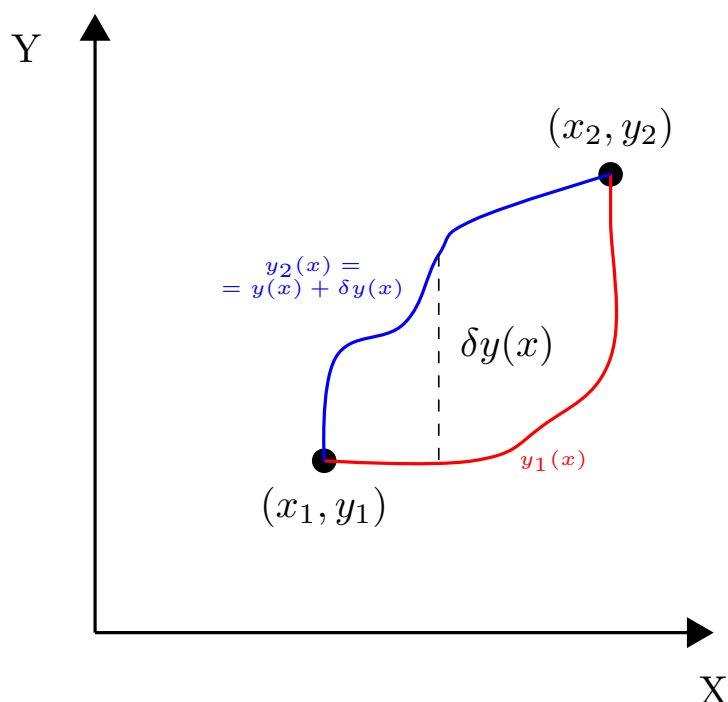
Por consiguiente, hemos conseguido demostrar que el extremal de  $S$  se alcanza cuando  $f$  cumple la condición dada arriba.

Ahora, supongamos que  $\forall f \in A$ , tenemos que  $F$  está acotada inferiormente. Entonces, si  $\|f\|_A \rightarrow \infty$ , necesariamente, debe darse  $|S| \rightarrow +\infty$ . En consecuencia, por la proposición 11 en la página 37,  $F$  debe tener un mínimo absoluto en  $A$ . Además, como, por hipótesis, la solución de la ecuación diferencial anterior es única,  $F$  únicamente tiene un extremal. En consecuencia, dicho extremal será el mínimo de  $F$  en  $A$ . *Q.E.D.*

*Observación 13.* En general, no será fácil saber si la solución de la ecuación de Euler-Lagrange es un punto de mínimo, de máximo o silla. Esto es algo a tener en cuenta; si bien es verdad que en lo que atañe a este curso, este no será el caso.

*Observación 14.* Gráficamente estamos intentando resolver este problema:

Imaginemos la siguiente situación:



Yo quiero hallar el camino más corto entre los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ ; es decir, mi objetivo es hallar la función  $y(x)$  tal que la longitud de la curva  $\vec{c} = (x, y(x))$  sea lo más pequeña posible (esa longitud era justo el funcional  $F$  que yo quería minimizar). Aquí podemos entender bien el concepto de diferencial de función. Del mismo modo que al integrar respecto de  $dx$  uno recorre todos los posibles valores de  $x$ , si integramos respecto de  $\delta y$  recorreremos todas las formas posibles de la función  $y$ . Gráficamente, vemos muy bien por qué hemos impuesto antes  $\delta y(x_1) = 0 = \delta y(x_2) = 0$ . Nuestro objetivo es, por tanto, hallar  $y(x)$  o cuando menos obtener alguna condición que debe cumplir  $y$ . Eso es justo la ecuación de Euler-Lagrange.

**Ejemplo 9.** Vamos a comprobar que en la geometría euclídea el camino más rápido entre dos puntos es la línea recta que los une:

Recordemos que la longitud de una curva  $\vec{c} = (x, y(x))$  entre los puntos  $(x_1, y(x_1))$  y  $(x_2, y(x_2))$  viene dada por:

$$L(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Es decir, nuestra función  $f$  es:

$$f = \sqrt{1 + y'^2}$$

De esta forma, llegamos a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'} &= \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{cte} := a \end{aligned}$$

Esto último es cierto pues al ser la derivada total de  $\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y'}$  no puede depender ni explícita- ni implícitamente de  $x$ , luego no puede depender ni de  $y'$  ni de  $y$ . Por tanto, debe ser constante. De esta forma, la función:

$$y = ax + b$$

es solución de la ecuación.

**1.7.2.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange en física**

*Observación 15* (Notación que vamos a usar en física). Para nosotros las funciones que aparecen en el funcional van a ser  $q_1(t), \dots, q_n(t)$ , del mismo modo que la variable independiente no va a ser  $x$  sino  $t$ :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) dt$$

La ecuación de Euler-Lagrange quedará expresada de esta forma:

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (1.7.8)$$

una ecuación diferencial de segundo orden.

**1.8. Coordenadas generalizadas y ligaduras**

**Definición 28.** Sea  $S$  un sistema arbitrario de  $N$  partículas. Llamamos **coordenadas generalizadas** a un conjunto de parámetros  $q_1, \dots, q_n$  (longitudes, ángulos, magnitudes de cualquier tipo) independientes tales que la posición de cada una de las partículas del sistema puede expresarse como una función de  $q_1, \dots, q_n$  y del tiempo  $t$ .

$$\vec{r}_i = \mathfrak{F}^i(q_1, \dots, q_n, t) \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Nótese que en general  $N \neq n$ ; de hecho, al conjunto  $\{q_k\}_{k=1, \dots, n}$  se le llama sistema o **conjunto de coordenadas** y  $n$  es el **número de grados de libertad del sistema**.

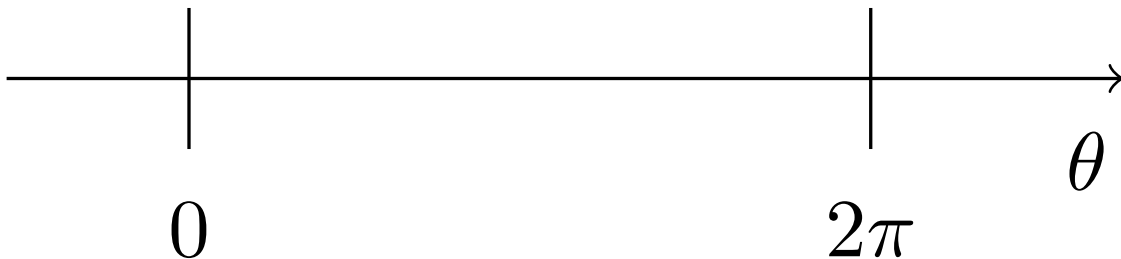
*Observación 16.* El máximo grado de libertad de un sistema es  $3N$ , ya que todos los cuerpos viven en  $\mathbb{R}^3$ . Además, si el grado de libertad no es  $3N$ , entonces es que hay al menos una ligadura; de hecho, todo sistema tiene  $3N - n$  ligaduras.

**Definición 29.** Sea  $S$  un sistema arbitrario de  $N$  partículas y sea  $\{q_k\}_{k=1, \dots, n}$  un conjunto de coordenadas generalizadas. Llamamos **velocidades** (generalizadas) a las magnitudes  $\dot{q}_i \quad \forall i = 1, \dots, n$ . Nótese que estas velocidades pueden ser tanto «lineares» como «angulares».

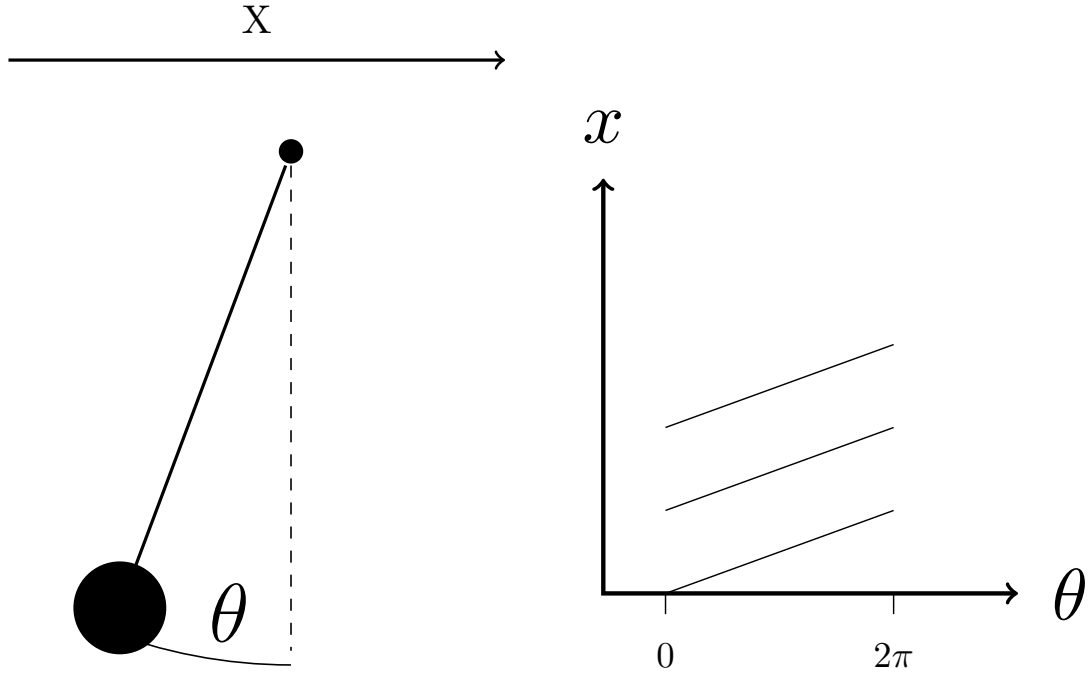
**Definición 30.** Sea  $S$  un sistema arbitrario de  $N$  partículas y sea  $\{q_k\}_{k=1, \dots, n}$  un conjunto de coordenadas generalizadas. Llamamos **espacio de configuración** a un espacio vectorial con  $n$  dimensiones en el que cada posición del sistema se representa como un punto. La curva determinada por las funciones  $q_1(t), \dots, q_n(t)$  en el espacio de configuración se llama **trayectoria, órbita, camino o itinerario** del sistema.

**Ejemplos:**

- El péndulo: aquí sólo tenemos un grado de libertad, el ángulo  $\theta$  que puede variar de 0 a  $2\pi$ , pues el radio está fijo.



- Un péndulo cuyo punto de anclaje se puede mover en una dirección: en este caso,



### 1.8.1. Ligaduras

Recordemos la definición de ligadura dada en 6 en la página 15.

**Definición 31.** Se llama condición de ligadura **holónoma** a toda ligadura  $G(q_i, t) = 0$  tal que en ella no aparecen velocidades.

Por ejemplo  $G(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$ ,  $G(q_i, t) \leq 0$  y  $G(q_i, t) \geq 0$  no serían holónomas.

**Definición 32.** Se llama ligadura **reológica** a toda ligadura  $G(q_i, \dot{q}_i, t)$  en la que aparece el tiempo.

**Definición 33.** Se llama ligadura **esclerómina** a toda ligadura  $G(q_i, \dot{q}_i)$  en la que no aparece el tiempo.

Veamos unos ejemplos:

- $G(q_i, t) = 0$  holónoma reológica.
- $G(q_i) = 0$  holónoma esclerómina.

### 1.8.2. Coordenadas naturales y forzadas

**Definición 34.** Sea  $S$  un sistema de  $N$  partículas. Un conjunto de coordenadas  $\{q_k\}_{k=1, \dots, n}$  del sistema  $S$  se dice **natural** si la relación entre la posición de cada una de las partículas y las coordenadas generalizadas es independiente del tiempo. Es decir, si:

$$\vec{r}_i = \mathfrak{F}^i(q_1, \dots, q_n) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

En este caso, la energía cinética  $T$  es función cuadrática homogénea cualquiera de las velocidades  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ .

**Definición 35.** Sea  $S$  un sistema de  $N$  partículas. Un conjunto de coordenadas  $\{q_k\}_{k=1, \dots, n}$  del sistema  $S$  se dice **forzado** si el tiempo aparece en la relación entre la posición de alguna de las partículas de  $S$  y  $\{q_k\}_{k=1, \dots, n}$ .

$$\vec{r}_i = \mathfrak{F}^i(t)$$

para al menos algún  $i \in [1, N] \cap \mathbb{N}$ .

**Definición 36.** Llamamos sistema mecánico **ideal** a aquel que o bien es aislado, o bien su entorno influye de forma despreciable en él. En ambos casos es necesario, además, que el sistema no tenga grados de libertad internos.

## 1.9. Principio de Hamilton. Ecuaciones de Lagrange

**Definición 37.** Llamamos **lagrangiano** o **función lagrangiana** de un sistema ideal  $S$  (con  $n$  partículas y tal que todas las fuerzas totales que actúan sobre cada cuerpo del sistema son conservativas) descrito mediante las coordenadas generalizadas  $q_1, \dots, q_n$  a la función:

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) := T - V \quad (1.9.1)$$

*Observación 17.* La condición de que las fuerzas sean conservativas es necesaria para que exista la función  $V$ .

*Observación 18.* Nótese que el lagrangiano es únicamente función de las posiciones, de las velocidades y del tiempo.

$$\mathcal{L} = \mathfrak{F}!(q_i, \dot{q}_i, t)$$

**Axioma 3** (Principio de Hamilton o principio de mínima acción). Sea  $S$  un sistema con  $n$  grados de libertad y sean  $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \ni t_1 < t_2$ . Las trayectorias reales que siguen las partículas de dicho sistema entre dos puntos  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  en un intervalo de tiempo  $(t_1, t_2)$  son tales que la acción:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

es estacionaria cuando se toma a lo largo de los itinerarios reales.

**Corolario 5.** Por la ecuación 1.7.8 en la página 44 tenemos que el lagrangiano expresado en función de las coordenadas generalizadas  $q_1, \dots, q_n$  de un sistema ideal  $S$  (tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas) debe cumplir:

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (1.9.2)$$

**Proposición 12.** Para el caso de una partícula sobre la que actúa una fuerza conservativa, la segunda ley de Newton y el principio de Hamilton son equivalentes.

*Demostración.* Por el corolario 5, sabemos que el principio de Hamilton es equivalente a las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano. Si representamos la posición de la partícula a través de las coordenadas generalizadas  $x, y, z$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) = m\ddot{z} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = F_y \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = F_z \end{aligned}$$

Lo anterior es cierto si y sólo si:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

Q.E.D.

*Observación 19.* El lagrangiano va a resultar una forma muy útil de resolver los problemas de mecánica ya que nos va a permitir trabajar con escalares (las coordenadas generalizadas), pudiendo olvidarnos de los vectores. Además, tampoco tendremos que descomponer las fuerzas, lo que evitará errores en ese aspecto. La única desventaja que tiene el método del lagrangiano es que incluye una gran cantidad de derivadas.

### 1.9.1. Momentos y fuerzas generalizadas

#### 1.9.1.1. Definiciones

**Definición 38.** Sea  $S$  un sistema ideal tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de sus partículas son conservativas y sea  $\mathcal{L}$  el lagrangiano asociado a dicho sistema  $S$  descrito con coordenadas generalizadas  $q_1, \dots, q_n$ . Se llama **momento generalizado**  $i$ -ésimo a la derivada parcial del lagrangiano con respecto a la variación con respecto al tiempo de la coordenada  $i$ -ésima:

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.9.3)$$

*Observación 20.* Nótese que no se distingue entre momento angular y momento lineal.

**Definición 39.** Sea  $S$  un sistema ideal tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de sus partículas son conservativas y sea  $\mathcal{L}$  el lagrangiano asociado a dicho sistema  $S$  descrito con coordenadas generalizadas  $q_1, \dots, q_n$ . Se llama **fuerza generalizada**  $i$ -ésima a la derivada parcial del lagrangiano con respecto a la coordenada  $i$ -ésima.:

$$Q_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (1.9.4)$$

*Observación 21.* Tanto el momento generalizado como la fuerza generalizada son escalares, no vectores.

#### 1.9.1.2. Propiedades

**Proposición 13.** Sea  $S$  un sistema ideal tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de sus partículas son conservativas y sea  $\mathcal{L}$  el lagrangiano asociado a dicho sistema  $S$  descrito con coordenadas generalizadas  $q_1, \dots, q_n$ . La fuerza generalizada  $i$ -ésima es la derivada con respecto al tiempo del momento generalizado  $i$ -ésimo.

$$Q_i = \dot{p}_i$$

*Demostración.* Por el corolario 5 en la página anterior es:

$$\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=Q_i} = \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}_{=p_i} \right)$$

*Q.E.D.*

*Observación 22.* Nótese que:

$$\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=Q_i} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}_{=p_i} = \text{cte}$$

**Proposición 14.** Sea  $S$  un sistema ideal con  $N$  partículas tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas. Entonces la fuerza generalizada  $j$ -ésima puede expresarse como:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$



*Demostración.* Por la definición de fuerza generalizada ( 39 en la página anterior):

$$Q_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$$

Ahora, por la definición de lagrangiano ( 37 en la página 46):

$$Q_j = \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial q_j}}_{=0} - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

donde el primer término se anula, dado que por la definición de energía cinética ( 17 en la página 23), ésta sólo puede depender de las velocidades y nunca de las posiciones. Así:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Ahora, por la regla de la cadena, podemos expresar  $q_j$  en función de las posiciones de todas las partículas de mi sistema (pues la relación tiene que ser biyectiva). Así:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}}_{=\vec{F}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Nótese que  $-\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V = \vec{F}_i$ . En consecuencia, llegamos a:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

*Q.E.D.*

### 1.9.1.3. Generalizaciones y coordenadas cíclicas

Lo anterior motiva la siguiente definición:

**Definición 40** (Definición generalizada de fuerza generalizada). Sea  $S$  un sistema ideal con  $N$  partículas y sea  $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$  un conjunto de coordenadas generalizadas. Independiente de si las fuerzas que actúan sobre las partículas de  $S$  son conservativas o no, llamamos **fuerza generalizada** (generalizada) a  $j$ -ésima a:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

*Observación 23.* La definición anterior no es más que una generalización de la definición de fuerza generalizada para fuerzas conservativas. De esta forma, el concepto de fuerza generalizada adquiere sentido aunque no exista el lagrangiano de un sistema. Veremos la utilidad de esto más adelante.

**Definición 41.** Sea  $S$  un sistema ideal tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de sus partículas son conservativas y sea  $\mathcal{L}$  el lagrangiano asociado a dicho sistema  $S$  descrito con coordenadas generalizadas  $q_1, \dots, q_n$ . Si el lagrangiano  $\mathcal{L}$  no depende de  $q_i$ , se dice que  $q_i$  es una **coordenada cíclica**.

$$q_i \text{ es coordenada cíclica} \Leftrightarrow \mathcal{L} \neq \mathfrak{F}(q_i)$$

**Proposición 15.** Sea  $S$  un sistema ideal tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de sus partículas son conservativas y sea  $\mathcal{L}$  el lagrangiano asociado a dicho sistema  $S$  descrito con coordenadas generalizadas  $q_1, \dots, q_n$ . Si  $q_i$  es una coordenada cíclica, entonces el momento generalizado asociado  $p_i$  se conserva. En otras palabras:

$$\dot{p}_i = 0$$

*Demostración.* Como el lagrangiano no depende de  $q_i$ , necesariamente, la fuerza generalizada  $i$ -ésima debe ser nula por la definición 39 en la página 47.

$$Q_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

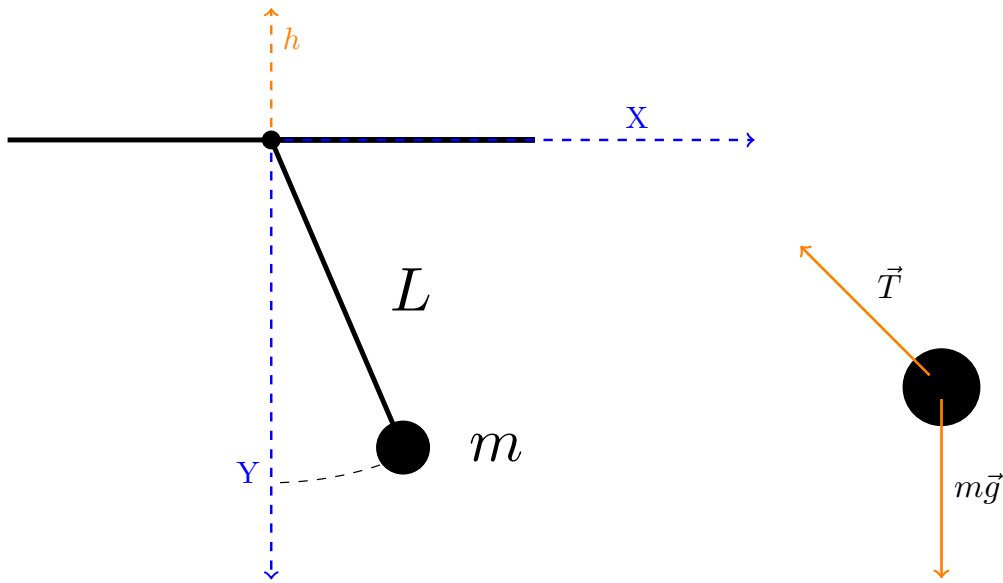
Ahora, por la proposición 13 en la página 47:

$$Q_i = 0 \Leftrightarrow \dot{p}_i = 0$$

*Q.E.D.*

#### 1.9.1.4. Ejemplos

**Ejercicio 3** (el péndulo (2 coordenadas generalizadas)).



**Solución** (Mediante el lagrangiano del sistema). Lo primero es encontrar la ecuación de ligadura:

$$x^2 + y^2 - L^2 = 0$$

Es decir, nuestro sistema tiene un grado de libertad. Podemos expresar  $x$  e  $y$  como:

$$x = L \sin \theta \quad y = L \cos \theta$$

$$\dot{x} = L \cos(\theta) \dot{\theta} \quad \dot{y} = -L \sin(\theta) \dot{\theta}$$

De esta forma:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$V = -mgy = -mgL \cos \theta$$

Por tanto:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL \cos \theta$$

Calculamos las parciales que aparecen en la ecuación de Euler-Lagrange (corolario 5 en la página 46):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgL \sin \theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mL^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = mL^2 \ddot{\theta}$$

Aplicando el corolario 5 en la página 46, se llega a:

$$mL^2 \ddot{\theta} = -mgL \sin \theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

**Solución** (Mediante Newton). Sabemos que la aceleración tangencial es:

$$a_t = L\ddot{\theta}$$

Aplicando la segunda ley de Newton, llegamos a:

$$-mg \sin \theta = mL\ddot{\theta} \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

**Solución** (Por momento angular medido desde el punto de anclaje del péndulo).

$$\underbrace{N_O}_{-mgL \sin \theta} = \underbrace{I_O \ddot{\theta}}_{mL^2 \ddot{\theta}} \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

**Resolución (parcial) de la ecuación diferencial resultante:**

Primero, debemos notar que:

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt} (\dot{\theta}) = \frac{d}{d\theta} (\dot{\theta}) \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta} &= -\frac{g}{L} \sin \theta \Leftrightarrow \dot{\theta} d\dot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta d\theta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\dot{\theta} &= -\frac{g}{L} \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \Theta d\Theta \Leftrightarrow \left[ \frac{\dot{\theta}^2}{2} \right]_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} = \frac{g}{L} [\cos \Theta]_{\theta_0}^{\theta} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2) &= \frac{g}{L} (\cos \theta - \cos \theta_0) \end{aligned}$$

## 1.9.2. Fuerzas de ligadura $Q'_i$

### 1.9.2.1. Definiciones y propiedades

El lagrangiano normal nos es útil para obtener las ecuaciones de movimiento, pues uno puede dejar de lado las fuerzas de ligadura. Sin embargo, en ocasiones necesitaremos conocer dichas fuerzas. En la práctica, por ejemplo, un diseñador de una montaña rusa necesita conocer el valor de la fuerza normal de la vía sobre el coche para poder construir dicha vía.

Del mismo modo que para resolver el problema de hallar extremos de una función  $f$  condicionados a una variedad diferenciable trabajamos con la función  $\phi = f - \sum_{i=1}^M \lambda_i G_i$  donde  $\{G_i\}_{i=1,\dots,M}$  son las ecuaciones que describen la variedad de ligadura de la variedad y los  $\lambda_i$  son los multiplicadores de Lagrange; aquí vamos a hacer algo similar con el lagrangiano.

**Definición 42.** Sea un sistema ideal  $S$  con  $N$  partículas y  $M$  ligaduras holónomas  $G_k(q, t) = 0 \forall k = 1, \dots, M$ . Supongamos, además que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas del sistema son conservativas. Llamaremos **lagrangiano modificado** o «lagrangiano prima» a:

$$\mathcal{L}' := \mathcal{L} + \sum_{k=1}^M \lambda_k G_k$$

donde  $\lambda_k$  son los multiplicadores de Lagrange y hemos obtenido el lagrangiano  $\mathcal{L}$  respecto a un sistema de coordenadas  $q_1, \dots, q_{3N}$ . Es decir, hemos desarrollado el lagrangiano para el mayor grado de libertad posible (con  $3N$  coordenadas), independientemente de cuál sea el número de grados de libertad real. De esta forma, tendremos  $3N$  ecuaciones de Lagrange,  $M$  ecuaciones de ligadura,  $3N$  aceleraciones y  $M$  multiplicadores  $\lambda_k$ .

**Teorema 9.** Sea  $S$  un sistema ideal (tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de sus partículas son conservativas) con  $M$  ligaduras holónomas  $\{G_k\}_{k=1, \dots, M}$  y sean  $q_1, \dots, q_{3N}$  las coordenadas con respecto a las cuales hemos hallado el lagrangiano del sistema  $\mathcal{L}$ . Entonces, se cumple:

$$\sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad \forall i = 1, \dots, 3N$$

*Demostración.* El lagrangiano modificado cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange por el teorema de los multiplicadores de Lagrange<sup>4</sup>. En consecuencia, por el corolario 5 en la página 46:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \mathcal{L} + \sum_{k=1}^M \lambda_k G_k \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \mathcal{L} + \sum_{k=1}^M \lambda_k G_k \right) = 0 \end{aligned}$$

Como la derivada parcial es una aplicación lineal:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} = 0$$

Nótese que  $\frac{\partial G_k}{\partial \dot{q}_i} = 0$ , pues  $G_k(q, t) \neq \mathfrak{F}(\dot{q}_i) \quad \forall i$ , ya que las ligaduras son holónomas. De esta forma, la ecuación queda:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} = 0$$

Pasando el tercer sumando al otro lado, obtenemos:

$$\sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

*Q.E.D.*

**Definición 43.** Sea  $S$  un sistema ideal (tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de sus partículas son conservativas), cuyo lagrangiano  $\mathcal{L}$  hemos hallado mediante las coordenadas  $q_1, \dots, q_{3N}$ . Entonces, llamamos **fuerza de ligadura en la coordenada  $q_i$**  a:

$$Q'_i := \sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (1.9.5)$$

<sup>4</sup>Este teorema no es nada fácil de demostrar; requiere un estudio profundo del análisis funcional que está muy fuera del alcance de este curso. Por ello, simplemente nos creemos este resultado.

## 1.9.2.2. Ejemplos

**Ejemplo 10** (El péndulo). Tenemos dos coordenadas:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \\ y = r \cos \theta \end{cases}$$

Y una ecuación de ligadura:

$$G_1 = r - L = 0$$

Desconocemos, por ahora, el valor de  $\lambda_1$ . Calculemos el  $\mathcal{L}'$ . Para ello:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$V = -mgr \cos \theta$$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr \cos \theta + \lambda_1(r - L)$$

Calculemos las parciales:

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial r} = m\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta + \lambda_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \theta} = -mgr \sin \theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\theta}} \right) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$$

Por el corolario 5 en la página 46:

$$m\ddot{r} = m\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta + \lambda_1$$

$$-mgr \sin \theta = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$$

Usando las condiciones  $r = L$ ,  $\dot{r} = 0$  y  $\ddot{r} = 0$ , llegamos a:

$$mL\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta + \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -(mL\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta)$$

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL \sin \theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Aplicando la definición 43 en la página anterior, llegamos a:

$$Q'_r = \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial r} = \lambda_1 = -(mL\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta) = -T$$

$$Q'_\theta = \lambda_1 \underbrace{\frac{\partial G_1}{\partial \theta}}_{=0} = 0$$

Nótese que  $Q'_r = -T$  donde  $T$  es la tensión a la que se ve sometida la masa. El hecho de que  $Q'_\theta = 0$  indica que la tensión no tiene componente en el eje  $\hat{\theta}$ .

## 1.10. Principio de d'Alembert y principio de los trabajos virtuales

### 1.10.1. Definiciones previas

Vamos a establecer unas equivalencias entre el uso de ecuaciones de Lagrange y las leyes de Newton para la resolución de problemas.

Lagrange	Newton
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0$	$\Delta E = 0$
$\exists \mathcal{L}', \lambda \Leftrightarrow \exists Q'_i \Leftrightarrow \exists \text{ ligaduras}$	subsistemas

**Definición 44.** Llamaremos **desplazamiento virtual** a aquél que no depende del tiempo.

*Observación 24.* El lector no debe centrarse en intentar encontrar sentido físico a un desplazamiento independiente del tiempo. Es una creación matemática que usamos porque nos es útil; pero no tiene sentido físico. La idea es que el aparato matemático de la mecánica clásica permite ese tipo de desplazamientos y dichos desplazamientos tienen propiedades que nos pueden ayudar a resolver problemas reales. Como en un desplazamiento virtual la variación de posición no depende del tiempo, su derivada respecto al tiempo es cero.

*Notación 1.* Usaremos  $d$  para indicar un cambio en la posición respecto al tiempo, mientras que usaremos  $\delta$  para referirnos a desplazamientos virtuales (cambios de posición «instantáneos» en los que el tiempo no juega ningún papel).

**Definición 45.** Llamaremos **trabajo virtual** a aquél que realiza una fuerza  $\vec{F}$  sobre un cuerpo  $C$  de manera que el desplazamiento que le produce es virtual, es decir, éste no depende del tiempo.

**Definición 46.** Decimos que una **fuerza de ligadura**  $\vec{F}'$  es **ideal** si no realiza trabajo virtual.

**Proposición 16.** Una fuerza de ligadura  $\vec{F}'$  es ideal si y sólo si es perpendicular al movimiento de la partícula en todo momento.

*Demostración.* Para todo  $t$  tenemos:

$$dW = \vec{F}' \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{F}' \perp d\vec{r}$$

*Q.E.D.*

*Observación 25.* Es importante recordar que las fuerzas de ligadura no son siempre ideales. Resulta útil recordar el enunciado de la proposición anterior para reconocerlas.

**Definición 47.** Llamamos **fuerza aplicada** a aquella que no es una fuerza de ligadura.

### 1.10.2. Principio de D'Alembert

**Teorema 10** (Principio de D'Alembert). Sea  $S$  un sistema de  $N$  partículas, de manera que sobre cada una de ellas actúa una fuerza  $\vec{F}_i$  (la fuerza total que actúa sobre la partícula  $i$ -ésima eliminando las fuerzas de ligadura ideales) y una fuerza de ligadura **ideal**  $\vec{F}'_i$ . Entonces la diferencia entre la fuerza  $\vec{F}_i$  y la fuerza inercial  $\dot{\vec{p}}_i$  no hace trabajo virtual. En otras palabras, siendo  $\delta\vec{r}_i$  un desplazamiento virtual cualquiera, tenemos:

$$\delta W_i = \left( \vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

*Demostración.* Partimos de la segunda ley de Newton (ver axioma 1 en la página 8):

$$\vec{F}_{T,i} = m\ddot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{p}}_i \quad \forall i = 1, \dots, N$$

donde  $\vec{F}_{T,i}$  es la fuerza total que actúa sobre la partícula  $i$  y  $\dot{\vec{p}}_i$  es la fuerza inercial, que coincide con la fuerza total. Pasando términos al otro lado, tenemos:

$$\vec{F}_{T,i} - \dot{\vec{p}}_i = \vec{0} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Multiplicando escalarmente por un desplazamiento virtual arbitrario  $\delta\vec{r}_i$ , obtenemos:

$$\delta W_i = (\vec{F}_{T,i} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{0} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Si ahora sustituimos la fuerza total que actúa sobre cada partícula por la suma de la fuerza  $\vec{F}_i$  más la fuerza de ligadura  $\vec{F}'_i$  que actúan sobre dicha partícula; es decir,  $\vec{F}_{T,i} = \vec{F}_i + \vec{F}'_i$ , obtenemos que  $\forall i = 1, \dots, N$ :

$$\delta W_i = (\vec{F}_i + \vec{F}'_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \Leftrightarrow (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i + \underbrace{\vec{F}'_i \cdot \delta \vec{r}_i}_{=0} = 0$$

Por hipótesis, las fuerzas de ligadura  $\vec{F}'_i$  son ideales y, en consecuencia, por la proposición 16 en la página anterior, no realizan trabajo virtual. Por consiguiente, llegamos a:

$$\delta W_i = (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

*Q.E.D.*

*Observación 26.* Nótese que la  $\delta W$  es una diferencial virtual inexacta. Es virtual, porque es «imaginaria» y no depende del tiempo y es inexacta puesto que no representa una variación del trabajo; simplemente indica que el trabajo es «pequeño».

### 1.10.3. Principio de los trabajos virtuales (estática)

**Corolario 6** (Principio de los trabajos virtuales). *Sea  $S$  un sistema con  $N$  partículas. Sean  $\{\vec{F}_i\}_{i=1,\dots,N}$  las fuerzas que actúan sobre cada partícula, excluyendo toda fuerza de ligadura ideal. En condiciones de estática, el trabajo virtual de cada una de las fuerzas  $\{\vec{F}_i\}_{i=1,\dots,N}$  es nulo:*

$$\delta W_i = \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

*Demostración.* Por el principio de D'Alembert (teorema anterior), tenemos:

$$\delta W_i = (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

En condiciones de estática es  $\dot{\vec{p}}_i = \vec{0} \quad \forall i = 1, \dots, N$ , luego tenemos:

$$\delta W_i = \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

*Q.E.D.*

### 1.10.4. Reelaboración del principio de los trabajos virtuales

**Proposición 17.** *Sean  $i$  y  $j$  dos partículas de un sistema  $S$  sobre las que actúa una fuerza de ligadura, cuya ligadura asociada satisface que  $\exists O_1, O_2 \in \mathbb{R}^3$  (dos puntos cualesquiera) tales que  $\|\vec{O_1 R_i}\| + \|\vec{O_2 R_j}\| = \text{cte}$ ,  $F = \|\vec{F}_{i \leftarrow j}\| = \|\vec{F}_{j \leftarrow i}\|$  donde  $R_i \in \mathbb{A} \equiv \mathbb{R}^3$  es la posición de la partícula  $i$  y  $R_j \in \mathbb{A} \equiv \mathbb{R}^3$  es la posición de la partícula  $j$ ,  $\vec{F}_{i \leftarrow j} = -F \widehat{O_1 R_i}$  y  $\vec{F}_{j \leftarrow i} = -F \widehat{O_2 R_j}$ . Entonces, el trabajo virtual **total** que realiza  $\vec{F}$  sobre ambas partículas es nulo. En otras palabras:*

$$\vec{F}_{i \leftarrow j} \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{F}_{j \leftarrow i} \cdot \delta \vec{r}_j = 0$$

*Demostración.* Llamaremos  $\vec{r}_i = \vec{O_1 R_i}$  y  $\vec{r}_j = \vec{O_2 R_j}$ , así:

$$\begin{aligned} \|\vec{r}_i\| + \|\vec{r}_j\| = \text{cte} &\Rightarrow \delta(\|\vec{r}_i\| + \|\vec{r}_j\|) = 0 \Leftrightarrow \delta\left(\sqrt{\vec{r}_i^2} + \sqrt{\vec{r}_j^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\vec{r}_i^2}} 2\vec{r}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \frac{1}{2\sqrt{\vec{r}_j^2}} 2\vec{r}_j \cdot \delta \vec{r}_j = 0 \Leftrightarrow \frac{\vec{r}_i}{\|\vec{r}_i\|} \cdot \delta \vec{r}_i + \frac{\vec{r}_j}{\|\vec{r}_j\|} \cdot \delta \vec{r}_j = 0 \Leftrightarrow \hat{r}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \hat{r}_j \cdot \delta \vec{r}_j = 0 \end{aligned}$$

Multiplicando por  $F := \|\vec{F}_{i \leftarrow j}\| = \|\vec{F}_{j \leftarrow i}\|$  a ambos lados, obtenemos:

$$F\hat{r}_i \cdot \delta\vec{r}_i + F\hat{r}_j \cdot \delta\vec{r}_j = 0$$

Como  $\vec{F}_{i \leftarrow j} = -F\hat{r}_i$  y  $\vec{F}_{j \leftarrow i} = -F\hat{r}_j$  por hipótesis, tenemos:

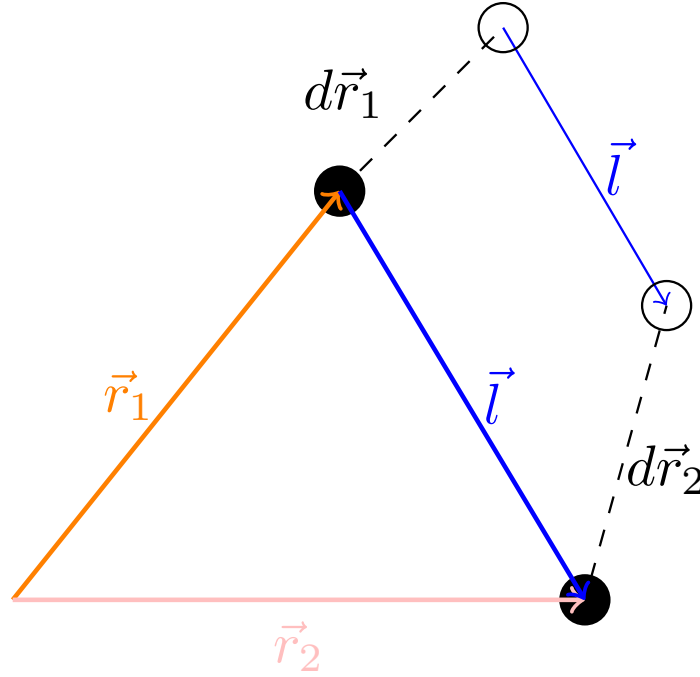
$$-\vec{F}_{i \leftarrow j} \cdot \delta\vec{r}_i - \vec{F}_{j \leftarrow i} \cdot \delta\vec{r}_j = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{i \leftarrow j} \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{F}_{j \leftarrow i} \cdot \delta\vec{r}_j = 0$$

*Q.E.D.*

**Observación 27.** Las fuerzas de ligadura más habituales en mecánica cumplen las condiciones de la proposición anterior. Por ejemplo, si tenemos una varilla recta, cualquier punto  $O = O_1 = O_2$  de ella va a cumplir las condiciones requeridas; en consecuencia, palancas y varillas no realizan trabajo total sobre el sistema. En el caso de una cuerda con varios dobles, si tomamos  $O_1$  como el punto más alejado de  $R_i$  tal que la cuerda entre  $O_1$  y  $R_i$  es una línea recta y tomamos  $O_2$  como el punto más alejado de  $R_j$  tal que la cuerda entre  $O_2$  y  $R_j$  es una línea recta, obtenemos que los puntos  $O_1$  y  $O_2$  satisfacen las condiciones anteriores.

En otras palabras, cuerdas, varillas y palancas no realizan trabajo total sobre el sistema. Esto nos será muy útil en la práctica.

**Ejemplo 11** (Un caso particular de la proposición anterior). Consideremos esta situación: Tenemos dos bolas unidas por una varilla rígida.



¿La tensión realiza trabajo al desplazar el conjunto de dos bolas? Por la proposición 17 en la página anterior ya sabemos que no; pero veámoslo de otra forma. Si realizamos una traslación, vemos que el la tensión hace el mismo trabajo en ambas partículas, pero al ser las tensiones de signo contrario, el trabajo total realizado sobre el sistema es cero. Nos quedaría una duda sobre las rotaciones. No obstante, aquí ofrecemos la demostración completa.

Sabemos:

$$\vec{l} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Ahora bien, la longitud de la varilla que une ambas masas no varía, es siempre constante. En consecuencia:

$$\text{cte} = \vec{l}^2 = \vec{l} \cdot \vec{l} = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 - 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$$

Por tanto, también:



$$\delta(l^2) = 0$$

De lo anterior, se sigue:

$$\begin{aligned}\delta(l^2) &= \delta(\vec{l} \cdot \vec{l}) = 2\vec{l} \cdot \delta\vec{l} = \\ &= 2\vec{r}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 + 2\vec{r}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 - 2\vec{r}_1 \cdot \delta\vec{r}_2 - 2\delta\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(\delta\vec{r}_2 - \delta\vec{r}_1)\end{aligned}$$

Así pues, vemos que:

$$\delta(l^2) = 2\vec{l} \cdot \delta\vec{l} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \delta\vec{l} = \vec{0} \Leftrightarrow \delta\vec{r}_1 = \delta\vec{r}_2 \Leftrightarrow \text{traslación} \\ \text{o} \\ \vec{l} \perp \delta\vec{l} \Leftrightarrow \text{rotación} \end{cases}$$

Luego, en las traslaciones y las rotaciones el trabajo neto es nulo.

En la traslación de nuestro sistema de dos bolas, suponiendo que actuara la fuerza  $\vec{f}_1$  sobre la bola 1 y la fuerza  $\vec{f}_2$  sobre la partícula 2, llegamos a:

$$\vec{f}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{f}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 = 0 \stackrel{\delta\vec{r}_1 = \delta\vec{r}_2}{\Leftrightarrow} \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$$

Es decir, ambas fuerzas deben ser iguales, pero de signo contrario.

**Teorema 11** (Principio de los trabajos virtuales [propiedades de la suma]). *Sea  $S$  un sistema de  $N$  partículas. Sean  $\{\vec{F}_i\}_{i=1,\dots,N}$  las fuerzas que actúan sobre cada una de las partículas, excluyendo las fuerzas como las de la proposición 17 en la página 54 y las fuerzas de ligadura ideales. Entonces, en condiciones de estática, el trabajo virtual **total** cumple:*

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

*Demostración.* Por el principio de los trabajos virtuales (ver corolario 6 en la página 54), tenemos que para cualquier desplazamiento arbitrario  $\delta\vec{r}_i$  se da:

$$\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

donde  $\vec{F}_i$  contiene todas las fuerzas que actúan sobre la partícula  $i$  menos las fuerzas de ligadura ideales. A continuación, descompongamos  $\vec{F}_i$  como:

$$\vec{F}_i = \vec{F}'_i + \vec{F}''_i$$

donde el término  $\vec{F}''_i$  es la suma de las fuerzas que actúan sobre  $i$  que cumplen las condiciones de la proposición 17 en la página 54 y el término  $\vec{F}'_i$  contiene el resto de fuerzas. Entonces, tenemos:

$$(\vec{F}'_i + \vec{F}''_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Sumando la ecuación anterior entre  $i = 1$  e  $i = N$ , llegamos a:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N (\vec{F}'_i + \vec{F}''_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \Leftrightarrow \delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}'_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}''_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

Recordando que  $\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{i \leftarrow j}$ , tenemos:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}'_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}''_{i \leftarrow j} \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \Leftrightarrow \delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}'_i \cdot \delta\vec{r}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N (\vec{F}''_{i \leftarrow j} \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{F}''_{j \leftarrow i} \cdot \delta\vec{r}_j)}_{=0} = 0$$

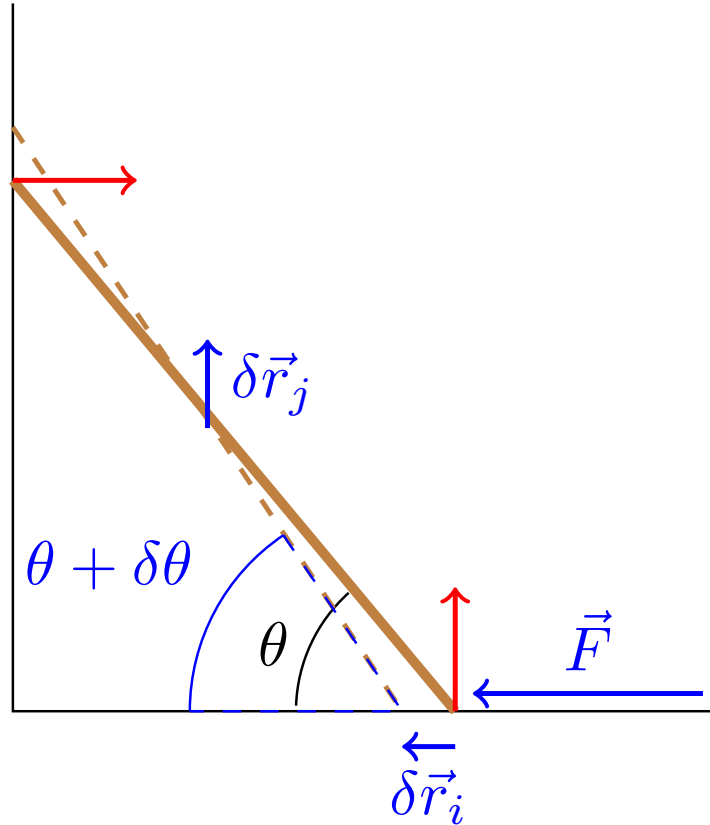
Por la proposición 17 en la página 54, el término marcado entre llaves es nulo. Así, llegamos a:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}'_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

*Q.E.D.*

*Observación 28.* Es decir, el teorema anterior nos asegura que en condiciones de estática, uno puede obviar todas las fuerzas que cumplan las condiciones de la proposición 17 en la página 54 y las fuerzas de ligadura ideales.

**Ejemplo 12.** Tenemos la siguiente situación (el problema de la escalera sin rozamiento):



Tenemos una varilla de masa  $m$  y longitud  $L$  apoyada en la pared y en el suelo. Imaginemos que nos piden hallar cuál es el módulo de la fuerza  $F$  para que la escalera esté inclinada un ángulo  $\theta$  en condiciones de estática.

Supongamos que la base de la varilla sufre un desplazamiento  $\delta \vec{r}_i$  y el centro de masas de la varilla sufre un desplazamiento en vertical  $\delta \vec{r}_j$ . Vemos que las normales son fuerzas de ligadura ideales, pues su dirección es perpendicular a la dirección de  $\delta \vec{r}_j$  y  $\delta \vec{r}_i$ . Por otra parte, podemos ignorar la tensión ejercida por la varilla porque cumple las condiciones de la proposición 17 en la página 54. En consecuencia, por el teorema 11 en la página anterior, tenemos:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_i + m\vec{g} \cdot \delta \vec{r}_j = 0$$

Llamando  $\delta x_F = |\delta \vec{r}_i|$  y  $\delta y_P = |\delta \vec{r}_j|$ , tenemos:

$$\Leftrightarrow F\delta x_F - mg\delta y_P = 0$$

Como las dos partículas  $i, j$  (los extremos de la varilla) están ligados por una fuerza de ligadura, el desplazamiento  $\delta \vec{r}_i$  depende del desplazamiento  $\delta \vec{r}_j$ . Si tomamos el ángulo  $\theta$  como coordenada generalizada, obtenemos:

$$x_F = L \cos \theta \Rightarrow \delta x_F = |-L \sin \theta \delta \theta| = L \sin \theta \delta \theta$$

$$y_P = \frac{L}{2} \sin \theta \Rightarrow \delta y_P = \left| \frac{L}{2} \cos \theta \delta \theta \right| = \frac{L}{2} \cos \theta \delta \theta$$

Así, sustituyendo, llegamos a que:

$$\begin{aligned} FL \sin \theta \delta \theta - mg \frac{L}{2} \cos \theta \delta \theta &= 0 \Leftrightarrow \left( FL \sin \theta - mg \frac{L}{2} \cos \theta \right) \delta \theta = 0 \stackrel{\delta \theta \neq 0}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow FL \sin \theta = mg \frac{L}{2} \cos \theta \Leftrightarrow F \tan \theta = \frac{mg}{2} \Leftrightarrow F = \frac{mg}{2 \tan \theta} \end{aligned}$$

### 1.10.5. Fuerzas generalizadas en función del trabajo virtual

**Proposición 18.** Sea  $S$  un sistema ideal con  $N$  partículas. Sean  $\{\vec{F}_i\}_{i=1,\dots,N}$  las fuerzas que actúan sobre cada una de las partículas, excluyendo las fuerzas de ligadura ideales. En condiciones de estática, la fuerza generalizada  $j$ -ésima es igual al cociente entre el trabajo realizado por la fuerza  $\vec{F}_j$  asociada y la variación de la coordenada  $q_j$ ; es decir:

$$Q_j = \frac{\delta W}{\delta q_j}$$

*Demostración.* Mediante la regla de la cadena, podemos expresar un desplazamiento virtual cualquiera  $\delta \vec{r}_i$  en función de las variaciones virtuales de las coordenadas que usamos para estudiar el sistema  $\{q_i\}_{i=1,\dots,n}$  como:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

La regla de la cadena queda como un sumatorio porque la función que relaciona las coordenadas generalizadas  $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$  con  $\vec{r}_i$  es de la forma  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuyo jacobiano sería  $Jf = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \end{pmatrix}$ . Nótese que  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \left( \frac{\partial r_i^x}{\partial q_j}, \frac{\partial r_i^y}{\partial q_j}, \frac{\partial r_i^z}{\partial q_j} \right)$  es un vector, donde los superíndices indican las coordenadas. Sustituyendo la expresión hallada para  $\delta \vec{r}_i$  en el corolario 6 en la página 54, obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \delta W = \sum_{j=1}^n \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{=Q_j} \delta q_j = 0 \end{aligned}$$

Por la definición generalizada de fuerza generalizada (40 en la página 48)  $Q_j$  es lo indicado entre llaves en la fórmula. Por consiguiente, debe ser:

$$\delta W = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = 0$$

Ahora, si dividimos con respecto a  $\delta q_i$  a ambos lados, obtenemos:

$$\frac{\delta W}{\delta q_i} = \frac{\sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j}{\delta q_i} = \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\delta q_j}{\delta q_i}$$

Como las coordenadas generalizadas  $q_1, \dots, q_n$  son linealmente independientes entre sí, es  $\frac{\delta q_j}{\delta q_i} = \delta_{ij}$ . Por tanto:

$$\frac{\delta W}{\delta q_i} = \sum_{j=1}^n Q_j \delta_{ij} = Q_i$$

*Q.E.D.*

## 1.11. Ecs. de Lagrange para sistemas con fuerzas no conservativas

### 1.11.1. Sin ligaduras

**Lema 3.** Sea  $S$  un sistema ideal de  $N$  partículas y sea  $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$  un sistema de coordenadas generalizadas del sistema  $S$ . Entonces, si  $\delta \vec{r}_i$  es un desplazamiento virtual cualquiera, se cumple:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

*\*Demostración (No entra).* Por la definición de momento lineal y al ser  $\frac{dm}{dt} = 0$ , tenemos:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m \dot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n m \underbrace{\frac{d \dot{\vec{r}}_i}{dt}}_{=dv} \cdot \underbrace{\delta \vec{r}_i}_{=u}$$

En la ecuación anterior aplicamos:  $d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv \Leftrightarrow u \cdot dv = d(uv) - du \cdot v$ , de forma que obtenemos:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \left[ m \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) - m \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_i) \right]$$

Ahora, expresemos  $\delta \vec{r}_i$  en función de las coordenadas generalizadas. Recordemos que era:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad \forall i = 1, \dots, N$$

En consecuencia:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \left[ m \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) - m \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \right]$$

Como la derivada es una aplicación lineal:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N \left[ m \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) - m \sum_{j=1}^n \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{j=1}^n \left[ m \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) - m \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \right] \right] \end{aligned}$$

Por la propiedad distributiva, tenemos:

$$\sum_{i=1}^N \left( A_i \sum_{j=1}^n B_j \right) = \sum_{j=1}^n \left( B_j \sum_{i=1}^N A_i \right)$$

de manera que:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left( m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) - \sum_{i=1}^N m \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \right]$$

Asombrosamente, por el teorema de la función inversa, se cumple:

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{dt}{dt} = \frac{\frac{d \vec{r}_i}{dt}}{\frac{dq_j}{dt}} = \frac{\dot{\vec{r}}_i}{\dot{q}_j} \quad \forall i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n$$

Además, como  $\delta q_j$  es un desplazamiento virtual; es decir, por definición, no depende del tiempo, llegamos a:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left( m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j - \sum_{i=1}^N m \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right]$$

Toda función posición en física debe ser al menos de clase  $C^{(2)}$  (para que tenga sentido hablar de aceleraciones); en particular  $\vec{r}_i \in C^{(2)} \quad \forall i = 1, \dots, N$ , de manera que su parcial respecto a  $q_j$  y su derivada respecto al tiempo conmutan:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left( m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j - \sum_{i=1}^N m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right]$$

Ahora, nótese que por la regla de la cadena, tenemos:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_i^2 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} 2 m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}$$

Por tanto:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left( m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j - \sum_{i=1}^N m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right]$$

Como la derivada es lineal, se puede meter el sumatorio dentro de la derivada en el término de la izquierda. Así:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j - \sum_{i=1}^N m \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right] = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j - \frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j \right] = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

**Teorema 12.** Sea  $S$  un sistema ideal de  $N$  partículas y sea  $\{q_k\}_{k=1, \dots, n}$  un sistema de coordenadas generalizadas del sistema  $S$ . Entonces, se tiene la siguiente relación:

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] = Q_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (1.11.1)$$

donde  $Q_j$  es la fuerza generalizada  $j$ -ésima.

*Demostración.* Por la segunda ley de Newton (ver 1 en la página 8), tenemos:

$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i \Leftrightarrow \vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = \vec{0} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Multiplicando escalarmente por un desplazamiento virtual arbitrario  $\delta \vec{r}_i$  y sumando a todas las partículas, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \end{aligned}$$

Por el lema 3 en la página 59 y recordando cómo podemos expresar el desplazamiento virtual en función de las coordenadas generalizadas:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad \forall i = 1, \dots, N$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j - \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{=Q_j} \delta q_j - \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0 \end{aligned}$$

Por la definición 40 en la página 48  $Q_j$  es lo indicado entre llaves en la fórmula. Así, obtenemos:

$$\sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j - \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left( Q_j - \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \right)}_{=0} \delta q_j$$

El término con la llave por debajo debe ser forzosamente cero, pues la igualdad debe ser cierta para cualquier variación virtual  $\delta q_j$ . Q.E.D.

*Observación 29.* Nótese que lo anterior es equivalente a lo siguiente en Newton:

$$W = \Delta T$$

**Corolario 7.** Sea  $S$  un sistema ideal de  $N$  partículas tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas y sea  $\{q_k\}_{k=1, \dots, n}$  un sistema de coordenadas generalizadas del sistema  $S$ . Entonces, debe cumplirse:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

*Demostración.* Como las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas, sabemos que existe una función  $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  tal que:

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla} V(\vec{r}_i) = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Entonces, aplicando la proposición 14 en la página 47, llegamos a:

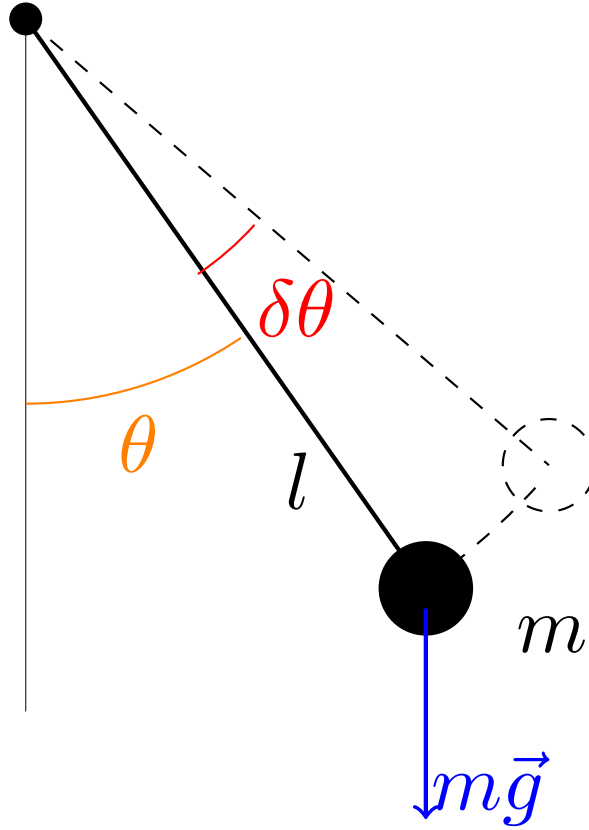
$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

pues  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0 \quad \forall i \neq j$  y  $\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_j} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_j} = \frac{\partial V}{\partial q_j}$ . Por consiguiente, aplicando el teorema anterior, debe cumplirse:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Q.E.D.

**Ejemplo 13.** Tenemos el péndulo de siempre:



La energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

Calculemos el trabajo virtual:

$$\delta W = m\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_p = -mg \sin(\theta) l \delta\theta$$

De esta forma por la proposición 18:

$$Q_\theta = \frac{\delta W}{\delta\theta} = -mgl \sin \theta$$

Obtengamos las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta}$$

En consecuencia:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = m l^2 \ddot{\theta}$$

Aplicando el teorema 12 en la página 60, llegamos a:

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

**Teorema 13.** Sea  $S$  un sistema ideal de  $N$  partículas y sea  $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$  un sistema de coordenadas generalizadas del sistema  $S$ . Consideramos  $Q_j = Q_j^{\text{conservativa}} + Q_j^{\text{no conservativa}} \forall j = 1, \dots, n$ . En este caso, la siguiente propiedad debe satisfacerse:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{\text{no conservativa}} \quad \forall j = 1, \dots, n} \quad (1.11.2)$$

donde  $\mathcal{L} = T - V$  es tal que  $Q_j^{\text{conservativa}} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \forall j = 1, \dots, n$ .

*Demostración.* Sea  $V(q_1, \dots, q_n)$  tal que:

$$Q_j^{\text{conservativa}} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Debe ser:

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

en consecuencia:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Como la derivada parcial es una aplicación lineal, se sigue:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) \right) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Y, por la definición de lagrangiano (37 en la página 46), se sigue:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Recordemos, que, por hipótesis, era:

$$Q_j = Q_j^{\text{conservativa}} + Q_j^{\text{no conservativa}} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Ahora bien, por la proposición 14 en la página 47 sabemos que  $Q_j^{\text{conservativas}} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ , de forma que:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{\text{no conservativas}} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Utilizando el teorema 12 en la página 60 y todo lo hallado anteriormente, tenemos:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}}_{= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right)} &= \underbrace{Q_j}_{= -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{\text{no conservativas}}} \quad \forall j = 1, \dots, n \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{\text{no conservativas}} \quad \forall j = 1, \dots, n \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} &= Q_j^{\text{no conservativas}} \quad \forall j = 1, \dots, n \Leftrightarrow \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) = Q_j^{\text{no conservativas}} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

De nuevo, al ser la derivada parcial una aplicación lineal:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right) = Q_j^{\text{no conservativas}} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

De nuevo, por la definición de lagrangiano ( 37 en la página 46), tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{\text{no conservativas}} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

*Q.E.D.*

*Observación 30.* Lo anterior es equivalente en Newton a:

$$W_{nc} = \Delta E$$

### 1.11.2. Con ligaduras

**Teorema 14.** Sea  $S$  un sistema ideal con  $M$  ligaduras holónomas  $\{G_k\}_{k=1,\dots,M}$  y sean  $q_1, \dots, q_{3N}$  las coordenadas con respecto a las cuales hemos hallado el lagrangiano del sistema  $\mathcal{L}$ . Consideramos  $Q_j = Q_j^{\text{conservativa}} + Q_j^{\text{no conservativa}} \quad \forall j = 1, \dots, n$ . En este caso, la siguiente propiedad debe satisfacerse:

$$\sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} + Q_j^{\text{no conservativa}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad \forall i = 1, \dots, 3N$$

donde  $\mathcal{L} = T - V$  es tal que  $Q_j^{\text{conservativa}} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \forall j = 1, \dots, 3N$ .

*Demostración.* El lagrangiano modificado cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange por el teorema de los multiplicadores de Lagrange<sup>5</sup>. En consecuencia, por el teorema 13 en la página anterior:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_i} = Q_j^{\text{no conservativa}} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \mathcal{L} + \sum_{k=1}^M \lambda_k G_k \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \mathcal{L} + \sum_{k=1}^M \lambda_k G_k \right) = Q_j^{\text{no conservativa}} \end{aligned}$$

Como la derivada parcial es una aplicación lineal:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} = Q_j^{\text{no conservativa}}$$

Nótese que  $\frac{\partial G_k}{\partial \dot{q}_i} = 0$ , pues  $G_k(q, t) \neq \mathfrak{F}(\dot{q}_i) \quad \forall i$ , ya que las ligaduras son holónomas. De esta forma, la ecuación queda:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} = Q_j^{\text{no conservativa}}$$

Pasando el tercer sumando al otro lado, obtenemos:

$$\sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial q_i} + Q_j^{\text{no conservativa}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

*Q.E.D.*

<sup>5</sup>Este teorema no es nada fácil de demostrar; requiere un estudio profundo del análisis funcional que está muy fuera del alcance de este curso. Por ello, simplemente nos creemos este resultado.

## 1.12. Hamiltoniano

### 1.12.1. Definición y primeras propiedades

**Definición 48.** Sea  $S$  un sistema ideal de  $N$  partículas tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas y sean  $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$  un sistema de coordenadas generalizadas del sistema  $S$  y  $\{p_k\}_{k=1,\dots,n}$  un conjunto de momentos generalizados de  $S$ . Llamamos **función hamiltoniana** o **hamiltoniano** a:

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) := \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \underbrace{\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)}_{=T-V}$$

**Proposición 19.**  $S$  un sistema ideal de  $N$  partículas tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas y sean  $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$  un sistema de coordenadas generalizadas **naturales** del sistema  $S$  y  $\{p_k\}_{k=1,\dots,n}$  un conjunto de momentos generalizados de  $S$ . Entonces, el hamiltoniano del sistema coincide con la energía:

$$\mathcal{H} = T + V = E$$

*Demostración.* Por la definición de energía cinética (17 en la página 23), tenemos:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

Por la regla de la cadena, podemos expresar  $\dot{\vec{r}}_i$  en función de las velocidades  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$  como sigue:

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}}_{=0}$$

Como las coordenadas son naturales, debe ser  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$ . De esta forma:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

En consecuencia:

$$\dot{\vec{r}}_i^2 = \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 = \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)$$

Así:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)$$

Por la definición de momento generalizado (ver 38 en la página 47), tenemos:

$$p_u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_u} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_u} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_u} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_u} \right] = \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_u} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

Para hallar la derivada anterior hemos tenido en cuenta lo siguiente: lo primero, nótese que  $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_u} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = 0$   $\forall i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n$ . Ahora, para realizar la derivada hemos aplicado la regla del producto. Nótese que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_u} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_u}.$$

A continuación, tenemos:

$$\sum_{u=1}^n p_u \dot{q}_u = \sum_{u=1}^n \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_u} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_u = \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{u=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_u} \dot{q}_u \right) \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = 2T$$

Finalmente, aplicando la definición de hamiltoniano (ver 48 en la página anterior) y la de lagrangiano (ver 37 en la página 46), tenemos:

$$\mathcal{H} = \sum_{u=1}^n p_u \dot{q}_u - \mathcal{L} = 2T - (T - V) = T + V = E$$

*Q.E.D.*

**Corolario 8.** *Sea un sistema ideal de  $N$  partículas tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas y sean  $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$  un sistema de coordenadas generalizadas **naturales** del sistema  $S$  y  $\{p_k\}_{k=1,\dots,n}$  un conjunto de momentos generalizados de  $S$ . Si, además, el sistema es conservativo, tenemos:*

$$E = H = \text{cte}$$

*Observación 31.* Si no se cumplen las condiciones mencionadas en la proposición 19 en la página anterior, podemos intentar conseguir un término  $T'$  que contenga la dependencia respecto a la velocidad de  $V$  y un término  $V'$  que contenga la dependencia respecto del tiempo de  $T$ . Es decir, conseguir un  $H = T' + V'$  que cumpla los requisitos anteriores. Nótese que en ese caso  $H \neq E$ .

### 1.12.2. Conservación del Hamiltoniano

**Teorema 15.** *Sea  $S$  un sistema ideal de  $N$  partículas tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas y sean  $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$  un sistema de coordenadas generalizadas del sistema  $S$  y  $\{p_k\}_{k=1,\dots,n}$  un conjunto de momentos generalizados de  $S$ . Sea  $\mathcal{H}$  el hamiltoniano del sistema. Entonces, si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, el hamiltoniano se conserva.*

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

*Demostración.* Estudiamos cómo varía el hamiltoniano en función del tiempo:

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}$$

Aplicando la regla de la cadena, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \sum_{j=1}^n (\dot{p}_j \dot{q}_j + p_j \ddot{q}_j) - \left[ \sum_{j=1}^n \left( \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}}_{=\dot{p}_j} \dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right] = \\ &= \sum_{j=1}^n (\dot{p}_j \dot{q}_j + p_j \ddot{q}_j) - \sum_{j=1}^n (\dot{p}_j \dot{q}_j + p_j \ddot{q}_j) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{aligned}$$

Quizás sea importante recordar  $\dot{q}_j \equiv \frac{\partial q_j}{\partial t}$  y  $\ddot{q}_j \equiv \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t}$ . Por tanto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H} = \text{cte}$$

*Q.E.D.*

### 1.12.3. Ecuaciones de Hamilton

**Teorema 16.** Sea  $S$  un sistema ideal de  $N$  partículas tal que las fuerzas totales que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas y sean  $\{q_k\}_{k=1,\dots,n}$  un sistema de coordenadas generalizadas del sistema  $S$  y  $\{p_k\}_{k=1,\dots,n}$  un conjunto de momentos generalizados de  $S$ . Sea  $\mathcal{H}$  el hamiltoniano del sistema. Entonces,  $\forall i = 1, \dots, n$  se cumple:

1. Primera ecuación de Hamilton:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (1.12.1)$$

2. Segunda ecuación de Hamilton:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad (1.12.2)$$

*Demostración.* Sea  $q_i$  una coordenada concreta y recordemos  $\mathcal{H} = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}$ , entonces:

1. Como  $\mathcal{L} = \mathfrak{F}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ , tenemos por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^n \left( \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_i}}_{=0} \right) \\ &= \dot{q}_i + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} = \dot{q}_i \end{aligned}$$

$\sum_{j=1}^n \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \dot{q}_j = \dot{q}_i$  pues  $\frac{\partial p_j}{\partial p_i} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$  pues los momentos generalizados no dependen uno de

otro. Al estar en una suma, el único término que «sobrevive» es  $\frac{\partial p_i}{\partial p_i} \dot{q}_i = \dot{q}_i$ . Por otra parte,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = p_j$  porque esa es justo la definición de  $p_j$ . En el último sumando de la primera línea hemos aplicado la regla de la cadena para derivadas parciales, sin embargo como las posiciones no dependen de los momentos,  $\frac{\partial q_j}{\partial p_i} = 0$ . En consecuencia:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} &= \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_i}}_{=0} \dot{q}_j - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=\dot{p}_i} - \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} = \\ &= \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \dot{p}_i = -\dot{p}_i \end{aligned}$$

$\frac{\partial p_j}{\partial q_i} = 0$ , pues los momentos generalizados nunca dependen de las posiciones.  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_j$ , porque esa es la propia definición de  $p_j$ . Por último,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i = \dot{p}_i$  por la definición 38 y la proposición 13. De esta forma, llegamos a la segunda ecuación de Hamilton:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

*Q.E.D.*

*Observación 32.* Las ecuaciones de Hamilton se dicen canónicas conjugadas.

*Observación 33.* El hamiltoniano resulta especialmente útil si las coordenadas son cíclicas. Cabe resaltar que siempre se pueden realizar transformaciones de Jacobi de manera que todas las coordenadas sean cíclicas (algo que queda fuera del alcance de este curso). En ese caso, por el corolario 5 en la página 46:

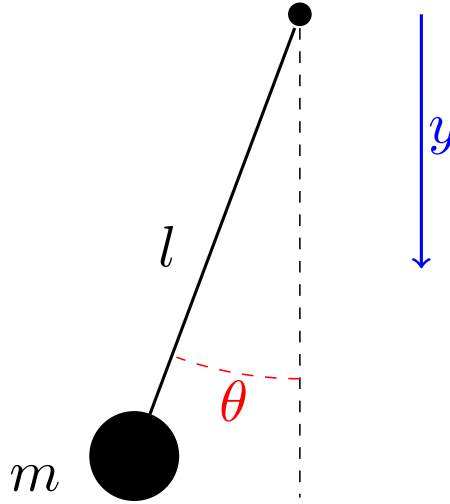
$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}_{=p_i} \right) = 0 \Leftrightarrow p_i = \text{cte}$$

Ahora, por la primera ecuación del teorema 16 en la página anterior:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \Leftrightarrow q_i = C + \int \dot{q}_i dt$$

#### 1.12.4. Ejemplos

**Ejemplo 14** (El péndulo). Tenemos:



Hallamos el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

Y el momento generalizado:

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

Escribimos el hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = p_\theta \dot{\theta} - \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = ml^2\dot{\theta}^2 - \left( \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \right) = \underbrace{\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2}_{=T} - \underbrace{mgl \cos \theta}_{=V}$$

Nótese que en este caso  $\mathcal{H} = E$ . Tenemos que conseguir expresar el hamiltoniano de manera que no dependa de la velocidad, haciendo que aparezca el momento en su lugar:

$$\mathcal{H}(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta$$

Ahora podemos aplicar la primera ecuación del teorema 16 en la página anterior:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

Y la segunda ecuación del teorema 16 en la página 67:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -\dot{p}_\theta \Rightarrow -mgl \sin \theta = \dot{p}_\theta = ml^2 \ddot{\theta} \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Nótese que al haber obtenido el hamiltoniano a través del lagrangiano, la primera ecuación de Hamilton nos dice lo que ya sabemos del lagrangiano. En el caso de que hubiéramos podido escribir el hamiltoniano sin haber escrito el lagrangiano, la primera ecuación de Hamilton nos habría permitido sacar la velocidad. En este ejemplo lo siguiente es cierto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H} = \text{cte} \stackrel{E=H}{\Leftrightarrow} E = \text{cte}$$

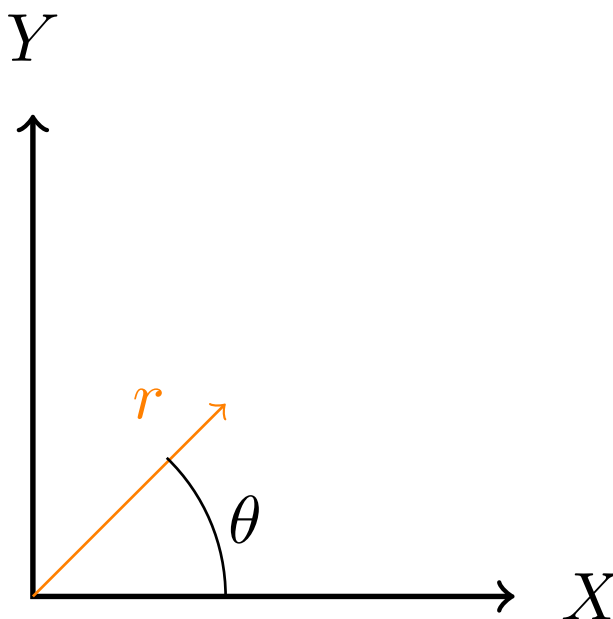
Nótese cómo hemos obtenido la ecuación del movimiento de siempre.

**Ejercicio 4.** Ecuaciones de Hamilton para una partícula en un campo cuyo potencial depende únicamente de la distancia al centro.

**Solución.** Al depender el potencial únicamente de la distancia al centro, sabemos que la fuerza será:

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dr} \hat{r}$$

En cualquier caso, aquí tenemos una representación gráfica de la situación:



Vamos a usar coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

De forma que:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r)$$

Nótese que  $\mathcal{L} \neq \mathfrak{F}(\theta)$ , de manera que  $\theta$  es una coordenada cíclica. Eso implica que  $p_\theta = \text{cte}$ , como hemos probado antes. Escribamos el hamiltoniano:

$$\mathcal{H}(r, p_r, \theta, p_\theta) = \underbrace{p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta}}_{=2T} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + V(r)$$

$p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} = 2T$  por lo siguiente:

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$$

$$p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} = m\dot{r}^2 + mr^2 \dot{\theta}^2 = 2 \left( \frac{1}{2}m \left[ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right] \right) = 2T$$

Ahora tengo que escribir el hamiltoniano en función de los momentos:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + V(r)$$

Aplicando la primera ecuación del teorema 16 en la página 67, llegamos a:

$$\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} = \dot{r}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} = \dot{\theta}$$

Ahora si usamos la segunda ecuación del teorema 16 en la página 67, obtenemos:

$$-\dot{p}_r = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$-\dot{p}_\theta = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = 0 \Leftrightarrow p_\theta = \text{cte} \Leftrightarrow mr^2 \dot{\theta} = \text{cte}$$

De la primera ecuación obtenemos, al ser  $\dot{p}_r = m\ddot{r}$ :

$$m\ddot{r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr}$$

Ahora definimos un potencial efectivo  $U$  de manera que:

$$-\frac{dU}{dr} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U = V + \frac{p_\theta^2}{2mr^2}$$

En consecuencia, yo puedo escribir el Hamiltoniano como:

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{1}{2m}p_r^2}_{=T} + \underbrace{\frac{\overbrace{p_\theta^2}^{=\text{cte}}}{2mr^2}}_{=U} + V(r) = \mathfrak{F}(r, p_r) = \text{cte}$$

Por consiguiente, al ser  $H = E$ , podemos escribir la energía como:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)$$

Podemos combinar las ecuaciones anteriores y obtenemos:

$$\frac{p_\theta^2}{mr^3} = mr\dot{\theta}^2$$

que es la ecuación de una fuerza centrífuga.

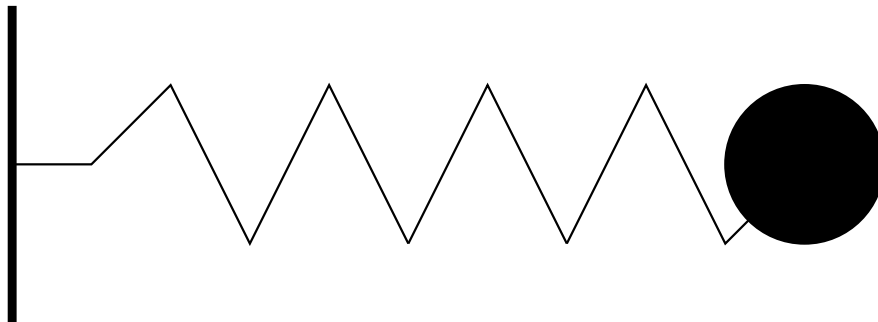


## Capítulo 2

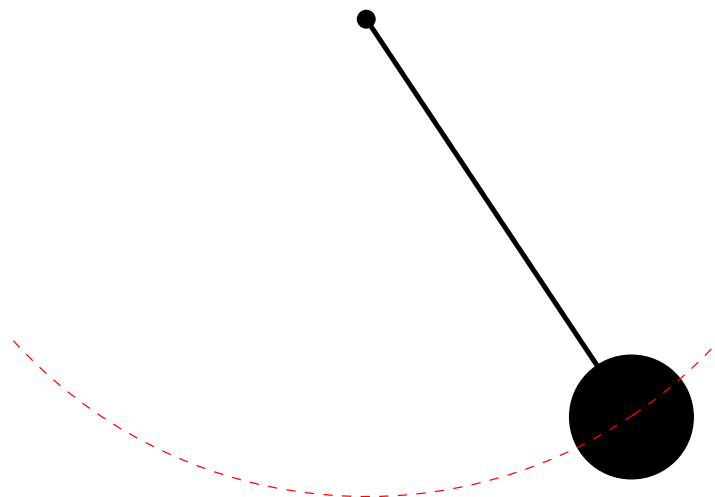
# Movimiento oscilatorio

### 2.1. Ejemplos introductorios

- Un muelle con una constante elástica  $k$  unido a una masa  $m$  que no está inmóvil.



- Un péndulo



- Magnitudes físicas en un circuito. Por ejemplo: la tensión en el circuito RLC sufre una oscilación amortiguada.
- Una onda

## 2.2. Preliminares matemáticos

**Definición 49.** Llamamos polinomio característico de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes al polinomio que se obtiene al intercambiar derivadas por potencias.

**Proposición 20.** Sean  $n \in \mathbb{N}$  e  $y(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^{(n)}$ . Si  $y(t)$  cumple la ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = 0$$

donde  $a_i \in \mathbb{R} \forall i = 0, \dots, n-1$ . Entonces la solución general  $y(t)$  debe ser de la forma:

$$y(t) = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} p_i(t)$$

donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$  son las raíces distintas del polinomio característico:

$$p(s) = s^n - a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

y  $p_i(t) \in \mathbb{C}[t]$  es un polinomio complejo arbitrario de grado menor que  $m_i$  (la multiplicidad de la raíz  $\lambda_i$ ).

**Proposición 21.** Sean  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^{(n)}$  y  $f(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Si  $y(t)$  cumple la ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = f(t)$$

donde  $a_i \in \mathbb{R} \forall i = 0, \dots, n-1$ . Entonces la solución general  $y(t)$  debe ser de la forma:

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t)$$

donde  $y_n(t)$  es la solución general de la ecuación homogénea asociada  $y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = 0$  e  $y_p(t)$  es una solución particular de la ecuación no homogénea:

$$y_p(t) = \int_{t_0}^t \gamma(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

para un  $t_0 \in I$  cualquiera donde  $\gamma(t-\tau)$  es la solución de la ecuación diferencial homogénea  $\gamma^{(n)}(t) + a_{n-1}\gamma^{(n-1)}(t) + \cdots + a_2\ddot{\gamma}(t) + a_1\dot{\gamma}(t) + a_0\gamma(t) = 0$  con condiciones iniciales  $\gamma(0) = 0, \dots, \gamma^{(n-2)}(0) = 0, \gamma^{(n-1)} = 1$ .

**Proposición 22** (Método de los coeficientes indeterminados). Sean  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^{(n)}$  y  $f(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Supongamos que  $y(t)$  cumple la ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = f(t)$$

donde  $a_i \in \mathbb{R} \forall i = 0, \dots, n-1$ . Si  $f(t)$  es de la forma:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n e^{\mu_i t} P_i(t)$$

donde  $P_i(t) \in \mathbb{C}[t]$  es un polinomio complejo de grado  $r_i$  y  $\mu_i \in \mathbb{C}$ . Entonces, una solución **particular** de la ecuación no homogénea es:

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^n t^{m_i} R_i(t) e^{\mu_i t}$$

donde  $m_i$  es la multiplicidad de  $\mu_i$  como raíz del polinomio característico de  $y(t)$  y  $R_i(t) \in \mathbb{C}[t]$  es un polinomio de grado  $r_i$ .

**Proposición 23.** Se dan las siguientes igualdades trigonométricas:

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} & \operatorname{sen} x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \operatorname{senh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ e^{ix} &= \cos x + i \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

**Proposición 24.** Cualquier ecuación diferencial de la forma:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = C$$

donde  $\alpha, \beta, C \in \mathbb{R}$  admite un cambio de variable  $x = y + \frac{C}{\beta} \Leftrightarrow y = x - \frac{C}{\beta}$  que transforma la ecuación en una homogénea:

$$\ddot{y} + \alpha \dot{y} + \beta y = 0$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son las mismas que en la ecuación original.

*Demostración.* Haciendo el cambio de variable  $x = y + \frac{C}{\beta}$ , llegamos a:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \left( y + \frac{C}{\beta} \right) + \alpha \frac{d}{dt} \left( y + \frac{C}{\beta} \right) + \beta \left( y + \frac{C}{\beta} \right) &= C \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ddot{y} + \alpha \dot{y} + \beta y + \beta \frac{C}{\beta} &= C \Leftrightarrow \ddot{y} + \alpha \dot{y} + \beta y + C = C \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ddot{y} + \alpha \dot{y} + \beta y &= 0\end{aligned}$$

*Q.E.D.*

**Definición 50.** Decimos que una solución  $x(t)$  de una ecuación diferencial cualquiera es **asintóticamente estable** si:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

## 2.3. Conceptos previos

**Hecho 1** (Ley de Hooke). La fuerza recuperadora de un medio elástico en un movimiento unidimensional es:

$$F(x) = -kx$$

donde  $k \in \mathbb{R} \ni k > 0$  es la constante recuperadora del muelle y  $x$  representa el desplazamiento del muelle desde su posición de equilibrio  $x_{eq}$ .

**Definición 51.** Decimos que una magnitud física  $x$  describe una **oscilación armónica simple** si puede expresarse como combinación lineal de un seno y un coseno. En otras palabras, si  $x(t)$  es de la forma:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t)$$

para algunos  $A, B, \omega \in \mathbb{R} \ni \omega > 0$  donde  $\omega$  recibe el nombre de **frecuencia angular** o **pulsación**. Sus unidades en el sistema internacional son  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

**Definición 52.** Llamamos **periodo** de una oscilación armónica simple a:

$$T := \frac{2\pi}{\omega}$$

Se corresponde con el tiempo transcurrido entre dos máximos (o dos mínimos) de la magnitud física  $x$ .

**Definición 53.** Llamamos **frecuencia** de una oscilación armónica simple a:

$$\nu \equiv f = \frac{1}{T}$$

cuyas unidades en el sistema internacional son  $s^{-1} = \text{Hz}$ .

**Definición 54.** La oscilación de una magnitud física  $x$  se dice **lineal** si satisface la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$$

para algunos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y para alguna función  $f(t)$  continua en su dominio.

**Definición 55.** Una oscilación lineal de una magnitud física  $x$  se dice **libre** si satisface la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0$$

para algunos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Definición 56.** Una oscilación lineal de una magnitud física  $x$  se dice **forzada** si satisface la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$$

para algunos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y para alguna función  $f(t) \neq 0$  continua en su dominio.

**Definición 57.** Llamamos **energía potencial elástica** a la asociada a una partícula que sufre una fuerza con la forma matemática de la ley de Hooke (ver hecho 1 en la página anterior) por el hecho de estar desplazada una cierta distancia con respecto al punto de equilibrio.

**Proposición 25.** La energía potencial elástica de una partícula puede expresarse como:

$$V_e(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

donde  $k \in \mathbb{R} \ni k > 0$  es la constante recuperadora y  $C \in \mathbb{R}$  es una constante.

*Demostración.* Partimos de la ley de Hooke (ver hecho 1 en la página anterior) y de la definición de energía potencial (ver definición 19 en la página 24). De esta forma, tenemos:

$$V_e(x) = - \int F dx + C = - \int -kx dx + C = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

donde  $C$  es una constante.

*Q.E.D.*

## 2.4. Oscilaciones lineales no amortiguadas (armónicas)

**Definición 58.** Decimos que una oscilación lineal de una magnitud física  $x$  es **no amortiguada** si satisface la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$$

donde  $\omega \in \mathbb{R} \ni \omega > 0$  es la frecuencia angular o pulsación.

**Definición 59.** Se dice que un oscilador lineal no amortiguado tiene **posición de equilibrio no nula** si satisface la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = C$$

donde  $\omega \in \mathbb{R} \ni \omega > 0$  es la frecuencia angular o pulsación y  $C \in \mathbb{R}$ .

**Proposición 26.** La posición  $x$  de una partícula de masa  $m \neq 0$  sometida a una fuerza elástica (ley de Hooke, ver hecho 1 en la página anterior) describe una oscilación lineal libre no amortiguada con  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ .

*Demostración.* Partimos de la segunda ley de Newton (ver axioma 1 en la página 8):

$$m\ddot{x} = F = -kx \Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \xLeftrightarrow{m \neq 0} \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Por analogía con la definición 58, debe ser  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ .

*Q.E.D.*

### 2.4.1. Solución de la ecuación diferencial

#### 2.4.1.1. La solución como exponenciales complejas

**Proposición 27.** *Cualquier oscilación lineal libre no amortiguada de una magnitud física  $x$  puede ser expresada de la forma:*

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

donde  $A, B \in \mathbb{C}$ .

*Demostración.* Partimos de la ecuación diferencial de la definición 58 en la página anterior:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Obtenemos el polinomio característico (ver definición 49 en la página 73) de la ecuación diferencial anterior:

$$p(s) = s^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow (s + i\omega)(s - i\omega) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i\omega \\ \lambda_2 = -i\omega \end{cases}$$

En consecuencia, por la proposición 20 en la página 73, tenemos que la solución general de nuestra ecuación diferencial es:

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

donde  $A, B \in \mathbb{C}$ .

*Q.E.D.*

#### 2.4.1.2. La solución como seno y coseno

**Lema 4.** *Las funciones  $e^{i\omega t}$  y  $e^{-i\omega t}$  son linealmente independientes  $\forall t \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Si  $e^{i\omega t}$  y  $e^{-i\omega t}$  son linealmente independientes  $\forall t \in \mathbb{R}$ , entonces debe darse:

$$\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

El sentido  $\Leftarrow$  es trivial. Para el sentido  $\Rightarrow$  supongamos inicialmente  $\alpha, \beta \neq 0$ , entonces llegamos a:

$$\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t} = 0 \Leftrightarrow \alpha e^{i\omega t} = -\beta e^{-i\omega t}$$

Evalutando en  $t = 0$ , llegamos a:

$$\alpha = -\beta$$

Luego debería ser:

$$\alpha e^{i\omega t} = \alpha e^{-i\omega t} \forall t \in \mathbb{R} \stackrel{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} e^{i\omega t} = e^{-i\omega t} \forall t \in \mathbb{R}$$

lo que es absurdo. Por tanto, necesariamente es  $\alpha = 0 = \beta$  y las funciones  $e^{i\omega t}$  y  $e^{-i\omega t}$  son linealmente independientes. *Q.E.D.*

**Proposición 28.** *Cualquier oscilación lineal libre no amortiguada de una magnitud física  $x$  puede ser expresada de la forma:*

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

donde  $A, B \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Partimos de que toda oscilación armónica libre no amortiguada admite una solución como la dada en la proposición 27:

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

Ahora bien,  $x(t) \in \mathbb{R} \forall t \in \mathbb{R}$ . En consecuencia,  $x(t)$  debe coincidir con su complejo conjugado:

$$x(t) = \overline{x(t)} \Leftrightarrow Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} = \overline{Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}} = \overline{Ae^{i\omega t}} + \overline{Be^{-i\omega t}} = \overline{A}e^{-i\omega t} + \overline{B}e^{i\omega t} =$$

$$= \overline{A}e^{i\omega t} + \overline{B}e^{-i\omega t} = \overline{A}e^{-i\omega t} + \overline{B}e^{i\omega t} \Leftrightarrow Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} - \overline{A}e^{-i\omega t} - \overline{B}e^{i\omega t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A - \overline{B})e^{i\omega t} + (B - \overline{A})e^{-i\omega t} = 0$$

Por el lema 4 en la página anterior,  $e^{i\omega t}$  y  $e^{-i\omega t}$  son linealmente independientes. En consecuencia, debe ser:

$$\begin{cases} A = \overline{B} \\ B = \overline{A} \end{cases} \Leftrightarrow A = \overline{B}$$

Así, obtenemos que podemos expresar  $x(t)$  como:

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + \overline{A}e^{-i\omega t}$$

Tomando  $A = a + bi$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ , tenemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= (a + bi)e^{i\omega t} + (a - bi)e^{-i\omega t} = a(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + bi(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \\ &= 2a \underbrace{\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}}_{=\cos \omega t} + 2bi^2 \underbrace{\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}}_{=\sin \omega t} = 2a \cos \omega t - 2b \sin \omega t \end{aligned}$$

por las igualdades dadas en la proposición 23 en la página 74. De esta forma, tomando  $A' = 2a$  y  $B' = -2b$ , llegamos a:

$$x(t) = A' \cos \omega t + B' \sin \omega t$$

donde claramente  $A', B' \in \mathbb{R}$ , pues  $a, b \in \mathbb{R}$ .

*Q.E.D.*

**Corolario 9.** *Toda oscilación libre lineal no amortiguada es armónica simple.*

*Demostración.* Trivial, ya que la solución dada en la proposición anterior es armónica.

*Q.E.D.*

### 2.4.1.3. La solución como coseno desplazado en fase

**Lema 5.** *Las funciones  $\sin \omega t$  y  $\cos \omega t$  son linealmente independientes  $\forall t \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Las funciones  $\sin \omega t$  y  $\cos \omega t$  serán linealmente independientes si y sólo si:

$$\alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t = 0 \Leftrightarrow \alpha, \beta = 0$$

El sentido  $\Leftarrow$  es trivial. Para el sentido  $\Rightarrow$  supongamos inicialmente  $\alpha, \beta \neq 0$ , entonces llegamos a:

$$\alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t = 0 \Leftrightarrow \alpha \sin \omega t = -\beta \cos \omega t$$

Evalutando en  $t = 0$ , llegamos a:

$$0 = -\beta$$

Pero  $\beta \neq 0$  por hipótesis. Por tanto, llegamos a un absurdo y necesariamente debe ser  $\beta = 0$ . Entonces nos queda:

$$\alpha \sin \omega t = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Y así, necesariamente debe ser  $\alpha = 0$ .

*Q.E.D.*

**Lema 6.** *Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces se cumple:*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

**Proposición 29.** *Cualquier oscilación lineal libre no amortiguada de una magnitud física  $x$  puede ser expresada de la forma:*

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

donde  $A \in \mathbb{R} \ni A \geq 0$  es la **amplitud** y  $\varphi \in \mathbb{R}$  recibe el nombre de **desfase** o **fase inicial**,  $\omega t + \varphi$  recibe el nombre de **fase**.

*Demostración.* Partiendo de la proposición 28 en la página 76, estudiemos si  $\exists! A, \varphi \in \mathbb{R}$  tales que:

$$x(t) = B \cos \omega t + C \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi)$$

- Si  $B = C = 0$ , entonces claramente es  $A = 0$  y la igualdad se cumple.
- Si es  $A = 0$ , como  $\cos \omega t$  y  $\sin \omega t$  son linealmente independientes por el lema 5 en la página anterior, tenemos que  $B = 0 = C$  y la igualdad se cumple.
- Si es  $A \neq 0$ , podemos dividir a ambos lados de la ecuación por  $A$  y obtenemos:

$$\frac{B}{A} \cos \omega t + \frac{C}{A} \sin \omega t = \cos(\omega t + \varphi)$$

Supongamos que existe un  $\varphi$  tal que  $\frac{B}{A} = \cos \varphi$  y  $-\frac{C}{A} = \sin \varphi$  y veamos que  $\varphi$  y  $A$  están unívocamente definidos  $\forall B, C \in \mathbb{R}$  de esta forma. Entonces, tendríamos:

$$\begin{cases} -\frac{C}{A} = \sin \varphi \\ \frac{B}{A} = \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \tan \varphi = -\frac{C}{B}$$

que está bien definida si  $B \neq 0$ . Por otra parte, despejando de la segunda ecuación y usando que  $\cos \arctan x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ <sup>1</sup>, tenemos:

$$A = \frac{B}{\cos \varphi} = \frac{B}{\cos \arctan(-\frac{C}{B})} = \frac{B}{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{C^2}{B^2}}}} = B \sqrt{1 + \frac{C^2}{B^2}}$$

que también está bien definida si  $B \neq 0$ .

Si  $B = 0$ , entonces  $\cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \vee \varphi = -\frac{\pi}{2}$ . Como en ese caso sería  $\sin \varphi = -\frac{C}{A}$ , tendríamos:

$$-\frac{C}{A} > 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{C}{A} < 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Por otra parte, trivialmente tendríamos  $C = A$  cuando  $B = 0$ .

Así, hemos probado que  $\forall B, C \in \mathbb{R} \exists! A, \varphi \in \mathbb{R}$  (siempre que  $A \neq 0$ ) tales que:

$$x(t) = B \cos \omega t + C \sin \omega t = A \left( \frac{B}{A} \cos \omega t + \frac{C}{A} \sin \omega t \right) = A (\cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t)$$

Ahora, aplicando el lema 6 en la página anterior, tenemos que:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

*Q.E.D.*

<sup>1</sup> Este dato puede encontrarse en la página [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Inverse\\_trigonometric\\_functions&oldid=876493420#Relationships\\_between\\_trigonometric\\_functions\\_and\\_inverse\\_trigonometric\\_functions](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Inverse_trigonometric_functions&oldid=876493420#Relationships_between_trigonometric_functions_and_inverse_trigonometric_functions).

**Definición 60.** Diremos que dos funciones  $f_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi_1)$  y  $f_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi_2)$  están **en fase** si  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Definición 61.** Diremos que dos funciones  $f_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi_1)$  y  $f_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi_2)$  están **en oposición de fase** si  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi + 2\pi k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Definición 62.** Diremos que dos funciones  $f_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi_1)$  y  $f_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi_2)$  están **en cuadratura de fase** si  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

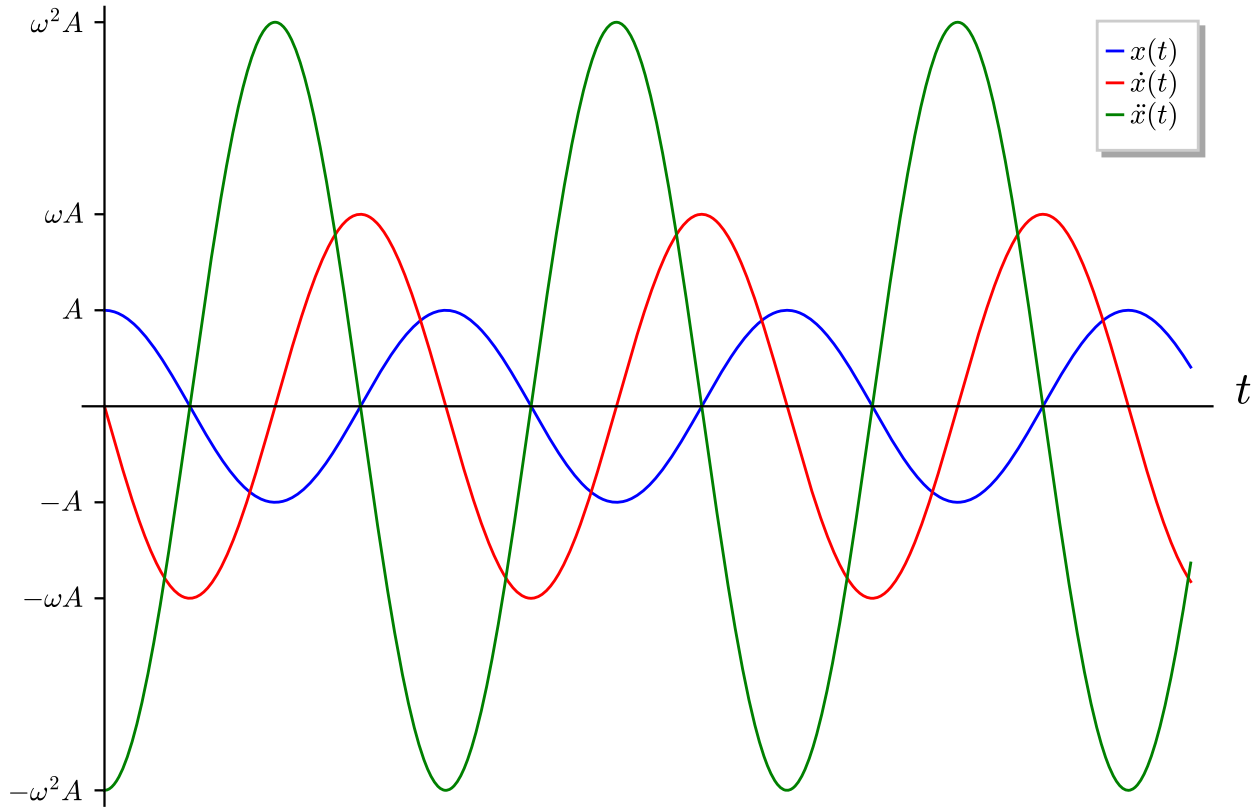
*Observación 34.* Consideremos la solución del oscilador libre lineal no amortiguado dada por la proposición 29 en la página anterior. Tenemos:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = \omega A \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ddot{x}(t) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

Por tanto, podemos ver que  $x$  y  $\dot{x}$  están en cuadratura de fase, mientras que  $x$  y  $\ddot{x}$  están en oposición de fase. Gráficamente tendríamos:



#### 2.4.1.4. La solución como la parte real de una exponencial compleja

**Proposición 30.** *Cualquier oscilación libre lineal no amortiguada de una magnitud física  $x$  puede ser expresada de la forma:*

$$x(t) = \operatorname{Re}(Ae^{i\omega t})$$

con  $A \in \mathbb{C}$ .



*Demostración.* Partiendo de la proposición 29 en la página 78, tenemos que:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Sea  $z(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$ , veamos que  $x(t) = \operatorname{Re}(z(t))$ :

$$\operatorname{Re}(z(t)) = \operatorname{Re}\left(Ae^{i(\omega t + \varphi)}\right)$$

Por la fórmula de Euler (ver proposición 23 en la página 74), tenemos:

$$\operatorname{Re}(z(t)) = \operatorname{Re}(A \cos(\omega t + \varphi) + i \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Luego, efectivamente,  $x(t) = \operatorname{Re}(Ae^{i(\omega t + \varphi)})$ . Ahora:

$$z(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)} = Ae^{i\omega t + i\varphi} = Ae^{i\varphi} e^{i\omega t}$$

Tomando  $B = Ae^{i\varphi}$ , tenemos:

$$z(t) = Be^{i\omega t}$$

tal que  $x(t) = \operatorname{Re}(Be^{i\omega t})$  donde, claramente  $B \in \mathbb{C}$  pues  $e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ .

*Q.E.D.*

*Observación 35.* Si consideramos la solución del oscilador libre lineal no amortiguado dada por la proposición 30 en la página anterior, tenemos:

$$x(t) = \operatorname{Re}(Ae^{i\omega t})$$

Si llamamos  $z(t) := Ae^{i\omega t}$ , vemos que:

$$\dot{x} = \operatorname{Re}(\dot{z}) = \operatorname{Re}(i\omega Ae^{i\omega t}) = \operatorname{Re}(i\omega z) = \operatorname{Im}(-\omega Ae^{i\omega t}) = \operatorname{Im}(-\omega z)$$

$$\ddot{x} = \operatorname{Re}(\ddot{z}) = \operatorname{Re}(-\omega^2 Ae^{i\omega t}) = \operatorname{Re}(-\omega^2 z)$$

Ahora, descomponemos  $z$  como:

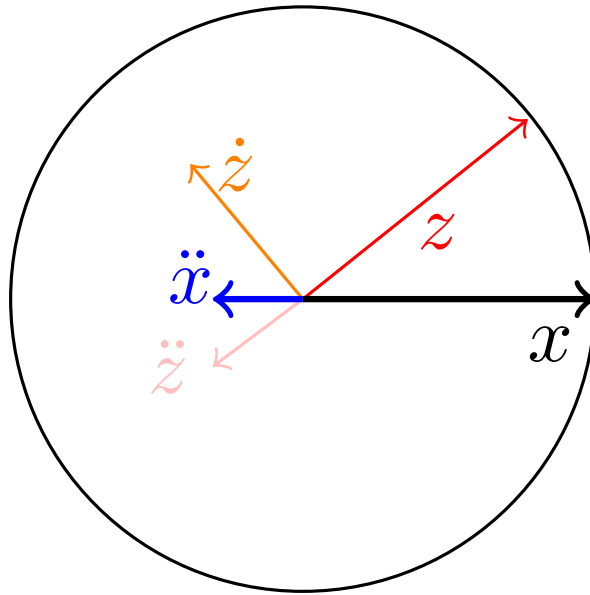
$$z := x + iy$$

De forma que:

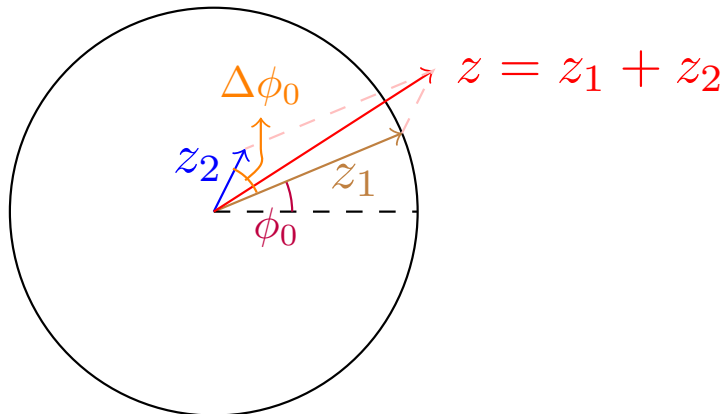
$$z = \dot{x} + i\dot{y}$$

$$\ddot{z} = \ddot{x} + i\ddot{y}$$

De esta forma, obtenemos una representación en el plano complejo.



Imaginemos, ahora, que tenemos dos oscilaciones  $z_1$  y  $z_2$  que difieren en una fase  $\Delta\phi_0$ , gráficamente su suma sería:



Esto se llama superposición de osciladores.

### 2.4.2. Solución del oscilador lineal no amortiguado cuya posición de equilibrio no es nula

**Proposición 31.** *Un oscilador simple lineal no amortiguado con posición de equilibrio no nula admite un cambio de variable  $x = y + \frac{C}{\omega^2} \Leftrightarrow y = x - \frac{C}{\omega^2}$  que lo transforma en un oscilador simple lineal no amortiguado con posición de equilibrio nula.*

$$\ddot{x} + \omega^2 x = C \xrightarrow{x = y + \frac{C}{\omega^2}} \ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

*Demostración.* La demostración es trivial al aplicar la proposición 24 en la página 74.

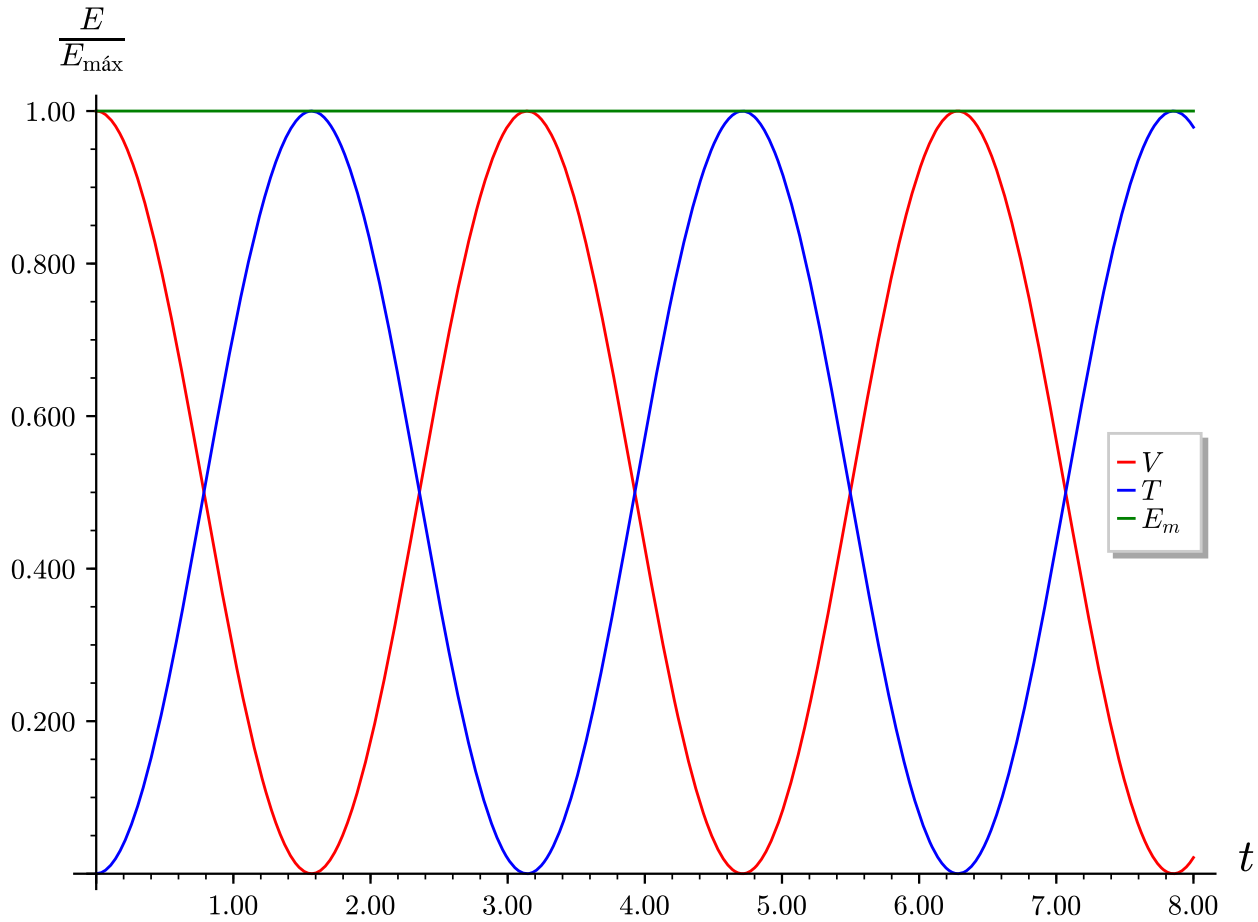
*Q.E.D.*

### 2.4.3. Conservación de la energía mecánica

**Proposición 32.** *La energía mecánica de un oscilador libre lineal no amortiguado se conserva y es:*

$$E_m = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo que oscila,  $A$  es la amplitud y  $\omega$  es la frecuencia angular de la oscilación.



*Demostración.* Vamos a trabajar con la solución de un oscilador armónico dada por la proposición 29 en la página 78. Así, tenemos:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

De forma que la energía cinética y la energía potencial quedan:

$$V = \frac{1}{2}kx(t)^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Sumando, obtenemos:

$$E_m = T + V = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Por la proposición 26 en la página 75, sabemos:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow k = m\omega^2$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene:

$$E_m = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) =$$

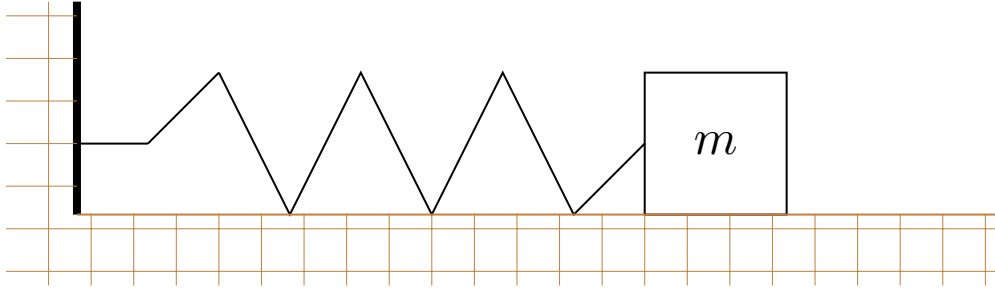
$$= \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \underbrace{(\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi))}_{=1}$$

Y ese último término es uno por la identidad fundamental de la trigonometría.

*Q.E.D.*

#### 2.4.4. Ejemplos

**Ejemplo 15.** Tenemos un muelle como el que se ve en la figura:



Si llamamos  $x$  a lo que se ha alargado el muelle, entonces, por la segunda ley de Newton (ver axioma 1) y por la ley de Hooke (ver hecho 1) debe cumplirse:

$$-kx = m\ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} = - \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega^2} x$$

Alternativamente, si llamamos  $x$  a la posición de la partícula y  $x_{eq}$  a la posición de equilibrio (donde la fuerza que actúa es cero), podemos expresar la fuerza que actúa sobre la partícula como:

$$\vec{F} = -m\omega^2 (x - x_{eq}) \hat{i}$$

Por la ley de Hooke, debe darse:

$$x = x_{eq} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$$

Por otra parte, si examinamos la energía potencial:

$$V = - \int_{x_0}^x \vec{F} \cdot d\vec{\chi} = \left[ \frac{1}{2} k \chi^2 \right]_{x_0}^x = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$$

Recordando  $k = m\omega_0^2$ , llegamos a:

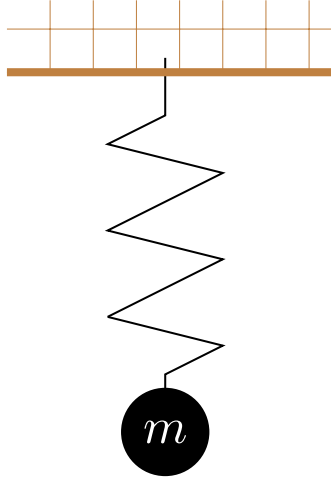
$$V = \frac{1}{2} m \omega^2 (x - x_{eq})^2$$

De manera que se cumple:

$$\vec{F} = - \frac{dV}{dx} \hat{i}$$

y la fuerza elástica es conservativa. Por tanto, se conserva la energía:  $E = \text{cte.}$

**Ejemplo 16.** Consideremos esta otra situación, un muelle colgando de un techo:



Llamamos  $x$  a la posición de la masa  $m$  y  $l_0$  la longitud natural del muelle. Entonces la fuerza que actúa sobre la masa  $m$  puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= [mg - k(x - l_0)]\hat{j} = -k\left(-\frac{mg}{k} + x - l_0\right)\hat{j} = -k\left[x - \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)\right]\hat{j} = \\ &= -m\omega_0^2\left[x - \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)\right]\hat{j}\end{aligned}$$

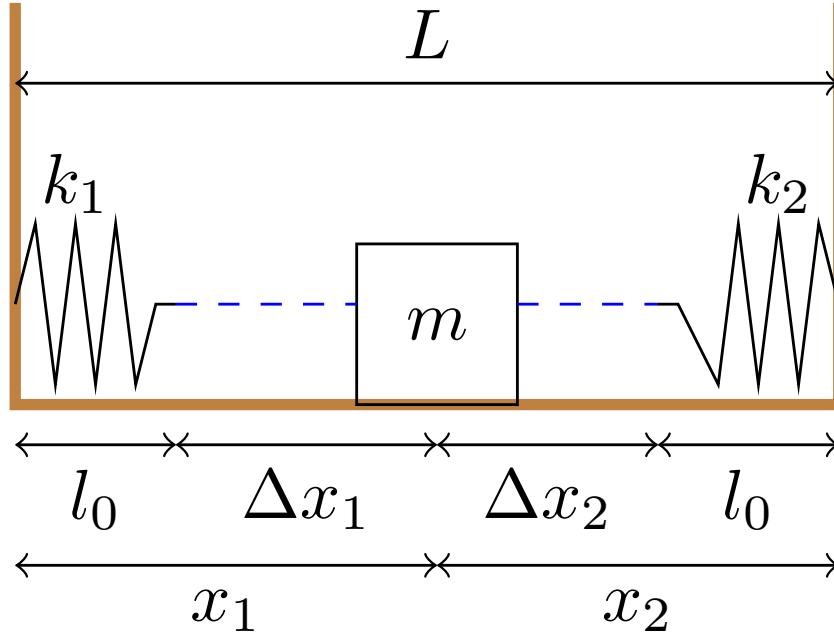
La idea es que siempre que tengamos una fuerza constante o una fuerza lineal con  $x$ , vamos a ser capaces de llegar a una expresión del estilo  $-m\omega_0^2(x - x_{eq})$  por complicado que sea el término  $x_{eq}$  mediante transformaciones matemáticas (como vimos en la proposición 31 en la página 81).

Bien, ahora vamos con la energía potencial:

$$V = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 - mgx + \text{cte} = \frac{1}{2}k\left(x - \frac{kl_0 + mg}{k}\right)^2 + \text{cte}$$

De forma similar a lo que ocurría antes, siempre que la fuerza que actúe sobre la partícula sea constante o lineal con  $x$ , podremos expresar el potencial con dos términos: uno será del estilo  $\frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2$  y el otro término será constante y lo podremos suponer cero para facilitarnos los cálculos.

**Ejercicio 5.** Tenemos la siguiente situación: un masa unida a dos paredes mediante un dos muelles de constantes recuperadoras  $k_1$  y  $k_2$  y con la misma longitud natural para ambas  $l_0$ .



**Solución.** Es importante que a la hora de poner las fuerzas elásticas debemos ser consecuentes con el siguiente criterio: o bien supondremos que todos los muelles se estiran o bien supondremos lo contrario. Si hemos aplicado el criterio escogido correctamente, el signo del desplazamiento nos dirá si es una contracción o una extensión. En nuestro caso, supondremos que todos los muelles se estiran.

Sea  $x := x_1$  la posición de la masa con referencia en la pared izquierda. Como la masa no cambia de altura, su energía potencial gravitatoria es constante. De manera que podemos suponer que es cero. Entonces, la energía potencial queda:

$$V = \frac{1}{2}k_1 (\Delta x_1)^2 + \frac{1}{2}k_2 (\Delta x_2)^2 = \frac{1}{2}k_1 (x - l_0)^2 + \frac{1}{2}k_2 (L - x - l_0)^2$$

Para el resto del ejercicio, supondremos  $l_0 = 0$ . Estudiemos la energía potencial:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k_1 x^2 + \frac{1}{2}k_2 (L - x)^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2 - k_2 Lx + \frac{1}{2}k_2 L^2 = \\ &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \left( x - \frac{k_2}{k_1 + k_2} L \right)^2 + \frac{1}{2}k_2 L^2 - \frac{k_2^2}{k_1 + k_2} \frac{L^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{(k_1 + k_2)}_{=m\omega_0^2} \left( x - \frac{k_2 L}{k_1 + k_2} \right)^2 + \frac{L^2}{2} \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \end{aligned}$$

Extrayendo factor común hemos hallado la posición de equilibrio. Alternativamente, podríamos haber hallado dicha posición de equilibrio a partir de la fuerza:

$$F_1 = k_1 x = F_2 = k_2 (L - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k_2 L}{k_1 + k_2}$$

Nótese que lo que nos dice este ejercicio es que tener estos dos muelles es equivalente a tener un único muelle cuya constante recuperadora asociada es la suma de las constantes  $k_{eq} = k_1 + k_2$ :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

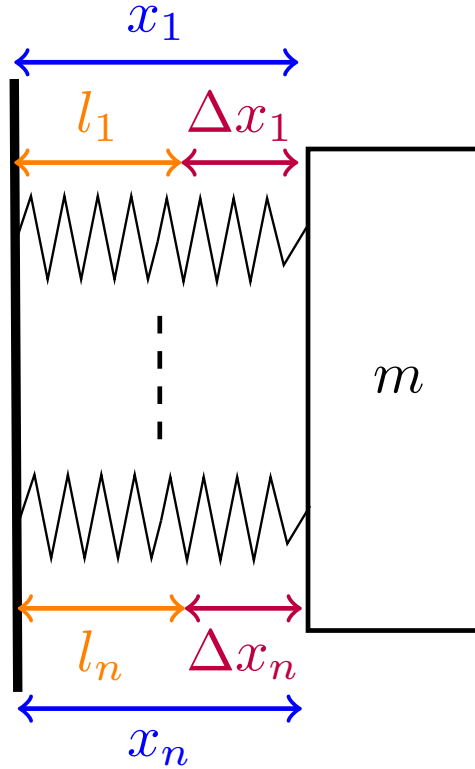
### 2.4.5. Muelles en serie y en paralelo

**Definición 63.** Decimos que dos muelles están en **paralelo** cuando ambos tienen un extremo en un objeto  $A$  y el otro extremo en un objeto  $B$ . Es decir, dos muelles están en paralelo cuando los dibujamos «uno encima de otro».

**Definición 64.** Decimos que dos muelles 1 y 2 están en **serie** cuando un extremo de 1 está unido a un objeto  $A$ , un extremo de 2 está unido a un objeto  $B$  y los extremos restantes de 1 y 2 están unidos entre sí. Es decir, dos muelles están en serie cuando los dibujamos «uno tras otro» en una línea recta.

**Proposición 33.** Sea  $S$  un sistema con  $n$  muelles de constantes recuperadoras  $k_1, \dots, k_n$  y con longitudes naturales  $l_1, \dots, l_n$  dispuestos en **paralelo**, entonces el sistema  $S$  es equivalente a un único muelle de constante

$$\text{recuperadora } k_{eq} = \sum_{i=1}^n k_i \text{ y de longitud natural } l_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i l_i}{\sum_{i=1}^n k_i}.$$



*Demostración.* Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los  $n$  muelles que tenemos están atados a una pared en un extremo y a un cuerpo de masa  $m$  en el otro extremo. De esta forma, por la segunda ley de Newton (1 en la página 8), tenemos:

$$\sum_{i=1}^n -k_i \Delta x_i = m\ddot{x}$$

donde  $\Delta x_i = x_i - l_i$ . Sin embargo, como la posición de la partícula medida desde la pared debe ser la misma independientemente del muelle es  $x_1 = \dots = x_n$ . Así, tenemos:

$$\sum_{i=1}^n -k_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n -k_i (x_i - l_i) = \sum_{i=1}^n -k_i (x - l_i) = -x \sum_{i=1}^n k_i + \sum_{i=1}^n k_i l_i$$

Nuestra  $k_{eq}$  será el opuesto del término que acompañe a  $x$ , en este caso:

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^n k_i$$

Únicamente nos queda hallar la posición de equilibrio. Sabemos que ésta se produce cuando la fuerza total es cero.

$$-x \sum_{i=1}^n k_i + \sum_{i=1}^n k_i l_i = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sum_{i=1}^n k_i l_i}{\sum_{i=1}^n k_i}$$

En consecuencia:

$$l_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i l_i}{\sum_{i=1}^n k_i}$$

*Q.E.D.*

**Corolario 10.** Sea  $S$  un sistema con  $n$  muelles de constantes recuperadoras  $k_1, \dots, k_n$  y con longitudes naturales nulas dispuestos en **paralelo**, entonces el sistema  $S$  es equivalente a un único muelle de constante recuperadora

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^n k_i \text{ y de longitud natural nula.}$$

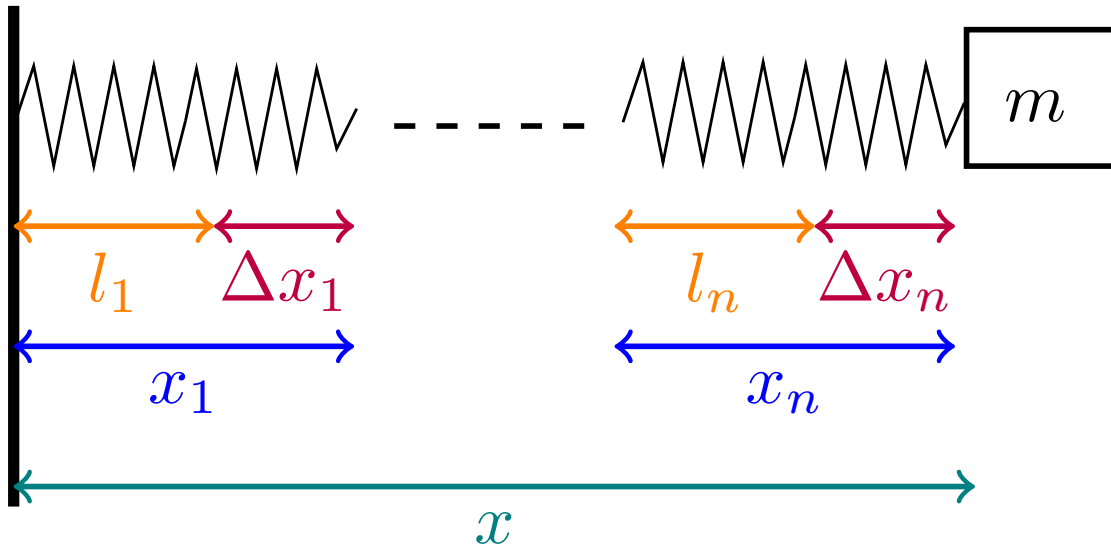
*Demostración.* Trivial, obvio, evidente, manifiesto.

*Q.E.D.*

*Observación 36.* En la práctica al resolver ejercicios, supondremos con frecuencia que la longitud natural nula. Esto se debe a que, como acabamos de probar, las longitudes naturales no aparecen en el cálculo de la  $k_{eq}$ .

**Proposición 34.** Sea  $S$  un sistema con  $n$  muelles de constantes recuperadoras  $k_1, \dots, k_n$  y con longitudes naturales  $l_1, \dots, l_n$  dispuestos en **serie**, entonces el sistema  $S$  es equivalente a un único muelle de constante

$$\text{recuperadora } k_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}} \text{ y de longitud natural } l_{eq} = \sum_{i=1}^n l_i.$$





*Demostración.* Haremos la demostración por inducción. Primero, veamos que se cumple para  $n = 2$ . En este caso, por la tercera ley de Newton (ver axioma 2 en la página 9), tenemos que la fuerza que ejerce el primer muelle sobre el segundo debe tener el mismo módulo que la que ejerce el segundo sobre el primero. En otras palabras:

$$k_1 \Delta x_1 = k_2 \Delta x_2$$

Análogamente al caso en paralelo, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el conjunto de muelles en serie está atado a una pared en un extremo y a un cuerpo de masa  $m$  en el otro. Llamemos  $x$  a la distancia entre la pared y la masa  $m$ . Claramente:

$$x = l_1 + \Delta x_1 + l_2 + \Delta x_2 = l_1 + x_1 - l_1 + l_2 + x_2 - l_2 = x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_2 = x - x_1$$

Si sustituimos  $x_2$  en la primera ecuación llegamos a:

$$k_1 (x_1 - l_1) = k_2 (x - x_1 - l_2)$$

De la ecuación anterior, podemos obtener la relación entre  $x_1$  y  $x$ ; hallémosla:

$$\begin{aligned} k_1 (x_1 - l_1) &= k_2 (x - x_1 - l_2) \Leftrightarrow k_1 x_1 - k_1 l_1 = k_2 x - k_2 x_1 - k_2 l_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{k_2 x + k_1 l_1 - k_2 l_2}{k_1 + k_2} \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo, tenemos:

$$\begin{aligned} F &= k_1 \Delta x_1 = k_1 (x_1 - l_1) = k_1 \frac{k_2 x + k_1 l_1 - k_2 l_2}{k_1 + k_2} - k_1 l_1 = \\ &= \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x + \frac{k_1^2 l_1 - k_1 k_2 l_2}{k_1 + k_2} - \frac{k_1^2 l_1 + k_1 k_2 l_1}{k_1 + k_2} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x - \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} (l_1 + l_2) \end{aligned}$$

El término que acompaña a la  $x$  será nuestra  $k_{eq}$ :

$$k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1}{\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}} = \frac{1}{\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1}}$$

Por otra parte, la posición de equilibrio será aquella que anule la fuerza, así:

$$0 = F = k_1 \Delta x_1 = k_{eq} x - k_{eq} (l_1 + l_2) \xLeftrightarrow[k_{eq} \neq 0]{} x = l_1 + l_2$$

En consecuencia:

$$l_{eq} = l_1 + l_2$$

y, así, el enunciado se cumple para  $n = 2$ .

Supongamos que se cumple para  $n$  y probemos que es cierto para  $n + 1$ . Podemos interpretar la situación como la combinación en serie de un conjunto de  $n$  muelles, por un lado, y otro muelle, por otro lado. Por hipótesis de inducción, sabemos que los  $n$  muelles primeros son equivalentes a un único muelle de constante

$$k_{eq,n} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}} \text{ y longitud natural } l_{eq,n} = \sum_{i=1}^n l_i. \text{ De manera que ahora nuestro problema se ha reducido a la}$$

combinación en serie de dos muelles. Hemos probado antes que la proposición se cumplía para  $n = 2$  y así, obtenemos que el muelle equivalente a nuestro sistema completo tiene constante recuperadora:

$$k_{eq,n+1} = \frac{1}{\frac{1}{k_{eq,n}} + \frac{1}{k_{n+1}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}} + \frac{1}{k_{n+1}}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_{n+1}}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{k_i}}$$

y longitud natural:

$$l_{eq,n+1} = l_{eq,n} + l_{n+1} = \sum_{i=1}^n l_i + l_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} l_i$$

Así, hemos probado que si el enunciado se cumple para  $n$ , se cumplirá para  $n + 1$  y, en consecuencia, por inducción, el enunciado es cierto para todo  $n \in \mathbb{N} \ni n \geq 2$ . Q.E.D.

**Corolario 11.** Sea  $S$  un sistema con  $n$  muelles de constantes recuperadoras  $k_1, \dots, k_n$  y con longitudes naturales nulas dispuestos en **serie**, entonces el sistema  $S$  es equivalente a un único muelle de constante recuperadora  $k_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}}$  y de longitud natural nula.

*Demostración.* Trivial, obvio, evidente, manifiesto.

*Q.E.D.*

*Observación 37.* Al igual que en el caso de muelles en paralelo, en la práctica al resolver ejercicios, supondremos con frecuencia que la longitud natural nula. Esto se debe a que, como acabamos de probar, las longitudes naturales no aparecen en el cálculo de la  $k_{eq}$ .

#### 2.4.6. Estudio de las condiciones iniciales

**Proposición 35.** Si expresamos la solución en la forma dada por la proposición 28 en la página 76 en función de las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$  y  $\dot{x}(0) = v_0$ , obtenemos:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

*Demostración.* Derivamos la posición para obtener la velocidad:

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

De forma que llegamos al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_0 = x(0) = A \\ v_0 = \dot{x}(0) = B\omega \Leftrightarrow B = \frac{v_0}{\omega} \end{cases}$$

*Q.E.D.*

**Proposición 36.** Si expresamos la solución en la forma dada por la proposición 29 en la página 78 en función de las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$  y  $\dot{x}(0) = v_0$ , obtenemos:

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{v_0}{x_0\omega}\right)\right)$$

*Demostración.* Derivamos la posición para obtener la velocidad:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

De manera que llegamos al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_0 = x(0) = A \cos \varphi \\ v_0 = \dot{x}(0) = -A\omega \sin \varphi \end{cases}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, obtenemos:

$$-\frac{A\omega \sin \varphi}{A \cos \varphi} = \frac{v_0}{x_0} \Leftrightarrow -\omega \tan \varphi = \frac{v_0}{x_0} \Leftrightarrow \tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega x_0} \Leftrightarrow \varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) = -\arctan\left(\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

Por otra parte, es fácil ver que la segunda ecuación es equivalente a:

$$\frac{v_0}{\omega} = -A \sin \varphi$$

Ahora, si cogemos la primera ecuación y la elevamos al cuadrado y le sumamos el cuadrado de la ecuación anterior, obtenemos:

$$x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 = A^2 \cos^2 \varphi + A^2 \sin^2 \varphi \Leftrightarrow A^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \Leftrightarrow$$

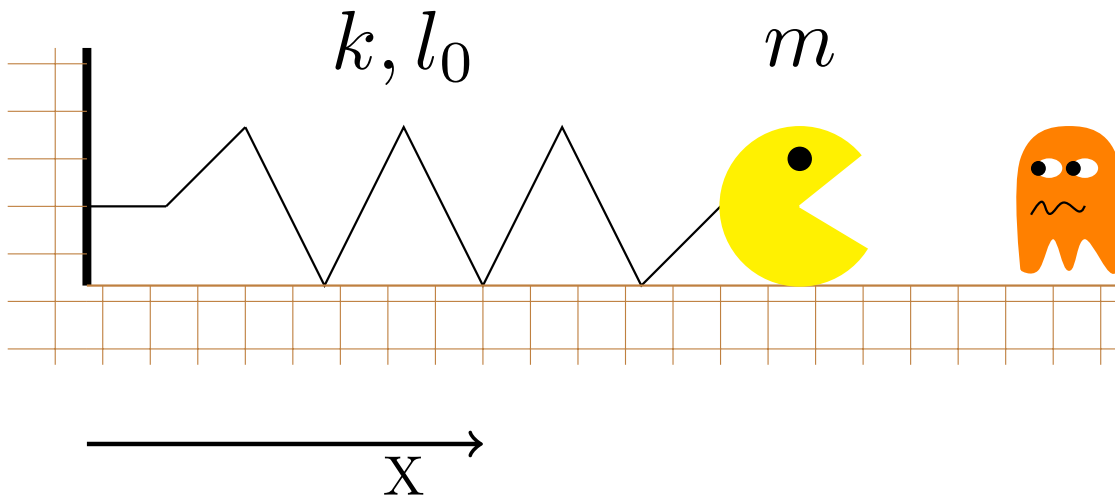
$$\Leftrightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

Q.E.D.

*Observación 38.* En la práctica nos será más cómodo trabajar con el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega x_0} \\ A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \end{cases}$$

**Ejercicio 6.** Tenemos una partícula de masa  $m = 10 \text{ g} = 0,01 \text{ kg}$  unida a un muelle de constante  $k = 36 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ .



En  $t = 0$ , sabemos que la elongación del muelle es  $x_0 = 50 \text{ mm} = 0,05 \text{ m}$ , y que se mueve a una velocidad de  $v_0 = 1,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Calcular el periodo, la amplitud, la fase inicial, la energía y la posición en función del tiempo; escribiendo también la expresión compleja de la misma. ¿Para qué  $t$  pasará por el reposo  $\dot{x} = 0$  por primera vez?

**Solución.** Por la proposición 26 en la página 75:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 60 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Y, en consecuencia:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 104,7 \text{ ms} = 0,1047 \text{ s}$$

Sabiendo:

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -a\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x(0) = x_0 = a \cos \varphi$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -\omega a \sin \varphi$$

Aplicando la proposición 36 en la página 89, obtenemos:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = 0,05747 \text{ m}$$

$$\tan \varphi = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0} = -0,56 \Rightarrow \varphi = -29,5^\circ = -0,5155 \text{ rad}$$

Llegamos a la siguiente «abominación»:

$$x(t) = 0,05747 \cos(60t - 0,5155)$$

La energía es:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m \underbrace{\omega^2 A^2}_{=v_{\text{máx}}^2} = \frac{1}{2}36 \cdot 0,05747^2 = 0,059 \text{ J}$$

Y la expresión compleja:

$$z = 0,05747 e^{i(60t - 0,5155)}$$

Para hallar el tiempo transcurrido hasta que la velocidad es nula por primera vez, hacemos:

$$\dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

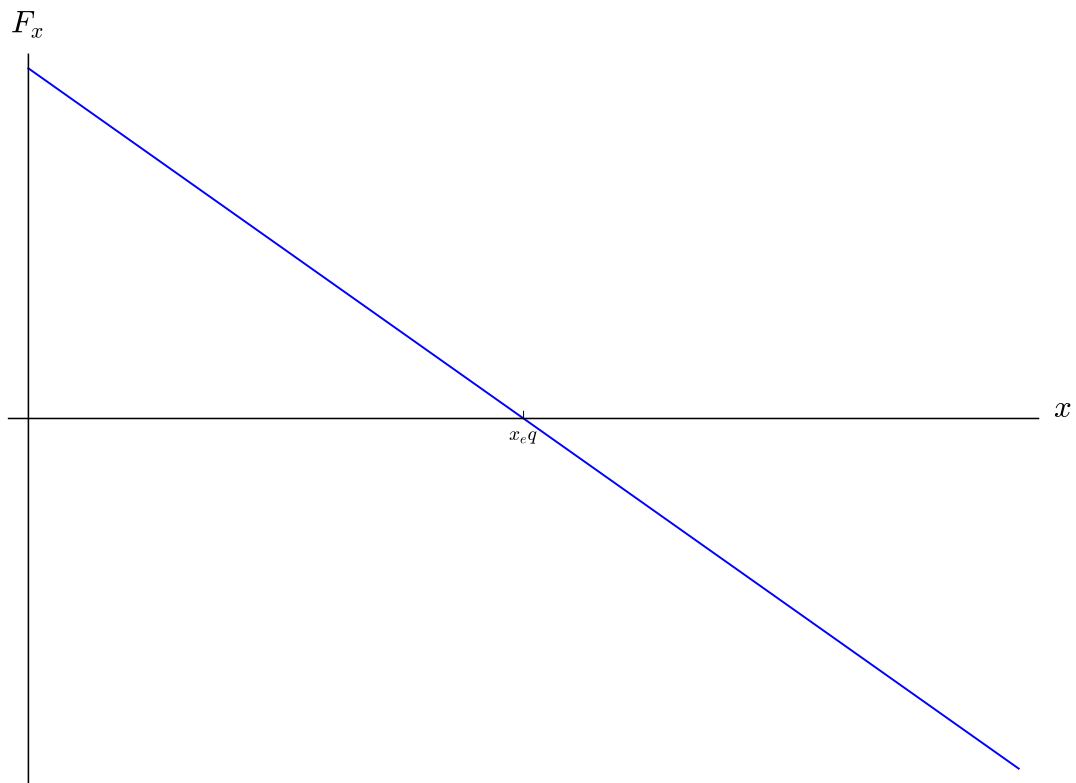
$$\dot{x} = 0 \Rightarrow \omega t + \varphi = 0, \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega t = \begin{cases} 0 - \varphi \Leftrightarrow t = 8,6 \text{ ms} \\ \pi - \varphi \Leftrightarrow t = 60,9 \text{ ms} \end{cases}$$

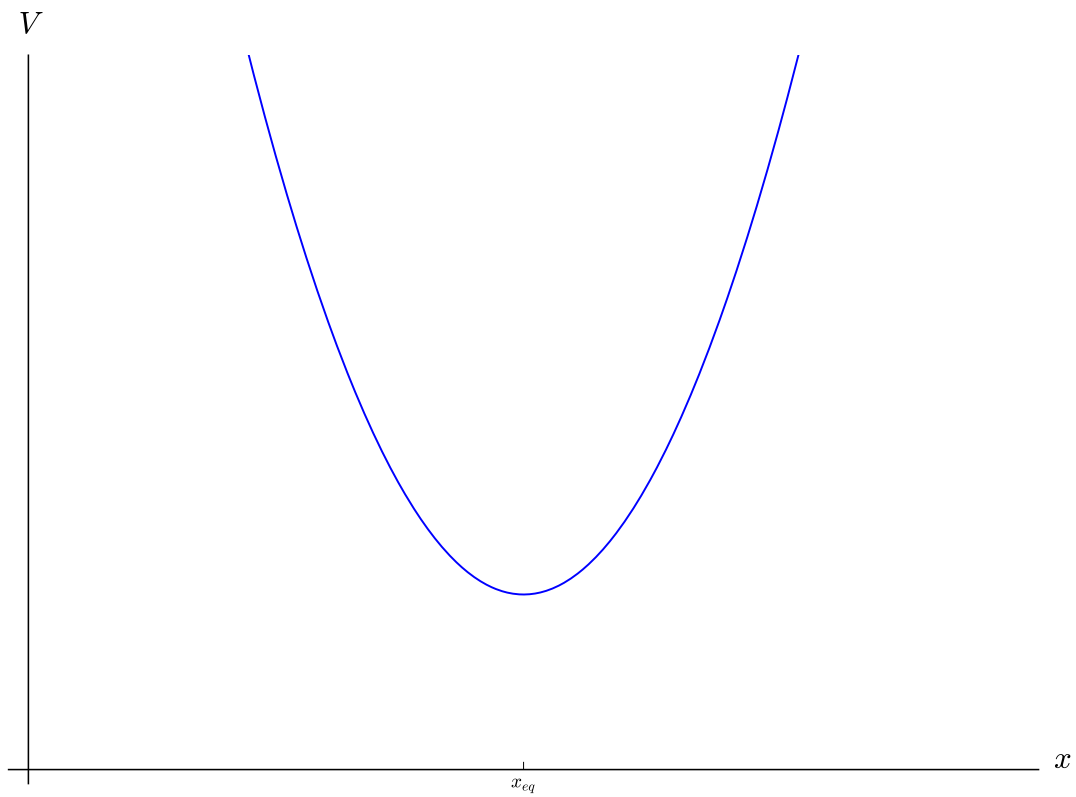
Por tanto, transcurren 8,6 ms hasta que la partícula alcanza el reposo.

### 2.4.7. Aproximaciones de un desplazamiento cualquiera a una oscilación armónica

Repasemos lo que sabemos sobre una fuerza como la ley de Hooke (ver hecho 1 en la página 74): sabemos que su representación gráfica será de la forma:



Y la representación de su energía potencial asociada será de la forma:



¿Qué sucede si contamos con una fuerza que es no lineal pero que corta al eje  $x$  en algún punto? Para responder esta pregunta tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 17.** Toda fuerza representada por una función  $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^{(1)}$  tal que  $\exists x_{eq} \in I$  tal que  $F(x_{eq}) = 0$  y  $\frac{dF}{dx}(x_{eq}) < 0$  admite una aproximación lineal mediante Taylor que permite hallar una solución aproximada de la ecuación diferencial  $m\ddot{x} = F(x)$  en un entorno de  $x_{eq}$  y el error cometido en dicha aproximación está acotado. La frecuencia angular de la aproximación satisface:

$$\omega^2 = -\frac{\frac{dF}{dx}(x_{eq})}{m}$$

*Demostración.* No ofrecemos una demostración del hecho de que el error cometido en la solución de la ecuación diferencial esté acotado, pues, por desgracia, está fuera del alcance de este curso.

Lo que sí ofrecemos es una demostración de la última afirmación del teorema. Hacemos un desarrollo en Taylor a primer orden de la fuerza entorno a  $x_{eq}$ , obteniendo:

$$F(x) \approx \underbrace{F(x_{eq})}_{=0} + \frac{dF}{dx}(x_{eq})(x - x_{eq})$$

donde  $F(x_{eq}) = 0$  por hipótesis. Así, tenemos:

$$F(x) \approx \frac{dF}{dx}(x_{eq})(x - x_{eq})$$

Por analogía con la ley de Hooke (ver 1 en la página 74) debe ser:

$$F(x) \approx \underbrace{\frac{dF}{dx}(x_{eq})}_{=-k}x - \frac{dF}{dx}(x_{eq})x_{eq}$$

Ahora, por la proposición 26 en la página 75, tenemos que:

$$\frac{dF}{dx}(x_{eq}) = -k = m\omega^2 \Leftrightarrow \omega^2 = -\frac{\frac{dF}{dx}(x_{eq})}{m}$$

y claramente  $\omega^2 > 0$  al ser  $\frac{dF}{dx}(x_{eq}) < 0$ .

*Q.E.D.*

**Corolario 12.** Toda fuerza que tenga asociada una energía potencial representada por una función  $V : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^{(2)}$  tal que  $x_{eq}$  es un punto de mínimo local de  $V$  admite una aproximación lineal mediante Taylor que permite hallar una solución aproximada de la ecuación diferencial  $m\ddot{x} = F(x)$  en un entorno de  $x_{eq}$  y el error cometido en dicha aproximación está acotado. La frecuencia angular de la aproximación satisface:

$$\omega^2 = \frac{\frac{d^2V}{dx^2}(x_{eq})}{m}$$

*Demostración.* Por la definición de energía potencial (ver 19 en la página 24), es:

$$F = -\frac{dV}{dx}$$

y dicha función es de clase  $C^{(1)}$  porque  $V$  es de clase  $C^{(2)}$ . Por otra parte, como  $x_{eq}$  es un mínimo local, se da  $\frac{dV}{dx}(x_{eq}) = 0$  y  $\frac{d^2V}{dx^2}(x_{eq}) > 0$ . Como  $F = -\frac{dV}{dx}$ :

$$F(x_{eq}) = -\frac{dV}{dx}(x_{eq}) = 0$$

$$\frac{dF}{dx}(x_{eq}) = -\frac{d^2V}{dx^2}(x_{eq}) < 0$$

Así, podemos aplicar el teorema anterior y se cumple la primera parte del corolario. Por otro lado por la última ecuación anterior:

$$\omega^2 = \frac{\overbrace{-\frac{d^2V}{dx^2}}^{\frac{dF}{dx}(x_{eq})}}{m} = \frac{\frac{d^2V}{dx^2}(x_{eq})}{m}$$

Q.E.D.

*Observación 39.* El corolario anterior nos garantiza que podemos trabajar con la energía potencial en vez de con la fuerza y hacer su desarrollo de Taylor hasta orden dos, también centrado en  $x_{eq}$ , donde  $x_{eq}$  será un punto de mínimo de la energía potencial, obteniendo:

$$\begin{aligned} V(x) &\approx V(x_{eq}) + \underbrace{\frac{dV}{dx}(x_{eq})}_{=0} (x - x_{eq}) + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2}(x_{eq}) (x - x_{eq})^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow V(x) \approx V(x_{eq}) + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2}(x_{eq}) (x - x_{eq})^2 \end{aligned}$$

Por analogía con la ley de Hooke (ver 1 en la página 74) y por la proposición 26 en la página 75, obtenemos:

$$\omega^2 = \frac{\frac{d^2V}{dx^2}(x_{eq})}{m}$$

que es lo que habíamos obtenido en el corolario.

**Ejercicio 7.** Sean  $x, k, c \in \mathbb{R}$  tales que  $x, k, c > 0$ . Tenemos una fuerza dada por:

$$F(x) = -kx + \frac{c}{x}$$

Obtenemos la posición de equilibrio:

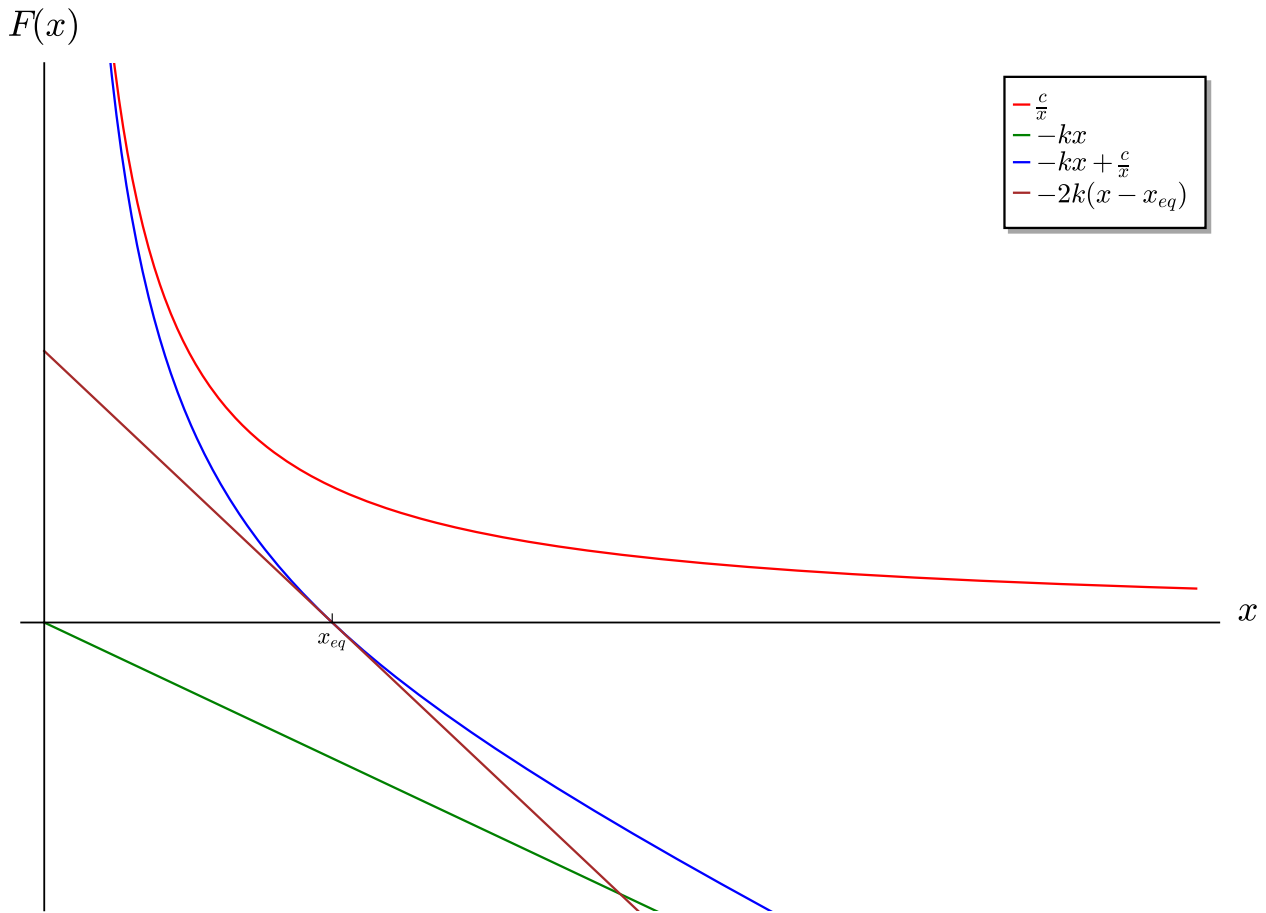
$$F = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{c}{k}} =: x_{eq}$$

Hallamos la derivada:

$$\frac{dF}{dx}(x_{eq}) = -k - \frac{c}{x_{eq}^2} = -k - \frac{c}{c}k = -2k$$

Ahora, por 17 en la página anterior, lo anterior debe ser igual a  $-m\omega^2$ . De forma que:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$



Podemos obtener lo mismo con el potencial. Hallémoslo:

$$V(x) - V(x_0) = - \int_{x_0}^x F d\chi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V(x) = V(x_0) + \left[ \frac{1}{2} k \chi^2 - c \ln \chi \right]_{x_0}^x$$

Suponiendo  $V(x_0) = 0$ :

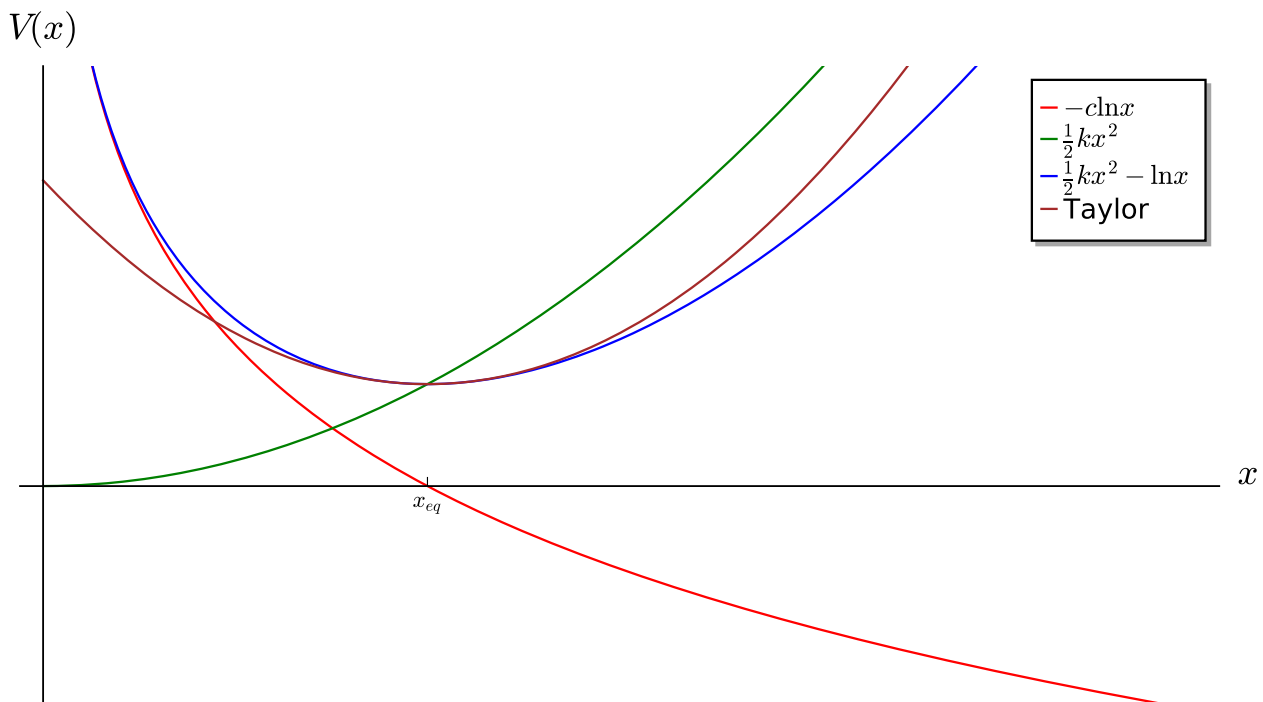
$$V(x) = \frac{1}{2} k (x^2 - x_0^2) - c \ln \frac{x}{x_0} = \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k x_0^2 - c \ln x + c \ln x_0 =$$

$$= \frac{1}{2} k x^2 - c \ln x - \frac{1}{2} k x_0^2 + c \ln x_0$$

Ahora, si quisiéramos hallar la frecuencia de oscilación, simplemente usaríamos el corolario 12 en la página 93 y obtendríamos:

$$\frac{d^2 V}{dx^2}(x_{eq}) = m\omega^2$$





## 2.5. Oscilaciones amortiguadas

### 2.5.1. Primeros conceptos

**Definición 65.** Decimos que una oscilación lineal de una magnitud física  $x$  es **amortiguada** si satisface la ecuación diferencial:

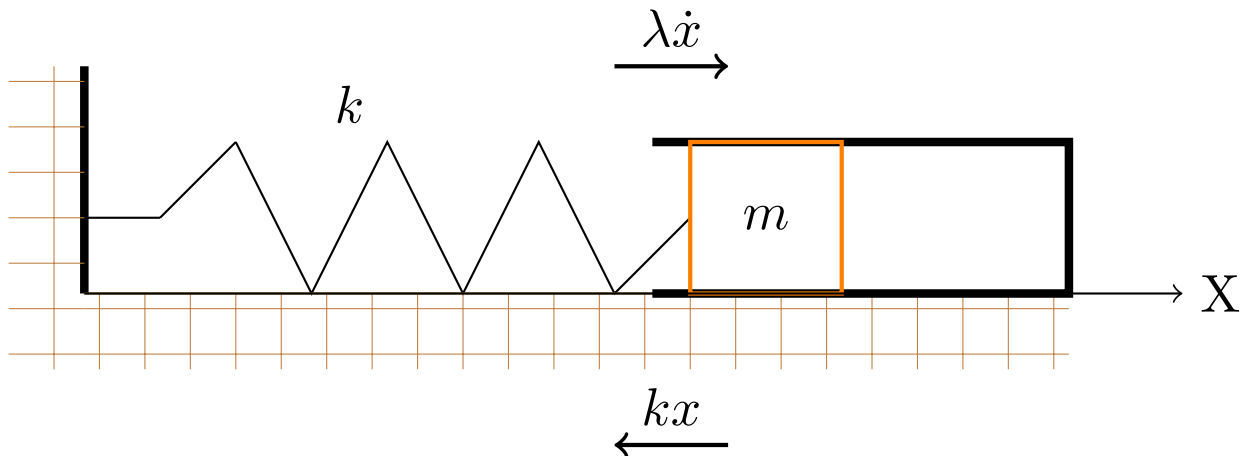
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

donde  $\gamma$  recibe el nombre de **constante de amortiguamiento** y  $\omega_0$  es la **frecuencia natural** del sistema. Esta sería la frecuencia de oscilación del sistema si fuese  $\gamma = 0$  y  $f(t) = 0$ .

Claramente, un oscilación **lineal libre amortiguada** satisfará la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

**Ejemplo 17** (Un ejemplo introductorio). Supongamos que tenemos un muelle de constante recuperadora  $k$  que une un cuerpo de masa  $m$  con la pared. Dicho cuerpo de masa  $m$  se introduce en un pistón que ejerce sobre la masa una fuerza proporcional a su velocidad con constante de proporcionalidad  $\lambda$  y que se opone a su desplazamiento. Gráficamente, tendríamos:



Aplicando la segunda ley de Newton (ver axioma 1 en la página 8), llegaríamos a la ecuación diferencial:

$$-kx - \lambda \dot{x} = m\ddot{x}$$

Definiendo:

$$2\gamma := \frac{\lambda}{m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

llegaríamos a:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

donde que es justo la ecuación de un oscilador lineal libre amortiguado.

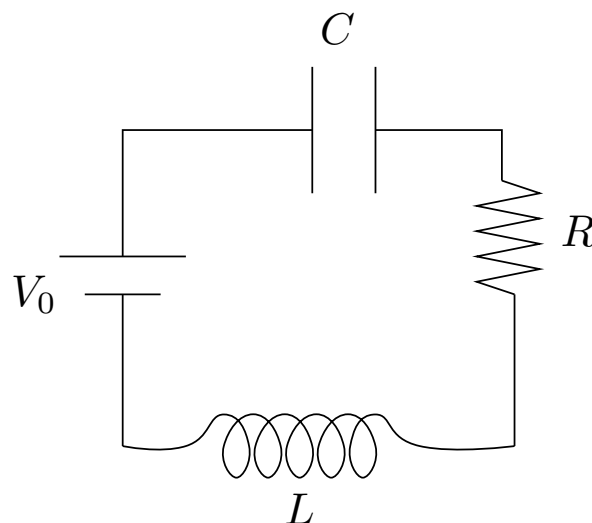
Nótese que, en este caso, la potencia de la fuerza de amortiguamiento es negativa, por lo que la energía disminuye con el tiempo:

$$\frac{dE}{dt} = P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\lambda \dot{x}^2 < 0 \Rightarrow E \downarrow$$

**Ejemplo 18.** Las oscilaciones de la carga  $q$  en un circuito eléctrico que contiene una inductancia  $L$ , una resistencia  $R$  y un condensador  $C$  en serie, vienen descritas por la ecuación:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

que se corresponde con una oscilación amortiguada libre.



**Proposición 37.** Las raíces del polinomio característico asociado a una oscilación lineal libre amortiguada vienen dadas por la expresión:

$$s_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad s_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

*Demostración.* Partimos de la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Cambiando derivadas por potencias, obtenemos el polinomio característico (ver definición 49 en la página 73):

$$p(s) = s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2$$

Las raíces del polinomio anterior son:

$$\begin{aligned} s &= \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\gamma \pm \frac{\sqrt{4(\gamma^2 - \omega_0^2)}}{2} = -\gamma \pm \frac{2}{2}\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \\ &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

*Observación 40.* Nótese que resulta algo difícil dar una solución general de la ecuación diferencial asociada a un oscilador lineal libre amortiguado, debido a las posibles variantes en la factorización de su polinomio característico: dos soluciones reales distintas, dos soluciones complejas conjugadas o una solución doble. En todos estos casos, la expresión general varía ligeramente como puede verse en la proposición 20 en la página 73. Por ello, vamos a ir estudiando caso por caso.

**Definición 66.** Llamamos factor de calidad  $Q$  de una oscilación lineal libre amortiguada al cociente:

$$Q := \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia natural y  $\gamma$  es la constante de amortiguamiento.

## 2.5.2. Amortiguamiento débil, amortiguamiento subcrítico o subamortiguamiento

### 2.5.2.1. Definición y expresión de la solución

**Definición 67.** Decimos que una oscilación lineal libre de una magnitud física  $x$  está sometida a un **amortiguamiento débil, amortiguamiento subcrítico o subamortiguamiento** si satisface la ecuación diferencial de un oscilador lineal libre amortiguado y además la constante de amortiguamiento es menor que la frecuencia natural  $\gamma < \omega_0$ .

**Proposición 38.** La solución de un oscilador lineal libre sometido a amortiguamiento débil ( $\gamma < \omega_0$ ) puede expresarse como:

1.

$$x(t) = e^{-\gamma t} (C \sen \omega t + D \cos \omega t)$$

2.

$$x(t) = ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

donde  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  y  $a, C, D \in \mathbb{R}$  son constantes.

*Demostración.* Partiendo de la proposición 37, sabemos que las raíces del polinomio característico de la ecuación diferencial son:

$$s = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Si es  $\gamma < \omega_0$ , entonces necesariamente como  $\gamma, \omega_0 > 0$ , tenemos  $\gamma^2 < \omega_0^2$  y, en consecuencia:

$$\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$$

Por tanto las raíces de nuestro polinomio característico son complejas conjugadas:

$$s = -\gamma \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Llamaremos  $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ , de forma que las soluciones quedan:

$$s = -\gamma \pm i\omega$$

Usando la proposición 20 en la página 73, obtenemos que la solución general de nuestra ecuación diferencial es:

$$x(t) = Ae^{(-\gamma+i\omega)t} + Be^{(-\gamma-i\omega)t}$$

donde  $A, B \in \mathbb{C}$ .

Como la solución tiene que ser real y las exponenciales son linealmente independientes, obtenemos que  $A = \overline{B}$  y expresando  $A$  en forma binómica  $A := a + bi$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ , llegamos a:

$$\begin{aligned} x(t) &= (a + bi)e^{(-\gamma+i\omega)t} + (a - bi)e^{(-\gamma-i\omega)t} = \\ &= ae^{-\gamma t}e^{it\omega} + bie^{-\gamma t}e^{it\omega} + ae^{-\gamma t}e^{-it\omega} - bie^{-\gamma t}e^{-it\omega} = \\ &= ae^{-\gamma t} \underbrace{(e^{it\omega} + e^{-it\omega})}_{=2 \cos \omega t} + bie^{-\gamma t} \underbrace{(e^{it\omega} - e^{-it\omega})}_{=2i \sin \omega t} = 2ae^{-\gamma t} \cos \omega t - 2be^{-\gamma t} \sin \omega t \end{aligned}$$

Llamando  $C := 2a$  y  $D := -2b$ , obtenemos:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (C \cos \omega t + D \sin \omega t)$$

Con esto, hemos probado (1). Por otra parte vemos que (1) no es más que una exponencial que multiplica a una solución de un oscilador armónico. Por tanto, por la proposición 29 en la página 78, sabemos que existen  $E, \varphi \in \mathbb{R}$  tales que permiten que el segundo factor pueda expresarse como:

$$C \cos \omega t + D \sin \omega t = E \cos(\omega t + \varphi)$$

Así, sustituyendo, tenemos:

$$x(t) = Ee^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

*Q.E.D.*

**Corolario 13.** Una oscilación lineal libre subamortiguada es asintóticamente estable.

*Demostración.* Simplemente, vemos si se cumple la definición 50 en la página 74 tomando la forma (2) de la solución.

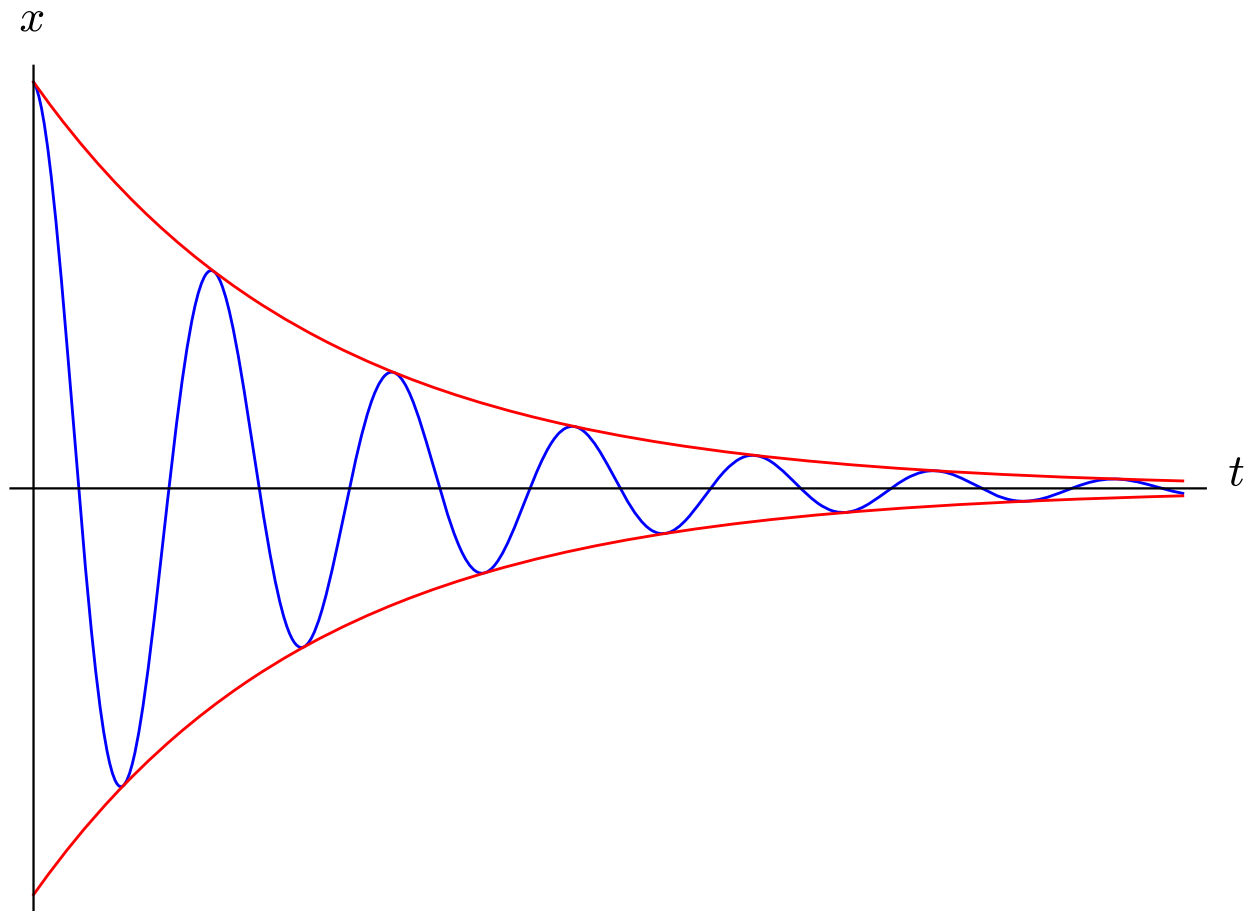
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} a \underbrace{e^{-\gamma t}}_{\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0} \underbrace{\cos(\omega t + \varphi)}_{\text{acotado}} = 0$$

donde la exponencial tiende a cero porque  $\gamma > 0$ .

Por tanto, se cumple la definición y cualquier oscilación lineal subamortiguada es asintóticamente estable.

*Q.E.D.*

*Observación 41.* El aspecto gráfico de una oscilación lineal libre subamortiguada es el siguiente:



donde la posición está representada en azul y las funciones en rojo son las exponenciales decrecientes que «encierran» la solución.

**Definición 68.** Llamamos **amplitud**  $A$  de una oscilación lineal libre amortiguada por amortiguamiento débil al factor que multiplica el coseno en la expresión de la proposición 38 en la página 98.

### 2.5.2.2. Propiedades

**Definición 69.** Llamamos **tiempo de relajación, vida media** o **parámetro de extinción**  $\tau$  de una oscilación libre lineal subamortiguada a la inversa de la constante de amortiguamiento:

$$\tau = \frac{1}{\gamma}$$

**Proposición 39.** El tiempo de relajación de una oscilación lineal libre subamortiguada es el tiempo que tiene que transcurrir desde  $t = 0$  para que la amplitud de la oscilación sea  $\frac{a}{e}$ .

*Demostración.* Estudiamos la amplitud:

$$A(t) = ae^{-\gamma t} = ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Cuando  $t = \tau$ , tenemos:

$$A(\tau) = ae^{-\frac{\tau}{\tau}} = ae^{-1} = \frac{a}{e}$$

*Q.E.D.*

**Proposición 40.** *El factor de calidad  $Q$  de una oscilación lineal libre subamortiguada es siempre mayor que  $\frac{1}{2}$ . En otras palabras,  $Q > \frac{1}{2}$ .*

*Demostración.* Trivial a partir de la definición de factor de calidad (ver 66 en la página 98) al aplicar  $\gamma < \omega_0$ . Q.E.D.

**Proposición 41.** *El número de periodos de una oscilación lineal libre subamortiguada en el intervalo  $[0, \tau]$  expresado en función del factor de calidad viene dado por la expresión:*

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

*Demostración.* Nótese que el periodo de la oscilación esta perfectamente definido, pues únicamente depende del factor del coseno en la solución de la proposición 38 en la página 98, que no es más que una oscilación armónica. Por tanto, por una regla de tres (proporción) sabemos que debe cumplirse:

$$\frac{T}{\tau} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow n = \frac{\tau}{T}$$

Como es  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , tenemos:

$$n = \frac{\tau}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\tau\omega}{2\pi}$$

Ahora, sustituyendo  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ :

$$n = \frac{\tau}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

De la definición de factor de calidad (ver definición 66 en la página 98) podemos despejar  $\omega_0$ :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} \Leftrightarrow \omega_0 = 2Q\gamma$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos:

$$n = \frac{\tau}{2\pi} \sqrt{4Q^2\gamma^2 - \gamma^2} = \frac{\tau}{2\pi} \sqrt{\gamma^2(4Q^2 - 1)} = \frac{\tau}{2\pi} \gamma \sqrt{4Q^2 - 1}$$

Por último, como  $\tau = \frac{1}{\gamma}$ , nos queda:

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

Q.E.D.

**Corolario 14.** *El número de periodos de una oscilación lineal libre subamortiguada en el intervalo  $[0, \tau]$  expresado en función del factor de calidad cuando este es mucho mayor que la unidad  $Q \gg 1$ , puede aproximarse como:*

$$n \approx \frac{Q}{\pi} \text{ si } Q \gg 1$$

*Demostración.* Partimos de la proposición anterior:

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

Como  $Q \gg 1$ , será  $4Q^2 \gg 1$  y, en consecuencia:

$$n \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{4Q^2} = \frac{1}{2\pi} 2Q = \frac{Q}{\pi}$$

Q.E.D.

**2.5.2.3. Energía mecánica**

**Proposición 42.** *La energía mecánica de un oscilador lineal libre subamortiguado viene dada por la expresión:*

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = \\ &= \frac{1}{2}ma^2 e^{-2\gamma t} [\omega_0^2 + \gamma^2 \cos(2\omega t + 2\varphi) + 2\omega\gamma \sin(2\omega t + 2\varphi)] \end{aligned}$$

donde  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ .

*Demostración.* Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la oscilación subamortiguada se produce como consecuencia de dos fuerzas: una fuerza elástica (y, por tanto, conservativa) y una fuerza proporcional a la velocidad (como en el ejemplo 17 en la página 96). De esta forma, la energía mecánica de mi sistema tendrá un término de energía potencial proveniente de la fuerza elástica conservativa y un término de energía cinética. *A priori*, igual que en el caso del oscilador armónico. La diferencia es que la expresión de la posición y de la velocidad es bastante distinta en nuestro caso. Así:

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

Ahora, recordando que podemos expresar  $x$  según la proposición 38 en la página 98, obtenemos:

$$x(t) = ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -a\omega e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) - a\gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x(t)^2 = a^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t)^2 = a^2 \omega^2 e^{-2\gamma t} \sin^2(\omega t + \varphi) + a^2 \gamma^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega t + \varphi) + 2a^2 e^{-2\gamma t} \omega\gamma \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi) =$$

$$= a^2 e^{-2\gamma t} [\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \gamma^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + 2\omega\gamma \sin(2\omega t + 2\varphi)]$$

$$T = \frac{1}{2}ma^2 e^{-2\gamma t} [\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \gamma^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + 2\omega\gamma \sin(2\omega t + 2\varphi)]$$

$$V = \frac{1}{2}ma^2 e^{-2\gamma t} \omega_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Sustituyendo  $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$  en la energía cinética (en el término del  $\sin^2$ ), obtenemos:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}ma^2 e^{-2\gamma t} [\omega_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \gamma^2 [\cos^2(\omega t + \varphi) - \sin^2(\omega t + \varphi)] + 2\omega\gamma \sin(2\omega t + 2\varphi)] = \\ &= \frac{1}{2}ma^2 e^{-2\gamma t} [\omega_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \gamma^2 \cos(2\omega t + 2\varphi) + 2\omega\gamma \sin(2\omega t + 2\varphi)] \end{aligned}$$

Así:

$$E = T + V = \frac{1}{2}ma^2 e^{-2\gamma t} [\omega_0^2 + \gamma^2 \cos(2\omega t + 2\varphi) + 2\omega\gamma \sin(2\omega t + 2\varphi)]$$

*Q.E.D.*

**Lema 7.** *El teorema de Taylor-Young aplicado a la función  $h(x) = \sqrt{1+x}$  de primer orden cuando  $x \rightarrow 0$  nos dice que:*

$$h(x) = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

cuando  $x \rightarrow 0$ .

**Corolario 15.** *La energía mecánica de un oscilador lineal libre subamortiguado que cumple  $\gamma \ll \omega_0$  puede aproximarse por:*

$$E \approx \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 e^{-2\gamma t}$$

*Demostración.* Partimos de la proposición anterior y definamos  $r := \frac{\gamma}{\omega_0} \Leftrightarrow \gamma = r\omega_0$ . En términos de  $r$  y  $\omega_0$ , la expresión anterior queda:

$$E = T + V = \frac{1}{2} m a^2 e^{-2r\omega_0 t} [\omega_0^2 + \omega_0^2 r^2 \cos(2\omega t + 2\varphi) + 2\omega\omega_0 r \sin(2\omega t + 2\varphi)]$$

donde  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - r^2\omega_0^2} = \omega_0\sqrt{1-r^2}$ . Sustituyendo en los términos de fuera del seno y el coseno, obtenemos:

$$E = \frac{1}{2} m a^2 e^{-2r\omega_0 t} [\omega_0^2 + \omega_0^2 r^2 \cos(2\omega t + 2\varphi) + 2\omega_0^2 \sqrt{1-r^2} r \sin(2\omega t + 2\varphi)]$$

Inspeccionemos los términos uno a uno y veamos su orden en  $r$ :

$-2r\omega_0 t$	orden 1
$\omega_0^2$	orden 0
$\omega_0^2 r^2$	orden 2
$2\omega_0^2 \sqrt{1-r^2} r$	orden ?

Para obtener el orden del último término, podemos usar el lema 7 en la página anterior, podemos hacer un desarrollo de Taylor cuando  $r \rightarrow 0$  a primer orden de la raíz y obtenemos:

$$2\omega_0^2 \sqrt{1-r^2} r \approx -2\omega_0^2 r^2 r = -2\omega_0^2 r^3 \Rightarrow \text{orden 3}$$

Despreciando los términos de orden 2 o superior en  $r$ , obtenemos:

$$E = \frac{1}{2} m a^2 e^{-2r\omega_0 t} \omega_0^2$$

Recordando  $\gamma = r\omega_0$ , llegamos a:

$$E = \frac{1}{2} m a^2 e^{-2\gamma t} \omega_0^2$$

con lo que queda probado el enunciado. Q.E.D.

**Corolario 16.** *La potencia de un oscilador lineal libre subamortiguado que satisface  $\gamma \ll \omega_0$  puede aproximarse por la expresión:*

$$P \approx -2\gamma E$$

*Demostración.* Partimos del corolario anterior:

$$E \approx \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 e^{-2\gamma t}$$

La potencia es:

$$P = \dot{E} \approx -2\gamma \underbrace{\frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 e^{-2\gamma t}}_{=E} = -2\gamma E$$

Q.E.D.



**2.5.3. Amortiguamiento fuerte, amortiguamiento supercrítico o sobreamortiguamiento**

**Definición 70.** Decimos que una oscilación lineal libre de una magnitud física  $x$  está sometida a un **amortiguamiento fuerte, amortiguamiento supercrítico o sobreamortiguamiento** si satisface la ecuación diferencial de un oscilador lineal libre amortiguado y además la constante de amortiguamiento es mayor que la frecuencia natural  $\gamma > \omega_0$ .

**Lema 8.** Las funciones  $\sinh \omega t$  y  $\cosh \omega t$  son linealmente independientes  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Las funciones  $\sinh \omega t$  y  $\cosh \omega t$  serán linealmente independientes si y sólo si:

$$\alpha \sinh \omega t + \beta \cosh \omega t = 0 \Leftrightarrow \alpha, \beta = 0$$

El sentido  $\Leftarrow$  es trivial. Para el sentido  $\Rightarrow$ , supongamos inicialmente  $\alpha, \beta \neq 0$ , entonces llegamos a:

$$\alpha \sinh \omega t + \beta \cosh \omega t = 0 \Leftrightarrow \alpha \sinh \omega t = -\beta \cosh \omega t$$

Evalutando en  $t = 0$ , llegamos a:

$$0 = -\beta$$

Pero  $\beta \neq 0$  por hipótesis. Por tanto, llegamos a un absurdo y necesariamente debe ser  $\beta = 0$ . Entonces nos queda:

$$\alpha \sinh \omega t = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Y, en consecuencia, debe ser necesariamente  $\alpha = 0$ .

*Q.E.D.*

**Lema 9.** Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces se da:

1.

$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta$$

2.

$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta$$

**Proposición 43.** La solución de un oscilador lineal libre sometido a amortiguamiento fuerte ( $\gamma > \omega_0$ ) puede expresarse como:

1.

$$x(t) = Ae^{-\gamma_- t} + Be^{-\gamma_+ t}$$

2.

$$x(t) = e^{-\gamma t} (C \sinh \omega t + D \cosh \omega t)$$

3.

$$x(t) = ae^{-\gamma t} \cosh(\omega t + \varphi) \quad \text{válida si } |\dot{x}(0) + \gamma x(0)| < \omega |x(0)|$$

4.

$$x(t) = ae^{-\gamma t} \sinh(\omega t + \varphi) \quad \text{válida si } |\dot{x}(0) + \gamma x(0)| > \omega |x(0)|$$

donde  $\omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ ,  $\gamma_- = \gamma - \omega$ ,  $\gamma_+ = \gamma + \omega$  y  $a \in \mathbb{R}$  es una constante. Preste el lector especial atención a cuándo es posible usar las fórmulas (3) y (4).

*Demostración.* Partiendo de la proposición 37 en la página 98, sabemos que las raíces del polinomio característico de la ecuación diferencial son:

$$s = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Si es  $\gamma > \omega_0$ , entonces necesariamente como  $\gamma, \omega_0 > 0$ , tenemos  $\gamma^2 > \omega_0^2$  y, en consecuencia:

$$\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$$

Por tanto las raíces de nuestro polinomio característico son ambas reales:

$$s = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Llamaremos  $\omega := \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ , de forma que las soluciones quedan:

$$s = -\gamma \pm \omega$$

Ahora, definimos:

$$\gamma_- = \gamma - \omega \quad \gamma_+ = \gamma + \omega$$

de manera que podemos expresar las soluciones como:

$$s = -\gamma_- \quad s = -\gamma_+$$

Usando la proposición 20 en la página 73, obtenemos que la solución general de nuestra ecuación diferencial es:

$$x(t) = Ae^{-\gamma_+ t} + Be^{-\gamma_- t} = Ae^{-\gamma_- t} + Be^{-\gamma_+ t}$$

donde  $A, B \in \mathbb{R}$ . Así, hemos probado (1).

Para probar (2) vamos a ver que la solución propuesta en (2) es una combinación lineal de los sumandos de (1):

$$\begin{aligned} e^{-\gamma t} (C \sinh \omega t + D \cosh \omega t) &= e^{-\gamma t} \left( C \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} + D \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \right) = \\ &= \frac{C}{2} e^{-\gamma t} e^{\omega t} - \frac{C}{2} e^{-\gamma t} e^{-\omega t} + \frac{D}{2} e^{-\gamma t} e^{\omega t} + \frac{D}{2} e^{-\gamma t} e^{-\omega t} = \\ &= \left( \frac{C}{2} + \frac{D}{2} \right) e^{-\gamma t} e^{\omega t} + \left( \frac{D}{2} - \frac{C}{2} \right) e^{-\gamma t} e^{-\omega t} = \underbrace{\left( \frac{C}{2} + \frac{D}{2} \right)}_{=A} e^{-\gamma_- t} + \underbrace{\left( \frac{D}{2} - \frac{C}{2} \right)}_{=B} e^{-\gamma_+ t} \end{aligned}$$

De esta forma, claramente la expresión (2) es combinación lineal de los sumandos de (1) y, por tanto, es solución de la ecuación diferencial. Ahora, tenemos que ver que ambos sumandos de la expresión 2 son linealmente independientes:

$$e^{-\gamma t} (C \sinh \omega t + D \cosh \omega t) = 0 \Leftrightarrow C \sinh \omega t + D \cosh \omega t = 0$$

Pero como el  $\sinh \omega t$  y  $\cosh \omega t$  son linealmente independientes por el lema 8 en la página anterior, tenemos que los dos sumandos que conforman (2) son linealmente independientes. Por consiguiente, (2) es una solución general de la ecuación diferencial.

Para probar (3) vamos a estudiar en qué condiciones existen  $\exists! a, \varphi \in \mathbb{R}$  tales que:

$$C \sinh \omega t + D \cosh \omega t = a \cosh(\omega t + \varphi)$$

- Si  $C = D = 0$ , entonces claramente es  $a = 0$  y la igualdad se cumple.
- Si es  $a = 0$ , como  $\sinh \omega t$  y  $\cosh \omega t$  son linealmente independientes por el lema 8 en la página anterior, debe ser  $C = 0 = D$  y la igualdad se cumple.
- Si es  $a \neq 0$ , podemos dividir a ambos lados de la ecuación por  $a$  y obtenemos:

$$\frac{C}{a} \sinh \omega t + \frac{D}{a} \cosh \omega t = \cosh(\omega t + \varphi)$$

Supongamos que existe un  $\varphi$  tal que  $\frac{C}{a} = \sinh \varphi$  y  $\frac{D}{a} = \cosh \varphi$  y veamos en qué condiciones están bien definidos. Entonces, tendríamos:

$$\begin{cases} \frac{C}{a} = \sinh \varphi \\ \frac{D}{a} = \cosh \varphi \end{cases} \Rightarrow \tanh \varphi = \frac{C}{D}$$

que está bien definida siempre que  $-1 < \frac{C}{D} < 1 \Leftrightarrow |C| < |D|$ <sup>2</sup>.

Por otra parte, si elevamos al cuadrado en ambas ecuaciones y restamos, obtenemos:

$$\frac{D^2}{a^2} - \frac{C^2}{a^2} = \underbrace{\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi}_{=1} = 1 \Leftrightarrow D^2 - C^2 = a^2$$

lo cual sólo está bien definido (es un número real) si  $|D| \geq |C|$ . Obtenemos, de esta forma, que debe cumplirse  $|D| > |C|$  para que tanto  $\varphi$  como  $a$  estén definidas. A continuación, intentemos convertir  $|D| > |C|$  en una desigualdad sobre las condiciones iniciales. En la solución (2) teníamos:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (C \sinh \omega t + D \cosh \omega t)$$

$$\dot{x}(t) = e^{-\gamma t} \omega (C \cosh \omega t + D \sinh \omega t) - \gamma e^{-\gamma t} (C \sinh \omega t + D \cosh \omega t)$$

$$x(0) = D$$

$$\dot{x}(0) = \omega C - \gamma D \Leftrightarrow \omega C = \dot{x}(0) + \gamma D \Leftrightarrow C = \frac{\dot{x}(0) + \gamma D}{\omega}$$

Ahora, veamos cuándo es  $|C| < |D|$ :

$$\left| \frac{\dot{x}(0) + \gamma D}{\omega} \right| < |D|$$

Como es  $\omega > 0$  y  $D = x(0)$ , lo anterior es equivalente a:

$$|\dot{x}(0) + \gamma x(0)| < \omega |x(0)|$$

Así, hemos probado que siempre que se satisfaga la condición anterior entonces  $\exists! A, \varphi \in \mathbb{R}$  tales que:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} (C \sinh \omega t + D \cosh \omega t) = A e^{-\gamma t} \left( \frac{C}{a} \sinh \omega t + \frac{D}{a} \cosh \omega t \right) = \\ &= a e^{-\gamma t} (\sinh \varphi \sinh \omega t + \cosh \varphi \cosh \omega t) \end{aligned}$$

Por último, aplicando el lema 9 en la página 104, tenemos que:

$$x(t) = a e^{-\gamma t} \cosh(\omega t + \varphi)$$

Para probar (4) vamos a proceder análogamente a (3). Primero, estudiaremos en qué condiciones existen  $\exists! a, \varphi \in \mathbb{R}$  tales que:

$$C \sinh \omega t + D \cosh \omega t = a \sinh(\omega t + \varphi)$$

- Si  $C = D = 0$ , entonces claramente es  $a = 0$  y la igualdad se cumple.
- Si es  $a = 0$ , como  $\sinh \omega t$  y  $\cosh \omega t$  son linealmente independientes por el lema 8 en la página 104, debe ser  $C = 0 = D$  y la igualdad se cumple.

<sup>2</sup>Si esto no queda claro, convendría leer algo sobre funciones hiperbólicas en esta página [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hyperbolic\\_function&oldid=877577641](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hyperbolic_function&oldid=877577641).

- Si es  $a \neq 0$ , podemos dividir a ambos lados de la ecuación por  $a$  y obtenemos:

$$\frac{C}{a} \sinh \omega t + \frac{D}{a} \cosh \omega t = \sinh(\omega t + \varphi)$$

Supongamos que existe un  $\varphi$  tal que  $\frac{C}{a} = \cosh \varphi$  y  $\frac{D}{a} = \sinh \varphi$  y veamos en qué condiciones están bien definidos. Entonces, tendríamos:

$$\begin{cases} \frac{C}{a} = \cosh \varphi \\ \frac{D}{a} = \sinh \varphi \end{cases} \Rightarrow \tanh \varphi = \frac{D}{C}$$

que está bien definida siempre que  $-1 < \frac{D}{C} < 1 \Leftrightarrow |D| < |C|$ <sup>3</sup>.

Por otra parte, si elevamos al cuadrado en ambas ecuaciones y restamos, obtenemos:

$$\frac{C^2}{a^2} - \frac{D^2}{a^2} = \underbrace{\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi}_{=1} = 1 \Leftrightarrow C^2 - D^2 = a^2$$

lo cual sólo está bien definido (es un número real) si  $|C| \geq |D|$ . Obtenemos, de esta forma, que debe cumplirse  $|C| > |D|$  para que tanto  $\varphi$  como  $a$  estén definidas. A continuación, intentemos convertir  $|C| > |D|$  en una desigualdad sobre las condiciones iniciales. En la solución (2) teníamos:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (C \sinh \omega t + D \cosh \omega t)$$

$$\dot{x}(t) = e^{-\gamma t} \omega (C \cosh \omega t + D \sinh \omega t) - \gamma e^{-\gamma t} (C \sinh \omega t + D \cosh \omega t)$$

$$x(0) = D$$

$$\dot{x}(0) = \omega C - \gamma D \Leftrightarrow \omega C = \dot{x}(0) + \gamma D \Leftrightarrow C = \frac{\dot{x}(0) + \gamma D}{\omega}$$

Ahora, veamos cuándo es  $|C| > |D|$ :

$$\left| \frac{\dot{x}(0) + \gamma D}{\omega} \right| > |D|$$

Como es  $\omega > 0$  y  $D = x(0)$ , lo anterior es equivalente a:

$$|\dot{x}(0) + \gamma x(0)| > \omega |x(0)|$$

Así, hemos probado que siempre que se satisfaga la condición anterior entonces  $\exists! A, \varphi \in \mathbb{R}$  tales que:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} (C \sinh \omega t + D \cosh \omega t) = A e^{-\gamma t} \left( \frac{C}{a} \sinh \omega t + \frac{D}{a} \cosh \omega t \right) = \\ &= a e^{-\gamma t} (\cosh \varphi \sinh \omega t + \sinh \varphi \cosh \omega t) \end{aligned}$$

Por último, aplicando el lema 9 en la página 104, tenemos que:

$$x(t) = a e^{-\gamma t} \sinh(\omega t + \varphi)$$

*Q.E.D.*

**Corolario 17.** Una oscilación lineal libre sobrearmortiguada es asintóticamente estable.

*Demostración.* Simplemente, vemos si se cumple la definición 50 en la página 74 tomando la forma (1) de la solución.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( A \underbrace{e^{-\gamma_- t}}_{\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0} + B \underbrace{e^{-\gamma_+ t}}_{\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0} \right) = 0$$

donde ambas exponenciales tienden a cero porque  $\gamma_+ = \gamma + \omega > 0$  pues  $\gamma, \omega > 0$ , por una parte, y  $\gamma_- = \gamma - \omega > 0$  pues  $\omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < \gamma$ , por otra parte.

Por tanto, se cumple la definición y cualquier oscilación lineal sobrearmortiguada es asintóticamente estable.

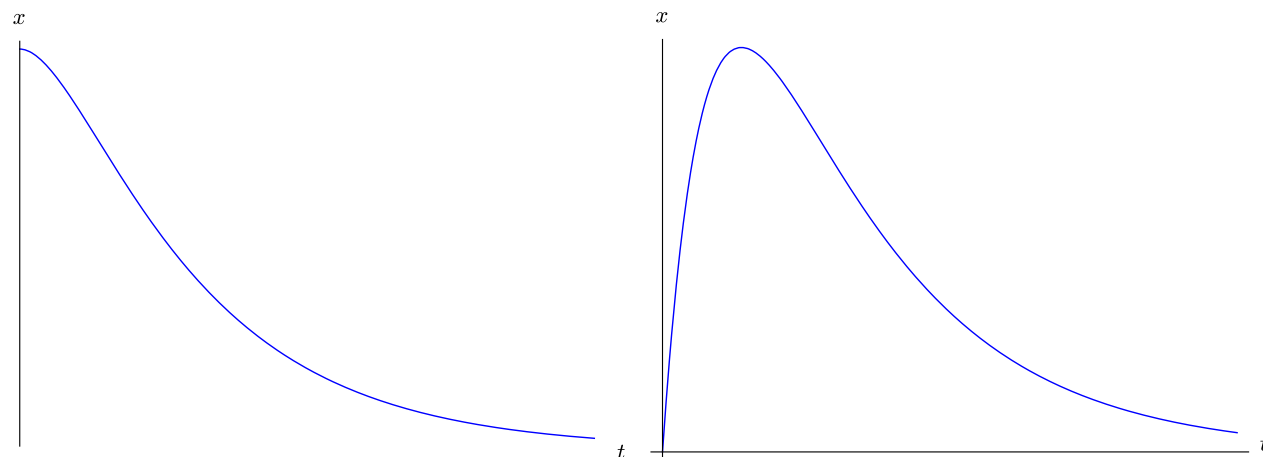
*Q.E.D.*

<sup>3</sup>Si esto no queda claro, convendría leer algo sobre funciones hiperbólicas en esta página [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hyperbolic\\_function&oldid=877577641](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hyperbolic_function&oldid=877577641).

**Definición 71.** Llamamos **tiempo de relajación, vida media o parámetro de extinción** de un oscilador lineal libre sobreamortiguado a la inversa de  $\gamma_-$ . Es decir:

$$\tau := \frac{1}{\gamma_-} = \frac{1}{\gamma - \omega} = \frac{1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$$

*Observación 42.* El aspecto gráfico de una oscilación lineal libre sobreamortiguada es el siguiente:



La gráfica de la izquierda es la solución para las condiciones iniciales  $x(0) = x_{\text{máx}}$  y  $\dot{x}(0) = 0$ , mientras que la gráfica de la derecha es la solución con condiciones iniciales  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = v_{\text{máx}}$ .

**Proposición 44.** El factor de calidad  $Q$  de una oscilación lineal libre sobreamortiguada es siempre menor que  $\frac{1}{2}$ . En otras palabras,  $Q < \frac{1}{2}$ .

*Demostración.* Trivial a partir de la definición de factor de calidad (ver 66 en la página 98) al aplicar  $\gamma > \omega_0$ . Q.E.D.

#### 2.5.4. Amortiguamiento crítico

**Definición 72.** Decimos que una oscilación lineal libre de una magnitud física  $x$  está sometida a un **amortiguamiento crítico** si satisface la ecuación diferencial de un oscilador lineal libre amortiguado y además la constante de amortiguamiento coincide con la frecuencia natural  $\gamma = \omega_0$ .

**Proposición 45.** La solución de un oscilador lineal libre sometido a amortiguamiento crítico ( $\gamma = \omega_0$ ) puede expresarse como:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t} = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

*Demostración.* Partiendo de la proposición 37 en la página 98, sabemos que las raíces del polinomio característico de la ecuación diferencial son:

$$s = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Si es  $\gamma = \omega_0$ , entonces el término de la raíz se anula y obtenemos una solución doble:

$$s = -\gamma$$

Usando la proposición 20 en la página 73, obtenemos que la solución general de nuestra ecuación diferencial es:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t} = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

Q.E.D.

**Corolario 18.** Una oscilación lineal libre sometida a amortiguamiento crítico es asintóticamente estable.

*Demostración.* Simplemente, vemos si se cumple la definición 50 en la página 74:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (A + Bt) e^{-\gamma t} = 0$$

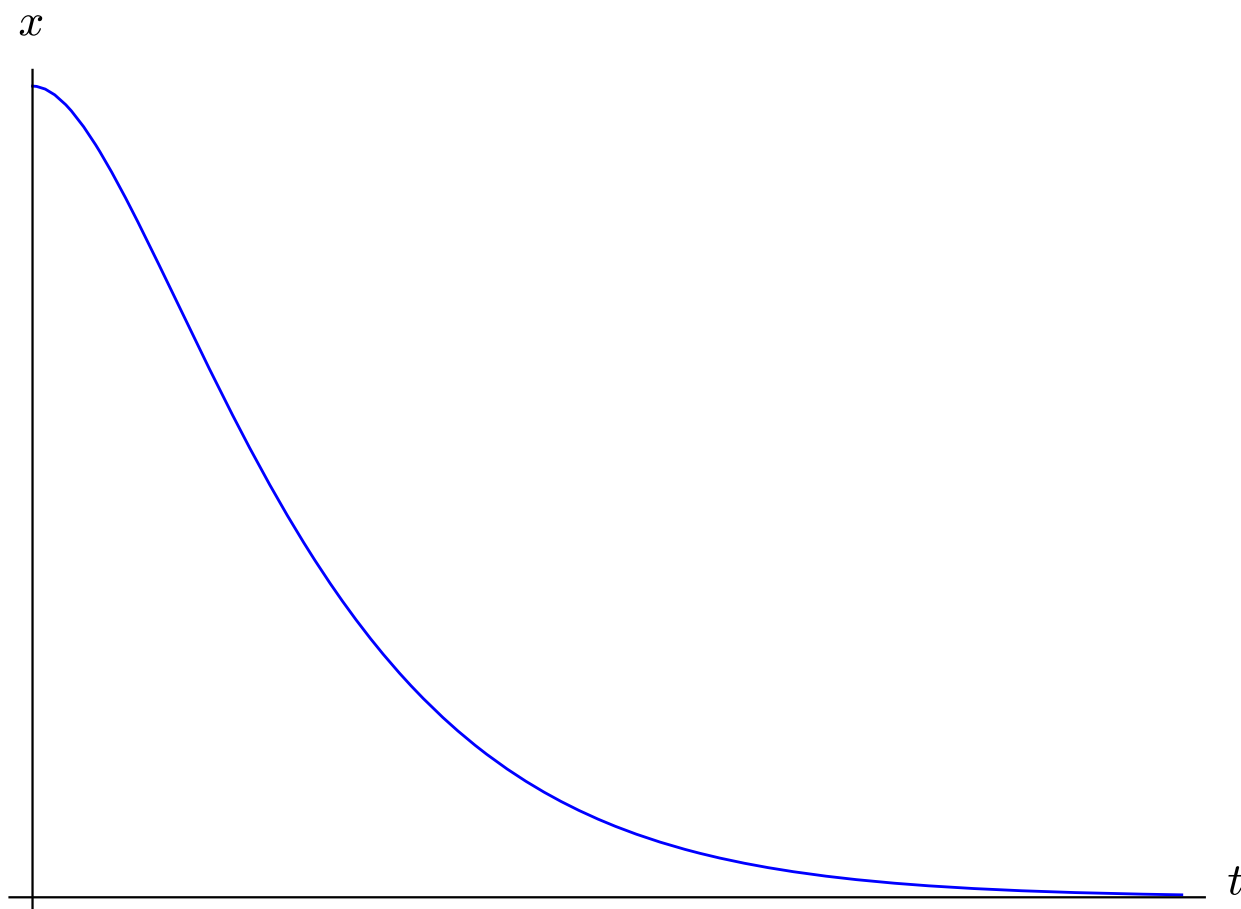
y la expresión anterior tiende a cero porque, por orden de infinitésimos, las exponenciales «dominan» sobre los polinomios.

Por tanto, se cumple la definición y cualquier oscilación lineal sometida a amortiguamiento crítico es asintóticamente estable. *Q.E.D.*

**Definición 73.** Llamamos **tiempo de relajación**, **vida media** o **parámetro de extinción** de un oscilador lineal críticamente amortiguado a:

$$\tau := \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\omega_0}$$

*Observación 43.* El aspecto gráfico de una oscilación lineal sometida a amortiguamiento crítico es el siguiente:



### 2.5.5. Estudio de las condiciones iniciales

**Proposición 46.** La solución de un oscilador lineal libre subamortiguado en función de las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$  y  $\dot{x}(0) = v_0$  es:

1.

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left( \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t \right)$$

2.

$$x(t) = x_0 \sqrt{1 + \left( \frac{v_0}{x_0 \omega} + \frac{\gamma}{\omega} \right)^2} e^{-\gamma t} \cos \left( \omega t - \arctan \left( \frac{v_0}{x_0 \omega} + \frac{\gamma}{\omega} \right) \right)$$

donde  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ .

*Demostración.* Partimos de la primera forma de la proposición 38 en la página 98:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (C \sen \omega t + D \cos \omega t)$$

$$\dot{x}(t) = e^{-\gamma t} \omega (C \cos \omega t - D \sen \omega t) - \gamma e^{-\gamma t} (C \sen \omega t + D \cos \omega t)$$

$$x_0 = x(0) = D$$

$$v_0 = \dot{x}(0) = \omega C - \gamma D \Leftrightarrow \omega C = v_0 + \gamma D \Leftrightarrow C = \frac{v_0 + \gamma D}{\omega} = \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega}$$

De manera que tenemos:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left( \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \sen \omega t + x_0 \cos \omega t \right)$$

Con esto, hemos probado (1). Vamos con (2); de nuevo, partimos de la segunda forma de la proposición 38 en la página 98:

$$x(t) = a e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -a \omega e^{-\gamma t} \sen(\omega t + \varphi) - a \gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x_0 = x(0) = a \cos \varphi$$

$$v_0 = \dot{x}(0) = -a \omega \sen \varphi - a \gamma \cos \varphi$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{v_0}{x_0} &= -\omega \tan \varphi - \gamma \Leftrightarrow \tan \varphi = -\frac{\frac{v_0}{x_0} + \gamma}{\omega} = -\frac{v_0}{x_0 \omega} - \frac{\gamma}{\omega} \Leftrightarrow \varphi = \arctan \left( -\frac{v_0}{x_0 \omega} - \frac{\gamma}{\omega} \right) = \\ &= -\arctan \left( \frac{v_0}{x_0 \omega} + \frac{\gamma}{\omega} \right) \end{aligned}$$

Ahora, de la primera ecuación sacamos:

$$x_0 = a \cos \varphi \Leftrightarrow a = \frac{x_0}{\cos \varphi} = \frac{x_0}{\cos \arctan \left( -\frac{v_0}{x_0 \omega} - \frac{\gamma}{\omega} \right)} = \frac{x_0}{\frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{v_0}{x_0 \omega} + \frac{\gamma}{\omega} \right)^2}}} = x_0 \sqrt{1 + \left( \frac{v_0}{x_0 \omega} + \frac{\gamma}{\omega} \right)^2}$$

donde hemos aplicado que  $\cos \arctan x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  <sup>4</sup>.

*Q.E.D.*

**Proposición 47.** *La solución de un oscilador lineal libre sobreamortiguado en función de las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$  y  $\dot{x}(0) = v_0$  es:*

1.

$$x(t) = \left[ \left( 1 + \frac{\gamma_-}{2\omega} \right) x_0 + \frac{v_0}{2\omega} \right] e^{-\gamma_- t} - \frac{v_0 + \gamma_- x_0}{2\omega} e^{-\gamma_+ t}$$

2.

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left( \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \sinh \omega t + x_0 \cos \omega t \right)$$

---

<sup>4</sup>Este dato puede encontrarse en la página [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Inverse\\_trigonometric\\_functions&oldid=876493420#Relationships\\_between\\_trigonometric\\_functions\\_and\\_inverse\\_trigonometric\\_functions](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Inverse_trigonometric_functions&oldid=876493420#Relationships_between_trigonometric_functions_and_inverse_trigonometric_functions).

3.

$$x(t) = x_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{x_0 \omega} + \frac{\gamma}{\omega}\right)^2} e^{-\gamma t} \cosh\left(\omega t + \operatorname{arctanh}\left(\frac{v_0}{x_0 \omega} + \frac{\gamma}{\omega}\right)\right)$$

válida si  $|v_0 + \gamma x_0| < \omega |x_0|$ .

4.

$$x(t) = \frac{v_0 + x_0 \gamma}{\omega} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\frac{v_0}{x_0} + \gamma}\right)^2} e^{-\gamma t} \cosh\left(\omega t + \operatorname{arctanh}\left(\frac{\omega}{\frac{v_0}{x_0} + \gamma}\right)\right)$$

válida si  $|v_0 + \gamma x_0| > \omega |x_0|$ .

donde  $\omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ ,  $\gamma_- = \gamma - \omega$  y  $\gamma_+ = \gamma + \omega$ .

*Demostración.* Partimos de la forma (1) de la proposición 43 en la página 104:

$$x(t) = A e^{-\gamma_- t} + B e^{-\gamma_+ t}$$

$$\dot{x}(t) = -\gamma_- A e^{-\gamma_- t} - \gamma_+ B e^{-\gamma_+ t}$$

$$x_0 = x(0) = A + B \Leftrightarrow A = x_0 - B$$

$$v_0 = \dot{x}(0) = -\gamma_- A - \gamma_+ B$$

Sustituyendo lo hallado en la primera en la segunda ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} v_0 &= -\gamma_- (x_0 - B) - \gamma_+ B = -\gamma_- x_0 + B \gamma_- - B \gamma_+ = -\gamma_- x_0 + B (\gamma - \omega - \gamma - \omega) = \\ &= -\gamma_- x_0 - 2B\omega \Leftrightarrow B = -\frac{v_0 + \gamma_- x_0}{2\omega} \end{aligned}$$

Y así:

$$A = x_0 - B = \left(1 + \frac{\gamma_-}{2\omega}\right) x_0 + \frac{v_0}{2\omega}$$

Por tanto:

$$x(t) = \left[\left(1 + \frac{\gamma_-}{2\omega}\right) x_0 + \frac{v_0}{2\omega}\right] e^{-\gamma_- t} - \frac{v_0 + \gamma_- x_0}{2\omega} e^{-\gamma_+ t}$$

Así, hemos probado (1). Vamos con (2); partimos de la forma (2) de la proposición 43 en la página 104:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (C \sinh \omega t + D \cosh \omega t)$$

$$\dot{x}(t) = e^{-\gamma t} \omega (C \cosh \omega t + D \sinh \omega t) - \gamma e^{-\gamma t} (C \sinh \omega t + D \cosh \omega t)$$

$$x_0 = x(0) = D$$

$$v_0 = \dot{x}(0) = \omega C - \gamma D \Leftrightarrow \omega C = v_0 + \gamma D \Leftrightarrow C = \frac{v_0 + \gamma D}{\omega} = \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega}$$

Así:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left( \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \sinh \omega t + x_0 \cosh \omega t \right)$$

De esta forma, hemos probado (2). Vamos con (3); para ello, partimos de la forma (3) de la proposición 43 en la página 104:



$$x(t) = ae^{-\gamma t} \cosh(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = ae^{-\gamma t} \omega \sinh(\omega t + \varphi) - a\gamma e^{-\gamma t} \cosh(\omega t + \varphi)$$

$$x_0 = x(0) = a \cosh \varphi$$

$$v_0 = \dot{x}(0) = a\omega \sinh \varphi - a\gamma \cosh \varphi$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, obtenemos:

$$\frac{v_0}{x_0} = \omega \tanh \varphi - \gamma \Leftrightarrow \omega \tanh \varphi = \frac{v_0}{x_0} + \gamma \Leftrightarrow \tanh \varphi = \frac{v_0}{x_0\omega} + \frac{\gamma}{\omega} \Leftrightarrow \varphi = \operatorname{arctanh} \left( \frac{v_0}{x_0\omega} + \frac{\gamma}{\omega} \right)$$

Por otra parte, de la primera ecuación, obtenemos:

$$x_0 = a \cosh \varphi \Leftrightarrow a = \frac{x_0}{\cosh \varphi} = \frac{x_0}{\cosh \operatorname{arctanh} \left( \frac{v_0}{x_0\omega} + \frac{\gamma}{\omega} \right)} = \frac{x_0}{\frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{v_0}{x_0\omega} + \frac{\gamma}{\omega} \right)^2}}} = x_0 \sqrt{1 - \left( \frac{v_0}{x_0\omega} + \frac{\gamma}{\omega} \right)^2}$$

donde hemos usado  $\cosh \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ <sup>5</sup>.

En consecuencia:

$$x(t) = x_0 \sqrt{1 - \left( \frac{v_0}{x_0\omega} + \frac{\gamma}{\omega} \right)^2} e^{-\gamma t} \cosh \left( \omega t + \operatorname{arctanh} \left( \frac{v_0}{x_0\omega} + \frac{\gamma}{\omega} \right) \right)$$

De esta forma, hemos probado (3). Vamos con (4); para ello, partimos de la forma (4) de la proposición 43 en la página 104:

$$x(t) = ae^{-\gamma t} \sinh(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = ae^{-\gamma t} \omega \cosh(\omega t + \varphi) - a\gamma e^{-\gamma t} \sinh(\omega t + \varphi)$$

$$x_0 = x(0) = a \sinh \varphi$$

$$v_0 = \dot{x}(0) = a\omega \cosh \varphi - a\gamma \sinh \varphi$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, obtenemos:

$$\frac{v_0}{x_0} = \frac{\omega}{\tanh \varphi} - \gamma \Leftrightarrow \frac{\omega}{\tanh \varphi} = \frac{v_0}{x_0} + \gamma \Leftrightarrow \tanh \varphi = \frac{\omega}{\frac{v_0}{x_0} + \gamma} \Leftrightarrow \varphi = \operatorname{arctanh} \left( \frac{\omega}{\frac{v_0}{x_0} + \gamma} \right)$$

Por otra parte, de la primera ecuación, obtenemos:

$$x_0 = a \sinh \varphi \Leftrightarrow a = \frac{x_0}{\sinh \varphi} = \frac{x_0}{\sinh \operatorname{arctanh} \left( \frac{\omega}{\frac{v_0}{x_0} + \gamma} \right)} = \frac{x_0}{\frac{\frac{\omega}{\frac{v_0}{x_0} + \gamma}}{\sqrt{1 - \left( \frac{\omega}{\frac{v_0}{x_0} + \gamma} \right)^2}}} = \frac{x_0 \sqrt{1 - \left( \frac{\omega}{\frac{v_0}{x_0} + \gamma} \right)^2}}{\frac{\omega}{\frac{v_0}{x_0} + \gamma}} =$$

<sup>5</sup>Esto puede verse en la página [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Inverse\\_hyperbolic\\_functions&oldid=864677722#Composition\\_of\\_hyperbolic\\_and\\_inverse\\_hyperbolic\\_functions](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Inverse_hyperbolic_functions&oldid=864677722#Composition_of_hyperbolic_and_inverse_hyperbolic_functions).

$$= \frac{v_0 + x_0 \gamma}{\omega} \sqrt{1 - \left( \frac{\omega}{\frac{v_0}{x_0} + \gamma} \right)^2}$$

donde hemos usado  $\sinh \operatorname{arctanh} x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ <sup>6</sup>.

En consecuencia:

$$x(t) = \frac{v_0 + x_0 \gamma}{\omega} \sqrt{1 - \left( \frac{\omega}{\frac{v_0}{x_0} + \gamma} \right)^2} e^{-\gamma t} \cosh \left( \omega t + \operatorname{arctanh} \left( \frac{\omega}{\frac{v_0}{x_0} + \gamma} \right) \right)$$

*Q.E.D.*

**Proposición 48.** *La solución de un oscilador lineal libre sometido a amortiguamiento crítico en función de las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$  y  $\dot{x}(0) = v_0$  es:*

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t] e^{-\omega_0 t}$$

*Demostración.* Partimos de la proposición 45 en la página 108:

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\gamma t}$$

$$\dot{x}(t) = B e^{-\gamma t} - \gamma e^{-\gamma t} (A + Bt)$$

$$x_0 = x(0) = A$$

$$v_0 = \dot{x}(0) = B - \gamma A \Leftrightarrow B = v_0 + \gamma A = v_0 + \gamma x_0$$

Así:

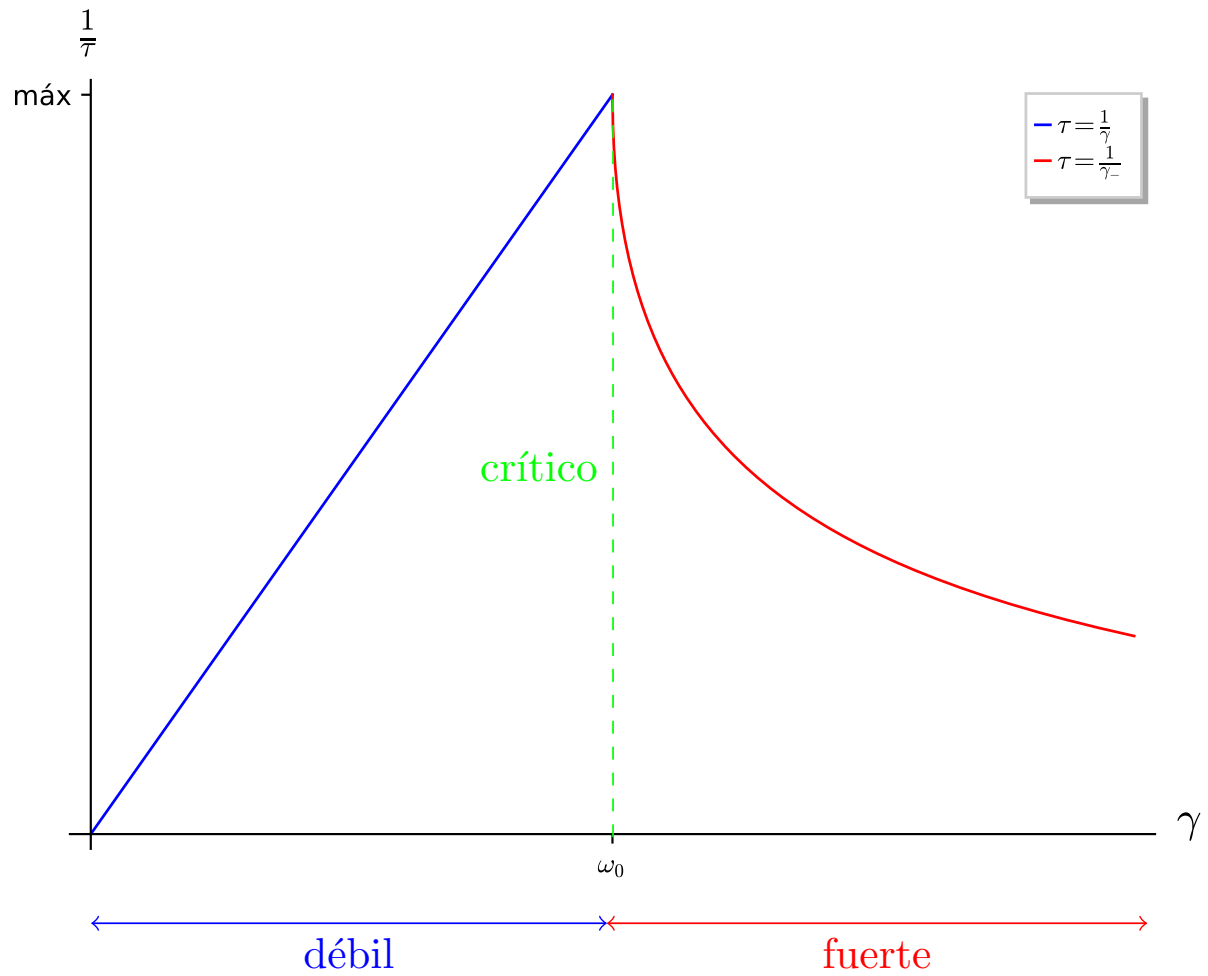
$$x(t) = [x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t] e^{-\gamma t} = [x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t] e^{-\omega_0 t}$$

*Q.E.D.*

### 2.5.6. Comparación entre todo los tipos de amortiguamiento

Vamos a estudiar cuál de todos los amortiguamientos se «extingue» antes. Lo primero es para que el amortiguamiento sea más rápido hace falta que el tiempo de relajación sea lo más pequeño posible. En otras palabras, su inversa  $\frac{1}{\tau}$  debe ser lo mayor posible. En la siguiente figura, representamos  $\frac{1}{\tau}$  en función de  $\gamma$  (la constante de amortiguamiento).

<sup>6</sup>Esto puede verse en la página [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Inverse\\_hyperbolic\\_functions&oldid=864677722#Composition\\_of\\_hyperbolic\\_and\\_inverse\\_hyperbolic\\_functions](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Inverse_hyperbolic_functions&oldid=864677722#Composition_of_hyperbolic_and_inverse_hyperbolic_functions).



Para ello hemos tenido en cuenta lo siguiente:

$$\frac{1}{\tau} = \begin{cases} \frac{1}{\tau} = \gamma & \text{si } \gamma \leq \omega_0 \\ \frac{1}{\tau} = \gamma_- = \gamma - \omega = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} & \text{si } \gamma > \omega_0 \end{cases}$$

Como podemos ver, claramente la «extinción» más rápida se produce en el amortiguamiento crítico.

## 2.6. Resumen (oscilaciones libres amortiguadas y no amortiguadas)

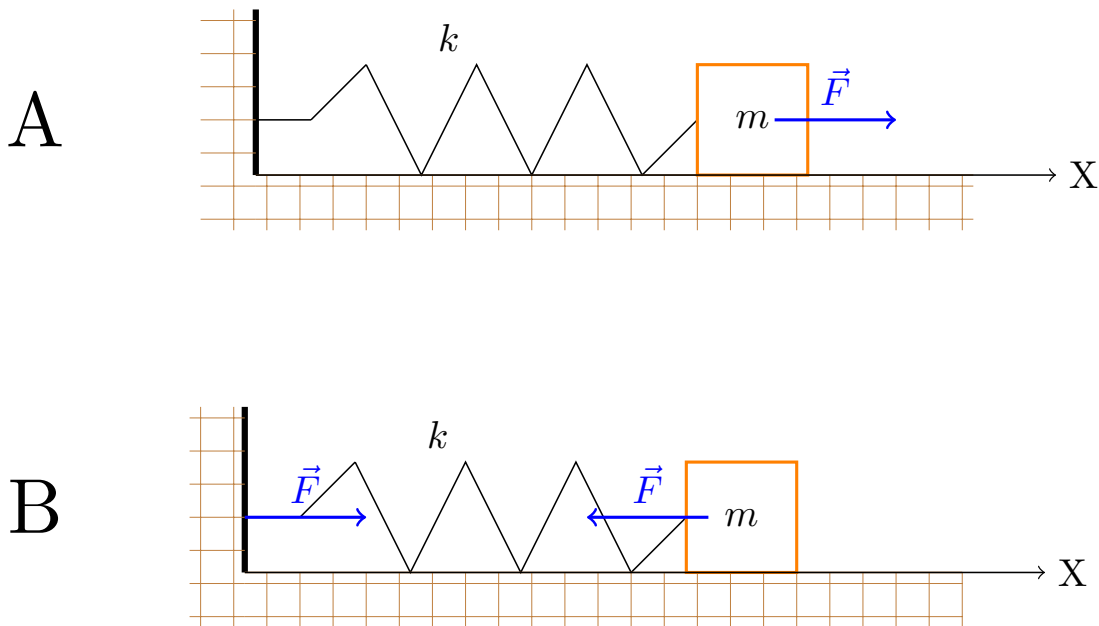
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Tipo	$x(t)$	$\omega$	$Q$	$\tau$
sin amortiguamiento	$Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$ $A \cos \omega t + B \sin \omega t$ $A \cos(\omega t + \varphi)$ $\text{Re}(Ae^{i\omega t})$	$\omega_0$	$\infty$	$0$
amortiguamiento débil $\gamma < \omega_0$	$e^{-\gamma t} (C \sin \omega t + D \cos \omega t)$ $ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$	$\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$	$> \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\gamma}$
amortiguamiento crítico $\gamma = \omega_0$	$x = x_0 (1 + \gamma t) e^{-\gamma t}$	$0$	$= \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\omega_0}$
amortiguamiento fuerte $\gamma > \omega_0$	$Ae^{-\gamma_- t} + Be^{-\gamma_+ t}$ $e^{-\gamma t} (C \sinh \omega t + D \cosh \omega t)$ $ae^{-\gamma t} \cosh(\omega t + \varphi)$ * $ae^{-\gamma t} \sinh(\omega t + \varphi)$ **	$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$	$< \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\gamma_-}$

donde  $\gamma_- = \gamma - \omega$ ,  $\gamma_+ = \gamma + \omega$ ,  $\gamma$  es la constante de amortiguamiento,  $\omega$  es la frecuencia natural,  $Q$  es el factor de calidad y  $\tau$  es el tiempo de relajación. \* Sólo es válido si  $|\dot{x}(0) + \gamma x(0)| \leq \omega |x(0)|$ . \*\* Sólo es válido si  $|\dot{x}(0) + \gamma x(0)| \geq \omega |x(0)|$ .

## 2.7. Oscilaciones forzadas

**Ejemplo 19** (Ejemplo introductorio). Imaginemos que tenemos una masa unida a un muelle y que ejercemos una fuerza sobre esa masa además de la fuerza que le ejerce el muelle. En este caso, la oscilación de la masa es forzada.



**Definición 74.** Una oscilación de una magnitud física  $x$  es **lineal amortiguada forzada** si satisface la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

donde  $f(t) \neq 0$ ,  $\gamma$  es la constante de amortiguamiento y  $\omega_0$  es la frecuencia natural del sistema.

*Observación 44.* En general, supondremos que la magnitud física que oscila es la posición de una partícula de masa  $m$ . En ese caso, nos convendrá reescribir la ecuación diferencial de la definición anterior como:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

*Observación 45.* En el caso de oscilaciones forzadas nos va a ser imposible plantear una solución general de la ecuación diferencial, porque esta depende de la forma funcional de  $f(t)$ . A lo más que podemos llegar es a lo siguiente:

**Proposición 49.** *La solución general de una oscilación lineal amortiguada forzada puede expresarse como:*

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

donde  $x_h(t)$  es la solución general de la oscilación lineal libre amortiguada:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

y  $x_p(t)$  es una solución particular de la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

y tiene la forma:

$$x_p(t) = \int_{t_0}^t g(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

para un  $t_0 \in I$  cualquiera donde  $g(t-\tau)$  es la solución del oscilador libre lineal amortiguado asociado con condiciones iniciales  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 1$ .

*Demostración.* Consiste únicamente en aplicar la proposición 21 en la página 73.

*Q.E.D.*

El hecho de que todas las soluciones del oscilador lineal libre amortiguado sean asintóticamente estables (ver corolarios 13 en la página 99, 17 en la página 107 y 18 en la página 108) motiva la siguiente definición:

**Definición 75.** Llamaremos **respuesta natural o transitoria** a la componente  $x_h(t)$  de la proposición 49 y denominaremos **respuesta estacionaria o permanente** a la componente  $x_p(t)$ .

**Proposición 50.** *La solución general de una oscilación lineal amortiguada (con  $\gamma > 0$ ) forzada que satisface la ecuación diferencial:*

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \cos(\omega_f t + \alpha) = f(t)$$

puede escribirse, cuando  $t$  es lo suficientemente grande, como:

$$x(t) = \frac{\frac{F}{m}}{\underbrace{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}}_{=a}} \cos \left( \omega_f t + \alpha + \underbrace{\arctan \left( \frac{-2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \right)}_{=\delta} \right)$$

donde llamaremos **amplitud**  $a$  y **diferencia de fase**  $\delta$  a los términos indicados arriba.

*Demostración.* Según la proposición 49, lo que tenemos que hacer primero es encontrar una solución particular de la ecuación diferencial del enunciado de la proposición. Para ello, primero convirtamos el coseno en exponenciales:

$$f(t) = \frac{F}{m} \cos(\omega_f t + \alpha) = \frac{F}{2m} (e^{i\omega_f t + i\alpha} + e^{-i\omega_f t - i\alpha})$$

donde hemos aplicado la definición de coseno dada en la proposición 23 en la página 74. Nótese que nuestra función  $f(t)$  en el cuerpo de los complejos cumple las condiciones necesarias para aplicar el método de los coeficientes indeterminados (ver proposición 22 en la página 73). Por tanto, en vez de tener que resolver una integral, podemos aplicar dicha proposición. Entonces una solución particular será de la forma:

$$x_p(t) = t^{m_1} A e^{i\omega_f t + i\alpha} + t^{m_2} B e^{-i\omega_f t - i\alpha}$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes cuyo valor determinaremos a continuación y  $m_1$  y  $m_2$  son las multiplicidades de  $i\omega_f t + i\alpha$  y  $-i\omega_f t - i\alpha$  en el polinomio característico, respectivamente. Según la proposición 37 en la página 98, las raíces del polinomio característico son:

$$s = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

y éstas en ningún caso pueden ser un número imaginario puro pues es  $\gamma \neq 0$ . Así,  $m_1 = 0 = m_2$ . Y obtenemos que nuestra solución particular es de la forma:

$$x_p(t) = Ae^{i\omega_f t + i\alpha} + Be^{-i\omega_f t - i\alpha}$$

Para obtener los valores de  $A$  y  $B$ , «forzamos» que  $x_p(t)$  cumpla la ecuación diferencial del enunciado:

$$\dot{x}_p(t) = i\omega_f Ae^{i\omega_f t + i\alpha} - i\omega_f Be^{-i\omega_f t - i\alpha}$$

$$\ddot{x}_p(t) = -\omega_f^2 Ae^{i\omega_f t + i\alpha} - \omega_f^2 Be^{-i\omega_f t - i\alpha}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p(t) + 2\gamma\dot{x}_p(t) + \omega_0^2 x_p(t) &= \\ &= -\omega_f^2 Ae^{i\omega_f t + i\alpha} - \omega_f^2 Be^{-i\omega_f t - i\alpha} + 2\gamma i\omega_f Ae^{i\omega_f t + i\alpha} - 2\gamma i\omega_f Be^{-i\omega_f t - i\alpha} + \omega_0^2 Ae^{i\omega_f t + i\alpha} + \omega_0^2 Be^{-i\omega_f t - i\alpha} = \\ &= (-\omega_f^2 + 2\gamma\omega_f i + \omega_0^2) Ae^{i\omega_f t + i\alpha} + (-\omega_f^2 - 2\gamma\omega_f i + \omega_0^2) Be^{-i\omega_f t - i\alpha} \end{aligned}$$

Bien, ahora la expresión anterior tiene que ser igual a  $f(t)$ . Luego, necesariamente:

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega_f^2 + 2\gamma\omega_f i) A = \frac{F}{2m} \\ (\omega_0^2 - \omega_f^2 - 2\gamma\omega_f i) B = \frac{F}{2m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{F}{2m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_f^2 + 2\gamma\omega_f i} \\ B = \frac{F}{2m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_f^2 - 2\gamma\omega_f i} \end{cases}$$

Por consiguiente, nuestra solución particular queda:

$$x_p(t) = \underbrace{\frac{F}{2m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_f^2 + 2\gamma\omega_f i}}_{=A} e^{i\omega_f t + i\alpha} + \underbrace{\frac{F}{2m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_f^2 - 2\gamma\omega_f i}}_{=B} e^{-i\omega_f t - i\alpha}$$

Como vemos,  $A = \bar{B}$  como ya sabíamos, puesto que  $x_p(t)$  es real y las exponenciales son linealmente independientes. Bien, ahora nos interesa transformar la solución al cuerpo de los reales. Para facilitarnos las cuentas llamaremos  $a := \operatorname{Re} A$ ,  $b := \operatorname{Im} A$  y  $u := \omega_f t + \alpha$ . Así, la solución anterior queda:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= (a + bi) e^{iut} + (a - bi) e^{-iut} = a \underbrace{(e^{iut} + e^{-iut})}_{=2 \cos ut} + bi \underbrace{(e^{iut} - e^{-iut})}_{=2i \sin ut} = \\ &= 2a \cos ut - 2b \sin ut \end{aligned}$$

Y esto tiene la forma de una oscilación armónica. Luego, por la proposición 29 en la página 78, sabemos que existen  $E, \varphi$  tales que:

$$2a \cos ut - 2b \sin ut = E \cos (ut + \varphi)$$

En la demostración de dicha proposición, obtuvimos que:

$$\begin{aligned} E &= 2a \sqrt{1 + \frac{4b^2}{4a^2}} = 2a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2a \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = 2 \frac{a}{a} \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \sqrt{A\bar{A}} = \\ &= \sqrt{4A\bar{A}} = \sqrt{\frac{F^2}{m^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}} = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}} \\ \varphi &= \arctan \frac{2b}{2a} = \arctan \frac{b}{a} = \arg A = \arg \left( \frac{F}{2m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_f^2 + 2\gamma\omega_f i} \frac{\omega_0^2 - \omega_f^2 - 2\gamma\omega_f i}{\omega_0^2 - \omega_f^2 - 2\gamma\omega_f i} \right) = \end{aligned}$$

$$= \arg \left( \frac{F}{2m} \frac{\omega_0^2 - \omega_f^2 - 2\gamma\omega_f i}{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2} \right) = \arctan \left( \frac{-2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \right)$$

De esta forma, recordando que  $u = \omega_f t + \alpha$ , nuestra solución particular (la respuesta estacionaria) queda:

$$x_p(t) = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \cos \left( \omega_f t + \alpha + \arctan \left( \frac{-2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \right) \right)$$

Bien, ahora según la proposición 49 en la página 116 deberíamos encontrar una solución general de la ecuación diferencial homogénea (la respuesta natural):

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

que son justo los tres tipos de oscilaciones amortiguadas libres que vimos en el apartado anterior. No obstante, según los corolarios 13 en la página 99, 17 en la página 107 y 18 en la página 108, los tres tipos de oscilaciones son asintóticamente estables. En consecuencia, para un tiempo suficientemente grande, la respuesta natural se hace cero y la solución es únicamente la respuesta estacionaria.

$$x(t) = x_p(t)$$

*Q.E.D.*

## 2.8. Resonancia

*Observación 46.* A lo largo de toda esta sección supondremos que estamos viendo el sistema cuando el tiempo transcurrido es lo suficientemente grande como para que la respuesta natural (la solución de la ecuación diferencial homogénea) se anule.

**Definición 76.** Sea un oscilador lineal amortiguado forzado con una fuerza del estilo  $F(t) = F \cos(\omega_f t + \alpha)$ . Diremos que el sistema está en **resonancia en amplitud** cuando la amplitud  $a$  correspondiente a la solución dada por la proposición 50 en la página 116 es máxima.

**Definición 77.** Sea un oscilador lineal amortiguado forzado con una fuerza del estilo  $F(t) = F \cos(\omega_f t + \alpha)$ . Diremos que un sistema está en **resonancia en energía** cuando la velocidad  $v := a\omega_f$  correspondiente a la solución dada por la proposición 50 en la página 116 es máxima.

### 2.8.1. Resonancia fijando la frecuencia de la fuerza externa $\omega_f$ y variando la frecuencia natural del sistema $\omega_0$

**Proposición 51.** Sea un oscilador lineal amortiguado forzado con una fuerza del estilo  $F(t) = F \cos(\omega_f t + \alpha)$  con  $\omega_f$  fijo. La resonancia en amplitud y en energía para  $\omega_0 \in (0, \infty)$  se da cuando  $\omega_0 = \omega_f =: \omega_{0,r}$ . Además, la amplitud y velocidad máxima del sistema son:

$$a_{\max} = \frac{F}{2m\gamma\omega_f} \quad v_{\max} = \frac{F}{2m\gamma}$$

*Demostración.* Recordemos la solución dada por la proposición 50 en la página 116:

$$x(t) = \frac{\frac{F}{m}}{\underbrace{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}_{=a}} \cos \left( \omega_f t + \alpha + \underbrace{\arctan \left( \frac{-2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \right)}_{=\delta} \right)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{\frac{F}{m}\omega_f}{\underbrace{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}_{=v}} \sin \left( \omega_f t + \alpha + \underbrace{\arctan \left( \frac{-2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \right)}_{=\delta} \right)$$

Nuestro objetivo es hallar el valor de  $\omega_0$  que maximiza el valor de  $a$  y  $v$ . Nótese que la fase  $\delta$  no importa absolutamente nada para este cálculo. Por otra parte como  $v = a\omega_f$  y  $\omega_f$  está fijo, aquel valor que maximice  $a$  maximizará también  $v$ . Por tanto, queremos maximizar la función:

$$a(\omega_0) = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}$$

Claramente, el valor máximo tiene lugar cuando el denominador es mínimo. Variando  $\omega_0$  el denominador es mínimo cuando  $\omega_0 = \omega_f =: \omega_{0,r}$ . En ese caso:

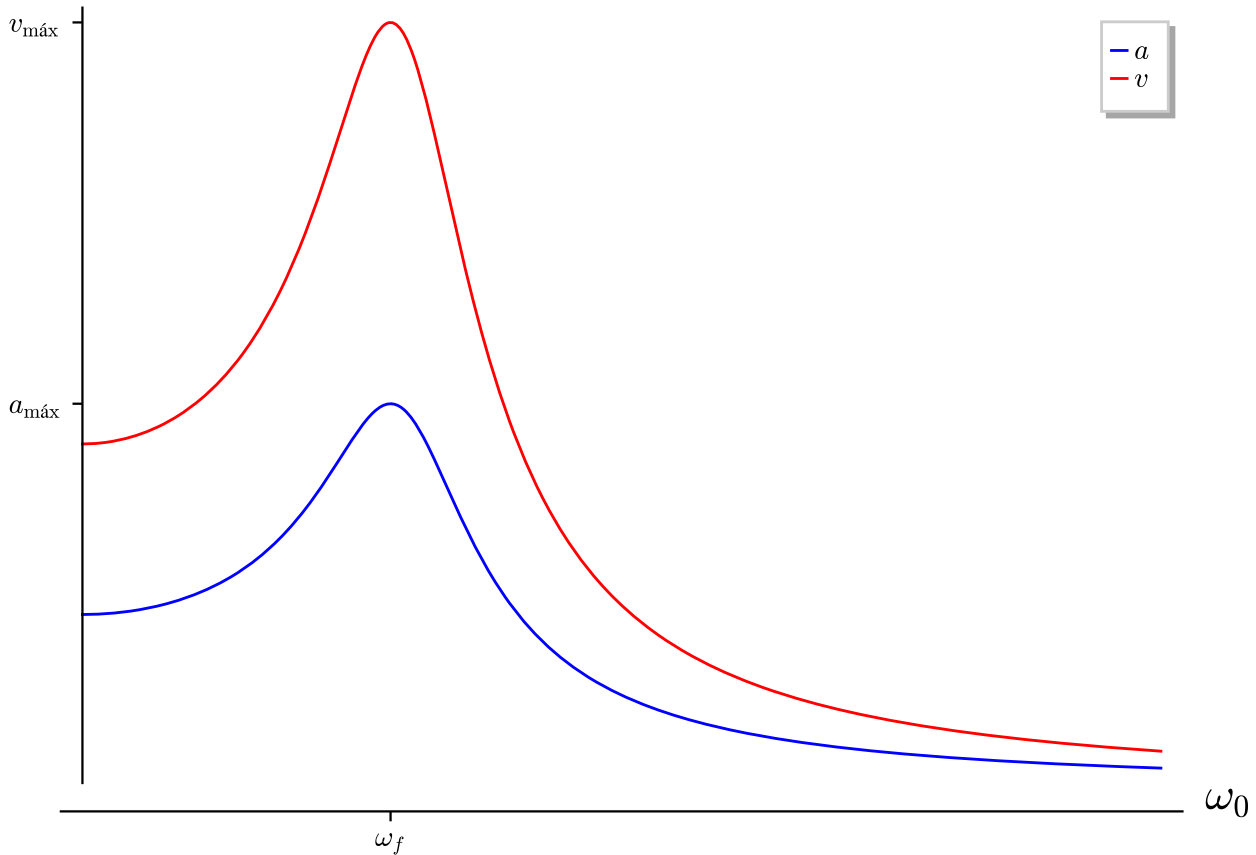
$$a_{\text{máx}} = a(\omega_{0,r}) = a(\omega_0 = \omega_f) = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{4\gamma^2\omega_f^2}} = \frac{F}{2m\gamma\omega_f}$$

Y, como  $v = a\omega_f$ :

$$v_{\text{máx}} = \frac{F}{2m\gamma}$$

*Q.E.D.*

*Observación 47.* Para un  $\omega_f$  fijo, la dependencia de la amplitud con respecto a la frecuencia natural  $\omega_0$  tiene la siguiente forma:





### 2.8.2. Resonancia fijando la frecuencia natural del sistema $\omega_0$ y variando la frecuencia de la fuerza externa $\omega_f$

#### 2.8.2.1. Resonancia en amplitud

**Proposición 52.** Sea un oscilador lineal amortiguado forzado con una fuerza del estilo  $F(t) = F \cos(\omega_f t + \alpha)$  con  $\omega_f$  variable. Si mantenemos fija la frecuencia natural del sistema  $\omega_0$ , la resonancia en amplitud para  $\omega_f \in [0, \infty)$  se da:

1. en  $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} =: \omega_{f,r}$  si  $\omega_0^2 > 2\gamma^2$  y vale:

$$a_{m\acute{a}x} = \frac{F}{2m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

2. en  $\omega_f = 0$  si  $\omega_0^2 < 2\gamma^2$  y vale:

$$a_{m\acute{a}x} = \frac{F}{m\omega_0}$$

En este caso la fuerza aplicada será constante y no se producirá oscilación.

Nótese que la solución (1) sólo existe si  $\omega_0^2 > 2\gamma^2$ . Es decir, únicamente puede existir en **amortiguamientos subcríticos** ( $\gamma < \omega_0$ ) y, aun así, **no existirá en todos** los de este tipo.

*Demostración.* Recordemos la solución dada por la proposición 50 en la página 116:

$$x(t) = \frac{\frac{F}{m}}{\underbrace{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}_{=a}} \cos\left(\omega_f t + \alpha + \underbrace{\arctan\left(\frac{-2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right)}_{=\delta}\right)$$

Nótese que la fase  $\delta$  no importa absolutamente nada para este cálculo. Queremos maximizar la función:

$$a(\omega_f) = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}$$

La función anterior será máxima cuando el denominador sea mínimo. Por tanto, nuestro problema consiste en minimizar la función:

$$g(\omega_f) = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}$$

Para ello, hallamos su derivada:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\omega_f}(\omega_f) &= \frac{2(\omega_0^2 - \omega_f^2)(-2\omega_f) + 8\gamma^2\omega_f}{2\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} = \frac{-4\omega_f(\omega_0^2 - \omega_f^2 + 2\gamma^2\omega_f)}{2\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \\ \frac{dg}{d\omega_f}(\omega_f) &= 0 \Leftrightarrow \omega_f(-4\omega_0^2 + 4\omega_f^2 + 8\gamma^2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4\omega_0^2 + 4\omega_f^2 + 8\gamma^2 = 0 \Leftrightarrow \omega_f^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \\ \omega_f = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} =: \omega_{f,r} \\ \omega_f = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nótese que el punto crítico  $\omega_{f,r}$  sólo puede alcanzarse en el caso de un amortiguamiento subcrítico ( $\gamma < \omega_0$ ) y (aun así, no en todos los de este tipo). Supongamos que existe  $\omega_{f,r}$ , ahora nos faltaría comprobar que efectivamente es un mínimo. Como el cero es simple, nos basta con mirar el signo de la derivada en un punto, o bien entre 0 y  $\omega_{f,r}$  o bien en un punto mayor que  $\omega_{f,r}$ . En particular estudiemos el signo de la derivada cuando  $\omega_f \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{\omega_f \rightarrow \infty} \frac{dg}{d\omega_f}(\omega_f) = \lim_{\omega_f \rightarrow \infty} \frac{-4\omega_f (\omega_0^2 - \omega_f^2 + 2\gamma^2\omega_f)}{2\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} = \lim_{\omega_f \rightarrow \infty} \frac{4\omega_f^3}{2\sqrt{\omega_f^4}} = \lim_{\omega_f \rightarrow \infty} 2\frac{\omega_f^3}{\omega_f^2} = \lim_{\omega_f \rightarrow \infty} 2\omega_f = \infty$$

Así, necesariamente  $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$  es un punto de mínimo relativo y su valor es:

$$\begin{aligned} g(\omega_f = \omega_{f,r}) &= \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{f,r}^2 + 2\gamma^2)^2 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - 2\gamma^2)} = \sqrt{4\gamma^4 + 4\gamma^2\omega_0^2 - 8\gamma^4} = \\ &= \sqrt{4\gamma^2\omega_0^2 - 4\gamma^4} = \sqrt{4\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2)} = 2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \end{aligned}$$

Por consiguiente, el valor de la amplitud es máxima (relativamente) en  $\omega_f = \omega_{f,r} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$  y vale:

$$a_{\text{máx}} = a(\omega_{f,r}) = \frac{F}{2\gamma m \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

Nos quedaría comprobar que el máximo relativo encontrado es, a su vez, máximo absoluto, pero esto no es difícil ya que  $\lim_{\omega_f \rightarrow \infty} \frac{dg}{d\omega_f}(\omega_f) = \infty$  nos implica que  $\lim_{\omega_f \rightarrow \infty} g(\omega_f) = \infty$  y, en consecuencia,  $\lim_{\omega_f \rightarrow \infty} a(\omega_f) = 0 < a(\omega_{f,r})$ . Por otra parte, como  $\omega_{f,r}$  es un cero simple, y sabemos que  $\lim_{\omega_f \rightarrow \infty} \frac{dg}{d\omega_f}(\omega_f) = \infty > 0$ , debe ser  $\frac{da}{d\omega_f}(\omega_f) < 0 \forall \omega_f > \omega_{f,r}$  y  $\frac{da}{d\omega_f} > 0 \forall 0 < \omega_f < \omega_{f,r}$ . Por consiguiente, necesariamente  $a(\omega_{f,r}) > a(0)$  y, así,  $\omega_{f,r}$  es un punto de máximo absoluto de  $a$  para  $\omega_f \in (0, \infty)$ . Con esto hemos probado (1).

Supongamos, ahora, que no existe  $\omega_{f,r}$ . Entonces el único punto crítico que tenemos es justo un extremo del intervalo (el 0) y únicamente tenemos que evaluar la función en el infinito. Antes hemos visto que era  $\lim_{\omega_f \rightarrow \infty} g(\omega_f) = \infty > g(0)$  y, en consecuencia, 0 es un mínimo absoluto de  $g$  en  $[0, \infty)$ . Por ende, 0 es un punto de máximo absoluto de la amplitud en  $[0, \infty)$  y, así, hemos probado (2). Q.E.D.

**Definición 78.** Sea un oscilador lineal amortiguado forzado con una fuerza del estilo  $F(t) = F \cos(\omega_f t + \alpha)$  con  $\omega_f \neq 0$  variable en el que mantenemos fija la frecuencia natural del sistema  $\omega_0$ . Supongamos que se cumple  $\omega_0^2 > 2\gamma^2$ , entonces llamamos **anchura de resonancia** al intervalo cerrado entre los dos valores de  $\omega_f$  tales que  $a(\omega_f) = \frac{a_{\text{máx}}}{\sqrt{2}}$ .

**Proposición 53.** Sea un oscilador lineal amortiguado forzado con una fuerza del estilo  $F(t) = F \cos(\omega_f t + \alpha)$  con  $\omega_f \neq 0$  variable en el que mantenemos fija la frecuencia natural del sistema  $\omega_0$ . Supongamos que se cumple  $\omega_0^2 > 2\gamma^2$ . Entonces, la anchura de resonancia es el intervalo  $[\omega_a, \omega_b]$  donde:

$$\begin{aligned} \omega_a &= \sqrt{\omega_{f,r}^2 - 2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \\ \omega_b &= \sqrt{\omega_{f,r}^2 + 2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \end{aligned}$$

*Demostración.* Recordemos (ver proposición 50 en la página 116) que la amplitud en función de  $\omega_f$  venía dada por:

$$a(\omega_f) = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}$$

Por otra parte, por la proposición 52 en la página anterior, sabemos que la máxima amplitud

$$a_{\text{máx}} = \frac{F}{2\gamma m \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

Por tanto queremos resolver la ecuación:

$$\frac{F}{2\sqrt{2}\gamma m\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}$$

para  $\omega_f$ . Lo anterior es equivalente a:

$$\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2} = 2\gamma\sqrt{2}\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Elevamos al cuadrado a ambos lados:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2 &= 8\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega_f^2 + \omega_f^4 + 4\gamma^2\omega_f^2 - 8\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \omega_f^4 + (4\gamma^2 - 2\omega_0^2)\omega_f^2 + \omega_0^4 - 8\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2) &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación anterior es una bicuadrada, sus soluciones positivas ( $\omega_f > 0$ ) son:

$$\begin{aligned} \omega_f &= \sqrt{\frac{2\omega_0^2 - 4\gamma^2 \pm \sqrt{(2\omega_0^2 - 4\gamma^2)^2 - 4(\omega_0^4 - 8\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2))}}{2}} = \\ &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^4 - 16\omega_0^2\gamma^2 + 16\gamma^4 - 4\omega_0^4 + 32\gamma^2\omega_0^2 - 32\gamma^4}} = \\ &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-16\omega_0^2\gamma^2 + 16\gamma^4 + 32\gamma^2\omega_0^2 - 32\gamma^4}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{16\gamma^2\omega_0^2 - 16\gamma^4}} = \\ &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{16\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2)}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2 \pm \frac{1}{2}4\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \\ &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2 \pm 2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \end{aligned}$$

Por la proposición 52 en la página 120 es:  $\omega_{f,r} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \Leftrightarrow \omega_{f,r}^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$ , de forma que lo anterior es equivalente a:

$$\omega_f = \sqrt{\omega_{f,r}^2 \pm 2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

con lo que llegamos al enunciado.

*Q.E.D.*

**Corolario 19.** Sea un oscilador lineal amortiguado forzado con una fuerza del estilo  $F(t) = F \cos(\omega_f t + \alpha)$  con  $\omega_f \neq 0$  variable en el que mantenemos fija la frecuencia natural del sistema  $\omega_0$ . Sea, además,  $\gamma \ll \omega_0$  (por tanto se cumple  $\omega_0^2 > 2\gamma^2$ ). Entonces, la anchura de resonancia puede aproximarse por el intervalo  $[\omega_a, \omega_b]$  donde:

$$\omega_a \approx \omega_{f,r} - \gamma$$

$$\omega_b \approx \omega_{f,r} + \gamma$$

*Demostración.* Partimos de la proposición anterior:

$$\omega_a = \sqrt{\omega_{f,r}^2 - 2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

$$\omega_b = \sqrt{\omega_{f,r}^2 + 2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

Recordemos la expresión dada para  $\omega_{f,r}$  en la proposición 52 en la página 120:

$$\omega_{f,r} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2 + 2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

$$\omega_b = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2 - 2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

Como  $\gamma \ll \omega_0$ , será  $\omega_0^2 \gg \gamma^2$  y  $\omega_0^2 \gg 2\gamma^2$ . Por tanto, podemos aproximar las expresiones anteriores por:

$$\omega_a \approx \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma\omega_0} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\gamma}{\omega_0}}$$

$$\omega_b \approx \sqrt{\omega_0^2 + 2\gamma\omega_0} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2\gamma}{\omega_0}}$$

Como es  $\gamma \ll \omega_0$ ,  $\frac{\gamma}{\omega_0} \rightarrow 0$  y podemos hacer uso del lema 7 en la página 102 para obtener una aproximación a primer orden de las expresiones anteriores:

$$\omega_a \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma}{\omega_0}\right) = \omega_0 - \gamma$$

$$\omega_b \approx \omega_0 \left(1 + \frac{\gamma}{\omega_0}\right) = \omega_0 + \gamma$$

Por último, como es  $\gamma \ll \omega_0$  y era  $\omega_{f,r} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ , podemos aproximar  $\omega_0 \approx \omega_{f,r}$  de manera que obtenemos:

$$\omega_a \approx \omega_{f,r} - \gamma$$

$$\omega_b \approx \omega_{f,r} + \gamma$$

con lo que llegamos a las expresiones del enunciado.

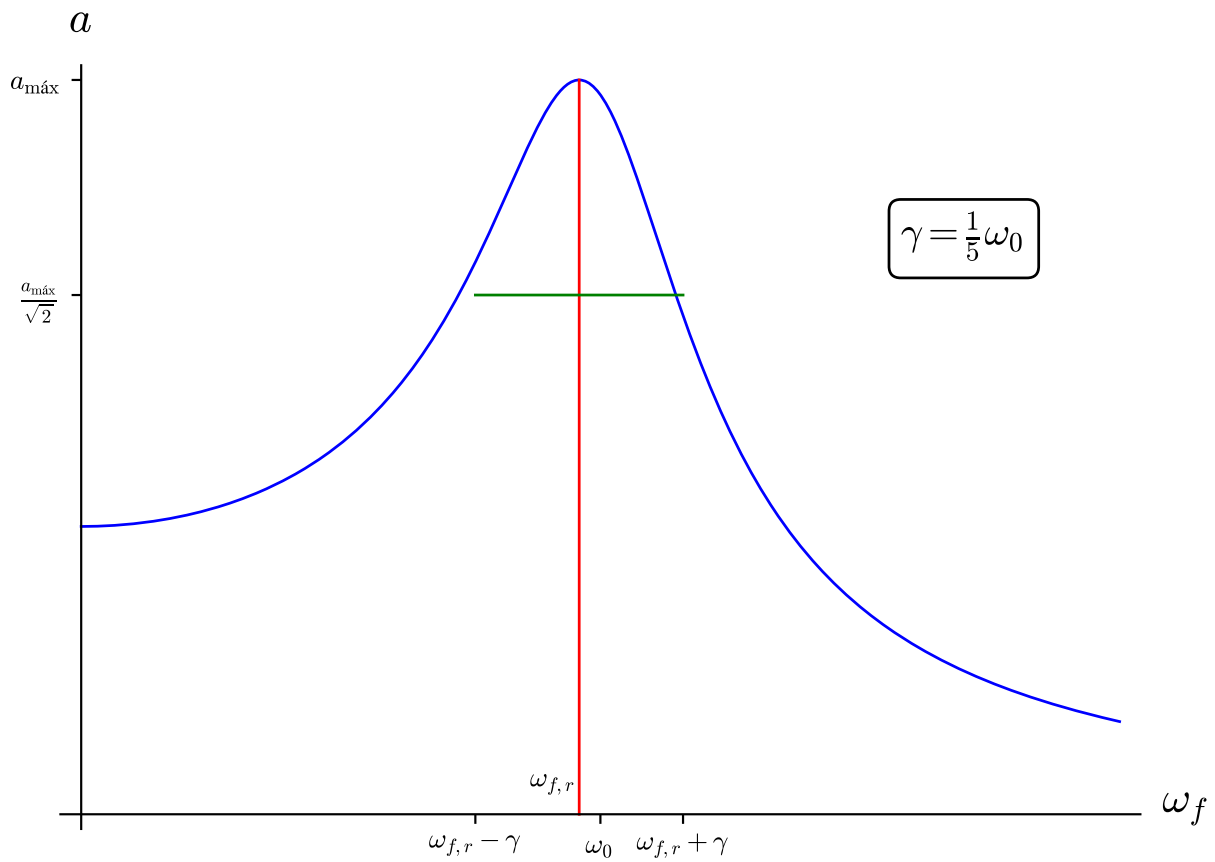
*Q.E.D.*

*Observación 48.* Recordemos que el factor de calidad venía definido como 66 en la página 98:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

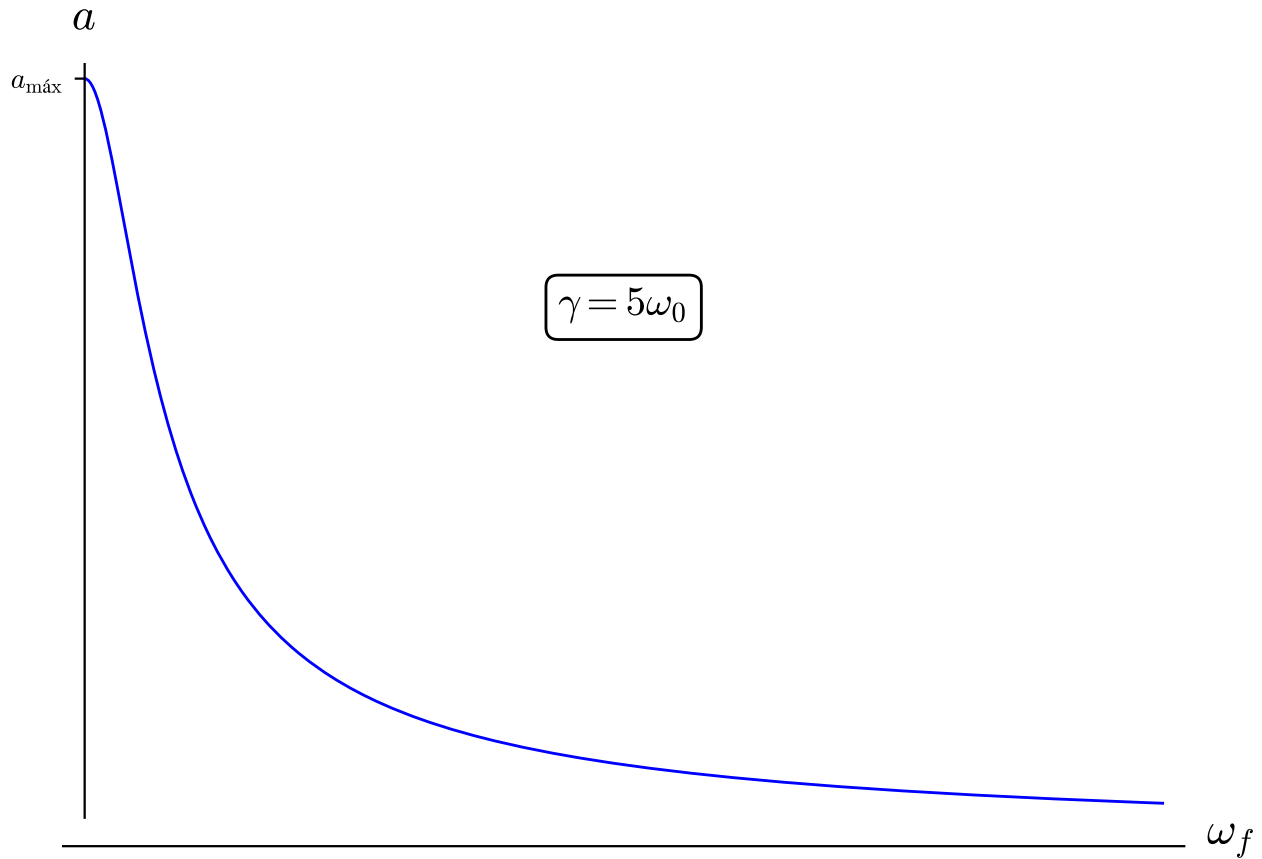
Lo que acabamos de ver le da algo de sentido al nombre de «factor de calidad». En muchas aplicaciones prácticas nos interesa tener una resonancia estrecha y aguda. Por el corolario anterior sabemos que la longitud de la anchura de resonancia es aproximadamente  $2\gamma$  cuando  $\gamma \ll \omega_0$ . De manera que cuanto más pequeña sea la anchura de resonancia, mayor será el factor de calidad.

*Observación 49.* Podemos ver todo lo mencionado en las proposiciones anteriores en la siguiente gráfica de la amplitud de una oscilación subamortiguada:



Podemos ver que la aproximación realizada para la anchura de la resonancia es, en realidad, bastante buena a pesar de que  $\gamma$  es sólo un quinto de  $\omega_0$ .

Sin embargo, en una oscilación sobreamortiguada, el máximo en la amplitud se encuentra cuando  $\omega_f = 0$ :



### 2.8.2.2. Resonancia en energía

**Proposición 54.** Sea un oscilador lineal amortiguado forzado con una fuerza del estilo  $F(t) = F \cos(\omega_f t + \alpha)$  con  $\omega_f \neq 0$  variable. Si mantenemos fija la frecuencia natural del sistema  $\omega_0$ , la resonancia en energía para  $\omega_f \in (0, \infty)$  se da cuando  $\omega_f = \omega_0$ . Además, la velocidad máxima del sistema es:

$$v_{\text{máx}} = \frac{F}{2m\gamma}$$

*Demostración.* Recordemos que, por la definición 77 en la página 118, la velocidad del sistema es:

$$v = \omega_f a$$

Usando la proposición 50 en la página 116, tenemos que la velocidad es:

$$v(\omega_f) = \frac{\frac{F}{m}\omega_f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}$$

Para estudiar los puntos críticos de la función anterior, vamos a proceder a derivar:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\omega_f}(\omega_f) &= \frac{F}{m} \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2} - \omega_f \frac{2(\omega_0^2 - \omega_f^2)(-2\omega_f) + 8\gamma^2\omega_f}{2\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}}{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2} = \\ &= \frac{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2 + 2\omega_f^2(\omega_0^2 - \omega_f^2) - 4\gamma^2\omega_f^2}{\left[(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega_f^2 + \omega_f^4 + 2\omega_0^2\omega_f^2 - 2\omega_f^4}{\left[ (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\omega_f^4 + \omega_0^4}{\left[ (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dv}{d\omega_f}(\omega_f) = 0 \Leftrightarrow -\omega_f^4 + \omega_0^4 = 0 \Leftrightarrow \omega_f^4 = \omega_0^4 \Leftrightarrow \omega_f = \omega_0$$

ya que  $\omega_0, \omega_f > 0$ . Para probar que es un máximo relativo aprovecharemos el hecho de que el cero es simple (aunque no lo parezca es simple, para que fuera cuádruple se tendría que poder factorizar como  $(\omega_f - \omega_0)^4$ ). Como el cero es simple, simplemente hallando el valor de la velocidad en el supuesto punto de máximo y el valor de la velocidad en otro punto (por ejemplo en cero), podremos comprobar que es máximo.

$$v(\omega_0) = \frac{F}{m} \frac{\omega_0}{\sqrt{4\gamma^2\omega_0^2}} = \frac{F}{m} \frac{\omega_0}{2\gamma\omega_0} = \frac{F}{2\gamma m}$$

Por otra parte:

$$v(0) = 0$$

Y claramente  $\frac{F}{2\gamma m} > 0$  pues  $F, \gamma, m, 2 > 0$ . Así  $\omega_f = \omega_0$  es máximo relativo. Para probar que, además, es máximo absoluto, únicamente tenemos que estudiar el límite de la velocidad cuando  $\omega_f \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{\omega_f \rightarrow \infty} v(\omega_f) = \lim_{\omega_f \rightarrow \infty} \frac{\frac{F}{m}\omega_f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} = \lim_{\omega_f \rightarrow \infty} \frac{F}{m} \frac{\omega_f}{\sqrt{\omega_f^4}} = \lim_{\omega_f \rightarrow \infty} \frac{F}{m} \frac{1}{\omega_f} = 0 < v(\omega_0)$$

Así  $\omega_f = \omega_0$  es un punto de máximo absoluto y dicho máximo vale:

$$v_{\text{máx}} = \frac{F}{2\gamma m}$$

*Q.E.D.*

**Corolario 20.** Sea un oscilador lineal amortiguado forzado con una fuerza del estilo  $F(t) = F \cos(\omega_f t + \alpha)$  con  $\omega_f \neq 0$  variable. Si mantenemos fija la frecuencia natural del sistema  $\omega_0$ , la máxima transferencia en potencia al oscilador por parte de la fuerza externa se produce cuando  $\omega_f = \omega_0$ .

*Demostración.* Recordemos que era:

$$P = F\dot{x}$$

Por la proposición 50 en la página 116, sabemos que es:

$$x(t) = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \cos\left(\omega_f t + \alpha + \arctan\left(\frac{-2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right)\right)$$

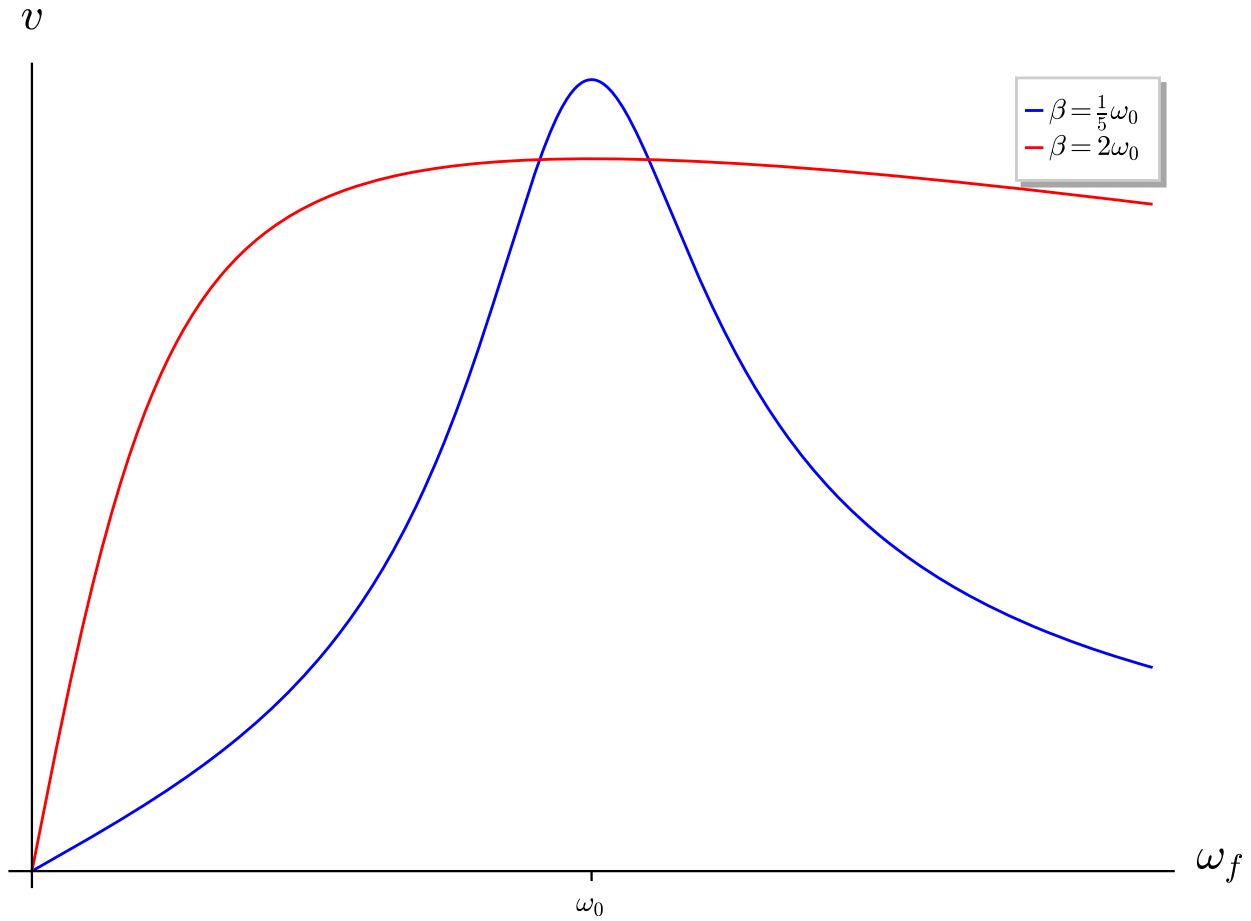
$$\dot{x}(t) = - \underbrace{\frac{\frac{F}{m}\omega_f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}}_{=v} \sin\left(\omega_f t + \alpha + \arctan\left(\frac{-2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right)\right)$$

Por tanto:

$$P = F \cos(\omega_f t + \alpha) v \sin\left(\omega_f t + \alpha + \arctan\left(\frac{-2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right)\right)$$

Haciendo abstracción de las fases, claramente la expresión anterior será máxima cuando  $v$  sea máxima y, por la proposición anterior, eso sucede cuando  $\omega_f = \omega_0$ . *Q.E.D.*

*Observación 50.* Para un  $\omega_0$  fijo la velocidad del sistema varía de la siguiente forma:



Como podemos ver, la máxima resonancia en energía se produce tanto para amortiguamientos subcríticos como supercríticos, de hecho, para cualquier tipo de amortiguamientos. Claramente se ve también que el máximo se encuentra en  $\omega_f = \omega_0$ .

### 2.8.3. La fase en resonancia (\*No lo vimos más que con dibujos en clase)

Recordemos que por la proposición 50 en la página 116, la diferencia de fase viene dada por:

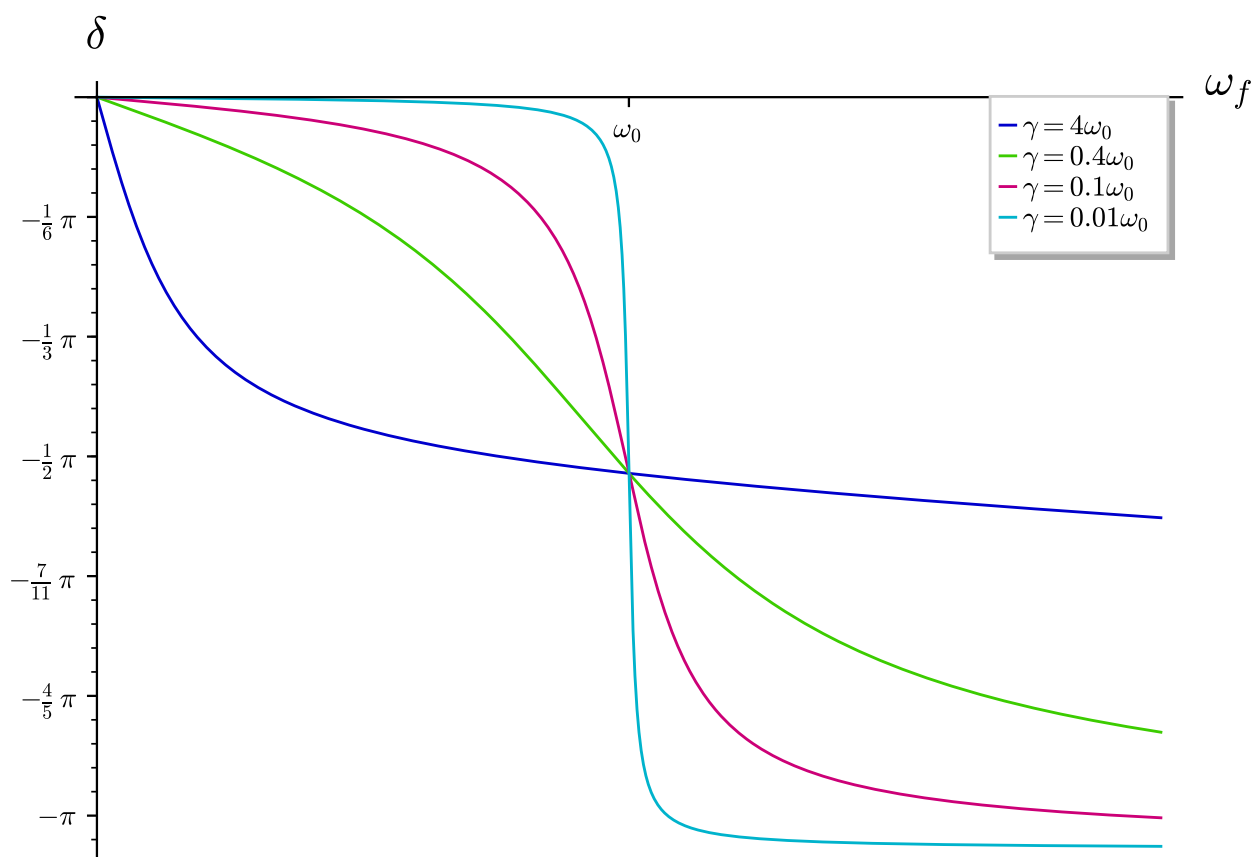
$$\delta = \arctan\left(\frac{-2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right)$$

Sigamos esta fase mientras variamos  $\omega_f$ , suponiendo  $\gamma \ll \omega_0$ . Cuando es  $\omega_f \ll \omega_0$ ,  $\delta$  es muy pequeño en módulo; es decir, mientras  $\omega_f \ll \omega_0$ , las oscilaciones están casi en fase con la fuerza externa. A medida que aumenta  $\omega_f$  y se acerca a  $\omega_0$ ,  $\delta$  disminuye lentamente. En resonancia en energía donde es  $\omega_f = \omega_0$ , el argumento de la arcotangente tiende a menos infinito por lo que  $\delta = -\frac{\pi}{2}$ ; es decir, las oscilaciones van en cuadratura de fase con la fuerza externa. Una vez que  $\omega_f > \omega_0$ , el argumento de la arcotangente es positivo y tiende a cero conforme  $\omega_f$  aumenta. Por consiguiente,  $\delta$  disminuye más allá de  $-\frac{\pi}{2}$  y finalmente tiende a  $-\pi$ . En este punto, las oscilaciones están casi en oposición de fase con la fuerza externa.

A medida que  $\gamma$  se va acercando más a  $\omega_0$ , las variaciones son menos extremas y cuando  $\gamma \gg \omega_0$ , el crecimiento de  $\delta$  es rápido al principio pero luego se hace mucho más lento.

Todo esto puede verse gráficamente en:





#### 2.8.4. Ejemplos varios de la vida real

Después de las arduas secciones anteriores, el lector puede estar preguntándose: «Muy bien, pero esto ¿para qué sirve?». La resonancia es un efecto común en la vida diaria. Por ejemplo, es por resonancia como una radio es capaz de «aislar» la frecuencia que queremos escuchar de las otras. También, el clásico ejemplo en el que una cantante es capaz de romper un vaso de cristal con su voz se debe a esto: El sonido es una onda de presión que se propaga a través de un medio material, en particular, a través de un vaso de cristal. Si la frecuencia de la onda incidente es justo la frecuencia de resonancia en amplitud del vaso, entonces las oscilaciones tendrán amplitud máxima y el vaso se romperá. También, la resonancia ha ocasionado tragedias en la ingeniería de puentes (para más información hágase clic aquí <sup>7</sup>.)

### 2.9. Series de Fourier

**Teorema 18** (Descomposición en serie de Fourier). *Sea  $f(t)$  una función periódica con periodo  $T$  en un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Entonces  $\exists a_i$  con  $i = 0, 1, \dots, \infty$ ,  $\exists b_i$  con  $i = 1, 2, \dots, \infty$  tales que:*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad \forall t \in I$$

donde:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

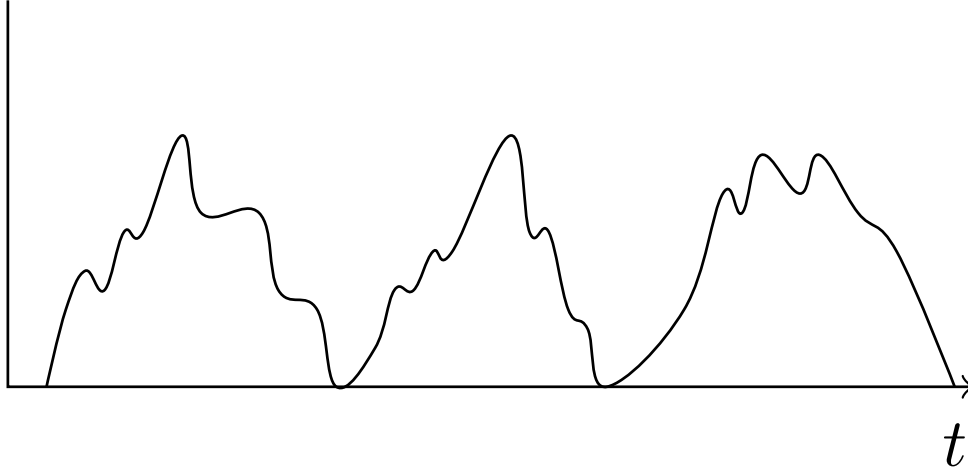
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad \forall n = 1, 2, \dots, \infty$$

<sup>7</sup><http://estructurando.net/2014/06/30/5-cagadas-en-la-ingenieria-de-puentes-por-culpa-de-la-resonancia/>

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad \forall n = 1, 2, \dots, \infty$$

$$y \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

*Observación 51.* El teorema anterior nos dice, por tanto, que cualquier fuerza periódica puede descomponerse en un combinación lineal (infinita) de senos y cosenos. Eso nos va a permitir trabajar con fuerzas de este estilo:



**Proposición 55.** La solución general de una oscilación lineal amortiguada (con  $\gamma > 0$ ) forzada con una fuerza periódica  $F(t)$  de periodo  $T$ , cuando  $t$  es suficientemente grande, puede expresarse como:

$$x(t) = \frac{a_0}{2m\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos\left(n\omega_f t + \arctan\left(\frac{-2\gamma n\omega_f}{\omega_0^2 - n^2\omega_f^2}\right)\right) + b_n \sin\left(n\omega_f t + \arctan\left(\frac{-2\gamma n\omega_f}{\omega_0^2 - n^2\omega_f^2}\right)\right)}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - n^2\omega_f^2\right)^2 + 4\gamma^2 n^2\omega_f^2}}$$

donde  $\omega_f = \frac{2\pi}{T}$  y  $a_0, a_n$  y  $b_n$  son los dados en el teorema 18 en la página anterior.

*Demostración.* Primero, como  $F(t)$  es una función periódica, por el teorema 18 en la página anterior sabemos que existen  $a_0, a_n, b_n$  con  $n = 1, 2, \dots, \infty$  tales que:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_f t) + b_n \sin(n\omega_f t)]$$

Por tanto, la ecuación diferencial a resolver queda:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{a_0}{2m} + \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_f t) + b_n \sin(n\omega_f t)]$$

Ahora, vamos a aprovechar la linealidad de la ecuación diferencial para decir que la solución estacionaria (la solución particular de la no homogénea) que estamos buscando es suma de las soluciones particulares de cada uno de los sumandos que conforman  $F(t)$ .

Vayamos con el primer sumando; nos quedaría la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{a_0}{2m}$$

Nótese que  $\frac{a_0}{2m}$  es constante. Por tanto, por la proposición 24 en la página 74, sabemos que existe un cambio de variable  $x = y + \frac{\frac{a_0}{2m}}{\omega_0^2} = y + \frac{a_0}{2m\omega_0^2}$  que la transforma en una ecuación homogénea.

De esta forma, la solución particular correspondiente a este primer sumando sería:

$$x_{p,a_0}(t) = \frac{a_0}{2m\omega_0^2} + y_h(t)$$

Pero, según los corolarios 13 en la página 99, 17 en la página 107 y 18 en la página 108, como estamos en tiempos suficientemente grandes  $y_h(t)$  se anula, porque la ecuación diferencial homogénea es asintóticamente estable. Así, tenemos que:

$$x_{p,a_0}(t) = \frac{a_0}{2m\omega_0^2}$$

Vamos, ahora, con los términos con coseno. Nos queda la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = a_n \cos(n\omega_f t)$$

La solución de la ecuación diferencial anterior para  $t$  suficientemente grande viene dada por la proposición 50 en la página 116:

$$x_{p,a_n}(t) = \frac{a_n}{m\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 n^2 \omega_f^2}} \cos\left(n\omega_f t + \arctan\left(\frac{-2\gamma n\omega_f}{\omega_0^2 - n^2\omega_f^2}\right)\right)$$

Vamos, ahora, con los términos con seno. Nos queda la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = b_n \sin(n\omega_f t)$$

Nótese que podemos escribir el seno como un coseno con un desfase de  $+\frac{\pi}{2}$ .

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = b_n \cos\left(n\omega_f t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La solución de la ecuación diferencial anterior para  $t$  suficientemente grande viene dada por la proposición 50 en la página 116:

$$x_{p,b_n}(t) = \frac{b_n}{m\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 n^2 \omega_f^2}} \cos\left(n\omega_f t + \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{-2\gamma n\omega_f}{\omega_0^2 - n^2\omega_f^2}\right)\right)$$

Ahora, podemos volver a escribir el coseno con un desfase de  $+\frac{\pi}{2}$  como un seno:

$$x_{p,b_n}(t) = \frac{b_n}{m\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 n^2 \omega_f^2}} \sin\left(n\omega_f t + \arctan\left(\frac{-2\gamma n\omega_f}{\omega_0^2 - n^2\omega_f^2}\right)\right)$$

Así, aplicando linealidad, sabemos que la solución particular (la respuesta estacionaria) que buscamos es:

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2m\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos\left(n\omega_f t + \arctan\left(\frac{-2\gamma n\omega_f}{\omega_0^2 - n^2\omega_f^2}\right)\right) + b_n \sin\left(n\omega_f t + \arctan\left(\frac{-2\gamma n\omega_f}{\omega_0^2 - n^2\omega_f^2}\right)\right)}{m\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 n^2 \omega_f^2}}$$

Por último, según los corolarios 13 en la página 99, 17 en la página 107 y 18 en la página 108, la respuesta natural es asintóticamente estable y, en consecuencia, se anula cuando  $t$  es lo suficientemente grande. Por tanto, la solución que buscamos es justo la respuesta estacionaria:

$$x(t) = \cancel{x_h(t)}^0 + x_p(t)$$

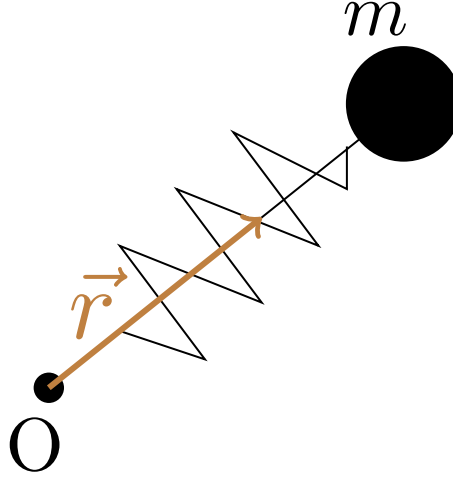
*Q.E.D.*

*Observación 52.* Imaginemos que queremos estudiar la resonancia en amplitud o en energía de un oscilador lineal forzado con una fuerza periódica. Aunque su descomposición en serie de Fourier tenga infinitos términos, para obtener una buena aproximación del valor de la amplitud en resonancia o el valor de la velocidad basta que consideremos los términos de la serie de Fourier cuya frecuencia  $n\omega_f$  se acerque a la frecuencia de resonancia  $\omega_{f,r}$  de nuestro sistema.

## 2.10. Oscilaciones tridimensionales. Oscilador armónico isótropo

### 2.10.1. Definición y primeras propiedades

**Ejemplo 20** (Ejemplo introductorio). Consideremos un muelle tridimensional:



Como la oscilación ya no es unidimensional, necesitamos unas nuevas ecuaciones matemáticas que nos describan el movimiento de la masa  $m$ .

**Definición 79.** Decimos que una magnitud física  $\vec{r} = (x, y, z)$  sufre una **oscilación armónica tridimensional** si satisface la ecuación diferencial:

$$\ddot{\vec{r}} + (\omega_x^2 x, \omega_y^2 y, \omega_z^2 z) = 0$$

**Definición 80.** Decimos que una magnitud física  $\vec{r}$  sufre una **oscilación armónica tridimensional isótropa** si  $\omega_x = \omega_y = \omega_z =: \omega$ .

Diremos que la oscilación es **anisótropa** cuando no se da la condición anterior.

**Corolario 21.** Una oscilación armónica isótropa satisface la ecuación diferencial:

$$\ddot{\vec{r}} + \omega^2 \vec{r} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \\ \ddot{z} + \omega^2 z = 0 \end{cases}$$

*Demostración.* Es trivial a partir de la definición.

*Q.E.D.*

**Proposición 56.** Una partícula de masa  $m$  en un espacio tridimensional sometida a una fuerza  $\vec{F} = -k\vec{r} = -kr\hat{r}$  sufre una oscilación armónica isótropa con  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ .

*Demostración.* Por la segunda ley de Newton (ver axioma 1 en la página 8), tenemos:

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} + \frac{k}{m}\vec{r} = 0$$

que claramente tiene la forma dada en el corolario 21.

*Q.E.D.*

### 2.10.2. Solución del oscilador armónico isótropo

**Proposición 57.** La solución de una oscilación armónica isótropa puede expresarse como:

$$\vec{r}(t) = \vec{c} \cos \omega t + \vec{d} \sin \omega t$$

donde  $\vec{c} = \vec{r}_0$  y  $\vec{d} = \frac{\vec{v}_0}{\omega}$ . Además, la velocidad viene dada por:

$$\dot{\vec{r}}(t) = -\vec{c}\omega \sin \omega t + \vec{d}\omega \cos \omega t$$

*Demostración.* Partimos de la ecuación diferencial del corolario 21 en la página anterior:

$$\ddot{\vec{r}} + \omega^2 \vec{r} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \\ \ddot{z} + \omega^2 z = 0 \end{cases}$$

Como, vemos, al expresar el sistema de ecuaciones por componentes, vemos que cada ecuación es independiente de las otras. En consecuencia, resolver el sistema anterior es equivalente a resolver tres osciladores armónicos. Por la proposición 28 en la página 76, sabemos que existen  $c_x, d_x, c_y, d_y, c_z, d_z \in \mathbb{R}$  tales que la solución de las ecuaciones diferenciales anteriores puede expresarse como:

$$\begin{cases} x(t) = c_x \cos \omega t + d_x \sin \omega t \\ y(t) = c_y \cos \omega t + d_y \sin \omega t \\ z(t) = c_z \cos \omega t + d_z \sin \omega t \end{cases}$$

Equivalentemente, si definimos  $\vec{c} := (c_x, c_y, c_z)$  y  $\vec{d} := (d_x, d_y, d_z)$  podemos expresar las soluciones anteriores como:

$$\vec{r}(t) = \vec{c} \cos \omega t + \vec{d} \sin \omega t$$

Por la proposición 35 en la página 89, sabemos que:

$$\begin{aligned} c_x &= x_0 & d_x &= \frac{v_{x,0}}{\omega} \\ c_y &= y_0 & d_y &= \frac{v_{y,0}}{\omega} \\ c_z &= z_0 & d_z &= \frac{v_{z,0}}{\omega} \end{aligned}$$

Y, claramente  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  y  $\vec{v}_0 = (v_{x,0}, v_{y,0}, v_{z,0})$ . Por tanto, tenemos que:

$$\vec{c} = \vec{r}_0 \quad \vec{d} = \frac{\vec{v}_0}{\omega}$$

Por último, para obtener la velocidad, simplemente derivamos:

$$\dot{\vec{r}}(t) = -\vec{c}\omega \sin \omega t + \vec{d}\omega \cos \omega t$$

*Q.E.D.*

### 2.10.3. Un oscilador armónico isótropo es central y conservativo

**Proposición 58.** *La fuerza  $\vec{F}$  de la proposición 56 en la página anterior es central respecto al origen de coordenadas y conservativa. El momento angular y la energía son constantes del movimiento y vienen dadas por las expresiones:*

$$\vec{L}_O = m\omega \vec{c} \times \vec{d}$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 (c^2 + d^2)$$

*Demostración.* Por la definición 12 en la página 20, tenemos que el momento angular respecto al origen de coordenadas  $O$  es:

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m \left[ \vec{c} \cos \omega t + \vec{d} \sin \omega t \right] \times \omega \left[ -\vec{c} \sin \omega t + \vec{d} \cos \omega t \right] = \\ &= m\omega \left[ \underbrace{-\vec{c} \times \vec{c}}_{=\vec{0}} \cos \omega t \sin \omega t - \underbrace{\vec{d} \times \vec{c}}_{=-\vec{c} \times \vec{d}} \sin^2 \omega t + \underbrace{\vec{c} \times \vec{d}}_{=\vec{0}} \cos^2 \omega t + \underbrace{\vec{d} \times \vec{d}}_{=\vec{0}} \sin \omega t \cos \omega t \right] = \\ &= m\omega \left[ \vec{c} \times \vec{d} \right] \underbrace{[\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t]}_{=1} = m\omega \vec{c} \times \vec{d} \end{aligned}$$

Así, como el momento angular no depende de  $t$ , éste se conserva. Y, por la proposición 7 en la página 22, la fuerza es central.

Ahora, veamos que la fuerza  $\vec{F}$  es conservativa. Si definimos la función  $V(\vec{r}) := \frac{1}{2}k\vec{r}^2$ , claramente se cumple:  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ , pues  $-\vec{\nabla}V = -\frac{dV}{d\vec{r}} = -\frac{1}{2}2k\vec{r} = -k\vec{r}$ . Así, como la fuerza únicamente depende de la posición, por la definición 5 en la página 14,  $\vec{F}$  es conservativa. Por tanto, tiene una función energía potencial asociada (que es la  $V$  que hemos definido antes) y la energía mecánica:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2}k\vec{r}^2$$

debe ser constante. En consecuencia, para obtener su valor, podemos calcularla en el punto que nos sea más cómodo. Por ejemplo en  $t = 0$ :

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kr_0^2$$

Por la proposición 57 en la página 131, sabemos que  $\vec{c} = \vec{r}_0$  y  $\vec{d} = \frac{\vec{v}_0}{\omega} \Leftrightarrow \vec{v}_0 = \omega\vec{d}$ . Sustituyendo, tenemos:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 d^2 + \frac{1}{2}kc^2$$

Por la proposición 56 en la página 131, sabemos que es  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ . Así:

$$E = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}kc^2 = \frac{1}{2}k(c^2 + d^2) = \frac{1}{2}m\omega^2(c^2 + d^2)$$

*Q.E.D.*

**Corolario 22.** *El movimiento de un oscilador armónico isótropo está restringido al plano que forman los vectores  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$  si  $\vec{c} \nparallel \vec{d}$  y sigue la dirección de  $\vec{c}$  si  $\vec{c} \parallel \vec{d}$ . En este último caso, el movimiento es unidimensional.*

*Demostración.* Supongamos,  $\vec{c} \nparallel \vec{d}$ . Según la proposición anterior:

$$m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{L}_O = m\omega\vec{c} \times \vec{d} \neq \vec{0}$$

Luego  $\vec{L}_O$  es perpendicular al plano formado por los vectores  $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ . Pero, de hecho,  $\vec{L}_O$  es constante, luego, necesariamente  $\vec{r}$  y  $\dot{\vec{r}}$  siempre van a estar en el mismo plano. Como  $\vec{L}_O$  también es perpendicular a los vectores  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , el plano formado por  $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$  y el formado por  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$  debe ser, necesariamente, el mismo.

Si  $\vec{c} \parallel \vec{d}$ , el momento angular  $\vec{L}_O$  es nulo. Según la proposición 57 en la página 131:

$$\vec{r}(t) = \vec{c}\cos\omega t + \vec{d}\sin\omega t$$

Como  $\vec{c} \parallel \vec{d}$ , necesariamente  $\vec{r} \parallel \vec{c}$  y así, la oscilación se produce únicamente en la dirección de  $\vec{c}$ . *Q.E.D.*

*Observación 53.* El primer caso de este último corolario podría haberse probado también partiendo de la forma de la solución dada por la proposición 57 en la página 131:

$$\vec{r}(t) = \vec{c}\cos\omega t + \vec{d}\sin\omega t$$

Si  $\vec{c} \nparallel \vec{d}$ ,  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$  son linealmente independientes y, para cualquier  $t$ ,  $\vec{r}$  va a ser combinación lineal de  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ . Por tanto,  $\vec{r}$  estará en el plano que forman  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ .

**Lema 10.** *Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces se cumple:*

1.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

2.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

## 2.10.4. Forma de la trayectoria

**Proposición 59.** La trayectoria descrita por una partícula sometida a una fuerza  $\vec{F}$  como la de la proposición 56 en la página 131 es una elipse siempre que  $\vec{c} \nparallel \vec{d}$ . Además, la posición de la partícula puede expresarse como:

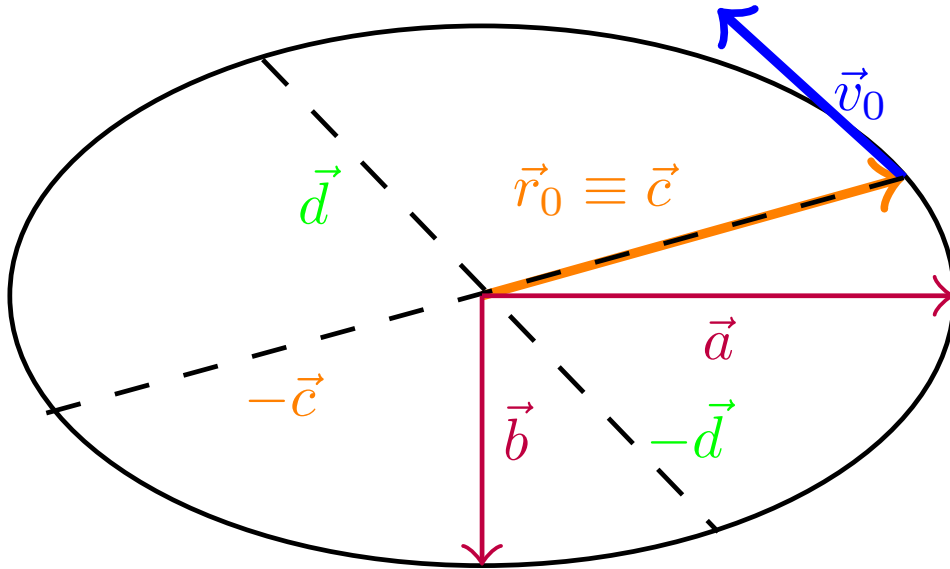
$$\vec{r} = \vec{a} \cos(\omega t + \theta) + \vec{b} \sin(\omega t + \theta)$$

donde  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  son los semiejes mayor y menor de la elipse (y, por tanto,  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ) y  $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ . No necesariamente es  $\vec{a}$  el semieje mayor de la elipse y  $\vec{b}$  el semieje menor, puede ser al revés. Dichos  $\vec{a}, \vec{b}$  y  $\theta$  son únicos y están relacionados con  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$  de la siguiente forma:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\vec{c} \cdot \vec{d}}{d^2 - c^2}\right) \quad \text{si } d \neq c \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{si } \vec{d} = \vec{c} \quad \theta = -\frac{\pi}{4} \quad \text{si } \vec{d} = -\vec{c}$$

$$\vec{a} = \vec{c} \cos \theta - \vec{d} \sin \theta$$

$$\vec{b} = \vec{c} \sin \theta + \vec{d} \cos \theta$$



*Demostración.* Partimos de lo que queremos probar y vamos a ver que es equivalente a la expresión que ya teníamos para la posición en la proposición 57 en la página 131.

Por el lema 10 en la página anterior, podemos expresar la fórmula del enunciado como:

$$\vec{r} = \vec{a} (\cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta) + \vec{b} (\sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta)$$

Ahora, supongamos  $\vec{a} = \vec{c} \cos \theta - \vec{d} \sin \theta$  y  $\vec{b} = \vec{c} \sin \theta + \vec{d} \cos \theta$  (como viene en el enunciado) y veamos que llegamos justamente a la expresión de la proposición 57 en la página 131.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (\vec{c} \cos \theta - \vec{d} \sin \theta) (\cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta) + (\vec{c} \sin \theta + \vec{d} \cos \theta) (\sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta) = \\ &= \vec{c} \cos \omega t \cos^2 \theta - \vec{c} \sin \omega t \sin \theta \cos \theta - \vec{d} \cos \omega t \sin \theta \cos \theta + \vec{d} \sin \omega t \sin^2 \theta + \\ &+ \vec{c} \sin \omega t \sin \theta \cos \theta + \vec{c} \cos \omega t \sin^2 \theta + \vec{d} \sin \omega t \cos^2 \theta + \vec{d} \cos \omega t \sin \theta \cos \theta = \\ &= \vec{c} \cos \omega t \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_{=1} + \vec{d} \sin \omega t \underbrace{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}_{=1} = \vec{c} \cos \omega t + \vec{d} \sin \omega t \end{aligned}$$

Por tanto, existen  $\theta \in \mathbb{R}; \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  (no necesariamente únicos [de hecho, no lo son]) tales que podemos expresar la posición de la partícula como:

$$\vec{r} = \vec{a} \cos(\omega t + \theta) + \vec{b} \sin(\omega t + \theta)$$

Examinando las expresiones de  $\vec{a}$  y de  $\vec{b}$ :

$$\vec{a} = \vec{c} \cos \theta - \vec{d} \sin \theta$$

$$\vec{b} = \vec{c} \sin \theta + \vec{d} \cos \theta$$

podemos ver que si  $\vec{c} \parallel \vec{d}$ ,  $\vec{a} \parallel \vec{c}$  y  $\vec{b} \parallel \vec{c}$ , luego  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ . En este caso, el movimiento es unidimensional como ya hemos probado en el corolario 22 en la página 133. Así que supondremos  $\vec{c} \nparallel \vec{d}$ .

Bien, ahora veamos qué condiciones tiene que cumplir  $\theta$  para que sea  $\vec{a} \perp \vec{b}$ :

$$(\vec{c} \cos \theta - \vec{d} \sin \theta) \cdot (\vec{c} \sin \theta + \vec{d} \cos \theta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 \sin \theta \cos \theta - \vec{c} \cdot \vec{d} \sin^2 \theta + \vec{c} \cdot \vec{d} \cos^2 \theta - d^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 \sin \theta \cos \theta - d^2 \sin \theta \cos \theta + \vec{c} \cdot \vec{d} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c^2 - d^2) \frac{\sin 2\theta}{2} + \vec{c} \cdot \vec{d} \cos 2\theta = 0$$

- Si suponemos  $\cos 2\theta = 0$ , necesariamente  $\sin 2\theta = \pm 1 \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi \forall n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + n\pi \forall n \in \mathbb{Z}$  y:

$$\pm \frac{1}{2} (c^2 - d^2) = 0 \Leftrightarrow c^2 = d^2 \Leftrightarrow c = d$$

- Suponiendo  $\cos 2\theta \neq 0$ , dividimos a ambos lados de la ecuación por  $\frac{1}{2} \cos 2\theta$ , obteniendo:

$$(c^2 - d^2) \tan 2\theta + 2\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \Leftrightarrow \tan 2\theta = \frac{2\vec{c} \cdot \vec{d}}{d^2 - c^2} \Leftrightarrow 2\theta = \arctan \left( \frac{2\vec{c} \cdot \vec{d}}{d^2 - c^2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\vec{c} \cdot \vec{d}}{d^2 - c^2} \right)$$

nótese que tenemos garantizado que  $c \neq d$  porque  $\cos 2\theta \neq 0$ , así que  $\frac{2\vec{c} \cdot \vec{d}}{d^2 - c^2}$  está bien definido.

Ahora, démonos cuenta de que si  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\theta$  no es único. Notemos  $\arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \forall x \in \mathbb{R}$ , de esta forma, en el caso  $c \neq d$  si restringimos  $\theta$  al intervalo  $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  su valor será único, pues si  $c \neq d$ , la arcotangente es inyectiva. En el caso  $c = d$ , el valor de  $\theta$  vendrá dada por una fórmula límite. Claramente, en la expresión:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\vec{c} \cdot \vec{d}}{d^2 - c^2} \right)$$

$$\theta \xrightarrow[d^2 - c^2 \rightarrow 0]{\vec{c} \cdot \vec{d} > 0} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \theta \xrightarrow[d^2 - c^2 \rightarrow 0]{\vec{c} \cdot \vec{d} < 0} -\frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

De manera que acabamos de probar que siempre hay un  $\theta$  único en  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  tal que  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son perpendiculares. A partir de ahora, supondremos que  $\theta$  es tal que  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son perpendiculares (ya sabemos que existe así que no hay ningún problema en hacer esta suposición). Entonces, podemos establecer los ejes coordenados  $X$  y  $Y$  coincidentes con las direcciones de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . De forma que la descomposición de  $\vec{r}(t)$  en los ejes  $X$  e  $Y$  queda:

$$x(t) = a \cos(\omega t + \theta) \Leftrightarrow \frac{x(t)}{a} = \cos(\omega t + \theta)$$



$$y(t) = b \sin(\omega t + \theta) \Leftrightarrow \frac{y(t)}{b} = \sin(\omega t + \theta)$$

Elevando al cuadrado y sumando ambas ecuaciones, obtenemos:

$$\frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y(t)^2}{b^2} = \cos^2(\omega t + \theta) + \sin^2(\omega t + \theta) = 1$$

que es justo la ecuación cartesiana de una elipse. Nótese que  $\vec{a}$  no tiene que ser necesariamente el semieje mayor de la elipse (podría serlo  $\vec{b}$  perfectamente). Q.E.D.

**Proposición 60.** *El momento angular y la energía del movimiento de una partícula sometida a una fuerza  $\vec{F}$  como la de la proposición 56 en la página 131 en función de los parámetros  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  de la proposición 59 en la página 134 queda:*

$$E = \frac{1}{2}k(a^2 + b^2) = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + b^2)$$

$$\vec{L}_O = m\omega\vec{a} \times \vec{b}$$

*Demostración.* Partimos de la expresión de la posición dada en la proposición 59 en la página 134 y derivamos para hallar la velocidad:

$$\vec{r} = \vec{a} \cos(\omega t + \theta) + \vec{b} \sin(\omega t + \theta)$$

$$\dot{\vec{r}} = -\vec{a}\omega \sin(\omega t + \theta) + \omega\vec{b} \cos(\omega t + \theta)$$

Como tanto la energía como el momento son constantes, puedo calcularlos en el instante en el que me sea más sencillo. Por tanto, escojo un  $t$  tal que  $\vec{r} = \vec{a}$ . Este  $t$  claramente existe puesto que el seno que acompaña a  $\vec{b}$  se hace cero para algún  $t$ . Entonces, será:  $\dot{\vec{r}} = \omega\vec{b}$  y, así, el cálculo queda muy sencillo:

$$\vec{L}_O = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m\vec{a} \times (\omega\vec{b}) = m\omega\vec{a} \times \vec{b}$$

$$E = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}ka^2 + \frac{1}{2}m\omega^2b^2$$

Por la proposición 56 en la página 131, sabemos que es  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ . Por consiguiente:

$$E = \frac{1}{2}ka^2 + \frac{1}{2}kb^2 = \frac{1}{2}k(a^2 + b^2) = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + b^2)$$

Q.E.D.

### 2.10.5. Métodos de cálculo para $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$

**Proposición 61.** *Supongamos que tenemos una partícula sometida a una fuerza  $\vec{F}$  como la de la proposición 56 en la página 131. Además conocemos el valor de las constantes  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , entonces,  $|\vec{a}| = a$  y  $|\vec{b}| = b$  son las dos únicas soluciones positivas de la ecuación bicuadrada en  $u$ :*

$$u^4 - (c^2 + d^2)u^2 + c^2d^2 \sin^2 \alpha = 0$$

donde  $\alpha$  es el ángulo que forman  $c$  y  $d$ .

*Demostración.* Primero, veamos que efectivamente, tanto  $a$  como  $b$  son soluciones de la ecuación. Por las proposiciones 58 en la página 132 y 60, tenemos:

$$m\omega\vec{c} \times \vec{d} = \vec{L}_O = m\omega\vec{a} \times \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$$

$$\frac{1}{2}k(c^2 + d^2) = E = \frac{1}{2}k(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \quad (2.10.1)$$

Como es  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , llamando  $\alpha$  al ángulo que forman  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , de la primera ecuación se deduce:

$$ab = cd \sin \alpha \Rightarrow a^2 b^2 = c^2 d^2 \sin^2 \alpha \quad (2.10.2)$$

Despejando  $a^2$  de la ecuación 2.10.1 en la página anterior y sustituyendo en 2.10.2, obtenemos:

$$a^2 = c^2 + d^2 - b^2$$

$$\begin{aligned} (c^2 + d^2 - b^2) b^2 &= c^2 d^2 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow b^2 (c^2 + d^2) - b^4 - c^2 d^2 \sin^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b^4 - (c^2 + d^2) b^2 + c^2 d^2 \sin^2 \alpha = 0 \end{aligned}$$

Luego  $b$ , claramente, satisface la ecuación del enunciado. Ahora, despejando  $b^2$  de la ecuación 2.10.1 en la página anterior y sustituyendo en 2.10.2, obtenemos:

$$b^2 = c^2 + d^2 - a^2$$

$$\begin{aligned} a^2 (c^2 + d^2 - a^2) &= c^2 d^2 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow a^2 (c^2 + d^2) - a^4 - c^2 d^2 \sin^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^4 - (c^2 + d^2) a^2 + c^2 d^2 \sin^2 \alpha = 0 \end{aligned}$$

Luego  $a$  también satisface la ecuación del enunciado.

Ahora probemos que son las únicas dos soluciones positivas. Como la ecuación del enunciado es una bicuadrada, si tenemos una solución  $\lambda \in \mathbb{R} \ni \lambda > 0$ , entonces, necesariamente  $-\lambda$  será también solución. Esto se debe al cambio de variable  $t = u^2 \Leftrightarrow u = \pm\sqrt{t}$  que se emplea para resolver las ecuaciones bicuadradas. Es decir, si  $\lambda$  es real y es solución de la ecuación bicuadrada,  $t = \lambda^2$  será solución de la ecuación de segundo grado correspondiente al cambio de variable. Pero como hemos dicho antes,  $u = \pm\sqrt{t} = \pm\lambda$ , luego  $-\lambda$  también es solución. Bien, volviendo a nuestro caso particular, como  $a, b > 0$  son soluciones de la ecuación bicuadrada del enunciado y son reales,  $-a$  y  $-b$  también serán soluciones. Y, claramente  $-a, -b < 0$ . Como una ecuación de cuarto grado puede tener como mucho cuatro soluciones y ya hemos agotado todas,  $a$  y  $b$  son las únicas soluciones positivas. Q.E.D.

**Proposición 62.** *Supongamos que tenemos una partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza  $\vec{F}$  como la de la proposición 56 en la página 131. Además conocemos el valor de las constantes del movimiento  $L_O$  y  $E$ , entonces,  $|\vec{a}| = a$  y  $|\vec{b}| = b$  son las dos únicas soluciones positivas de la ecuación bicuadrada en  $u$ :*

$$u^4 - \frac{2E}{m\omega^2} u^2 + \frac{L_O^2}{m^2\omega^2} = 0$$

*Demostración.* Partimos de la proposición 61 en la página anterior y vamos a expresarla en función del momento angular y de la energía:

$$u^4 - (c^2 + d^2) u^2 + c^2 d^2 \sin^2 \alpha = 0$$

Por la proposición 58 en la página 132, tenemos:

$$\vec{L}_O = m\omega \vec{c} \times \vec{d}$$

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 (c^2 + d^2) \Leftrightarrow c^2 + d^2 = \frac{2E}{m\omega^2}$$

Luego:

$$L_O = m\omega cd \sin \alpha \Leftrightarrow cd \sin \alpha = \frac{L_O}{m\omega} \Rightarrow c^2 d^2 \sin^2 \alpha = \frac{L_O^2}{m^2\omega^2}$$

donde  $\alpha$  es el ángulo que forman  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ .

Ahora, simplemente sustituyendo en la ecuación bicuadrada en  $u$ , tenemos:

$$u^4 - \frac{2E}{m\omega^2} u^2 + \frac{L_O^2}{m^2\omega^2} = 0$$

con lo que queda probado el enunciado. Q.E.D.

### 2.10.6. Ejemplos

**Ejercicio 8.** Tenemos una partícula de masa  $m$  cuya posición describe una oscilación armónica isótropa con condiciones iniciales  $\begin{cases} \vec{r}_0 = 2\hat{i} + \hat{j} \\ \vec{v}_0 = 4\hat{i} - 8\hat{j} \end{cases}$ . Calcular su órbita y analizar el efecto de  $\omega$  en ella. Obtener, también, la energía y el momento angular.

**Solución.**

Por la proposición 57 en la página 131, sabemos:

$$\vec{c} = \vec{r}_0$$

$$\omega \vec{d} = \vec{v}_0$$

Ahora, queremos hallar el valor de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . Por la proposición 59 en la página 134, tenemos que es:

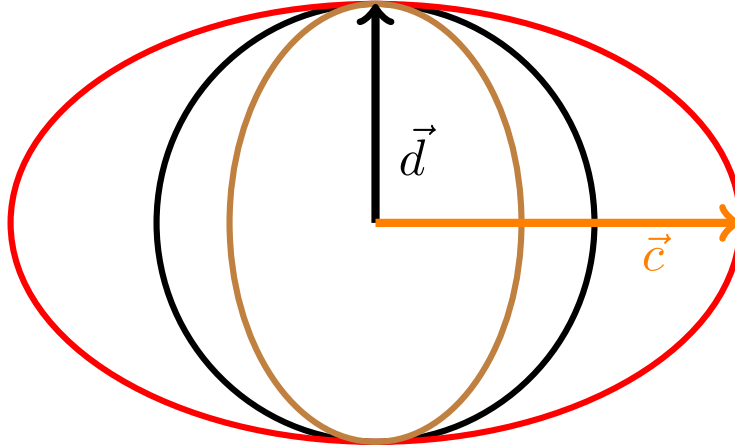
$$\tan 2\theta = \frac{2\vec{c} \cdot \vec{d}}{d^2 - c^2} = 0 \Leftrightarrow 2\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \Leftrightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

Nótese que estamos suponiendo que  $\theta \in [0, 2\pi)$ , mientras que en la proposición en cuestión nos restringíamos a  $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ . Como consecuencia, los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  no serán únicos, pero la trayectoria trazada por la partícula sí lo será, como veremos más adelante.

Obtenemos:

$$c^2 = 2^2 + 1 = 5 \quad d^2 = \frac{4^2}{\omega^2} + \frac{8^2}{\omega^2} = \frac{2^4 + 2^6}{\omega^2} = \frac{2^4(1 + 2^4)}{\omega^2} = \frac{16 \cdot 5}{\omega^2}$$

Si hacemos  $\omega = 4$ , obtenemos  $c = d$  y tenemos una circunferencia. Si hacemos  $\omega < 4$ , entonces  $d > c$ , mientras que si  $\omega > 4$  entonces  $c > d$ . En estos dos casos, obtenemos una elipse.



donde la trayectoria negra es la circunferencia negra que se correspondería con  $\omega = 4$ , la elipse roja se correspondería con  $\omega > 4$  y la elipse marrón se correspondería con  $\omega < 4$ .

Estudiemos ahora todos los posibles valores de  $\theta$ . Recordemos que por la proposición 59 en la página 134, es:

$$\vec{a} = \vec{c} \cos \theta - \vec{d} \sin \theta$$

$$\vec{b} = \vec{c} \sin \theta + \vec{d} \cos \theta$$

■ Si  $\theta = 0$ :

$$\vec{a} = \vec{c}$$

$$\vec{b} = \vec{d}$$

- Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$ :

$$\vec{a} = -\vec{d}$$

$$\vec{b} = \vec{c}$$

- Si  $\theta = \pi$ :

$$\vec{a} = -\vec{c}$$

$$\vec{b} = -\vec{d}$$

- Si  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ :

$$\vec{a} = \vec{d}$$

$$\vec{b} = -\vec{c}$$

Como vemos, en todos estos casos la elipse que se forma es la misma y únicamente cambia qué tomamos como semieje mayor y qué tomamos como semieje menor.

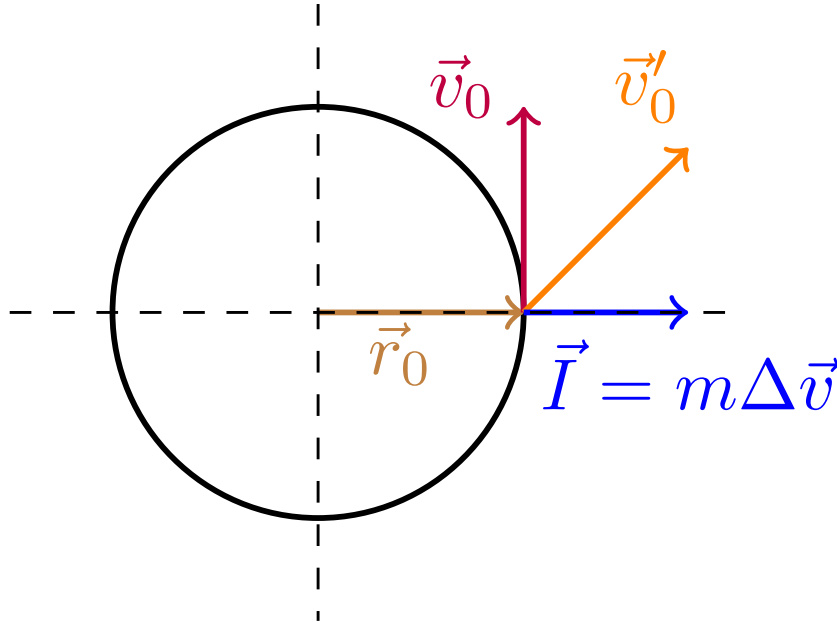
Ahora, calculamos la energía. Aplicando la proposición 60 en la página 136, tenemos:

$$E = \frac{1}{2}k(a^2 + b^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 \left(5 + \frac{80}{\omega^2}\right)$$

Para obtener el momento angular, utilizamos la proposición 58 en la página 132:

$$\vec{L}_O = m\vec{r}_0 \times \vec{v}_0 = -20m\hat{k}$$

**Ejercicio 9.** Tenemos una partícula sometida a una fuerza  $\vec{F} = -k\hat{r}$  a distancia  $r_0$  del centro de fuerzas. ¿Qué condiciones debe cumplir  $\vec{v}_0$  para que la trayectoria sea circular? Suponiendo que la partícula describe una órbita circular, le realizamos un impulso radial  $\vec{I} = m\Delta\vec{v}$ . Estudiar cómo varían la energía y el momento angular.



**Solución.** Tomando  $\vec{c} = \vec{r}_0$ , para que la órbita sea circular debe ser  $c = d$  y además  $\vec{c} \perp \vec{d}$ . Por tanto,  $c = d \Leftrightarrow r_0 = \frac{v_0}{\omega} \Leftrightarrow v_0 = r_0\omega$ . Por tanto, deben ser  $\vec{r}_0 \perp \vec{v}_0$  y  $v_0 = \omega r_0$ .

Sabemos que la energía tras el impulso  $E'$ , será:

$$E' = \frac{1}{2}m \left( v_0^2 + \left( \frac{I}{m} \right)^2 \right) + \frac{1}{2}kr_0^2 = \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kr_0^2}_{=E} + \frac{1}{2}m \left( \frac{I}{m} \right)^2 =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}m \left( \frac{I}{m} \right)^2}_{>0} + E \Rightarrow E' > E$$

Nótese que el nuevo impulso se hace a lo largo de la dirección radial y que, por tanto, la velocidad inicial radial (antes de aplicar el impulso) es nula.

Como el impulso es instantáneo:

$$r'_0 = r_0$$

El módulo de la velocidad también aumentará:

$$v'_0 > v_0$$

Sin embargo, el momento angular permanecerá constante, puesto que para su cálculo únicamente interviene la componente de la velocidad perpendicular a la dirección radial:

$$L'_O = m\vec{r} \times \left( \vec{v}_0 + \frac{\vec{I}}{m} \right) = \underbrace{m\vec{r} \times \vec{v}_0}_{=L_O} + m \underbrace{\vec{r} \times \vec{I}}_{\vec{r} \parallel \vec{I} \Rightarrow \vec{0}} = L_O$$

## Capítulo 3

# Fuerzas centrales conservativas

### 3.1. Leyes de conservación

Recomendamos repasar todas las secciones del tema uno entre la sección 1.3 en la página 12 y la sección 1.5.3 en la página 21, ambas inclusive. En especial, las definiciones 4 en la página 12, 5 en la página 14, 12 en la página 20, 14 en la página 21; el teorema 5 en la página 21; las proposiciones 4 en la página 13, 7 en la página 22, 8 en la página 22; así como el corolario 2 en la página 22.

#### 3.1.1. Momento angular en coordenadas polares y relaciones con la velocidad

Recordemos que en coordenadas polares teníamos:

$$v_r = \dot{r} \quad v_\theta = r\dot{\theta}$$

**Proposición 63.** *El momento angular en coordenadas polares viene dado por la expresión:*

$$\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\hat{k}$$

donde  $\hat{k} = \hat{r} \times \hat{\theta}$ .

*Demostración.* Nótese que:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Así, aplicando la definición de momento angular de una partícula (ver definición 12 en la página 20), tenemos:

$$\vec{L}_O = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m\vec{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = m\dot{r}\underbrace{\vec{r} \times \hat{r}}_{=\vec{0}} + mr\dot{\theta}\underbrace{\vec{r} \times \hat{\theta}}_{=\hat{k}} = mr^2\dot{\theta}\hat{k}$$

*Q.E.D.*

**Corolario 23.** *La proposición anterior nos permite expresar  $\dot{\theta}$  y la velocidad  $v_\theta$  en el eje  $\hat{\theta}$  (el perpendicular al radial) en función del momento angular:*

$$\dot{\theta} = \frac{L_O}{mr^2} \quad v_\theta = \frac{L_O}{mr}$$

*Demostración.* Partimos de la proposición anterior:

$$L_O = mr^2\dot{\theta} \Leftrightarrow \dot{\theta} = \frac{L_O}{mr^2}$$

Por otra parte:

$$mr^2\dot{\theta} = mrv_\theta$$

Así que:

$$mrv_\theta = L_O \Leftrightarrow v_\theta = \frac{L_O}{mr}$$

*Q.E.D.*

*Observación 54.* En general,  $\dot{\theta}$  y  $v_\theta$  no serán constantes. Sólo serán constantes en el caso en el que  $r = \text{cte}$ , es decir, cuando la trayectoria sea una circunferencia.

*Observación 55.* A partir de este momento usaremos  $\vec{L}$  en vez de  $\vec{L}_O$  para referirnos al momento angular ya que sobreentenderemos que es el momento angular con respecto al centro de fuerzas.

### 3.1.2. Parámetros del movimiento debido a una fuerza central conservativa

**Proposición 64.** *El movimiento de una partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza central conservativa  $\vec{F}$  tiene asociadas dos constantes, la energía mecánica y el momento angular. En coordenadas polares dichas constantes nos dan las ecuaciones:*

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)$$

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

donde  $V(r)$  es la función energía potencial asociada a  $\vec{F}$ .

*Demostración.* Como  $\vec{F}$  es una fuerza central, por la proposición 7 en la página 22, su momento angular se conserva. Además, como  $\vec{F}$  es una fuerza conservativa, por el teorema 7 en la página 25, la energía se conserva. Por la proposición 8 en la página 22, el potencial asociado a  $\vec{F}$  sólo puede depender de  $r$ . La energía mecánica  $E$  en un punto a distancia  $r$  del centro de fuerzas viene dada por:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + V(r)$$

Como  $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ , tenemos:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)$$

Por otra parte, por la proposición 63 en la página anterior en coordenadas polares el momento angular puede expresarse como:

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

*Q.E.D.*

**Proposición 65** (Ecuación radial de la energía). *Sea un partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza central conservativa  $\vec{F}$ . Entonces se cumple:*

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

donde el término  $\frac{L^2}{2mr^2}$  es la energía potencial de una fuerza centrífuga  $\vec{F}_c = \frac{L^2}{mr^3}\hat{r} = m\dot{\theta}^2\vec{r}$  que es central y conservativa. Dicha fuerza centrífuga se corresponde con aquella fuerza inercial que aparecería para un observador que girara con el ángulo  $\theta$ .

*Demostración.* Partimos de la proposición 64:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)$$

$$L = mr^2\dot{\theta} \Leftrightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

Despejando  $\dot{\theta}$  de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{L^2}{m^2r^4} + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

Por la proposición 8 en la página 22, trivialmente, el término  $\frac{L^2}{2mr^2}$  es la energía potencial asociada a una fuerza que es central y conservativa. Dicha fuerza es:

$$\vec{F}_c = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} = -\left(-2\frac{L^2}{2mr^3}\right) \hat{r} = \frac{L^2}{mr^3} \hat{r}$$

Por otra parte, sustituyendo  $L$  por el valor dado en la proposición 64 en la página anterior, obtenemos:

$$\vec{F}_c = \frac{m^2 r^4 \dot{\theta}^2}{mr^3} \hat{r} = mr\dot{\theta}^2 \hat{r} = m\dot{\theta}^2 \vec{r}$$

Sólo nos quedaría probar que  $\vec{F}_c$  se corresponde con aquella fuerza inercial que aparecería para un observador que girara con el ángulo  $\theta$ . Esto no lo vamos a probar ahora, lo haremos en el capítulo sexto. *Q.E.D.*

**Corolario 24.** Sea un partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza central conservativa  $\vec{F}$ . Entonces su distancia al centro de fuerzas satisface la ecuación diferencial:

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} - \frac{F(r)}{m} = 0$$

*Demostración.* Partimos de la proposición anterior y derivamos con respecto al tiempo:

$$\frac{1}{2}m2\dot{r}\ddot{r} + \frac{L^2}{2m} \left(-\frac{2}{r^3}\dot{r}\right) + \frac{dV}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$m\dot{r}\ddot{r} - \frac{L}{mr^3}\dot{r} + \frac{\partial V}{\partial r}(r) \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{=\dot{r}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m\dot{r}\ddot{r} - \frac{L}{mr^3}\dot{r} + \frac{\partial V}{\partial r}(r) \dot{r} = 0$$

ya que la energía es una constante del movimiento por la proposición 64 en la página anterior. Usando  $\frac{\partial V}{\partial r}(r) = -F(r)$ , llegamos a:

$$m\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}\dot{r} - F(r)\dot{r} = 0$$

Dividiendo por  $m\dot{r}$ , obtenemos:

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} - \frac{F(r)}{m} = 0$$

*Q.E.D.*

**Definición 81.** Llamaremos **energía potencial efectiva**  $V_{eff}$  a los términos no cinéticos que aparecen en la ecuación radial de la energía (ver proposición 65 en la página anterior):

$$V_{eff}(r) := \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

*Observación 56.* Muchas veces podremos hacer un análisis cualitativo del movimiento de una partícula en un campo central conservativo simplemente mirando la gráfica de la energía potencial efectiva y teniendo en cuenta la energía de la partícula.

**Definición 82.** Sea un partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza central  $\vec{F}$ . Llamamos **velocidad aerolar** al área barrida por el vector posición de la partícula con respecto al centro de fuerzas por unidad de tiempo.

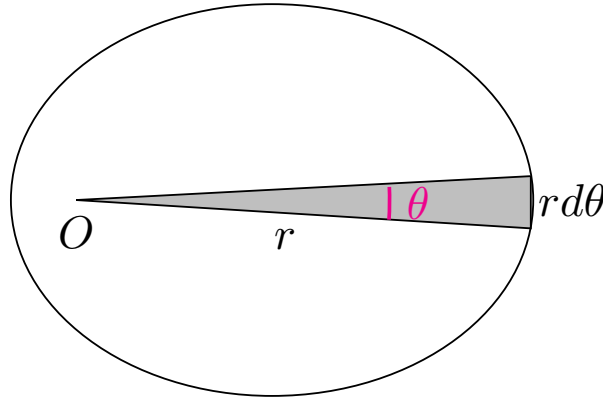
**Teorema 19** (2ª ley de Kepler). Sea un partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza central  $\vec{F}$ . Entonces el vector posición de la partícula barre áreas iguales en tiempos iguales y la velocidad aerolar es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

*Demostración.* Consideremos el área encerrada entre el vector posición en un instante  $t_0$  y el vector posición en  $t = t_0 + dt$ . En ese  $dt$ , el extremo del vector posición se habrá desplazado una distancia  $r d\theta$ . Como  $r d\theta$  es muy pequeño en comparación con  $r$ , podemos considerar que la figura es un triángulo rectángulo de base  $r$  y altura  $r d\theta$ . Por tanto su área será:

$$dA = \frac{1}{2} r r d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$





Dividiendo por  $dt$ , obtenemos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\theta}$$

Como la fuerza es central, por la proposición 7 en la página 22, su momento angular es constante. Usando el corolario 23 en la página 141, podemos poner  $\dot{\theta}$  en función de  $L$ :

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

y sustituyendo, tenemos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{2m}$$

Como la velocidad aerolar es constante, el vector posición de la partícula barre áreas iguales en tiempos iguales. Q.E.D.

*Observación 57.* Nótese que el resultado anterior es válido para **cualquier fuerza central**  $\vec{F}$ , no sólo para la fuerza gravitatoria.

### 3.1.3. Caso del oscilador armónico isótropo

#### 3.1.3.1. Análisis cualitativo de la energía potencial efectiva $V_{eff}$

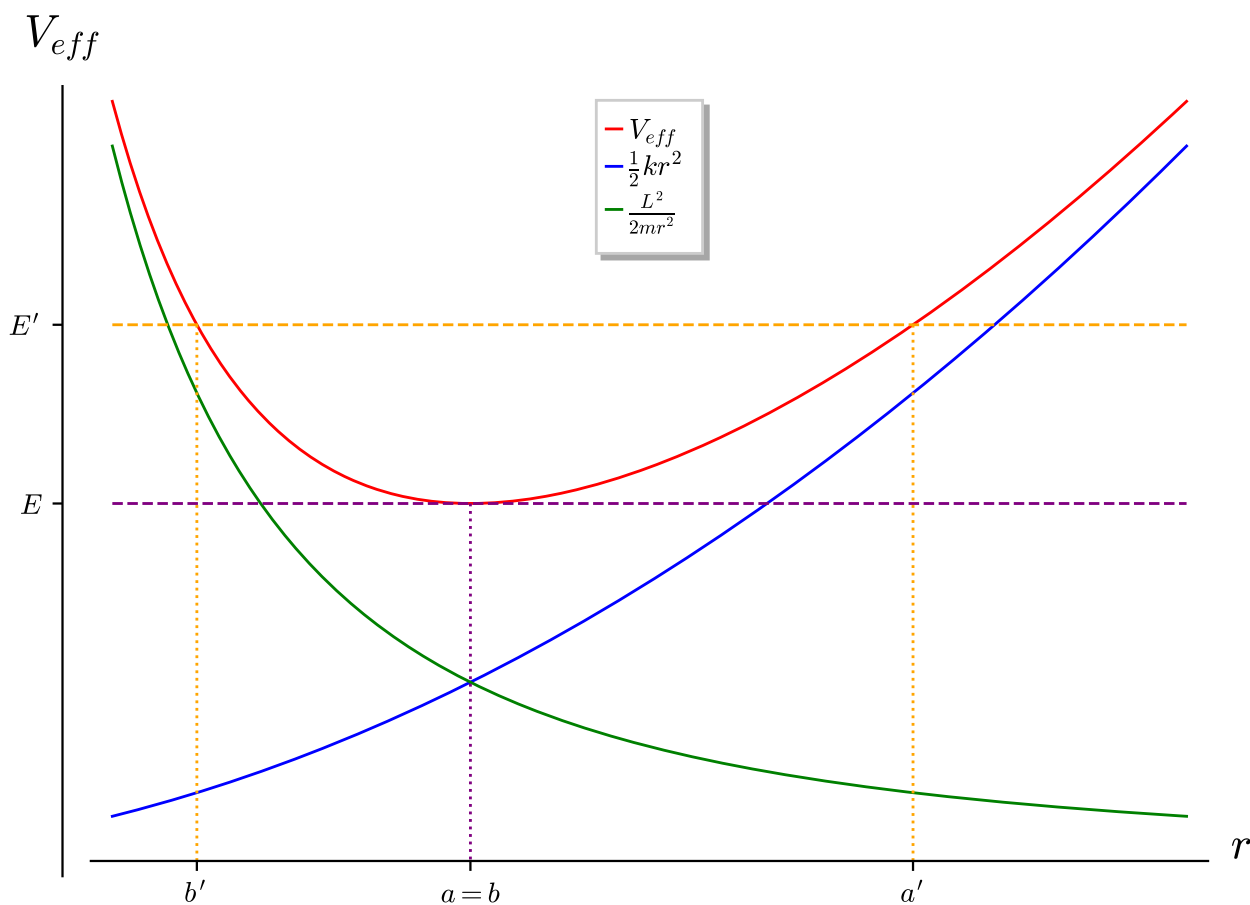
Estudiemos la gráfica del potencial efectivo  $V_{eff}$  para el caso del oscilador armónico isótropo. Recordemos que, en este caso, la energía potencial  $V(r)$  venía dada por:

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

De manera que el potencial efectivo queda:

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

La gráfica queda:



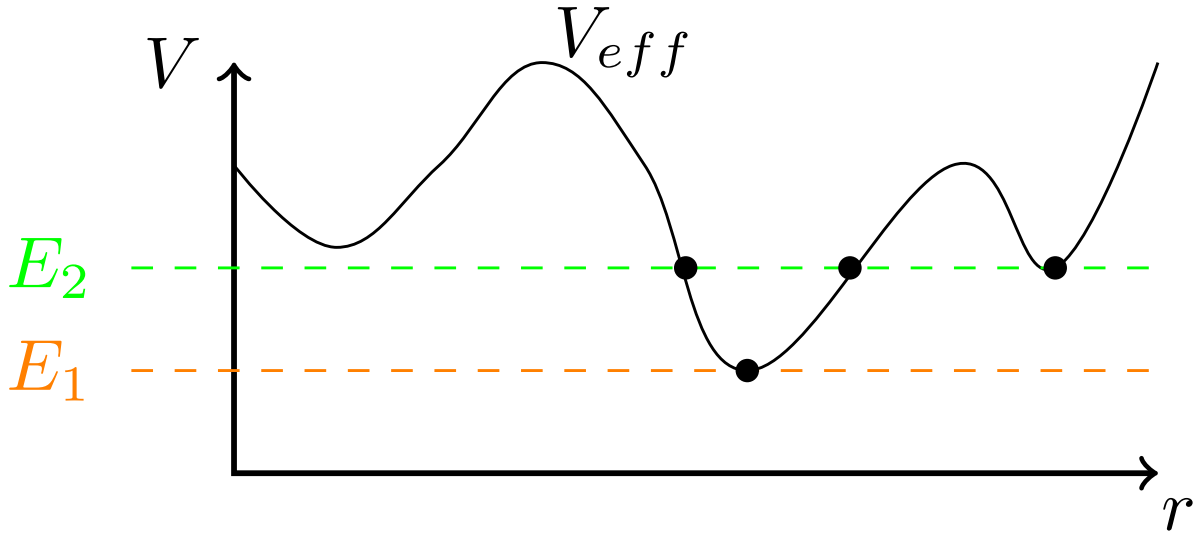
Vemos claramente cómo el potencial efectivo  $V_{eff}$  tiene un mínimo. Si conocemos la energía con la que cuenta nuestra partícula (supongamos que tiene energía  $E'$ ), entonces viendo la gráfica ya sabemos que  $r$  va a oscilar entre  $b'$  y  $a'$  y que en dichos puntos será  $\dot{r} = 0$ , porque toda la energía con la que cuenta la partícula será energía potencial efectiva (su cinética será nula). Por la proposición 59 en la página 134, de hecho, sabemos que la trayectoria de la partícula es una elipse y que  $a$  y  $b$  son sus semiejes mayor y menor. En este caso, el centro de fuerzas está en el centro de la elipse.

Si nuestra partícula contara con una energía  $E$ , entonces obtendríamos que es  $a = b$  y siempre es  $\dot{r} = 0$ . En este caso, en el mínimo de energía, la trayectoria sería una circunferencia.

Por último, nótese que nuestra partícula no puede tener menos energía potencial efectiva que  $E$ . Pues, por el simple hecho de encontrarse a cierta distancia  $r$  ya tiene energía potencial efectiva y hemos visto que el mínimo de la función vale  $E$ . Si esta reflexión no ayuda, ver de nuevo la expresión matemática de  $V_{eff}$  puede que ayude a asentar la idea.

*Observación 58.* Recordamos que los puntos  $a$  y  $b$  vienen dados por la proposición 62 en la página 137.

*Observación 59.* Imaginemos una función energía potencial con esta forma:



Para una energía  $E_1$  tendríamos una circunferencia y para una energía  $E_2$  tendríamos o bien una circunferencia o bien una elipse dependiendo de las condiciones iniciales.

**Proposición 66.** Sea una partícula de masa  $m$  sometida a una oscilación armónica isótropa. El valor de  $r$  que hace que la trayectoria sea circular es:

$$r_0 = \sqrt[4]{\frac{L^2}{mk}}$$

Además el valor mínimo de la energía potencial efectiva se alcanza en  $r_0$  y vale:

$$V_{eff,min} = L\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Por otra parte, cuando  $r = r_0$  (una órbita circular) la energía cinética y potencial son iguales  $\forall t$  y su valor coincide con la mitad de la energía mecánica:

$$T = V = \frac{E}{2} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

*Demostración.* Utilizando la proposición 62 en la página 137 y la proposición 56 en la página 131, sabemos que  $a, b$  son las soluciones positivas de la ecuación bicuadrada en  $u$ :

$$u^4 - \frac{2E}{k}u^2 + \frac{L^2}{mk} = 0$$

Hallamos las raíces:

$$u = \sqrt{\frac{\frac{2E}{k} \pm \sqrt{\frac{4E^2}{k^2} - \frac{4L^2}{mk}}}{2}}$$

Para que la solución sea única, debe ser:

$$\frac{4E^2}{k^2} - \frac{4L^2}{mk} = 0 \Leftrightarrow \frac{E^2}{k} = \frac{L^2}{m} \Leftrightarrow \frac{E}{\sqrt{k}} = \frac{L}{\sqrt{m}} \Leftrightarrow E = L\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Expresando  $E$  en función de  $r$ , tenemos:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 = L\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si la trayectoria es circular, debe ser  $\dot{r} = 0$ , así, la expresión anterior queda:

$$\frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 = L\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Multiplicando a ambos lados por  $r^2$ , tenemos:

$$\frac{L^2}{2m} + \frac{1}{2}kr^4 = L\sqrt{\frac{k}{m}}r^2$$

Multiplicando por  $\frac{2}{k}$ , obtenemos:

$$\frac{L^2}{mk} + r^4 = \frac{2L}{k}\sqrt{\frac{k}{m}}r^2 \Leftrightarrow r^4 - \frac{2L}{\sqrt{mk}}r^2 + \frac{L^2}{mk} = 0$$

Como  $r > 0$ , tenemos:

$$r = \sqrt{\frac{\frac{2L}{\sqrt{mk}} - \sqrt{\frac{4L^2}{mk} - \frac{4L^2}{mk}}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2L}{\sqrt{mk}}}{2}} = \sqrt{\frac{L}{\sqrt{mk}}} = \sqrt[4]{\frac{L^2}{mk}}$$

En el caso del oscilador armónico isótropo, la energía potencial efectiva es:

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

Halleemos sus puntos críticos:

$$\frac{dV_{eff}}{dr}(r) = -2\frac{L^2}{2mr^3} + \frac{1}{2}k2r = -\frac{L^2}{mr^3} + kr$$

$$\frac{dV_{eff}}{dr}(r) = 0 \Leftrightarrow kr = \frac{L^2}{mr^3} \Leftrightarrow mkr^4 = L^2 \Leftrightarrow r^4 = \frac{L^2}{mk} \Leftrightarrow r = \sqrt[4]{\frac{L^2}{mk}}$$

Así que efectivamente  $r_0 = \sqrt[4]{\frac{L^2}{mk}}$  es un punto crítico de  $V_{eff}$ . Sustituyendo en  $V_{eff}$ , obtenemos que el valor del punto crítico es:

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2m\frac{L}{\sqrt{mk}}} + \frac{1}{2}k\frac{L}{\sqrt{mk}} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{L}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} = L\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Como  $r_0$  es el único punto crítico, para ver que es mínimo absoluto basta con que estudiemos el comportamiento de  $V_{eff}$  en los extremos del intervalo de estudio  $[0, \infty)$ :

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_{eff}(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 \right) = \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{eff}(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 \right) = \infty$$

Así, necesariamente  $r_0$  es un mínimo absoluto de  $V_{eff}$ .

Ahora, calculamos la energía potencial  $V$  y la energía cinética cuando  $r = r_0$ :

$$V = \frac{1}{2}kr_0^2 \quad T = \frac{1}{2}m \left( \underbrace{\dot{r}^2}_{=0} + r^2\dot{\theta}^2 \right) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

Por el corolario 23 en la página 141, sabemos:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr_0^2} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{m^2r_0^4}$$

y como es  $r_0^4 = \frac{L^2}{mk}$ , sustituyendo, obtenemos:

$$\dot{\theta} = \frac{L^2}{m^2 \frac{L^2}{mk}} = \frac{k}{m}$$

Sustituyendo en la expresión de la energía cinética, obtenemos:

$$T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m r^2 \frac{k}{m} = \frac{1}{2} k r^2$$

Y así  $T = V$ . Y como la energía mecánica es  $E = T + V$ :

$$T + \underbrace{V}_{=T} = E \Leftrightarrow 2T = E \Leftrightarrow V = T = \frac{E}{2}$$

Como es  $\dot{r} = 0$ , según la ecuación radial de la energía (ver proposición 65 en la página 142), la energía potencial efectiva es igual a la energía total. Por tanto:

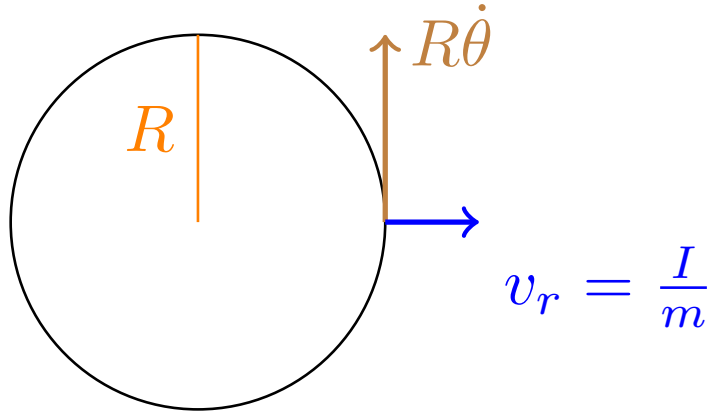
$$V = T = \frac{E}{2} = \frac{V_{eff,min}}{2}$$

*Q.E.D.*

### 3.1.3.2. Cambio de órbitas, caso particular: oscilador armónico isótropo en órbita circular

Tenemos una partícula sometida de masa  $m$ , cuya posición sufre una oscilación armónica isótropa. Partimos de un movimiento circular de radio  $R$  con una energía  $E_i$  y momento angular  $L_i$ .

**Impulso radial:** Ahora, le damos un impulso radial hacia fuera con una velocidad  $v_r$ .

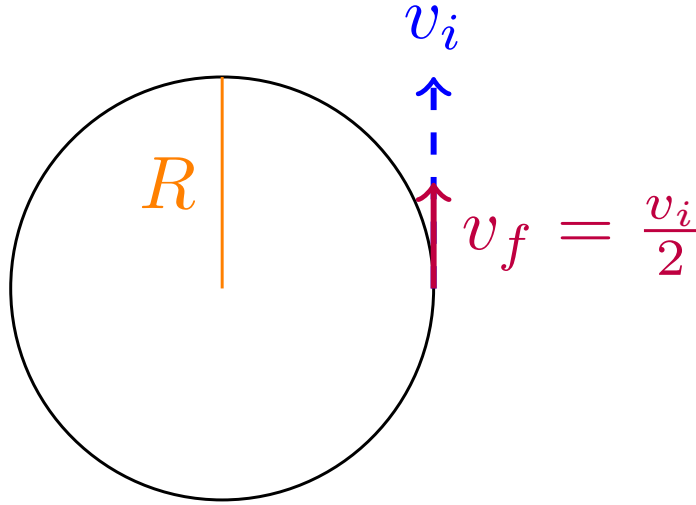


Nos preguntamos cuál es la energía y el momento angular final. Como vimos en el ejercicio 9 en la página 139,  $L_f = L_i$  pues un momento radial no genera momento angular y, en consecuencia, el momento angular no cambia. Así, al ser  $v^2 = R^2 \dot{\theta}^2 + v_r^2$ ,  $E_f$  es de la forma:

$$\begin{aligned} E_f &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k R^2 = \frac{1}{2} m \left( R^2 \dot{\theta}^2 + \underbrace{v_r^2}_{= \left( \frac{I}{m} \right)^2} \right) + \frac{1}{2} k R^2 = \underbrace{\frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k R^2}_{= E_i} + \frac{1}{2} m \left( \frac{I}{m} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \left( \frac{I}{m} \right)^2 + E_i \end{aligned}$$

donde  $\frac{I}{m} = v_r$ .

**Impulso tangencial 1:** Ahora, aplicamos un impulso tangencial tal que  $v_f = \frac{v_i}{2}$ .

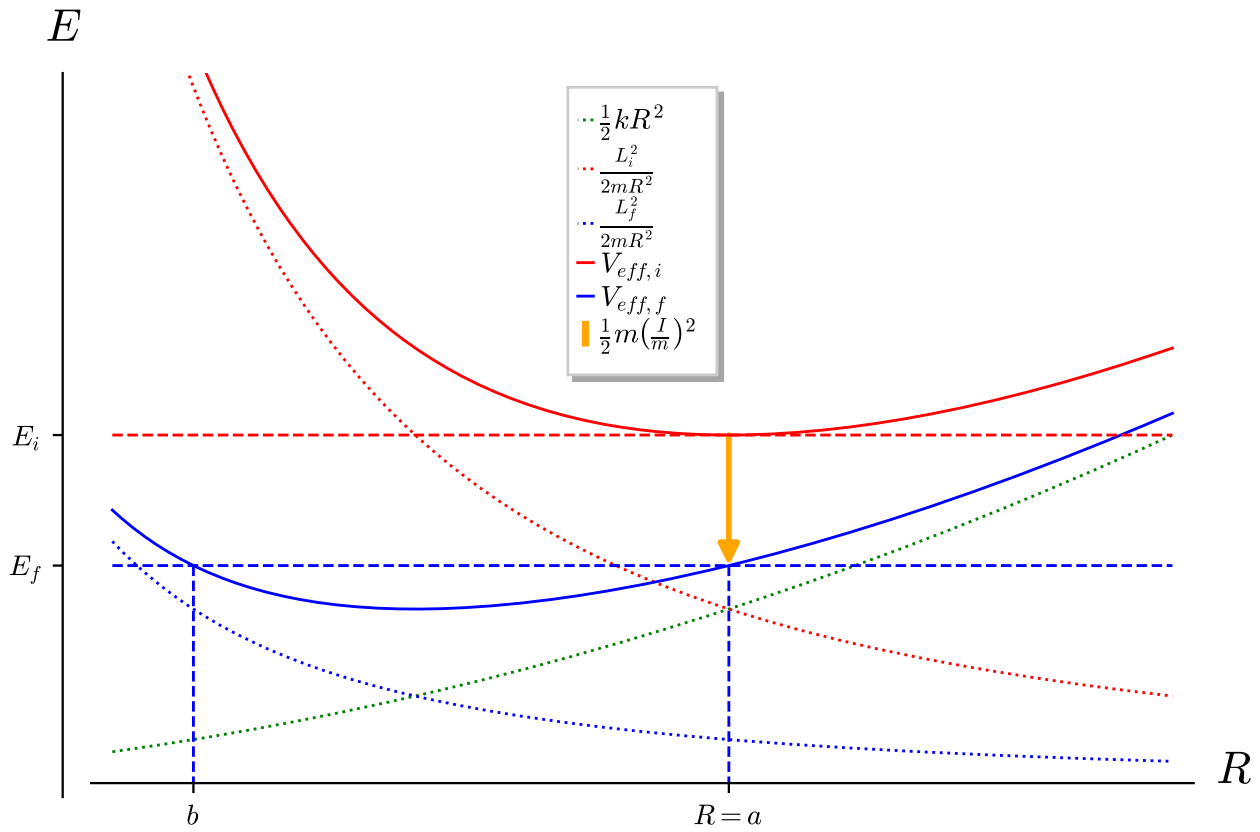


En consecuencia:

$$L_f = mRv_f = \overbrace{mRv_i}^{=L_i} \frac{1}{2} = \frac{L_i}{2}$$

$$E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}kR^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_i}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}kR^2 = \frac{1}{4}\underbrace{\frac{1}{2}mv_i^2}_{=T_i} + \underbrace{\frac{1}{2}kR^2}_{=V_i} = \frac{T_i}{4} + V_i < E_i$$

Veamos la situación gráficamente:



Podemos fácilmente localizar la nueva energía cualitativamente en la gráfica, porque la partícula se sigue encontrando a distancia  $R$ .

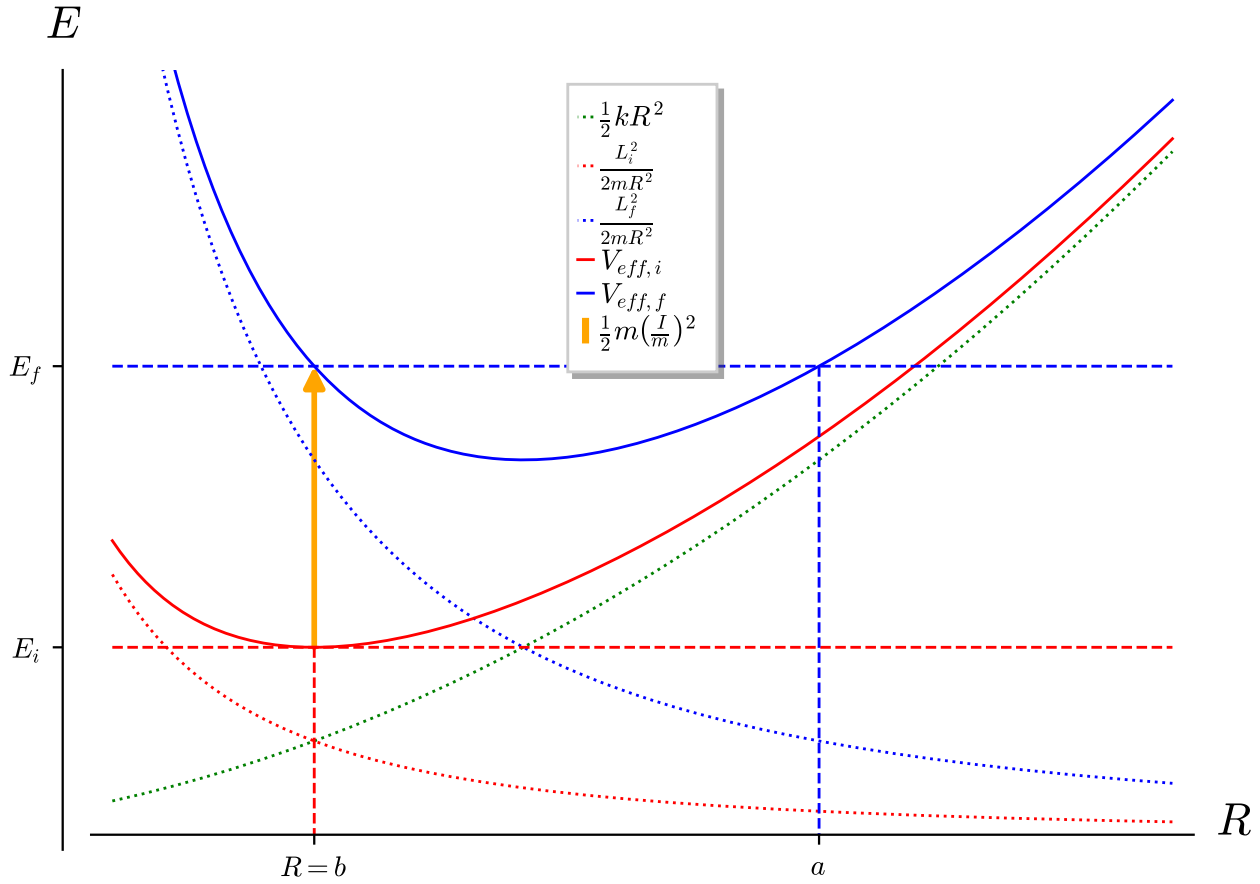
**Impulso tangencial 2:** Ahora, aplicamos un impulso tangencial tal que  $v_f = 2v_i$ .

En consecuencia:

$$L_f = mRv_f = \overbrace{mRv_i}^{=L_i} 2 = 2L_i$$

$$E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}kR^2 = \frac{1}{2}m(2v_i)^2 + \frac{1}{2}kR^2 = 4\underbrace{\frac{1}{2}mv_i^2}_{=T_i} + \underbrace{\frac{1}{2}kR^2}_{=V_i} = 4T_i + V_i > E_i$$

De nuevo, veamos la situación gráficamente:



### 3.2. Cónicas

*Agradecimientos 3.* Esta sección se debe en su totalidad a Juan Guerrero Marcos.

Para las curvas cónicas se cumple:

$$r \left[ e \cos(\theta - \theta_0) - \frac{k}{|k|} \right] = l$$

Donde  $r$  es la distancia desde el foco de la cónica hasta el punto situado en un ángulo  $\theta$ ,  $\theta_0$  es la inclinación de la curva respecto al ángulo cero del eje de coordenadas,  $k$  es la parte de la fuerza independiente de la posición (aunque únicamente está presente para indicar la naturaleza atractiva o repulsiva de la fuerza central que crea la trayectoria),  $e$  es la excentricidad de la curva y  $l$  es el *semi latus rectum*.

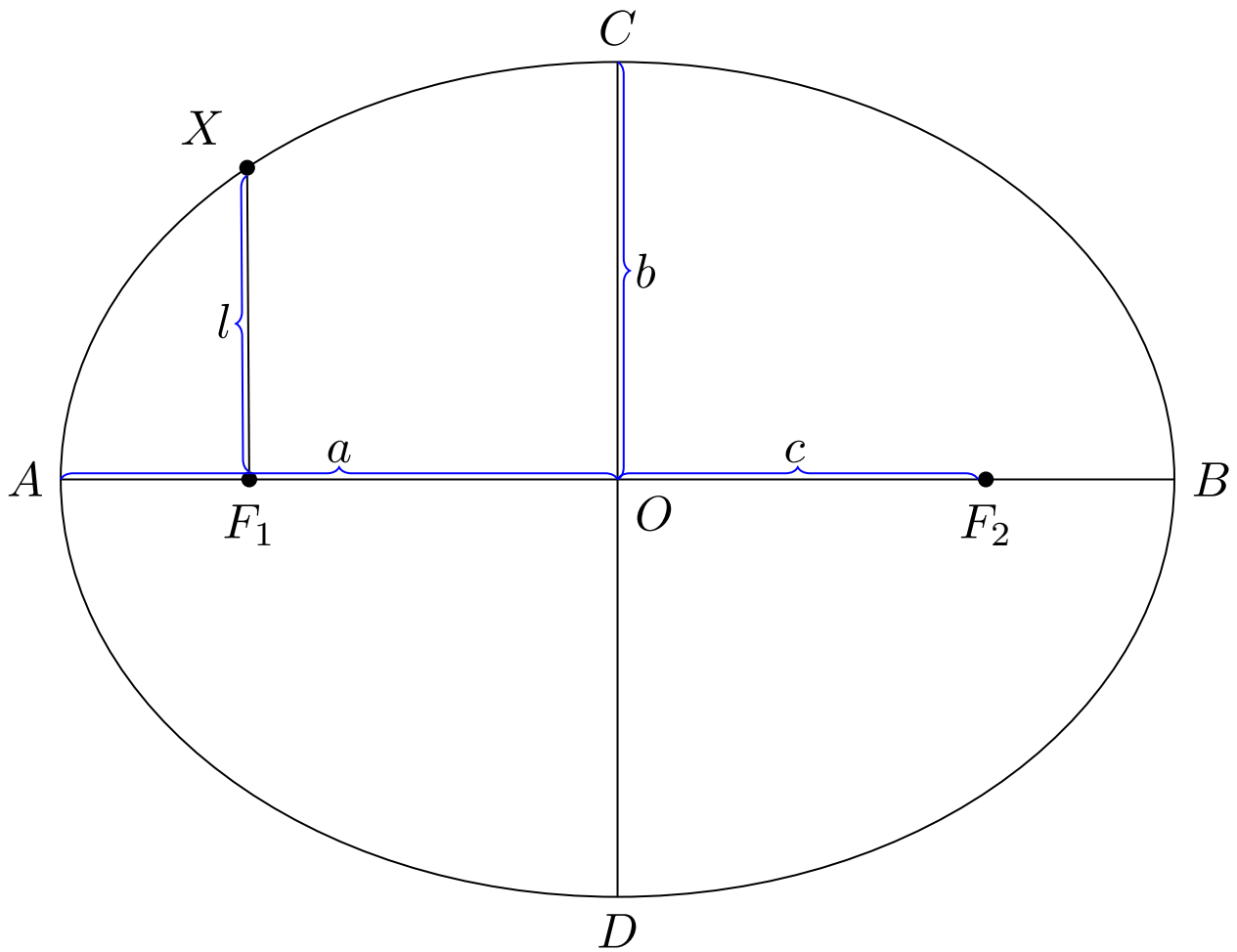
En función del valor de  $e$ , pueden distinguirse tres tipos de curvas cónicas: elipse, hipérbola y parábola.

#### 3.2.1. Elipse

Tiene lugar si el valor de la excentricidad está comprendido en el intervalo  $[0, 1)$ .

Para una elipse, las longitudes de los semiejes mayor y menor serán  $a$  y  $b$ , respectivamente y la distancia de uno de los focos al centro,  $c$ .





### 3.2.1.1. Relaciones

Se cumplen las siguientes relaciones:

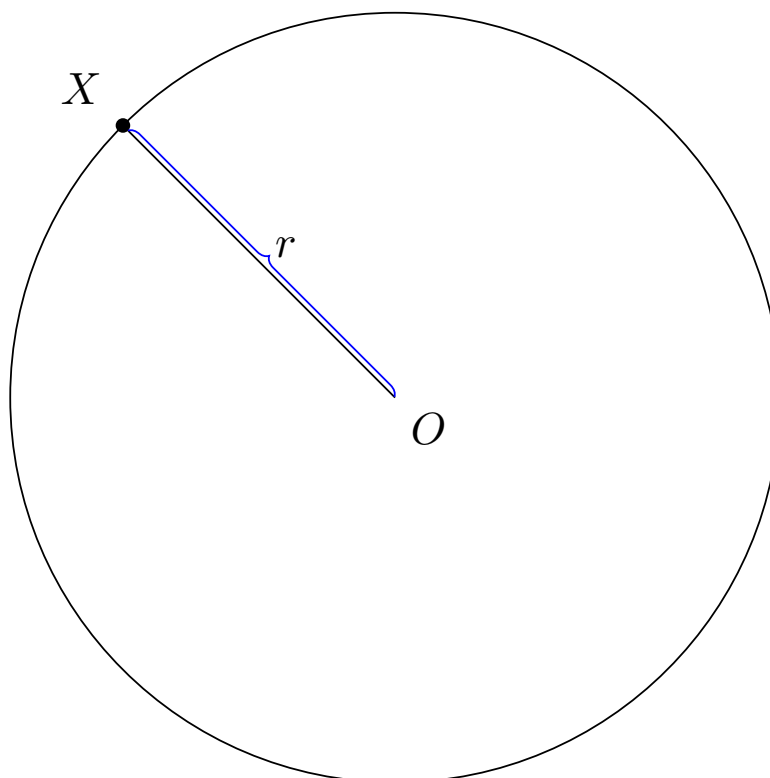
$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (3.2.1)$$

$$l = \frac{b^2}{a} \quad (3.2.2)$$

$$\overline{F_1 X} + \overline{F_2 X} = 2a, \forall X \quad (3.2.3)$$

### 3.2.1.2. Circunferencia

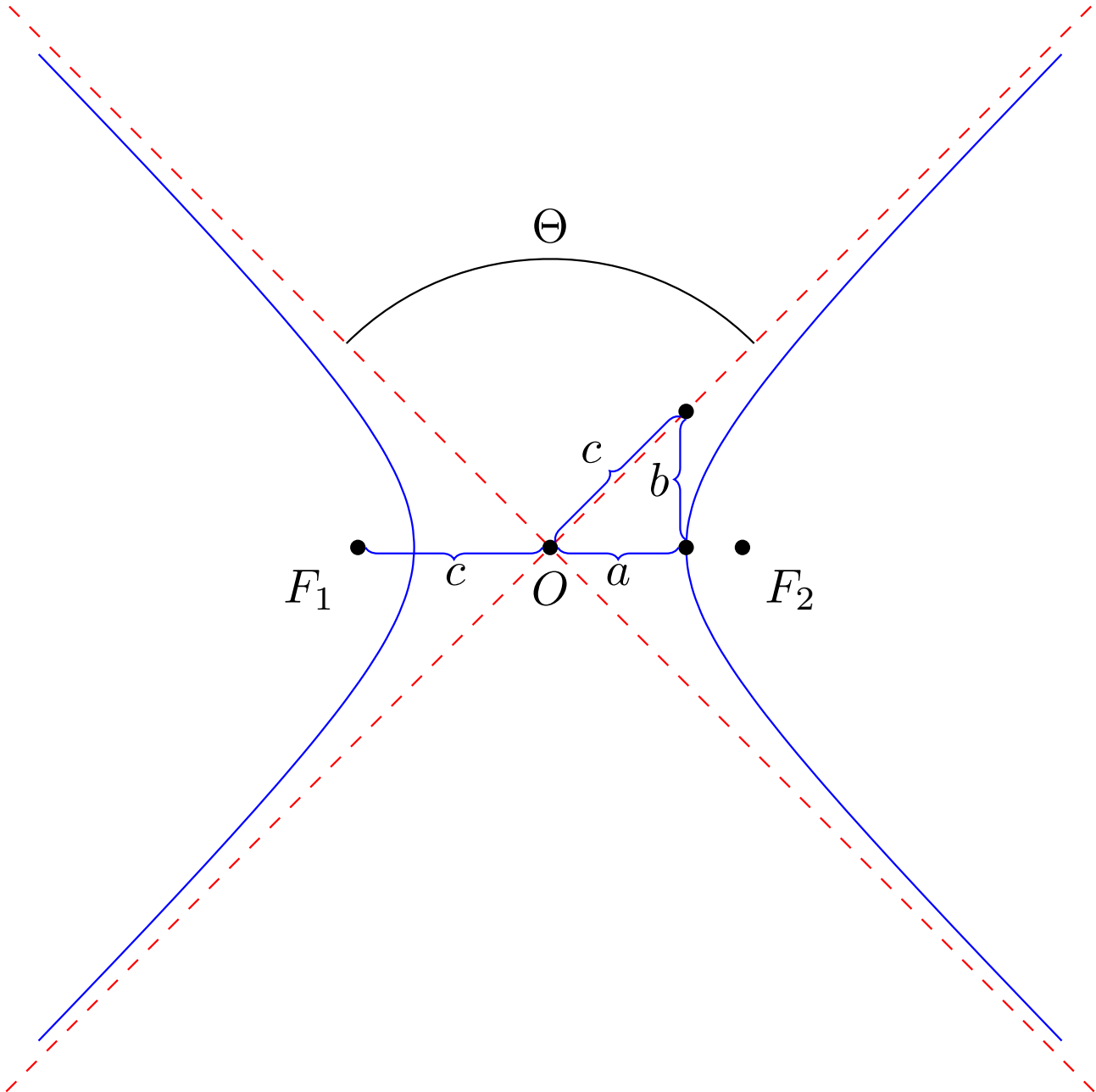
Un caso particular se da si  $e = 0$ , por lo que  $r$  será constante y la curva se llamará circunferencia.



Entonces  $a = b$ , por lo que  $l = b = r$ .

### 3.2.2. Hipérbola

Si la excentricidad de la cónica es superior a la unidad ( $e > 1$ ), entonces aparecen dos ramas que tienden asintóticamente a dos rectas que se intersectan en el origen  $O$ .



### 3.2.2.1. Relaciones

Se cumplen las siguientes relaciones:

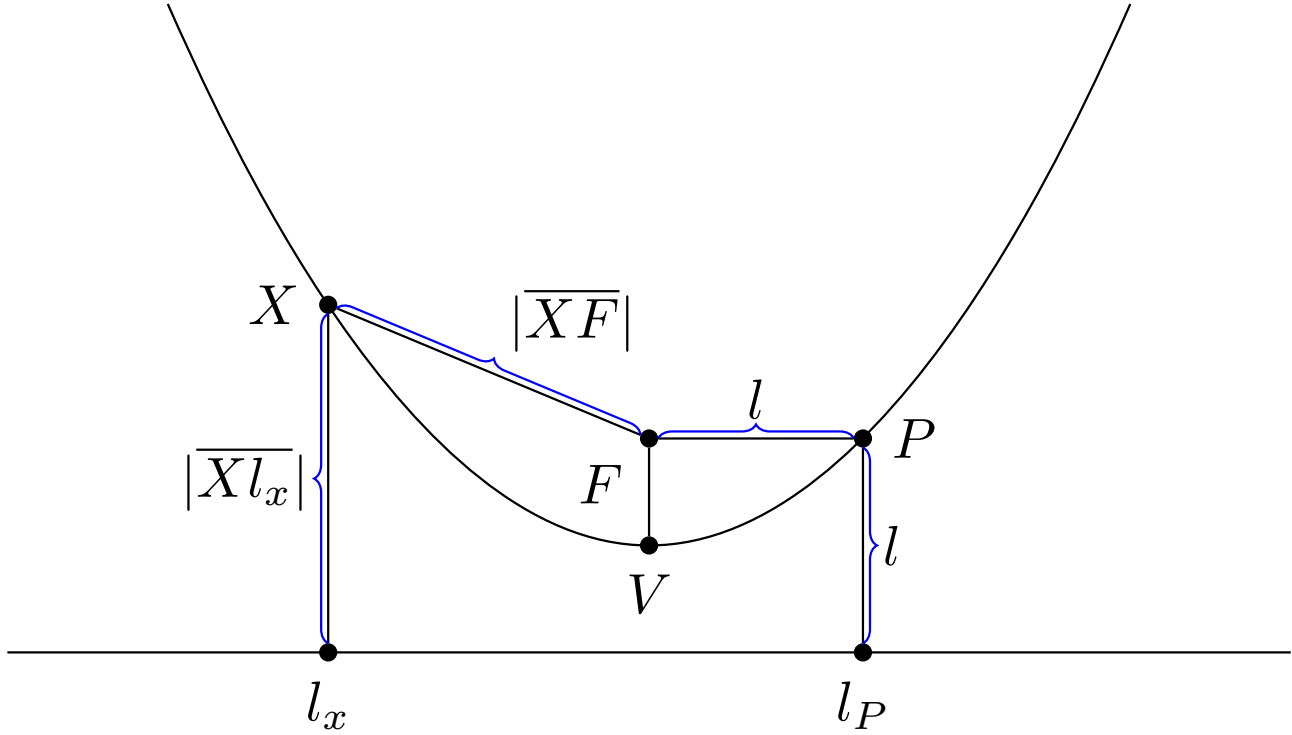
$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (3.2.4)$$

$$l = \frac{b^2}{a} \quad (3.2.5)$$

$$|\overline{F_1 X} - \overline{F_2 X}| = 2a, \forall X \quad (3.2.6)$$

### 3.2.3. Parábola

Cuando la excentricidad de la curva es de valor unidad ( $e = 1$ ), la cónica descrita es una parábola.



### 3.2.3.1. Relaciones

Entonces se cumplen:

$$l = 2\overline{FV} \quad (3.2.7)$$

$$\overline{FX} = \overline{Xl_x}, \quad \forall X \quad (3.2.8)$$

## 3.3. Ley cuadrática inversa

Vamos a considerar fuerzas del tipo:

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$$

Notemos que la fuerza dada arriba es central conservativa pues  $\exists V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable tal que  $F = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r}$  (hemos usado la proposición 8 en la página 22). Dicha función  $V(r)$  es:

$$V(r) = \frac{k}{r}$$

De manera que el potencial efectivo queda:

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}$$

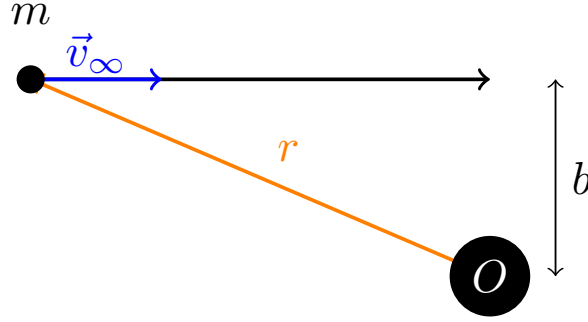
Diremos que la fuerza es repulsiva si  $k > 0$  y diremos que la fuerza es atractiva si  $k < 0$ .

**Definición 83.** Diremos que la trayectoria de una partícula es **abierta** o **no acotada** cuando o bien proviene del infinito, o bien llega hasta el infinito o ambas.

Análogamente, diremos que la trayectoria de una partícula es **cerrada** o **acotada** cuando la partícula ni proviene del infinito ni llega al infinito.

**Definición 84.** Sea una partícula sobre la que actúa una fuerza  $\vec{F}$ . Llamamos **parámetro de impacto**  $b$  con respecto al centro de fuerzas de  $\vec{F}$  a la mínima distancia entre el centro de fuerzas y la trayectoria de la partícula si fuese  $\vec{F} = \vec{0}$ .

Alternativamente, en el contexto de teoría de colisiones puede definirse el parámetro de impacto como la distancia perpendicular desde la trayectoria de entrada en línea recta del proyectil hasta un eje paralelo que pasa por el centro del blanco.



### 3.3.1. Caso $k > 0$

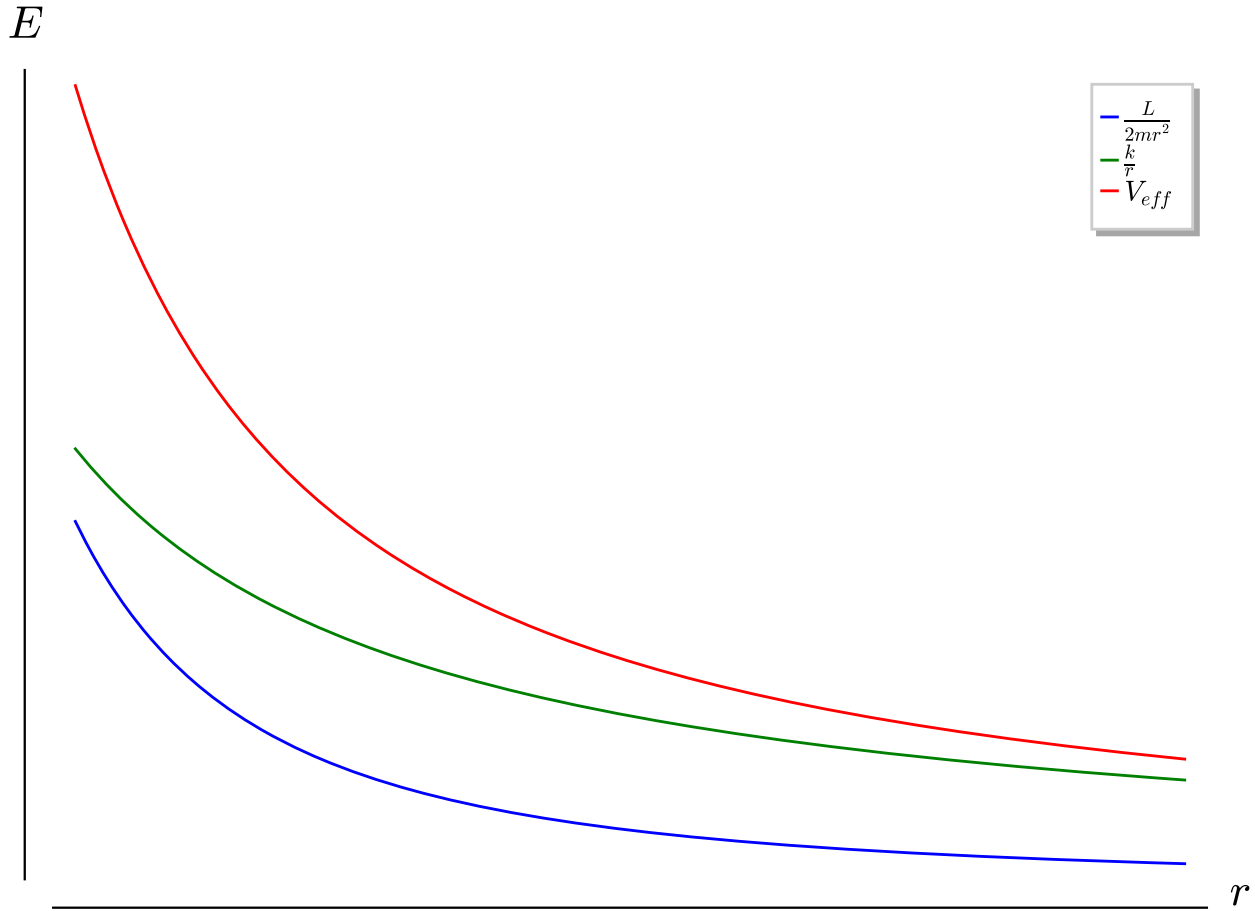
**Proposición 67.** La trayectoria de una partícula sometida a una fuerza el tipo:

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$$

con  $k > 0$  siempre es abierta. La energía potencial efectiva de la partícula no tiene mínimo. La mínima distancia entre la partícula y el centro de fuerzas se alcanza en:

$$r = \frac{k}{2E} + \sqrt{\frac{k^2}{4E^2} + b^2} := r_{\min}$$

donde  $b$  es el parámetro de impacto y  $E$  es la energía de la partícula (que sabemos que es una constante del movimiento).



*Demostración.* El potencial efectivo de la partícula es:

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}$$

Derivamos para buscar los puntos críticos:

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = \frac{L^2}{2m} (-2) \frac{1}{r^3} + k (-1) \frac{1}{r^2} = \frac{-L^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2} < 0$$

pues  $L, m, r, k > 0$ .

Por tanto, la expresión no anterior no se anula nunca y, en consecuencia, el potencial efectivo no tiene puntos críticos en nuestro intervalo de interés. Únicamente queda considerar el comportamiento de la función en el cero y en el infinito:

$$\frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$$

$$\frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

De forma que la función tiene ínfimo (0) pero no mínimo.

Como hemos visto antes, la derivada es siempre estrictamente negativa, luego nuestra función es estrictamente decreciente en  $(0, \infty)$ . Para que la trayectoria sea cerrada, debería haber al menos dos valores del potencial efectivo que se correspondieran con el mismo valor de  $r$ . Pero esto es imposible, pues como la función es estrictamente decreciente y continua en  $(0, \infty)$  es inyectiva y, si es inyectiva, a cada valor de  $r$  le corresponde un único valor de  $V_{eff}$ . Por consiguiente, las trayectorias son siempre abiertas.

Para probar la última parte, vamos a aplicar que sabemos calcular el valor de la energía en el límite del infinito:

$$E = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{r} \right) = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2$$

Para calcular el momento angular en el infinito vamos a aplicar un truco bastante elaborado y puede que algo difícil de comprender. En el infinito, como hemos visto antes, la energía potencial se hace cero, luego es como si no hubiera fuerzas. Si no tenemos fuerzas, el momento angular desde cualquier punto  $O$  debe conservarse por el teorema 5 en la página 21. Tomemos  $O$  como el centro de fuerzas de nuestra fuerza  $\vec{F}$ . En ausencia de fuerzas, sabemos que la distancia mínima entre la trayectoria y nuestro punto  $O$  es  $b$  por la definición 84 en la página 156. Como la distancia mínima siempre es en perpendicular, sabemos que  $\vec{b} \perp \dot{\vec{r}}$ . Luego, el momento angular en el punto de mínima distancia (en el caso de ausencia de fuerzas) es:

$$L = mbv_{\infty}$$

dado que la velocidad en ausencia de fuerzas es constante por la primera ley de Newton (ver teorema 1 en la página 8). Pero, como el momento angular se conserva en ausencia de fuerzas, el momento angular en el infinito también será  $L = mbv_{\infty}$  y así (volviendo a nuestro caso inicial con  $\vec{F}$ ), como en el infinito es como si no hubiera fuerzas, el momento angular de nuestra partícula sometida a la fuerza  $\vec{F}$  en el infinito también es  $L = mbv_{\infty}$ . Por último, como  $\vec{F}$  es central, su momento angular es constante y así el momento angular de nuestra partícula es siempre:

$$L = mbv_{\infty}$$

Como  $V_{eff}$  es estrictamente decreciente, sabemos que dado un nivel de energía fijo  $E$ , la menor distancia va a darse cuando sea  $E = V_{eff}(r)$ . Así, tenemos:

$$\frac{1}{2}mv_{\infty}^2 = E = \frac{\overbrace{m^2 b^2 v_{\infty}^2}^{=L^2}}{2mr_{\min}^2} + \frac{k}{r_{\min}}$$

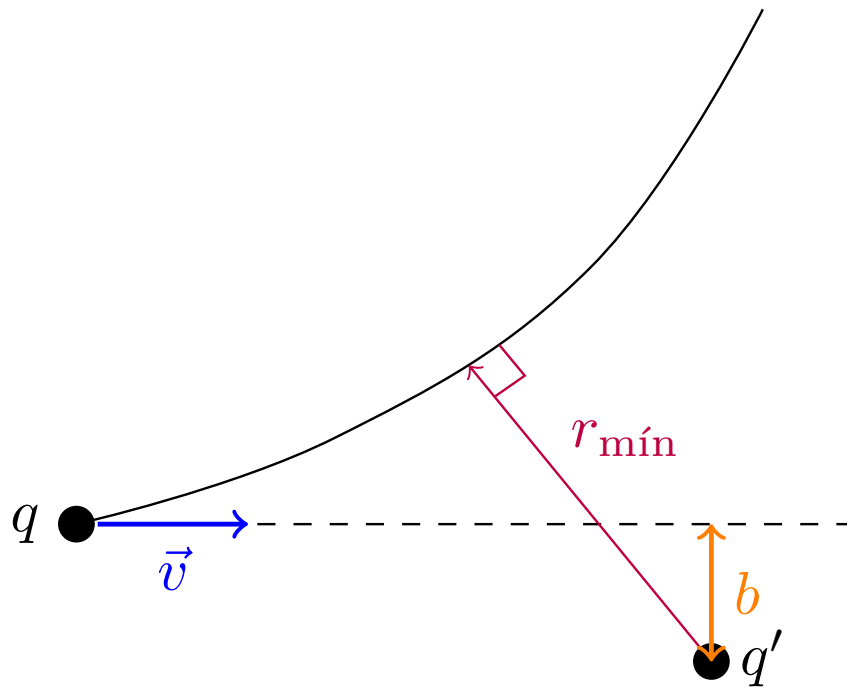
Dividiendo por  $\frac{1}{2}mv_{\infty}^2$  a ambos lados, tenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{b^2}{r_{\min}^2} + \frac{k}{\underbrace{\frac{1}{2}mv_{\infty}^2}_{=E} r_{\min}} = \frac{b^2}{r_{\min}^2} + \frac{k}{Er_{\min}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow r_{\min}^2 &= b^2 + \frac{k}{E}r_{\min} \Leftrightarrow r_{\min}^2 - \frac{k}{E}r_{\min} - b^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow r_{\min} &= \frac{\frac{k}{E} \pm \sqrt{\frac{k^2}{E^2} + 4b^2}}{2} = \frac{k}{2E} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4E^2} + b^2} \end{aligned}$$

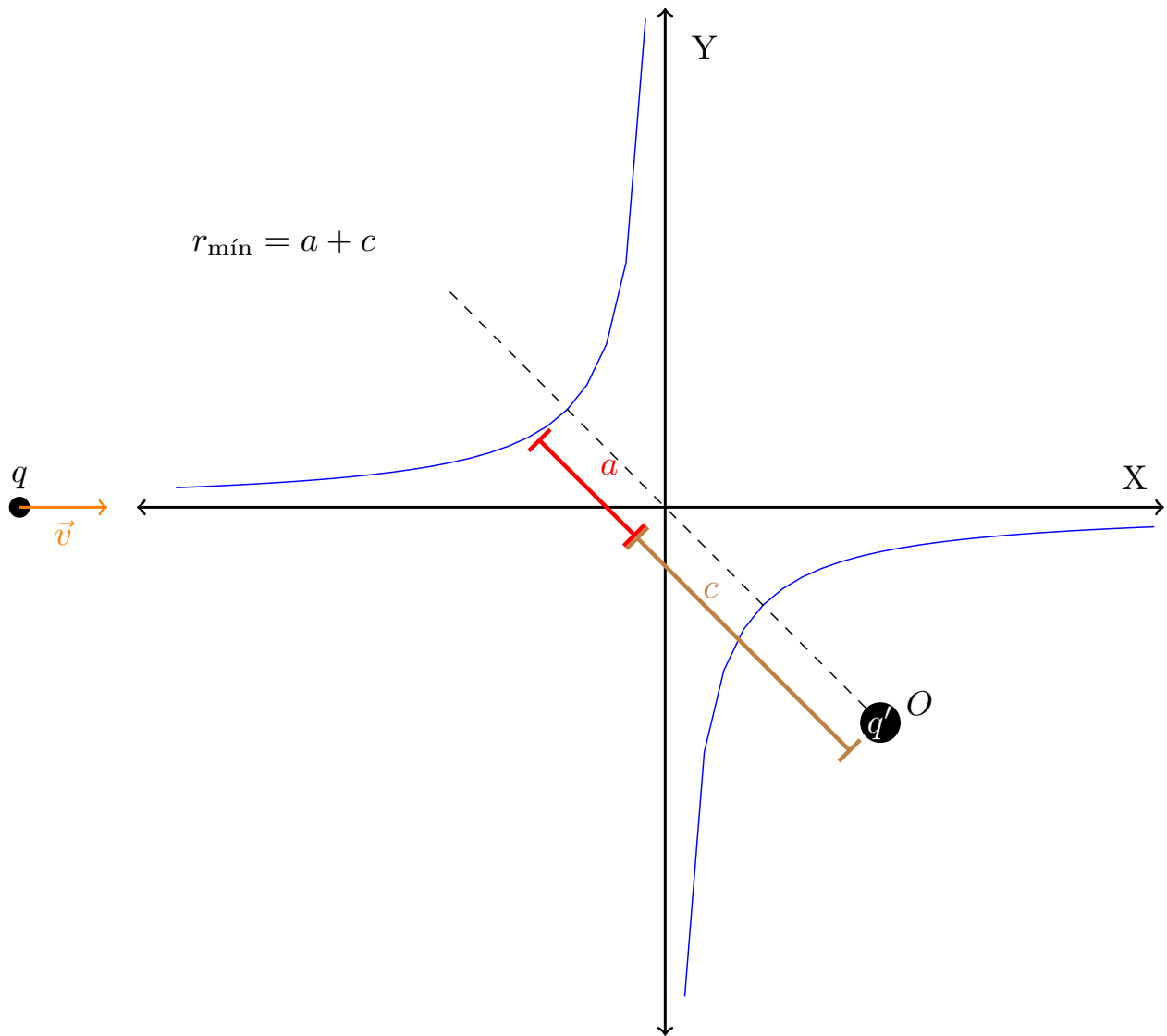
donde descartamos la solución negativa pues  $\frac{k^2}{4E^2} + b^2 \geq \frac{k^2}{4E^2}$  y, por tanto, la solución con el  $-$  siempre es negativa o cero (y sólo es cero si es  $b^2 = 0$ ) y  $r \geq 0$ . Q.E.D.

La proposición anterior podría aplicarse en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 21.** Una partícula de carga  $q$  se mueve en el campo creado por  $q'$  ( $qq' > 0$ ), fija en  $O$ . Inicialmente  $q$  se encuentra muy lejos de  $O$  con  $v$  cuya dirección dista  $b$  de 0.







### 3.3.2. Caso $k < 0$

**Definición 85.** Llamamos *semi latus rectum*  $l$  a:

$$l := \frac{L^2}{m|k|}$$

Dimos una definición más gráfica de este concepto en la sección 3.2 en la página 151.

**Proposición 68.** La trayectoria de una partícula sometida a una fuerza el tipo:

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$$

con  $k < 0$  puede ser tanto abierta como cerrada. Existe el mínimo de la energía potencial efectiva, se alcanza en  $r = l$  y vale  $V_{\text{eff},\text{mín}} = -\frac{|k|}{2l} = \frac{V(l)}{2}$ . Tenemos la siguiente casuística:

- Si la energía potencial efectiva es mínima  $E = V_{\text{eff},\text{mín}}$ , entonces el movimiento es circular de radio  $r = l$ . Además, se da:

$$E = \frac{V(l)}{2} = -T$$

y la velocidad del movimiento circular viene dada por la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{|k|}{ml}}$$

- Si  $V_{eff,min} < E < 0$ , entonces tendremos una órbita cerrada cuya distancia mínima y máxima son las dos soluciones de la ecuación en  $r$ :

$$r^2 - \frac{k}{E}r + \frac{kl}{2E} = 0$$

- Si  $E = 0$ , entonces la trayectoria es abierta y la distancia mínima es:

$$r_{min} = \frac{l}{2}$$

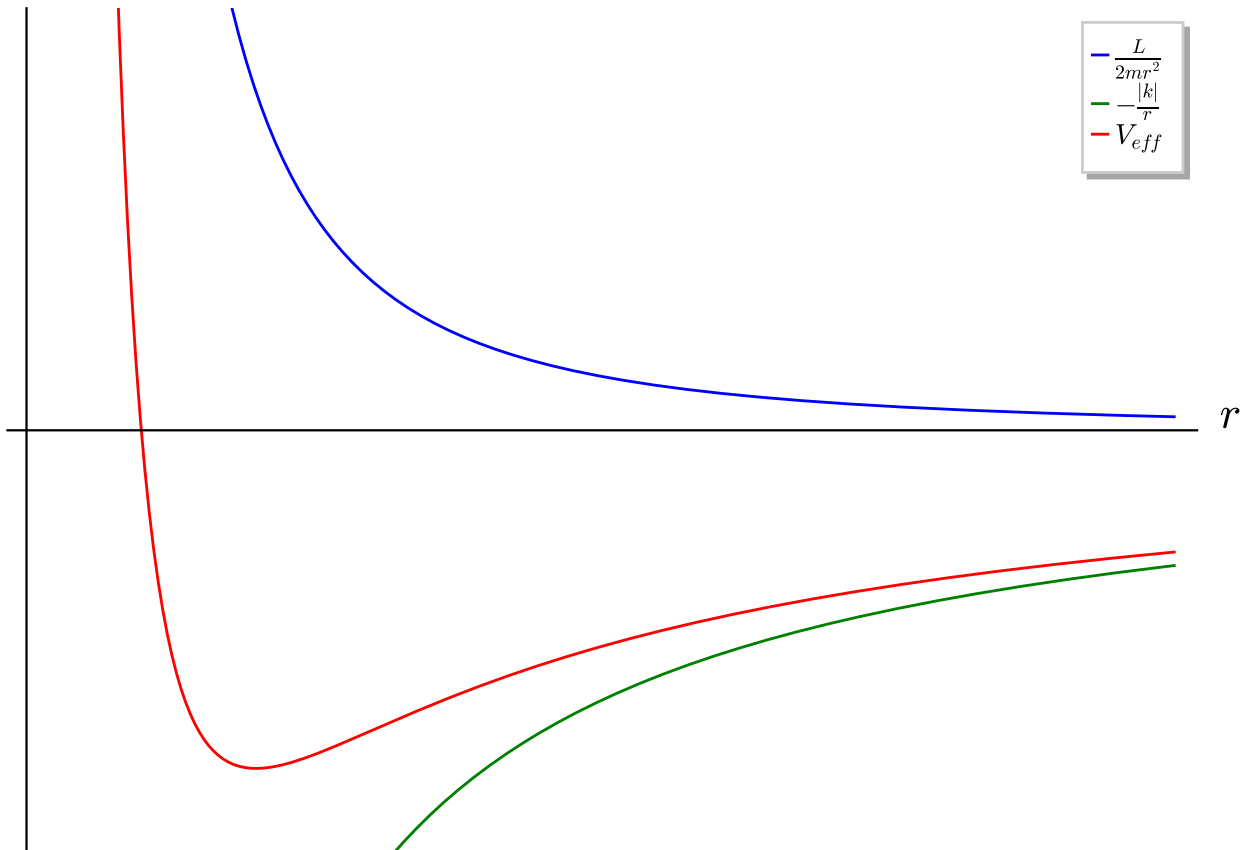
Además, la velocidad de la partícula es nula en el infinito  $v_{\infty} = 0$ .

- Si  $E > 0$ , entonces la trayectoria es abierta y la distancia mínima es la única solución positiva de la ecuación en  $r$ :

$$r^2 + \frac{|k|}{E}r - \frac{|k|l}{2E} = 0$$

Además, el módulo de la velocidad en el infinito es mayor que cero  $v_{\infty} > 0$ .

$E$



*Demostración.* En este caso, utilizando la definición 85 en la página anterior, la energía potencial efectiva viene dada por:

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{|k|}{r} = |k| \left( \frac{l}{2r^2} - \frac{1}{r} \right)$$

Hallemos sus puntos críticos:

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = |k| \left( \frac{l}{2} (-2) \frac{1}{r^3} - (-1) \frac{1}{r^2} \right) = |k| \left( -\frac{l}{r^3} + \frac{1}{r^2} \right)$$

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = 0 \stackrel{k \neq 0}{\Leftrightarrow} -\frac{l}{r^3} + \frac{1}{r^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{l}{r^3} = \frac{1}{r^2} \Leftrightarrow l = r$$

Bien, ahora hallemos el valor de  $V_{eff}$  en el mínimo:

$$V_{eff, \min} = V_{eff}(r = l) = |k| \left( \frac{l}{2l^2} - \frac{1}{l} \right) = \frac{|k|}{l} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{|k|}{2l} = \frac{V(l)}{2} < 0$$

Para ver que es un mínimo absoluto tenemos que estudiar la función  $V_{eff}$  en el infinito y en el cero:

$$V_{eff} = |k| \left( \frac{l}{2r^2} - \frac{1}{r} \right) = |k| \left( \frac{l - 2r}{2r^2} \right)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_{eff} = |k| \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{l}{r^2} \right) = \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{eff} = |k| \lim_{r \rightarrow \infty} \left( -\frac{r}{r^2} \right) = -|k| \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{r} \right) = 0$$

En consecuencia, efectivamente  $r = l$  es un punto de mínimo absoluto.

- Si  $E = V_{eff, \min}$  entonces  $r$  es una constante del movimiento y en consecuencia  $\dot{r} = 0$  y la trayectoria es circular de radio  $r = l$ . Además, por lo visto antes, tenemos:

$$E = V_{eff, \min} = \frac{V(l)}{2}$$

Por tanto, como es  $E = T + V$ , será:

$$\frac{V(l)}{2} = T + V(l) \Leftrightarrow T = -\frac{V(l)}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{V(l)}{2} = \frac{|k|}{2l} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2 = \frac{|k|}{ml} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{|k|}{ml}}$$

- Si es  $V_{eff, \min} < E < 0$ , entonces, por la ecuación radial de la energía (ver proposición 65 en la página 142):

$$0 > E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + |k| \left( \frac{l}{2r^2} - \frac{1}{r} \right)$$

Como el único punto crítico de  $V_{eff}$  es un mínimo relativo que se da en  $r = l$ , sabemos que para todo  $r < l$  la función  $V_{eff}$  es estrictamente decreciente y para todo  $r > l$  la función  $V_{eff}$  es estrictamente creciente. Por tanto, los valores máximos y mínimos de  $r$  se darán cuando  $E = V_{eff}(r) \Leftrightarrow \dot{r} = 0$ . Así, tenemos la ecuación:

$$E = |k| \left( \frac{l}{2r^2} - \frac{1}{r} \right) = |k| \left( \frac{l - 2r}{2r^2} \right) \Leftrightarrow E2r^2 = |k|(l - 2r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2Er^2 + 2|k|r - |k|l = 0 \Leftrightarrow r^2 + \frac{2|k|}{2E}r - \frac{|k|l}{2E} = 0$$

Como es  $E < 0$ , podemos expresar la ecuación de arriba como:

$$r^2 - \frac{|k|}{|E|}r + \frac{|k|l}{2|E|} = 0 \Leftrightarrow r^2 - \frac{k}{E}r + \frac{kl}{2E} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\frac{k}{E} \pm \sqrt{\frac{k^2}{E^2} - \frac{4kl}{2E}}}{2} = \frac{\frac{k}{E} \pm \sqrt{\frac{k^2 - 2klE}{E^2}}}{2}$$

Como es  $E > V_{eff,min}$ , debe ser  $E > -\frac{|k|}{2l} = \frac{k}{2l}$ . Así:

$$E > \frac{k}{2l} \Leftrightarrow 2klE < \frac{2k^2}{2} = k^2$$

porque es  $k < 0$ . Por tanto:

$$k^2 - 2klE > 0$$

En consecuencia, sabemos que las raíces de la ecuación son reales. Por otra parte, como  $-2klE < 0$ :

$$\frac{k^2 - 2klE}{E^2} < \frac{k^2}{E^2}$$

Y, por lo tanto:

$$r \geq \frac{\frac{k}{E} - \sqrt{\frac{k^2}{E^2} - \frac{4kl}{2E}}}{2} > \frac{\frac{k}{E} - \sqrt{\frac{k^2}{E^2}}}{2} = \frac{\frac{k}{E} - \frac{k}{E}}{2} = 0$$

Así, es las dos soluciones de la ecuación anterior son siempre positivas. Y como siempre tenemos garantizado que existen dos soluciones reales y positivas, es decir, que hay una distancia máxima y otra mínima, la órbita es cerrada.

- Si es  $E = 0$ , por el mismo argumento que antes, los valores máximos y mínimos de  $r$  se darán cuando  $E = V_{eff}(r) \Leftrightarrow \dot{r} = 0$ . Así, tenemos la ecuación:

$$0 = E = |k| \left( \frac{l}{2r^2} - \frac{1}{r} \right) = |k| \left( \frac{l - 2r}{2r^2} \right) \Leftrightarrow l - 2r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{l}{2}$$

Como la solución es única, necesariamente debe corresponderse con la distancia mínima. Por tanto, la trayectoria es abierta, ya que no hay una distancia máxima.

Por último cuando  $r \rightarrow \infty$ , tenemos:

$$0 = E = T + V = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \underbrace{\frac{|k|}{r}}_{\rightarrow 0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_\infty^2 = 0 \Leftrightarrow v_\infty = 0$$

- Si es  $E > 0$ , por el mismo razonamiento hecho en el segundo apartado, llegamos a la ecuación:

$$r^2 + \frac{2|k|}{2E}r - \frac{|k|l}{2E} = 0$$

Como es  $E > 0$ , podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$\begin{aligned} r^2 + \frac{|k|}{E}r - \frac{|k|l}{2E} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow r &= \frac{-\frac{|k|}{E} \pm \sqrt{\frac{k^2}{E^2} + \frac{4|k|l}{2E}}}{2} = \frac{-\frac{|k|}{E} \pm \sqrt{\frac{k^2 + 2|k|lE}{E^2}}}{2} \end{aligned}$$

Claramente las dos soluciones son reales pues:

$$\frac{k^2 + 2|k|lE}{E^2} > 0$$

Por otra parte, vemos cómo una solución es negativa. Probemos que la solución correspondiente al  $+$  es positiva. Tenemos:

$$\frac{k^2 + 2|k|lE}{E^2} > \frac{k^2}{E^2}$$

porque  $|k|, l, E, 2 > 0$ . Luego:

$$-\frac{|k|}{E} + \sqrt{\frac{k^2 + 2|k|lE}{E^2}} > -\frac{|k|}{E} + \sqrt{\frac{k^2}{E^2}} = -\frac{|k|}{E} + \frac{|k|}{E} = 0$$

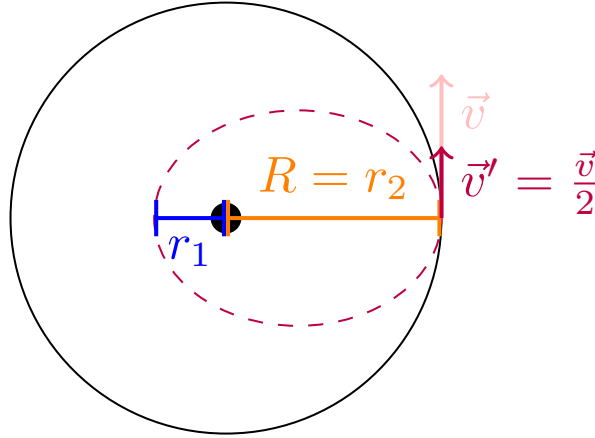
En consecuencia, tenemos una solución positiva que necesariamente se corresponderá con la mínima distancia y una solución negativa que no tiene significado físico. Por ende, la órbita será abierta.

Por último cuando  $r \rightarrow \infty$ , tenemos:

$$0 < E = T + V = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 - \underbrace{\frac{|k|}{r}}_{\rightarrow 0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 > 0 \Leftrightarrow |v_{\infty}| > 0$$

Q.E.D.

**Ejercicio 10.** Tenemos una partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza del estilo  $F = \frac{k}{r^2} \hat{r}$  con  $k < 0$  que describe una órbita circular y la partícula sufre un impulso tangencial tal que  $v' = \frac{v}{2}$ .



**Solución.** Como la órbita es circular, por la proposición 68 en la página 160 tenemos que el radio de la circunferencia es el *semi latus rectum*  $r = l$ . Por otra parte, sabemos que la energía es:

$$E = -\frac{|k|}{2l}$$

El nuevo momento angular es:

$$L' = mlv' = ml\frac{v}{2} = \overbrace{mlv}^{=L} \frac{1}{2} = \frac{L}{2}$$

Y la energía es:

$$E' = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{k}{l} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{k}{l} = \frac{1}{4}\frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{l} = \frac{1}{4}T + \frac{k}{l} < E$$

## 3.4. Órbitas

### 3.4.1. Resultados generales

**Proposición 69.** Sea un partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza central conservativa  $\vec{F}$ . Entonces, siempre que sea  $\frac{du}{d\theta} \neq 0$  en coordenadas polares se cumple:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2} \left[ E - V\left(\frac{1}{u}\right) \right]$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2}$$

donde  $u = \frac{1}{r}$  y  $V$  es la función energía potencial asociada a  $\vec{F}$ .

*Demostración.* Partimos de la ecuación radial de la energía (ver proposición 65 en la página 142):

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

Por otra parte, por la proposición 63 en la página 141, sabemos que el momento angular en coordenadas polares puede expresarse como:

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

Nuestro objetivo es hallar  $r(\theta)$ . Para ello vamos a reescribir  $\dot{r}$  como sigue:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta}$$

Por el corolario 23 en la página 141, tenemos:

$$\dot{r} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta}$$

Ahora, hacemos el cambio de variable  $u = \frac{1}{r} \Leftrightarrow r = \frac{1}{u}$  y en consecuencia, por la regla de la cadena, tenemos:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}$$

Por consiguiente, nos queda:

$$\dot{r} = \frac{L}{m} u^2 \left( -\frac{1}{u^2} \right) \frac{du}{d\theta} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta}$$

Así, sustituyendo en la ecuación radial de la energía, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \frac{L^2}{m^2} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{2m} u^2 + V\left(\frac{1}{u}\right) &= E \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{L^2}{2m} \left[ \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] + V\left(\frac{1}{u}\right) &= E \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{L^2}{2m} \left[ \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] &= E - V\left(\frac{1}{u}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 &= \frac{2m}{L^2} \left[ E - V\left(\frac{1}{u}\right) \right] \end{aligned}$$

A continuación, vamos a derivar la ecuación anterior con respecto a  $\theta$ :

$$2 \frac{du}{d\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} + 2u \frac{du}{d\theta} = \frac{2m}{L^2} \left[ \underbrace{\frac{dE}{d\theta}}_{=0} - \underbrace{\frac{dV}{dr} \frac{dr}{d\theta}}_{=\frac{dV}{d\theta}} \right]$$

dado que  $E$  es una constante del movimiento por la proposición 64 en la página 142. Así, lo anterior es equivalente a:

$$\frac{du}{d\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} + u \frac{du}{d\theta} = -\frac{m}{L^2} \frac{dV}{dr} \frac{dr}{d\theta}$$

Como  $-\frac{dV}{dr} = F(r) = F\left(\frac{1}{u}\right)$ , tenemos:

$$\frac{du}{d\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} + u \frac{du}{d\theta} = \frac{m}{L^2} F\left(\frac{1}{u}\right) \frac{dr}{d\theta}$$

Recordando que hemos hallado anteriormente  $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}$ , llegamos a:

$$\frac{du}{d\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} + u \frac{du}{d\theta} = \frac{m}{L^2} F\left(\frac{1}{u}\right) \left(-\frac{1}{u^2}\right) \frac{du}{d\theta}$$

Como, por hipótesis era  $\frac{du}{d\theta} \neq 0$ , podemos dividir por  $\frac{du}{d\theta}$ , obteniendo:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} F\left(\frac{1}{u}\right)$$

*Q.E.D.*

*Observación 60.* A través de la proposición 69 en la página 164, podemos hallar la trayectoria de la partícula si conocemos la fuerza y viceversa.

### 3.4.2. Órbitas y trayectorias para la ley cuadrática inversa

#### 3.4.2.1. Ecuación de la trayectoria en coordenadas polares

**Proposición 70.** Sea un partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza del estilo  $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$ . Entonces en coordenadas polares se cumple:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 &= \frac{2m}{L^2} [E - ku] \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= -\frac{mk}{L^2} \end{aligned}$$

donde  $u = \frac{1}{r}$ .

*Demostración.* Trivial. Se parte de la proposición 69 en la página 164 y se sustituye:

$$V(r) = \frac{k}{r} \Leftrightarrow V\left(\frac{1}{u}\right) = ku$$

$$F(r) = \frac{k}{r^2} \Leftrightarrow F\left(\frac{1}{u}\right) = ku^2$$

*Q.E.D.*

**Proposición 71.** Sea un partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza del estilo  $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$ . Entonces, la trayectoria de la partícula de masa  $m$  es una cónica y la ecuación de la trayectoria viene dada por:

$$r [e \cos(\theta - \theta_0) - 1] = l \text{ si } k > 0$$

$$r [e \cos(\theta - \theta_0) + 1] = l \text{ si } k < 0$$

donde:

$$e = \sqrt{\frac{2lE}{|k|} + 1}$$

recibe el nombre de **excentricidad**.

Además, el origen de las coordenadas polares se encuentra en uno de los focos de la cónica.

*Demostración.* Partimos de la proposición 70, de manera que tenemos:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mk}{L^2} \Leftrightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{mk}{L^2} = 0$$

Multiplicando por  $l$  a ambos lados, obtenemos:

$$l \frac{d^2 u}{d\theta^2} + lu + \frac{lmk}{L^2} = 0$$

Como la derivada es lineal y como por la definición 85 en la página 160 es  $l = \frac{L^2}{m|k|}$  y  $l$  no depende de  $\theta$  (porque  $L$  no depende de  $\theta$ ), tenemos:

$$\frac{d^2(lu)}{d\theta^2} + lu + \frac{L^2}{m|k|} \frac{mk}{L^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2(lu)}{d\theta^2} + lu + \frac{k}{|k|} = 0$$

Tomando el cambio de variable  $z = lu + \frac{k}{|k|}$ , llegamos a:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = 0$$

que es una ecuación diferencial lineal como la de un oscilador armónico con  $\omega = 1$  y con variable independiente  $\theta$  en lugar de  $t$ . Por la proposición 29 en la página 78 tenemos que la solución de la ecuación diferencial anterior puede expresarse como:

$$z = a \cos(\theta - \theta_0)$$

donde  $a, \theta_0 \in \mathbb{R}$ . Por otra parte, de nuevo, por la proposición 70 en la página anterior llegamos a:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2} [E - ku]$$

Multiplicando por  $l^2$ , obtenemos:

$$l^2 \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + l^2 u^2 = \frac{2ml^2}{L^2} [E - ku]$$

Como la derivada es lineal y como por la definición 85 en la página 160 es  $l = \frac{L^2}{m|k|}$ , tenemos:

$$\left(\frac{d(lu)}{d\theta}\right)^2 + (lu)^2 = \frac{2m}{L^2} \frac{L^4}{m^2 k^2} [E - ku] = \frac{2L^2}{mk^2} [E - ku] = \frac{2l}{|k|} [E - ku]$$

Sumando  $2lu \frac{k}{|k|} + 1$  a ambos lados, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d(lu)}{d\theta}\right)^2 + (lu)^2 + 2lu \frac{k}{|k|} + 1 &= \frac{2l}{|k|} [E - ku] + 2lu \frac{k}{|k|} + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{d(lu)}{d\theta}\right)^2 + \left(lu + \frac{k}{|k|}\right)^2 &= \frac{2l}{|k|} [E - ku + ku] + 1 = \frac{2lE}{|k|} + 1 \end{aligned}$$

Llamando  $e^2 := \frac{2lE}{|k|} + 1$ , nos queda:

$$\left(\frac{d(lu)}{d\theta}\right)^2 + \left(lu + \frac{k}{|k|}\right)^2 = e^2$$

Tomando el cambio de variable  $z = lu + \frac{k}{|k|}$ , llegamos a:

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 + z^2 = e^2$$

Recordando que hemos hallado antes que:

$$z = a \cos(\theta - \theta_0)$$



$$\frac{dz}{d\theta} = -a \sin(\theta - \theta_0)$$

y sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} [-a \sin(\theta - \theta_0)]^2 + [a \cos(\theta - \theta_0)]^2 &= e^2 \Leftrightarrow a^2 \sin^2(\theta - \theta_0) + a^2 \cos^2(\theta - \theta_0) = e^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 \underbrace{[\sin^2(\theta - \theta_0) + \cos^2(\theta - \theta_0)]}_{=1} = e^2 \xLeftrightarrow{a, e > 0} a = e \end{aligned}$$

En consecuencia, llegamos a:

$$z = e \cos(\theta - \theta_0)$$

Por otra parte, recordemos que:

$$z = lu + \frac{k}{|k|} = \frac{l}{r} + \frac{k}{|k|}$$

Así:

$$\begin{aligned} e \cos(\theta - \theta_0) &= \frac{l}{r} + \frac{k}{|k|} \Leftrightarrow e \cos(\theta - \theta_0) - \frac{k}{|k|} = \frac{l}{r} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r \left[ e \cos(\theta - \theta_0) - \frac{k}{|k|} \right] = l \end{aligned}$$

Si  $k > 0$ , entonces la ecuación anterior queda:

$$r [e \cos(\theta - \theta_0) - 1] = l$$

Mientras que si  $k < 0$ , entonces:

$$r [e \cos(\theta - \theta_0) + 1] = l$$

Cualquiera de las dos ecuaciones anteriores se corresponde con una cónica expresada en coordenadas polares tomando el origen de coordenadas en uno de los focos, como puede verse en la sección 3.2 en la página 151.  
Q.E.D.

**Proposición 72.** Sea un partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza del estilo  $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$ . Si restringimos  $\theta$  a  $[0, 2\pi)$ , la mínima distancia entre la partícula y el centro de fuerzas se alcanza en  $\theta = \theta_0$  y viene dada por:

$$r_{\min} = \frac{l}{e - 1} \text{ si } k > 0$$

$$r_{\min} = \frac{l}{e + 1} \text{ si } k < 0$$

La mayor distancia entre la partícula y el centro de fuerzas cuando  $k < 0$  y  $0 \leq e < 1$  se alcanza en  $\theta = \theta_0 + \pi$  y viene dada por la expresión:

$$r_{\max} = \frac{l}{-e + 1}$$

y no existe en caso contrario (es infinita).

*Demostración.* Partiendo de la proposición 71 en la página 166, sabemos que la trayectoria de la partícula de masa  $m$  cuando  $k > 0$  viene dada por la ecuación:

$$r [e \cos(\theta - \theta_0) - 1] = l$$

Despejando, tenemos:

$$r = \frac{l}{e \cos(\theta - \theta_0) - 1}$$

El valor de  $r$  será mínimo cuando el numerador sea máximo. Eso ocurrirá cuando:

$$\cos(\theta - \theta_0) = 1 \Leftrightarrow \theta - \theta_0 = 0 \Leftrightarrow \theta = \theta_0$$

En ese caso,  $r$  vale:

$$r_{\min} = \frac{l}{e-1}$$

Recíprocamente, el mayor valor de  $r$  se alcanzaría cuando el denominador fuese mínimo, pero como  $e \geq 0$ , el valor que hace el denominador mínimo, también lo hace negativo y  $r$  no puede ser negativo. Por tanto, no existe  $r_{\max}$  cuando  $k > 0$ .

De nuevo, partiendo de la proposición 71 en la página 166, sabemos que la trayectoria de la partícula de masa  $m$  cuando  $k < 0$  viene dada por la ecuación:

$$r[e \cos(\theta - \theta_0) + 1] = l$$

Despejando, tenemos:

$$r = \frac{l}{e \cos(\theta - \theta_0) + 1}$$

El valor de  $r$  será mínimo cuando el numerador sea máximo. Eso ocurrirá cuando:

$$\cos(\theta - \theta_0) = 1 \Leftrightarrow \theta - \theta_0 = 0$$

En ese caso,  $r$  vale:

$$r_{\min} = \frac{l}{e+1}$$

Recíprocamente, el mayor valor de  $r$  se alcanza cuando el denominador es mínimo. Esto tiene lugar cuando:

$$\cos(\theta - \theta_0) = -1 \Leftrightarrow \theta - \theta_0 = \pi \Leftrightarrow \theta = \theta_0 + \pi$$

El mínimo del denominador será positivo cuando siempre que sea  $0 \leq e < 1$ . En ese caso:

$$r_{\max} = \frac{l}{-e+1}$$

*Q.E.D.*

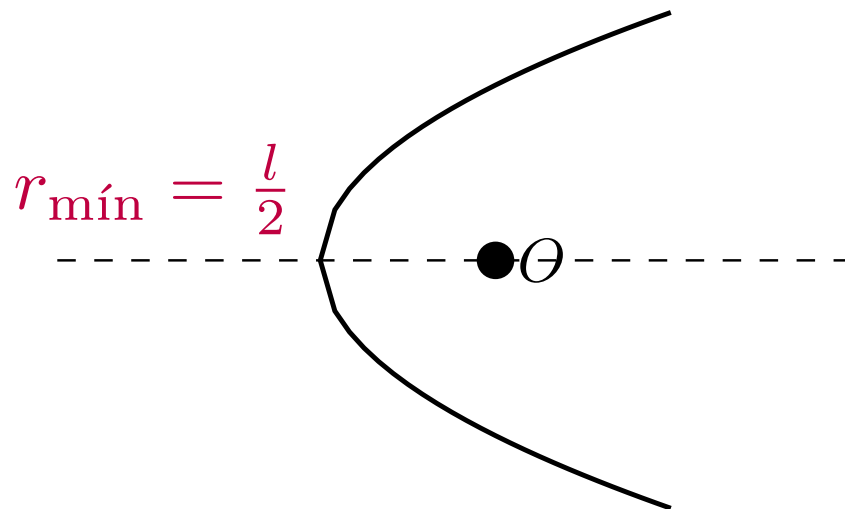
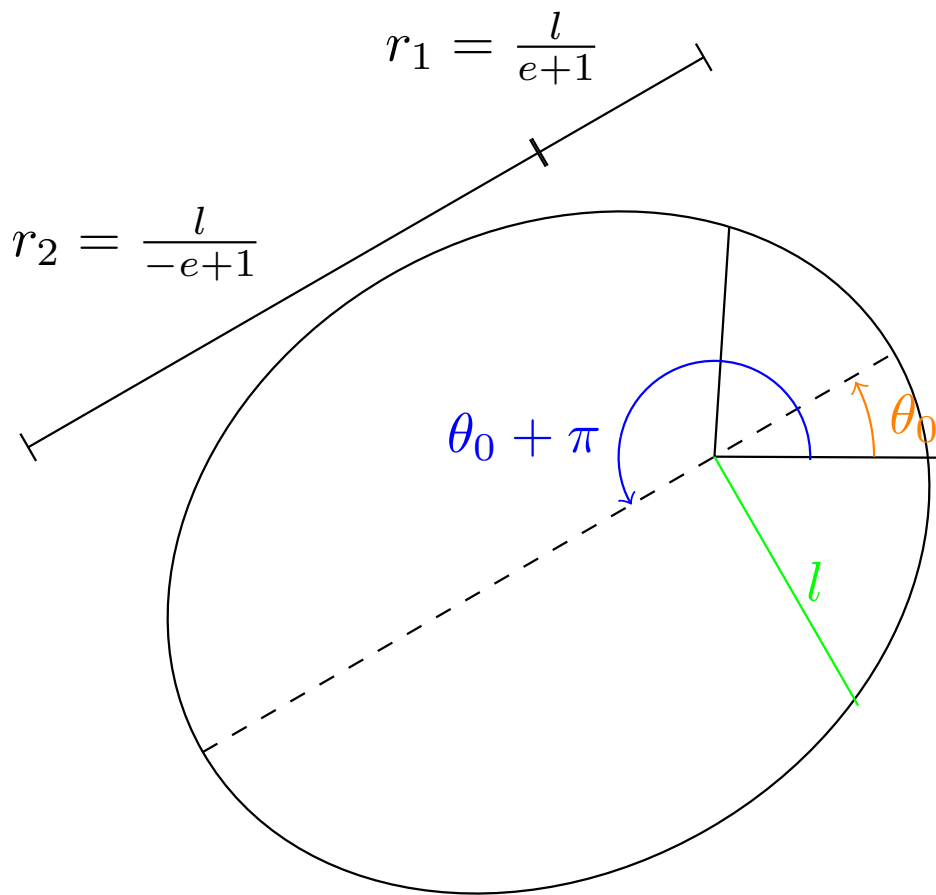
**Corolario 25.** Sea un partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza del estilo  $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$ . Si restringimos  $\theta$  a  $[0, 2\pi)$ ,  $\theta_0$  es el ángulo que forma el punto más cercano al origen de coordenadas con la horizontal.

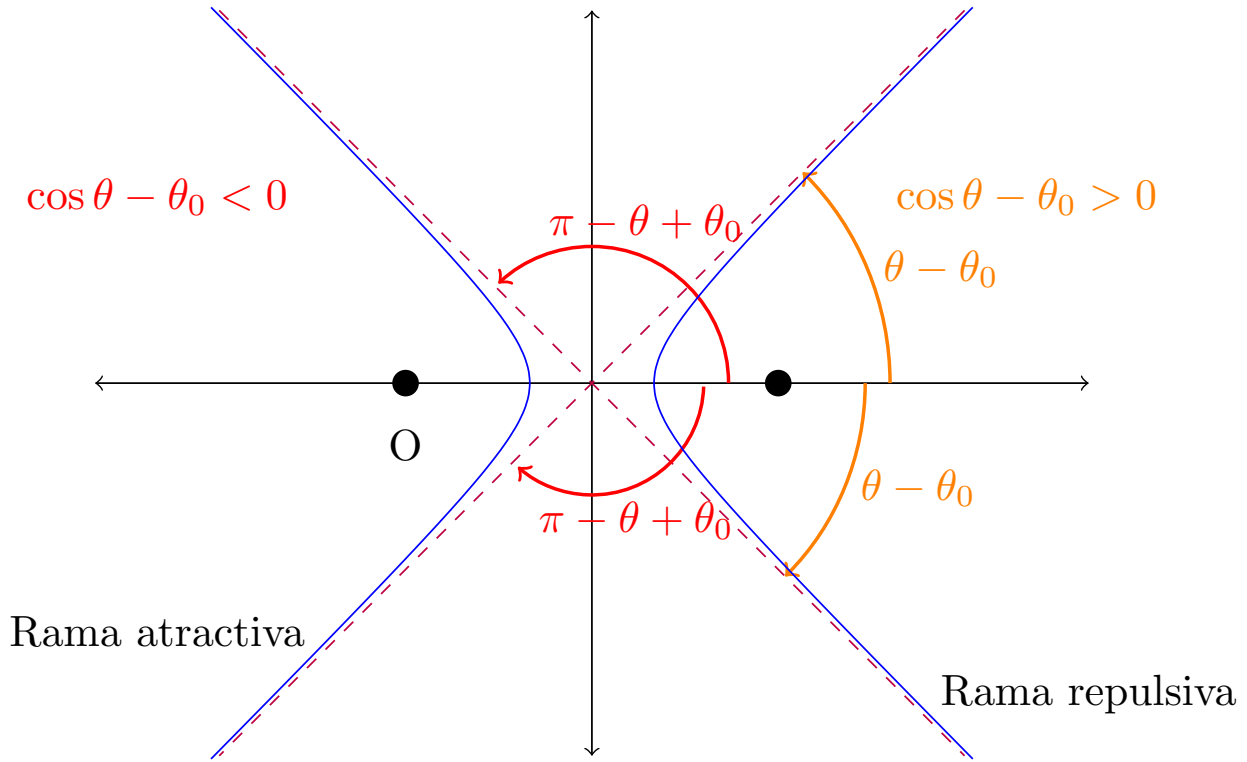
*Demostración.* Trivial tras leer el enunciado de la proposición anterior.

*Q.E.D.*

**Proposición 73.** Sea un partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza del estilo  $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$ . Restringimos  $\theta$  a  $[0, 2\pi)$ .

- Si  $k > 0$ , se da siempre  $E > 0$  y la trayectoria se corresponde con la «rama derecha» ( $\cos(\theta - \theta_0) > 0$ ) de una hipérbola ( $e > 1$ ), cuyas asíntotas forman los ángulos  $\arccos\left(\frac{1}{e}\right)$  y  $\arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$  con la dirección asociada a  $\theta_0$ .
- Si  $k < 0$  y además:
  - $E = V_{eff, \min} = -\frac{|k|}{2l}$ , entonces la trayectoria es una circunferencia ( $e = 0$ ).
  - $V_{eff, \min} < E < 0$ , entonces la trayectoria es una elipse ( $0 < e < 1$ ).
  - $E = 0$ , entonces la trayectoria es una parábola ( $e = 1$ ).
  - $E > 0$ , entonces la trayectoria se corresponde con la «rama izquierda» ( $\cos(\theta - \theta_0) < 0$ ) de una hipérbola ( $e > 1$ ), cuyas asíntotas forman los ángulos  $\arccos\left(\frac{1}{e}\right)$  y  $\arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$  con la dirección asociada a  $\theta_0$ .





*Demostración.* Partimos de la expresión dada para la excentricidad  $e$  en la proposición 71 en la página 166:

$$e = \sqrt{\frac{2lE}{|k|} + 1}$$

- Si es  $k > 0$ , entonces la energía en cualquier punto viene dada por:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{>0} + \underbrace{\frac{k}{r}}_{>0} > 0$$

Así, siempre es  $E > 0$ . Por tanto:

$$\frac{2lE}{|k|} > 0$$

En consecuencia:

$$\frac{2lE}{|k|} + 1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2lE}{|k|} + 1} > 1 \Leftrightarrow e > 1$$

De esta forma, la trayectoria es una hipérbola.

Por la proposición 71 en la página 166, tenemos que la trayectoria en este caso viene descrita por la ecuación:

$$r [e \cos(\theta - \theta_0) - 1] = l$$

Para hallar las asíntotas, vamos a hacer el límite cuando  $r \rightarrow \infty$  en la expresión anterior. Nótese que como  $l \in \mathbb{R}$ , necesariamente cuando  $r \rightarrow \infty$ :

$$e \cos(\theta - \theta_0) - 1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow e \cos(\theta - \theta_0) \rightarrow 1 \Leftrightarrow \cos(\theta - \theta_0) \rightarrow \frac{1}{e} > 0$$

Por tanto, cuando  $r \rightarrow \infty$ ,  $\cos(\theta - \theta_0) > 0$  y nos encontramos en la rama derecha de la hipérbola.

Despejando  $(\theta - \theta_0)$  de la ecuación anterior, obtenemos:

$$\Leftrightarrow (\theta - \theta_0) \rightarrow \pm \arccos\left(\frac{1}{e}\right)$$

donde recordamos que  $\text{Im arc cos} = [0, \pi]$ . Por tanto, hay dos ángulos en  $[0, 2\pi)$  que cumplen que  $\cos(\theta - \theta_0) = \frac{1}{e}$  (y, así, hay dos asíntotas).

Únicamente queda probar que la trayectoria se corresponde con la rama derecha de la hipérbola; ésta es la rama más alejada del centro de fuerzas. Por la proposición 72 en la página 168, sabemos que la mínima distancia entre el centro de fuerzas y la rama de la hipérbola viene dada por:

$$r_{\text{mín}} = \frac{l}{e-1} \text{ si } k > 0$$

$$r_{\text{mín}} = \frac{l}{e+1} \text{ si } k < 0$$

Nótese que:

$$e-1 < e+1 \Leftrightarrow \frac{l}{e-1} > \frac{l}{e+1}$$

Luego, claramente, de las dos distancias a cada una de las ramas, la distancia mínima en el caso  $k > 0$  se corresponde con la mayor de las dos posibles. En consecuencia, la trayectoria se corresponde con la rama derecha de la parábola.

■ Si es  $k < 0$  y además:

- $E = V_{eff,\text{mín}} = -\frac{|k|}{2l}$ , por la proposición 68 en la página 160, la trayectoria es circular y, en consecuencia,  $e = 0$ .
- $V_{eff,\text{mín}} < E < 0$ , entonces:

$$\frac{2lE}{|k|} < 0$$

En consecuencia:

$$\frac{2lE}{|k|} + 1 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2lE}{|k|} + 1} < 1 \Leftrightarrow e < 1$$

Por otra parte, como es:

$$E > V_{eff,\text{mín}} = -\frac{|k|}{2l}$$

tenemos:

$$\frac{2lE}{|k|} > \frac{2l}{|k|} \left( -\frac{|k|}{2l} \right) = -1$$

Por consiguiente:

$$\frac{2lE}{|k|} + 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2lE}{|k|} + 1} > 0 \Leftrightarrow e > 0$$

Por ende, es  $0 < e < 1$  y la trayectoria de la partícula es una elipse.

- $E = 0$ , entonces:

$$e = \sqrt{\underbrace{\frac{2lE}{|k|} + 1}_{=0}} = \sqrt{1} = 1$$

y la trayectoria es una parábola.

- $E > 0$ , entonces:

$$\frac{2lE}{|k|} > 0$$

En consecuencia:

$$\frac{2lE}{|k|} + 1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2lE}{|k|} + 1} > 1 \Leftrightarrow e > 1$$

De esta forma, la trayectoria es una hipérbola.

Por la proposición 71 en la página 166, tenemos que la trayectoria en este caso viene descrita por la ecuación:

$$r [e \cos (\theta - \theta_0) + 1] = l$$

Para hallar las asíntotas, vamos a hacer el límite cuando  $r \rightarrow \infty$  en la expresión anterior. Nótese que como  $l \in \mathbb{R}$ , necesariamente cuando  $r \rightarrow \infty$ :

$$e \cos (\theta - \theta_0) + 1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow e \cos (\theta - \theta_0) \rightarrow -1 \Leftrightarrow \cos (\theta - \theta_0) \rightarrow -\frac{1}{e} < 0$$

Por tanto, cuando  $r \rightarrow \infty$ ,  $\cos (\theta - \theta_0) < 0$  y nos encontramos en la rama izquierda de la hipérbola. Despejando  $(\theta - \theta_0)$  de la ecuación anterior, obtenemos:

$$(\theta - \theta_0) \rightarrow \pm \arccos \left( -\frac{1}{e} \right)$$

donde recordamos que  $\text{Im} \arccos = [0, \pi]$ . Por tanto, hay dos ángulos en  $[0, 2\pi)$  que cumplen que  $\cos (\theta - \theta_0) = -\frac{1}{e}$  (y, así, hay dos asíntotas). Ahora, recordemos que  $\arccos x = -\arccos (-x) \forall x \in [-1, 1]$ . Así, lo anterior es equivalente a:

$$(\theta - \theta_0) \rightarrow \mp \arccos \left( \frac{1}{e} \right)$$

Únicamente queda probar que la trayectoria se corresponde con la rama izquierda de la hipérbola; ésta es la rama más cercana al centro de fuerzas. Por la proposición 72 en la página 168, sabemos que la mínima distancia entre el centro de fuerzas y la rama de la hipérbola viene dada por:

$$r_{\min} = \frac{l}{e-1} \text{ si } k > 0$$

$$r_{\min} = \frac{l}{e+1} \text{ si } k < 0$$

Nótese que:

$$e-1 < e+1 \Leftrightarrow \frac{l}{e-1} > \frac{l}{e+1}$$

Luego, claramente, de las dos distancias a cada una de las ramas, la distancia mínima en el caso  $k < 0$  se corresponde con la menor de las dos posibles. En consecuencia, la trayectoria se corresponde con la rama izquierda de la parábola.

*Q.E.D.*

### 3.4.2.2. Resumen

$k$	$E$	$e$	tipo de cónica	$r_{\min}$	$r_{\max}$
$k > 0$	$> 0$	$> 1$	hipérbola (rama derecha)	$\frac{l}{e-1}$	$\infty$
$k < 0$	$= -\frac{ k }{2l}$	$= 0$	circunferencia	$\frac{l}{e+1}$	$\frac{l}{-e+1}$
	$E < 0$	$e > 0$	elipse		$\frac{l}{-e+1}$
	$E > -\frac{ k }{2l}$	$e < 1$			
	$= 0$	$= 1$	parábola	$\infty$	
$> 0$	$> 1$	hipérbola (rama izquierda)			

donde  $k$  es la constante que define la fuerza  $\vec{F} = \frac{k}{r^2}$ ,  $E$  es la energía del movimiento,  $e$  es la excentricidad de la órbita  $r_{\min}$  es la distancia mínima de la trayectoria de la partícula al centro de fuerzas,  $r_{\max}$  es la distancia máxima de la trayectoria de la partícula al centro de fuerzas y  $l = \frac{L^2}{m|k|}$ .

Las asíntotas de las hipérbolas forman un ángulo de  $\pm \arccos \left( \frac{1}{e} \right)$  con la horizontal.

## 3.4.2.3. Ejemplos

**Ejemplo 22.** Supongamos que tenemos una partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza central conservativa  $\vec{F}$  cuyo potencial asociado viene dado por:

$$V = \frac{k}{r^2} = ku^2 \Leftrightarrow F(r) = F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{dV}{dr} = \frac{2k}{r^3} = 2ku^3$$

Nuestro objetivo es deducir las ecuaciones que rigen la trayectoria de la partícula.

Partimos de la proposición 69 en la página 164:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mF\left(\frac{1}{u}\right)}{L^2u^2}$$

y sustituimos por el valor que tenemos de la fuerza  $F$ :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{2ku^3}{u^2} \Leftrightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + \underbrace{\left(1 + \frac{m2k}{L^2}\right)}_{=:k'} u = 0$$

donde llamamos  $k'$  al paréntesis anterior.

Ahora, llegamos a varios casos dependiendo del signo de  $k'$ . Cada caso requiere resolver una ecuación diferencial (que se deja como ejercicio para el lector).

1. Si  $k' > 0$ , tenemos que la solución de la ecuación diferencial anterior es:

$$u = a \cos(\sqrt{k'}\theta - \theta_0)$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{k'}a \sin(\sqrt{k'}\theta - \theta_0)$$

Sustituyendo en la otra expresión dada por la proposición 69 en la página 164:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2} \left[E - V\left(\frac{1}{u}\right)\right]$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 &= \frac{2mE}{L^2} - \frac{2m}{L^2}ku^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \underbrace{\left(1 + \frac{2mk}{L^2}\right)}_{=:k'} &= \frac{2mE}{L^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k'a^2 \sin^2(\sqrt{k'}\theta - \theta_0) + k'a^2 \cos^2(\sqrt{k'}\theta - \theta_0) &= \frac{2mE}{L^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2k' &= \frac{2mE}{L^2} \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{2mE}{k'L^2}} \end{aligned}$$

2. Si  $k' < 0$ :

$$u = a \cosh(\sqrt{k'}\theta - \theta_0)$$

3. Si  $k' = 0$ :

$$u = a\theta - \theta_0$$

**Ejemplo 23** (Velocidad de escape de la superficie de la Tierra). Recordemos que la velocidad escape de un cuerpo celeste es aquella velocidad inicial que permite que un cuerpo cualquiera de masa  $m$  que parte de la superficie de dicho cuerpo celeste llegue al infinito con velocidad nula. Por la proposición 68 en la página 160, estamos en el caso  $E = 0$ . Por tanto, como la energía se conserva tenemos que:

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$$

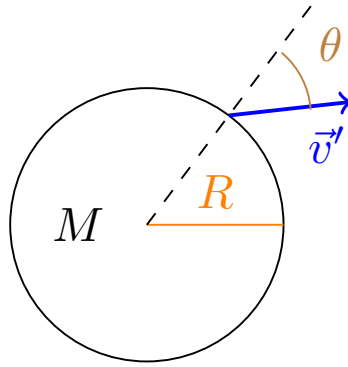
donde  $g = \frac{GM}{R^2}$ . En el caso de la Tierra, con los datos  $R = 6370$  km y  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ , obtenemos:

$$v_e = 11,2 \frac{km}{s}$$

Nótese que el módulo de la velocidad de escape (en condiciones ideales, es decir, suponiendo que no hay atmósfera, etc.) no depende del ángulo de lanzamiento.

**Ejemplo 24.** ¿A qué distancia llegará un objeto lanzado con la mitad de la velocidad de escape? Es decir, un objeto con velocidad:

$$v' = \frac{v_e}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{GM}{2R}}$$



Hallemos  $E'$ :

$$E' = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_e}{2}\right)^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{4}mv_e^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{4}m\frac{2GM}{R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{3}{4}\frac{GMm}{R}$$

Por la proposición 68 en la página 160, sabemos que los puntos de máxima y mínima distancia son las soluciones de la ecuación:

$$r^2 - \frac{k}{E'}r + \frac{kl}{2E'} = 0$$

Sustituyendo en nuestro caso, obtenemos:

$$\begin{aligned} r^2 - \frac{GMm}{\frac{3}{4}\frac{GMm}{R}}r + \frac{GMm}{\frac{3}{2}\frac{GMm}{R}}\frac{L^2}{GMm^2} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow r^2 - \frac{4}{3}Rr + \frac{2}{3}\frac{RL^2}{GMm^2} &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, haciendo:

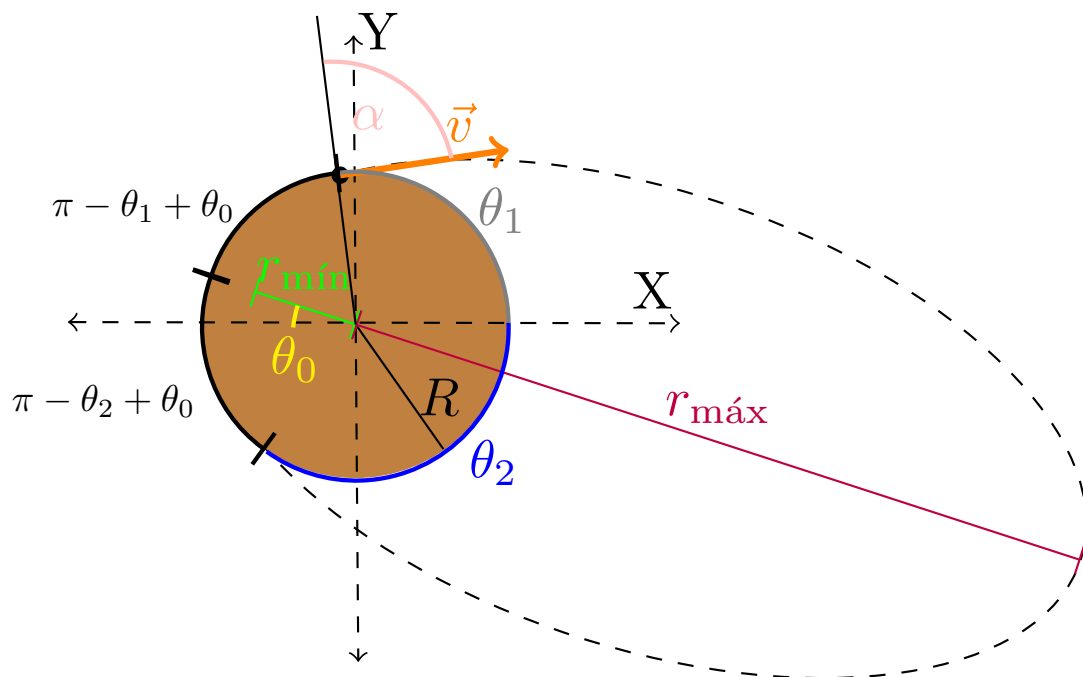
$$L = mRv' \sin \alpha = mR\sqrt{\frac{GM}{2R}} \sin \alpha = m\sqrt{\frac{GMR}{2}} \sin \alpha$$

llegamos a:

$$\begin{aligned} r^2 - \frac{4}{3}Rr + \frac{2}{3}\frac{R}{GMm^2}m^2\frac{GMR}{2}\sin^2 \alpha &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow r^2 - \frac{4}{3}Rr + \frac{1}{3}R^2\sin^2 \alpha &= 0 \end{aligned}$$

La solución de la ecuación anterior es:



$$h_{\text{máx}} = r_{\text{máx}} - R = \frac{R}{3} \left[ -1 + \sqrt{4 - 3 \sin^2 \alpha} \right]$$
$$l = r [e \cos (\theta - \theta_0) + 1]$$
$$l = \frac{L^2}{m|k|} = m^2 \frac{GMR}{2} \sin^2 \alpha \frac{1}{GMm^2} = \frac{R}{2} \sin^2 \alpha$$
$$e^2 = \frac{2El}{|k|} + 1 = \frac{2\left(-\frac{3}{4}\frac{GMm}{R}\right)\frac{R}{2}\sin^2\alpha}{GMm} + 1 = -\frac{3}{4}\sin^2\alpha + 1 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2\alpha$$
$$r_{\text{mín}} = \frac{l}{1+e} \qquad r_{\text{máx}} = \frac{l}{1-e}$$


Nuestro objetivo ahora es hallar el valor de  $\alpha$  para el cual se produce el máximo alcance, es decir, la mayor distancia medida sobre la superficie de la tierra que recorre el objeto antes de impactar de nuevo con la Tierra.

Tenemos dos formas de calcular dicho alcance, una es:

$$(\theta_2 - \theta_1) R$$

que se correspondería con la distancia más corta en el dibujo. La otra es:

$$(\theta_1 + 2\pi - \theta_2) R = (\theta_1 - \theta_2) R$$

Muy bien, ahora ¿cómo obtenemos los valores de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ ? Pues de la siguiente manera. Por la proposición 71 en la página 166, sabemos que la trayectoria de nuestro objeto está descrita por la ecuación:

$$l = r [e \cos(\theta - \theta_0) + 1]$$

A continuación, resolvemos para  $r = R$ , obteniendo:

$$l = R [e \cos(\theta - \theta_0) + 1] \Leftrightarrow \frac{l}{R} = e \cos(\theta - \theta_0) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\cos(\theta - \theta_0) = \left[ \frac{l}{R} - 1 \right] \frac{1}{e} = \frac{\frac{1}{2} \sin^2 \alpha - 1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha}}$$

Como  $\theta_1 - \theta_0 = -(\theta_2 - \theta_0)$  por simetría, debe ser:

$$\text{alcance} = (\theta_2 - \theta_1) R = [(\theta_2 - \theta_0) - (\theta_1 - \theta_0)] R = 2(\theta_2 - \theta_0) R$$

Ahora, obtengamos el alcance máximo. Para ello, primero tenemos que ver para qué ángulo  $\alpha$  ocurre el alcance máximo. Con tal propósito, derivamos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} [\cos(\theta - \theta_0)] &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha} - \left( \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - 1 \right) \frac{-\frac{3}{2} \sin \alpha \cos \alpha}{2\sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha}}}{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha \left( 1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \right) + \frac{3}{4} \sin \alpha \cos \alpha \left( \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - 1 \right)}{\left[ 1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \right]^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha \left( 1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{8} \sin^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \right)}{\left[ 1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \sin^2 \alpha \right)}{\left[ 1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \right]^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha (2 - 3 \sin^2 \alpha)}{8 \left[ 1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \right]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$0 = \frac{d}{d\alpha} [\cos(\theta_i - \theta_0)] \Leftrightarrow 2 - 3 \sin^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha = 54,7^\circ$$

donde descartamos las soluciones  $\alpha = 0$  y  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , puesto que no son soluciones físicas reales.

Sustituyendo, llegamos a:

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \theta_0) &= \frac{\frac{1}{2} \sin^2 \alpha - 1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{2}{3} - 1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{2}{3}}} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \theta - \theta_0 = \pm 160,5^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 - \theta_0 = -160,5^\circ = 199,47^\circ \\ \theta_2 - \theta_0 = 160,5^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

De manera que el alcance máximo es:

$$\text{alcance} = (199,47^\circ - 160,5^\circ) \frac{\pi}{180} R = 0,68R$$

O, alternativamente, podemos dar el alcance como  $2\pi$  menos el valor anterior:

$$\text{alcance} = (2\pi - 0,68) R$$

## 3.4.2.4. Obtención de la ecuación en cartesianas

**Proposición 74.** Sea un partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza del estilo  $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$ . En coordenadas cartesianas con el eje horizontal en la dirección de  $\theta_0$ , la trayectoria de la partícula  $m$  viene descrita por:

- Si  $e = 0$ :

$$x^2 + y^2 = l^2$$

- Si  $e = 1$ :

$$y^2 = -2l \left( x - \frac{l}{2} \right)$$

- Si  $0 < e < 1$ :

$$\frac{(x + ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{donde } a = \frac{l}{1 - e^2} \text{ y } b = \frac{l}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

- Si  $e > 1$ :

$$\frac{(x - ea)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{donde } a = \frac{l}{e^2 - 1} \text{ y } b = \frac{l}{\sqrt{e^2 - 1}}.$$

*Demostración.* A lo largo de toda la demostración, llamaremos  $\beta := \theta - \theta_0$ . Como tomamos los ejes cartesianos tales que el eje horizontal tiene la dirección de  $\theta_0$  la relación entre las coordenadas cartesianas y polares queda:

$$x = r \cos(\theta - \theta_0) = r \cos \beta$$

$$y = r \sin(\theta - \theta_0) = r \sin \beta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

- Si  $e = 0$ , por la proposición 73 en la página 169 la trayectoria es una circunferencia. Recordemos la relación:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

También, por la proposición 71 en la página 166 sabemos que en el caso de la circunferencia se cumple:

$$r = l \Leftrightarrow r^2 = l^2$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$x^2 + y^2 = r^2 = l^2$$

de manera que llegamos a la ecuación del enunciado.

- Si  $e = 1$ , por la proposición 73 en la página 169, la trayectoria es una parábola y por la proposición 71 en la página 166, tenemos:

$$r [\cos \beta + 1] = l \Leftrightarrow r \cos \beta + r = l$$

Sustituyendo  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $r \cos \beta = x$ , llegamos a:

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = l \Leftrightarrow x - l = -\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2lx + l^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = -2lx + l^2 = -2l \left( x - \frac{l}{2} \right)$$

- Si  $0 < e < 1$ , por la proposición 73 en la página 169, la trayectoria es una elipse y por la proposición 71 en la página 166, tenemos:

$$r [e \cos \beta + 1] = l \Leftrightarrow er \cos \beta + r = l$$

Sustituyendo  $x = r \cos \beta$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} ex + r = l &\Leftrightarrow ex - l = -r \Rightarrow (ex - l)^2 = (-r)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^2 x^2 - 2exl + l^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (1 - e^2) x^2 + 2exl + y^2 = l^2 \end{aligned}$$

Multiplicando por  $(1 - e^2)$  a ambos lados, obtenemos:

$$\begin{aligned} [(1 - e^2) x + el]^2 (1 - e^2) &= l^2 (1 - e^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - e^2)^2 x^2 + 2elx (1 - e^2) + y^2 (1 - e^2) = l^2 (1 - e^2) \end{aligned}$$

Completamos cuadrados:

$$\begin{aligned} [(1 - e^2) x + el]^2 - e^2 l^2 + y^2 (1 - e^2) &= l^2 (1 - e^2) \Leftrightarrow \\ [(1 - e^2) x + el]^2 + y^2 (1 - e^2) - e^2 l^2 &= l^2 - e^2 l^2 \Leftrightarrow \\ [(1 - e^2) x + el]^2 + y^2 (1 - e^2) &= l^2 \end{aligned}$$

Dividiendo a ambos lados por  $l^2$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{[(1 - e^2) x + el]^2}{l^2} + \frac{1 - e^2}{l^2} y^2 &= 1 \Leftrightarrow \left[ \frac{(1 - e^2) x + el}{l} \right]^2 + \frac{y^2}{\frac{l^2}{1 - e^2}} = 1 \\ \Leftrightarrow \left[ \frac{x}{\frac{l}{1 - e^2}} + e \right]^2 + \frac{y^2}{\frac{l^2}{1 - e^2}} &= 1 \Leftrightarrow \left[ \frac{x + e \frac{l}{1 - e^2}}{\frac{l}{1 - e^2}} \right]^2 + \frac{y^2}{\frac{l^2}{1 - e^2}} = 1 \end{aligned}$$

que ya tiene la forma canónica de una elipse no centrada en el origen:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Así, obtenemos:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{l^2}{(1 - e^2)^2} \Leftrightarrow a = \frac{l}{1 - e^2} \\ b^2 &= \frac{l^2}{1 - e^2} \Leftrightarrow b = \frac{l}{\sqrt{1 - e^2}} \end{aligned}$$

Nótese que  $e \frac{l}{1 - e^2} = ea$ . En consecuencia, podemos expresar la ecuación de la trayectoria como:

$$\frac{(x + ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Si  $e > 1$  y  $k < 0$ , por la proposición 73 en la página 169, la trayectoria es una hipérbola y por la proposición 71 en la página 166, tenemos:

$$r [e \cos \beta + 1] = l$$

La deducción es la misma que en el caso de la elipse hasta que llegamos a:

$$\frac{[(1 - e^2) x + el]^2}{l^2} + \frac{1 - e^2}{l^2} y^2 = 1$$

Nótese que  $1 - e^2 < 0$  al ser  $e > 1$ . Por tanto, nos interesa reescribir la ecuación anterior como:

$$\frac{[-(e^2 - 1)x + el]^2}{l^2} - \frac{e^2 - 1}{l^2}y^2 = 1$$

Como  $z^2 = (-z)^2$ , lo anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned} & \frac{[(e^2 - 1)x - el]^2}{l^2} - \frac{e^2 - 1}{l^2}y^2 = 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left[ \frac{(e^2 - 1)x - el}{l} \right]^2 - \frac{y^2}{\frac{l^2}{e^2 - 1}} = 1 \Leftrightarrow \left[ \frac{(e^2 - 1)x}{l} - e \right]^2 - \frac{y^2}{\frac{l^2}{e^2 - 1}} = 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left[ \frac{x}{\frac{l}{e^2 - 1}} - e \right]^2 - \frac{y^2}{\frac{l^2}{e^2 - 1}} = 1 \Leftrightarrow \left[ \frac{x - e\frac{l}{e^2 - 1}}{\frac{l}{e^2 - 1}} \right]^2 - \frac{y^2}{\frac{l^2}{e^2 - 1}} = 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{\left[ x - e\frac{l}{e^2 - 1} \right]^2}{\frac{l^2}{(e^2 - 1)^2}} - \frac{y^2}{\frac{l^2}{e^2 - 1}} = 1 \end{aligned}$$

que ya tiene la forma canónica de una hipérbola no centrada en el origen:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Así, obtenemos:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{l^2}{(e^2 - 1)^2} \Leftrightarrow a = \frac{l}{e^2 - 1} \\ b^2 &= \frac{l^2}{e^2 - 1} \Leftrightarrow b = \frac{l}{\sqrt{e^2 - 1}} \end{aligned}$$

Nótese que  $e\frac{l}{e^2 - 1} = ea$ . En consecuencia, podemos expresar la ecuación de la trayectoria como:

$$\frac{(x - ea)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Si  $e > 1$  y  $k > 0$ , por la proposición 73 en la página 169, la trayectoria es una hipérbola y por la proposición 71 en la página 166, tenemos:

$$r[e \cos \beta - 1] = l \Leftrightarrow er \cos \beta - r = l$$

Sustituyendo  $x = r \cos \beta$ , obtenemos:

$$ex - r = l \Leftrightarrow ex - l = r \Rightarrow (ex - l)^2 = r^2 = x^2 + y^2$$

Y con esto, ya estamos en el mismo caso que para  $e > 1$  y  $k < 0$ , por lo que llegamos a la misma ecuación.

*Q.E.D.*

*Observación 61.* Nótese que la ecuación de la parábola dada en la proposición 74 en la página 178 se corresponde con una parábola tumbada.

Es más, en todos los casos anteriores, el eje  $x$  tiene la dirección del eje real o mayor (en su caso) de la cónica.

### 3.4.2.5. Relación de los parámetros de las órbitas con la energía y el momento angular

**Proposición 75.** Sea un partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza del estilo  $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$ . Los parámetros  $a$  y  $b$  de la cónica están relacionados con la energía y el momento angular de la siguiente forma:

$$a = \frac{|k|}{2|E|} \quad b^2 = al = \frac{L^2}{2m|E|}$$

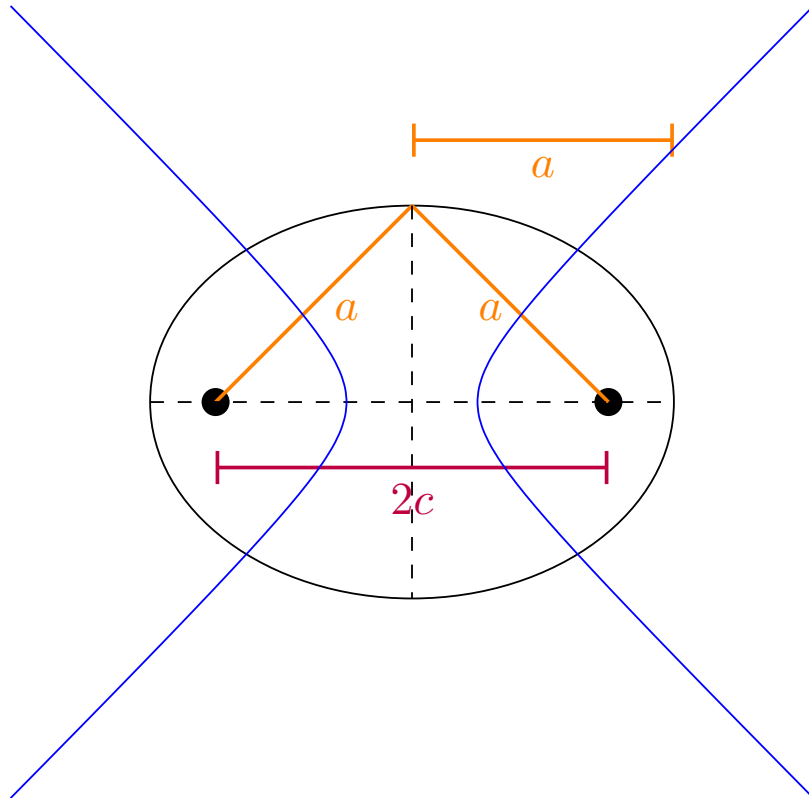
Además, se cumplen las siguientes relaciones:

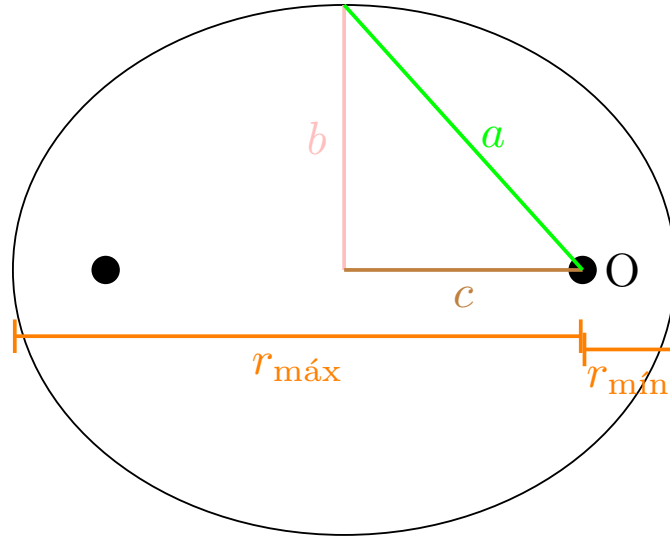
- Si  $0 < e < 1$ :

$$r_{\min} + r_{\max} = 2a \quad E = \frac{k}{2a} \quad c = ae$$

- Si  $e > 1$ :

$$E = \frac{|k|}{2a} \quad c = ae \quad r_{\min, k>0} + r_{\min, k<0} = 2c \quad r_{\min, k>0} - r_{\min, k<0} = 2a$$





*Demostración.* Cuando  $0 < e < 1$ , por la proposición 74 en la página 178, sabemos que  $a$  y  $b$  cumplen:

$$a = \frac{l}{1 - e^2} \quad b = \frac{l}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Y, por la definición 85 en la página 160 y por la proposición 71 en la página 166, sabemos que  $l$  y  $e$  vienen dadas por las expresiones:

$$l = \frac{L^2}{m|k|} \quad e^2 = \frac{2lE}{|k|} + 1$$

Sustituyendo en  $a$ , obtenemos:

$$a = \frac{l}{1 - \frac{2lE}{|k|} - 1} = -\frac{l}{\frac{2lE}{|k|}} = -\frac{|k|}{2E} = \frac{k}{2E} = \frac{|k|}{2|E|}$$

pues  $k < 0$  y  $E < 0$ . Por otra parte:

$$b^2 = \frac{l^2}{1 - e^2} = l \underbrace{\frac{l}{1 - e^2}}_{=a} = al = \frac{|k|}{2|E|} \frac{L^2}{m|k|} = \frac{L^2}{2m|E|}$$

Por el contrario, si es  $e > 1$ , por la proposición 74 en la página 178, sabemos que  $a$  y  $b$  cumplen:

$$a = \frac{l}{e^2 - 1} \quad b = \frac{l}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

De nuevo, por la definición 85 en la página 160 y por la proposición 71 en la página 166, sabemos que  $l$  y  $e$  vienen dadas por las expresiones:

$$l = \frac{L^2}{m|k|} \quad e^2 = \frac{2lE}{|k|} + 1$$

Sustituyendo en  $a$ , obtenemos:

$$a = \frac{l}{\frac{2lE}{|k|} + 1 - 1} = \frac{l}{\frac{2lE}{|k|}} = \frac{|k|}{2E} = \frac{|k|}{2|E|}$$

pues  $E > 0$ . Por otra parte:

$$b^2 = \frac{l^2}{e^2 - 1} = l \underbrace{\frac{l}{e^2 - 1}}_{=a} = al = \frac{|k|}{2|E|} \frac{L^2}{m|k|} = \frac{L^2}{2m|E|}$$

- Si  $0 < e < 1$ , por la proposición 72 en la página 168, tenemos:

$$r_{\min} = \frac{l}{e+1} \quad r_{\max} = \frac{l}{-e+1}$$

$$r_{\min} + r_{\max} = \frac{l}{1+e} + \frac{l}{1-e} = l \frac{1-e+1+e}{1-e^2} = \frac{2l}{1-e^2} = 2 \underbrace{\frac{l}{1-e^2}}_{=a} = 2a$$

donde sabemos que lo puesto entre llaves es  $a$  por la proposición 74 en la página 178. Hemos probado antes que era cierto:

$$a = \frac{|k|}{2|E|}$$

En nuestro caso son  $k < 0$  y  $E < 0$ , de manera que lo anterior es equivalente a:

$$a = \frac{k}{2E} \Leftrightarrow E = \frac{k}{2a}$$

Por último, por lo visto en la sección 3.2.1 en la página 151 sabemos que en una elipse se cumple  $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 - b^2$ . De esta forma, obtenemos:

$$c^2 = a^2 - b^2 = a^2 - al = a(a-l)$$

A partir de la proposición 71 en la página 166, podemos expresar  $l$  en función de  $e$ :

$$e^2 = \frac{2lE}{|k|} + 1 \Leftrightarrow e^2 - 1 = \frac{2lE}{|k|} \Leftrightarrow \frac{|k|}{2E} (e^2 - 1) = l \Leftrightarrow -\frac{|k|}{2E} (1 - e^2) = l$$

como es  $k < 0$ , lo anterior es equivalente a:

$$l = \frac{k}{2E} (1 - e^2) = \underbrace{\frac{|k|}{2|E|}}_{=a} (1 - e^2)$$

y, por lo que hemos visto antes, lo indicado entre corchetes es  $a$  y así, obtenemos:

$$l = a(1 - e^2)$$

Sustituyendo en la expresión para  $c^2$ , obtenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2 = a[a - a(1 - e^2)] = a^2(1 - 1 + e^2) = a^2e^2 \Leftrightarrow c = ae$$

- Si  $e > 1$ , por lo probado antes, tenemos:

$$a = \frac{|k|}{2|E|}$$

En nuestro caso, es  $E > 0$ , luego podemos expresar lo anterior como:

$$a = \frac{|k|}{2E} \Leftrightarrow E = \frac{|k|}{2a}$$

Ahora, por lo visto en la sección 3.2.2 en la página 153 sabemos que en una hipérbola se cumple  $c^2 = a^2 + b^2$ . De esta forma, obtenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + al = a(a+l)$$

A partir de la proposición 71 en la página 166, podemos expresar  $l$  en función de  $e$ :

$$e^2 = \frac{2lE}{|k|} + 1 \Leftrightarrow e^2 - 1 = \frac{2lE}{|k|} \Leftrightarrow \frac{|k|}{2E} (e^2 - 1) = l$$

como es  $E > 0$ , lo anterior es equivalente a:

$$l = \underbrace{\frac{|k|}{2|E|}}_{=a} (e^2 - 1)$$



y, por lo que hemos visto antes, lo indicado entre corchetes es  $a$  y así, obtenemos:

$$l = a(e^2 - 1)$$

Sustituyendo en la expresión para  $c^2$ , obtenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2 = a[a + a(e^2 - 1)] = a^2(1 + e^2 - 1) = a^2e^2 \Leftrightarrow c = ae$$

A continuación, por la proposición 72 en la página 168, tenemos que:

$$r_{\min, k>0} = \frac{l}{e-1} \quad r_{\min, k<0} = \frac{l}{e+1}$$

Así:

$$\begin{aligned} r_{\min, k>0} + r_{\min, k<0} &= \frac{l}{e-1} + \frac{l}{e+1} = l \left( \frac{1}{e-1} + \frac{1}{e+1} \right) = l \frac{e+1+e-1}{e^2-1} = \frac{2le}{e^2-1} = \\ &= 2e \underbrace{\frac{l}{e^2-1}}_{=a} = 2 \underbrace{ea}_{=c} = 2c \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} r_{\min, k>0} - r_{\min, k<0} &= \frac{l}{e-1} - \frac{l}{e+1} = l \left( \frac{1}{e-1} - \frac{1}{e+1} \right) = l \frac{e+1-e-1}{e^2-1} = \\ &= 2 \underbrace{\frac{l}{e^2-1}}_{=a} = 2a \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

**Corolario 26.** Sea un partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza del estilo  $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$ . Para un valor de  $k$  dado, órbitas que tengan el mismo valor del semieje mayor  $a$  tendrán, necesariamente, la misma energía en valor absoluto.

*Demostración.* Trivial, pues es  $a = \frac{|k|}{2|E|} \Leftrightarrow |E| = \frac{|k|}{2a}$ .

*Q.E.D.*

*Observación 62.* En el dibujo de la elipse de la proposición 75 en la página 181, nótese que el centro de fuerzas está en un foco de la elipse y que el centro de la elipse queda a la izquierda. Es decir, la disposición es justo al revés que en el caso de la hipérbola.

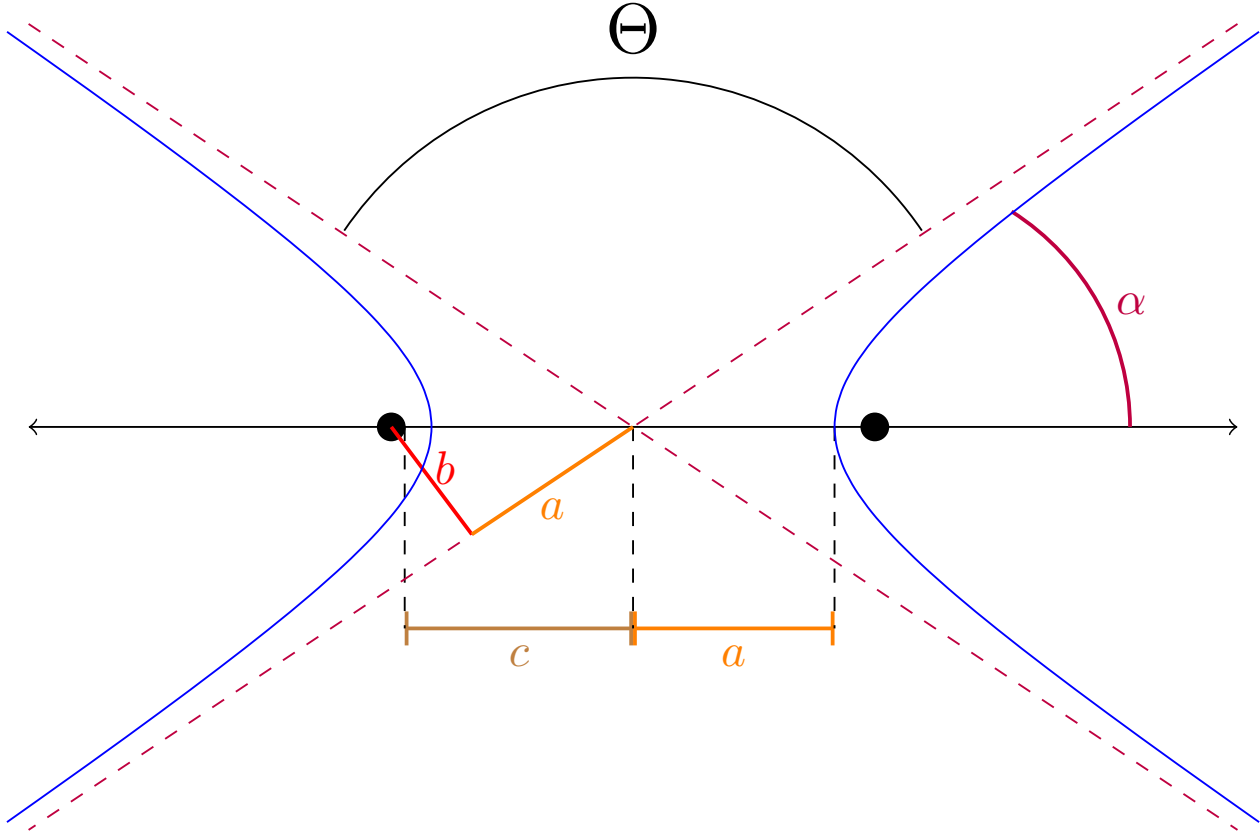
### 3.4.2.6. Ángulo de dispersión en trayectorias hiperbólicas

**Definición 86.** Sea una partícula que se mueve en una dirección fija (dirección de entrada) y tras un suceso cualquiera, termina desplazándose en otra dirección fija (dirección de salida). Llamamos **ángulo de dispersión** al ángulo que hay entre la dirección de entrada y la de salida. Es decir el ángulo de dispersión es el que forman entre sí el vector velocidad de la partícula a la entrada y el vector velocidad de la partícula a la salida.

**Proposición 76.** Sea un partícula de masa  $m$  que inicialmente se encuentra muy alejada de un centro de fuerzas que ejerce una fuerza del estilo  $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$  con  $k > 0$ . Sea  $b_{\text{imp}}$  el parámetro de impacto de la partícula de masa  $m$  con respecto al centro de fuerzas. Es decir,  $b_{\text{imp}}$  es la mínima distancia entre la trayectoria de la partícula y el centro de fuerzas si fuese  $\vec{F} = \vec{0}$ . Entonces, la partícula de masa  $m$  describe una órbita hiperbólica con  $b = b_{\text{imp}}$  y, visto desde una distancia lo suficientemente alejada, el ángulo de dispersión  $\Theta$  está relacionado con el parámetro de impacto de la siguiente forma:

$$b = b_{\text{imp}} = \frac{|k|}{mv_{\infty}^2} \cot \frac{\Theta}{2}$$

donde  $v_{\infty}$  es el módulo de la velocidad de la partícula de masa  $m$  cuando se encuentra muy alejada del centro de fuerzas.



*Demostración.* Vamos a realizar un razonamiento similar al hecho en la demostración de la proposición 67 en la página 156. Como inicialmente la partícula se encuentra muy alejada del centro de fuerzas, podemos suponer que  $r \rightarrow \infty$  y, en consecuencia, la partícula en el infinito únicamente tendrá energía cinética:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2$$

Nuestro siguiente objetivo es calcular el momento angular de la trayectoria. Como es constante, nos interesa calcularlo cuando la partícula está muy alejada del centro de fuerzas (en el infinito), sin embargo, nos interesaría poder expresarlo en función de  $b_{imp}$ . Para ello, vamos a usar el siguiente argumento: Cuando la partícula está muy lejos del centro de fuerzas, como hemos dicho en el párrafo anterior, podemos suponer que sobre ella no actúan fuerzas. Si no tenemos fuerzas, el momento angular desde cualquier punto debe conservarse por el teorema 5 en la página 21. Tomemos nuestro centro de fuerzas como punto de referencia para el cálculo del momento angular. Si fuese  $\vec{F} = \vec{0}$ , sabemos que la mínima distancia entre la trayectoria y el centro de fuerzas sería  $b$  por la definición 84 en la página 156. Como la distancia mínima siempre es en perpendicular, sabemos que  $\vec{b}_{imp} \perp \dot{\vec{r}}$ . De esta forma, el momento angular en el punto de mínima distancia (cuando  $\vec{F} = \vec{0}$ ) viene dado por:

$$L = mb_{imp}v_{\infty}$$

dado que la velocidad en ausencia de fuerzas es constante por la primera ley de Newton (ver teorema 1 en la página 8). Pero, como el momento angular se conserva en ausencia de fuerzas, el momento angular cuando la partícula está muy alejada del centro de fuerzas también será  $L = mb_{imp}v_{\infty}$  y así (volviendo a nuestro caso inicial con  $\vec{F} = \frac{k}{r^2}\hat{r}$ ), el momento angular de nuestra partícula cuando está muy alejada del centro de fuerzas también es  $L = mb_{imp}v_{\infty}$ . Por último, como  $\vec{F}$  es central, el momento angular es constante y así el momento angular de nuestra partícula es siempre:

$$L = mb_{imp}v_{\infty}$$

En resumen, hemos conseguido obtener las dos constantes del movimiento:

$$L = mb_{imp}v_{\infty} \quad E = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 > 0$$

Por la proposición 73 en la página 169, sabemos que la trayectoria seguida por nuestra partícula será una hipérbola. Ahora, por la proposición 75 en la página 181, sabemos que el parámetro  $b$  de nuestra hipérbola está relacionado con la energía y el momento angular como sigue:

$$b^2 = \frac{L^2}{2m|E|}$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$b^2 = \frac{m^2 b_{imp}^2 v_\infty^2}{2m \frac{1}{2} m v_\infty^2} = b_{imp}^2 \xleftrightarrow{b, b_{imp} > 0} b = b_{imp}$$

De manera que el parámetro  $b$  de nuestra hipérbola coincide con el parámetro de impacto.

A continuación, notemos que la hipérbola tiene dos asíntotas, una se corresponderá con la dirección de entrada de nuestra partícula y la otra con la dirección de salida. Esto es así, porque cuando nos encontramos muy lejos del centro de fuerzas, la hipérbola es imperceptible y parece que tengamos una línea recta. Bien, recordamos por la proposición 73 en la página 169 que las asíntotas de la hipérbola formaban ángulos  $\arccos\left(\frac{1}{e}\right)$  y  $\arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$  con la dirección de  $\theta_0$ . Llamemos  $\alpha := \arccos\left(\frac{1}{e}\right)$ . Calculemos  $\tan \alpha$ ; para ello, usamos que:

$$\tan \arccos x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

(lo anterior se ha extraído de aquí<sup>1</sup>) de manera que obtenemos:

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{e^2}}}{\frac{1}{e}} = e \sqrt{\frac{e^2-1}{e^2}} = \sqrt{e^2-1}$$

Ahora, por la proposición 75 en la página 181, sabemos que es:

$$c = ae \Leftrightarrow e = \frac{c}{a}$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}$$

Recordando lo visto en la sección 3.2.2 en la página 153, sabemos que en una hipérbola se cumple  $c^2 = a^2 + b^2$ , sustituyendo, llegamos a:

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2} - 1} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - a^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{b}{a}$$

Estudiando la definición 86 en la página 184, vemos que el ángulo de dispersión  $\Theta$  es el que forman entre sí ambas asíntotas, es decir, es:

$$\Theta = \pi - 2\alpha \Leftrightarrow 2\alpha = \pi - \Theta \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi - \Theta}{2}$$

Usando la expresión que hemos hallado anteriormente para la tangente, obtenemos:

$$\tan \alpha = \tan\left(\frac{\pi - \Theta}{2}\right) = \frac{b}{a}$$

Usando la proposición 75 en la página 181, podemos expresar  $a$  en función de la energía como sigue:

$$a = \frac{|k|}{2E} = \frac{|k|}{2\frac{1}{2}mv_\infty^2} = \frac{|k|}{mv_\infty^2}$$

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Inverse\\_trigonometric\\_functions&oldid=876493420#Relationships\\_between\\_trigonometric\\_functions\\_and\\_inverse\\_trigonometric\\_functions](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Inverse_trigonometric_functions&oldid=876493420#Relationships_between_trigonometric_functions_and_inverse_trigonometric_functions)

Sustituyendo, llegamos a:

$$\tan\left(\frac{\pi - \Theta}{2}\right) = \frac{b}{\frac{|k|}{mv_\infty^2}} \Leftrightarrow b = \frac{|k|}{mv_\infty^2} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}\right)$$

Por último usamos que la tangente del complementario es la cotangente<sup>2</sup>:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

De manera que obtenemos:

$$b = \frac{|k|}{mv_\infty^2} \cot \frac{\Theta}{2}$$

*Q.E.D.*

### 3.4.2.7. Periodo de la órbita elíptica

*Observación 63.* Notemos que la trayectoria de una partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza del estilo  $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$  satisface la segunda ley de Kepler (ver teorema 19 en la página 143) por ser central.

**Teorema 20** (Tercera ley de Kepler). *Sea un partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza del estilo  $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$  con  $k < 0$  tal que su energía es negativa  $E < 0$ , entonces se da:*

$$\frac{\mathcal{T}^2}{4\pi^2} = \frac{ma^3}{|k|}$$

donde  $\mathcal{T}$  es el periodo de la órbita y  $a$  es el semieje mayor de la elipse que describe la partícula  $m$ .

*Demostración.* Como  $\vec{F}$  es central, por la segunda ley de Kepler (ver teorema 19 en la página 143), se satisface:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Además, como es  $k < 0$  y  $E < 0$ , por la proposición 68 en la página 160, sabemos que la trayectoria de la partícula será cerrada y, por la forma de la expresión matemática de la proposición 71 en la página 166, será periódica. Llamemos  $\mathcal{T}$  a dicho periodo. Por la proposición 73 en la página 169, conocemos, además, que la órbita será una elipse o una circunferencia (que no es más que un caso particular de elipse con  $a = b$ ). Como el área de la elipse es  $\pi ab$ , por lo dicho anteriormente, debe satisfacerse:

$$\frac{\pi ab}{\mathcal{T}} = \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \Leftrightarrow \frac{\pi^2 a^2 b^2}{\mathcal{T}^2} = \frac{L^2}{4m^2}$$

Nótese que lo anterior tiene todo el sentido pues  $\frac{dA}{dt}$  **no** es una magnitud diferencial. Por la proposición 75 en la página 181, sabemos que  $b^2 = al = a \frac{L^2}{m|k|}$ . Sustituyendo, obtenemos:

$$\frac{\pi^2 a^2 a \frac{L^2}{m|k|}}{\mathcal{T}^2} = \frac{L^2}{4m^2} \Leftrightarrow \frac{\pi^2 a^3}{\mathcal{T}^2 |k|} = \frac{1}{4m} \Leftrightarrow \frac{ma^3}{|k|} = \frac{\mathcal{T}^2}{4\pi^2}$$

*Q.E.D.*

**Corolario 27.** *Sea un partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza del estilo  $\vec{F} = \frac{-GMm}{r^2} \hat{r}$  tal que su energía es negativa  $E < 0$ , entonces se da:*

$$\frac{\mathcal{T}^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{GM}$$

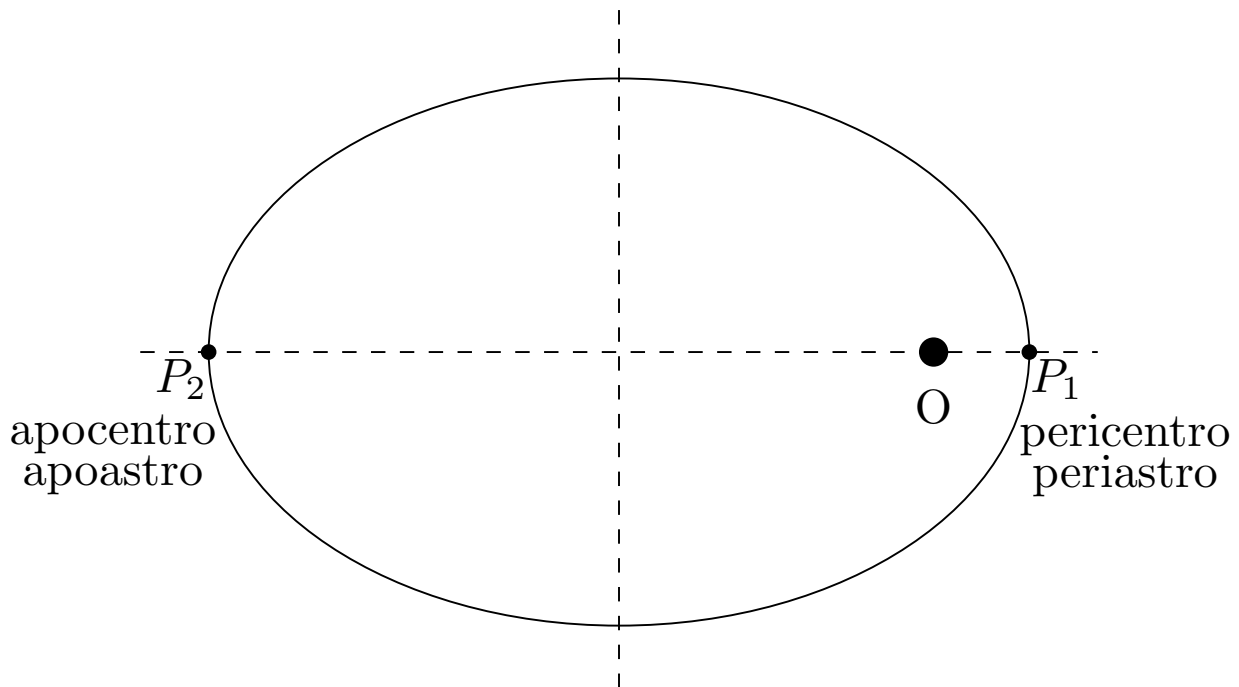
donde  $\mathcal{T}$  es el periodo de la órbita,  $a$  es el semieje mayor de la cónica que describe la partícula  $m$ ,  $G$  es la constante de gravitación universal y  $M$  es la masa generadora del campo.

<sup>2</sup>Esto puede verse en la página [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Trigonometric\\_functions&oldid=868696055#Right-angled\\_triangle\\_definitions](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Trigonometric_functions&oldid=868696055#Right-angled_triangle_definitions).

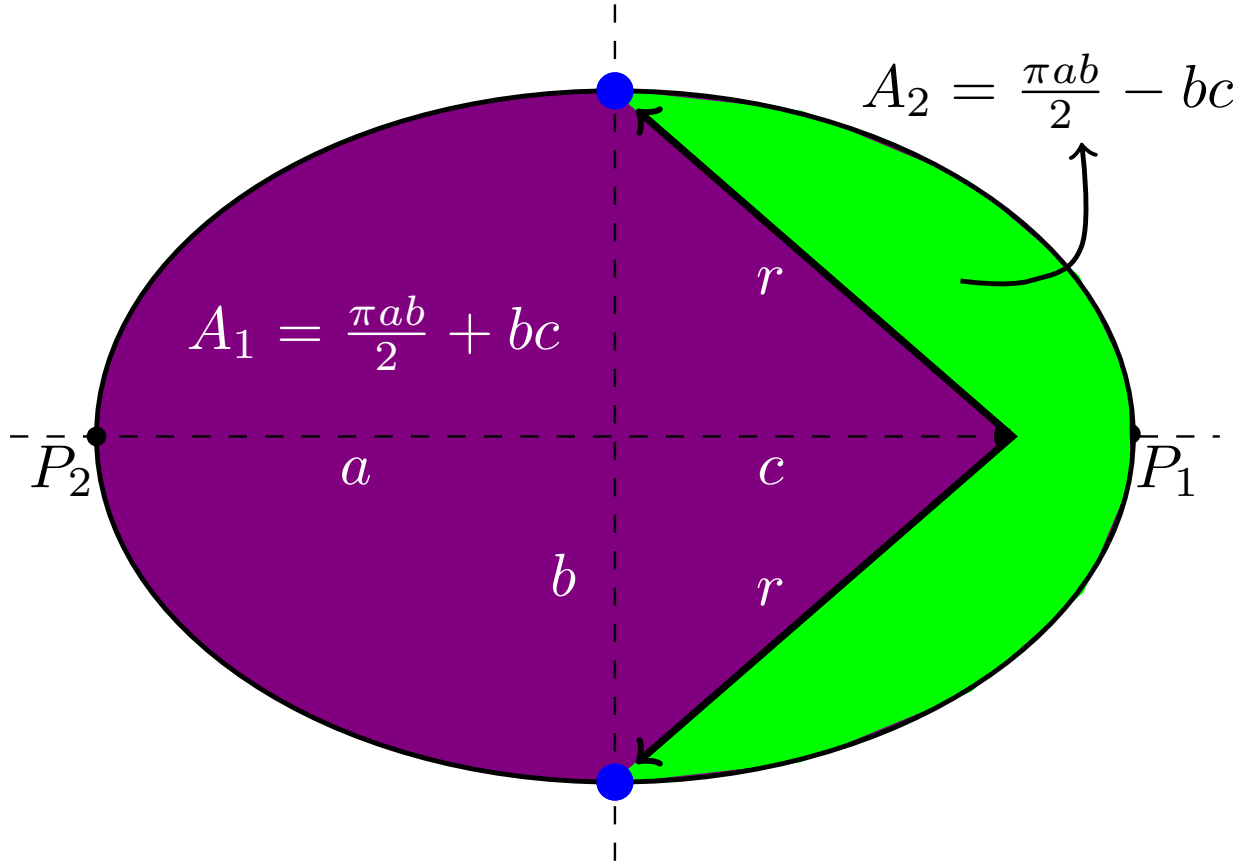
*Demostración.* Trivial. Simplemente se sustituye en el teorema 20 en la página anterior  $k = -GMm$ . *Q.E.D.*

**Definición 87.** Sea una partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza del estilo  $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$  con  $k < 0$  tal que su energía es negativa  $E < 0$ . Se llama **pericentro** al punto de la órbita que realiza la mínima distancia al centro de fuerzas y se llama **apocentro** al punto de la órbita que realiza la máxima distancia al centro de fuerzas.

En astronomía, es decir, cuando  $\vec{F} = \frac{-GMm}{r^2} \hat{r}$ , el pericentro recibe el nombre de **periastro** y el apocentro recibe el nombre de **apoastro**. Es más, si la masa generadora del campo gravitatorio es el Sol, entonces el periastro recibe el nombre de **perihelio** y el apoastro recibe el nombre de **afelio**. Análogamente, si la masa generadora del campo gravitatorio es la Tierra, el periastro recibe el nombre de **perigeo** y el apoastro recibe el nombre de **apogeo**.



**Ejemplo 25.** Fijémonos en el dibujo siguiente. Supongamos que es la órbita de la Tierra alrededor del Sol, que tiene una excentricidad  $e = 0,0167$ . Calculemos cuántos días más le cuesta recorrer el área morada que el área verde.



Primero, obtengamos dichas áreas. No resultan difíciles de calcular pues pueden obtenerse a partir del área de media elipse y del área del triángulo cuyos lados son  $a$ ,  $c$  y  $r$ . Así, obtenemos:

$$A_{\text{morado}} = \frac{\pi ab}{2} + 2 \frac{bc}{2} = \frac{\pi ab}{2} + bc$$

$$A_{\text{verde}} = \frac{\pi ab}{2} - 2 \frac{bc}{2} = \frac{\pi ab}{2} - bc$$

De manera que la diferencia de áreas es:

$$\Delta A = A_{\text{morado}} - A_{\text{verde}} = 2bc$$

Por la proposición 75 en la página 181, podemos expresar  $c$  en función de la excentricidad  $e$  y el semieje mayor  $a$ , obteniendo:

$$\Delta A = 2bc = 2b \underbrace{ea}_{=c} = 2abe$$

Por la segunda ley de Kepler aplicada al caso gravitatorio (ver teorema 19 en la página 143), tenemos:

$$\frac{dA}{dt} = \text{cte}$$

Por tanto, si llamamos  $\Delta t$  al tiempo que le cuesta la tierra recorrer  $\Delta A$ , debe cumplirse:

$$\frac{A}{T} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

donde  $A$  es el área de la órbita de la Tierra y  $T$  es su periodo. Dicho área sabemos que es:

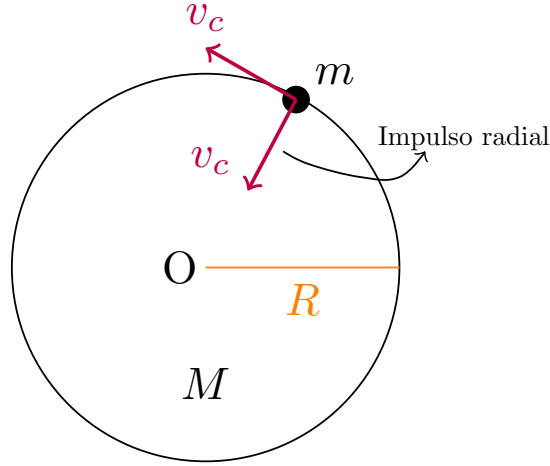
$$A = \pi ab$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{2abe}{\Delta t} \Leftrightarrow \frac{\pi}{T} = \frac{2e}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{2e}{\pi} T \approx 3,88 \text{ días}$$

## 3.4.2.8. Ejemplos

**Ejemplo 26.** Tenemos una partícula de masa  $m$  sometida a la fuerza gravitatoria generada por un cuerpo de masa  $M$  inmóvil en torno al cual nuestra partícula de masa  $m$  describe órbita circular de radio  $R$ . Posteriormente, le damos un impulso radial hacia dentro produciéndole un cambio de velocidad en la dirección radial de exactamente la velocidad del movimiento circular. ¿Qué tipo de órbita describirá el objeto tras el impulso?



Por la proposición 68 en la página 160, sabemos lo siguiente:

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad E = -\frac{GMm}{2R}$$

$$V = -\frac{GMm}{R} \quad T = \frac{GMm}{2R} = -\frac{V}{2}$$

y además que  $l = R$ . En estas condiciones, el momento angular antes del impulso puede ser descrito como:

$$L = mR\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Ahora, le damos un impulso radial hacia dentro de velocidad  $v_r = v_c$ . Tras aplicarle el impulso radial, sabemos que se conservará el momento angular porque los momentos lineales radiales no hacen momento angular (por definición de momento angular [ver definición 12 en la página 20]). En consecuencia, también se conservará  $l$  (por definición de  $l$  [ver definición 85 en la página 160]). Así:

$$L' = L \quad l' = l$$

Calculemos la nueva energía de la órbita:

$$E' = E + \underbrace{\frac{1}{2}mv_c^2}_{=T}$$

pues  $T = \frac{1}{2}mv_c^2$  es justo la energía cinética con la que contaba la partícula de masa  $m$  antes de aplicarle el impulso. Ahora, como además  $E = T + V$ , obtenemos:

$$E' = T + V + T = 2T + V$$

pero recordemos que en una órbita circular  $T = -\frac{V}{2}$ , de forma que, sustituyendo llegamos a:

$$E' = 2\left(-\frac{V}{2}\right) + V = -V + V = 0$$

En consecuencia, por la proposición 73 en la página 169, la nueva órbita es una parábola y la excentricidad de dicha órbita es  $e = 1$ . Además, la distancia mínima entre la nueva trayectoria y el centro de fuerzas será (por la proposición 72 en la página 168):

$$r_{\min} = \frac{l}{2} = \frac{R}{2}$$

porque en la órbita circular es  $R = l$ .

**Ejemplo 27.** Tenemos una partícula de masa  $m$  sometida a la fuerza gravitatoria generada por un cuerpo de masa  $M$  inmóvil en torno al cual nuestra partícula de masa  $m$  describe órbita circular de radio  $R$ . Posteriormente, le damos un impulso radial hacia dentro produciéndole un cambio de velocidad en la dirección radial de  $v_r = \frac{v_c}{2}$  donde  $v_c$  es la velocidad del movimiento circular. ¿Qué tipo de órbita describirá el objeto tras el impulso?

Todas las deducciones de la órbita circular son las mismas que en el ejemplo 26 en la página anterior.

Ahora, le damos un impulso radial hacia dentro de velocidad  $v_r = \frac{v_c}{2}$ . Tras aplicarle el impulso radial, sabemos que se conservará el momento angular porque los momentos lineales radiales no hacen momento angular (por definición de momento angular [ver definición 12 en la página 20]). En consecuencia, también se conservará  $l$  (por definición de  $l$  [ver definición 85 en la página 160]). Así:

$$L' = L \quad l' = l$$

Calculemos la nueva energía de la órbita:

$$E' = E + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_c}{2}\right)^2 = E + \underbrace{\frac{1}{4}\frac{1}{2}mv_c^2}_{=T} = E + \frac{T}{4}$$

Como  $E = T + V$ , obtenemos:

$$E' = T + V + \frac{T}{4} = V + \frac{5T}{4}$$

Como en una órbita circular  $T = -\frac{V}{2}$ :

$$E' = V - \frac{5}{4}\frac{V}{2} = V - \frac{5}{8}V = \frac{3}{8}V = -\frac{3}{8}\frac{GMm}{R} < 0$$

De esta forma, sabemos que la nueva trayectoria será una elipse. Mediante la proposición 75 en la página 181, podemos obtener el valor de los parámetros  $a$  y  $b$  de la nueva órbita.

$$E = -\frac{GMm}{2a} \Leftrightarrow -\frac{3}{8}\frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2a} \Leftrightarrow \frac{3}{4}\frac{1}{R} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}R$$

$$b^2 = al = \frac{4}{3}R^2$$

dado que  $l = R$ .

A continuación, vamos a hallar la excentricidad a través de  $c$ . Sabemos por la sección 3.2.1 en la página 151 que en una elipse se cumple:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

podemos obtener  $c$  como sigue:

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{4^2}{3^2}R^2 - \frac{4}{3}R^2 = \frac{4}{3}R^2\left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{4}{9}R^2 \Leftrightarrow c = \frac{2}{3}R$$

En consecuencia:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{2}{3}R}{\frac{4}{3}R} = \frac{1}{2}$$



**Ejemplo 28.** Tenemos una partícula de masa  $m$  sometida a la fuerza gravitatoria generada por un cuerpo de masa  $M$  inmóvil en torno al cual nuestra partícula de masa  $m$  describe órbita circular de radio  $R$ . Posteriormente, le damos un impulso radial hacia dentro produciéndole un cambio de velocidad en la dirección radial de  $v_r = 2v_c$  donde  $v_c$  es la velocidad del movimiento circular. ¿Qué tipo de órbita describirá el objeto tras el impulso?

Todas las deducciones de la órbita circular son las mismas que en el ejemplo 26 en la página 190.

Ahora, le damos un impulso radial hacia dentro de velocidad  $v_r = 2v_c$ . Tras aplicarle el impulso radial, sabemos que se conservará el momento angular porque los momentos lineales radiales no hacen momento angular (por definición de momento angular [ver definición 12 en la página 20]). En consecuencia, también se conservará  $l$  (por definición de  $l$  [ver definición 85 en la página 160]). Así:

$$L' = L \quad l' = l$$

Calculemos la nueva energía de la órbita:

$$E' = E + \frac{1}{2}m(2v_c)^2 = E + 4 \underbrace{\frac{1}{2}mv_c^2}_{=T} = E + 4T$$

Como  $E = T + V$ , obtenemos:

$$E' = T + V + 4T = V + 5T$$

Como en una órbita circular  $T = -\frac{V}{2}$ :

$$E' = V - 5\frac{V}{2} = V - \frac{5}{2}V = -\frac{3}{2}V = \frac{3}{2}\frac{GMm}{R} > 0$$

De esta forma, sabemos que la nueva trayectoria será una hipérbola. Mediante la proposición 75 en la página 181, podemos obtener el valor de los parámetros  $a$  y  $b$  de la nueva órbita.

$$E = \frac{GMm}{2a} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\frac{GMm}{R} = \frac{GMm}{2a} \Leftrightarrow 3\frac{1}{R} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = \frac{R}{3}$$

$$b^2 = al = \frac{R^2}{3}$$

dado que  $l = R$ .

A continuación, vamos a hallar la excentricidad a través de  $c$ . Sabemos por la sección 3.2.2 en la página 153 que en una hipérbola se cumple:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

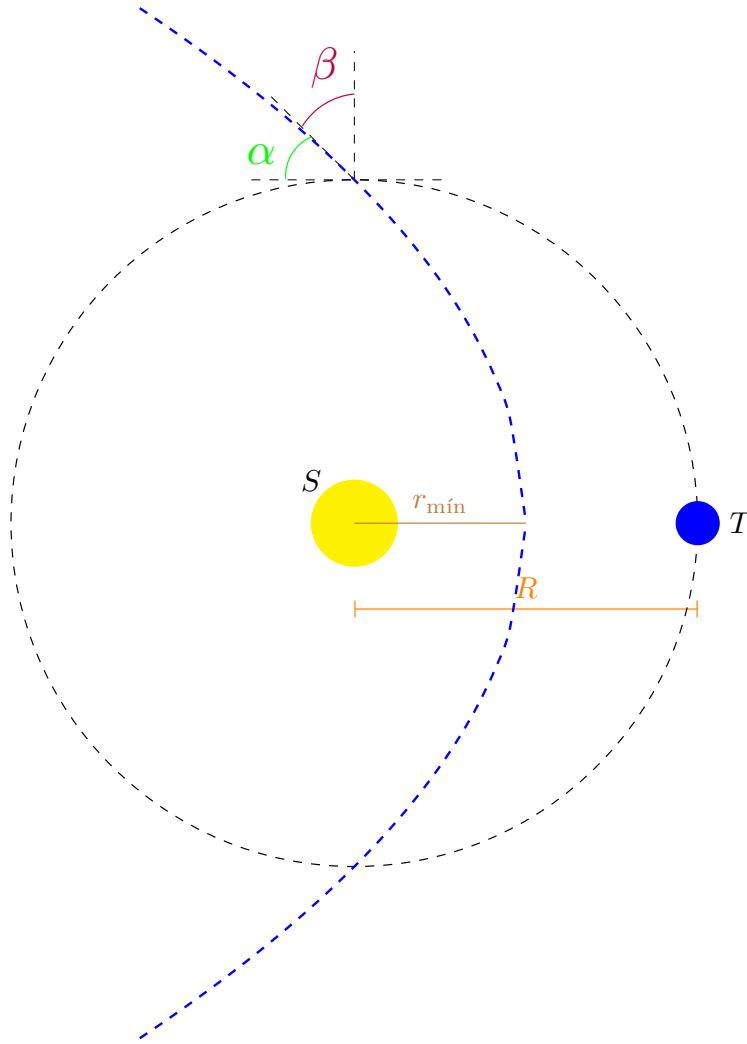
podemos obtener  $c$  como sigue:

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{R^2}{9} + \frac{R^2}{3} = \frac{R^2}{3} \left( \frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{4}{9}R^2 \Leftrightarrow c = \frac{2}{3}R$$

Y, en consecuencia:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{2}{3}R}{\frac{1}{3}R} = 2$$

**Ejemplo 29.** Supongamos que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular de radio  $R$ . Además de por la Tierra, el Sol es orbitado por un cometa de cuya órbita sabemos que la distancia más corta entre ella y el Sol es  $r_{\min} = \frac{R}{2}$  y que, además, la velocidad del cometa en el punto en el que se realiza la mínima distancia es dos veces la velocidad de la órbita circular de la Tierra. ¿Qué tipo de órbita describe el cometa? ¿Qué velocidad posee el cometa cuando intersecta la órbita de la Tierra? ¿Qué ángulo forman el vector velocidad de la Tierra con el vector velocidad del cometa en los puntos de intersección? ¿Durante cuánto tiempo permanecerá el cometa dentro de la órbita de la Tierra?



Primero, obtenemos la velocidad de la órbita circular de la Tierra mediante la proposición 68 en la página 160:

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

donde  $M$  es la masa del Sol.

A continuación, deseamos obtener el tipo de órbita del cometa. Para ello, hallemos la energía. Como la energía es una constante del movimiento, podemos hallarla allí donde nos sea más fácil. En este caso, nos resulta más sencillo en el punto de distancia mínima, pues conocemos tanto el valor de la distancia mínima como la velocidad en ese punto. Llamando  $m$  a la masa del cometa, tenemos:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{GMm}{\frac{R}{2}} + \frac{1}{2}m(2v_c)^2 = -2\frac{GMm}{R} + 4\frac{1}{2}mv_c^2 = \\ &= -2\frac{GMm}{R} + 2m\underbrace{\frac{GM}{R}}_{=v_c^2} = 0 \end{aligned}$$

Luego tenemos una parábola. Además, según la proposición 72 en la página 168, sabemos que para el caso de una parábola la distancia mínima cumple:

$$r_{\text{mín}} = \frac{l}{2}$$

Como en nuestro caso era  $r_{\text{mín}} = \frac{R}{2}$ , tenemos  $l = R$ .

Ahora, obtengamos la velocidad que tiene el cometa cuando intersecta la órbita de la Tierra. Lo hacemos por energías. En el punto de intersección con la órbita de la Tierra, la distancia del cometa al Sol será  $R$ , pues la órbita de la Tierra es circular.

$$0 = E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Ahora, calculemos el ángulo  $\alpha$  que forma el vector velocidad con la trayectoria de la órbita de la Tierra. Para ello, vamos a aplicar la conservación del momento angular. No obstante, primero tenemos que calcular el momento angular. Podemos hallarlo en el punto  $r = r_{\min}$  donde sabemos que es  $\dot{r} = 0$  (pues la distancia mínima es siempre en perpendicular) y, en consecuencia,  $r$  y  $v$  son perpendiculares:

$$L = m \frac{R}{2} 2v_c = mRv_c = mR\sqrt{\frac{GM}{R}} = m\sqrt{GMR}$$

Como el momento angular se conserva, el momento angular en el punto de intersección debe ser el momento angular inicial. Como ya conocemos el módulo de la velocidad en el punto de intersección (donde es  $r = R$ ), simplemente:

$$m\sqrt{GMR} = mR\sqrt{\frac{2GM}{R}} \sin \beta \Leftrightarrow 1 = \sqrt{2} \sin \beta \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

restringiendo  $\beta$  a  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  donde  $\beta$  es el ángulo que forma el vector velocidad del cometa con el vector posición con respecto del Sol (la dirección radial), no el ángulo que forma el vector velocidad del cometa con el vector velocidad de la Tierra (que es perpendicular a la dirección radial), dicho ángulo es al que hemos llamado  $\alpha$ . Pero, hecho esto, calcular  $\alpha$  es muy sencillo, ya que  $\beta$  y  $\alpha$  son complementarios.

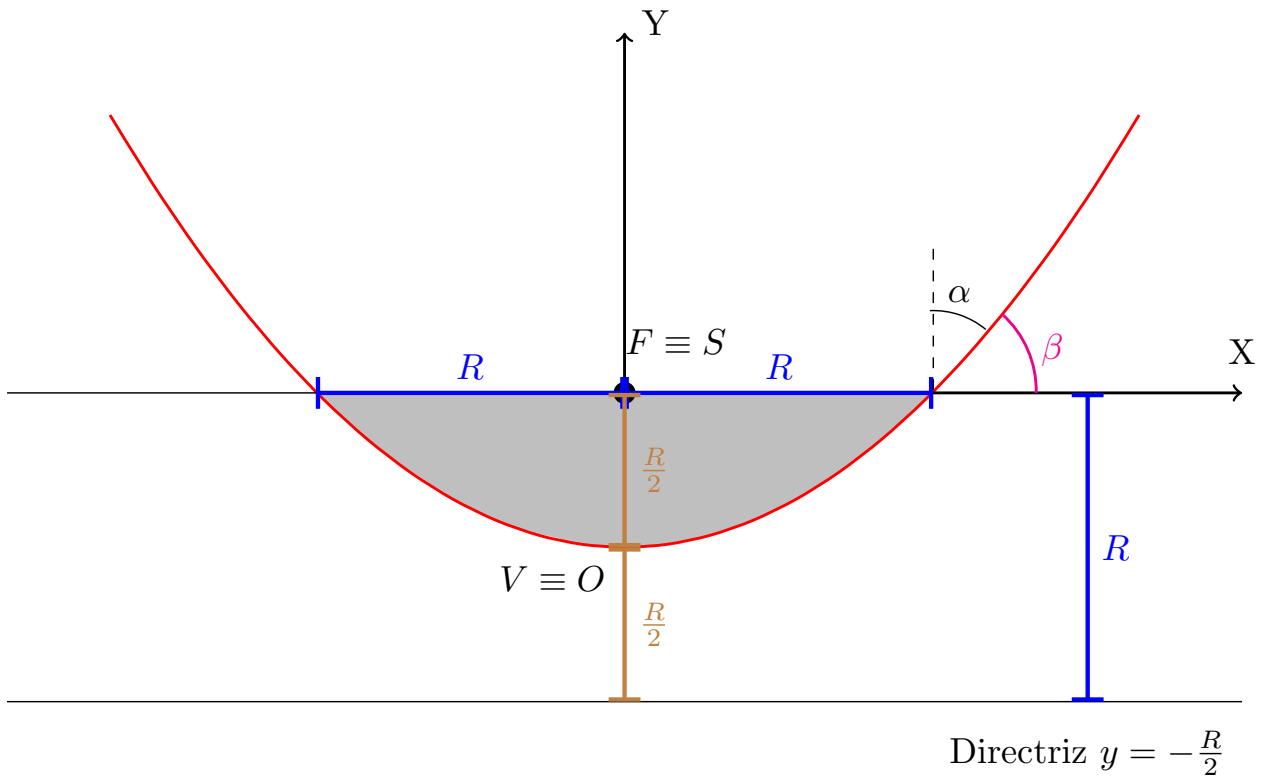
$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{4}$$

Nótese que en este caso sí que es  $\alpha = \beta$ , porque era  $\beta = \frac{\pi}{4}$ ; pero, en general, esto **no** será cierto.

Para calcular el tiempo que permanece el cometa dentro de la órbita terrestre vamos a usar la segunda ley de Kepler (ver teorema 19 en la página 143), que dice que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

como conocemos el momento angular de la órbita, el reto consiste en hallar el área encerrada entre los vectores posición en los puntos de intersección contenida en la parábola. Como el área es simétrica, nos basta con hallar una mitad. Vamos a obtener dicho área matemáticamente usando las formas funcionales de la recta (el vector posición) y la parábola presentes e integrando. Nótese que en este caso, como la órbita es una parábola y el Sol debe ser el foco de la parábola; en el dibujo del principio de este ejercicio, los vectores posición de los puntos de intersección tiene dirección vertical. Si giramos dicho dibujo  $\frac{\pi}{2}$  en sentido horario, obtenemos:



Nuestro objetivo es hallar el área entre la línea horizontal azul y la parábola roja. Vamos a hacer esto integrando. Para ello, necesitamos obtener las ecuaciones matemáticas que describen estos objetos. La línea recta horizontal viene descrita por:

$$f(x) = \frac{R}{2}$$

Recordemos que la ecuación general de una parábola cuyo eje es paralelo al eje Y es:

$$g(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$g'(x) = 2Ax + B$$

Para hallar la ecuación de la parábola vamos a usar que sabemos que el mínimo se da en  $x = 0$  y que vale 0. Además, debe cortar a la función  $f(x)$  en  $x = R$ . Matemáticamente, podemos escribir lo anterior como:

$$g(0) = 0 \quad g'(0) = 0 \quad g(R) = \frac{R}{2}$$

De las primeras dos ecuaciones obtenemos fácilmente que:

$$B = C = 0$$

Apliquemos la última ecuación:

$$\frac{R}{2} = g(R) = AR^2 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2R}$$

Bien, ahora estamos en disposición de hallar el área objetivo:

$$A = 2 \int_0^R \left[ \frac{R}{2} - \frac{x^2}{2R} \right] dx = 2 \left[ \frac{R}{2}x - \frac{x^3}{6R} \right]_0^R = 2 \left( \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{6} \right) = R^2 - \frac{R^2}{3} = \frac{2}{3}R^2$$

Ahora, por la segunda ley de Kepler, tenemos:

$$\frac{A}{t} = \frac{L}{2m} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{3}R^2}{t} = \frac{L}{2m} \Leftrightarrow t = \frac{\frac{4}{3}mR^2}{L} = \frac{4mR^2}{3L}$$

Anteriormente, habíamos obtenido que:

$$L = m\sqrt{GMR}$$

Sustituyendo, tenemos:

$$t = \frac{4mR^2}{3m\sqrt{GMR}} = \frac{4}{3} \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}$$

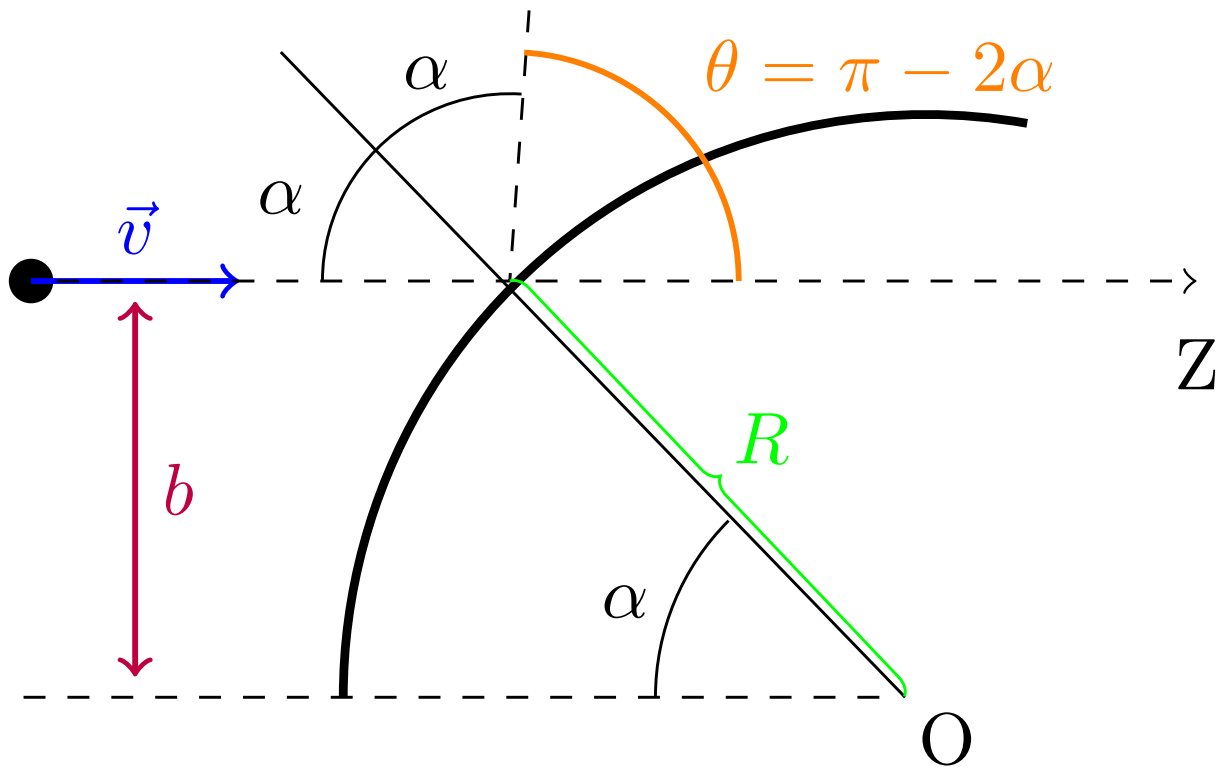
### 3.5. Dispersión de partículas

Recomendamos repasar las definiciones 84 en la página 156 y 86 en la página 184 antes de proseguir con la lectura de esta sección.

#### 3.5.1. Colisión entre una partícula móvil y una esfera fija de radio $R$

**Proposición 77.** Sea una partícula puntual que lanzamos con un parámetro de impacto  $b$  hacia una esfera fija de radio  $R$  con rapidez  $v$ . Si el choque es elástico, la fuerza de interacción (la fuerza de choque) es central conservativa; por tanto, se conserva la energía y el momento angular antes y después del choque. Además, tras el choque la partícula seguirá llevando rapidez  $v$  y el parámetro de impacto  $b$  y el ángulo de dispersión  $\theta$  están relacionados por la expresión:

$$b = R \cos \frac{\theta}{2}$$



*Demostración.* Como el choque es elástico, la energía cinética antes del choque será la misma que después del choque. En consecuencia, el módulo de la velocidad (la rapidez) se conserva.

Durante la colisión actúa sobre la partícula una fuerza desconocida. Sin embargo, como el choque es elástico y no hay otras fuerzas aparte de la fuerza de choque, la energía mecánica debe ser igual a la cinética tanto antes como después del choque y como esta última se conserva, pues la energía mecánica se conservará también. Por tanto, la fuerza del choque será conservativa. Además, como la fuerza de choque será perpendicular a la superficie de la esfera, desde el centro de la esfera la fuerza de choque es central. Así, la fuerza de choque es

central conservativa. Como es central, el momento angular desde  $O$  debe conservarse. Así si llamamos  $\alpha_1$  al ángulo que forma la trayectoria de entrada con la perpendicular a la superficie de la esfera en el punto de choque y  $\alpha_2$  al ángulo que forma la trayectoria de salida con la perpendicular a la superficie de la esfera en el punto de choque, obtenemos:

$$Rv \sin \alpha_1 = Rv \sin \alpha_2 \Leftrightarrow \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$$

y como  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  están restringidos a  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , debe ser  $\alpha_1 = \alpha_2 := \alpha$ . Nótese que necesariamente  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  están en el intervalo descrito anteriormente porque si fuera  $\alpha > \frac{\pi}{2}$  entonces la partícula incidente tendría que venir desde dentro de la esfera y esto es absurdo.

Ahora, por trigonometría obtenemos fácilmente que:

$$b = R \sin \alpha$$

$$\theta = \pi - 2\alpha \Leftrightarrow 2\alpha = \pi - \theta \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera, obtenemos:

$$b = R \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = R \cos \frac{\theta}{2}$$

*Q.E.D.*

*Observación 64.* Nótese que en este caso el momento lineal **no** se conserva.

### 3.5.2. Colisión entre un conjunto de proyectiles móviles y una lámina de blancos fijos

#### 3.5.2.1. Sin tener en cuenta la dirección tras la dispersión

En el caso anterior medir el parámetro de impacto  $b$  era relativamente sencillo. Sin embargo, si el proyectil que lanzamos es, por ejemplo, un protón y lo lanzamos contra un núcleo de nitrógeno, normalmente como mucho podremos medir el ángulo de dispersión  $\theta$  en una cámara de niebla. Sin embargo, medir el parámetro de impacto  $b$  (que en nuestro ejemplo sería de escala nanométrica) mirando estelas de grosor de escala milimétrica no es posible. Por tanto, para este tipo de experimentos nos interesa lanzar una gran cantidad de proyectiles y contra una gran cantidad de blancos. Del mismo modo, normalmente no podremos conocer el valor del radio  $R$  de los blancos (aun suponiendo el mismo para todos), por tanto, nos interesa trabajar con otra magnitud física que nos indique el tamaño del blanco; dicha magnitud física será la sección eficaz.

**Definición 88.** Llamamos **sección eficaz**  $\sigma$  de un blanco al área efectiva que muestra al interactuar con un proyectil.

**Teorema 21.** Lanzamos un haz de  $N_{inc}$  partículas de la misma masa y con la misma velocidad contra una lámina de partículas estáticas de sección eficaz  $\sigma$ . Supondremos que la sección del haz incidente  $A$  está contenida en el área sobre la cual se extienden los blancos (que no es el área ocupada por los blancos; el área ocupada por los blancos será menor que el área sobre la que se extienden; dicho de otra forma, hay huecos entre los blancos). Entonces, el número de partículas que colisiona contra los blancos (y que supondremos, se dispersa)  $N_{disp}$  viene dado por la expresión:

$$N_{disp} = N_{inc} n_{bl} \sigma$$

donde  $n_{bl}$  es el número de blancos por unidad de área, visto desde la dirección incidente. Es decir, si yo hiciera una foto desde la perspectiva de uno de los proyectiles lanzados, hiciera una división de la foto según una cuadrícula y tomara uno de esos cuadrados como unidad de referencia,  $n_{bl}$  sería el número de blancos que habría en cada cuadrado. En nuestro modelo, supondremos que los blancos están distribuidos uniformemente.

*Demostración.* La probabilidad de que uno de los proyectiles del haz incidente colisione con los blancos viene dada por la expresión:

$$P_{colisión} = \frac{\text{área ocupada por los blancos}}{\text{sección del haz incidente}}$$

Llamemos  $A$  a la sección del haz incidente. Por otra parte, el área ocupada por los blancos será el número de blancos por su sección eficaz. En un área del tamaño de la sección del haz incidente habrá  $N_{bl} = n_{bl} A$  blancos.

De forma que el área ocupada por los blancos viene dada por  $A_{bl} = n_{bl}A\sigma$ . Así, la probabilidad de colisión queda:

$$P_{\text{colisión}} = \frac{n_{bl}A\sigma}{A} = n_{bl}\sigma$$

que como vemos, no depende del la sección del haz  $A$ . Por último, el número de proyectiles que colisiona (que supondremos que es el mismo que se dispersa) será:

$$N_{disp} = P_{\text{colisión}}N_{inc} = N_{inc}n_{bl}\sigma$$

*Q.E.D.*

Si el lector anda ahora algo perdido con los nuevos conceptos el siguiente ejemplo le ayudará a captar su significado práctico.

**Ejemplo 30** (Extraído de Taylor (2013) [2]). Un cazador observa que 50 cuervos se posan aleatoriamente sobre un roble, donde ya no puede verlos. Cada cuervo tiene una sección eficaz  $\sigma \approx \frac{1}{2}$  pies<sup>2</sup> y el roble tiene un área total (vista desde la posición del cazador) de  $A = 150$  pies<sup>2</sup>. Si el cazador dispara 60 balas al azar hacia el árbol, ¿a cuántos cuervos esperarías acertar?

En este caso, el número de proyectiles incidentes será  $N_{inc} = 60$  y el número de blancos será  $N_{bl} = 50$ . Además, la densidad de blancos en nuestro caso es:

$$n_{bl} = \frac{N_{bl}}{A} = \frac{50}{150} \frac{1}{\text{pies}^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{\text{pies}^2}$$

Aplicando el teorema 21 en la página anterior, obtenemos que el número de aciertos (el número de colisiones) es:

$$N_{disp} = N_{inc}n_{bl}\sigma = 60 \frac{1}{3} \frac{1}{2} = 10$$

Con frecuencia, lo que tendremos será un flujo continuo de proyectiles, no un haz de proyectiles disparados «a la vez». Por tanto, nos será más útil trabajar con el flujo de partículas entrante  $\phi_{inc}$  por unidad de área y unidad de tiempo y el flujo de partículas dispersada  $\phi_{disp}$  por unidad de área y por unidad de tiempo.

**Corolario 28.** Lanzamos un haz de partículas de la misma masa y con la misma velocidad contra una lámina de partículas estáticas de sección eficaz  $\sigma$ . Sea:

$$\phi_{inc} = \frac{dN_{inc}}{dt dA}$$

el número de partículas del haz incidente que llegan a los blancos por unidad de área y por unidad de tiempo. Igualmente, sea:

$$\phi_{disp} = \frac{dN_{disp}}{dt dA}$$

el número de partículas que colisionan contra los blancos por unidad de área y por unidad de tiempo. Hemos usado diferenciales inexactos porque en realidad no existen los diferenciales de  $N_{inc}$  y  $N_{disp}$ , usamos esta notación simplemente para indicar que son pequeños. Supondremos que la sección del haz incidente  $A$  está contenida en el área sobre la cual se extienden los blancos. Entonces, ambas magnitudes  $\phi_{inc}$  y  $\phi_{disp}$  están relacionadas entre sí por la expresión:

$$\phi_{disp} = \phi_{inc}n_{bl}\sigma$$

donde  $n_{bl}$  es el número de blancos por unidad de área, visto desde la dirección incidente. En nuestro modelo, supondremos que los blancos están distribuidos uniformemente.

*Demostración.* Partimos del teorema 21 en la página anterior:

$$N_{disp} = N_{inc}n_{bl}\sigma$$

Si  $N_{disp}$  y  $N_{inc}$  son pequeños, podemos usar la notación de diferencial inexacta, de manera que la expresión anterior queda:

$$dN_{disp} = dN_{inc}n_{bl}\sigma$$

Dividiendo la expresión anterior por  $dt$  y  $dA$ , llegamos a:

$$\underbrace{\frac{dN_{disp}}{dtdA}}_{=\phi_{disp}} = \underbrace{\frac{dN_{inc}}{dtdA}}_{=\phi_{inc}} n_{bl}\sigma \Leftrightarrow \phi_{disp} = \phi_{inc} n_{bl}\sigma$$

*Q.E.D.*

A veces, nos será útil trabajar con el flujo total por unidad de tiempo entrante  $\varrho_{inc}$  y con el flujo total por unidad de tiempo dispersado  $\varrho_{disp}$ . Para este caso, tenemos el resultado equivalente:

**Corolario 29.** *Lanzamos un haz de partículas de la misma masa y con la misma velocidad contra una lámina de partículas estáticas de sección eficaz  $\sigma$ . Sea:*

$$\varrho_{inc} = \frac{dN_{inc}}{dt}$$

*el número de partículas del haz incidente que llegan a los blancos por unidad de tiempo. Igualmente, sea:*

$$\varrho_{disp} = \frac{dN_{disp}}{dt}$$

*el número de partículas que colisionan contra los blancos por unidad de tiempo. Supondremos que la sección del haz incidente  $A$  está contenida en el área sobre la cual se extienden los blancos. Entonces, ambas magnitudes  $\varrho_{inc}$  y  $\varrho_{disp}$  están relacionadas entre sí por la expresión:*

$$\varrho_{disp} = \varrho_{inc} n_{bl}\sigma$$

*donde  $n_{bl}$  es el número de blancos por unidad de área, visto desde la dirección incidente. En nuestro modelo, supondremos que los blancos están distribuidos uniformemente.*

*Demostración.* Partimos del corolario 28 en la página anterior:

$$\phi_{disp} = \phi_{inc} n_{bl}\sigma \Leftrightarrow \frac{dN_{disp}}{dtdA} = \frac{dN_{inc}}{dtdA} n_{bl}\sigma$$

Multiplicando a ambos lados por  $dA$ , obtenemos:

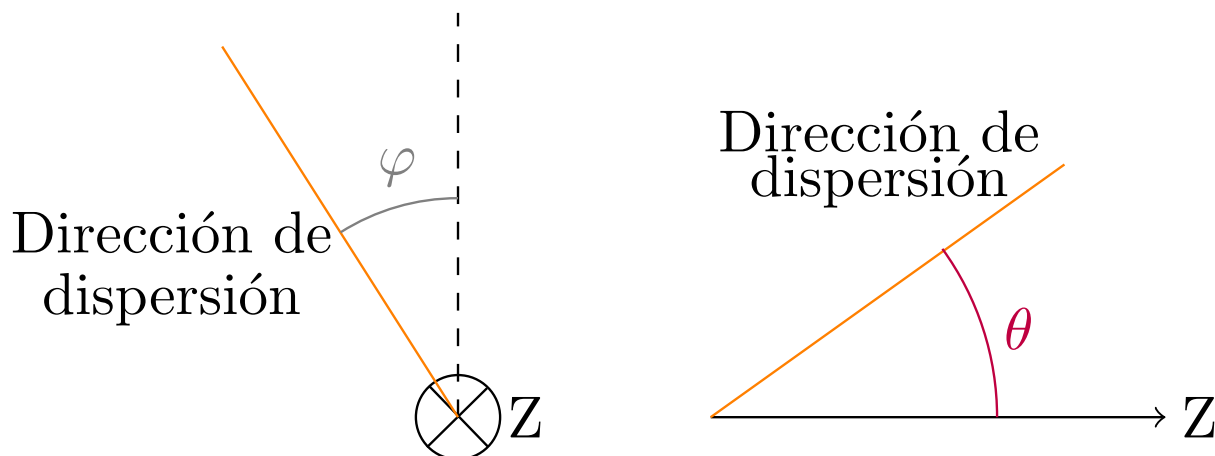
$$\underbrace{\frac{dN_{disp}}{dt}}_{=\rho_{disp}} = \underbrace{\frac{dN_{inc}}{dt}}_{=\varrho_{inc}} n_{bl}\sigma \Leftrightarrow \varrho_{disp} = \varrho_{inc} n_{bl}\sigma$$

*Q.E.D.*

### 3.5.2.2. Teniendo en cuenta la dirección de la dispersión

En ocasiones, no sólo me interesa saber el número de partículas dispersadas, sino el número de partículas dispersadas en una dirección en concreto. Para esto, vamos a usar la sección eficaz diferencial. Lo habitual es tomar la dirección del haz incidente como eje  $Z$  y después especificar la dirección de cualquier proyectil dando sus ángulos polares  $\theta$  y  $\varphi$ . Más en concreto, vamos a contar el número de partículas que salen en un cono estrecho alrededor de  $(\theta, \varphi)$ . Para caracterizar dicho cono, vamos a utilizar el concepto de ángulo sólido.



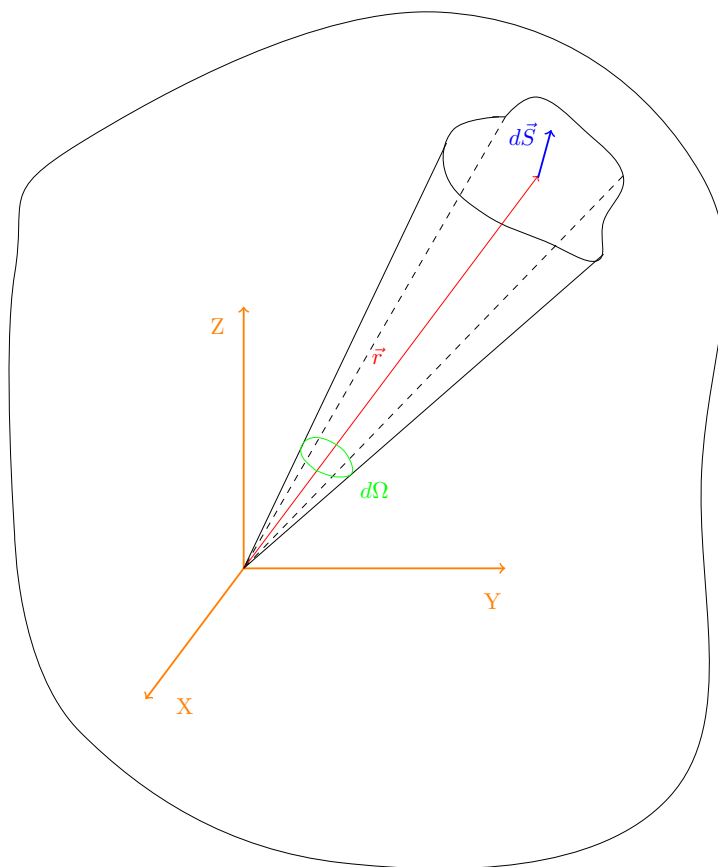


*Observación 65.* Si miramos en la dirección perpendicular al eje  $Z$ , el ángulo  $\varphi$  se corresponde con el ángulo que forma la proyección de la dirección de dispersión en el plano perpendicular al eje  $Z$  con la vertical. Si ahora miramos según el plano que contiene tanto a la dirección de la dispersión como al eje  $Z$ ,  $\theta$  se corresponde con el ángulo que forma la dirección de dispersión con el eje  $Z$ .

**Definición 89.** Llamamos ángulo sólido al ángulo espacial tal que su expresión diferencial es:

$$d\Omega := \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} \quad (3.5.1)$$

Gráficamente:



La idea del ángulo sólido<sup>3</sup> es el ángulo  $2D$  (la «anchura» del cono) que se forma tras proyectar la superficie

<sup>3</sup>Más información en la página [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Solid\\_angle&oldid=874069230](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Solid_angle&oldid=874069230).

sobre una esfera de radio unidad. Es decir, es una medida del agujero que tendría que hacer en la esfera de radio unidad para poder ver el  $d\vec{S}$ . Nótese que efectivamente es un ángulo, pues es un parámetro adimensional.

**Proposición 78.** *El ángulo sólido diferencial  $d\Omega$  expresado en coordenadas esféricas cuando el vector  $\vec{r}$  es paralelo al vector  $d\vec{S}$  tiene la forma:*

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

*Demostración.* Partimos de la definición de ángulo sólido 89 en la página anterior:

$$d\Omega = \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2}$$

Como es  $\vec{r} \parallel d\vec{S}$  por hipótesis:

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

El diferencial de superficie en coordenadas esféricas viene dado por:

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$d\Omega = \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi$$

con lo que se llega al enunciado.

*Q.E.D.*

**Proposición 79.** *Lanzamos un haz de  $N_{inc}$  partículas de la misma masa y con la misma velocidad contra una lámina de partículas estáticas de sección eficaz  $d\sigma$  para el ángulo sólido  $d\Omega$ . Es decir,  $d\sigma$  es el área efectiva de cada blanco para la dispersión en el ángulo sólido  $d\Omega$ . Supondremos que la sección del haz incidente  $A$  está contenida en el área sobre la cual se extienden los blancos. Sea  $n_{bl}$  el número de blancos por unidad de área, visto desde la dirección incidente; supondremos que los blancos están distribuidos uniformemente. Sea  $N_{disp,d\Omega}$  el número de partículas que colisionan contra los blancos y son dispersadas en el ángulo sólido  $d\Omega$ . Sea, además:*

$$\phi_{inc} = \frac{dN_{inc}}{dt dA}$$

*el número de partículas del haz incidente que llegan a los blancos por unidad de área y por unidad de tiempo. Igualmente, sea:*

$$\phi_{disp,d\Omega} = \frac{dN_{disp,d\Omega}}{dt dA}$$

*el número de partículas que colisionan contra los blancos y son dispersadas en el ángulo sólido  $d\Omega$  por unidad de área y por unidad de tiempo. Por otra parte, sea:*

$$\varrho_{inc} = \frac{dN_{inc}}{dt}$$

*el número de partículas del haz incidente que llegan a los blancos por unidad de tiempo. Igualmente, sea:*

$$\varrho_{disp,d\Omega} = \frac{dN_{disp,d\Omega}}{dt}$$

*el número de partículas que colisionan contra los blancos y son dispersadas en el ángulo sólido  $d\Omega$  por unidad de tiempo. Entonces, se dan las siguientes relaciones:*

1.

$$N_{disp,d\Omega} = N_{inc} n_{bl} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

2.

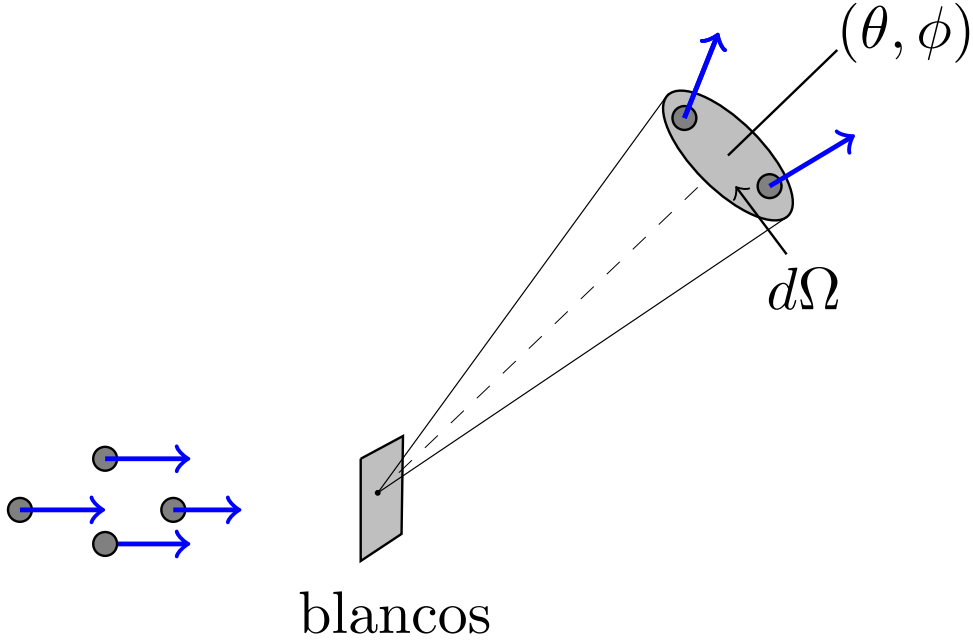
$$\phi_{disp,d\Omega} = \phi_{inc} n_{bl} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

3.

$$\varrho_{disp,d\Omega} = \varrho_{inc} n_{bl} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

donde:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \mathfrak{F}(\theta, \varphi)$$



*Demostración.* Aplicando la proposición 21 en la página 197, restringiéndonos a las partículas dispersadas en el ángulo sólido  $d\Omega$ , obtenemos:

$$N_{disp,d\Omega} = N_{inc} n_{bl} d\sigma$$

Multiplicando y dividiendo en el lado derecho de la ecuación por el diferencial de ángulo sólido  $d\Omega$ , obtenemos:

$$N_{disp,d\Omega} = N_{inc} n_{bl} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Como el ángulo sólido  $d\Omega$  es, por la proposición 78 en la página anterior, función de  $d\theta$  y  $d\varphi$ , el cociente  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  será, en general, función de  $\theta$  y  $\varphi$ .

Ahora, si  $N_{disp}$  y  $N_{inc}$  son pequeños, podemos usar la notación de diferencial inexacta, de manera que la expresión anterior queda:

$$\bar{d}N_{disp,d\Omega} = \bar{d}N_{inc} n_{bl} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Dividiendo la expresión anterior por  $dt$  y  $dA$ , llegamos a:

$$\underbrace{\frac{\bar{d}N_{disp,d\Omega}}{dt dA}}_{=\phi_{disp,d\Omega}} = \underbrace{\frac{\bar{d}N_{inc}}{dt dA}}_{=\phi_{inc}} n_{bl} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \Leftrightarrow \phi_{disp,d\Omega} = \phi_{inc} n_{bl} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Si multiplicando la parte izquierda de la expresión anterior a ambos lados por  $dA$ , obtenemos:

$$\underbrace{\frac{\bar{d}N_{disp,d\Omega}}{dt}}_{=\rho_{disp,d\Omega}} = \underbrace{\frac{\bar{d}N_{inc}}{dt}}_{=\varrho_{inc}} n_{bl} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \Leftrightarrow \varrho_{disp,d\Omega} = \varrho_{inc} n_{bl} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

*Q.E.D.*

**Definición 90.** El cociente  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  de la proposición 79 en la página anterior recibe el nombre de **sección eficaz diferencial**. En general, la sección eficaz diferencial es función de los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$ .

**Corolario 30.** La sección eficaz total  $\sigma$  es igual a la integral sobre todos los posibles ángulos sólidos  $d\Omega$  asociados a la sección eficaz diferencial  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ .

$$\sigma = \iint \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\varphi$$

*Demostración.*

$$\sigma = \iint d\sigma = \iint d\sigma \frac{d\Omega}{d\Omega} = \iint \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Por la proposición 78 en la página 201, sabemos que el ángulo sólido en coordenadas esféricas viene dado por:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$\sigma = \iint \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\varphi$$

Como  $\theta \in [0, \pi]$  y  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , si queremos barrer todos los posibles ángulos sólidos, tendremos que barrer todos los posibles valores de  $\theta$  y  $\varphi$ . En consecuencia, la integral anterior queda:

$$\sigma = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\varphi$$

*Q.E.D.*

**Proposición 80.** Lanzamos un haz de  $N_{inc}$  partículas de la misma masa y con la misma velocidad contra una lámina de partículas estáticas de sección eficaz  $d\sigma$  para el ángulo sólido  $d\Omega$ . Es decir,  $d\sigma$  es el área efectiva de cada blanco para la dispersión en el ángulo sólido  $d\Omega$ . Supondremos que la sección del haz incidente  $A$  está contenida en el área sobre la cual se extienden los blancos. Sea  $n_{bl}$  el número de blancos por unidad de área, visto desde la dirección incidente; supondremos que los blancos están distribuidos uniformemente. Contamos con un detector de superficie  $A_{det}$  a distancia  $L$  de la lámina de blancos (supondremos que  $L$  es mucho mayor que las dimensiones de la lámina de blancos de manera que la distancia entre cualquier punto de la lámina y nuestro detector es aproximadamente  $L$ ) tal que la superficie de detección es perpendicular al vector posición que une la lámina de blancos con el detector. Sea  $N_{det}$  el número de partículas detectadas por el detector. Sea, además:

$$\phi_{inc} = \frac{dN_{inc}}{dt dA}$$

el número de partículas del haz incidente que llegan a los blancos por unidad de área y por unidad de tiempo. Igualmente, sea:

$$\phi_{det} = \frac{dN_{det}}{dt dA}$$

el número de partículas detectadas por el detector por unidad de área y por unidad de tiempo. Por otra parte, sea:

$$\varrho_{inc} = \frac{dN_{inc}}{dt}$$

el número de partículas del haz incidente que llegan a los blancos por unidad de tiempo. Igualmente, sea:

$$\varrho_{det} = \frac{dN_{det}}{dt}$$

el número de partículas detectadas por el detector por unidad de tiempo. Entonces, se dan las siguientes relaciones:

1.

$$N_{det} = \iint_{A_{det}} N_{inc} n_{bl} \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dA_{det}}{L^2}$$

2.

$$\phi_{det} = \iint_{A_{det}} \phi_{inc} n_{bl} \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dA_{det}}{L^2}$$

3.

$$\varrho_{det} = \iint_{A_{det}} \varrho_{inc} n_{bl} \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dA_{det}}{L^2}$$

*Demostración.* Partimos de la proposición 79 en la página 201. De esta forma, sabemos que el número de partículas dispersadas en un diferencial de ángulo sólido  $d\Omega$  viene dada por la expresión:

$$N_{disp,d\Omega} = N_{inc} n_{bl} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Por tanto, para hallar el número de partículas que salen hacia nuestro detector tendremos que integrar la expresión anterior al ángulo sólido de nuestro detector  $\Omega_{det}$ :

$$N_{det} = \iint_{\Omega_{det}} N_{inc} n_{bl} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega_{det}$$

Aplicando la definición de diferencial de ángulo sólido (ver definición 89 en la página 200), sabemos que el diferencial de ángulo sólido asociado a nuestro detector viene dado por:

$$d\Omega_{det} = \frac{\hat{r} \cdot d\vec{A}_{det}}{L^2}$$

pues la distancia entre la lámina de blancos y el detector es  $L$ . Por otra parte, como por hipótesis la superficie de detección es perpendicular al vector posición que une la lámina de blancos con el detector, será  $d\vec{A}_{det} \parallel \hat{r}$ , de manera que podemos escribir la expresión anterior como:

$$d\Omega_{det} = \frac{dA_{det}}{L^2}$$

Sustituyendo en la expresión que hemos obtenido para  $N_{det}$ , obtenemos:

$$N_{det} = \iint_{A_{det}} N_{inc} n_{bl} \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dA_{det}}{L^2}$$

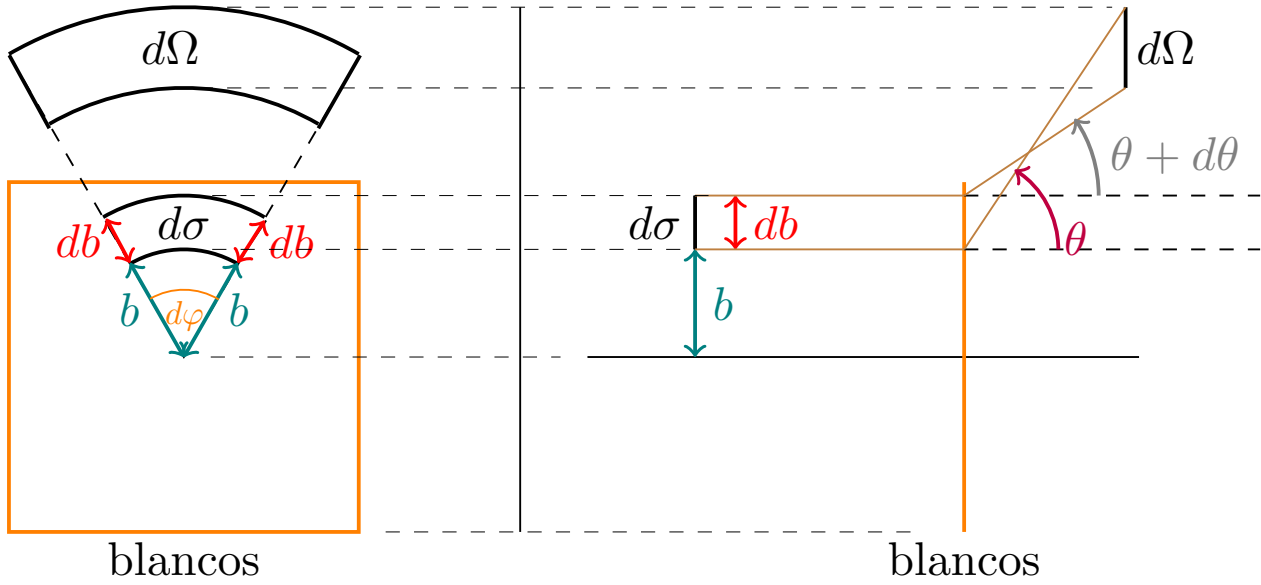
Para obtener las otras expresiones o bien puede aplicarse un razonamiento análogo para las  $\phi$  y para las  $\varrho$ , o bien puede dividirse la expresión con las  $N$  por  $dA$  y  $dt$  (según proceda) como hemos hecho ya varias veces. Q.E.D.

### 3.5.2.3. Cálculo de la sección eficaz diferencial

**Proposición 81.** *Sea un blanco tal que posee simetría axial en la dirección en la que llegan los proyectiles. En ese caso, la sección eficaz diferencial  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  depende únicamente de  $\theta$  y viene dada por la expresión:*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

donde  $b$  y  $\theta$  se corresponden con el parámetro de impacto  $b$  y el ángulo de dispersión  $\theta$  del problema de un único proyectil y un único blanco de las mismas características.



*Demostración.* Consideremos todos los proyectiles lanzados con un parámetro de impacto entre  $b$  y  $b + db$  y entre un ángulo  $\varphi$  y  $\varphi + d\varphi$ . Estos son dispersados con ángulo de dispersión entre  $\theta$  y  $\theta + d\theta$  y entre un ángulo  $\varphi$  y  $\varphi + d\varphi$ . Los proyectiles lanzados inciden sobre el blanco en un área:

$$d\sigma = b |db| d\varphi$$

donde  $db$  va con módulo pues éste puede ser positivo o negativo, mientras que el área debe ser positiva necesariamente. Por otra parte, el diferencial de ángulo sólido en el que son desviadas estas partículas es, por la proposición 78 en la página 201:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

Sin embargo, en la forma anterior estamos considerando siempre que  $d\theta > 0$ , dado que el diferencial en coordenadas esféricas  $d\theta$  es siempre positivo. No obstante, en nuestro caso  $d\theta$  no tiene por qué ser necesariamente positivo. Por tanto, como  $d\Omega$  debe ser positivo, reescribimos la ecuación anterior como:

$$d\Omega = \sin \theta |d\theta| d\varphi$$

Bien, ahora hallamos la sección eficaz diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b |db| d\varphi}{\sin \theta |d\theta| d\varphi} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

*Q.E.D.*

*Observación 66.* La proposición 81 en la página anterior nos indica que si hemos hallado la relación entre el parámetro de impacto  $b$  y el ángulo de dispersión  $\theta$  para un proyectil y blanco determinados, tal que el blanco presenta simetría axial respecto a la dirección con respecto a la que llegan las partículas, entonces automáticamente podemos conocer el valor de la sección eficaz diferencial y, en consecuencia, ser capaces de resolver problemas con un número alto de proyectiles y blancos.

**Corolario 31.** La sección eficaz diferencial de una esfera rígida de radio  $R$  para colisiones elásticas con partículas puntuales viene dada por la expresión:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}$$

*Demostración.* Por la proposición 77 en la página 196, sabemos que si lanzamos un proyectil puntual contra una esfera de radio  $R$ , el parámetro de impacto  $b$  y el ángulo de dispersión están relacionados por la ecuación:

$$b = R \cos \frac{\theta}{2}$$

Aplicando la proposición 81 en la página 204, sabemos que la sección eficaz diferencial es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{R \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \left| -\frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right| = \frac{R \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} = R^2 \frac{1}{4} \frac{\overbrace{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}^{=\sin \theta}}{\sin \theta} = \frac{R^2}{4}$$

Q.E.D.

**Observación 67.** Lo más llamativo del resultado anterior es que la sección eficaz diferencial es isótropa; esto es, el número de partículas dispersadas no depende de  $\theta$ . Es el mismo en todas direcciones.

**Corolario 32.** La sección eficaz total de una esfera rígida radio  $R$  para colisiones elásticas con partículas puntuales vale:

$$\sigma = \pi R^2$$

**Demostración.** Partimos del corolario 31 en la página anterior, de manera que sabemos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}$$

Por el corolario 30 en la página 203, sabemos que la sección eficaz total viene dada por:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\varphi = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{R^2}{4} \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{R^2}{4} 2\pi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{\pi R^2}{2} [-\cos \theta]_0^{\pi} = \frac{\pi R^2}{2} (1 - (-1)) = \pi R^2 \end{aligned}$$

Q.E.D.

**Ejercicio 11.** Obtener la sección eficaz diferencial y la sección eficaz total para la dispersión de partículas puntuales de masa  $m$  por medio de un cilindro fijo de radio  $R$  y longitud  $L$  para colisiones elásticas. El parámetro de impacto  $b$  viene dado como la distancia en perpendicular al eje del cilindro.

**Solución.** Nótese que, en este caso, como tenemos un cilindro, no tenemos simetría axial con respecto a la dirección con la que llegan la partículas.



En consecuencia, vamos a tener que hallar la sección eficaz diferencial a partir del cociente de los diferenciales  $d\sigma$  y  $d\Omega$ . Para ello, vamos a trabajar en coordenadas cilíndricas. Escogemos un  $d\sigma$  cualquiera. Visto desde la dirección incidente, dicho área será un rectángulo de lados  $db$  y  $dz$ . De forma que:

$$d\sigma = db dz$$

Por otra parte, por definición de ángulo sólido (ver definición 89 en la página 200), tenemos:

$$d\Omega = \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2}$$

Nótese que  $r$  no es el radio del cilindro, sino la distancia de la superficie  $dS$  al cilindro. Como estamos tomando la superficie perpendicular al vector  $\vec{r}$ ,  $\hat{r}$  y  $d\vec{S}$  serán paralelos y, en consecuencia:

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

Por otra parte, en coordenadas cilíndricas, el diferencial de superficie lateral viene dado por:

$$dS = r d\theta dz$$

Sustituyendo, tenemos:

$$d\Omega = \frac{r d\theta dz}{r^2} = \frac{d\theta dz}{r}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{db dz}{\frac{d\theta dz}{r}} \right| = r \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

donde ponemos los módulos para asegurarnos de que  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  sea positivo. Por tanto, únicamente tenemos que sacar la relación entre el parámetro de impacto y el ángulo de dispersión. En lo que se refiere a obtener dicha relación nuestro problema es indistinguible del caso de la esfera, el de la proposición 77 en la página 196. En consecuencia, tenemos:

$$b = R \cos \frac{\theta}{2} \Rightarrow \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \left| -\frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right| = \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

donde no hemos necesitado poner el módulo al término  $\sin \frac{\theta}{2}$  porque, como  $\theta$  varía de 0 a  $2\pi$ ,  $\frac{\theta}{2}$  varía de 0 a  $\pi$  y, de esta forma, es siempre  $\sin \frac{\theta}{2} \geq 0$ . Así, la sección eficaz diferencial queda:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

y la sección eficaz total:

$$\begin{aligned} \sigma &= \iint r \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\Omega = \int_{z=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} r \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} \frac{d\theta dz}{r} = \int_{z=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta dz = \\ &= \frac{RL}{2} \left[ -2 \cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = RL \left[ -\cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = RL [ -(-1) - (-1) ] = 2RL \end{aligned}$$

Y esto es justo el valor que esperaríamos para la sección eficaz total, pues si miramos un cilindro de forma perpendicular, el área que ocupa desde nuestro punto de vista es la de un rectángulo de base  $2R$  y altura  $L$ .

### 3.5.3. Colisión entre un conjunto de proyectiles móviles y un volumen de blancos fijos

**Definición 91.** Lanzamos un proyectil contra un volumen de blancos uniforme con sección eficaz (total)  $\sigma$ . Llamamos **recorrido libre medio**  $\lambda$  a la distancia media que recorre la partícula entre choque y choque.

**Proposición 82.** El recorrido libre medio de un proyectil  $\lambda$  en un volumen de blancos de sección eficaz (total)  $\sigma$  con densidad de blancos por unidad de volumen uniforme  $\tilde{n}_{bl}$  viene dado por:

$$\lambda = \frac{1}{\tilde{n}_{bl}\sigma}$$

*Demostración.* Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que nuestro proyectil se mueve en la dirección del eje  $x$ . En un volumen  $A dx$ , donde  $A$  puede ser un área cualquiera, la densidad de blancos por unidad de área equivalente será:

$$n_{bl} = \tilde{n}_{bl} dx$$

Por la proposición 21 en la página 197, sabemos que el número de choques cuando es  $N_{inc} = 1$  es:

$$N_{disp} = n_{bl}\sigma = \tilde{n}_{bl} dx \sigma$$



Para hallar la distancia media recorrida entre choque y choque, dividimos la distancia recorrida por el número de choques producidos en dicha distancia, es decir:

$$\lambda = \frac{dx}{N_{disp}} = \frac{dx}{\tilde{n}_{bl} dx \sigma} = \frac{1}{\tilde{n}_{bl} \sigma}$$

*Q.E.D.*

**Proposición 83.** Lanzamos un haz de  $N_{inc}$  partículas de la misma masa y con la misma velocidad contra un volumen de espesor  $X$  de partículas estáticas de sección eficaz (total)  $\sigma$ . Sean  $\tilde{n}_{bl}$  la densidad de partículas por unidad de volumen y  $N(x)$  el número de partículas que consiguen penetrar una distancia  $x \leq X$  dentro del volumen de blancos. Además, sean:

$$\phi_{inc} = \frac{dN_{inc}}{dt dA}$$

el número de partículas del haz incidente que llega al volumen de blancos por unidad de área y unidad de tiempo,

$$\phi(x) = \frac{dN(x)}{dt dA}$$

el número de partículas que consiguen penetrar una distancia  $x \leq X$  dentro del volumen de blancos por unidad de área y unidad de tiempo. Análogamente, sean:

$$\varrho_{inc} = \frac{dN_{inc}}{dt}$$

el número de partículas del haz incidente que llega al volumen de blancos por unidad de tiempo,

$$\varrho(x) = \frac{dN(x)}{dt}$$

el número de partículas que consiguen penetrar una distancia  $x \leq X$  dentro del volumen de blancos por unidad de tiempo. Entonces, se dan las siguientes relaciones:

1.

$$N(x) = N_{inc} e^{-\tilde{n}_{bl} \sigma x} = N_{inc} e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

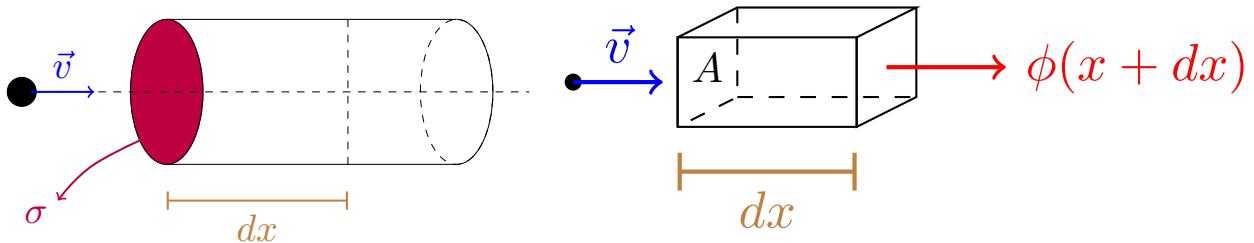
2.

$$\phi(x) = \phi_{inc} e^{-\tilde{n}_{bl} \sigma x} = \phi_{inc} e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

3.

$$\varrho(x) = \varrho_{inc} e^{-\tilde{n}_{bl} \sigma x} = \varrho_{inc} e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

donde  $\lambda$  es el recorrido libre medio de un proyectil (como los que lanzamos) en el volumen de blancos.



**Demostración.** Calculemos el número de partículas dispersadas entre una posición  $x$  y una posición  $x + dx$ . En un volumen  $A dx$ , donde  $A$  puede ser un área cualquiera, la densidad de blancos por unidad de área equivalente será:

$$n_{bl} = \tilde{n}_{bl} (x + dx - x) = \tilde{n}_{bl} dx$$

Así, por la proposición 21 en la página 197, el número de partículas dispersadas entre la posición  $x$  y la posición  $x + dx$  será:

$$N_{disp, x \rightarrow x+dx} = N(x) n_{bl} \sigma = N(x) \tilde{n}_{bl} dx \sigma$$

pues al volumen  $A dx$  entran  $N(x)$  partículas. De esta forma, sabemos que el número de partículas que no aún no han sido dispersadas en la posición  $x + dx$  será el número de partículas sin dispersar en la posición  $x$  menos las dispersadas entre  $x$  y  $x + dx$ . De forma que tenemos:

$$\begin{aligned} N(x + dx) &= N(x) - N_{disp, x \rightarrow x+dx} = N(x) - N(x) \tilde{n}_{bl} \sigma dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow N(x + dx) - N(x) = -N(x) \tilde{n}_{bl} \sigma dx \end{aligned}$$

Nótese que el término de la izquierda es justo la definición de  $dN$ . De esta forma, tenemos:

$$\begin{aligned} dN &= -N(x) \tilde{n}_{bl} \sigma dx \Leftrightarrow \frac{dN}{N(x)} = -\tilde{n}_{bl} \sigma dx \Leftrightarrow \int_{N_{inc}}^{N(x)} \frac{d\nu}{\nu(x)} = -\int_0^x \tilde{n}_{bl} \sigma d\chi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln \left( \frac{N(x)}{N_{inc}} \right) = -\tilde{n}_{bl} \sigma x \Leftrightarrow \frac{N(x)}{N_{inc}} = e^{-\tilde{n}_{bl} \sigma x} \Leftrightarrow N(x) = N_{inc} e^{-\tilde{n}_{bl} \sigma x} \end{aligned}$$

Usando la definición 82 en la página 207, podemos reescribir la expresión anterior como:

$$N(x) = N_{inc} e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

Para obtener las expresiones para las  $\phi$  y las  $\varrho$  dividimos la expresión anterior entre  $dA$  y  $dt$  (según proceda) como hemos hecho en demostraciones anteriores. Q.E.D.

**Lema 11.** *El teorema de Taylor-Young aplicado a la función  $f(x) = e^{-x}$  nos dice que cuando  $x \rightarrow 0$ ,  $f(x)$  puede escribirse como:*

$$f(x) = 1 - x + o(|x|)$$

**Corolario 33.** *Lanzamos un haz de  $N_{inc}$  partículas de la misma masa y con la misma velocidad contra un volumen de espesor  $X$ , con  $X$  muy pequeño, de partículas estáticas de sección eficaz (total)  $\sigma$ . Sean  $\tilde{n}_{bl}$  la densidad de partículas por unidad de volumen y  $N_{disp}$  el número de partículas que se dispersan al atravesar el volumen de blancos. Además, sean:*

$$\phi_{inc} = \frac{dN_{inc}}{dt dA}$$

*el número de partículas del haz incidente que llega al volumen de blancos por unidad de área y unidad de tiempo,*

$$\phi_{disp} = \frac{dN_{disp}}{dt dA}$$

*el número de partículas que se dispersan al atravesar el volumen de blancos por unidad de área y unidad de tiempo. Análogamente, sean:*

$$\varrho_{inc} = \frac{dN_{inc}}{dt}$$

*el número de partículas del haz incidente que llega al volumen de blancos por unidad de tiempo,*

$$\varrho_{disp} = \frac{dN_{disp}}{dt}$$

*el número de partículas que se dispersan al atravesar el volumen de blancos por unidad de tiempo. Entonces pueden aproximarse  $N_{disp}$ ,  $\phi_{disp}$  y  $\varrho_{disp}$  como sigue:*

1.

$$N_{disp} \approx N_{inc} \tilde{n}_{bl} \sigma X = N_{inc} \frac{X}{\lambda}$$

2.

$$\phi_{disp} \approx \phi_{inc} \tilde{n}_{bl} \sigma X = N_{inc} \frac{X}{\lambda}$$

3.

$$\varrho_{disp} \approx \varrho_{inc} \tilde{n}_{bl} \sigma X = N_{inc} \frac{X}{\lambda}$$

donde  $\lambda$  es el recorrido libre medio de un proyectil (como los que lanzamos) en el volumen de blancos.

*Demostración.* Por la proposición 83 en la página 208, sabemos que el número de partículas que consiguen atravesar el volumen de espesor  $X$  es:

$$N(X) = N_{inc} e^{-\tilde{n}_{bl} \sigma X}$$

De forma que el número de partículas que se dispersan será el número de partículas entrantes menos el número de partículas salientes sin dispersar:

$$N_{disp} = N_{inc} - N(X) = N_{inc} (1 - e^{-\tilde{n}_{bl} \sigma X})$$

Por el lema 11 en la página anterior, cuando  $X$  es muy pequeño, podemos aproximar la expresión anterior como:

$$N_{disp} \approx N_{inc} (1 - [1 - \tilde{n}_{bl} \sigma X]) = N_{inc} \tilde{n}_{bl} \sigma X$$

Usando la definición 82 en la página 207, podemos reescribir la expresión anterior como:

$$N_{disp} \approx N_{inc} \frac{X}{\lambda}$$

Para obtener las expresiones para las  $\phi$  y para las  $\varrho$  se puede o bien repetir el razonamiento anterior con ellas, o bien dividir la expresión a la que hemos llegado por  $dt$  y  $dA$  (según corresponda). *Q.E.D.*

**Corolario 34.** Lanzamos un haz de  $N_{inc}$  partículas de la misma masa y con la misma velocidad contra un volumen de espesor  $X$ , con  $X$  muy pequeño, de partículas estáticas de sección eficaz  $d\sigma$  para el ángulo sólido  $d\Omega$ . Sean  $\tilde{n}_{bl}$  la densidad de partículas por unidad de volumen y  $N_{disp,d\Omega}$  el número de partículas que se dispersan en el ángulo sólido  $d\Omega$  al atravesar el volumen de blancos. Además, sean:

$$\phi_{inc} = \frac{dN_{inc}}{dt dA}$$

el número de partículas del haz incidente que llega al volumen de blancos por unidad de área y unidad de tiempo,

$$\phi_{disp,d\Omega} = \frac{dN_{disp,d\Omega}}{dt dA}$$

el número de partículas que se dispersan en el ángulo sólido  $d\Omega$  al atravesar el volumen de blancos por unidad de área y unidad de tiempo. Análogamente, sean:

$$\varrho_{inc} = \frac{dN_{inc}}{dt}$$

el número de partículas del haz incidente que llega al volumen de blancos por unidad de tiempo,

$$\varrho_{disp,d\Omega} = \frac{dN_{disp,d\Omega}}{dt}$$

el número de partículas que se dispersan en el ángulo sólido  $d\Omega$  al atravesar el volumen de blancos por unidad de tiempo. Entonces pueden aproximarse  $N_{disp,d\Omega}$ ,  $\phi_{disp,d\Omega}$  y  $\varrho_{disp,d\Omega}$  como sigue:

1.

$$N_{disp,d\Omega} \approx N_{inc} \tilde{n}_{bl} X \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

2.

$$\phi_{disp,d\Omega} \approx \phi_{inc} \tilde{n}_{bl} X \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

3.

$$\varrho_{disp,d\Omega} \approx \varrho_{inc} \tilde{n}_{bl} X \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

donde:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \mathfrak{F}(\theta, \varphi)$$

*Demostración.* Partimos del corolario 33 en la página 209, restringiéndonos a las partículas dispersadas en un ángulo sólido  $d\Omega$ . De forma que tenemos:

$$N_{disp,d\Omega} \approx N_{inc} \tilde{n}_{bl} X d\sigma$$

Dividiendo y multiplicando en el lado derecho de la ecuación por el diferencial de ángulo sólido  $d\Omega$ , llegamos a:

$$N_{disp,d\Omega} \approx N_{inc} \tilde{n}_{bl} X \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Las expresiones equivalentes para las  $\phi$  y las  $\varrho$  se obtienen o bien repitiendo el razonamiento anterior con ellas, o bien dividiendo la expresión anterior a ambos lados por  $dA$  y  $dt$  (según proceda). *Q.E.D.*

**Corolario 35.** Lanzamos un haz de  $N_{inc}$  partículas de la misma masa y con la misma velocidad contra un volumen de espesor  $X$ , con  $X$  muy pequeño, de partículas estáticas de sección eficaz  $d\sigma$  para el ángulo sólido  $d\Omega$ . Sean  $\tilde{n}_{bl}$  la densidad de partículas por unidad de volumen. Contamos con un detector de superficie  $A_{det}$  a distancia  $L$  de la lámina de blancos (supondremos que  $L$  es mucho mayor que las dimensiones del volumen de blancos de manera que la distancia entre cualquier punto del volumen y nuestro detector es aproximadamente  $L$ ) tal que la superficie de detección es perpendicular al vector posición que une el volumen de blancos con el detector. Sea  $N_{det}$  el número de partículas detectadas por el detector. Además, sean:

$$\phi_{inc} = \frac{dN_{inc}}{dt dA}$$

el número de partículas del haz incidente que llega al volumen de blancos por unidad de área y unidad de tiempo,

$$\phi_{det} = \frac{dN_{det}}{dt dA}$$

el número de partículas detectadas por el detector por unidad de área y unidad de tiempo. Análogamente, sean:

$$\varrho_{inc} = \frac{dN_{inc}}{dt}$$

el número de partículas del haz incidente que llega al volumen de blancos por unidad de tiempo,

$$\varrho_{det} = \frac{dN_{det}}{dt}$$

el número de partículas detectadas por el detector por unidad de tiempo. Entonces pueden aproximarse  $N_{det}$ ,  $\phi_{det}$  y  $\varrho_{det}$  como sigue:

1.

$$N_{det} \approx \iint_{A_{det}} N_{inc} \tilde{n}_{bl} X \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dA_{det}}{L^2}$$

2.

$$\phi_{det} \approx \iint_{A_{det}} \phi_{inc} \tilde{n}_{bl} X \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dA_{det}}{L^2}$$

3.

$$\varrho_{det} \approx \iint_{A_{det}} \varrho_{inc} \tilde{n}_{bl} X \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dA_{det}}{L^2}$$

*Demostración.* Partimos del corolario 34 en la página anterior. De esta forma, sabemos que el número de partículas dispersadas en un diferencial de ángulo sólido  $d\Omega$  cuando  $X$  es muy pequeño es aproximadamente:

$$N_{disp,d\Omega} \approx N_{inc} \tilde{n}_{bl} X \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Por tanto, para hallar el número de partículas que salen hacia nuestro detector tendremos que integrar la expresión anterior al ángulo sólido de nuestro detector  $\Omega_{det}$ :

$$N_{det} \approx \iint_{\Omega_{det}} N_{inc} \tilde{n}_{bl} X \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega_{det}$$

Aplicando la definición de diferencial de ángulo sólido (ver definición 89 en la página 200), sabemos que el diferencial de ángulo sólido asociado a nuestro detector viene dado por:

$$d\Omega_{det} = \frac{\hat{r} \cdot d\vec{A}_{det}}{L^2}$$

pues la distancia entre la lámina de blancos y el detector es  $L$ . Por otra parte, como por hipótesis la superficie de detección es perpendicular al vector posición que une la lámina de blancos con el detector, será  $d\vec{A}_{det} \parallel \hat{r}$ , de manera que podemos escribir la expresión anterior como:

$$d\Omega_{det} = \frac{dA_{det}}{L^2}$$

Sustituyendo en la expresión que hemos obtenido para  $N_{det}$ , obtenemos:

$$N_{det} \approx \iint_{A_{det}} N_{inc} \tilde{n}_{bl} X \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dA_{det}}{L^2}$$

Para obtener las otras expresiones o bien puede aplicarse un razonamiento análogo para las  $\phi$  y para las  $\varrho$ , o bien puede dividirse la expresión con las  $N$  por  $dA$  y  $dt$  (según proceda) como hemos hecho ya varias veces. Q.E.D.

#### 3.5.4. Dispersión de Rutherford (1911)

En este experimento, Rutherford y sus colaboradores observaron la dispersión de partículas alfa por núcleos de oro en una delgada lámina de oro y utilizaron la distribución observada para deducir el radio atómico. Para poder obtener resultados a partir de dicha distribución hizo falta conocer teóricamente el número de partículas que salen despedidas en cada dirección. Para ello, como hemos visto antes, necesitamos calcular la sección eficaz diferencial. Por suerte, los átomos son esféricos, así que tienen simetría axial con respecto a cualquier dirección, en particular, con respecto a la dirección en la que lanzamos los proyectiles (las partículas  $\alpha$ ). En consecuencia, podemos aplicar la proposición 81 en la página 204 para obtener la sección eficaz diferencial. Bien, para poder aplicar la mencionada proposición necesitamos conocer la relación entre el parámetro de impacto  $b$  y el ángulo de dispersión  $\theta$  si contáramos únicamente con un proyectil y con un blanco y justo hallamos dicha relación en la proposición 76 en la página 184, de forma que sabemos:

$$b = \frac{|k|}{mv^2} \cot \frac{\theta}{2}$$

donde  $v$  es la velocidad con la que lanzamos las partículas de masa  $m$ . En nuestro caso es:

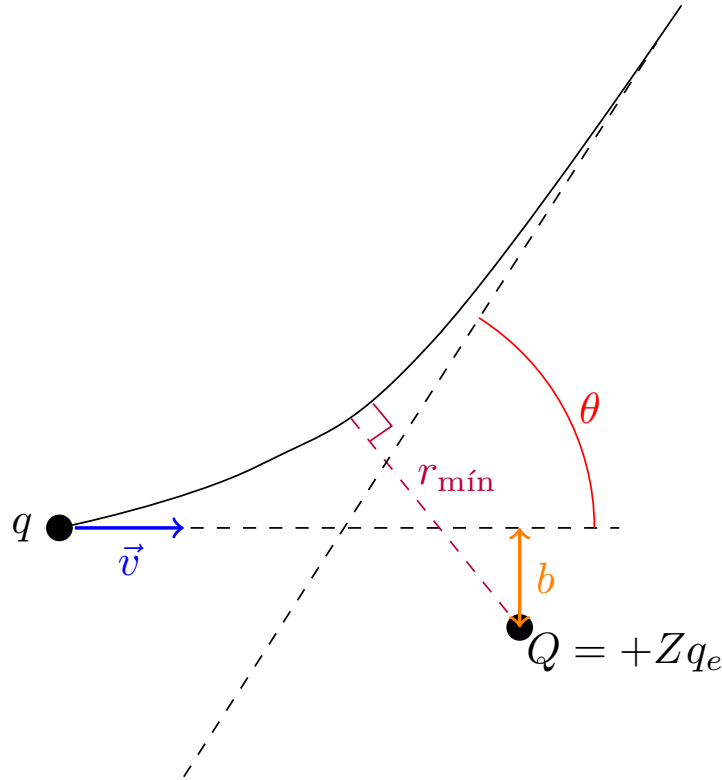
$$k = KQq$$

donde  $Q$  es la carga del núcleo del átomo,  $q$  es la carga de mi partícula alfa y  $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ . Si llamamos  $q_e$  a la carga del electrón y  $Z$  al número atómico de los átomos que forman la lámina (en nuestro caso, oro), obtenemos:

$$k = KZq_e 2q_e = 2KZq_e^2$$

De esta forma, la relación entre el parámetro de impacto y el ángulo de dispersión queda:

$$b = \frac{2KZq_e^2}{mv^2} \cot \frac{\theta}{2}$$



Ahora, por la proposición 81 en la página 204, la sección eficaz diferencial viene dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{2KZq_e^2}{mv^2} \cot \frac{\theta}{2} \left| \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{2KZq_e^2}{mv^2} \cot \frac{\theta}{2} \right] \right| = \\
 &= \frac{2KZq_e^2}{mv^2} \frac{\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \frac{2KZq_e^2}{mv^2} \left| \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right] \right| = \\
 &= \left[ \frac{2KZq_e^2}{mv^2} \right]^2 \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left| \frac{-\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right| = \\
 &= \left[ \frac{2KZq_e^2}{mv^2} \right]^2 \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{\overbrace{\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}^{\frac{1}{2}}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = \left[ \frac{2KZq_e^2}{mv^2} \right]^2 \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \left[ \frac{2KZq_e^2}{2mv^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right]^2 = \\
 &= \left[ \frac{KZq_e^2}{mv^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right]^2
 \end{aligned}$$

Bien ahora, nos interesa saber cuál es el ángulo de dispersión de las partículas en función de la mínima distancia al núcleo atómico. Para ello, volvamos a la expresión que teníamos para el parámetro de impacto:

$$b = \frac{2KZq_e^2}{mv^2} \cot \frac{\theta}{2}$$

vamos a intentar expresarla en función de la energía, esto no es difícil pues es  $E = \frac{1}{2}mv^2$  (las partículas al lanzarlas están muy lejos de los átomos de manera que la fuerza de Coulomb que actúa sobre ellas es casi nula), de forma que obtenemos:

$$b = \frac{KZq_e^2}{E} \cot \frac{\theta}{2}$$

Por la proposición 75 en la página 181, podemos expresar la energía en función del semieje mayor de la hipérbola:

$$b = \frac{KZq_e^2}{2a} \cot \frac{\theta}{2} = a \cot \frac{\theta}{2}$$

También por esa misma proposición sabemos que se cumple:

$$\begin{cases} r_{\min, k>0} + r_{\min, k<0} = 2c \\ r_{\min, k>0} - r_{\min, k<0} = 2a \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones, tenemos:

$$2r_{\min, k>0} = 2c + 2a \Leftrightarrow r_{\min, k>0} = c + a$$

Por otra parte, sabemos que una hipérbola se da  $c^2 = a^2 + b^2$ , de manera que tenemos:

$$c = \sqrt{a^2 + a^2 \cot^2 \frac{\theta}{2}} = a \sqrt{1 + \cot^2 \frac{\theta}{2}}$$

De esta manera, la distancia mínima queda:

$$r_{\min} = a \left( 1 + \sqrt{1 + \cot^2 \frac{\theta}{2}} \right)$$

Si reescribimos la expresión anterior en función de la energía, obtenemos:

$$r_{\min} = \frac{2KZq_e^2}{2E} \left( 1 + \sqrt{1 + \cot^2 \frac{\theta}{2}} \right) = \frac{KZq_e^2}{E} \left( 1 + \sqrt{1 + \cot^2 \frac{\theta}{2}} \right)$$

De esta forma, podemos ver que los menores valores de  $r_{\min}$  se alcanzan cuando  $\theta$  es grande, pues cuando  $\theta$  es grande,  $\tan \frac{\theta}{2}$  es también grande, por lo que  $\cot \frac{\theta}{2}$  es pequeño. Me interesa, por tanto, disparar partículas muy energéticas que salgan rebotadas en ángulos grandes para que se aproximen lo más posible al núcleo atómico. La idea es que llegaremos a un límite en el valor del ángulo, de forma que no podamos hacer que crezca más por mucho que aumentemos la energía de las partículas. Ese límite del ángulo es el correspondiente al radio del átomo.

Una de las cuestiones curiosas de esta problema es que si uno intenta calcular la sección eficaz total  $\sigma$ , la integral dada por el corolario 30 en la página 203 diverge. Esto se debe a que las fuerzas de Coulomb llegan hasta el infinito. No obstante, sí que es posible calcular la sección eficaz para un intervalo  $[\theta_0, \theta_f]$ .

Una última curiosidad sobre este experimento es que el átomo es un sistema microscópico, algo dentro del ámbito de la mecánica cuántica, no de la mecánica clásica. Así que el lector podría preguntarse (y con razón) por qué demonios funciona esto. Pues resulta que es una de las mayores casualidades de la historia de la física que la fórmula cuántica para la dispersión de dos partículas cargadas concuerda exactamente con la fórmula clásica de Rutherford (esto es rotundamente falso para otras fuerzas).

## Capítulo 4

# El problema de dos cuerpos

### 4.1. Centro de masas y coordenadas relativas

**Definición 92.** Llamamos **masa reducida**  $\mu$  de dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  a la masa:

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

**Definición 93.** Sea  $S$  un sistema de  $n$  partículas, cada una con masa  $m_i$  con  $i = 1, \dots, n$ . Sea  $O$  el origen de un sistema de referencia inercial a partir del cual damos la posición de cada partícula  $\vec{r}_i$  con  $i = 1, \dots, n$ . Entonces, llamamos **centro de masas** o **baricentro** del sistema  $S$  al punto cuya posición viene definida como el promedio de los vectores posición escalados por la masa de cada partícula. Es decir,

$$\vec{R} := \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

**Teorema 22** (El problema de dos cuerpos). *Sea un sistema de dos partículas con masa  $m_1$  y  $m_2$ . Llamaremos  $\vec{F}$  a la fuerza que la partícula segunda ejerce sobre la primera, es decir,  $\vec{F} = \vec{F}_{1 \leftarrow 2}$ . Si la única fuerza externa  $\vec{F}_{ext}$  que actúa sobre ambas partículas es tal que existe un campo  $\vec{g}$  tal que  $\vec{F}_{1 \leftarrow ext} = m_1 \vec{g}$  y  $\vec{F}_{2 \leftarrow ext} = m_2 \vec{g}$ , entonces la dinámica del sistema es equivalente a dos problemas del movimiento de una partícula. Dichos problemas de una partícula vienen dados por las ecuaciones:*

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{g}$$

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

donde,  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  es la masa reducida del sistema,  $\vec{R}$  es la posición del centro de masas del sistema y  $\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  es la posición relativa entre las dos masas. Además, llamaremos  $M = m_1 + m_2$  a la masa total del sistema.

*Demostración.* Por la segunda ley de Newton (ver axioma 1 en la página 8), tenemos:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{1 \leftarrow 2} + \vec{F}_{1 \leftarrow ext} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{2 \leftarrow 1} + \vec{F}_{2 \leftarrow ext} \end{cases}$$

Por hipótesis es  $\vec{F} = \vec{F}_{1 \leftarrow 2}$  y por la tercera ley de Newton (ver axioma 2 en la página 9) es  $\vec{F}_{1 \leftarrow 2} = -\vec{F}_{2 \leftarrow 1}$ . Además, por hipótesis existe  $\vec{g}$  tal que  $\vec{F}_{1 \leftarrow ext} = m_1 \vec{g}$  y  $\vec{F}_{2 \leftarrow ext} = m_2 \vec{g}$ . De esta forma, lo anterior es equivalente a:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F} + m_1 \vec{g} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F} + m_2 \vec{g} \end{cases} \quad (4.1.1)$$



Si sumamos ambas ecuaciones de la expresión 4.1.1 en la página anterior, obtenemos:

$$\underbrace{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}_{=M\ddot{\vec{R}}} = m_1 \vec{g} + m_2 \vec{g} \Leftrightarrow M\ddot{\vec{R}} = M\vec{g} \Leftrightarrow \ddot{\vec{R}} = \vec{g}$$

Por otra parte, dividiendo por  $m_1$  la primera ecuación y dividiendo por  $m_2$  la segunda ecuación de la expresión 4.1.1 en la página anterior, llegamos a:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{F}}{m_1} + \vec{g} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{\vec{F}}{m_2} + \vec{g} \end{cases}$$

Si ahora restamos las dos ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F} = \frac{1}{\mu} \vec{F} \Leftrightarrow \mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

*Q.E.D.*

*Observación 68.* Nótese que si efectivamente existe un campo  $\vec{g}$  como el que recoge el enunciado del teorema 22 en la página anterior, dicho campo debe ser necesariamente el mismo en todos los puntos del espacio. No obstante, sí que podría depender de tiempo, aunque; en ese caso, no sería conservativo.

*Observación 69.* Si trabajamos con la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos, para aplicar el teorema 22 en la página anterior, nos será más útil reescribir la fuerza gravitatoria entre dos masas  $m_1$  y  $m_2$  como:

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{r} = -\frac{\mu}{\mu} \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{r} = -\frac{\mu}{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{r} = -\frac{G(m_1 + m_2)\mu}{r^2} \hat{r}$$

Nótese, además, que el teorema 22 en la página anterior me indica que si yo quiero estudiar el movimiento de dos cuerpos que se atraen gravitacionalmente en ausencia de otras fuerzas, voy a tener una ecuación diferencial muy sencilla para el centro de masas y una ecuación cuya resolución se va a hacer como en el tema anterior.

**Ejemplo 31.** La solución vista para el problema de dos cuerpos permite hallar una solución en primera aproximación de la órbita del sistema Tierra-Luna en torno al Sol. Si suponemos que el campo gravitatorio generado por el Sol es el mismo para la Luna que para la Tierra, podemos aplicar el teorema 22 en la página anterior y, así, obtener un resultado.

**Corolario 36.** Sea un sistema de dos partículas con masa  $m_1$  y  $m_2$ . En ausencia de fuerzas externas, el momento lineal del centro de masas  $\vec{P}_{cm}$  permanece constante.

$$\vec{P}_{cm} = \vec{cte}$$

*Demostración.* Partimos del teorema 22 en la página anterior:

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{g} = \vec{0} \Leftrightarrow \dot{\vec{R}} = \vec{cte} \Leftrightarrow \underbrace{M\dot{\vec{R}}}_{=\vec{P}_{cm}} = \vec{cte} \Leftrightarrow \vec{P}_{cm} = \vec{cte}$$

*Q.E.D.*

**Proposición 84.** Sea un sistema de dos partículas con masa  $m_1$  y  $m_2$  y sea  $M = m_1 + m_2$ . La posición de ambas partículas  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  en función de la posición de su centro de masas  $\vec{R}$  y del vector con origen en la segunda partícula y extremo en la primera partícula  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  viene dada por:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}$$

*Demostración.* Por la definición de posición de centro de masas (ver definición 93 en la página 215), tenemos:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Por otra parte, sabemos que es:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \Leftrightarrow \vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{r}_2$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (\vec{r} + \vec{r}_2) + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{r}}{\underbrace{m_1 + m_2}_{=M}} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_2 = \frac{m_1 \vec{r}}{M} + \vec{r}_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1 \vec{r}}{M} \end{aligned}$$

A continuación si despejamos  $\vec{r}_2$  en vez de  $\vec{r}_1$ :

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \Leftrightarrow \vec{r}_2 = -\vec{r} + \vec{r}_1$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 (-\vec{r} + \vec{r}_1)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_1 - \frac{m_2 \vec{r}}{\underbrace{m_1 + m_2}_{=M}} = \vec{r}_1 - \frac{m_2 \vec{r}}{M} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2 \vec{r}}{M} \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

## 4.2. Sistema de referencia centro de masas

Ahora, vamos a estudiar cómo quedan todas las magnitudes físicas vistas desde el centro de masas. Denotaremos las magnitudes físicas vistas desde el centro de masas con un asterisco \* y denotaremos las magnitudes físicas del centro de masas con el subíndice *cm*. A pesar de que el centro de masas no es, en general, un sistema de referencia inercial, éste ofrece varias ventajas como veremos a continuación.

**Teorema 23.** *Sea un sistema de dos partículas con masa  $m_1$  y  $m_2$ . Visto desde el sistema de referencia centro de masas:*

1. *El vector posición del centro de masas, medido desde el centro de masas es siempre el vector nulo.*

$$\vec{R}^* = \vec{0}$$

2. *El vector que tiene su origen en la segunda partícula y su extremo en la primera partícula es el mismo que bajo cualquier otro sistema de referencia inercial.*

$$\vec{r}^* = \vec{r}$$

3. *En función del vector  $\vec{r}^* = \vec{r}$  la posición de las dos partículas que conforman el sistema queda:*

$$\vec{r}_1^* = \frac{m_2}{M} \vec{r}^* \quad \vec{r}_2^* = -\frac{m_1}{M} \vec{r}^*$$

4. *El momento lineal total desde el centro de masas  $\vec{P}^*$  es siempre cero.*

$$\vec{P}^* = \vec{0}$$

5. Si llamamos  $\vec{p}^*$  al momento de la primera partícula, entonces ambas partículas tienen momentos del mismo módulo y dirección pero sentido opuesto.

$$\vec{p}^* = m_1 \dot{\vec{r}}_1^* = -m_2 \dot{\vec{r}}_2^* = \mu \dot{\vec{r}}^*$$

donde  $\mu$  es la masa reducida de ambas partículas.

6. El momento angular medido desde el centro de masas  $\vec{L}^*$  puede expresarse como:

$$\vec{L}^* = \mu \vec{r}^* \times \dot{\vec{r}}^* = \vec{r}^* \times \vec{p}^*$$

7. La energía cinética medida desde el centro de masas  $T^*$  puede expresarse como:

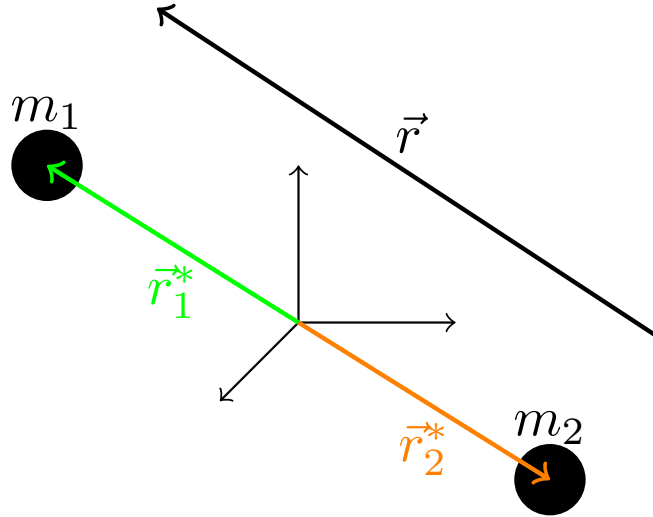
$$T^* = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^{*2} = \frac{p^{*2}}{2\mu}$$

donde  $\mu$  es la masa reducida de ambas partículas.

8. El momento de inercia medido desde el centro de masas  $I^*$  puede expresarse como:

$$I^* = \mu r^{*2}$$

donde  $\mu$  es la masa reducida de ambas partículas.



*Demostración.*

1. Trivial.
2. Por una parte, por definición:

$$\vec{r}^* = \vec{r}_1^* - \vec{r}_2^*$$

Por otra parte, sea  $\vec{R}$  la posición del centro de masas desde un sistema de referencia inercial cualquiera. Entonces tenemos:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_1^* \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}_2^*$$

Por definición, es:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}_1^* - (\vec{R} + \vec{r}_2^*) = \vec{r}_1^* - \vec{r}_2^* = \vec{r}^*$$

3. Partiendo de la proposición 84 en la página 216, sabemos que desde un sistema de referencia inercial se cumple:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}$$

Como también es:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_1^* \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}_2^*$$

Llegamos a:

$$\vec{R} + \vec{r}_1^* = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad \vec{R} + \vec{r}_2^* = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}$$

y claramente lo anterior es equivalente a:

$$\vec{r}_1^* = \frac{m_2}{M} \vec{r}^* \quad \vec{r}_2^* = -\frac{m_1}{M} \vec{r}^*$$

4. Por (1) sabemos que es:

$$\vec{R}^* = \vec{0} \Rightarrow \dot{\vec{R}}^* = \vec{0} \Leftrightarrow (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^* = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P}^* = \vec{0}$$

5. Por (4) sabemos que:

$$\vec{P}^* = \vec{0} \Leftrightarrow m_1 \dot{\vec{r}}_1^* + m_2 \dot{\vec{r}}_2^* = \vec{0} \Leftrightarrow m_1 \dot{\vec{r}}_1^* = -m_2 \dot{\vec{r}}_2^*$$

Por otra parte, claramente sabemos que el momento de la primera partícula es:

$$m_1 \dot{\vec{r}}_1^* = \vec{p}^*$$

Como es  $\vec{r}^* = \vec{r}_1^* - \vec{r}_2^*$ , derivando obtenemos:

$$\dot{\vec{r}}^* = \dot{\vec{r}}_1^* - \dot{\vec{r}}_2^* \Leftrightarrow \dot{\vec{r}}_1^* = \dot{\vec{r}}^* + \dot{\vec{r}}_2^*$$

Sustituyendo, en la expresión anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{p}^* &= m_1 \left( \dot{\vec{r}}^* + \dot{\vec{r}}_2^* \right) = m_1 \dot{\vec{r}}^* + \frac{m_1}{m_2} \underbrace{m_2 \dot{\vec{r}}_2^*}_{=-\vec{p}^*} = m_1 \dot{\vec{r}}^* - \frac{m_1}{m_2} \vec{p}^* \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \vec{p}^* &= m_1 \dot{\vec{r}}^* \Leftrightarrow \vec{p}^* = m_1 \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \dot{\vec{r}}^* = m_1 \frac{1}{\frac{m_2 + m_1}{m_2}} \dot{\vec{r}}^* = \\ &= \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}_{=\mu} \dot{\vec{r}}^* = \mu \dot{\vec{r}}^* \end{aligned}$$

6. Por definición de momento angular (ver definición 13 en la página 20), tenemos:

$$\vec{L}^* = m_1 \vec{r}_1^* \times \dot{\vec{r}}_1^* + m_2 \vec{r}_2^* \times \dot{\vec{r}}_2^* = \vec{r}_1^* \times \underbrace{\left( m_1 \dot{\vec{r}}_1^* \right)}_{=\vec{p}^*} + \vec{r}_2^* \times \underbrace{\left( m_2 \dot{\vec{r}}_2^* \right)}_{=-\vec{p}^*}$$

donde sabemos las igualdades marcadas bajo las llaves por (5). De esta forma:

$$\vec{L}^* = \vec{r}_1^* \times \vec{p}^* - \vec{r}_2^* \times \vec{p}^* = (\vec{r}_1^* - \vec{r}_2^*) \times \vec{p}^* = \vec{r}^* \times \vec{p}^*$$

donde este último paso es por definición. Por (5), sabemos que es  $\vec{p}^* = \mu \dot{\vec{r}}^*$ , de manera que:

$$\vec{L}^* = \vec{r}^* \times (\mu \dot{\vec{r}}^*) = \mu \vec{r}^* \times \dot{\vec{r}}^*$$

7. Por definición de energía cinética, tenemos:

$$T^* = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^{*2}$$

Por (5) sabemos que es  $\vec{p}^* = m_1 \dot{\vec{r}}_1^* = -m_2 \dot{\vec{r}}_2^*$ , por lo que:

$$m_1 \dot{r}_1^{*2} = \frac{1}{m_1} \underbrace{m_1^2 \dot{r}_1^{*2}}_{=p^{*2}} = \frac{p^{*2}}{m_1}$$

$$m_1 \dot{r}_2^{*2} = \frac{1}{m_2} \underbrace{m_2^2 \dot{r}_2^{*2}}_{=(-\vec{p}^*)^2} = \frac{p^{*2}}{m_2}$$

De esta forma, podemos reescribir lo anterior como:

$$T^* = \frac{1}{2} \left( \frac{p^{*2}}{m_1} + \frac{p^{*2}}{m_2} \right) = \frac{1}{2} p^{*2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{1}{2} p^{*2} \underbrace{\left( \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} \right)}_{=\frac{1}{\mu}} = \frac{p^{*2}}{2\mu}$$

Por otra parte, por (5) sabemos que  $\vec{p}^* = \mu \dot{\vec{r}}^* \Rightarrow p^{*2} = \mu^2 \dot{r}^{*2}$ . Así, sustituyendo, llegamos a:

$$T^* = \frac{\mu^2 \dot{r}^{*2}}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^{*2}$$

8. Por definición de momento de inercia tenemos:

$$I^* = m_1 r_1^{*2} + m_2 r_2^{*2} = 2T^*$$

Por (7), sabemos que:

$$T^* = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^{*2}$$

Sustituyendo, llegamos a:

$$I^* = \mu \dot{r}^{*2}$$

*Q.E.D.*

*Observación 70.* Nótese que según el apartado (3) del teorema 23 en la página 217, si yo conozco el centro de masas de dos partículas y soy capaz de medir las distancias relativas al centro de masas  $r_1^*$  y  $r_2^*$ , automáticamente, conozco el cociente entre las masas  $m_2$  y  $m_1$ , y viceversa.

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{r_1^*}{r_2^*}$$

**Ejemplo 32.** La estrella Sirio es un sistema binario con estrellas  $A$  y  $B$  de las cuales conocemos las distancias relativas al centro de masas del sistema  $r_1^*$  y  $r_2^*$ , entonces, aplicando la observación 70, puedo obtener la razón de las masas de ambos objetos.

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{r_1^*}{r_2^*} \approx 2,2$$

**Teorema 24.** Sea  $S$  un sistema de  $n$  partículas y sea  $M = \sum_{i=1}^n m_i$ . Desde cualquier observador inercial, siendo  $\vec{R}$  la posición del centro de masas de  $S$  según dicho observador inercial, se cumple:

1. El momento lineal del sistema coincide con el momento lineal del centro de masas.

$$\vec{P} = \vec{P}_{cm} = M \dot{\vec{R}}$$

2. El momento angular del sistema puede expresarse como la suma del momento angular del centro de masas y el momento angular del sistema visto desde el centro de masas.

$$\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{L}^* = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{L}^*$$

3. La energía cinética del sistema puede expresarse como la suma de la energía cinética del centro de masas y la energía cinética del sistema vista desde el centro de masas.

$$T = T_{cm} + T^* = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + T^*$$

*Demostración.*

1. Por definición de momento lineal para varias partículas (ver definición 10 en la página 18), tenemos:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n \frac{M}{M} m_i \dot{\vec{r}}_i = M \frac{\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i}{\underbrace{\sum_{i=1}^n m_i}_{=M}} = M \dot{\vec{R}} = \vec{P}_{cm}$$

2. Por definición de momento angular para varias partículas (ver definición 13 en la página 20), tenemos:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

Sabemos que se cumple:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i^* \Rightarrow \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^*$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^n m_i (\vec{R} + \vec{r}_i^*) \times (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^*) = \sum_{i=1}^n m_i [\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \dot{\vec{r}}_i^* + \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{r}}_i^*] = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{R}} + \sum_{i=1}^n m_i \vec{R} \times \dot{\vec{r}}_i^* + \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{r}}_i^* \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Estudiemos el tercer término:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{R} \times \dot{\vec{r}}_i^* = \sum_{i=1}^n m_i \vec{R} \times (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}}) = \vec{R} \times \left[ \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}}) \right]$$

Análogamente con el segundo término:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \times \dot{\vec{R}} = \left[ \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \right] \times \dot{\vec{R}}$$

Nótese como:

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \right] = \left[ \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}}) \right] \quad (4.2.2)$$

Ahora, vamos a probar que el argumento de la derivada es nulo.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \vec{R} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i - \vec{R} \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i}_{=M} = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i - M \vec{R} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i - M \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \vec{0} \end{aligned}$$

En consecuencia por la ecuación 4.2.2, es también:

$$\sum_{i=1}^n m_i (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}}) = \vec{0}$$

Por consiguiente, el segundo y el tercer término de la ecuación 4.2.1 en la página anterior se anulan y el momento angular queda:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{r}}_i^*}_{=\vec{L}^*} = \vec{R} \times \dot{\vec{R}} \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i}_{=M} + \vec{L}^* = \\ &= M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{L}^* = \vec{L}_{cm} + \vec{L}^*\end{aligned}$$

3. Por definición de energía cinética, tenemos:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left( \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^* \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{R}}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{*2} + \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}_i^*$$

Estudiemos el último término:

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}_i^* = \dot{\vec{R}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i^* \right)$$

Y el término entre paréntesis justo es:

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i^* = M \frac{\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i^*}{M} = M \dot{\vec{R}}^* = \vec{0}$$

porque trivialmente es  $\vec{R}^* = \vec{0}$  y, en consecuencia, su derivada también es nula. Así, de la expresión que tenía para la energía cinética, únicamente me quedan:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{R}}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{*2} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + T^* = T_{cm} + T^*$$

*Q.E.D.*

**Corolario 37.** Sea un sistema de dos partículas con masas  $m_1$  y  $m_2$ . El momento angular del sistema puede escribirse como la suma del momento angular del centro de masas y el momento angular de una partícula de masa reducida  $\mu$  cuya posición fuera el vector que tiene como origen la segunda partícula y como extremo la primera partícula (el vector  $\vec{r}$ ). Análogamente ocurre con la energía cinética. Es decir:

$$\vec{L} = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2$$

*Demostración.* Por el teorema 24 en la página 220, tenemos:

$$\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{L}^* = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{L}^*$$

$$T = T_{cm} + T^* = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + T^*$$

Ahora, por el teorema 23 en la página 217:

$$\vec{L} = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2$$

*Q.E.D.*

**Corolario 38.** Sea un sistema de dos partículas con masa  $m_1$  y  $m_2$ . Supondremos que la única fuerza externa  $\vec{F}_{ext}$  que actúa sobre ambas partículas es conservativa y, además, es tal que existe un campo  $\vec{g}$  tal que  $\vec{F}_{1 \leftarrow ext} = m_1 \vec{g}$  y  $\vec{F}_{2 \leftarrow ext} = m_2 \vec{g}$ . Si, adicionalmente,  $\vec{F} = \vec{F}_{1 \leftarrow 2}$  es una fuerza conservativa con potencial asociado  $V_{\vec{F}}$  tal que  $V_{\vec{F}} = \mathfrak{F}!(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ , entonces el lagrangiano del sistema usando la posición del centro de masas  $\vec{R}$  y la posición relativa entre ambas partículas  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  como coordenadas generalizadas es separable en dos lagrangianos independientes.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{cm} + \mathcal{L}^* \\ \mathcal{L}_{cm} &= T_{cm} + M\vec{g} \cdot \vec{x} = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + M\vec{g} \cdot \vec{x} \\ \mathcal{L}^* &= T^* - V_{\vec{F}}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - V_{\vec{F}}(\vec{r})\end{aligned}$$

*Demostración.* Si  $\vec{F}_{ext}$  es conservativa, su campo asociado  $\vec{g}$  también lo será. Por ser conservativo  $\vec{g}$  únicamente puede depender del vector posición respecto al centro de fuerzas  $\vec{x}$ ; pero por la observación 68 en la página 216  $\vec{g}$  no puede depender de  $\vec{x}$ . En consecuencia,  $\vec{g}$  debe ser constante. Por lo tanto, su potencial asociado será:

$$\vec{F}_{ext} = m\vec{g} \Leftrightarrow -\frac{dV_{ext}}{d\vec{x}} = m\vec{g} \Leftrightarrow V_{ext} = -\int m\vec{g} \cdot d\vec{x} = C - m\vec{g} \cdot \vec{x}$$

donde  $C$  es una constante que podemos suponer cero. De esta forma, escribamos el lagrangiano del sistema:

$$\mathcal{L} = T - V$$

Por el teorema 24 en la página 220, podemos expresar la energía cinética del sistema como:

$$T = T_{cm} + T^*$$

y, en consecuencia, tenemos:

$$\mathcal{L} = T_{cm} + T^* - V = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + T^* - V$$

Por el teorema 23 en la página 217, podemos expresar  $T^*$  en función de  $\vec{r}$ ; obteniendo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - V$$

Ahora, obtengamos el potencial. Sobre ambas partículas actúa el campo externo  $\vec{g}$  y, adicionalmente, tendremos el potencial asociado a la fuerza  $\vec{F}$ , que, por hipótesis, sabemos que depende exclusivamente de  $\vec{r}$ .

$$\begin{aligned}V &= -m_1\vec{g} \cdot \vec{r}_1 - m_2\vec{g} \cdot \vec{r}_2 + V_F(\vec{r}) = -\vec{g} \cdot (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) + V_F(\vec{r}) = \\ &= -\vec{g} \cdot (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) + V_F(\vec{r}) = -M\vec{g} \cdot \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M} + V_F(\vec{r}) = -M\vec{g} \cdot \vec{R} + V_F(\vec{r})\end{aligned}$$

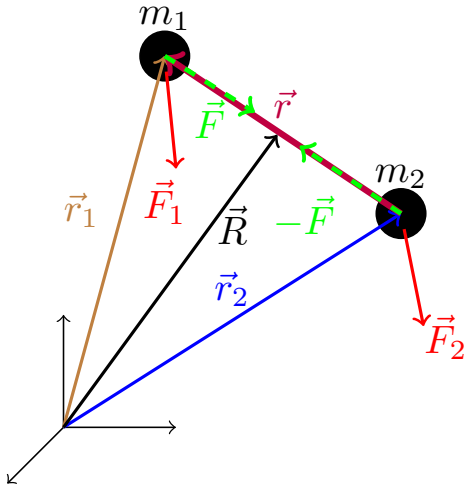
De esta forma, obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + M\vec{g} \cdot \vec{R} - V_F(\vec{r}) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{R}^2 + M\vec{g} \cdot \vec{R}}_{=\mathcal{L}_{cm}} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - V_F(\vec{r})}_{=\mathcal{L}^*}\end{aligned}$$

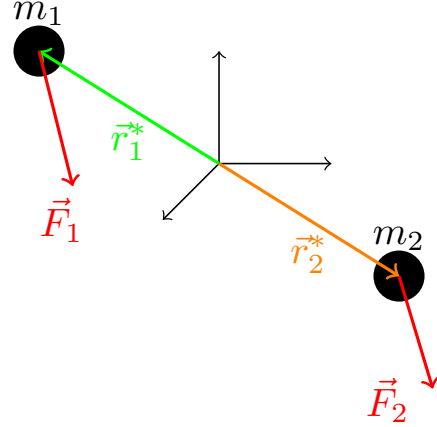
*Q.E.D.*

*Observación 71.* Podemos resumir los conceptos más importantes vistos hasta ahora volviendo al problema de dos cuerpos con el siguiente dibujo:





Misma situación desde observador CM



En general, la estrategia a seguir para resolver los problemas de este tipo será:

1. Resolver el problema del centro de masas.
2. Resolver el problema de una partícula (normalmente del tema anterior), hallando  $\vec{r}$ .
3. Obtener  $\vec{r}_1^*$  y  $\vec{r}_2^*$ .
4. Determinar  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ .

### 4.3. Interacción gravitatoria

**Proposición 85.** Sean dos cuerpos con masa  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente. Si las fuerzas internas son gravitatorias, es decir,  $\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$  donde  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  y la única fuerza externa  $\vec{F}_{ext}$  que actúa sobre ambas partículas es tal que existe un campo  $\vec{g}$  tal que  $\vec{F}_{1 \leftarrow ext} = m_1\vec{g}$  y  $\vec{F}_{2 \leftarrow ext} = m_2\vec{g}$ , entonces ambos cuerpos orbitan en torno al centro de masas del sistema, es más, visto desde el centro de masas, las trayectorias de las partículas son cónicas y el centro de masas es uno de sus focos. Ambas partículas están en todo momento en lugares opuestos del centro de masas, es decir, sus trayectorias vistas desde el centro de masas están en oposición de fase. Además, podemos expresar los parámetros  $a, b, l, L, T$  y  $e$  de dichas cónicas en función de los parámetros de la cónica que describiría una partícula de masa  $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$  en torno a una partícula inmóvil de masa  $M = m_1 + m_2$  como sigue:

$$e = e_1 = e_2$$

$$l_1 = \frac{m_2}{M}l \quad l_2 = \frac{m_1}{M}l$$

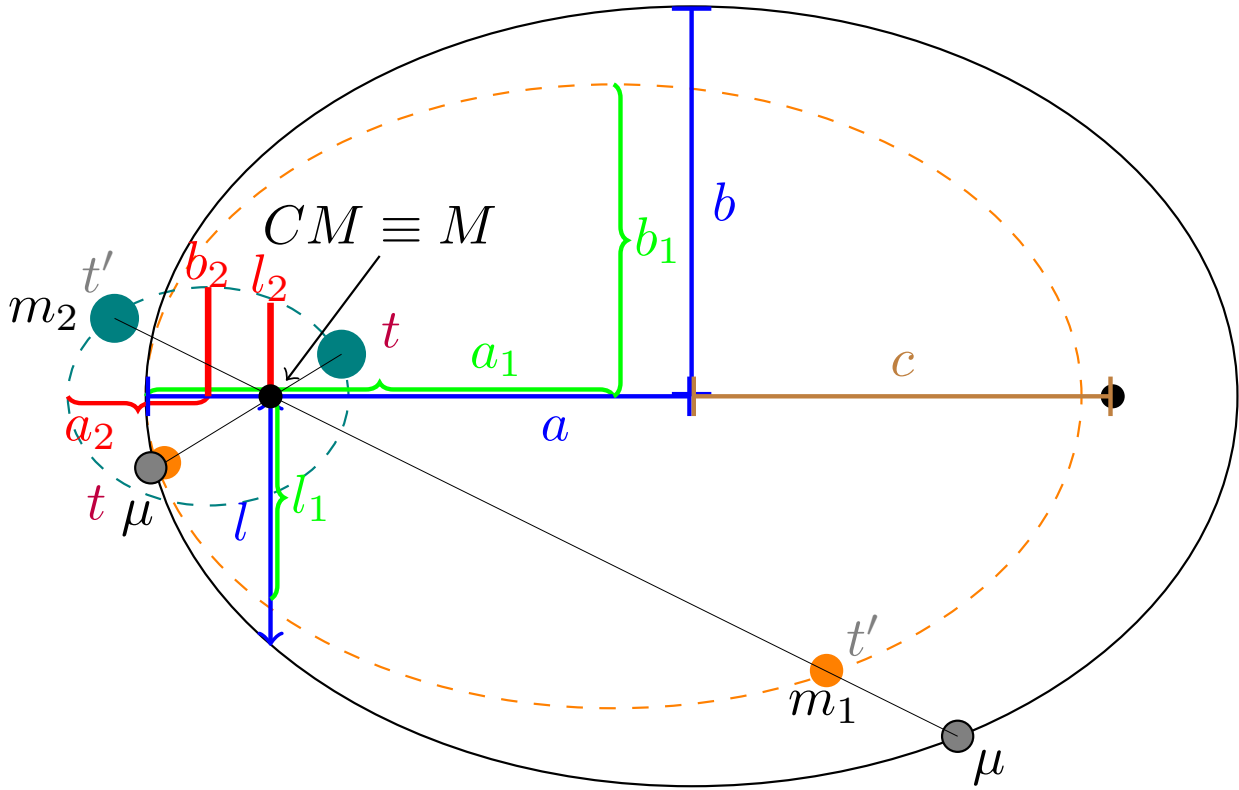
$$a_1 = \frac{m_2}{M}a \quad a_2 = \frac{m_1}{M}a$$

$$b_1 = \frac{m_2}{M}b \quad b_2 = \frac{m_1}{M}b$$

$$\vec{L}_1^* = \frac{m_2}{M}\vec{L}^* \quad \vec{L}_2^* = \frac{m_1}{M}\vec{L}^*$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \text{ si } 0 \leq e < 1$$

donde los parámetros sin subíndice son los de la cónica que describiría la partícula de masa  $\mu$  en torno a una partícula inmóvil de masa  $M$ , los parámetros con subíndice 1 se corresponden con los parámetros de la cónica de la primera partícula y los parámetros con subíndice 2 se corresponden con los parámetros de la cónica de la segunda partícula.



29/11/2018 Dibujo 3 (órbitas en torno al centro de masas, circunferencias)

29/11/2018 Dibujo 4 (órbitas en torno al centro de masas, parábolas)

29/11/2018 Dibujo 5 (órbitas en torno al centro de masas, hipérbola)

*Demostración.* Como existe un campo  $\vec{g}$  tal que  $\vec{F}_{1 \leftarrow ext} = m_1 \vec{g}$  y  $\vec{F}_{2 \leftarrow ext} = m_2 \vec{g}$ , podemos aplicar el teorema 22 en la página 215 de manera que obtenemos que resolver el problema de dos cuerpos es equivalente a resolver una ecuación diferencial para el centro de masas y otra para la distancia relativa:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

Por la observación 69 en la página 216, podemos reescribir  $\vec{F}$  como:

$$\vec{F} = -\frac{GM\mu}{r^2} \hat{r}$$

Por la proposición 71 en la página 166, sabemos que  $\vec{r}$  viene dada por:

$$r [e \cos(\theta - \theta_0) + 1] = l$$

La ecuación anterior describe la trayectoria de una partícula de masa  $\mu$  en un campo gravitatorio generado por una masa  $M$ .

Por otra parte, por el teorema 23 en la página 217, tenemos que:

$$\vec{r}_1^* = \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad \vec{r}_2^* = -\frac{m_1}{M} \vec{r}$$

De esta forma, claramente ambas partículas describirán cónicas en torno al centro de masas, pues  $\vec{r}$  es una cónica y  $\vec{r}_1^*$  y  $\vec{r}_2^*$  no son más que un factor de proporcionalidad multiplicado por  $\vec{r}$ . Además, podemos ver claramente en las fórmulas anteriores que las partículas siempre se encontrarán en lugares opuestos del centro de masas. Estudiando los signos, vemos que  $\vec{r}_1^*$  y  $\vec{r}$  están en fase y que  $\vec{r}_1^*$  y  $\vec{r}_2^*$  están en oposición de fase. Si expresamos las ecuaciones anteriores en módulo, obtenemos:

$$r_1^* = \frac{m_2}{M} r \quad r_2^* = \frac{m_1}{M} r$$

Sustituyendo  $r$  en cada caso y sustituyendo en la ecuación dada por la proposición 71 en la página 166, obtenemos:

$$\frac{M}{m_2} r_1^* [e \cos(\theta - \theta_0) + 1] = l \Leftrightarrow r_1^* [e \cos(\theta - \theta_0) + 1] = l \frac{m_2}{M} := l_1$$

$$\frac{M}{m_1} r_2^* [e \cos(\theta - \theta_0) + 1] = l \Leftrightarrow r_2^* [e \cos(\theta - \theta_0) + 1] = l \frac{m_1}{M} := l_2$$

Como podemos ver en las ecuaciones anteriores hay un semi latus rectum equivalente para la trayectoria de la primera partícula y otro para la trayectoria de la segunda partícula y la excentricidad de ambas cónicas es la misma.

Por la proposición 74 en la página 178, si es  $0 < e < 1$ , tenemos que:

$$a = \frac{l}{1 - e^2} \quad b = \frac{l}{\sqrt{1 - e^2}}$$

y si es  $e > 1$  tenemos:

$$a = \frac{l}{e^2 - 1} \quad b = \frac{l}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

De esta forma, obtenemos que si  $0 < e < 1$ :

$$a_1 = \frac{l_1}{1 - e^2} = \frac{m_2}{M} \frac{l}{1 - e^2} = \frac{m_2}{M} a$$

$$a_2 = \frac{l_2}{1 - e^2} = \frac{m_1}{M} \frac{l}{1 - e^2} = \frac{m_1}{M} a$$

$$b_1 = \frac{l_1}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{m_2}{M} \frac{l}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{m_2}{M} b$$

$$b_2 = \frac{l_2}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{m_1}{M} \frac{l}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{m_1}{M} b$$

Y, análogamente, si es  $e > 1$ :

$$a_1 = \frac{l_1}{e^2 - 1} = \frac{m_2}{M} \frac{l}{e^2 - 1} = \frac{m_2}{M} a$$

$$a_2 = \frac{l_2}{e^2 - 1} = \frac{m_1}{M} \frac{l}{e^2 - 1} = \frac{m_1}{M} a$$

$$b_1 = \frac{l_1}{\sqrt{e^2 - 1}} = \frac{m_2}{M} \frac{l}{\sqrt{e^2 - 1}} = \frac{m_2}{M} b$$

$$b_2 = \frac{l_2}{\sqrt{e^2 - 1}} = \frac{m_1}{M} \frac{l}{\sqrt{e^2 - 1}} = \frac{m_1}{M} b$$

Calculemos el momento angular respecto al centro de masas de ambas partículas:

$$\vec{L}_1^* = m_1 \vec{r}_1^* \times \dot{\vec{r}}_1^*$$

$$\vec{L}_2^* = m_2 \vec{r}_2^* \times \dot{\vec{r}}_2^*$$

Ya sabemos que:

$$\vec{r}_1^* = \frac{m_2}{M} \vec{r} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_1^* = \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{r}_2^* = -\frac{m_1}{M} \vec{r} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_2^* = -\frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}}$$

En consecuencia:

$$\vec{L}_1^* = m_1 \left( \frac{m_2}{M} \vec{r} \right) \times \left( \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right) = m_1 \left( \frac{m_2}{M} \right)^2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{L}_2^* = m_2 \left( -\frac{m_1}{M} \vec{r} \right) \times \left( -\frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right) = m_2 \left( \frac{m_1}{M} \right)^2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

Por otra parte, sabemos que:

$$\vec{L}^* = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \Leftrightarrow \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \frac{1}{\mu} \vec{L}^*$$

Sustituyendo, llegamos a:

$$\vec{L}_1^* = \frac{1}{\mu} m_1 \left( \frac{m_2}{M} \right)^2 \vec{L}^* = \frac{m_1 m_2^2}{M^2} \frac{M}{m_1 m_2} \vec{L}^* = \frac{m_2}{M} \vec{L}^*$$

$$\vec{L}_2^* = \frac{1}{\mu} m_2 \left( \frac{m_1}{M} \right)^2 \vec{L}^* = \frac{m_2 m_1^2}{M^2} \frac{M}{m_1 m_2} \vec{L}^* = \frac{m_1}{M} \vec{L}^*$$

Vamos con el periodo. Por la segunda ley de Kepler (ver teorema 19 en la página 143), tenemos:

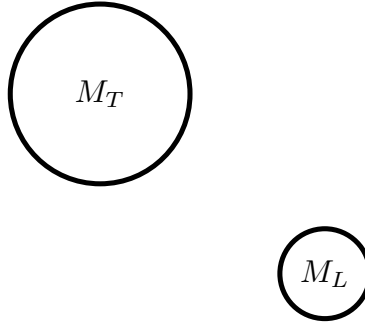
$$\frac{\pi ab}{\mathcal{T}} = \frac{L}{2\mu} \Leftrightarrow \mathcal{T} = \frac{2\mu\pi ab}{L}$$

$$\frac{\pi a_1 b_1}{\mathcal{T}_1} = \frac{L_1}{2m_1} \Leftrightarrow \mathcal{T}_1 = \frac{2m_1 \pi a_1 b_1}{L_1} = \frac{2m_1 \pi \frac{m_2}{M} a \frac{m_2}{M} b}{\frac{m_2}{M} L} = \underbrace{\frac{m_1 m_2}{M}}_{=\mu} \frac{2\pi ab}{L} = \frac{2\pi \mu ab}{L} = \mathcal{T}$$

$$\frac{\pi a_2 b_2}{\mathcal{T}_2} = \frac{L_2}{2m_2} \Leftrightarrow \mathcal{T}_2 = \frac{2m_2 \pi a_2 b_2}{L_2} = \frac{2m_2 \pi \frac{m_1}{M} a \frac{m_1}{M} b}{\frac{m_1}{M} L} = \underbrace{\frac{m_2 m_1}{M}}_{=\mu} \frac{2\pi ab}{L} = \frac{2\pi \mu ab}{L} = \mathcal{T}$$

*Q.E.D.*

**Ejemplo 33.** Vamos a ver qué diferencia hay en el periodo de la órbita de la Luna en torno a la Tierra, suponiendo que la Tierra está fija (como en el tema anterior) y considerando a la Tierra móvil.



Considerando la Tierra fija, por la tercera ley de Kepler (ver corolario 27 en la página 187), obtenemos:

$$\left( \frac{\mathcal{T}}{2\pi} \right)^2 = \frac{a^3}{Gm_T} \Leftrightarrow \mathcal{T} = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{Gm_T}}$$

Por otra parte, considerando la Tierra móvil, aplicando la proposición 85 en la página 224, sabemos que el periodo de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra, será el mismo que el de una partícula de masa  $\frac{m_T m_L}{m_T + m_L}$  orbitando entorno a una masa  $M_T + M_L$  fija. Nótese que la  $a$  esta órbita relativa es la misma que la  $a$  de la órbita de la Luna al suponer la Tierra fija, porque en ambos casos estamos hablando de cómo varía la posición relativa  $\vec{r}$ . Así, en este segundo caso, por la tercera ley de Kepler (ver corolario 27 en la página 187), llegamos a:

$$\left( \frac{\mathcal{T}'}{2\pi} \right)^2 = \frac{a^3}{G(m_T + m_L)} \Leftrightarrow \mathcal{T}' = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G(m_T + m_L)}}$$

De esta forma:

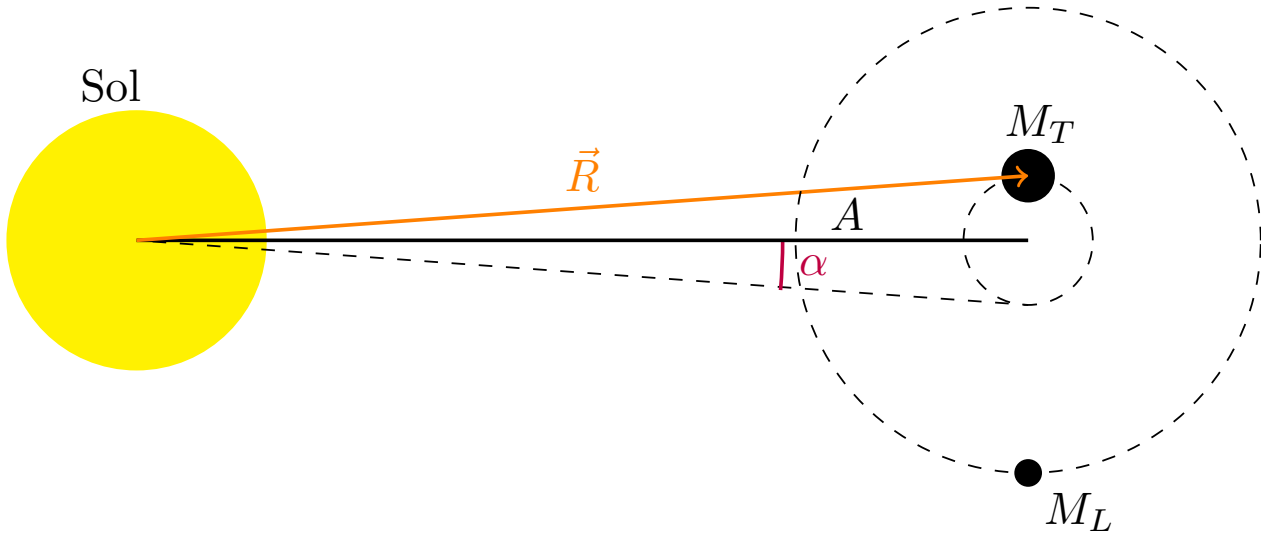
$$\Delta\mathcal{T} = \mathcal{T} - \mathcal{T}' = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G}} \left( \frac{1}{\sqrt{m_T}} - \frac{1}{\sqrt{m_T + m_L}} \right)$$

Sustituyendo con los valores numéricos  $m_T = 6 \cdot 10^{24}$  kg,  $m_L = \frac{1}{81,3} m_T$ ,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$ ,  $a = 3,84 \cdot 10^8$  m; obtenemos que:

$$\Delta \mathcal{T} \approx 4 \text{ h}$$

Nótese, por tanto, que en un sistema de dos partículas, el periodo de la órbita depende de ambas partículas.

**Ejemplo 34.** Consideremos la órbita del sistema Tierra-Luna en torno al Sol. Como ya dejamos caer en el ejemplo 31 en la página 216, vamos a considerar que el campo gravitatorio creado por el Sol es el mismo para la Luna y para la Tierra. Nos interesa calcular cuánto oscila la dirección Tierra-Sol a lo largo de un periodo lunar; en otras palabras, queremos calcular el ángulo  $\alpha$  del dibujo de abajo.



Para hacer dicho cálculo, necesitamos conocer el valor del semieje mayor  $a_T$  de la órbita que describe la Tierra entorno al centro de masas Tierra-Luna. Por la proposición 85 en la página 224, tenemos:

$$a_T = \frac{m_L}{m_L + m_T} a$$

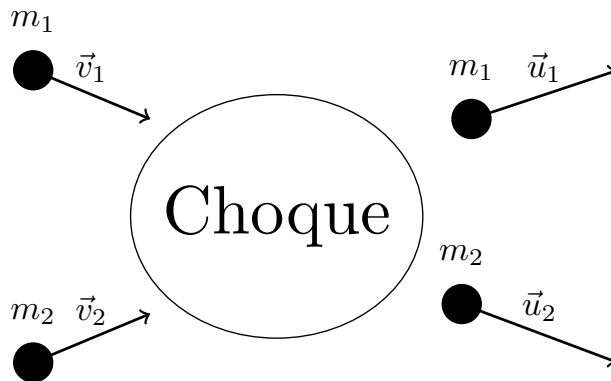
Llamando  $A$  a la distancia entre la Tierra y el Sol, que será más o menos la misma que entre el centro de masas Luna-Tierra y el Sol, podemos calcular el ángulo  $\alpha$  como sigue:

$$\tan \alpha = \frac{a_T}{A} = \frac{m_L}{m_L + m_T} \frac{a}{A}$$

Sustituyendo los valores numéricos  $m_T = 6 \cdot 10^{24}$  kg,  $m_L = \frac{1}{81,3} m_T$ ,  $A = 1,5 \cdot 10^{11}$  m,  $a = 3,84 \cdot 10^8$  m; llegamos a:

$$\alpha \approx 6,4''$$

## 4.4. Colisiones



Cuando tengamos un choque entre dos partículas, denotaremos con  $\vec{v}_1$  a la velocidad de la primera partícula antes del choque y denotaremos con  $\vec{u}_1$  a la velocidad de la primera partícula tras el choque. También, denotaremos con  $\vec{p}_1$  al momento lineal de la primera partícula antes del choque y denotaremos con  $\vec{q}_1$  el momento lineal de la primera partícula tras el choque. Haremos lo análogo con la segunda partícula.

**Teorema 25.** *En un choque entre dos partículas puntuales móviles se conserva el momento lineal desde cualquier sistema de referencia inercial y desde el centro de masas.*

$$\vec{P} = \vec{cte}$$

*Demostración.* Por el teorema 23 en la página 217, sabemos que siempre es:

$$\vec{P}^* = \vec{0}$$

luego, en particular, el momento lineal desde el centro de masas en un choque se conserva.

Por el teorema 24 en la página 220, sabemos que podemos expresar el momento lineal del sistema en cualquier sistema de referencia inercial como:

$$\vec{P} = \vec{P}_{cm}$$

como el momento lineal del centro de masas no varía tras el choque, el momento lineal se conserva. *Q.E.D.*

**Definición 94.** Llamaremos **factor de pérdida de energía**  $Q$  a la resta de la energía cinética de las partículas después y antes del choque.

$$Q := T_f - T_i = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 (u_1^2 - v_1^2) + \frac{1}{2}m_2 (u_2^2 - v_2^2)$$

*Observación 72.* Nótese que si es  $Q = 0$ , la energía se conserva, si es  $Q < 0$  se pierde energía y si es  $Q > 0$  se gana energía.

**Proposición 86.** *El factor de pérdida de energía  $Q$  no depende del sistema de referencia.*

*Demostración.* Sea  $O$  un observador y sea  $O'$  otro observador tal que  $\vec{R} = \overrightarrow{OO'}$ , con  $\vec{R}$  no necesariamente constante. Entonces para el observador  $O$ , el factor de pérdida de energía  $Q$  viene dado por:

$$Q = T_f - T_i = \frac{1}{2}m_1 (u_1^2 - v_1^2) + \frac{1}{2}m_2 (u_2^2 - v_2^2)$$

Mientras que para el observador  $O'$ , el factor de pérdida de energía  $Q'$  viene dado por:

$$Q' = T'_f - T'_i = \frac{1}{2}m_1 (u_1'^2 - v_1'^2) + \frac{1}{2}m_2 (u_2'^2 - v_2'^2)$$

Por otra parte, tenemos:

$$\vec{u}_1' = \dot{\vec{R}} + \vec{u}_1 \Rightarrow u_1'^2 = \dot{R}^2 + u_1^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{u}_1$$

$$\vec{v}_1' = \dot{\vec{R}} + \vec{v}_1 \Rightarrow v_1'^2 = \dot{R}^2 + v_1^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{u}_2' = \dot{\vec{R}} + \vec{u}_2 \Rightarrow u_2'^2 = \dot{R}^2 + u_2^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{u}_2$$

$$\vec{v}_2' = \dot{\vec{R}} + \vec{v}_2 \Rightarrow v_2'^2 = \dot{R}^2 + v_2^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{v}_2$$

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{1}{2}m_1 \left( \dot{R}^2 + u_1^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{u}_1 - \dot{R}^2 - v_1^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{v}_1 \right) + \frac{1}{2}m_2 \left( \dot{R}^2 + u_2^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{u}_2 - \dot{R}^2 - v_2^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{v}_2 \right) = \\ &= \frac{1}{2}m_1 \left( u_1^2 - v_1^2 + 2\vec{R} \cdot [\vec{u}_1 - \vec{v}_1] \right) + \frac{1}{2}m_2 \left( u_2^2 - v_2^2 + 2\vec{R} \cdot [\vec{u}_2 - \vec{v}_2] \right) = \\ &= \frac{1}{2}m_1 (u_1^2 - v_1^2) + \frac{1}{2}m_2 (u_2^2 - v_2^2) + \frac{1}{2}\dot{\vec{R}} \cdot (m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 - m_1\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_2) = \end{aligned}$$

$$= Q + \frac{1}{2} \dot{\vec{R}} \cdot (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{q}_1 - \vec{q}_2)$$

Y, por el teorema 25 en la página anterior:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$$

y, en consecuencia:

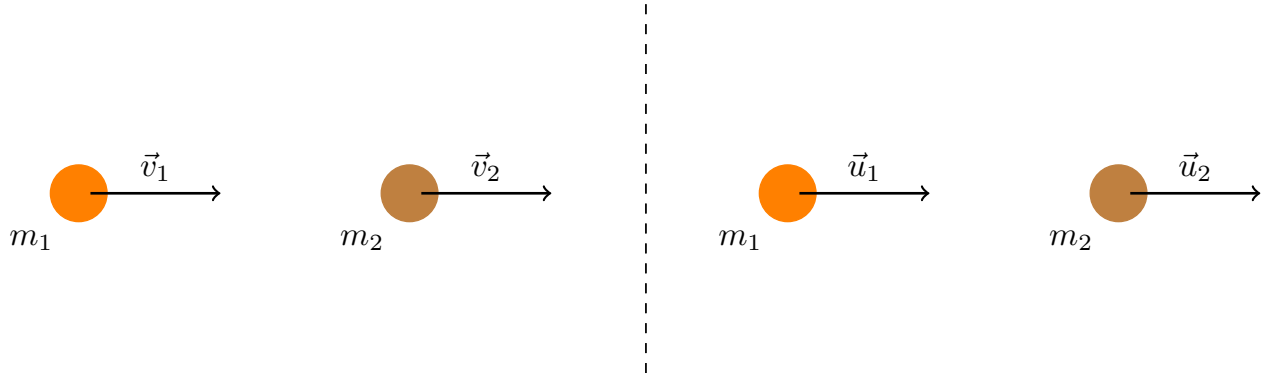
$$Q' = Q$$

*Q.E.D.*

**Definición 95.** Llamamos **coeficiente de restitución**  $e$  de un choque unidimensional a la expresión:

$$e := \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}$$

Choque



**Proposición 87.** *El coeficiente de restitución  $e$  no depende del sistema de referencia.*

*Demostración.* Sea  $O$  un observador y sea  $O'$  otro observador tal que se encuentra a distancia  $R$  de  $O$ , con  $R$  no necesariamente constante. Entonces para el observador  $O$ , el coeficiente de restitución viene dado por:

$$e = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}$$

mientras que para  $O'$  viene dado por:

$$e' = \frac{u'_2 - u'_1}{v'_1 - v'_2}$$

Nótese que es:

$$\begin{aligned} u'_2 &= \dot{R} + u_2 & u'_1 &= \dot{R} + u_1 \\ v'_2 &= \dot{R} + v_2 & v'_1 &= \dot{R} + v_1 \end{aligned}$$

De esta forma, tenemos:

$$e' = \frac{\dot{R} + u_2 - \dot{R} - u_1}{\dot{R} + v_1 - \dot{R} - v_2} = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = e$$

*Q.E.D.*

*Observación 73.* Nótese que por la proposición 87, en particular, desde el sistema centro de masas, tenemos:

$$e = \frac{u_2^* - u_1^*}{v_1^* - v_2^*}$$

**Definición 96.** Diremos que el choque entre dos partículas es **elástico** si el factor de pérdida de energía es nulo  $Q = 0$  (alternativamente, si el choque es adimensional, si  $e = 1$ ) y diremos que es **inelástico** si el factor de pérdida de energía es negativo  $Q < 0$  (alternativamente, si el choque es adimensional, si  $0 < e < 1$ ).

#### 4.4.1. Descripción desde el sistema centro de masas

**Proposición 88.** Sean dos partículas con masa  $m_1$  y  $m_2$  que colisionan. Desde el sistema de referencia centro de masas se dan las siguientes igualdades:

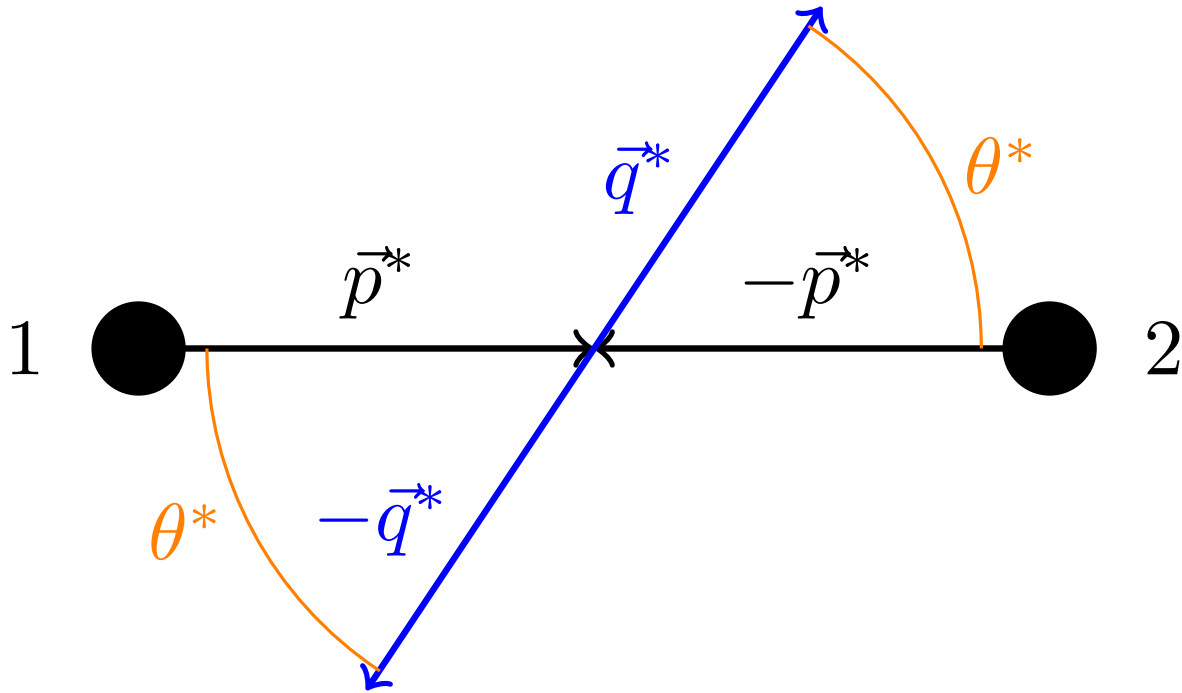
$$\vec{p}_1^* = \vec{p}^* = -\vec{p}_2^*$$

$$\vec{q}_1^* = \vec{q}^* = -\vec{q}_2^*$$

El ángulo que forma la dirección de  $\vec{p}_1^*$  con la dirección de  $\vec{q}_1^*$  es el mismo que forma la dirección de  $\vec{p}_2^*$  con la dirección de  $\vec{q}_2^*$ . Llamaremos a dicho ángulo **ángulo de dispersión desde el centro de masas**  $\theta^*$  y no podemos obtener dicho ángulo únicamente a partir del sistema de referencia centro de masas.

Si, además, el choque es elástico, entonces se da:

$$p^* = q^*$$



*Demostración.* La demostración de las primeras dos igualdades viene dada por el teorema 23 en la página 217.

Por otra parte, como  $\vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^*$  y  $\vec{q}_1^* = -\vec{q}_2^*$ :

$$\vec{p}_1^* \cdot \vec{q}_1^* = (-\vec{p}_2^*) \cdot (-\vec{q}_2^*) = \vec{p}_2^* \cdot \vec{q}_2^*$$

y en consecuencia, hay un único ángulo de dispersión  $\theta^*$ .

Si el choque es elástico, como por la proposición 86 en la página 229 el factor de pérdida de energía no depende del sistema de referencia, debe ser:

$$Q = 0 \Leftrightarrow T_f^* = T_i^*$$

Aplicando el teorema 23 en la página 217, sabemos que:

$$\frac{q^{*2}}{2\mu} = T_f^* = T_i^* = \frac{p^{*2}}{2\mu} \Leftrightarrow q^* = p^*$$

pues  $q^*, p^* \geq 0$ .

*Q.E.D.*



#### 4.4.2. Descripción desde el sistema de laboratorio

**Definición 97.** Llamamos **sistema laboratorio** a aquel sistema de referencia para el cual es  $\vec{p}_2 = \vec{0}$ .

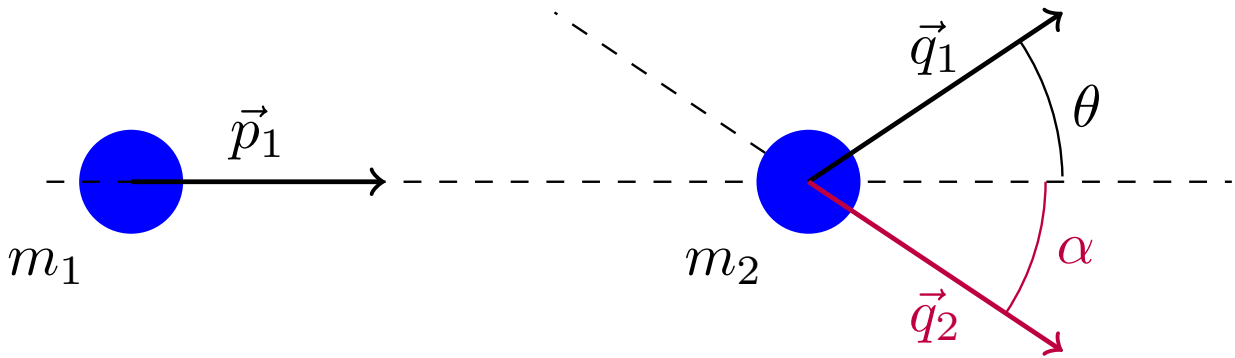
**Proposición 89.** Sean dos partículas con masa  $m_1$  y  $m_2$  que colisionan. Desde el sistema laboratorio se dan las siguientes igualdades:

$$\vec{p}_1 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = q_1 \cos \theta + q_2 \cos \alpha \\ q_1 \sin \theta = q_2 \sin \alpha \end{cases}$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forman los vectores  $\vec{q}_1$  y  $\vec{p}_1$  (lo llamaremos **ángulo de dispersión**) y  $\alpha$  es el ángulo que forman los vectores  $\vec{q}_2$  y  $\vec{p}_1$  (lo llamaremos **ángulo de retroceso**). Los vectores  $\vec{q}_1$ ,  $\vec{q}_2$  y  $\vec{p}_1$  están siempre en el mismo plano.

Si, además, el choque es elástico, entonces tenemos la siguiente igualdad:

$$q_2 = \frac{2m_2}{M} p_1 \cos \alpha \quad \text{si } q_2 \neq 0$$



*Demostración.* Como la fuerza de interacción (la fuerza de choque) se produce en la dirección perpendicular a sus superficies y, por tanto, en la dirección que une sus centros de masas; desde dichos puntos, la fuerza que actúa es central. Por la proposición 7 en la página 22, como la fuerza es central, el momento angular se conserva. Por el corolario 7 en la página 22, el movimiento estará restringido a un plano.

Por el teorema 25 en la página 229, se conserva el momento lineal:

$$\vec{p}_1 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = q_1 \cos \theta + q_2 \cos \alpha \\ 0 = q_1 \sin \theta - q_2 \sin \alpha \end{cases}$$

Por otra parte, si el choque es elástico, por la proposición 86 en la página 229 el factor de pérdida de energía no depende del sistema de referencia y, en consecuencia, debe ser:

$$Q = 0 \Leftrightarrow T_f = T_i \Leftrightarrow \frac{q_1^2}{2m_1} + \frac{q_2^2}{2m_2} = \frac{p_1^2}{2m_1}$$

De la segunda ecuación para el momento, obtenemos la relación entre ambos ángulos:

$$q_1 \sin \theta = q_2 \sin \alpha$$

Por otra parte, de la ecuación vectorial del momento, obtenemos:

$$\vec{q}_1 = \vec{p}_1 - \vec{q}_2 \Rightarrow q_1^2 = p_1^2 + q_2^2 - 2 \underbrace{\vec{p}_1 \cdot \vec{q}_2}_{= p_1 q_2 \cos \alpha} = p_1^2 + q_2^2 - 2p_1 q_2 \cos \alpha$$

Sustituyendo el valor hallado de  $q_1^2$  en la ecuación de la energía, llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{p_1^2 + q_2^2 - 2p_1 q_2 \cos \alpha}{2m_1} + \frac{q_2^2}{2m_2} &= \frac{p_1^2}{2m_1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p_1^2 &= p_1^2 + q_2^2 - 2p_1 q_2 \cos \alpha + \frac{m_1}{m_2} q_2^2 \Leftrightarrow q_2^2 - 2p_1 q_2 \cos \alpha + \frac{m_1}{m_2} q_2^2 = 0 \end{aligned}$$

Suponiendo  $q_2 \neq 0$ , lo anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned} q_2 - 2p_1 \cos \alpha + \frac{m_1}{m_2} q_2 = 0 &\Leftrightarrow q_2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = 2p_1 \cos \alpha \Leftrightarrow q_2 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \cos \alpha = \\ &= \frac{2m_2}{M} p_1 \cos \alpha \end{aligned}$$

Si es  $q_2 = 0$ , entonces  $\vec{p}_1 = \vec{q}_1$  y  $\theta = \alpha = 0$ .

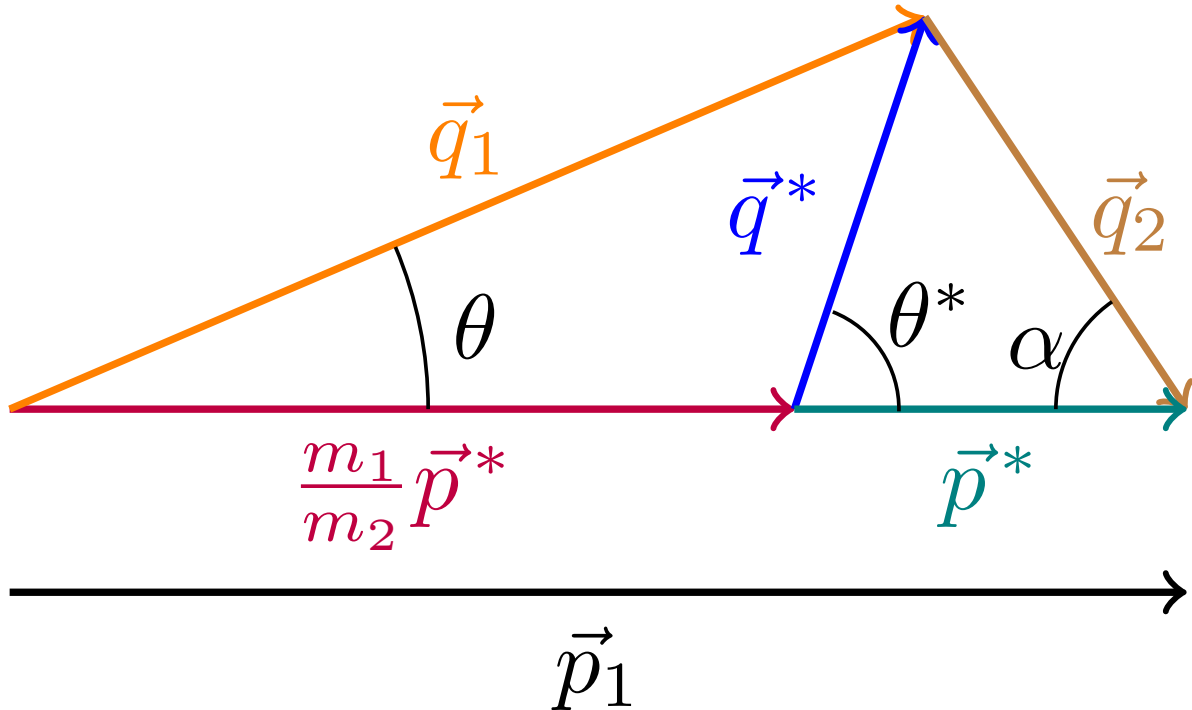
*Q.E.D.*

#### 4.4.3. Descripción en el sistema laboratorio a partir del sistema centro de masas

**Teorema 26.** Sean dos partículas con masa  $m_1$  y  $m_2$  que colisionan. Se dan las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= \vec{q}_1 + \vec{q}_2 \\ \vec{p}_1 &= \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) \vec{p}^* = \frac{M}{m_2} \vec{p}^* \\ \vec{q}_1 &= \frac{m_1}{m_2} \vec{p}^* + \vec{q}^* \\ \vec{q}_2 &= \vec{p}^* - \vec{q}^* \\ \frac{q_2}{\sin \theta} &= \frac{q_1}{\sin \alpha} \\ \frac{q_2}{\sin \theta^*} &= \frac{q^*}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

donde  $\theta$  es el ángulo dispersión (el ángulo que forman  $\vec{p}_1$  y  $\vec{q}_1$ ),  $\alpha$  es el ángulo de retroceso (el ángulo que forman  $\vec{p}_1$  y  $\vec{q}_2$ ) y  $\theta^*$  es el ángulo de dispersión desde el centro de masas (el ángulo que forman  $\vec{p}^*$  y  $\vec{q}^*$ ). Estas relaciones quedan resumidas con el siguiente triángulo (llamado triángulo mágico):

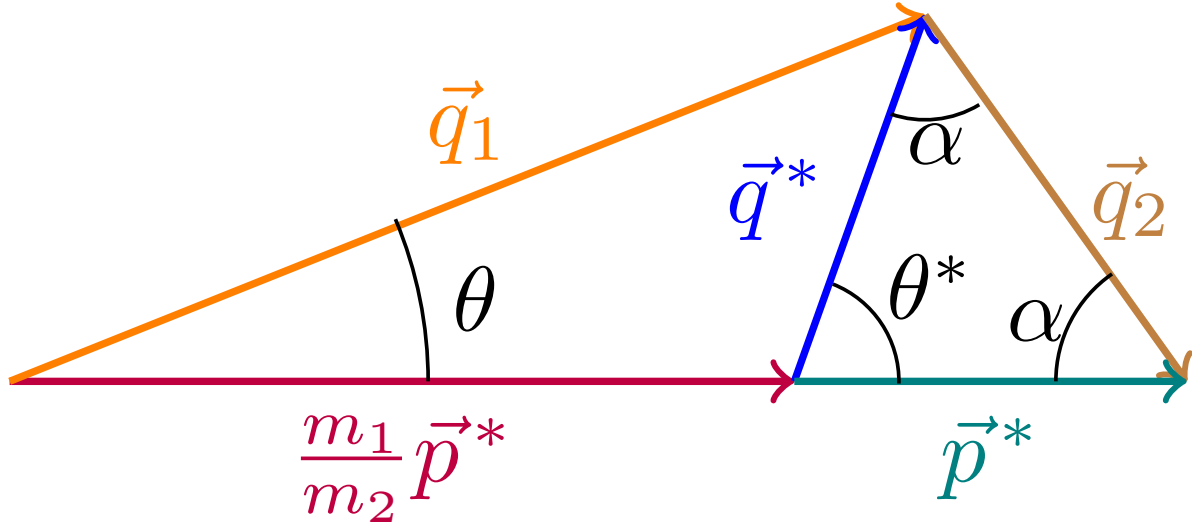


Si, además, el choque es elástico, se cumple:

$$2\alpha + \theta^* = \pi$$

$$q_2 = 2p^* \sin \frac{\theta^*}{2} \quad \text{si } q_2 \neq 0$$

Ahora el subtriángulo derecho del triángulo mágico es isósceles:



*Demostración.* Tenemos la primera relación por la proposición 89 en la página 232.

Relacionemos  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}_1$  y  $\vec{q}_2$  con  $\vec{p}^*$  y  $\vec{q}^*$ :

$$\begin{cases} \vec{p}_1 = m_1 \dot{\vec{R}} + \vec{p}^* \\ \vec{0} = \vec{p}_2 = m_2 \dot{\vec{R}} - \vec{p}^* \\ \vec{q}_1 = m_1 \dot{\vec{R}} + \vec{q}^* \\ \vec{q}_2 = m_2 \dot{\vec{R}} - \vec{q}^* \end{cases}$$

De la segunda ecuación, obtenemos:

$$m_2 \dot{\vec{R}} - \vec{p}^* = \vec{0} \Leftrightarrow \dot{\vec{R}} = \frac{\vec{p}^*}{m_2}$$

En consecuencia, sustituyendo, llegamos a:

$$\vec{p}_1 = m_1 \frac{\vec{p}^*}{m_2} + \vec{p}^* = \left( \frac{m_1}{m_2} + 1 \right) \vec{p}^* = \left( \frac{m_1 + m_2}{m_2} \right) \vec{p}^* = \frac{M}{m_2} \vec{p}^*$$

$$\vec{q}_1 = m_1 \frac{\vec{p}^*}{m_2} + \vec{q}^*$$

$$\vec{q}_2 = m_2 \frac{\vec{p}^*}{m_2} - \vec{q}^* = \vec{p}^* - \vec{q}^*$$

Las dos relaciones de ángulos son consecuencia de aplicar el teorema del seno al triángulo mágico.

Bien, ahora si el choque es elástico, por la proposición 88 en la página 231, es  $p^* = q^*$  y, en consecuencia el subtriángulo derecho del triángulo mágico es isósceles. Así, tenemos:

$$2\alpha + \theta^* = \pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi - \theta^*}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta^*}{2}$$

Por la proposición 89 en la página 232, cuando el choque es elástico y  $q_2 \neq 0$ , se da:

$$q_2 = \frac{2m_2}{M} p_1 \cos \alpha = \frac{2m_2}{M} p_1 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta^*}{2} \right) = \frac{2m_2}{M} p_1 \sin \frac{\theta^*}{2}$$

Antes, hemos obtenido que:

$$\vec{p}_1 = \frac{M}{m_2} \vec{p}^* \Rightarrow p_1 = \frac{M}{m_2} p^*$$

sustituyendo, tenemos:

$$q_2 = \frac{2m_2}{M} \frac{M}{m_2} p^* \sin \frac{\theta^*}{2} = 2p^* \sin \frac{\theta^*}{2}$$

*Q.E.D.*

**Definición 98.** Sean dos partículas con masa  $m_1$  y  $m_2$  que colisionan. Se llama **energía transferida al blanco** a la energía cinética de la segunda partícula (la que está inmóvil en sistema laboratorio) tras el choque.

También llamamos **proporción de energía transferida al blanco** al cociente entre la energía transferida al blanco y la energía cinética total del sistema.

**Proposición 90.** Sean dos partículas con masa  $m_1$  y  $m_2$  que colisionan elásticamente. Entonces la energía transferida al blanco viene dada por:

$$T_{2,f} = \frac{2p^{*2}}{m_2} \sin^2 \frac{\theta^*}{2}$$

*Demostración.* Por definición de energía cinética tenemos:

$$T_{2,f} = \frac{q_2^2}{2m_2}$$

Ahora, por el teorema 26 en la página 233, tenemos que:

$$T_{2,f} = \frac{4p^{*2} \sin^2 \frac{\theta^*}{2}}{2m_2} = \frac{2p^{*2}}{m_2} \sin^2 \frac{\theta^*}{2}$$

*Q.E.D.*

**Proposición 91.** Sean dos partículas con masa  $m_1$  y  $m_2$  que colisionan elásticamente. La energía cinética del sistema (tanto antes como después del choque) puede expresarse como:

$$T = \frac{M^2 p^{*2}}{2m_1 m_2^2}$$

*Demostración.* Como el choque es elástico, la energía cinética debe conservarse. En el sistema laboratorio, antes del choque únicamente se mueve la primera partícula. Así:

$$T = T_f = T_i = \frac{p_1^2}{2m_1}$$

Por el teorema 26 en la página 233, tenemos que:

$$T = \frac{\frac{M^2 p^{*2}}{m_2^2}}{2m_1} = \frac{M^2 p^{*2}}{2m_1 m_2^2}$$

*Q.E.D.*

**Proposición 92.** Sean dos partículas con masa  $m_1$  y  $m_2$  que colisionan elásticamente. La proporción de energía transferida al blanco viene dado por la expresión:

$$\frac{T_{2,f}}{T} = \frac{4m_1 m_2}{M^2} \sin^2 \frac{\theta^*}{2}$$

*Demostración.* Partimos de las proposiciones 90 en la página anterior y 91 en la página anterior. De manera que:

$$\frac{T_{2,f}}{T} = \frac{\frac{2p^{*2}}{m_2} \sin^2 \frac{\theta^*}{2}}{\frac{M^2 p^{*2}}{2m_1 m_2^2}} = \frac{2p^{*2} \sin^2 \frac{\theta^*}{2} 2m_1 m_2^2}{M^2 p^{*2} m_2} = \frac{4m_1 m_2}{M^2} \sin^2 \frac{\theta^*}{2}$$

*Q.E.D.*

**Corolario 39.** Sean dos partículas con masa  $m_1$  y  $m_2$  que colisionan elásticamente. La máxima transferencia de energía se produce cuando el choque es frontal.

*Demostración.* Estudiando la expresión de la proposición 92 en la página anterior, vemos que su valor es máximo cuando:

$$\sin \frac{\theta^*}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\theta^*}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta^* = \pi$$

para un  $\theta^*$  restringido a  $[0, \pi]$ . Y un ángulo de  $\theta^* = \pi$  se corresponde claramente con un choque frontal, pues  $\theta^*$  es el ángulo que forman entre sí  $\vec{p}^*$  y  $\vec{q}^*$ . *Q.E.D.*

**Corolario 40.** Sean dos partículas con masa  $m_1$  y  $m_2$  que colisionan elásticamente. La máxima transferencia de energía si el choque es frontal ( $\theta^* = \pi$ ) se produce cuando  $m_1 = m_2$ . Si  $m_1 \ll m_2$  o  $m_1 \gg m_2$ , la proporción de energía transferida tiende a cero.

*Demostración.* Partimos de la proposición 92 en la página anterior. Si el choque es frontal, la expresión de la proporción de transferencia en energía al blanco queda:

$$\frac{T_{2,f}}{T} = \frac{4m_1 m_2}{M^2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

Claramente la expresión anterior es simétrica en  $m_1$  y  $m_2$ , así que aquello que le ocurra a  $m_1$ , le ocurrirá también a  $m_2$ . Vamos a derivar para obtener los puntos críticos:

$$\frac{d\frac{T_{2,f}}{T}}{dm_1} = \frac{4m_2 (m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2 2(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^4}$$

Igualando la derivada a cero, obtenemos:

$$m_2 (m_1 + m_2)^2 = 2m_1 m_2 (m_1 + m_2)$$

como  $m_1, m_2 > 0$  debe ser  $m_1 + m_2 \neq 0$  y, en consecuencia:

$$m_1 + m_2 = 2m_1 \Leftrightarrow m_2 = m_1$$

De manera que el único punto crítico es  $m_1 = m_2$ . Para ver que es máximo, vamos a estudiar el límite de la función original cuando tiene a cero y cuando tiende a infinito, que son los extremos de nuestro intervalo de estudio:

$$\begin{aligned} \lim_{m_1 \rightarrow 0} \frac{T_{2,f}}{T} &= \lim_{m_1 \rightarrow 0} \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 0 \\ \lim_{m_1 \rightarrow \infty} \frac{T_{2,f}}{T} &= \lim_{m_1 \rightarrow \infty} \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \lim_{m_1 \rightarrow \infty} \frac{4m_1 m_2}{m_1^2} = 0 \end{aligned}$$

En consecuencia,  $m_1 = m_2$  es un máximo absoluto de la función  $\frac{T_{2,f}}{T}$ . Además, con los límites anteriores hemos probado que la proporción de energía transferida al blanco tiende a cero si es  $m_1 \ll m_2$  o si es  $m_2 \gg m_1$ . *Q.E.D.*

**Ejemplo 35.** Si tenemos un choque elástico entre un protón y una partícula alfa con  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{4}$ , el máximo porcentaje de energía transferida es un 64%.

**Proposición 93.** Sean dos partículas con masa  $m_1$  y  $m_2$  que colisionan. La relación entre el ángulo de dispersión desde el centro de masas  $\theta^*$  y el ángulo de dispersión viene dada por la expresión:

$$\tan \theta = \frac{q^* \sin \theta^*}{\frac{m_1}{m_2} p^* + q^* \cos \theta^*}$$

*Demostración.* Partimos del triángulo mágico del teorema 26 en la página 233. En el subtriángulo izquierdo podemos ver fácilmente que el ángulo de abajo a la derecha es  $\pi - \theta^*$ . En consecuencia, el ángulo de arriba a la derecha es  $\pi - \theta - (\pi - \theta^*) = \theta^* - \theta$ . Ahora por el teorema del seno, tenemos:

$$\frac{\frac{m_1}{m_2} p^*}{\sin(\theta^* - \theta)} = \frac{q^*}{\sin \theta}$$

Por el lema 10 en la página 133, tenemos que:

$$\sin(\theta^* - \theta) = \sin \theta^* \cos \theta - \cos \theta^* \sin \theta$$

Así, sustituyendo, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{m_1}{m_2} p^*}{\sin \theta^* \cos \theta - \cos \theta^* \sin \theta} &= \frac{q^*}{\sin \theta} \Leftrightarrow \frac{\frac{m_1}{m_2} p^*}{\sin \theta^* \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \cos \theta^*} = q^* \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} \frac{p^*}{q^*} &= \frac{\sin \theta^*}{\tan \theta} - \cos \theta^* \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} \frac{p^*}{q^*} + \cos \theta^* = \frac{\sin \theta^*}{\tan \theta} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tan \theta &= \frac{\sin \theta^*}{\frac{m_1}{m_2} \frac{p^*}{q^*} + \cos \theta^*} = \frac{\sin \theta^*}{\frac{\frac{m_1}{m_2} p^* + q^* \cos \theta^*}{q^*}} = \frac{q^* \sin \theta^*}{\frac{m_1}{m_2} p^* + q^* \cos \theta^*} \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

**Corolario 41.** Sean dos partículas con masa  $m_1$  y  $m_2$  que colisionan elásticamente. La relación entre el ángulo de dispersión desde el centro de masas  $\theta^*$  y el ángulo de dispersión viene dada por la expresión:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta^*}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta^*}$$

*Demostración.* Partimos de la proposición 93 en la página anterior:

$$\tan \theta = \frac{q^* \sin \theta^*}{\frac{m_1}{m_2} p^* + q^* \cos \theta^*}$$

Si el choque es elástico, por la proposición 88 en la página 231, tenemos que  $p^* = q^*$ . En consecuencia:

$$\tan \theta = \frac{q^* \sin \theta^*}{\frac{m_1}{m_2} q^* + q^* \cos \theta^*} = \frac{\sin \theta^*}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta^*}$$

*Q.E.D.*

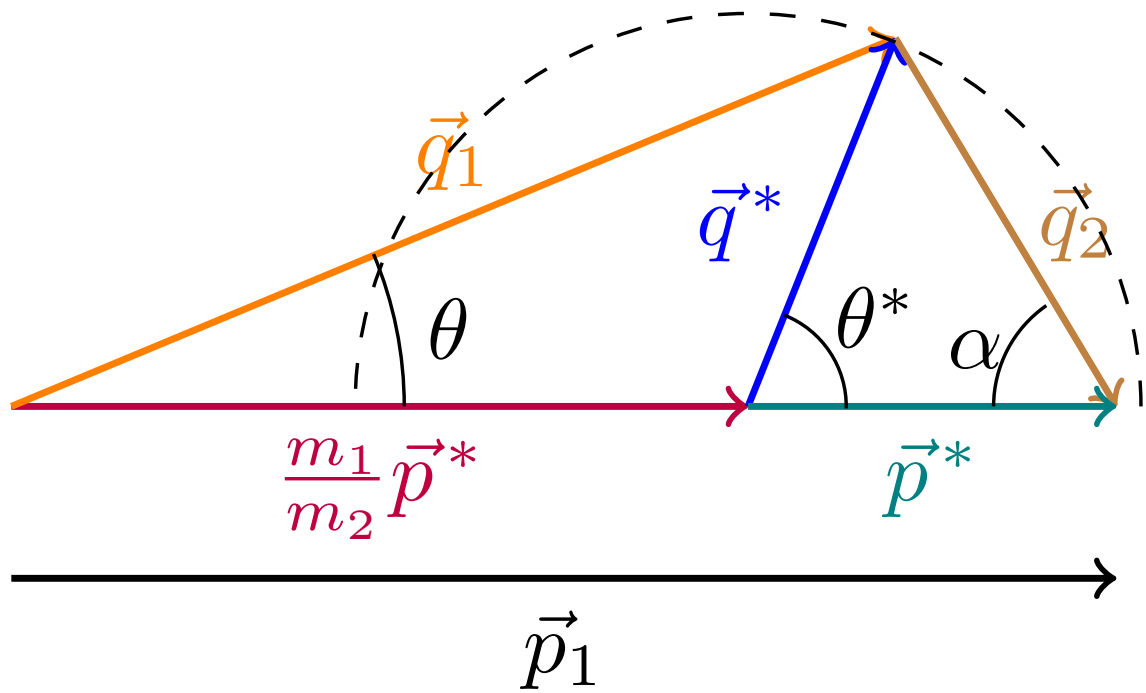
#### 4.4.4. Casos particulares

Sabemos, trivialmente, que  $\theta^* \in [0, \pi]$  porque  $\theta^*$  es el ángulo que forma  $\vec{p}^*$  con  $\vec{q}^*$  y el ángulo entre dos vectores varía entre 0 y  $\pi$ . Sin embargo  $\theta$ , en general, no puede variar desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = \pi$ . Aunque está claro que  $\theta$  nunca podrá ser mayor que  $\pi$ .

**Proposición 94.** Sean dos partículas con masa  $m_1$  y  $m_2$  que colisionan elásticamente. Entonces  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

■ Si es  $m_1 > m_2$ , entonces se da:

$$\begin{aligned} \theta^* = 0 &\Rightarrow \theta = 0 \\ \theta^* = \pi &\Rightarrow \theta = 0 \\ \tan \theta_{\text{máx}} &= \frac{\frac{m_2}{m_1} \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}}}{\frac{m_2}{m_1} + 1} \leq \frac{\frac{m_2}{m_1}}{\frac{m_2}{m_1} + 1} \\ \theta_{\text{máx}} &< \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

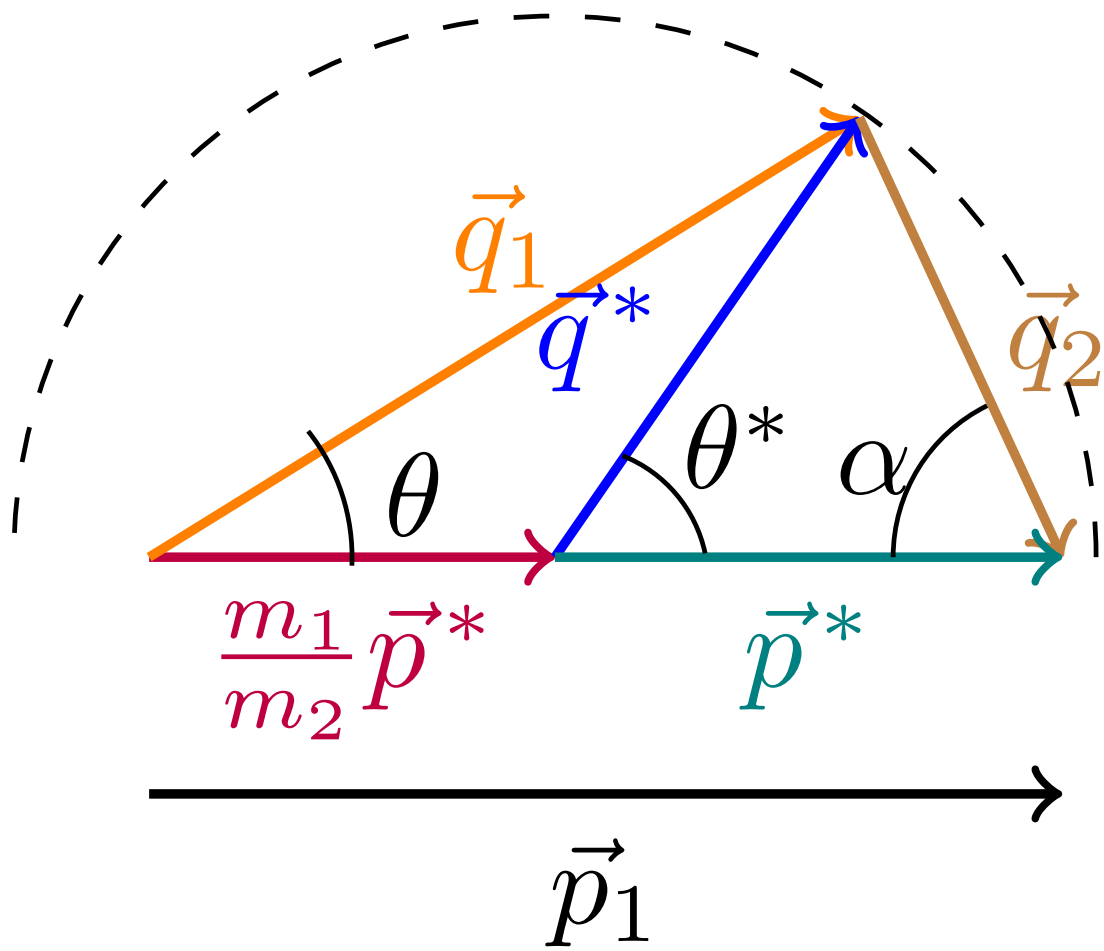


- Si es  $m_1 < m_2$ , tenemos:

$$\theta^* = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$$

$$\theta^* = \pi \Leftrightarrow \theta = \pi$$

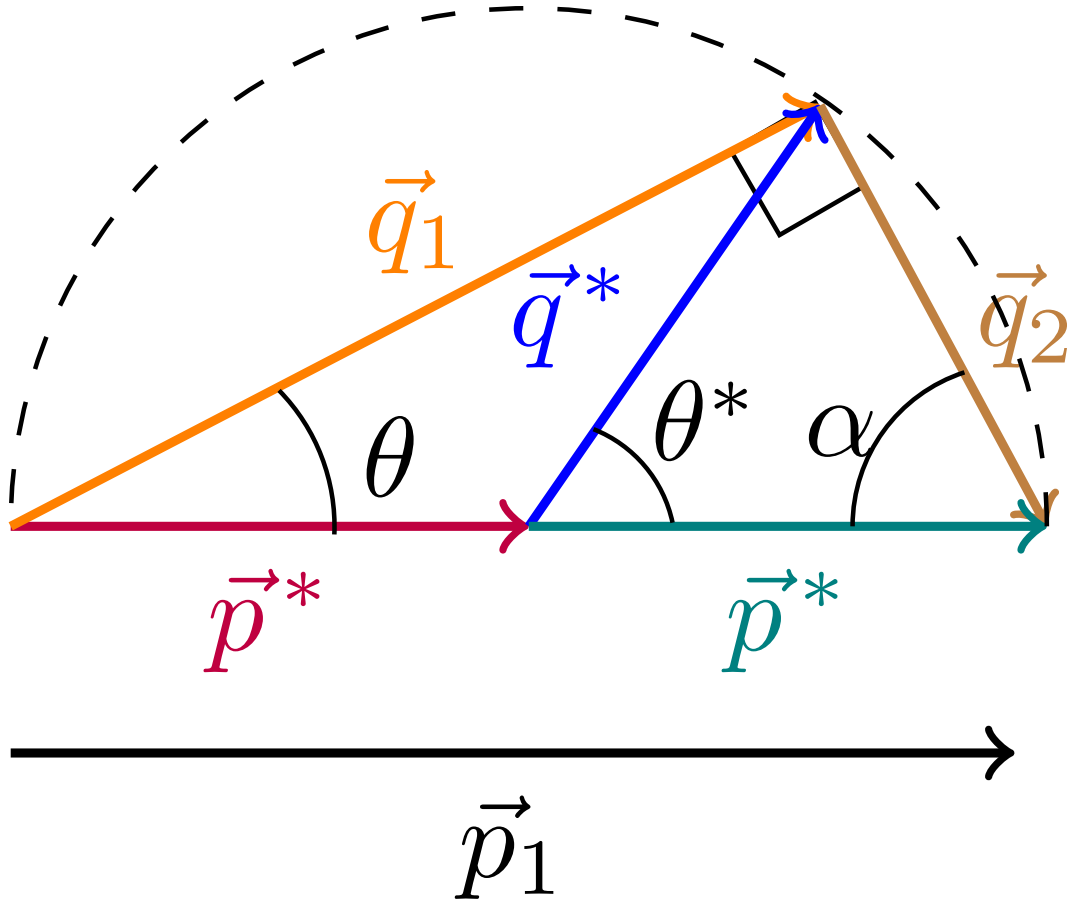
$$\theta_{\text{máx}} = \pi$$



- Si es  $m_1 = m_2$ , entonces:

$$\theta = \frac{\theta^*}{2}$$





*Demostración.* Por el teorema 26 en la página 233, si el choque es elástico, se da:

$$2\alpha + \theta^* = \pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta^*}{2}$$

y como  $\theta^* \in [0, \pi]$ ,  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

Partimos del corolario 41 en la página 237:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta^*}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta^*}$$

Derivando, obtenemos:

$$\frac{d \tan \theta}{d \theta^*} = \frac{\cos \theta^* \left( \frac{m_1}{m_2} + \cos \theta^* \right) - \sin \theta^* (-\sin \theta^*)}{\left( \frac{m_1}{m_2} + \cos \theta^* \right)^2}$$

Igualando la derivada a 0, llegamos a:

$$\frac{m_1}{m_2} \cos \theta^* + \overbrace{\cos^2 \theta^* + \sin^2 \theta^*}^{=1} = 0 \Leftrightarrow \cos \theta^* = -\frac{m_2}{m_1}$$

- Si es  $m_1 > m_2$ , como la función  $\tan \theta$  es estrictamente creciente, tenemos que el valor máximo de  $\theta$  se alcanza cuando:

$$\cos \theta^* = -\frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \sin \theta^* = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}}$$

donde hemos aplicado que  $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ <sup>1</sup>. Si llamamos  $x$  al cociente  $x := \frac{m_2}{m_1}$ , obtenemos:

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{x} + x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{1+x}{x}} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{x+1} \leq \frac{x}{x+1} < 1 \Rightarrow \theta < \frac{\pi}{4}$$

Por otra parte:

$$\theta^* = 0 \Rightarrow \sin \theta^* = 0 \Rightarrow \tan \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\theta^* = \pi \Rightarrow \sin \theta^* = 0 \Rightarrow \tan \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

Nótese que, en principio,  $\theta = \pi$  podría ser una solución de las dos ecuaciones anteriores, pero como hemos visto antes es  $\theta < \frac{\pi}{4}$ , así que no puede ser.

- Si es  $m_1 < m_2$ , no existen ningún punto crítico, en consecuencia, no existe ninguna limitación *a priori*. Tenemos:

$$\theta^* = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin \theta^* = 0 \\ \cos \theta^* = 1 \end{cases} \Rightarrow \tan \theta = 0^+ \Rightarrow \theta = 0$$

$$\theta^* = \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin \theta^* = 0 \\ \cos \theta^* = -1 \Rightarrow \underbrace{\frac{m_1}{m_2} - 1}_{< 0} < 0 \Rightarrow \tan \theta = 0^- \Rightarrow \theta = \pi \end{cases}$$

- Por último, si es  $m_1 = m_2$ , entonces, por el teorema 26 en la página 233, se cumple:

$$2\alpha + \theta^* = \pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta^*}{2}$$

Así, el ángulo superior derecho del subtriángulo derecho es  $\alpha$  y el ángulo superior derecho del subtriángulo izquierdo es el complementario de  $\alpha$ , que es:

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\theta^*}{2}$$

En consecuencia, en el subtriángulo izquierdo, tenemos:

$$\theta + \pi - \theta^* + \frac{\theta^*}{2} = \pi \Leftrightarrow \theta - \frac{\theta^*}{2} = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\theta^*}{2}$$

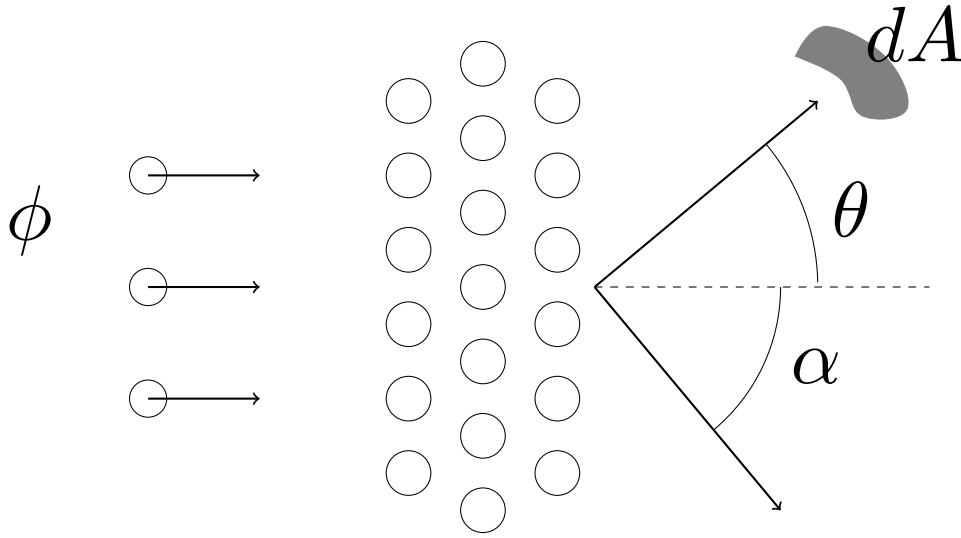
*Q.E.D.*

## 4.5. Secciones eficaces (sistemas centro de masas y laboratorio)

### 4.5.1. Repaso de conceptos de dispersión

En el tema anterior estudiamos varios conceptos relacionados con la dispersión de partículas en la que el blanco estaba siempre fijo. Gracias a los conceptos nuevos vistos en este tema, vamos a ser capaces de resolver la colisión colineal de dos haces de partículas en movimiento. Para ello, vamos a repasar todas las magnitudes físicas que introdujimos en el tema anterior y vamos a ver cómo se expresan desde el centro de masas y desde el sistema laboratorio. Como en el sistema laboratorio el segundo objeto está quieto, los blancos lo estarán, de manera que las definiciones de todos los conceptos son exactamente iguales a las del tema anterior.

<sup>1</sup>Esto puede verse en la página [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Inverse\\_trigonometric\\_functions&oldid=876493420#Relationships\\_between\\_trigonometric\\_functions\\_and\\_inverse\\_trigonometric\\_functions](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Inverse_trigonometric_functions&oldid=876493420#Relationships_between_trigonometric_functions_and_inverse_trigonometric_functions).



**Proposición 95.** *El número de partículas (y magnitudes derivadas) es el mismo en el sistema centro de masas y en el sistema laboratorio. Ambos sistemas también miden el área de la misma forma. Lo único que es diferente es la sección eficaz diferencial.*

1.

$$N_{inc} = N_{inc}^*$$

2.

$$\phi_{inc} = \phi_{inc}^*$$

3.

$$\varrho_{inc} = \varrho_{inc}^*$$

4.

$$N_{disp} = N_{disp}^*$$

5.

$$\phi_{disp} = \phi_{disp}^*$$

6.

$$\varrho_{disp} = \varrho_{disp}^*$$

7.

$$n_{bl} = n_{bl}^*$$

8.

$$\sigma = \sigma^*$$

9.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} d\Omega^*$$

10. En general:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \neq \frac{d\sigma}{d\Omega^*}$$

donde las magnitudes sin distinción son las referidas al sistema laboratorio y las que llevan una \* son las referidas al sistema centro de masas.

*Demostración.* Las relaciones (1) a (7) son triviales; se deben a que no puede haber un mayor número de partículas en el sistema centro de masas y que en el sistema laboratorio o al revés. Como el área se mide igual bajo ambos sistemas, se dan también (7) y (8). (9) se da porque, por (8) es  $d\sigma = d\sigma^*$ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = d\sigma = d\sigma^* = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} d\Omega^*$$

Ahora bien, en general es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \neq \frac{d\sigma}{d\Omega^*}$$

porque en general es:

$$d\Omega \neq d\Omega^*$$

y esto último se debe a que, como hemos visto en las secciones anteriores, el ángulo de dispersión no es el mismo en el sistema centro de masas que en el sistema laboratorio. Nótese que en la sección eficaz asociada  $d\sigma$  sí que es la misma, porque  $d\Omega$  y  $d\Omega^*$  están relacionados. Es decir, es lo mismo decir: «una sección eficaz  $d\sigma$  para un ángulo sólido  $d\Omega$ » que «una sección eficaz  $d\sigma$  para un ángulo sólido  $d\Omega^*$ ». *Q.E.D.*

Como ya vimos en el tema anterior si yo conozco la sección eficaz diferencial de la colisión que tengo entre manos, puedo responder ya a cualquier pregunta sobre el sistema mediante el teorema 21 en la página 197 (o derivados) simplemente integrando. Por ello es por lo que en este tema vamos a centrarnos en la sección eficaz diferencial y en cómo cambia ésta del sistema centro de masas al sistema laboratorio.

#### 4.5.2. Relación entre la sección eficaz diferencial entre el sistema centro de masas y el sistema laboratorio

**Proposición 96.** Sean dos haces planos de partículas que están lanzados uno contra el otro de forma colineal (en exactamente la misma dirección). Consideraremos que las partículas del primer haz tienen masa  $m_1$ , mientras que las del segundo haz tiene masa  $m_2$ . Supondremos que todas las partículas del primer haz están lanzadas a la misma velocidad y haremos lo mismo con el segundo haz. Si  $m_1 < m_2$  (o equivalentemente si hay una relación unívoca entre  $\theta$  y  $\theta^*$ ) y las colisiones son todas elásticas, entonces la sección eficaz diferencial en el sistema laboratorio está relacionada con la sección eficaz diferencial en el sistema centro de masas por la expresión:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \left| \frac{\left[ 1 + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta^* + \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \theta^*} \right|$$

*Demostración.* Partimos de la proposición 95 en la página anterior, de forma que tenemos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} d\Omega^* \Leftrightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \frac{d\Omega^*}{d\Omega}$$

Nuestro objetivo es, por tanto, estudiar el cociente  $\frac{d\Omega^*}{d\Omega}$ . Por la proposición 78 en la página 201, podemos expresar el ángulo sólido en coordenadas esféricas, obteniendo:

$$\frac{d\Omega^*}{d\Omega} = \frac{\sin \theta^* d\theta^* d\varphi^*}{\sin \theta d\theta d\varphi}$$

Ahora, nos damos cuenta de que el ángulo  $\varphi$  es el mismo en ambos sistemas de referencia, por tanto:

$$\varphi = \varphi^* \Rightarrow d\varphi = d\varphi^*$$

En consecuencia, la expresión anterior queda:

$$\frac{d\Omega^*}{d\Omega} = \frac{\sin \theta^* d\theta^*}{\sin \theta d\theta} = \left| \frac{d(\cos \theta^*)}{d(\cos \theta)} \right|$$

donde los valores absolutos se deben a que la sección eficaz diferencial debe ser siempre positiva, por tanto, el factor  $\frac{d\Omega^*}{d\Omega}$  que relaciona dos secciones eficaces diferenciales debe ser positiva. Sin embargo, el cociente  $\frac{d(\cos \theta^*)}{d(\cos \theta)}$  puede ser negativo o positivo dependiendo del caso.

Hallamos la relación entre  $\theta$  y  $\theta^*$  para colisiones elásticas en el corolario 41 en la página 237:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta^*}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta^*}$$

Nótese que si es  $m_1 < m_2$ , la relación entre  $\theta$  y  $\theta^*$  es unívoca. Por otra parte, sabemos que:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \theta^*}{\frac{m_1^2}{m_2^2} + \cos^2 \theta^* + 2\frac{m_1}{m_2} \cos \theta^*}} = \frac{\frac{m_1^2}{m_2^2} + \cos^2 \theta^* + 2\frac{m_1}{m_2} \cos \theta^*}{\frac{m_1^2}{m_2^2} + \cos^2 \theta^* + 2\frac{m_1}{m_2} \cos \theta^* + \sin^2 \theta^*} = \\ &= \frac{\frac{m_1^2}{m_2^2} + \cos^2 \theta^* + 2\frac{m_1}{m_2} \cos \theta^*}{\frac{m_1^2}{m_2^2} + 2\frac{m_1}{m_2} \cos \theta^* + 1} = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta^*\right)^2}{\frac{m_1^2}{m_2^2} + 2\frac{m_1}{m_2} \cos \theta^* + 1} \end{aligned}$$

Si llamamos  $z := \cos \theta$ ,  $z^* := \cos \theta^*$ ,  $C = \frac{m_1}{m_2}$ , nosotros queremos calcular:

$$\left| \frac{d(\cos \theta^*)}{d(\cos \theta)} \right| = \left| \frac{dz^*}{dz} \right|$$

y podemos reescribir la expresión de arriba como:

$$z^2 = \frac{(C + z^*)^2}{C^2 + 2Cz^* + 1}$$

Ahora mismo hemos obtenido  $z^2 = f(z^*)$  donde  $f$  es la función dependiente de  $\cos \theta^*$  que hemos hallado arriba, diferenciando, obtenemos:

$$d(z^2) = df(z^*) \Leftrightarrow 2zdz = \frac{df(z^*)}{dz^*} dz^* \Leftrightarrow \frac{dz^*}{dz} = \frac{2z}{\frac{df(z^*)}{dz^*}}$$

Halleemos  $\frac{df(z^*)}{dz^*}$ :

$$\begin{aligned} \frac{df(z^*)}{dz^*} &= \frac{2(C + z^*)(C^2 + 2Cz^* + 1) - (C + z^*)^2 2C}{(C^2 + 2Cz^* + 1)^2} = \\ &= \frac{2(C + z^*)}{(C^2 + 2Cz^* + 1)^2} [C^2 + 2Cz^* + 1 - C(C + z^*)] = \\ &= \frac{2(C + z^*)}{(C^2 + 2Cz^* + 1)^2} [C^2 + 2Cz^* + 1 - C^2 - Cz^*] = \frac{2(C + z^*)}{(C^2 + 2Cz^* + 1)^2} [Cz^* + 1] \\ \frac{dz^*}{dz} &= 2 \frac{\frac{C+z^*}{\sqrt{C^2+2Cz^*+1}}}{\frac{2(C+z^*)}{(C^2+2Cz^*+1)^2} [Cz^* + 1]} = \frac{[C^2 + 2Cz^* + 1]^{\frac{3}{2}}}{Cz^* + 1} \end{aligned}$$

Deshaciendo todos los cambios de variable, obtenemos:

$$\left| \frac{d(\cos \theta^*)}{d(\cos \theta)} \right| = \left| \frac{\left[ 1 + 2\frac{m_1}{m_2} \cos \theta^* + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \theta^*} \right|$$

Y, por ende:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \left| \frac{d(\cos \theta^*)}{d(\cos \theta)} \right| = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \left| \frac{\left[ 1 + 2\frac{m_1}{m_2} \cos \theta^* + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \theta^*} \right|$$

Q.E.D.

**Proposición 97.** *Sean dos haces planos de partículas que están lanzados uno contra el otro de forma colineal (en exactamente la misma dirección). Consideraremos que las partículas del primer haz tienen masa  $m_1$ , mientras que las del segundo haz tiene masa  $m_2$ . Supondremos que todas las partículas del primer haz están lanzadas a la misma velocidad y haremos lo mismo con el segundo haz. Si  $m_1 > m_2$  y las colisiones son todas elásticas, entonces la sección eficaz diferencial en el sistema laboratorio está relacionada con la sección eficaz diferencial en el sistema centro de masas por la expresión:*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \right]_{\theta^*=\theta_1^*} \left| \frac{\left[ 1 + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta_1^* + \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \theta_1^*} \right| + \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \right]_{\theta^*=\theta_2^*} \left| \frac{\left[ 1 + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta_2^* + \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \theta_2^*} \right|$$

donde  $\theta_1^*$  y  $\theta_2^*$  son los dos ángulos que se corresponden con  $\theta$  y el subíndice en los corchetes las secciones eficaces diferenciales indica «evaluado en». Nótese que la sección eficaz diferencial es única, lo que pasa es que es preciso evaluarla en dos ángulos diferentes.

*Demostración.* Si  $m_1 > m_2$ , entonces la relación entre  $\theta^*$  y  $\theta$  dada por la proposición 41 en la página 237 no es unívoca; hay dos valores de  $\theta^*$  para uno de  $\theta$ . Por tanto, parte de las partículas que para el sistema laboratorio salen con ángulo  $\theta$ , para el sistema centro de masas saldrán con  $\theta_1^*$  y otra parte saldrá con  $\theta_2^*$ . En consecuencia, para contar todas la partículas que en sistema laboratorio salen con  $\theta$  tendré que sumar las que para el centro de masas salen con  $\theta_1^*$  y las que salen con  $\theta_2^*$ . En consecuencia, por la proposición 95 en la página 242, tendremos:

$$\left[ \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \right]_{\theta} = \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega^*} d\Omega^* \right]_{\theta_1^*} + \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega^*} d\Omega^* \right]_{\theta_2^*}$$

Dividiendo por  $d\Omega$  a ambos lados, obtenemos:

$$\left[ \frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{\theta} = \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \frac{d\Omega^*}{d\Omega} \right]_{\theta_1^*} + \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \frac{d\Omega^*}{d\Omega} \right]_{\theta_2^*}$$

Y para cada uno de estos términos sí que hay una relación unívoca entre  $\theta$  y  $\theta_1^*$  y entre  $\theta$  y  $\theta_2^*$ . En consecuencia, podemos aplicar la proposición 96 en la página 243 y llegamos al enunciado. Q.E.D.

### 4.5.3. Partículas «rechazadas» del blanco

Si tenemos dos haces de partículas que lanzamos unos contra otros, a veces, dependiendo de las razón entre las masas de las partículas de los haces  $\frac{m_1}{m_2}$ , es posible que salgan «rebotadas» o «rechazadas» partículas del segundo haz. En ese caso, nos gustaría saber cuántas partículas de dicho segundo haz salen en un determinado ángulo sólido  $d\Omega^*$  (medido según el sistema centro de masas) o para un  $d\Omega$  (medido desde el sistema laboratorio). Para hacer dicho cálculo ya sabemos que conviene conocer la sección eficaz diferencial de las partículas «rechazadas». Para hallar dicha sección eficaz diferencial recurriríamos al sistema laboratorio o al sistema centro de masas (donde podemos aplicar los conocimientos del tema pasado) y seguramente intentaríamos aplicar la proposición 81 en la página 204 si las partículas con las que trabajamos son lo suficientemente buenas. En cualquier caso, no vamos a hablar de eso ahora (pues es temario del tema anterior). Únicamente vamos a hallar cuál es la relación entre la sección eficaz diferencial para los blancos rechazados según el sistema laboratorio y según el sistema centro de masas.

**Proposición 98.** *Sean dos haces planos de partículas que están lanzados uno contra el otro de forma colineal (en exactamente la misma dirección). Consideraremos que las partículas del primer haz tienen masa  $m_1$ , mientras que las del segundo haz tiene masa  $m_2$ . Supondremos que todas las partículas del primer haz están lanzadas a la misma velocidad y haremos lo mismo con el segundo haz. Si las colisiones son todas elásticas, entonces la sección eficaz diferencial de las partículas «rechazadas» en el sistema laboratorio está relacionada con la sección eficaz diferencial de las partículas «rechazadas» en el sistema centro de masas por la expresión:*

$$\left[ \frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{rechazadas} = \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \right]_{rechazadas} 4 \cos \alpha$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de retroceso.

*Demostración.* Partimos de la proposición 95 en la página 242, de forma que tenemos:

$$\left[ \frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{\text{rechazadas}} d\Omega = \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \right]_{\text{rechazadas}} d\Omega^* \Leftrightarrow \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{\text{rechazadas}} = \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \right]_{\text{rechazadas}} \frac{d\Omega^*}{d\Omega}$$

Nuestro objetivo es, por tanto, estudiar el cociente  $\frac{d\Omega^*}{d\Omega}$ . Por la proposición 78 en la página 201, podemos expresar el ángulo sólido en coordenadas esféricas, obteniendo:

$$\frac{d\Omega^*}{d\Omega} = \frac{\sin \theta^* d\theta^* d\varphi^*}{\sin \alpha d\alpha d\varphi}$$

Ahora, nos damos cuenta de que el ángulo  $\varphi$  es el mismo en ambos sistemas de referencia, por tanto:

$$\varphi = \varphi^* \Rightarrow d\varphi = d\varphi^*$$

En consecuencia, la expresión anterior queda:

$$\frac{d\Omega^*}{d\Omega} = \frac{\sin \theta^* d\theta^*}{\sin \alpha d\alpha} = \left| \frac{d(\cos \theta^*)}{d(\cos \alpha)} \right|$$

donde los valores absolutos se deben a que la sección eficaz diferencial debe ser siempre positiva, por tanto, el factor  $\frac{d\Omega^*}{d\Omega}$  que relaciona dos secciones eficaces diferenciales debe ser positiva. Sin embargo, el cociente  $\frac{d(\cos \theta^*)}{d(\cos \alpha)}$  puede ser negativo o positivo dependiendo del caso.

Hallamos la relación entre  $\theta^*$  y  $\alpha$  para el caso de colisiones elásticas en el teorema 26 en la página 233:

$$\theta^* + 2\alpha = \pi \Leftrightarrow \theta^* = \pi - 2\alpha$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \cos \theta^* &= \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos(2\alpha) = -\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = -2\cos^2 \alpha + \underbrace{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}_{=1} \\ &= 1 - 2\cos^2 \alpha \end{aligned}$$

Llamando  $z = \cos \alpha$ , tenemos:

$$\frac{d(\cos \theta^*)}{d(\cos \alpha)} = \frac{d}{dz} (1 - 2z^2) = -4z = -4\cos \alpha$$

Por ende:

$$\frac{d\Omega^*}{d\Omega} = \left| \frac{d(\cos \theta^*)}{d(\cos \alpha)} \right| = |-4\cos \alpha| = 4\cos \alpha$$

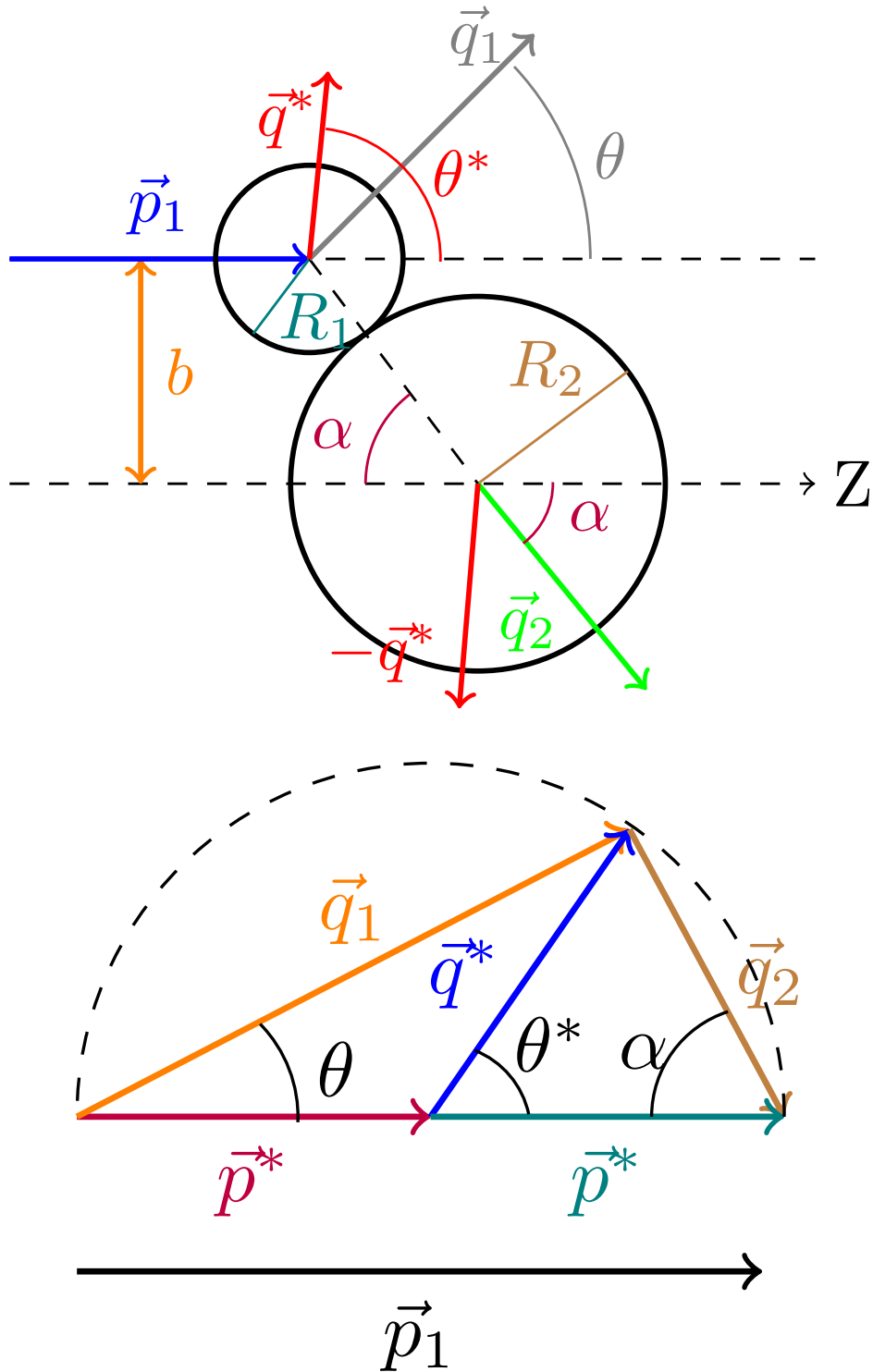
En conclusión:

$$\left[ \frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{\text{rechazadas}} = \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \right]_{\text{rechazadas}} \frac{d\Omega^*}{d\Omega} = \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \right]_{\text{rechazadas}} 4\cos \alpha$$

*Q.E.D.*

#### 4.5.4. Ejemplos

**Ejemplo 36.** Consideremos dos haces de esferas rígidas dirigidos el uno contra el otro. Las esferas del primer haz tienen radio  $R_1$  mientras que las esferas del segundo haz tienen radio  $R_2$ . Supondremos que los choques son elásticos.



Llamando  $R := R_1 + R_2$ , podemos relacionar el parámetro de impacto  $b$  con  $\alpha$  como sigue:

$$b = R \sin \alpha$$

Como el choque es elástico, por el teorema 26 en la página 233, tenemos que:

$$\theta^* + 2\alpha = \pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta^*}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \frac{\theta^*}{2}$$



Así, tenemos:

$$b = R \cos \frac{\theta^*}{2}$$

Como las esferas tienen simetría axial respecto a la dirección incidente, podemos aplicar la proposición 81 en la página 204, obteniendo la sección eficaz diferencial bajo el sistema centro de masas:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{b}{\sin \theta^*} \left| \frac{db}{d\theta^*} \right| = \frac{R \cos \frac{\theta^*}{2}}{\sin \theta^*} \left| -\frac{1}{2} R \sin \frac{\theta^*}{2} \right| = \frac{R^2}{4 \sin \theta^*} 2 \sin \frac{\theta^*}{2} \cos \frac{\theta^*}{2} = \frac{R^2 \sin \theta^*}{4 \sin \theta^*} = \frac{R^2}{4}$$

Aplicando la proposición 96 en la página 243, tenemos que la sección eficaz diferencial en el sistema laboratorio es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \left| \frac{\left[ 1 + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta^* + \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \theta^*} \right| = \frac{R^2}{4} \left| \frac{\left[ 1 + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta^* + \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \theta^*} \right|$$

Imaginemos que ahora queremos hallar la sección eficaz diferencial de retroceso en sistema laboratorio. Para ello, como las esferas tienen simetría axial respecto a la dirección incidente, podemos aplicar la proposición 81 en la página 204, obteniendo:

$$\left[ \frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{\text{rechazadas}} = \frac{b}{\sin \alpha} \left| \frac{db}{d\alpha} \right|$$

donde era  $b = R \sin \alpha$  como hemos visto al principio de este ejemplo. Así:

$$\left[ \frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{\text{rechazadas}} = \frac{R \sin \alpha}{\sin \alpha} |-R \cos \alpha| = R^2 \cos \alpha$$

Para hallar la sección eficaz diferencial de retroceso en el sistema centro de masas, podemos aplicar la proposición 98 en la página 245, con lo que llegamos a:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{\text{rechazadas}} &= \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \right]_{\text{rechazadas}} 4 \cos \alpha \Leftrightarrow R^2 \cos \alpha = 4 \cos \alpha \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \right]_{\text{rechazadas}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \right]_{\text{rechazadas}} = \frac{R^2}{4} \end{aligned}$$

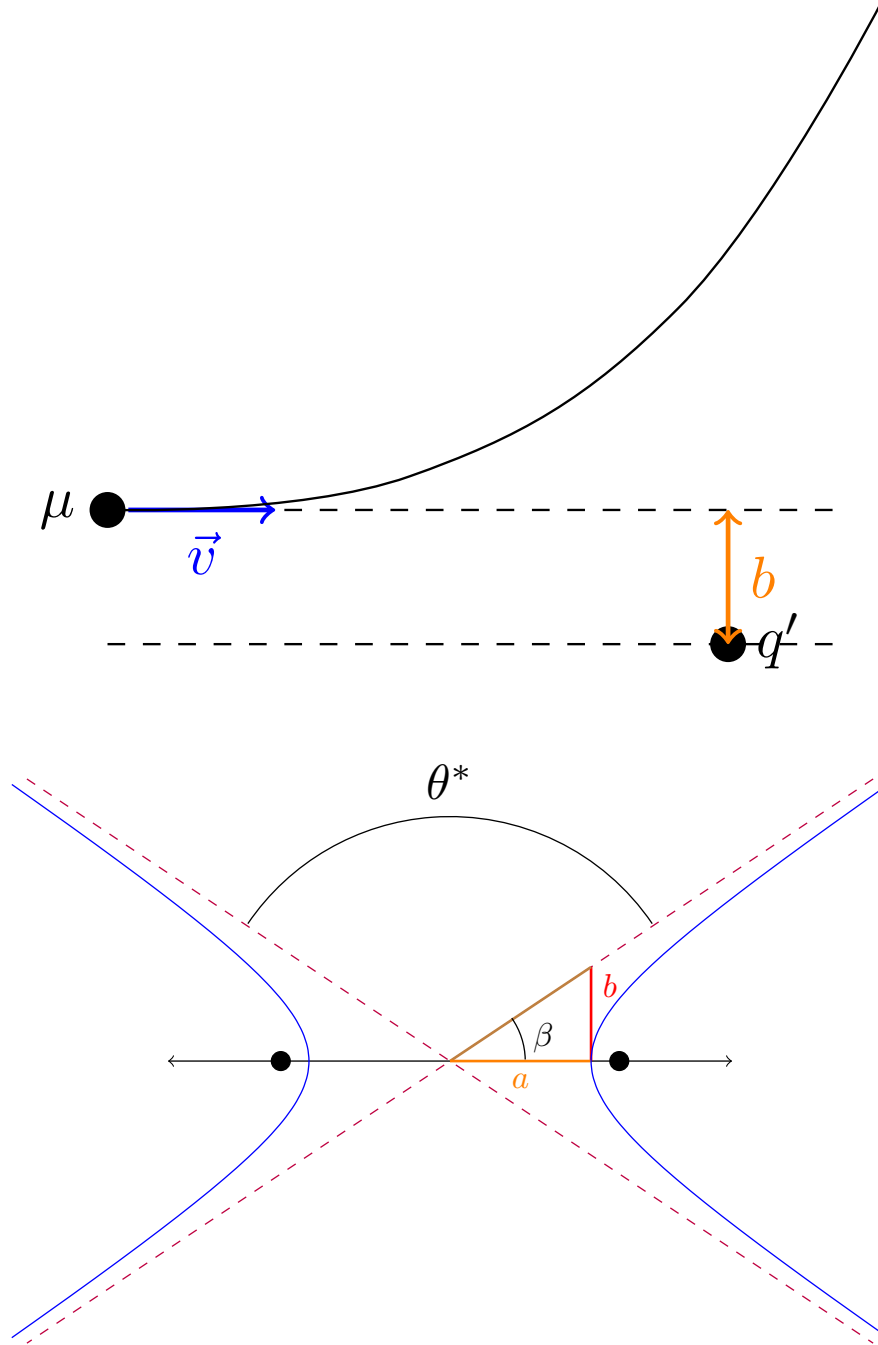
Por lo que vemos, desde el sistema de referencia centro de masas, para nuestro ejemplo se da:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \right]_{\text{rechazadas}} = \frac{R^2}{4}$$

Y, además, ambas secciones eficaces diferenciales son isótropas; es decir, no dependen del ángulo.

**Ejemplo 37.** Tenemos dos haces de partículas cargadas de la misma masa  $m$  y de la misma carga  $q$ . Disparemos ambos haces de partículas uno contra el otro de forma colineal. Queremos calcular la sección eficaz diferencial tanto desde el centro de masas como desde el sistema laboratorio. También deseamos hacer lo mismo para la sección eficaz diferencial de retroceso.

Si estudiemos el caso de dos partículas, por el teorema 22 en la página 215, nuestro problema es equivalente a tener una partícula sin masa, inmóvil y de carga  $q$  generando el campo y tener otra partícula de masa  $\mu = \frac{m}{2}$  y carga  $q$  orbitando a distancia  $r$  de la carga generadora del campo.



En la sección 3.5.4 en la página 212, ya hallamos la sección eficaz diferencial correspondiente a esta situación. De forma que obtenemos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \left[ \frac{Kq^2}{mv^2 \sin^2 \frac{\theta^*}{2}} \right]^2$$

Aplicando la proposición 96 en la página 243, obtenemos que en sistema laboratorio la sección eficaz diferencial queda:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \left| \frac{\left[ 1 + 2\frac{m_1}{m_2} \cos \theta^* + \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \theta^*} \right| = \left[ \frac{Kq^2}{mv^2 \sin^2 \frac{\theta^*}{2}} \right]^2 \left| \frac{\left[ 1 + 2\frac{m_1}{m_2} \cos \theta^* + \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \theta^*} \right|$$

como en nuestro caso es  $m_1 = m_2$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left[ \frac{Kq^2}{mv^2 \sin^2 \frac{\theta^*}{2}} \right]^2 \left| \frac{[2 + 2 \cos \theta^*]^{\frac{3}{2}}}{1 + \cos \theta^*} \right| = \left[ \frac{Kq^2}{mv^2 \sin^2 \frac{\theta^*}{2}} \right]^2 \left| \frac{2^{\frac{3}{2}} [1 + \cos \theta^*]^{\frac{3}{2}}}{1 + \cos \theta^*} \right| = \\ &= \left[ \frac{Kq^2}{mv^2 \sin^2 \frac{\theta^*}{2}} \right]^2 = 2^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \cos \theta^*} \end{aligned}$$

Según la proposición 94 en la página 237, cuando es  $m_1 = m_2$ , se da  $\theta = \frac{\theta^*}{2}$ , de forma que tenemos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[ \frac{Kq^2}{mv^2 \sin^2 \theta} \right]^2 2^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \cos 2\theta}$$

Por el teorema 26 en la página 233, tenemos:

$$\theta^* + 2\alpha = \pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta^*}{2} \Rightarrow \sin \frac{\theta^*}{2} = \cos \alpha$$

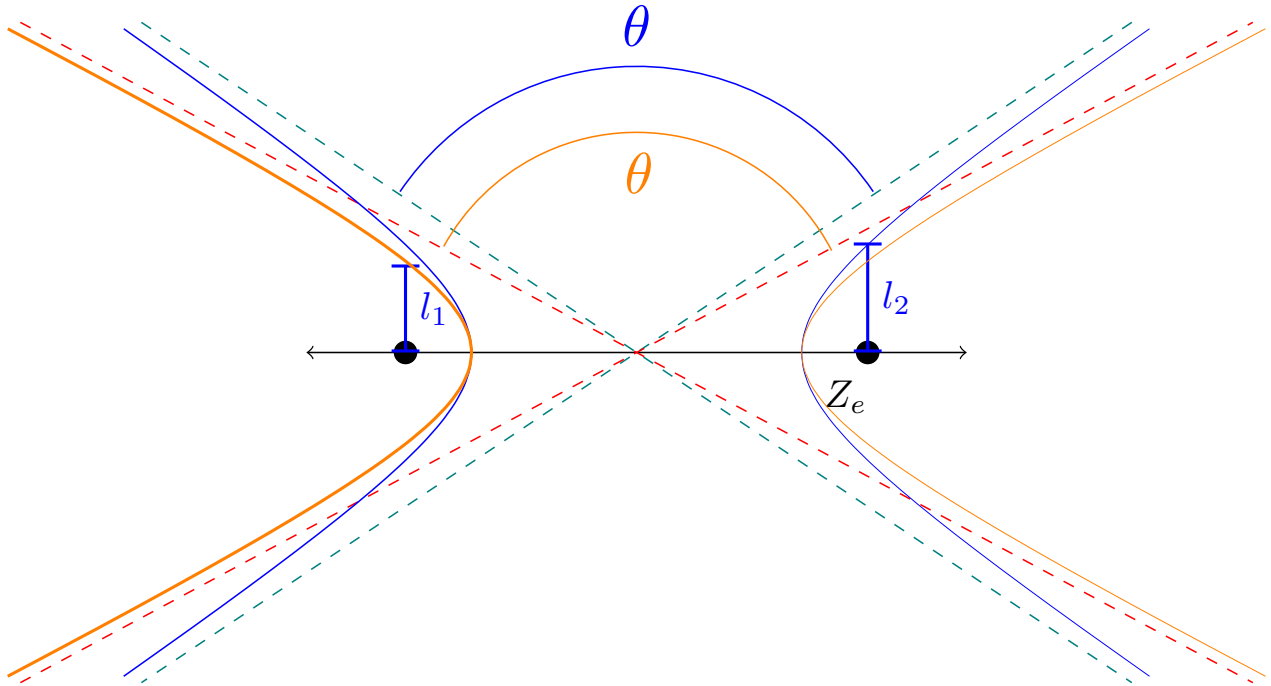
De esta forma, sabemos que la sección eficaz diferencial de retroceso, viene dada por:

$$\left[ \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \right]_{\text{rechazadas}} = \left[ \frac{Kq^2}{mv^2 \cos^2 \alpha} \right]^2$$

Por la proposición 98 en la página 245, obtenemos que:

$$\left[ \frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{\text{rechazadas}} = \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \right]_{\text{rechazadas}} 4 \cos \alpha = \left[ \frac{Kq^2}{mv^2 \cos^2 \alpha} \right]^2 4 \cos \alpha$$

Examinemos con más detalle las trayectorias que describen las partículas. Vamos a realizar un razonamiento similar al realizado en la demostración de la proposición 85 en la página 224.



La trayectoria de la órbita relativa viene dada por:

$$r [e \cos (\theta - \theta_0) - 1] = l$$

Cuando  $r \rightarrow \infty$ , debe ser  $e \cos(\theta - \theta_0) - 1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \cos(\theta - \theta_0) = \frac{1}{e}$ . Además, nótese que según el dibujo que hemos hecho es  $\theta_0 = \pi$ . Recordemos que, por la proposición 84 en la página 216 era:

$$\vec{r}_1^* = \frac{m_2}{M} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2^* = -\frac{m_1}{M} \vec{r}$$

Si multiplicamos la ecuación de la trayectoria por  $\frac{m_2}{M}$ , obtenemos:

$$\underbrace{\frac{m_2}{M} r}_{=: r_1^*} \left[ e \cos \left( \theta - \underbrace{\theta_0}_{=\pi} \right) - 1 \right] = \underbrace{\frac{m_2}{m_1 + m_2} l}_{=: l_1}$$

Análogamente, multiplicando por  $\frac{m_1}{M}$ :

$$\underbrace{\frac{m_1}{M} r}_{=: r_2^*} \left[ e \cos \left( \theta - \underbrace{\theta_0}_{=0} \right) - 1 \right] = \underbrace{\frac{m_1}{M} l}_{=: l_2}$$

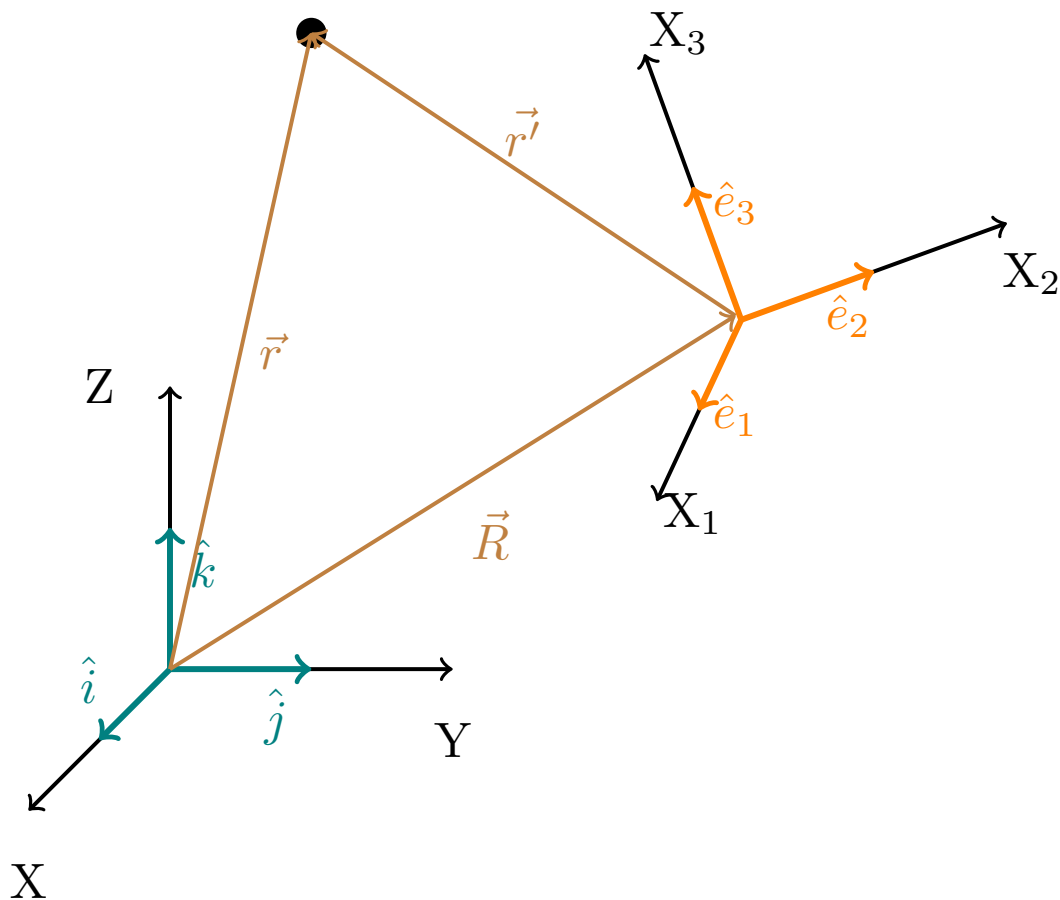
Nótese que en ambos casos obtenemos una hipérbola de la misma excentricidad, únicamente cambia  $l$ . Por ello, el ángulo que forman entre sí las asíntotas de la hipérbola es el mismo en el sistema centro de masas que visto desde el sistema laboratorio (estudiando el movimiento relativo), este ángulo es  $\theta^*$ .

## Capítulo 5

# Sistemas de referencia no inerciales

### 5.1. Rotación de sistemas de referencia

Sea  $S : (O; x, y, z)$  un sistema de referencia inercial ortonormal con origen en  $O$  y con coordenadas  $x, y, z$ . Análogamente sea  $S' : (O'; x_1, x_2, x_3)$  un sistema de referencia ortonormal no inercial con origen en  $O'$  y con coordenadas  $x_1, x_2, x_3$ . Llamaremos  $X, Y, Z$  a los ejes del sistema de referencia  $S$  y llamaremos  $X_1, X_2, X_3$  a los ejes del sistema de referencia  $S'$ . Adicionalmente, llamaremos  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  a los vectores ortonormales de la base de  $\mathbb{R}^3$  asociada a  $S$  y llamaremos  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  a los vectores ortonormales de la base de  $\mathbb{R}^3$  asociada a  $S'$ . Asimismo, llamaremos  $\vec{r}$  al vector posición de una partícula desde el sistema de referencia  $S$  y denotaremos con  $\vec{r}'$  al vector posición de esa misma partícula desde el sistema de referencia  $S'$ . Por último llamaremos  $\vec{R}$  al vector que une el origen de  $S$  con el origen de  $S'$ . Es decir,  $\vec{R} = \overrightarrow{OO'}$ . De forma que se cumple  $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$ .



Con lo visto hasta ahora, la posición de una partícula vendría dada en ambos sistemas de la siguiente forma:

$$S : \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$S' : \vec{r}' = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3$$

Utilizaremos la notación de Leibniz para designar una derivada temporal según el sistema  $S$  y la notación de Newton para indicar una derivada temporal según el sistema  $S'$ . Como para el sistema  $S'$ , el está quieto, siempre será:

$$\dot{\hat{e}}_i = \vec{0} \quad \forall i = 1, 2, 3$$

Sin embargo, en general, para el sistema  $S$  será:

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_i \neq \vec{0} \quad \forall i = 1, 2, 3$$

*Observación 74.* Si un vector  $\vec{u}$  no es constante para  $S'$ , entonces al menos una de sus coordenadas  $x_1, x_2, x_3$  no puede ser constante. Análogamente, si  $\vec{u}$  no es constante para  $S$ , entonces al menos una de sus coordenadas  $x, y, z$  no puede ser constante.

*Observación 75.* La derivada de un escalar  $\lambda$  respecto al tiempo es la misma en ambos sistemas de referencia, porque los escalares no dependen de una base.

$$\frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda}$$

En particular esto es cierto para las coordenadas  $x, y, z, x_1, x_2, x_3$  que, como son escalares, no dependen de ninguna base.

### 5.1.1. Rotaciones

**Teorema 27.** Sean  $S : (O; x, y, z)$  un sistema de referencia inercial ortonormal y  $S' : (O, x_1, x_2, x_3)$  un sistema de referencia ortonormal no inercial tales que su origen es común  $O = O'$ ; es decir, es  $\vec{R} = \vec{0}$ . Entonces, existe un  $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$  tal que la variación de los vectores unitarios de  $S'$  según el sistema inercial  $S$  viene dada por la expresión:

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_i \quad \forall i = 1, 2, 3$$

*Demostración.* Como  $\frac{d\hat{e}_i}{dt}$  es un vector, en particular, podemos expresarlo como combinación lineal de la base  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ . Entonces tenemos que  $\exists a_{kl} \quad \forall k, l = 1, 2, 3$  tales que:

$$\frac{d\hat{e}_k}{dt} = \sum_{l=1}^3 a_{kl} \hat{e}_l$$

Por otra parte, como la base del sistema  $S'$  es ortonormal, tenemos:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

De esta forma, derivando a ambos lados en la ecuación anterior, obtenemos al aplicar la regla del producto:

$$\hat{e}_i \cdot \frac{d\hat{e}_j}{dt} + \frac{d\hat{e}_i}{dt} \cdot \hat{e}_j = 0$$

Pero, por lo hallado antes, podemos expresar las derivadas de los vectores como combinación lineal de la base de  $S'$ , por lo que llegamos a:

$$\begin{aligned} \hat{e}_i \cdot \sum_{k=1}^3 a_{jk} \hat{e}_k + \sum_{k=1}^3 a_{ik} \hat{e}_k \cdot \hat{e}_j &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^3 a_{jk} \hat{e}_k \cdot \hat{e}_i + \sum_{k=1}^3 a_{ik} \hat{e}_k \cdot \hat{e}_j &= 0 \end{aligned}$$

Como era  $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ , obtenemos que lo anterior es equivalente a:

$$a_{ji} + a_{ij} = 0$$

y lo anterior debe cumplirse para todo  $i, j$ ; por lo que tenemos:

$$a_{ji} + a_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ji} = -a_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \ni i \neq j \\ 2a_{ii} = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

En consecuencia, la matriz formada por los  $a_{ij}$  es antisimétrica:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

y así, sólo hay tres elementos linealmente independientes. Definimos el vector  $\vec{\omega}$  como:

$$\vec{\omega} := (-a_{23}, a_{13}, -a_{12})$$

De esta forma:

$$\vec{\omega} \times \hat{e}_1 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -a_{23} & a_{13} & -a_{12} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_{12}\hat{e}_2 - a_{13}\hat{e}_3$$

$$\frac{d\hat{e}_1}{dt} = (a_{ij}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -a_{12}\hat{e}_2 - a_{13}\hat{e}_3$$

$$\vec{\omega} \times \hat{e}_2 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -a_{23} & a_{13} & -a_{12} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_{12}\hat{e}_1 - a_{23}\hat{e}_3$$

$$\frac{d\hat{e}_2}{dt} = (a_{ij}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{12}\hat{e}_1 - a_{23}\hat{e}_3$$

$$\vec{\omega} \times \hat{e}_3 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -a_{23} & a_{13} & -a_{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{13}\hat{e}_1 + a_{23}\hat{e}_2$$

$$\frac{d\hat{e}_3}{dt} = (a_{ij}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{13}\hat{e}_1 + a_{23}\hat{e}_2$$

Con lo que efectivamente existe  $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$  tal que:

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_i \quad \forall i = 1, 2, 3$$

*Q.E.D.*

*Observación 76.* Nótese que, en general, las componentes  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  del vector  $\vec{\omega}$  que aparece en el teorema 27 en la página anterior **no** representan la variación de ningún ángulo.

**Ejemplo 38.** Suponemos  $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_3$ . En este caso, aplicando el teorema 27 en la página anterior, obtenemos:

$$\frac{d\hat{e}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_1 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega\hat{e}_2$$

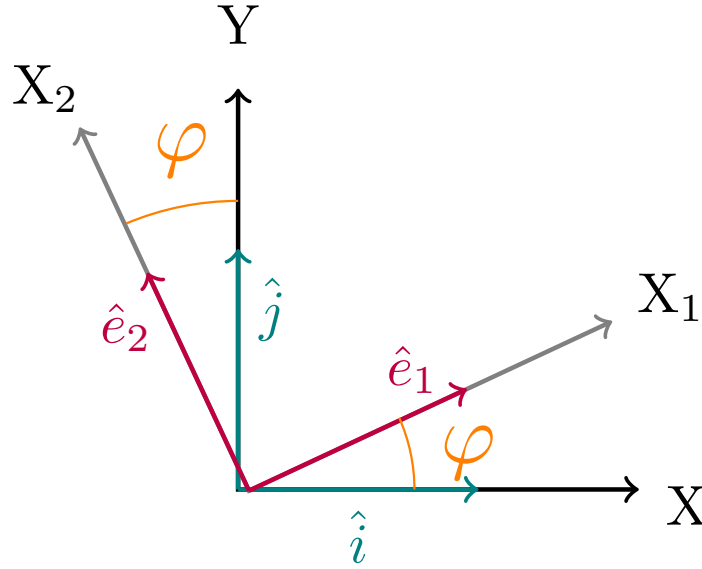
$$\frac{d\hat{e}_2}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_2 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\omega\hat{e}_1$$

$$\frac{d\hat{e}_3}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_3 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Si tomamos  $\vec{r} = \hat{e}_1$ , entonces, por el teorema anterior, tenemos 27 en la página 253:

$$\frac{d\hat{e}_1}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega \hat{e}_2 = \vec{\omega} \times \hat{e}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Es decir, en este ejemplo, los ejes  $X_1$  y  $X_2$  están girando en torno al eje  $X_3$ . Por tanto, en este caso,  $\omega$  sí que representa la variación de un ángulo.



**Proposición 99.** Sean  $S : (O; x, y, z)$  un sistema de referencia inercial ortonormal y  $S' : (O, x_1, x_2, x_3)$  un sistema de referencia ortonormal no inercial tales que su origen es común  $O = O'$ ; es decir, es  $\vec{R} = \vec{0}$ . Sea  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  un vector cualquiera. Entonces:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\vec{u}} + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

*Demostración.* Por nuestros conocimientos de álgebra lineal, sabemos que existen  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  tales que:

$$\vec{u} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i$$

Por una parte, por la regla del producto, tenemos:

$$\dot{\vec{u}} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \hat{e}_i + \sum_{i=1}^3 x_i \dot{\hat{e}}_i$$

Sin embargo, como los vectores  $\hat{e}_i$  son constantes para  $S'$ , deber ser  $\dot{\hat{e}}_i = \vec{0} \forall i = 1, 2, 3$ . En consecuencia:

$$\dot{\vec{u}} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \hat{e}_i$$

Por otra parte, por la regla del producto, tenemos:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i}{dt} \hat{e}_i + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d\hat{e}_i}{dt}$$



Por la observación 75 en la página 253, tenemos que lo anterior es igual a:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \hat{e}_i}_{=\dot{\vec{u}}} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d\hat{e}_i}{dt}$$

donde el primer sumatorio es justo cómo varia el vector  $\vec{u}$  para  $S'$ , es decir,  $\dot{\vec{u}}$ . Ahora, aplicando el teorema 27 en la página 253 al segundo sumatorio, obtenemos:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\vec{u}} + \sum_{i=1}^3 x_i \vec{\omega} \times \hat{e}_i = \dot{\vec{u}} + \vec{\omega} \times \left( \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i \right) = \dot{\vec{u}} + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

*Q.E.D.*

**Corolario 42.** Sean  $S : (O; x, y, z)$  un sistema de referencia inercial ortonormal y  $S' : (O, x_1, x_2, x_3)$  un sistema de referencia ortonormal no inercial tales que su origen es común  $O = O'$ ; es decir, es  $\vec{R} = \vec{0}$ . Sea  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  un vector cualquiera tal que es constante para el sistema de referencia  $S'$ . Entonces:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}$$

*Demostración.* Partimos de la proposición 99 en la página anterior. De forma que sabemos:

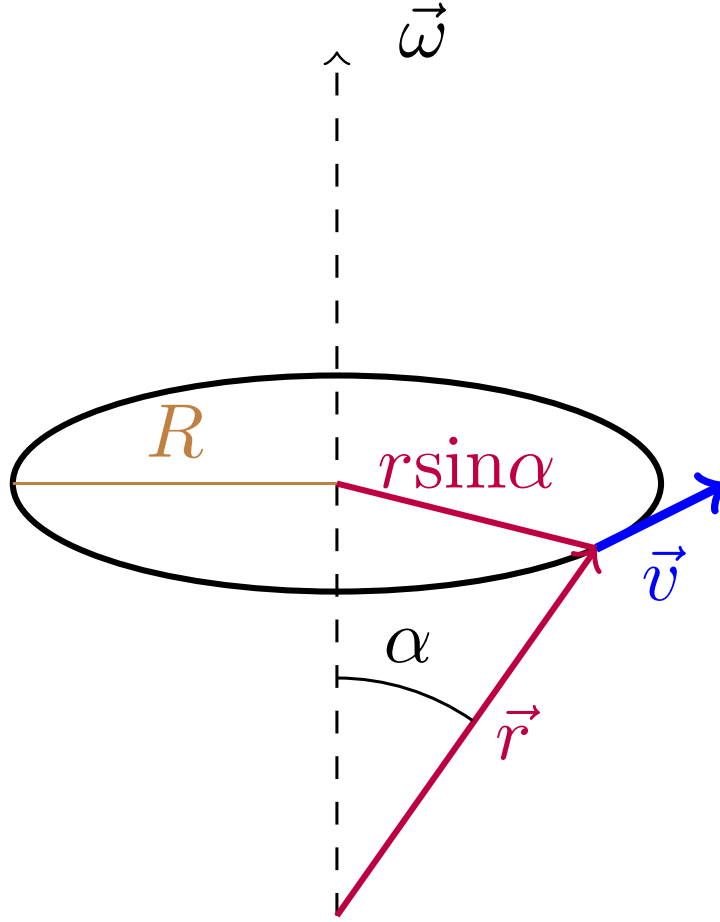
$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\vec{u}} + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

Pero si  $\vec{u}$  es constante para el sistema de referencia  $S'$ , entonces debe ser  $\dot{\vec{u}} = \vec{0}$ , de forma que llegamos a:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}$$

*Q.E.D.*

*Observación 77.* Todo vector  $\vec{u}$  que satisfaga la ecuación dada en el corolario 42, visto desde el sistema de referencia  $S$ , es un vector de longitud constante que gira en torno al vector  $\vec{\omega}$  con velocidad angular  $\omega$ .



### 5.1.2. Traslaciones

**Teorema 28.** Sean  $S : (O; x, y, z)$  un sistema de referencia ortonormal y  $S' : (O', x_1, x_2, x_3)$  otro sistema de referencia ortonormal tales que están alineados; es decir, se cumple  $\hat{x} = \hat{e}_1$ ,  $\hat{y} = \hat{e}_2$  y  $\hat{z} = \hat{e}_3$ . Entonces:

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \dot{\hat{e}}_i = \vec{0} \quad \forall i = 1, 2, 3$$

*Demostración.* Trivialmente para  $S'$  se da  $\dot{\hat{e}}_i = \vec{0} \quad \forall i = 1, 2, 3$  y trivialmente para  $S$  se da  $\frac{d\hat{x}}{dt} = \vec{0}$ ,  $\frac{d\hat{y}}{dt} = \vec{0}$  y  $\frac{d\hat{z}}{dt} = \vec{0}$ . Como son  $\hat{x} = \hat{e}_1$ ,  $\hat{y} = \hat{e}_2$  y  $\hat{z} = \hat{e}_3$ , se cumple el enunciado. Q.E.D.

*Observación 78.* Si tenemos dos sistemas de referencia alineados  $S$  y  $S'$ , como sus bases vectoriales asociadas son las mismas, un vector tendrá la misma descomposición, es decir, las coordenadas del vector serán las mismas en ambos sistemas. Lo que ocurre, es que si yo quiero hablar de un punto en el espacio (por ejemplo, la posición de una partícula), entonces habrá dos vectores diferentes  $\vec{u}$  para el sistema  $S$  y un  $\vec{u}'$  para el sistema  $S'$  que me describan el mismo punto. No obstante, las coordenadas del vector  $\vec{u}$  serán las mismas en ambos sistemas y lo mismo ocurrirá con las coordenadas de  $\vec{u}'$ .

**Proposición 100.** Sean  $S : (O; x, y, z)$  un sistema de referencia ortonormal y  $S' : (O', x_1, x_2, x_3)$  otro sistema de referencia ortonormal tales que están alineados; es decir, se cumple  $\hat{x} = \hat{e}_1$ ,  $\hat{y} = \hat{e}_2$  y  $\hat{z} = \hat{e}_3$ . Sean  $\vec{R} = \overrightarrow{OO'}$ ,  $\vec{u}$  un vector cualquiera que tiene su origen en  $O$  y  $\vec{u}'$  el vector que tiene su origen en  $O'$  y su extremo en el extremo de  $\vec{u}$ . Entonces:

$$\dot{\vec{u}} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{u}'}{dt} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{u}'}$$

*Demostración.* Como son  $\hat{x} = \hat{e}_1$ ,  $\hat{y} = \hat{e}_2$  y  $\hat{z} = \hat{e}_3$  y, como por la observación 78 en la página anterior, las coordenadas de cualquier vector son las mismas en ambos sistemas de referencia, derivar con respecto a un sistema de referencia es igual que derivar con respecto al otro sistema de referencia. En consecuencia:

$$\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt} \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \quad (5.1.1)$$

y, en particular, es:

$$\dot{\vec{u}} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Tenemos que se cumple:

$$\vec{u} = \vec{R} + \vec{u}'$$

Derivando, tenemos:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{u}'}{dt}$$

Por la ecuación 5.1.1, tenemos que lo anterior es equivalente a:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{u}}'$$

*Q.E.D.*

### 5.1.3. Ejemplos

**Ejemplo 39** (Fuerza de Lorentz y ciclotrón). Consideremos una partícula de carga  $q$  y velocidad  $\vec{v}$  inmersa en un campo magnético  $\vec{B}$ . Por la ley de Lorentz, la fuerza que actúa sobre dicha partícula es:

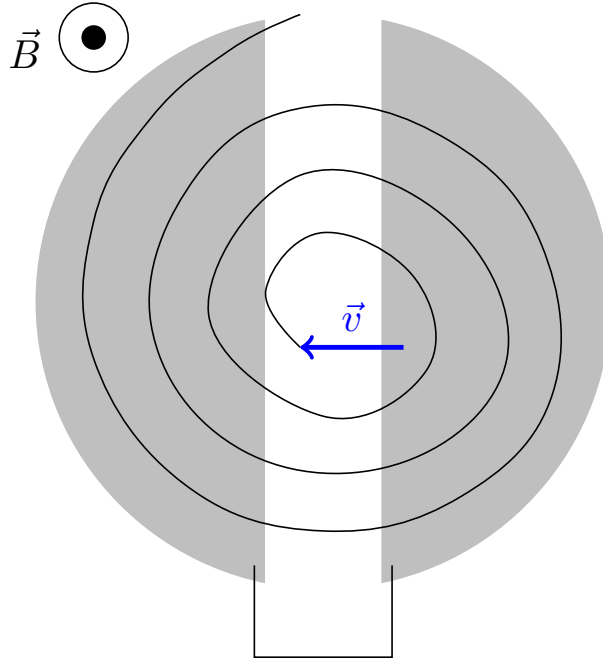
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{-\frac{q}{m}\vec{B}}_{=:\vec{\omega}_c} \times \vec{v} = \vec{\omega}_c \times \vec{v}$$

donde  $\omega_c = \frac{qB}{m} = \text{cte.}$  Así una partícula sobre la que actúa una fuerza magnética constante siempre describirá un movimiento circular.

Por otra parte es:

$$\omega_c v = \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow R = \frac{v^2}{\omega_c v} = \frac{v}{\omega_c} = \frac{mv}{qB}$$

Este es el principio que se usa en el ciclotrón. Veámoslo gráficamente:



donde sometemos ambas partes del ciclotrón a una diferencia de potencial  $V = V_0 \cos \omega_c t$ . La velocidad máxima que se puede obtener es:

$$v_{\text{máx}} = \frac{qBR}{m}$$

Cuando la velocidad de la partícula es cercana a la de la luz, hay que tener en cuenta efectos relativistas y entonces la frecuencia  $\omega_c$  disminuye si la velocidad aumenta.

**Ejemplo 40** (Fuerza eléctrica y magnética). Ahora, suponemos que tenemos una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  sometida a un campo eléctrico  $\vec{E}$  y a un campo magnético  $\vec{B}$ . De esta forma, la fuerza que actúa sobre la partícula es:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{E} - \frac{q}{m} \vec{B} \times \vec{v}$$

Si, ahora suponemos que  $\vec{B} = B\hat{k}$  y  $\vec{E} = E\hat{j}$ , tenemos:

$$-\frac{q}{m} \vec{B} \times \vec{v} = \left( \frac{q}{m} v_y B, -\frac{q}{m} v_x B, 0 \right)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} v_y B$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m} E - \frac{q}{m} v_x B$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0$$

Si, además es  $E = 0$ , podemos hallar  $v_y$  integrando:

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m} v_x B \Leftrightarrow v_y = -\frac{q}{m} B \underbrace{\int v_x dt}_{=x} = -\frac{q}{m} x B + C$$

De esta forma, tenemos:

$$\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} v_y B = \frac{q}{m} \left( -\frac{q}{m} x B + C \right) B = -\left( \frac{qB}{m} \right)^2 x + C'$$

En consecuencia, hemos llegado a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{q}{m}B\right)^2 x = \text{cte}$$

que es justo la ecuación de un oscilador armónico. Así, existen  $\omega, \phi \in \mathbb{R}$  que permiten expresar  $v_x$  y  $v_y$  como:

$$v_x = v_0 \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow x = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t + \phi) + K_1$$

$$v_y = -v_0 \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow y = \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t + \phi) + K_2$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  son constantes. Como podemos ver, claramente la trayectoria es una circunferencia, como esperábamos.

Ahora, volvemos al caso  $E \neq 0$ , para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ahora, lo que hacemos es un cambio de variable  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_1$  tal que  $\begin{cases} v_{1x} = \frac{E}{B} \\ v_{1y} = 0 \end{cases}$  y así obtenemos las ecuaciones:

$$v_y = v'_y + \underbrace{v_{1y}}_{=0} = v'_y$$

$$v_x = v'_x + v_{1x}$$

$$\begin{cases} \frac{dv'_x}{dt} = \frac{q}{m} v'_y B \\ \frac{dv'_y}{dt} = -\frac{q}{m} v'_x B \end{cases}$$

Llegamos a la misma ecuación diferencial que antes pero con variables  $v'_x$  y  $v'_y$ . De esta forma, las soluciones será de la forma:

$$v'_x = v_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$v'_y = -v_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Y deshaciendo el cambio de variable:

$$v_x = \frac{E}{B} + v_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$v_y = -v_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Resolviendo para el caso particular  $\begin{cases} x(0) = 0, y(0) = 0 \\ v_x(0) = (0), v_y(0) = 0 \end{cases}$ , obtenemos:

$$v_y = 0 \Leftrightarrow \sin \phi = 0 \Leftrightarrow \phi = 0, \pi$$

$$v_x = 0 \Leftrightarrow \frac{E}{B} + v_0 \cos \phi \Leftrightarrow \phi = \pi, v_0 = \frac{E}{B}$$

Así, aplicando  $\sin(x + \pi) = -\sin x$  y  $\cos(x + \pi) = -\cos x$ , llegamos a:

$$v_x = \frac{E}{B} (1 - \cos \omega t) \Rightarrow x(t) = A + \int \frac{E}{B} (1 - \cos \omega t) dt = A + \frac{E}{B} t - \frac{E}{B\omega} \sin \omega t$$

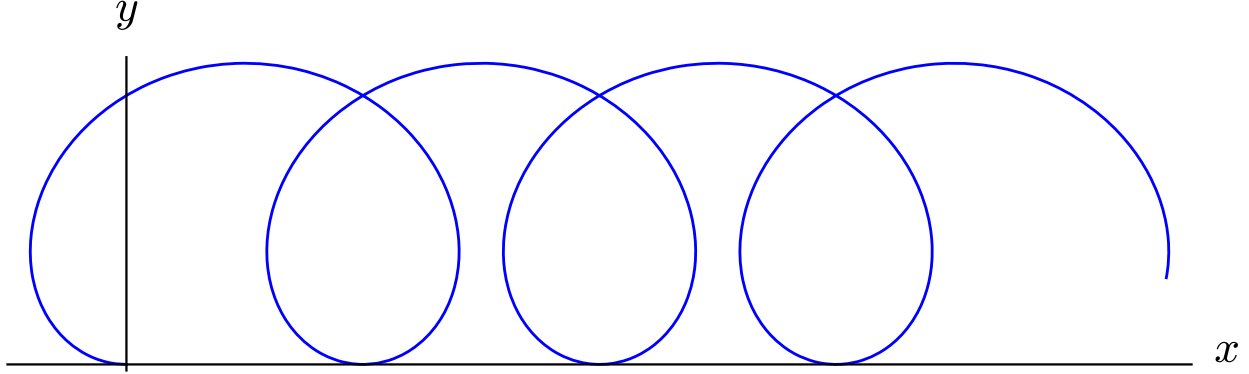
$$v_y = \frac{E}{B} \sin \omega t \Rightarrow C + \int \frac{E}{B} \sin \omega t dt = C - \frac{E}{B} \cos \omega t$$

Como  $x(0) = 0$ , debe ser  $A = 0$ . Y, como  $y(0) = 0$ , necesariamente  $C = \frac{E}{B}$ . Así:

$$x(t) = \frac{E}{B} \left( t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$$

$$y(t) = \frac{E}{B} (1 - \cos \omega t)$$

Gráficamente, la trayectoria queda:



#### 5.1.4. Caso general

**Teorema 29.** Sean  $S : (O; x, y, z)$  un sistema de referencia ortonormal y  $S' : (O', x_1, x_2, x_3)$  otro sistema de referencia ortonormal. Sean  $\vec{R} = \overrightarrow{OO'}$ ,  $\vec{u}$  un vector cualquiera que tiene su origen en  $O$  y  $\vec{u}'$  el vector que tiene su origen en  $O'$  y su extremo en el extremo de  $\vec{u}$ . Entonces:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \dot{\vec{u}}' + \vec{\omega} \times \vec{u}'$$

*Demostración.* Sea  $S'' : (O'; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  un sistema de referencia ortonormal que tiene su origen coincidente con el origen de  $S'$ , pero que está alineado con  $S$ , es decir, la base de  $\mathbb{R}^3$  del sistema de referencia  $S''$  es la misma que la de  $S'$ . De esta forma,  $S''$  no es más que  $S'$  trasladado un vector  $\vec{R}$  y  $S'$  no es más que una rotación aplicada a  $S''$ . Por la proposición 42 en la página 256, sabemos que:

$$\left[ \frac{d\vec{u}'}{dt} \right]_{S''} = \dot{\vec{u}}' + \vec{\omega} \times \vec{u}'$$

Por otra parte, por la proposición 100 en la página 257, tenemos que:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \left[ \frac{d\vec{u}'}{dt} \right]_{S''} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \dot{\vec{u}}' + \vec{\omega} \times \vec{u}'$$

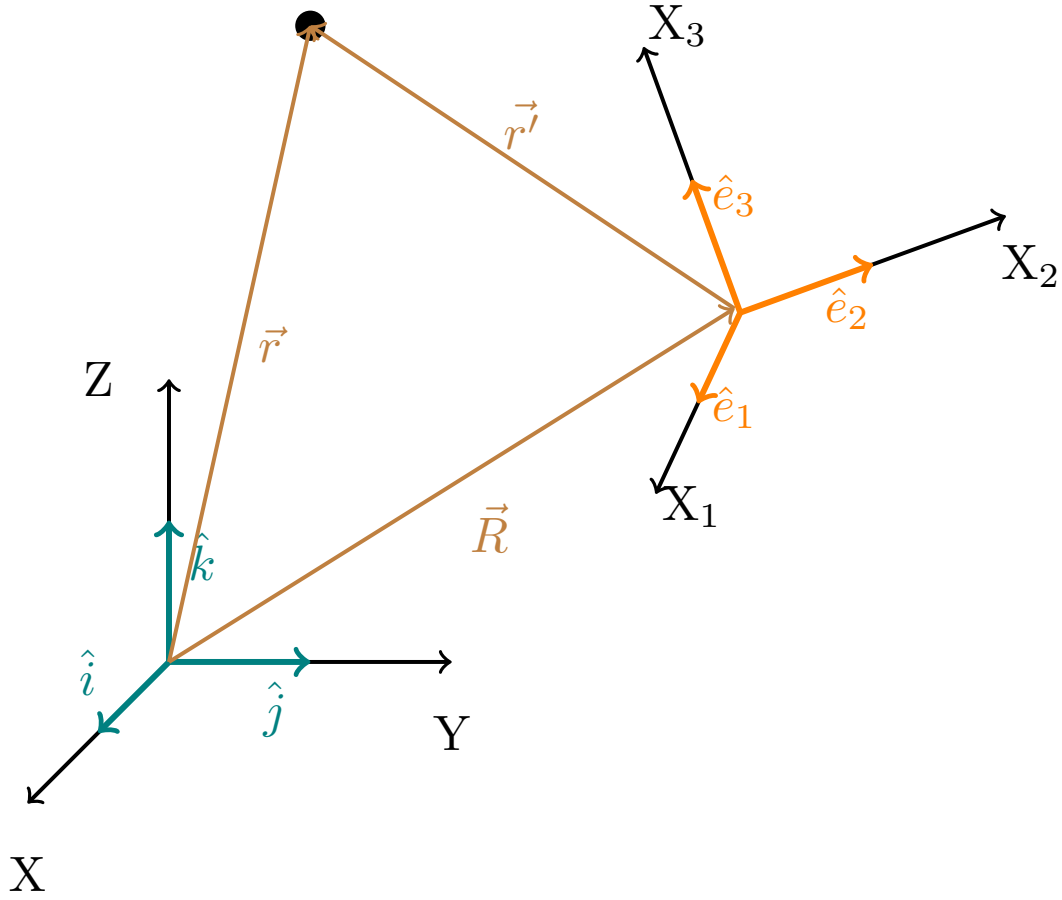
*Q.E.D.*

#### 5.1.5. Comparación de velocidades y aceleraciones

**Proposición 101.** Sean  $S : (O; x, y, z)$  un sistema de referencia ortonormal inercial y  $S' : (O', x_1, x_2, x_3)$  otro sistema de referencia ortonormal. Sean  $\vec{R} = \overrightarrow{OO'}$ ,  $\vec{r}$  el vector que describe la posición de una partícula para el sistema de referencia  $S$  y  $\vec{r}'$  el vector que describe la posición de la misma partícula para el sistema de referencia  $S'$ . Entonces:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \ddot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$$



*Demostración.* Por el teorema 29 en la página anterior, tenemos:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Si volvemos a derivar, obtenemos:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\dot{\vec{r}}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Aplicando la proposición 99 en la página 255, obtenemos:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \ddot{\vec{r}}' + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'}_{= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'} + \underbrace{\vec{\omega} \times \left( \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right)}_{= \frac{d\vec{r}'}{dt} \times \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Como  $\vec{\omega} \times \vec{\omega} = \vec{0}$ , la expresión anterior queda:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \ddot{\vec{r}}' + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

*Q.E.D.*

**Definición 99.** Consideremos la expresión para las aceleraciones de la proposición 101 en la página anterior:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \ddot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$$

1.  $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} =: \vec{a}$  es la aceleración de la partícula medida desde el sistema de referencia  $S$ .
2.  $\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} =: \vec{A}$  es la aceleración relativa entre los sistemas de referencia  $S'$  y  $S$ .
3.  $\ddot{\vec{r}}' =: \vec{a}'$  es la aceleración de la partícula medida desde el sistema de referencia  $S'$ .
4. El término  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  recibe el nombre de **aceleración centrípeta**.
5. El término  $2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$  recibe el nombre de **aceleración de Coriolis**.
6. El término  $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$  recibe el nombre de **aceleración azimutal** o **aceleración de Euler transversal**.

**Teorema 30** (2ª ley de Newton para sistemas de referencia no inerciales).  $S' : (O', x_1, x_2, x_3)$  un sistema de referencia ortonormal no inercial y sea  $\vec{r}'$  la posición de una partícula medida desde  $S'$ . Entonces, se cumple:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$$

donde  $\vec{F}$  es la suma de fuerzas que actúan sobre el sistema y  $\vec{R}$  y  $\vec{\omega}$  vienen dados respecto a un observador inercial cualquiera.

*Demostración.* Sea  $S$  un sistema inercial cualquiera con origen en  $O$  tal que  $\vec{R} = \overrightarrow{OO'}$ , entonces, por la proposición 101 en la página 261, se cumple:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \ddot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$$

Como  $S$  es un sistema de referencia inercial, para él se cumple la segunda ley de Newton (ver axioma 1 en la página 8):

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + m\ddot{\vec{r}}' + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

**Definición 100.** Consideremos la expresión de la segunda ley de Newton para sistemas de referencia no inerciales (ver teorema 30):

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$$

1.  $\vec{F}$  es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula.
2. El término  $-m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = -m\vec{A}$  recibe el nombre de **fuerza de arrastre**.
3. El término  $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  recibe el nombre de **fuerza centrífuga**.
4. El término  $-2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$  recibe el nombre de **fuerza de Coriolis**.
5. El término  $-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$  recibe el nombre de **fuerza azimutal**.

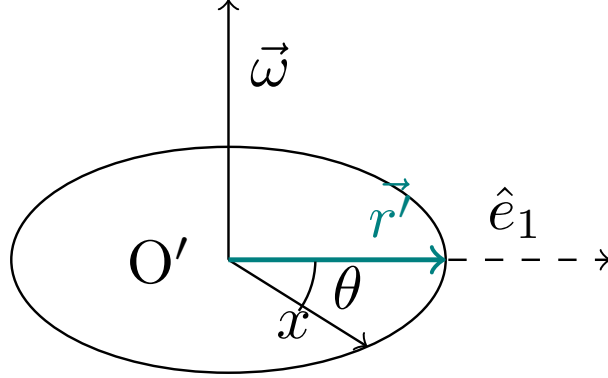
*Observación 79.* Nótese que hay aceleración centrípeta (hacia dentro), pero fuerza centrífuga (hacia fuera), con signo negativo. De forma similar la aceleración azimutal y la aceleración de Coriolis tienen signo positivo, mientras que las fuerzas acimutales y de Coriolis tienen signo negativo.

*Observación 80.* La fuerza de Coriolis sólo existe en el caso de que el cuerpo lleve velocidad medido desde el sistema  $S'$  y la fuerza azimutal sólo existe en el caso de la velocidad o dirección de la rotación de  $S'$  en torno a un sistema de referencia inercial con el mismo origen no sea constante.



## 5.1.6. Ejemplos

**Ejemplo 41.** Tenemos una mosca que se mueve sobre la mesa de un alfarero en línea recta desde el centro del plato. Nos piden hallar la velocidad de la mosca y su aceleración en función de un sistema inercial.



Nos dan  $r'(t)$  como dato. Como las aceleraciones son las mismas en cualquier sistema de referencia inercial, podemos escoger el sistema de referencia inercial que nos simplifique más los cálculos. En concreto con el origen en el centro del plato y tal que el eje de rotación del plato sea el eje  $Z$ . De esta forma, en nuestro caso es:

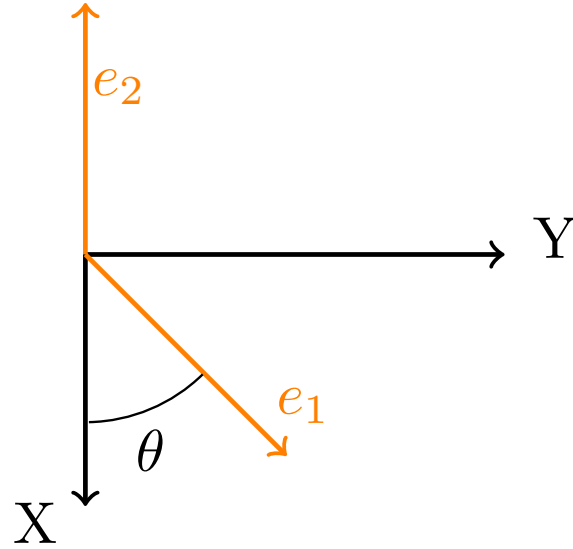
$$\vec{\omega} = \dot{\theta}(t) \hat{e}_3$$

$$\vec{r}'(t) = r'(t) \hat{e}_1$$

$\vec{r} = \vec{r}'$  y  $\vec{R} = \vec{0}$ . Aplicando la proposición 101 en la página 261, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \underbrace{\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}}_{=\vec{0}} + \ddot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' = \\ &= \ddot{r}' \hat{e}_1 + \dot{\theta} \hat{e}_3 \times (\dot{\theta} \hat{e}_3 \times r' \hat{e}_1) + 2\dot{\theta} \hat{e}_3 \times \dot{r}' \hat{e}_1 + \ddot{\theta} \hat{e}_3 \times r' \hat{e}_1 = \\ &= \ddot{r}' \hat{e}_1 + \dot{\theta} \hat{e}_3 \times \dot{\theta} r' \hat{e}_2 + 2\dot{\theta} \dot{r}' \hat{e}_2 + \ddot{\theta} r' \hat{e}_2 = \ddot{r}' \hat{e}_1 - \dot{\theta}^2 r' \hat{e}_1 + 2\dot{\theta} \dot{r}' \hat{e}_2 + \ddot{\theta} r' \hat{e}_2 = \\ &= [\ddot{r}' - \dot{\theta}^2 r'] \hat{e}_1 + [\ddot{\theta} r' + 2\dot{\theta} \dot{r}'] \hat{e}_2 \end{aligned}$$

Esta es una forma de hacerlo. Ahora hagamos el ejercicio suponiendo que no sabemos nada de lo aprendido en este tema. Para ello, vamos a operar directamente desde el sistema de referencia inercial descrito antes.



Obtenemos las relaciones geométricas:

$$\hat{e}_1 = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$$

$$\hat{e}_2 = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

$$\vec{r} = r'(t) \cos \theta \hat{i} + r'(t) \sin \theta \hat{j}$$

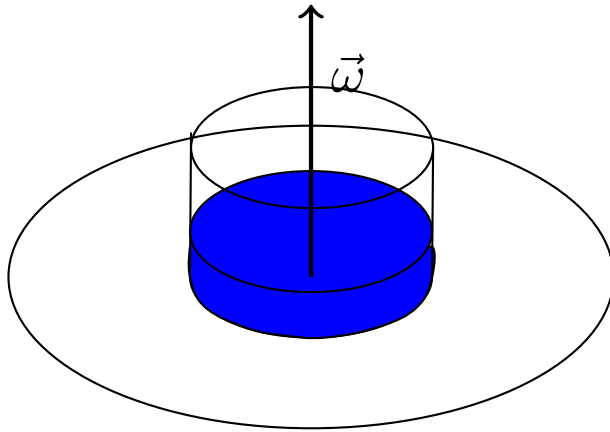
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (\dot{r}' \cos \theta - r' \sin \theta \dot{\theta}) \hat{i} + (\dot{r}' \sin \theta + r' \cos \theta \dot{\theta}) \hat{j}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (\ddot{r}' \cos \theta - 2\dot{r}' \sin \theta \dot{\theta} - r' \cos \theta \ddot{\theta} - r' \sin \theta \ddot{\theta}) \hat{i} + (\ddot{r}' \sin \theta + 2\dot{r}' \cos \theta \dot{\theta} - r' \sin \theta \ddot{\theta} + r' \cos \theta \ddot{\theta}) \hat{j}$$

Reagrupando términos y volviendo a la base  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  obtenemos:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = [\ddot{r}' - r'\dot{\theta}^2] \hat{e}_1 + [2\dot{r}'\dot{\theta} + r'\ddot{\theta}] \hat{e}_2$$

**Ejemplo 42.** Tenemos un vaso de agua sobre un plato que hacemos girar con velocidad angular  $\omega$ , queremos obtener la forma que describe la superficie del agua.



Sabemos que es  $\vec{a}' = \vec{0}$  desde el sistema de referencia no inercial  $S'$  que gira con el vaso, porque desde dicho sistema de referencia nada se mueve. Escogemos nuestro sistema de referencia inercial con origen en el centro del vaso. Por la segunda ley de Newton para sistemas no inerciales (ver teorema 30 en la página 263) aplicada a un volumen  $dV$  del líquido de densidad  $\rho$ , tenemos:

$$\vec{0} = \rho dV \ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - \underbrace{\rho dV \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}}_{=\vec{0}} - \rho dV \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - \underbrace{2\rho dV (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}')}_{=\vec{0}} - \underbrace{\rho dV \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}_{=\vec{0}}$$

donde el primer término marcado se anula porque  $\vec{R} = \vec{0}$ , el segundo término marcado se anula porque como según el sistema  $S'$  todo está estático, así que  $\dot{\vec{r}}' = \vec{0}$  y, por último, el último término se anula porque el disco gira con velocidad constante y la dirección de giro tampoco cambia, por lo que  $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$ . De esta forma, tenemos:

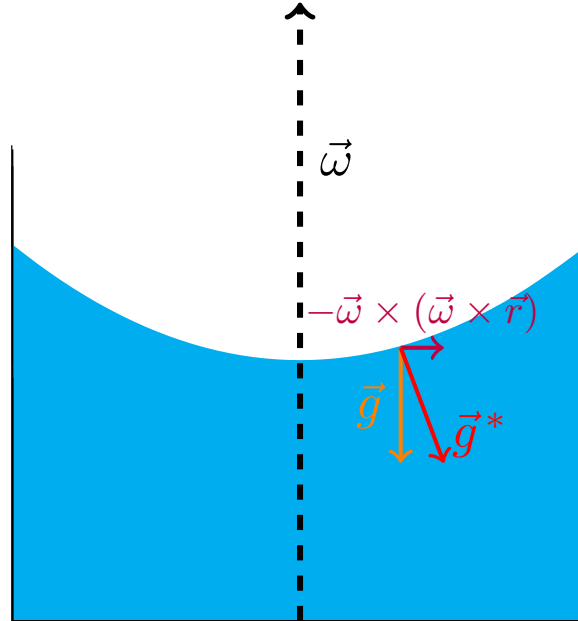
$$\vec{0} = \vec{F} - \rho dV \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Sobre el  $dV$  de líquido actúa la fuerza gravitatoria y las fuerzas de presión  $\vec{F}_P$ , de manera que obtenemos:

$$0 = \vec{F}_P + \rho dV \vec{g} - \rho dV \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Despejando, llegamos a:

$$\vec{F}_P = -\rho dV \vec{g} + \rho dV \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$



La fuerza de presión será perpendicular a la superficie del fluido. Como tenemos simetría de revolución, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\vec{r}'$  tiene la dirección del eje  $X$ . De esta forma, la dirección perpendicular a la fuerza de presión formará un ángulo  $\alpha$  con la horizontal cuya tangente vendrá dada por el cociente entre las componentes horizontales de  $\vec{F}_P$  y las componentes verticales de  $\vec{F}_P$ . Esto último se debe a que buscamos la dirección perpendicular a  $\vec{F}_P$ , de forma que obtenemos:

$$\frac{dz}{dr} = \tan \alpha = \frac{\rho dV \omega^2 r}{\rho dV g} = \frac{\omega^2 r}{g} \Leftrightarrow dz = \frac{\omega^2}{g} r dr \Leftrightarrow z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C$$

donde  $C$  es una constante.

Podemos hacer el mismo problema por energías. Por una parte, vemos claramente:

$$\vec{F}_g = -\rho dV g \hat{k} \Leftrightarrow V_g = \rho dV g z$$

donde hemos tomado como nula la constante aditiva. Por otra parte, tenemos que hallar la energía potencial asociada a la fuerza centrífuga.

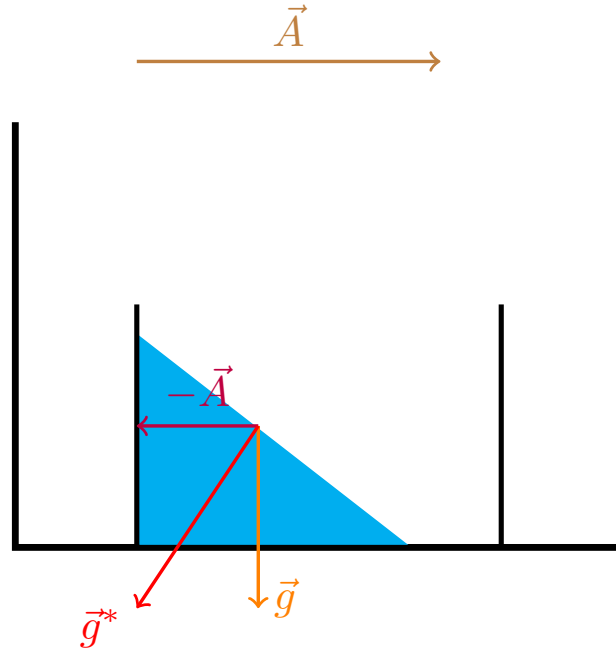
$$\vec{F}_C = \rho dV \omega^2 r \hat{r} \Leftrightarrow V_C = - \int \rho dV \omega^2 r \hat{r} \cdot d\vec{r} = - \int \rho dV \omega^2 r dr = - \rho dV \frac{\omega^2}{2} r^2$$

donde también hemos tomado como nula la constante aditiva. Como las fuerzas de presión son perpendiculares a la superficie del agua, la superficie del agua debe ser una superficie equipotencial. En consecuencia, tenemos la ecuación:

$$\rho dV gz - \frac{\rho dV \omega^2 r^2}{2} = \text{cte} \Leftrightarrow z - \frac{\omega^2 r^2}{2g} = C \Leftrightarrow z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C$$

donde  $C$  es una constante.

**Ejemplo 43.** Tenemos un vaso de agua en un vagón de tren acelerado con aceleración  $\vec{A}$ . Queremos ver qué forma tiene la superficie del líquido.



Aplicamos el mismo razonamiento que en el ejemplo 42 en la página 265. Tomamos un sistema de referencia inercial en reposo fuera del tren. Tomamos un  $dV$  del líquido de densidad  $\rho$ . Aplicamos la segunda ley de Newton para sistemas de referencia no inerciales (ver teorema 30 en la página 263) al sistema de referencia no inercial del vaso:

$$\vec{0} = \rho dV \ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - \rho dV \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} - \underbrace{\rho dV \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{=\vec{0}} - \underbrace{2\rho dV (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}')}_{=\vec{0}} - \underbrace{\rho dV \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}_{=\vec{0}}$$

donde todos los términos marcados se anulan porque el sistema de referencia no inercial no gira con respecto al inercial. Así, únicamente tenemos fuerzas de arrastre en nuestro caso. De nuevo, las fuerzas que actúan sobre nuestro  $dV$  de líquido son el peso y las fuerzas de presión:

$$\vec{0} = \vec{F}_P + \rho dV \vec{g} - \rho dV \vec{A} \Leftrightarrow \vec{F}_P = -\rho dV \vec{g} + \rho dV \vec{A}$$

De nuevo, la fuerza de presión será perpendicular a la superficie del fluido. Tomemos el eje  $X_1$  del sistema de referencia no inercial según la dirección de avance del tren. Al igual que antes, la dirección perpendicular a la fuerza de presión formará un ángulo  $\alpha$  con la horizontal cuya tangente vendrá dada por el cociente entre las

componentes horizontales de  $\vec{F}_P$  y las componentes verticales de  $\vec{F}_P$ . Esto último se debe a que buscamos la dirección perpendicular a  $F_P$ , de forma que obtenemos:

$$\frac{dz}{dx} = \tan \alpha = \frac{\rho dV A}{-\rho dV g} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{A}{g} \Leftrightarrow dz = -\frac{A}{g} dx \Leftrightarrow z = -\frac{A}{g} x + C$$

donde  $C$  es una constante.

## 5.2. Movimiento cerca de la superficie de la Tierra o en ella

Notemos que la Tierra rota de oeste a este, por lo que el vector  $\vec{\omega}$  de un sistema no inercial situado en su superficie estará dirigido hacia el norte y su módulo será  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  donde  $T$  es el periodo de la rotación de la Tierra.

**Proposición 102.** *Desde un sistema de referencia situado en la superficie de la Tierra, para una partícula de masa  $m$ , la segunda ley de Newton para sistemas de referencia no inerciales puede aproximarse como:*

$$m\ddot{\vec{r}}' \approx \vec{F}_{ng} + m\vec{g} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}')$$

donde  $\vec{R}$  es el vector que va desde el centro de la Tierra hasta el origen de nuestro sistema de referencia,  $\vec{g}$  es el campo gravitatorio terrestre en su superficie y  $\vec{F}_{ng}$  son las fuerzas no gravitatorias que actúan sobre nuestra partícula.

*Demostración.* El mayor problema que plantea nuestra situación es encontrar un sistema de referencia inercial desde el cual operar. Como la Tierra gira alrededor del Sol, la Tierra no es un sistema de referencia inercial. Asimismo, el Sol tampoco lo es, pues rota entorno al núcleo galáctico. Y así podríamos seguir. Es decir, los sistemas completamente inerciales no existen en la naturaleza. Para todos nuestros resultados, supondremos que el centro de la Tierra es un sistema de referencia inercial; es decir, despreciaremos todos los efectos debidos a la traslación de la Tierra. Esto tiene sentido, pues el periodo de rotación de la Tierra es de 24 horas, mientras que el de traslación en torno al Sol es de 1 año. Es decir, los efectos debidos a la traslación de la Tierra son mucho menores en amplitud (en módulo) que los debidos a la rotación de la Tierra. La Tierra gira en torno a un eje con velocidad constante. Como dicha velocidad es constante (en realidad no es constante, está disminuyendo, pero esto sólo es apreciable a escalas geológicas), desde el sistema de referencia de la superficie de la Tierra no aparecerá una fuerza azimutal sobre las partículas; si bien sí aparecerá una fuerza centrífuga y una fuerza de Coriolis.

Por la segunda ley de Newton para sistemas de referencia no inerciales (ver teorema 30 en la página 263) debe cumplirse:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') - \underbrace{m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}_{=0}$$

donde  $\vec{R}$  es el vector que va desde el centro de la Tierra hasta el origen de nuestro sistema de referencia y el último término se anula por lo dicho antes. Como  $\vec{R}$  es constante para el sistema de referencia de la superficie de la Tierra, por el corolario 42 en la página 256, tenemos:

$$\vec{A} = \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{R}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

En consecuencia, la segunda ley de Newton queda:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{R} + \vec{r}')) - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}')$$

Por último, podemos descomponer la  $\vec{F}$  que aparecen en la expresión anterior en el peso  $m\vec{g}$  y otras fuerzas  $\vec{F}_{ng}$ . Haciendo eso, llegamos a:

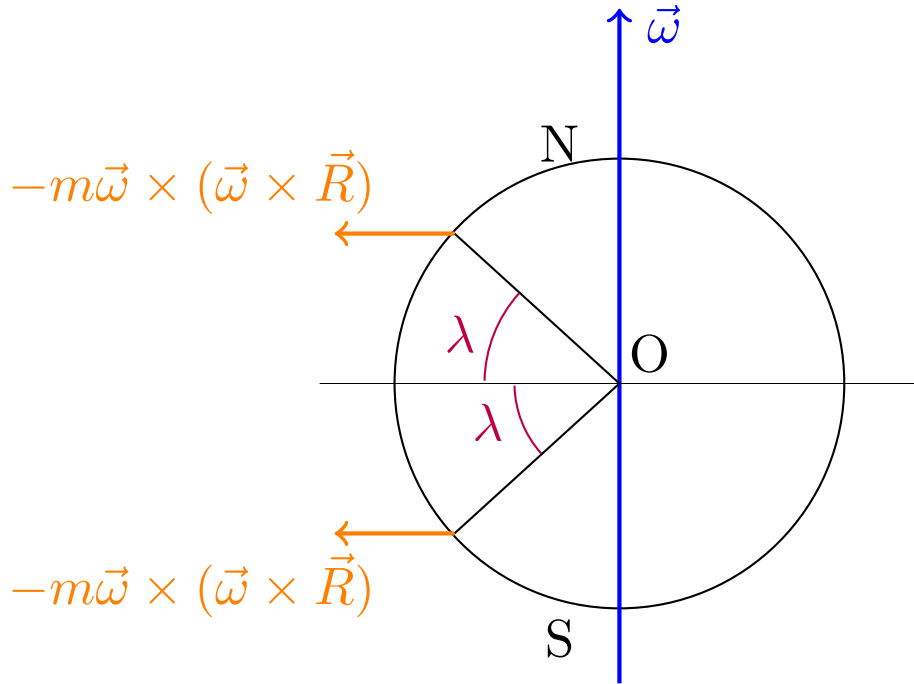
$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}_{ng} + m\vec{g} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{R} + \vec{r}')) - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}')$$

Como vemos, la fuerza de arrastre actúa en realidad como una fuerza centrífuga extra. En los movimientos en la superficie de la Tierra, podremos suponer  $\vec{R} + \vec{r}' \approx \vec{R}$ , de forma que podremos considerar la fuerza centrífuga efectiva constante, con lo que llegamos al enunciado. *Q.E.D.*

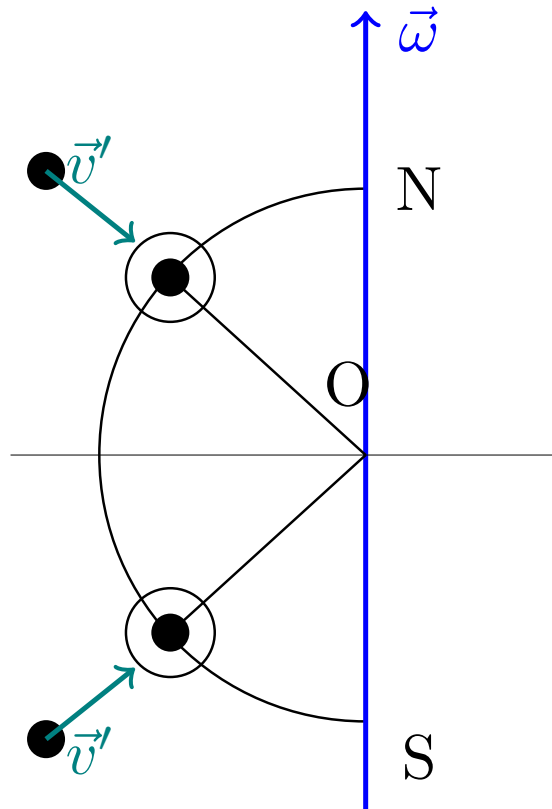
*Observación 81.* Nótese que en el último paso de la demostración de la proposición 102 en la página anterior estamos despreciando la fuerza centrífuga real  $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  en favor de un término que aparenta ser una fuerza centrífuga  $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = -m\vec{A}$ , pero en realidad es una fuerza de arrastre.

### 5.2.1. Dirección de la fuerza de Coriolis

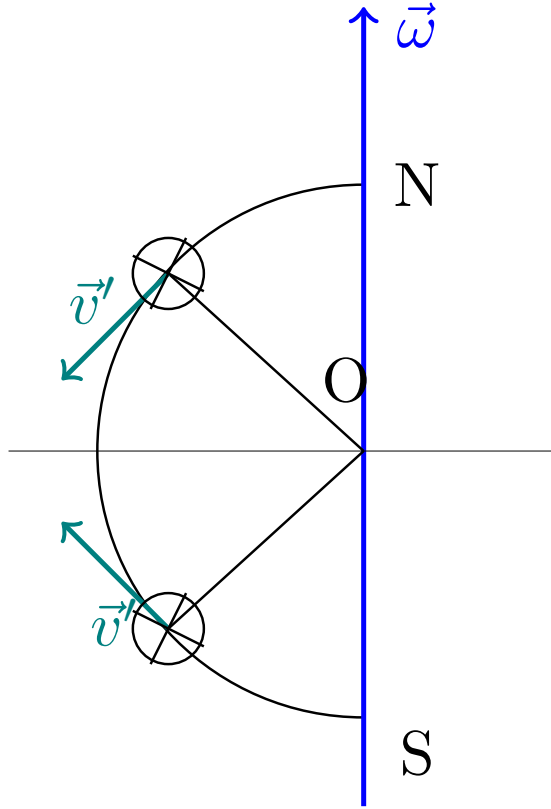
De la proposición 102 en la página anterior, podemos deducir que la fuerza centrífuga efectiva tiene una componente radial que disminuye el peso efectivo y también crea una componente tangencial hacia el ecuador (tanto en el hemisferio norte como en el sur).



También de la proposición 102 en la página anterior, podemos deducir que la fuerza de Coriolis que actúa sobre partículas que se mueven en la dirección radial de la tierra se dirige hacia el este tanto el hemisferio norte como en el sur.



Igualmente, la fuerza de Coriolis que actúa sobre partículas que se mueven en la dirección tangencial se dirige hacia el oeste. Si uno mira en la dirección de la velocidad, en el hemisferio norte, la fuerza de coriolis iría hacia la derecha mientras que en el hemisferio sur iría hacia la izquierda.



### 5.2.2. Gravedad aparente

**Definición 101.** Llamamos **gravedad aparente**  $\vec{g}'$  a la expresión:

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

donde  $\vec{R}$  es el vector que va desde el centro de la Tierra hasta el origen de nuestro sistema de referencia.

**Corolario 43.** En función de la gravedad aparente  $\vec{g}'$ , podemos reescribir la expresión de la proposición 102 en la página 268 como:

$$m\ddot{\vec{r}}' \approx \vec{F}_{ng} + m\vec{g}' - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

donde  $\vec{g}$  es el campo gravitatorio terrestre en su superficie y  $\vec{F}_{ng}$  son las fuerzas no gravitatorias que actúan sobre nuestra partícula.

*Demostración.* Partimos de la proposición 102 en la página 268:

$$m\ddot{\vec{r}}' \approx \vec{F}_{ng} + \underbrace{m\vec{g} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})}_{=m\vec{g}'} - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') \Leftrightarrow m\ddot{\vec{r}}' \approx \vec{F}_{ng} + m\vec{g}' - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

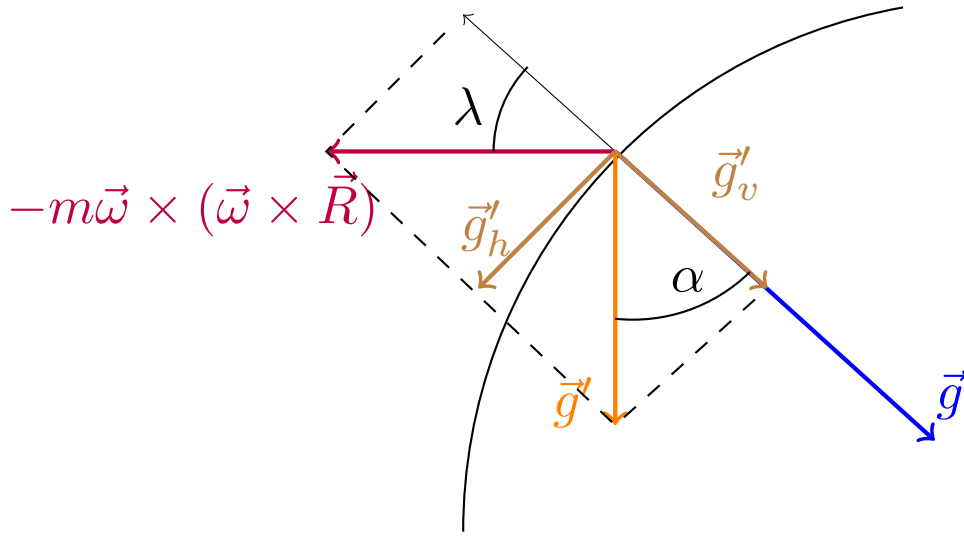
*Q.E.D.*

**Proposición 103.** La gravedad aparente  $\vec{g}'$  se encuentra desviada de la dirección radial en un ángulo  $\alpha$  cuya tangente satisface:

$$\tan \alpha \lesssim \frac{\omega^2 R \sin 2\lambda}{2g} \leq \frac{\omega^2 R}{2g}$$

donde  $\lambda$  es la latitud.





*Demostración.*  $\lambda$  es el ángulo que forma el vector  $\vec{R}$  con la dirección perpendicular a  $\vec{\omega}$ . Como es  $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ , obtenemos:

$$\left\| \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \right\| = \|\vec{\omega}\| \|\vec{\omega}\| \|\vec{R}\| \cos \lambda = \omega^2 R \cos \lambda$$

Descomponemos la gravedad aparente en una componente tangencial («horizontal») y en una componente radial («vertical»).

$$g'_h = \omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda$$

$$g'_v = g - \omega^2 R \cos^2 \lambda$$

De esta forma, si llamamos  $\alpha$  al ángulo que forma la dirección radial con la gravedad aparente, obtenemos que su tangente vale:

$$\tan \alpha = \frac{g'_h}{g'_v}$$

Como  $g \gg \omega^2 R \cos^2 \lambda$  en la Tierra, podemos aproximar el valor de la tangente anterior por:

$$\tan \alpha \lesssim \frac{\omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda}{g} = \frac{\omega^2 R \sin 2\lambda}{2g} \leq \frac{\omega^2 R}{2g}$$

Al hacer esto, obtenemos una cota superior a la desviación de la gravedad aparente con respecto a la dirección radial. Q.E.D.

*Observación 82.* Hallemos cual es la cota superior de la desviación de la gravedad aparente mencionada en la proposición 103 en la página anterior. Sabemos:

$$\omega \approx \frac{2\pi}{1 \text{ día}} = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$R = 6371 \text{ km}$$

De forma que:

$$\omega^2 R = 34 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

Operando, obtenemos:

$$\tan \alpha \leq \frac{\omega^2 R}{2g} \Leftrightarrow \alpha < 6'$$

Es decir, cada 100 m avanzados en la dirección radial, hay una desviación de 17 cm. Dicho de otra forma, en los 6371 km del radio de la Tierra, el vector gravedad aparente se desvía 11 km.

*Observación 83.* Nótese que no hay fuerza centrífuga en el polo pues en este caso  $\vec{R}$  y  $\vec{\omega}$  tienen la misma dirección y, en consecuencia, su producto vectorial se anula. Sin embargo, en el ecuador sí que hay fuerza centrífuga. Si medidos experimentalmente el valor de la aceleración de la gravedad en el polo y en el ecuador, obtenemos:

$$g_{\text{polo}} = 9,832 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g_{\text{ecuador}} = g - \omega^2 R = 9,7799 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g_{\text{pol}} - g_{\text{ecuador}} = 52 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

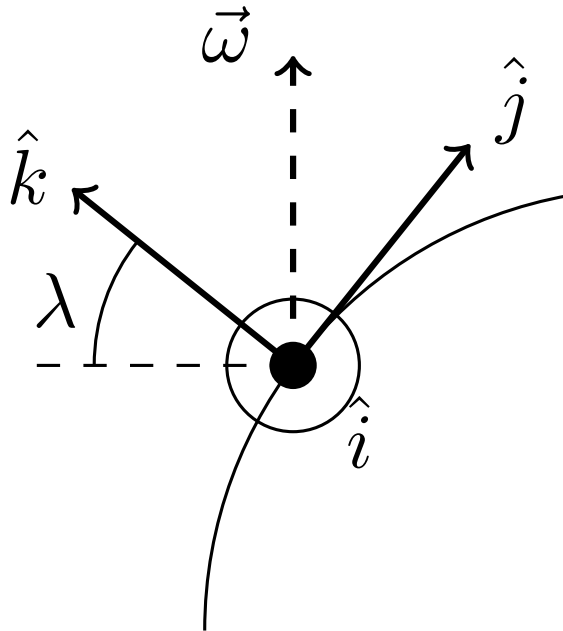
### 5.2.3. El efecto de las fuerzas de Coriolis

Lo primero es notar que la fuerza de Coriolis únicamente afecta a los cuerpos en movimiento, pues, en caso contrario es  $\dot{\vec{r}}' = \vec{0}$  y el término correspondiente se anula.

#### 5.2.3.1. Caída libre

**Proposición 104.** Sea un cuerpo de masa  $m$  que dejamos caer desde el reposo desde una altura  $h$  medida sobre la superficie de la Tierra. Si suponemos que la gravedad aparente tiene dirección radial, mediante el método de aproximaciones sucesivas, hasta primer orden, obtenemos que la desviación en la dirección paralela al ecuador debida a la fuerza de Coriolis puede aproximarse por:

$$x' \approx \frac{1}{3} \omega g' \cos \lambda \left( \frac{2h}{g'} \right)^{3/2}$$



*Demostración.* Por la segunda ley de Newton para sistemas no inerciales aplicada a la Tierra (ver corolario 43 en la página 271), obtenemos:

$$m\ddot{\vec{r}}' \approx \vec{F}_{ng} + m\vec{g}' - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

Si estamos en caída libre, no habrá otras fuerzas, de forma que  $\vec{F}_{ng} = \vec{0}$ . Dividiendo toda la ecuación por  $m$ , obtenemos:

$$\ddot{\vec{r}}' = \vec{g}' - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

Descomponiendo  $\vec{\omega}$  en según nuestro sistema de referencia situado sobre la superficie de la Tierra, obtenemos:

$$\vec{\omega} = \omega \cos \lambda \hat{j} + \omega \sin \lambda \hat{k}$$

donde  $\lambda$  es la latitud. Así:

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega \cos \lambda & \omega \sin \lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = (\omega \cos \lambda \dot{z}' - \omega \sin \lambda \dot{y}') \hat{i} + \omega \sin \lambda \dot{x}' \hat{j} - \omega \cos \lambda \dot{x}' \hat{k}$$

Como, por hipótesis  $\vec{g}'$  tiene la dirección de  $\hat{k}$ , llegamos a las ecuaciones:

$$\begin{cases} \ddot{x}' = 2\omega \sin \lambda \dot{y}' - 2\omega \cos \lambda \dot{z}' \\ \ddot{y}' = -2\omega \dot{x}' \sin \lambda \\ \ddot{z}' = -g' + 2\omega \cos \lambda \dot{x}' \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Como vemos, tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Para resolverlo, vamos a aplicar el método de las aproximaciones sucesivas. Primero, supondremos que es  $\omega = 0$ . De esta forma, llegamos a las ecuaciones:

$$\begin{cases} \ddot{x}' = 0 \\ \ddot{y}' = 0 \\ \ddot{z}' = -g' \end{cases}$$

Como la partícula parte del reposo es  $x'(0) = 0, y'(0) = 0, z'(0) = h, \dot{x}'(0) = 0, \dot{y}'(0) = 0, \dot{z}'(0) = 0$ , de forma que llegamos a la conocida solución:

$$x' = 0 \quad y' = 0 \quad z' = h - \frac{1}{2}g't^2$$

que se enseña en bachillerato.

Muy bien, la clave del método de aproximaciones sucesivas, es la siguiente. Ahora, daremos la solución hallada a orden 0 en  $\omega$  como válida y la usaremos para hallar volver a hallar las ecuaciones para  $\ddot{x}', \ddot{y}'$  y  $\ddot{z}'$ . Tenemos:

$$\dot{x}' = 0 \quad \dot{y}' = 0 \quad \dot{z}' = -g't$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones 5.2.1, obtenemos:

$$\begin{cases} \ddot{x}' = -2\omega \cos \lambda (-g't) = 2\omega \cos \lambda g't \\ \ddot{y}' = 0 \\ \ddot{z}' = -g' \end{cases}$$

Resolvemos este nuevo sistema. La solución para las componentes  $y'$  y  $z'$  será la misma que antes. No obstante, la de  $x'$  cambiará:

$$\ddot{x}' = 2\omega \cos \lambda g't \Leftrightarrow \dot{x}' = A + \int 2\omega \cos \lambda g't dt = A + \omega g' \cos \lambda t^2$$

Como debe ser  $\dot{x}'(0) = 0$ , obtenemos que  $A = 0$ .

$$\dot{x}' = \omega g' \cos \lambda t^2 \Leftrightarrow x' = B + \int \omega g' \cos \lambda t^2 dt = B + \frac{\omega g' \cos \lambda}{3} t^3$$

Como debe ser  $x(0) = 0$ , obtenemos que  $B = 0$ . Así, nuestra solución queda:

$$x' = \frac{\omega g' \cos \lambda}{3} t^3 \quad y' = 0 \quad z' = h - \frac{1}{2}g't^2$$

Por último, para hallar la distancia que se desvía en función de la altura, despejamos  $t$  de la ecuación en  $z'$ . Sabemos que cuando la partícula impacte contra el suelo, será  $z' = 0$ .

$$z' = 0 \Leftrightarrow h = \frac{1}{2}g't^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2h}{g'} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g'}}$$

Sustituyendo en la expresión para  $x'$ , obtenemos:

$$x' = \frac{\omega g' \cos \lambda}{3} \left( \frac{2h}{g'} \right)^{\frac{3}{2}}$$

*Q.E.D.*

Estudiemos la expresión dada por la proposición anterior 104 en la página 273 y introduzcamos unos valores numéricos para ver la magnitud del efecto. Si dejamos caer un objeto en un pozo de 100 m de profundidad de una mina situada en el ecuador, el objeto se desviaría unos  $x' \approx 2,2$  cm hacia el este.

*Observación 84.* Nótese que existe una solución exacta para el sistema de ecuaciones 5.2.1 en la página anterior, ya que es un sistema lineal de primer orden (haciendo un cambio de variable sencillo). Veámoslo:

$$\begin{cases} \ddot{x}' = 2\omega \sin \lambda \dot{y}' - 2\omega \cos \lambda \dot{z}' \\ \ddot{y}' = -2\omega \dot{x}' \cos \lambda \\ \ddot{z}' = -g' + 2\omega \cos \lambda \dot{x}' \end{cases}$$

Si tomamos  $x_1 = \dot{x}'$ ,  $x_2 = \dot{y}'$  y  $x_3 = \dot{z}'$ , llegamos al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2\omega \sin \lambda x_2 - 2\omega \cos \lambda x_3 \\ \dot{x}_2 = -2\omega x_1 \cos \lambda \\ \dot{x}_3 = -g' + 2\omega \cos \lambda x_1 \end{cases}$$

Obtenemos el sistema matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}}_{=\dot{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2\omega \sin \lambda & -2\omega \cos \lambda \\ -2\omega \sin \lambda & 0 & 0 \\ 2\omega \cos \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{=X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g' \end{pmatrix}}_{=B}$$

Cuya solución viene dada por:

$$X(t) = e^{tA} X_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} B(\tau) d\tau$$

En nuestro caso es  $X_0 = (0)$ . Así que la solución es únicamente la solución particular. Las expresiones matemáticas de la solución salen complicadas. La más sencilla es justo la que queremos calcular.

$$x'(t) = \frac{gt \cos \lambda}{2\omega} - \frac{g \cos \lambda \sin(2\omega t)}{4\omega^2}$$

En la solución exacta es, por supuesto,  $y'(t) \neq 0$ . De hecho,  $y'(t) < 0 \forall t > 0; 0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$ . Por tanto, la fuerza de Coriolis provoca también una desviación hacia el ecuador, aunque esta desviación es mucho menor la existente en la dirección  $\hat{i}$ .

*Observación 85.* Si estudiamos el problema desde un sistema de referencia inercial  $S$ , como la única fuerza que actúa es la fuerza gravitatoria, nuestro objeto describirá una cónica. Como lo dejamos caer libremente, la órbita descrita será una elipse. Veamos que la energía de la órbita asociada sería menor que la de una órbita circular. En ambos casos, la energía potencial asociada será la misma y únicamente variará la cinética. La velocidad de la órbita circular es:

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{R}} = 790 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Mientras que la velocidad de nuestra partícula, suponiendo  $h \ll R$  es:

$$\omega(R+h) \approx \omega R = 464,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

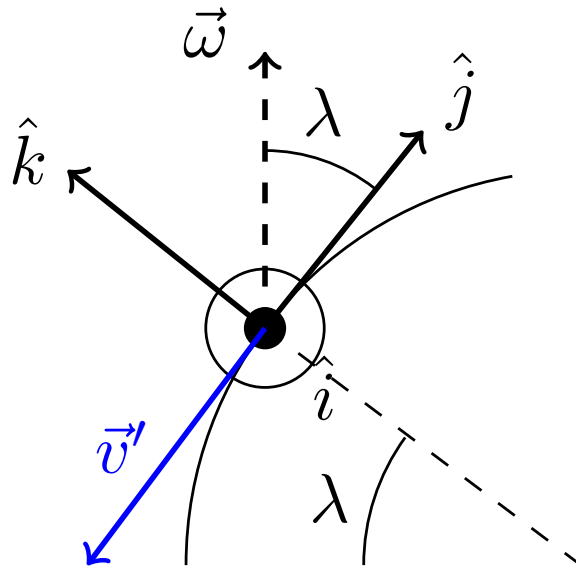
En consecuencia, la energía será menor que la de una órbita circular y será  $a < R+h$ .

## 5.2.3.2. Movimiento sobre la superficie de la Tierra

**Proposición 105.** *Sea una partícula de masa  $m$  que se mueve hacia el ecuador sobre la superficie de la Tierra. Supongamos que sobre ella no actúan otras fuerzas además de la gravitatoria y la fuerza normal del suelo. Si la partícula se encuentra en el hemisferio norte, la fuerza de Coriolis la desviará hacia su derecha, mientras que en el hemisferio sur la desviará hacia su izquierda. En ambos casos, se desviará hacia el oeste. Además, la aceleración de la partícula viene dada por:*

$$\ddot{\vec{r}}' = -2\omega\dot{r}' \sin \lambda \hat{i}$$

donde  $\lambda$  es la latitud.



*Demostración.* Por el corolario 43 en la página 271, tenemos:

$$m\ddot{\vec{r}}' \approx \vec{F}_{ng} + m\vec{g}' - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

Por hipótesis, sobre la partícula no actúan otras partículas más allá de la gravitatoria y de la normal; por ende,  $\vec{F}_{ng} = \vec{N}$ . Además, si la partícula se desliza sobre la superficie de la Tierra, la fuerza gravitatoria se compensa con la normal, de forma que tenemos:

$$\ddot{\vec{r}}' = -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

De esta forma, si la partícula se encuentra en el hemisferio norte, la fuerza de Coriolis la desviará hacia su derecha, mientras que en el hemisferio sur la desviará hacia su izquierda. En ambos casos, se desviará hacia el oeste. Si llamamos  $\lambda$  a la latitud de la partícula, podemos describir la fuerza de Coriolis que actúa sobre la partícula como sigue:

$$\ddot{\vec{r}}' = -2\omega\dot{r}' \sin \lambda \hat{i}$$

pues el ángulo que forman los vectores  $\vec{\omega}$  y  $\dot{\vec{r}}'$  es justo  $\lambda$  o  $\frac{\pi}{2} + \lambda$  (dependiendo de si se encuentra en el hemisferio norte o en el hemisferio sur. No obstante, como se da  $\sin \lambda = \sin(\frac{\pi}{2} + \lambda)$ , podemos usar la misma expresión para ambos casos. Q.E.D.

**Proposición 106.** *Sea una partícula de masa  $m$  que se mueve libremente sobre la superficie de la Tierra. Supongamos que sobre ella no actúan otras fuerzas además de la gravitatoria y la fuerza normal del suelo. Entonces, la fuerza de Coriolis crea un movimiento circular, cuyo sentido de giro (visto desde arriba) será horario en el hemisferio norte y antihorario en el hemisferio sur. Además, la aceleración de la partícula viene dada por:*

$$\ddot{\vec{r}}' = 2\omega \cos \lambda \dot{x}' \hat{k} - 2\omega \sin \lambda (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}')$$

*Demostración.* Por hipótesis, sobre la partícula no actúan otras partículas más allá de la gravitatoria y de la normal; por ende,  $\vec{F}_{ng} = \vec{N}$ . Además, si la partícula se desliza sobre la superficie de la Tierra, la fuerza gravitatoria se compensa con la normal, de forma que al aplicar el corolario 43 en la página 271, obtenemos:

$$\ddot{\vec{r}}' = -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

Por otra parte, descomponemos  $\vec{\omega}$  en función de los ejes de nuestro sistema de referencia no inercial:

$$\vec{\omega} = \omega \cos \lambda \hat{j} + \omega \sin \lambda \hat{k}$$

y hacemos lo mismo con la velocidad:

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{x}'\hat{i} + \dot{y}'\hat{j}$$

Así, obtenemos:

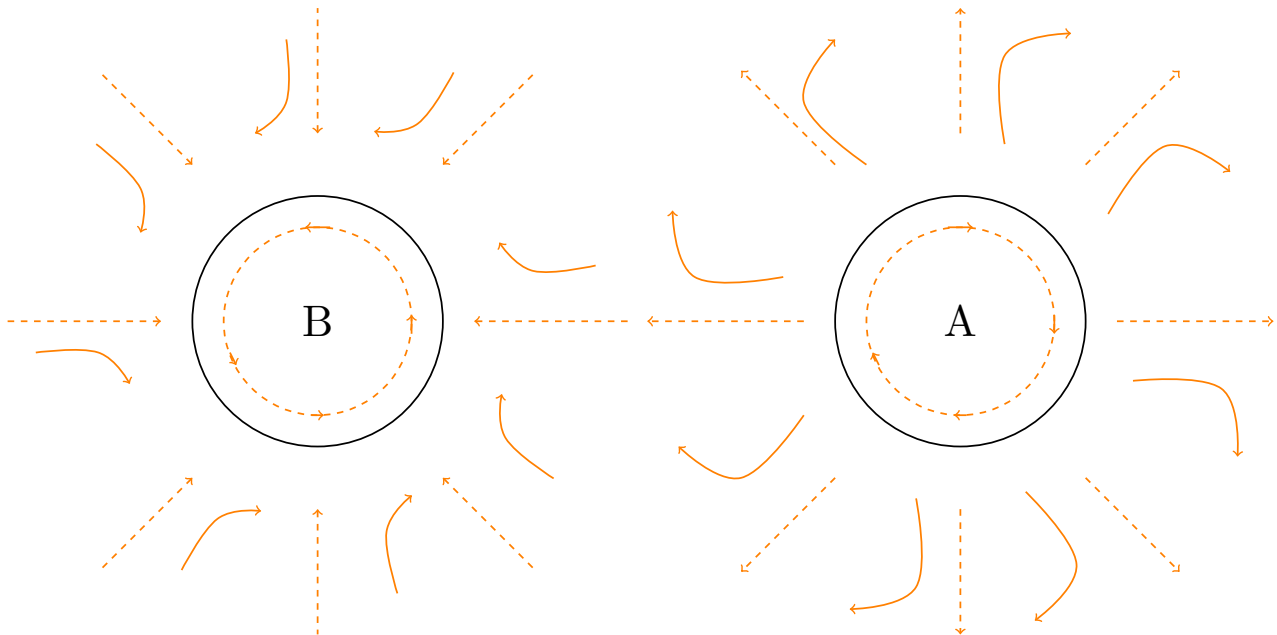
$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}' &= -2 \left( \omega \cos \lambda \hat{j} + \omega \sin \lambda \hat{k} \right) \times \left( \dot{x}'\hat{i} + \dot{y}'\hat{j} \right) = -2 \left[ -\dot{x}'\omega \cos \lambda \hat{k} + \omega \sin \lambda \hat{k} \times \dot{\vec{r}}' \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ddot{\vec{r}}' = 2\omega \cos \lambda \dot{x}'\hat{k} - 2\omega \sin \lambda \left( \hat{k} \times \dot{\vec{r}}' \right) \end{aligned}$$

Como vemos el segundo término se corresponde con una aceleración que es siempre perpendicular a la dirección de la trayectoria. Es decir, la fuerza de Coriolis crea un movimiento circular. Al hacer el producto vectorial, obtenemos que dicho movimiento circular produce una rotación en sentido horario en el hemisferio norte y en sentido antihorario en el hemisferio sur (visto desde arriba). *Q.E.D.*

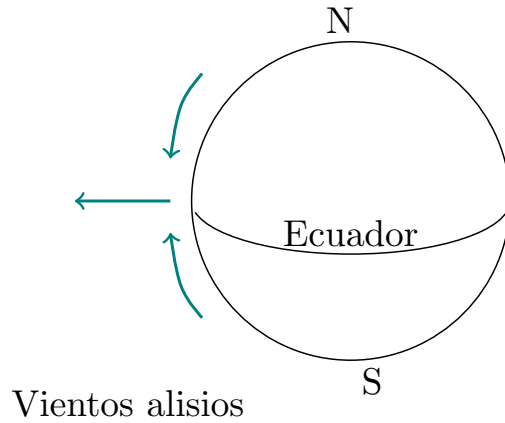
*Observación 86.* Según la proposición 106 en la página anterior, sobre una partícula de masas  $m$  que se mueva sobre la superficie de la Tierra aparecerá una fuerza hacia arriba si ésta se desplaza hacia el este o hacia el oeste. Este término es, por supuesto, muy pequeño en comparación con la gravedad aparente  $\vec{g}'$ .

### 5.2.3.3. Consecuencias meteorológicas

Es por el resultado de la proposición 106 en la página anterior que las borrascas giran en sentido antihorario en el hemisferio norte y horario en el hemisferio sur. Con los anticiclones ocurre justo lo contrario. En el hemisferio norte tenemos:



Otro fenómeno meteorológico debido a la fuerza de Coriolis es la desviación de los vientos alisios, que vienen del noreste y se desvían hacia el oeste por la fuerza de Coriolis.



### 5.3. El péndulo de Foucault

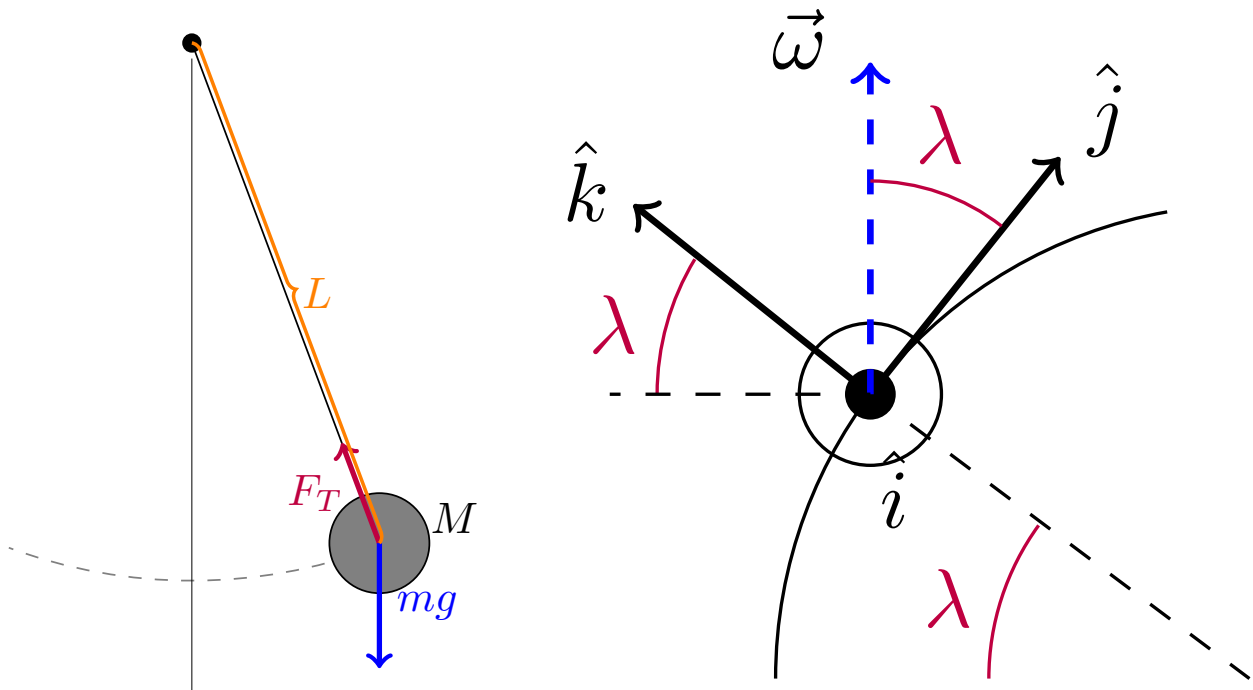
**Definición 102.** Se llama **péndulo de Foucault** a un péndulo muy largo con un periodo de oscilación mucho menor que el periodo de rotación de la Tierra.

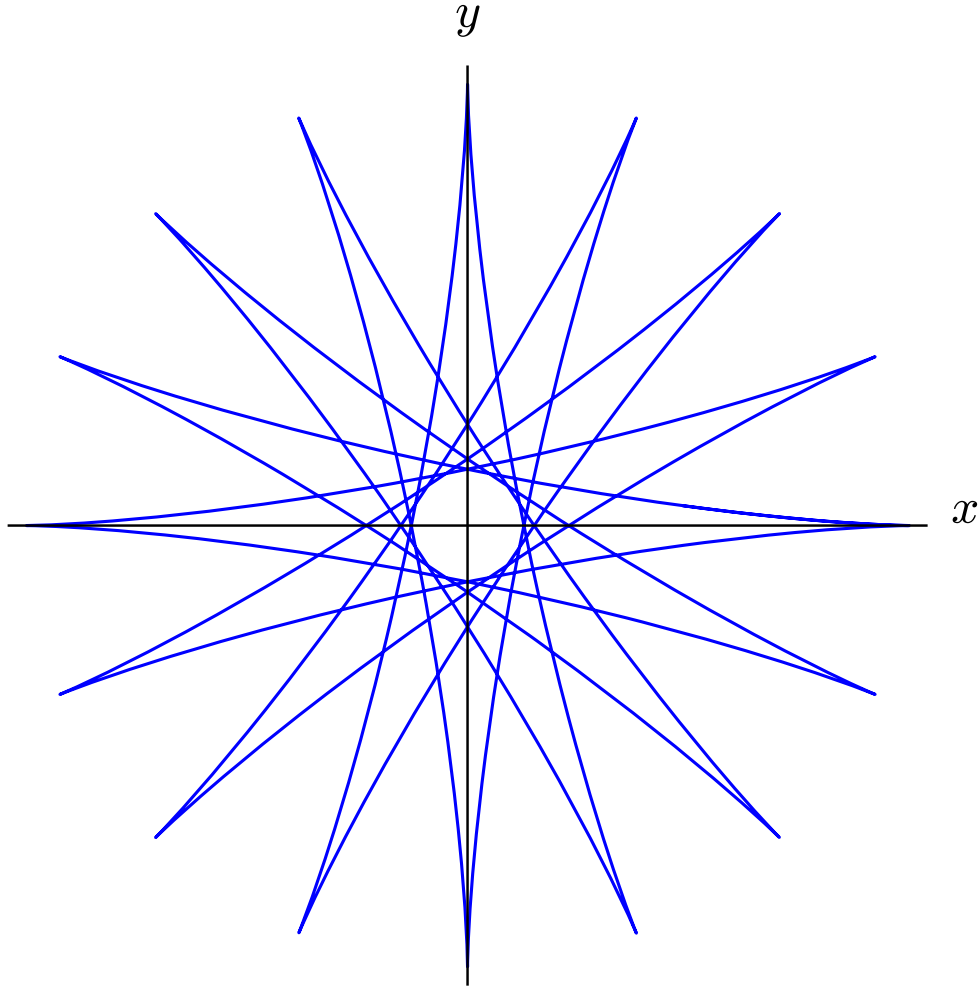
**Proposición 107.** Para un observador situado en la superficie de la Tierra en el hemisferio norte, la trayectoria de un péndulo de Foucault de periodo  $\mathcal{T}_0$  con oscilaciones pequeñas viene dada por las ecuaciones paramétricas:

$$x'(t) = A' \cos(\omega_1 t + \varphi) \cos\left(\frac{2\pi}{\mathcal{T}} t \sin \lambda\right) + B' \cos(\omega_1 t + \phi) \sin\left(\frac{2\pi}{\mathcal{T}} t \sin \lambda\right)$$

$$y'(t) = -A' \cos(\omega_1 t + \varphi) \sin\left(\frac{2\pi}{\mathcal{T}} t \sin \lambda\right) + B' \cos(\omega_1 t + \phi) \cos\left(\frac{2\pi}{\mathcal{T}} t \sin \lambda\right)$$

donde  $\omega_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\sin^2 \lambda}{\mathcal{T}^2} + \frac{1}{\mathcal{T}_0^2}} \approx \frac{2\pi}{\mathcal{T}_0}$  y  $\mathcal{T}$  es el periodo de la rotación de la Tierra,  $A', B', \varphi, \phi \in \mathbb{R}$  son parámetros que dependen de las condiciones iniciales y  $\lambda$  es la latitud.





Puede verse una animación aquí<sup>1</sup>.

*Demostración.* Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que tenemos atada una partícula de masa  $m$  en el extremo del péndulo. Como las oscilaciones son pequeñas por hipótesis, el movimiento se restringe al plano horizontal, por tanto,  $\dot{z}' = 0$ . Así, la velocidad de la partícula de masa  $m$  queda:

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{x}'\hat{i} + \dot{y}'\hat{j}$$

Por la segunda ley de Newton para sistemas no inerciales aplicada a la superficie de la Tierra (ver corolario 43 en la página 271), tenemos:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}_T + m\vec{g}' - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

donde  $\vec{F}_T$  es la tensión ejercida por la cuerda. Calculemos el término de la fuerza de Coriolis. Para ello, descomponemos  $\vec{\omega}$  según el sistema de referencia no inercial en función de la latitud  $\lambda$ :

$$\vec{\omega} = \omega \cos \lambda \hat{j} + \omega \sin \lambda \hat{k}$$

De esta forma, obtenemos:

$$\begin{aligned} -2m \left( \omega \cos \lambda \hat{j} + \omega \sin \lambda \hat{k} \right) \times \dot{\vec{r}}' &= -2m\omega \cos \lambda \hat{j} \times \left( \dot{x}'\hat{i} + \dot{y}'\hat{j} \right) - 2m\omega \sin \lambda \hat{k} \times \dot{\vec{r}}' = \\ &= -2m\omega \dot{x}' \cos \lambda \hat{k} - 2m\omega \sin \lambda \hat{k} \times \dot{\vec{r}}' \end{aligned}$$

<sup>1</sup><https://drive.google.com/file/d/1S7gKb0gTuW0T0F6L2mf01XvoPfYyNyU/view>



En el producto vectorial anterior, el primer término tiene dirección vertical, mientras que la dirección del segundo término está contenida en el plano tangente a la superficie de la Tierra. Para ver que el término en la dirección  $\hat{k}$  es despreciable, hagamos unas cuentas rápidas. Si suponemos,  $\lambda = \frac{\pi}{2}$  y  $\dot{x}' = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , entonces obtenemos que el módulo de dicho término es  $1,5 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$ . Luego, evidentemente es despreciable frente a  $\vec{g}'$ .

Como las oscilaciones son pequeñas por hipótesis, podemos aproximar la oscilación del péndulo por un movimiento armónico con  $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$ . De esta manera, despreciando el término en  $\hat{k}$ , la segunda ley de Newton queda:

$$\ddot{\vec{r}}' = \frac{\vec{F}_T + m\vec{g}'}{m} - 2\omega \sin \lambda \hat{k} \times \dot{\vec{r}}' + 2\omega \cos \lambda \dot{x}' \hat{k} \approx -\frac{\vec{g}'}{L} \vec{r}' - 2\omega \sin \lambda \hat{k} \times \dot{\vec{r}}'$$

Al expresar la velocidad en sus componentes, llegamos a:

$$\ddot{\vec{r}}' = -\frac{g'}{L} \vec{r}' - 2\omega \sin \lambda (\dot{x}' \hat{j} - \dot{y}' \hat{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}' = -\frac{g'}{L} x' + 2\omega \sin \lambda \dot{y}' \\ \ddot{y}' = -\frac{g'}{L} y' - 2\omega \sin \lambda \dot{x}' \end{cases}$$

¿Cómo resolvemos este sistema de forma sencilla? Pues, en este caso, interesa tomar el cambio de variable  $z := x' + iy'$  y hacer cuentas con las ecuaciones que tenemos para obtener una ecuación para  $z$ . Para ello, sumamos ambas ecuaciones multiplicando la segunda por  $i$ . De esta forma, obtenemos:

$$\begin{aligned} \underbrace{\ddot{x}' + i\ddot{y}'}_{=\ddot{z}} &= -\frac{g'}{L} \underbrace{(x' + iy')}_=z + 2\omega \sin \lambda (\dot{y}' - i\dot{x}') \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ddot{z} = -\frac{g'}{L} z + 2i\omega \sin \lambda \underbrace{(i\dot{y}' + \dot{x}')}_=\dot{z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ddot{z} = -\frac{g'}{L} z - 2i\omega \sin \lambda \dot{z} \Leftrightarrow \ddot{z} + 2i\omega \sin \lambda \dot{z} + \frac{g'}{L} z = 0 \end{aligned}$$

Como  $\frac{g'}{L} = \omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2}$  y es  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , obtenemos:

$$\ddot{z} + \frac{4\pi}{T} i \sin \lambda \dot{z} + \frac{4\pi^2}{T_0^2} z = 0$$

que justo tiene la forma de un oscilador lineal amortiguado débil, pues:

$$T > T_0 \Leftrightarrow \frac{1}{T} < \frac{1}{T_0} \Leftrightarrow \frac{1}{T^2} < \frac{1}{T_0^2} \xLeftrightarrow{4\pi^2 > 0} \frac{4\pi^2}{T^2} < \frac{4\pi^2}{T_0^2} \Leftrightarrow \omega < \omega_0$$

De esta forma, por la proposición 38 en la página 98, obtenemos que la solución de nuestro sistema es:

$$z = e^{-\frac{2\pi}{T} i t \sin \lambda} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t)$$

donde  $A, B \in \mathbb{C}$  y  $\omega_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\sin^2 \lambda}{T^2} + \frac{1}{T_0^2}} \approx \frac{2\pi}{T_0}$ . En consecuencia, obtenemos las soluciones de nuestra ecuación al hallar la parte real y la parte imaginaria de  $z$ . Aplicando la fórmula de Euler (ver proposición 23 en la página 74) y llamando  $A := a + bi$  y  $B := c + di$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} z &= \left[ \cos \left( -\frac{2\pi}{T} t \sin \lambda \right) + i \sin \left( -\frac{2\pi}{T} t \sin \lambda \right) \right] [(a + bi) \cos \omega_1 t + (c + di) \sin \omega_1 t] = \\ &= [(a + bi) \cos \omega_1 t + (c + di) \sin \omega_1 t] \left[ \cos \left( -\frac{2\pi}{T} t \sin \lambda \right) + i \sin \left( -\frac{2\pi}{T} t \sin \lambda \right) \right] = \\ &= \underbrace{(a \cos \omega_1 t + c \sin \omega_1 t) \cos \left( \frac{2\pi}{T} t \sin \lambda \right) + (b \cos \omega_1 t + d \sin \omega_1 t) \sin \left( \frac{2\pi}{T} t \sin \lambda \right)}_{=x'} + \end{aligned}$$

$$i \underbrace{\left[ - (a \cos \omega_1 t + c \sin \omega_1 t) \sin \left( \frac{2\pi}{T} t \sin \lambda \right) + (b \cos \omega_1 t + d \sin \omega_1 t) \cos \left( \frac{2\pi}{T} t \sin \lambda \right) \right]}_{=y'}$$

Los términos marcados entre paréntesis son soluciones de un oscilador armónico. De manera que, por la proposición 36 en la página 89 sabemos que existen  $A', B', \varphi, \phi \in \mathbb{R}$  tales que podemos expresar la solución anterior como sigue:

$$\begin{aligned} x'(t) &= A' \cos(\omega_1 t + \varphi) \cos \left( \frac{2\pi}{T} t \sin \lambda \right) + B' \cos(\omega_1 t + \phi) \sin \left( \frac{2\pi}{T} t \sin \lambda \right) \\ y'(t) &= -A' \cos(\omega_1 t + \varphi) \sin \left( \frac{2\pi}{T} t \sin \lambda \right) + B' \cos(\omega_1 t + \phi) \cos \left( \frac{2\pi}{T} t \sin \lambda \right) \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

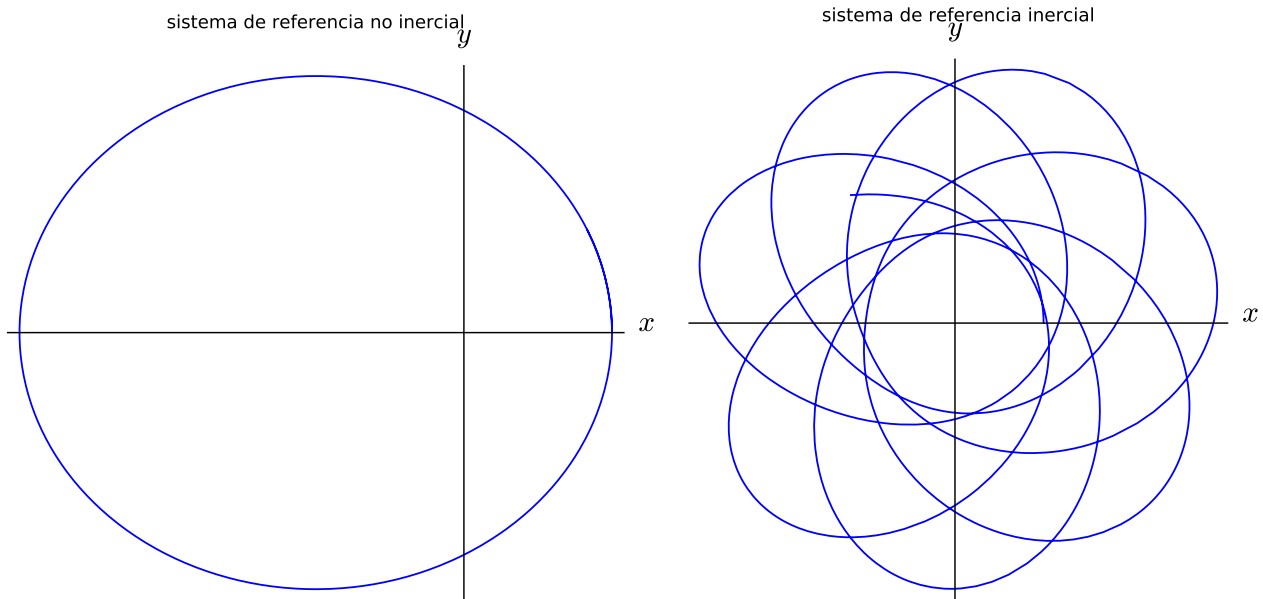
*Observación 87.* En el polo norte, un observador inercial no vería el péndulo de Foucault girar. Sin embargo, un observador no inercial sí que lo vería girar. Lo primer se debe a que para el observador inercial las únicas fuerzas que actúan son la tensión y la gravedad terrestre. Por tanto, para el observador inercial, el sistema sería el péndulo de toda la vida. Sin embargo, para el observador no inercial, tendríamos las ecuaciones de la proposición 107 en la página 278 con  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ , con lo que el observador no inercial sí que vería un giro.

En 1851, Foucault en el Panteón de París con datos  $m = 28$  kg,  $L = 67$  m y  $\lambda = 48^\circ 50'$ , se obtuvo  $T = 32$  h y  $T_0 = 16$  s.

## 5.4. Efecto Larmor

**Proposición 108.** Sea una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  sometida a una fuerza eléctrica generada por una carga inmóvil  $q'$  y un campo magnético constante en el tiempo  $\vec{B}$  tal que  $B \ll \frac{2\sqrt{2}m\pi}{qT}$  donde  $T$  es el periodo de la órbita elíptica que describiría  $q$  en torno al centro de fuerzas si fuese  $\vec{B} = \vec{0}$ . Si, además, las cargas  $q$  y  $q'$  son de distinto signo; entonces, para un observador inercial, la posición de la partícula viene descrita por:

$$r(t) = \frac{l}{e \cos \left( \theta(t) + \frac{qB}{2m} t - \phi \right) + 1}$$



Puede verse una animación aquí<sup>2</sup>.

<sup>2</sup><https://drive.google.com/open?id=1yHLh9IteUknfzD0JLaDqCUHduNi7Q15i>

*Demostración.* En esta demostración vamos a usar la similitud existente entre la fuerza de Coriolis y la fuerza magnética, en el sentido de que ambas son perpendiculares a la trayectoria. Para un observador inercial, la segunda ley de Newton aplicada a la partícula de carga  $q$  queda:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{Kq'q}{r^2} \hat{r} + q \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B} \Leftrightarrow \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{k}{mr^2} \hat{r} + \frac{q}{m} \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}$$

donde aparecen los términos correspondientes a la fuerza electrostática y a la fuerza de Lorentz y es  $k = Kq'q$ . Bien, ahora nos hacemos la siguiente pregunta: ¿existe un sistema de referencia no inercial con origen en el centro de fuerzas de la fuerza de Coulomb tal que desde él en la segunda ley de Newton no aparecen términos dependientes de la velocidad? Para un sistema de referencia no inercial que gira con velocidad constante  $\omega$  respecto al centro de fuerzas del campo eléctrico, por la segunda ley de Newton para sistemas de referencia no inerciales (ver teorema 30 en la página 263), tenemos:

$$m \ddot{\vec{r}}' = -\frac{k}{r'^2} \hat{r}' + q \dot{\vec{r}}' \times \vec{B} - \underbrace{m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}}_{=\vec{0}} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') - \underbrace{m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}_{=\vec{0}}$$

donde el primer término marcado se anula porque es  $\vec{R} = \vec{0}$  y el último término se anula porque es  $\omega = \text{cte}$ . Dividiendo por la masa a ambos lados y reordenando términos, obtenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}' &= -\frac{k}{mr'^2} \hat{r}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2 (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') - \frac{q}{m} \vec{B} \times \dot{\vec{r}}' = \\ &= -\frac{k}{mr'^2} \hat{r}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2 \left[ \left( \vec{\omega} + \frac{q}{2m} \vec{B} \right) \times \dot{\vec{r}}' \right] \end{aligned}$$

De esta forma, vemos que, efectivamente si:

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{2m} \vec{B}$$

entonces el término dependiente de la velocidad (el término en  $\dot{\vec{r}}'$ ) se anula. Bien, si nos quedamos con este sistema de referencia inercial, al sustituir  $\vec{\omega}$ , la segunda ley de Newton nos queda:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}' &= -\frac{k}{mr'^2} \hat{r}' - 2 \left( -\frac{q}{2m} \vec{B} \right) \times \left[ \left( -\frac{q}{2m} \vec{B} \right) \times \vec{r}' \right] = -\frac{k}{r'^2} \hat{r}' - 2 \frac{q^2}{4m^2} \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{r}') = \\ &= -\frac{k}{mr'^2} \hat{r}' - \frac{q^2}{2m^2} \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{r}') \end{aligned}$$

Nótese que este segundo término siempre tiene dirección radial ( $\hat{r}'$ ), ya sea hacia dentro o hacia fuera. Estudiemos el módulo del primer término:

$$\left\| -\frac{k}{mr'^2} \hat{r}' \right\| = \left| \frac{k}{mr'^2} \right|$$

Como la longitud del eje mayor  $2a$  de una elipse es siempre mayor que la distancia de cualquier punto de la elipse al foco se da siempre  $2a > r'$ , tenemos:

$$\left\| -\frac{k}{mr'^2} \hat{r}' \right\| > 2 \left| \frac{k}{ma^2} \right| = 2a \frac{|k|}{a^3} > r' \frac{|k|}{a^3}$$

Y, por la tercera ley de Kepler (ver teorema 20 en la página 187), tenemos:

$$\left\| -\frac{k}{mr'^2} \hat{r}' \right\| > r' \frac{4\pi^2}{\mathcal{T}^2}$$

Como por hipótesis es:

$$B \ll \frac{2\sqrt{2}m\pi}{q\mathcal{T}} \Leftrightarrow \frac{q}{\sqrt{2}m} B \ll \frac{2\pi}{\mathcal{T}} \Leftrightarrow \frac{q^2}{2m^2} B^2 \ll \frac{4\pi^2}{\mathcal{T}^2}$$

tenemos:

$$\left\| -\frac{k}{mr'^2} \hat{r}' \right\| \gg \frac{q^2}{2m^2} B^2 r' \geq \left\| -\frac{q^2}{2m^2} \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{r}') \right\|$$

De esta forma, podemos despreciar el término que contiene al campo magnético en comparación con el originado por la fuerza de Coulomb. Insistimos en que esto sólo es válido porque la fuerza centrífuga obtenida (el término en  $\vec{B}$ ) tiene dirección radial.

Por consiguiente, la segunda ley de Newton en el sistema de referencia no inercial queda:

$$\ddot{\vec{r}}' \approx -\frac{k}{mr'^2} \hat{r}'$$

de manera que para el sistema no inercial la partícula describe la misma elipse que describiría para un sistema inercial si fuese  $\vec{B} = \vec{0}$ . De esta forma, por la proposición 71 en la página 166, tenemos que la trayectoria desde el punto de vista del sistema no inercial en polares queda:

$$r' [e \cos(\theta' - \theta'_0) + 1] = l \Leftrightarrow r'(\theta') = \frac{l}{e \cos(\theta' - \theta'_0) + 1}$$

donde  $l = \frac{L^2}{m|k|}$ . Como es  $\vec{r}' = \vec{r}$ , al tener ambos sistemas de referencia el mismo origen, es  $r = r'$  y, así, en coordenadas polares en ambos sistemas de referencia, la componente radial será la misma. Lo que variará será el ángulo  $\theta$  que tendrá un desfase que dependerá de  $\omega$  y del tiempo y, por tanto, de  $B$ . No es difícil ver que la relación entre  $\theta$  y  $\theta'$  será:

$$\theta = \theta' + \omega t + \varphi$$

donde  $\varphi$  es un desfase inicial entre el sistema de referencia inercial y no inercial. Hemos hallado antes que es:

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{2m} \vec{B}$$

de forma que:

$$\theta(t) = \theta'(t) - \frac{qB}{2m}t + \varphi \Leftrightarrow \theta'(t) = \theta(t) + \frac{qB}{2m}t - \varphi$$

donde el signo menos se debe a que  $\vec{\omega}$  tiene dirección opuesta a  $\vec{B}$ . Así, la trayectoria vista desde un sistema de referencia inercial vendrá dada por:

$$r(t) = \frac{l}{e \cos\left(\theta(t) + \frac{qB}{2m}t - \theta'_0 - \varphi\right) + 1}$$

Si llamamos  $\phi := \theta'_0 + \varphi$ , llegamos al enunciado.

*Q.E.D.*

**Definición 103.** Llamamos **frecuencia Larmor** a:

$$\omega = \frac{q}{2m}$$

que es la mitad de la frecuencia del ciclotrón (ver ejemplo).

*Observación 88.* En electromagnetismo, el efecto Larmor se conoce como efecto Zeeman y se usa en espectroscopia.

## 5.5. Las mareas

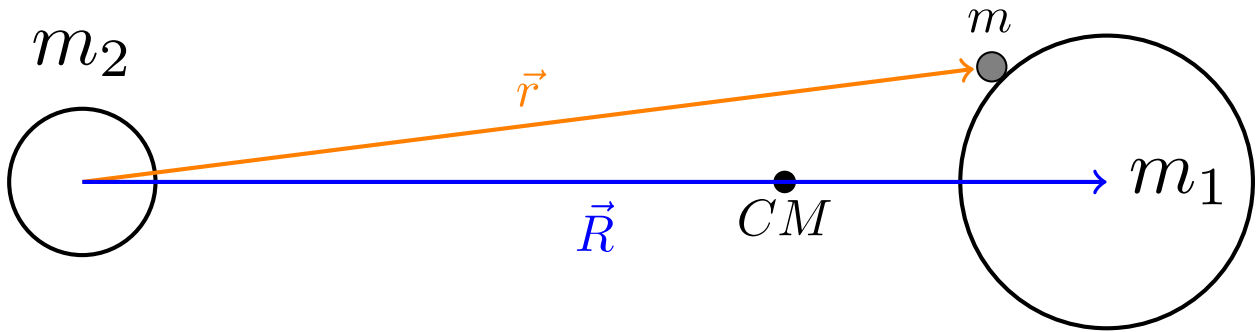
**Definición 104.** Llamamos fuerzas de marea que ejerce un cuerpo de masa  $m_2$  sobre una partícula de masa  $m$  situada sobre la superficie de otro cuerpo de masa  $m_1$  al conjunto de las fuerzas gravitatorias generadas por la masa  $m_2$  que actúan sobre la masa  $m$  vistas desde un sistema de referencia no inercial con  $\vec{\omega} = \vec{0}$  situado en el centro del cuerpo de masa  $m_1$ .

## 5.5.1. Obtención de las fuerzas de marea

**Proposición 109.** Las fuerzas de marea que ejerce un cuerpo de masa  $m_2$  sobre una partícula móvil de masa  $m$  que se encuentra en la superficie de otro cuerpo de masa  $m_1$  vienen dadas por la expresión:

$$\vec{F}_{\text{marea}} = -Gm_2m \left( \frac{\hat{R}}{R^2} - \frac{\hat{r}}{r^2} \right)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $\vec{R}$  es el vector que va desde el centro del cuerpo de masa  $m_2$  al centro del cuerpo de masa  $m_1$  y  $\vec{r}$  es el vector posición de la partícula de masa  $m$  con respecto al centro del cuerpo de masa  $m_2$ .



*Demostración.* Estamos ante el problema de dos cuerpos. Por la proposición 85 en la página 224, sabemos que ambos cuerpos orbitarán en torno al centro de masas. Escogemos un sistema de referencia no inercial con origen en el centro del cuerpo de masa  $m_1$ . Aunque el cuerpo de masa  $m_1$  rote sobre sí mismo, escogemos el sistema de referencia de tal forma que el sistema de referencia no rote; es decir, tal que  $\vec{\omega} = \vec{0}$ . Por la segunda ley de Newton para un sistema de referencia no inercial (ver teorema 30 en la página 263) aplicada a la partícula de masa  $m$  situada sobre la superficie del cuerpo de masa  $m_1$ , tenemos:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\frac{d^2\vec{D}}{dt^2} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$$

donde  $\vec{D}$  es el vector que parte del centro de masas del sistema y termina en el centro de la masa  $m_1$ . En nuestro caso, como es  $\vec{\omega} = \vec{0}$ , todos los términos excepto los dos primeros se hacen cero:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\frac{d^2\vec{D}}{dt^2} \quad (5.5.1)$$

La  $\vec{F}$  que aparece en el término anterior puede descomponerse de la siguiente forma:

$$\vec{F} = \vec{F}_{ng} - \frac{Gm_1m}{r'^2}\hat{r}' - \frac{Gm_2m}{r^2}\hat{r}$$

pues las fuerzas que actúan sobre la partícula de masa  $m$  son las fuerzas gravitatorias que las masas  $m_1$  y  $m_2$  ejercen sobre la masa  $m$  y el resto de fuerzas (no gravitatorias) que actúan sobre  $m$ .

Por otra parte, tenemos por la proposición 84 en la página 216:

$$\vec{D} = \vec{R}_1^* = \frac{m_2}{M}\vec{R}$$

donde  $M = m_1 + m_2$ . Como el sistema de referencia no inercial únicamente se encuentra trasladado respecto de uno inercial situado en el centro de masas, por la proposición 100 en la página 257, tenemos:

$$\frac{d^2\vec{D}}{dt^2} = \ddot{\vec{D}} = \ddot{\vec{R}}_1^* = \frac{m_2}{M}\ddot{\vec{R}}$$

Ahora, por el teorema 22 en la página 215, tenemos que:

$$\mu\ddot{\vec{R}} = -\frac{Gm_1m_2}{R^2}\hat{R} \Leftrightarrow \ddot{\vec{R}} = -\frac{Gm_1m_2}{\mu R^2}\hat{R}$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$\frac{d^2 \vec{D}}{dt^2} = \frac{m_2}{M} \left( - \underbrace{\frac{M}{m_1 m_2}}_{=\frac{1}{\mu}} \frac{G m_1 m_2}{R^2} \hat{R} \right) = - \frac{G m_2}{R^2} \hat{R}$$

Sustituyendo todo lo hallado hasta la fecha en la ecuación 5.5.1 en la página anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} m \ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_{ng} - \frac{G m_1 m}{r'^2} \hat{r}' - \frac{G m_2 m}{r^2} \hat{r} - m \left( - \frac{G m_2}{R^2} \hat{R} \right) = \\ &= \vec{F}_{ng} - \frac{G m_1 m}{r'^2} \hat{r}' - \underbrace{\frac{G m_2 m}{r^2} \hat{r} + \frac{G m_2 m}{R^2} \hat{R}}_{\text{fuerzas de marea}} \end{aligned}$$

Las fuerzas de marea son justo los términos que son debidos a la masa  $m_2$  por la definición 104 en la página 283. De esta forma tenemos:

$$\vec{F}_{\text{marea}} = -G m_2 m \left( \frac{\hat{r}}{r^2} - \frac{\hat{R}}{R^2} \right)$$

como queríamos demostrar.

*Q.E.D.*

**Lema 12.** *El teorema de Taylor-Young aplicado a la función:*

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

nos dice que cuando  $x \rightarrow 0$ ,  $f(x)$  puede escribirse como:

$$f(x) = 1 - 2x + o(|x|)$$

**Lema 13.** *El teorema de Taylor-Young aplicado a la función:*

$$f(x) = 1 + x^2$$

nos dice que cuando  $x \rightarrow 0$ ,  $f(x)$  puede escribirse como:

$$f(x) = 1 + o(|x|)$$

**Corolario 44.** *Supongamos que la Tierra está recubierta de océanos en su totalidad. Las fuerzas de marea que ejerce la Luna sobre un  $dV$  de líquido de densidad  $\rho$  situado en la superficie de la Tierra vienen dadas por la expresión:*

$$\vec{F}_{\text{marea}} = -G M_L \rho dV \left( \frac{\hat{r}}{r^2} - \frac{\hat{R}}{R^2} \right)$$

donde  $M_L$  es la masa de la Luna,  $\vec{R}$  es el vector que va desde el centro de la Luna hasta el centro de la Tierra y  $\vec{r}$  es el vector que va desde el centro de la Luna hasta la partícula de masa  $m$ . Además, a lo largo de la dirección de  $\hat{R} =: \hat{i}$ , las fuerzas de marea permiten la siguiente aproximación a primer orden:

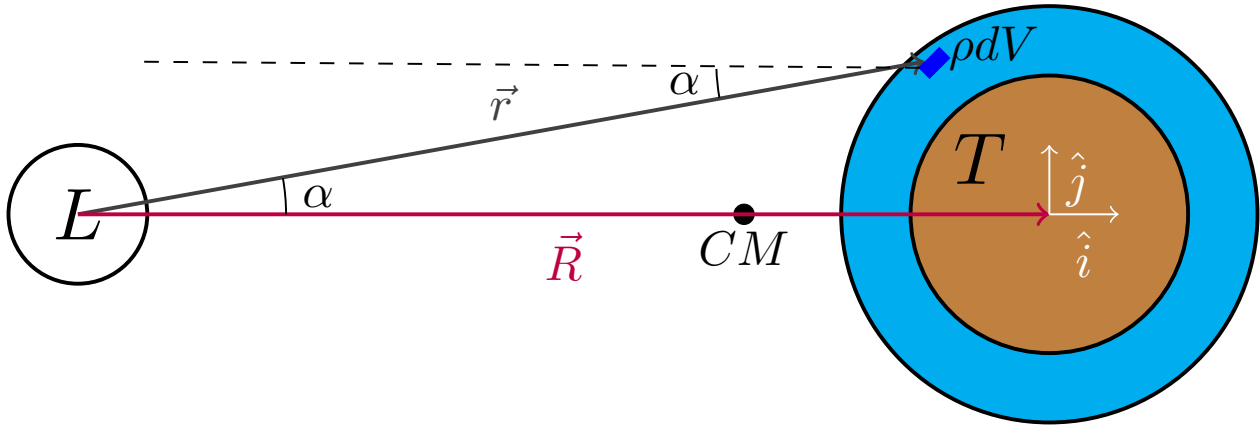
$$\vec{F}_{\text{marea},x} \approx \frac{2G M_L \rho dV x}{R^3} \hat{i}$$

donde  $x$  es la distancia a lo largo de la dirección de  $\hat{i}$  al centro de la Tierra. Análogamente, a lo largo del eje perpendicular a la dirección  $\hat{R}$  (llamaremos al vector unitario de dicha dirección  $\hat{j}$ ), las fuerzas de marea pueden ser aproximadas a primer orden de la siguiente manera:

$$\vec{F}_{\text{marea},y} \approx -\frac{G M_L \rho dV y}{R^3} \hat{j}$$

donde  $y$  es la distancia a lo largo de la dirección de  $\hat{j}$  al centro de la Tierra.

Este resultado no sólo es válido para estudiar las fuerzas de marea ejercidas por la Luna sobre la Tierra, sino también para estudiar los efectos de las fuerzas de marea ejercidas por el Sol, cambiando la masa de la Luna por la masa del Sol en las ecuaciones.



*Demostración.* Partiendo de la proposición 104 en la página 283, obtenemos al sustituir  $m_2 = M_L$  y  $m = \rho dV$ :

$$\vec{F}_{\text{marea}} = -GM_L \rho dV \left( \frac{\hat{r}}{r^2} - \frac{\hat{R}}{R^2} \right) \quad (5.5.2)$$

A lo largo de la dirección de  $\hat{i} = \hat{R}$ , podemos descomponer la expresión anterior como:

$$\vec{F}_{\text{marea},x} = -GM_L \rho dV \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) \hat{i}$$

Como, en este caso, es  $r = R + x$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{marea},x} &= -GM_L \rho dV \left( \frac{1}{(R+x)^2} - \frac{1}{R^2} \right) \hat{i} = -\frac{GM_L \rho dV}{R^2} \left( \frac{1}{\left(\frac{R+x}{R}\right)^2} - 1 \right) \hat{i} = \\ &= -\frac{GM_L \rho dV}{R^2} \left( \frac{1}{\left(\frac{R+x}{R}\right)^2} - 1 \right) \hat{i} = -\frac{GM_L \rho dV}{R^2} \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{R}\right)^2} - 1 \right) \hat{i} \end{aligned}$$

Como es  $x \ll R$ , podemos usar el lema 12 en la página anterior para obtener una aproximación a primer orden de la expresión anterior:

$$\vec{F}_{\text{marea},x} \approx -\frac{GM_L \rho dV}{R^2} \left( 1 - 2\frac{x}{R} - 1 \right) \hat{i} = \frac{2GM_L \rho dV x}{R^3} \hat{i}$$

Análogamente, a lo largo de la dirección de  $\hat{j}$ , podemos descomponer la expresión dada en la ecuación 5.5.2. Si llamamos  $\alpha$  al ángulo que forman los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{R}$ , podemos descomponer la expresión anterior como:

$$\vec{F}_{\text{marea},y} = -GM_L \rho dV \left( \frac{1}{r^2} [\cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}] - \frac{\hat{i}}{R^2} \right)$$

Viendo el dibujo de debajo de la proposición deducimos:

$$\cos \alpha = \frac{R}{r} \quad \sin \alpha = \frac{y}{r}$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$\vec{F}_{\text{marea},y} = -GM_L \rho dV \left( \frac{1}{r^2} \left[ \frac{R}{r} \hat{i} + \frac{y}{r} \hat{j} \right] - \frac{\hat{i}}{R^2} \right) = -GM_L \rho dV \left[ \left( \frac{R}{r^3} - \frac{1}{R^2} \right) \hat{i} + \frac{y}{r^3} \hat{j} \right]$$

Ya que, en este caso, es  $r^2 = R^2 + y^2$ , sustituyendo, obtenemos:

$$\vec{F}_{\text{marea},y} = -GM_L \rho dV \left[ \left( \frac{R}{(R^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{R^2} \right) \hat{i} + \frac{y}{R^3} \hat{j} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= -GM_L \rho dV \left[ \left( \frac{R}{\left( R^2 \left( 1 + \frac{y^2}{R^2} \right) \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{R^2} \right) \hat{i} + \frac{y}{R^3} \hat{j} \right] = \\
&= -GM_L \rho dV \left[ \left( \frac{R}{R^3 \left( 1 + \frac{y^2}{R^2} \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{R^2} \right) \hat{i} + \frac{y}{R^3} \hat{j} \right] = \\
&= -GM_L \rho dV \left[ \left( \frac{1}{R^2 \left( 1 + \frac{y^2}{R^2} \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{R^2} \right) \hat{i} + \frac{y}{R^3} \hat{j} \right]
\end{aligned}$$

Usando el lema 13 en la página 285, obtenemos una aproximación a primer orden de:

$$1 + \frac{y^2}{R^2} \approx 1$$

Sustituyendo en la expresión anterior, tenemos:

$$\vec{F}_{\text{marea},y} = -GM_L \rho dV \left[ \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^2} \right) \hat{i} + \frac{y}{R^3} \hat{j} \right] = -\frac{GM_L \rho dV y}{R^3} \hat{j}$$

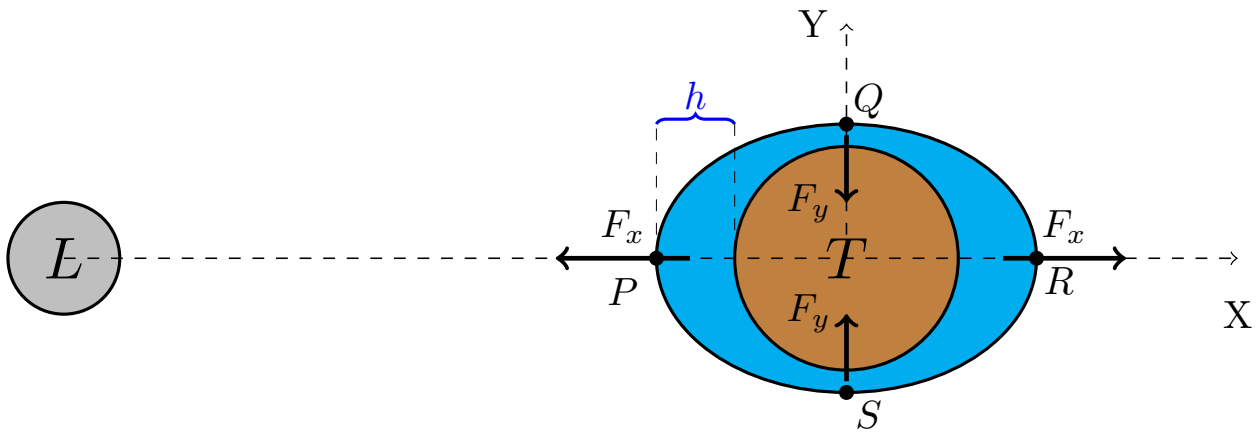
*Q.E.D.*

### 5.5.2. Magnitud de las mareas

**Proposición 110.** *Supongamos que la Tierra está recubierta de océanos en su totalidad. Las fuerzas de marea que ejerce la Luna sobre la Tierra causan una diferencia de altura entre el punto más bajo y el punto más alto del líquido que se puede aproximar por la expresión:*

$$h \approx \frac{3M_L R_T^4}{2M_T R^3}$$

donde  $M_L$  es la masa de la Luna,  $R_T$  es el radio de la Tierra,  $M_T$  es la masa de la Tierra y  $R$  es la distancia que separa la Tierra de la Luna. La expresión anterior es válida para las fuerzas de marea ejercidas por el Sol sustituyendo la masa de la Luna por la masa del Sol.



*Demostración.* Probemos, primero, que las fuerzas de marea dadas en la proposición 109 en la página 284 son conservativas:

$$\vec{F}_{\text{marea}} = -Gm_2m \left( \frac{\hat{R}}{R^2} - \frac{\hat{r}}{r^2} \right)$$



Claramente, el término anterior únicamente depende de posiciones, luego sólo tenemos que determinar que el rotacional de la expresión es cero para ver que la fuerza es conservativa:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_{\text{marea}} = \vec{\nabla} \times \left[ -Gm_2m \left( \frac{\hat{R}}{R^2} - \frac{\hat{r}}{r^2} \right) \right]$$

Como el rotacional es un operador lineal, obtenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_{\text{marea}} = -Gm_2m \left[ \underbrace{\vec{\nabla} \times \frac{\hat{R}}{R^2}}_{=0} - \vec{\nabla} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right]$$

donde el primer término se anula porque  $\frac{\hat{R}}{R^2} = \text{cte.}$  De esta forma, obtenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_{\text{marea}} = Gm_2m \vec{\nabla} \times \frac{\hat{r}}{r^2}$$

y este término se anula porque  $\frac{\hat{r}}{r^2}$  se corresponde con una fuerza descrita por la ley cuadrática inversa. Y por nuestros conocimientos del tema 3, sabemos que una fuerza así es conservativa, por lo que su rotacional será nulo. Así  $\vec{\nabla} \times \vec{F}_{\text{marea}} = \vec{0}$  y las fuerzas de marea son conservativas.

Sabemos que la superficie del agua es una superficie equipotencial. Por tanto, para un  $dV$  de líquido de densidad  $\rho$  será:

$$V(P) = V(Q) \Leftrightarrow V_{\text{marea}}(P) + \rho dV gh_1 = V_{\text{marea}}(Q) + \rho dV gh_2$$

pues las únicas fuerzas que actúan sobre un  $dV$  de líquido son las fuerzas de marea y las fuerzas gravitatorias. Llamando:  $h := h_1 - h_2$  (que es justo la diferencia de alturas, lo que queremos obtener), llegamos a:

$$V_{\text{marea}}(P) + \rho dV gh = V_{\text{marea}}(Q) \Leftrightarrow \rho dV gh = V_{\text{marea}}(Q) - V_{\text{marea}}(P) \quad (5.5.3)$$

Y, por el corolario 3 en la página 24, tenemos:

$$V_{\text{marea}}(Q) - V_{\text{marea}}(P) = -[W_{P \rightarrow Q}]_{\text{marea}} = - \int_P^Q \vec{F}_{\text{marea}} \cdot d\vec{r} = \int_Q^P \vec{F}_{\text{marea}} \cdot d\vec{r}$$

Como la fuerza de las mareas es conservativa, podemos realizar la integral anterior por aquel camino que nos sea más fácil. De esta forma, haremos la integral a lo largo del eje  $Y$  hasta el centro de la Tierra y luego a lo largo del eje  $X$  hasta el punto  $P$ . Para ello, usaremos las expresiones halladas en el corolario 44 en la página 285. Supondremos que la distancia de los puntos  $P$  y  $Q$  al centro de la Tierra es justo el radio de la Tierra. En consecuencia:

$$\begin{aligned} \int_Q^P \vec{F}_{\text{marea}} \cdot d\vec{r} &= \int_{y=R_T}^0 \vec{F}_{\text{marea},y} dy + \int_{x=0}^{-R_T} \vec{F}_{\text{marea},x} dx \approx \\ &\approx - \int_{y=R_T}^0 \frac{GM_L \rho dV y}{R^3} dy + \int_{x=0}^{-R_T} \frac{2GM_L \rho dV x}{R^3} dx = \int_{y=0}^{R_T} \frac{GM_L \rho dV y}{R^3} dy + \frac{2GM_L \rho dV}{R^3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{-R_T} = \\ &= \frac{GM_L \rho dV}{R^3} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{R_T} + \frac{GM_L \rho dV}{R^3} R_T^2 = \frac{GM_L \rho dV}{2R^3} R_T^2 + \frac{GM_L \rho dV}{R^3} R_T^2 = \\ &= \frac{GM_L \rho dV R_T^2}{R^3} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{2} \frac{GM_L \rho dV R_T^2}{R^3} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación 5.5.3, obtenemos:

$$\rho dV gh \approx \frac{3}{2} \frac{GM_L \rho dV R_T^2}{R^3} \Leftrightarrow gh \approx \frac{3}{2} \frac{GM_L R_T^2}{R^3}$$

Ahora, podemos escribir  $g$  como sigue:

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, llegamos a:

$$\frac{GM_T}{R_T^2} h \approx \frac{3}{2} \frac{GM_L R_T^2}{R^3} \Leftrightarrow h \approx \frac{3}{2} \frac{M_L R_T^4}{M_T R^3}$$

*Q.E.D.*

Utilizando la proposición 110 en la página 287, al introducir los datos numéricos  $M_L = 7,35 \cdot 10^{22}$  kg,  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$  kg,  $R_T = 6,37 \cdot 10^6$  m y  $R = 3,84 \cdot 10^8$  m, llegamos a:

$$h_L \approx 54 \text{ cm}$$

Haciendo lo mismo para los datos del sistema Tierra-Sol:  $M_S = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg,  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$  kg,  $R_T = 6,37 \cdot 10^6$  m y  $R = 1,495 \cdot 10^{11}$  m, obtenemos:

$$h_S \approx 25 \text{ cm}$$

De esta forma, vemos que aunque la diferencia de alturas debida al Sol es menor que la debida a Luna, la diferencia de alturas debido al Sol no es despreciable frente a la de la Luna. Esto hace que si el Sol y la Luna están alineados, entonces sus efectos se suman y causan una diferencia de alturas de  $h_T = h_L + h_S \approx 79$  cm; este efecto se conoce con el nombre de mareas vivas. Igualmente si el Sol y la Luna están justo en direcciones perpendiculares, entonces su efecto se resta obtendríamos una diferencia de altura  $h_T = h_L - h_S \approx 29$  cm; este fenómeno se conoce con el nombre de mareas muertas.

Si bien es cierto que la aproximación que hemos introducida es correcta, especialmente en el centro de los océanos más grandes, la situación real incluye muchas complicaciones; ante todo, la existencia de masas continentales. Esto puede contribuir tanto a crear mares más grandes o más pequeñas que las calculadas. Por ejemplo, un mar pequeño, como el Mediterráneo o el Mar Negro tendrá mareas más pequeñas que las predichas por nuestro modelo porque las masas continentales aíslan dichos mares de los océanos más grandes. De forma similar, las masas continentales pueden bloquear las mareas de un gran océano, confinándolas y creando, de esta forma, mareas de mayor amplitud.

El único aspecto del que no hemos hablado todavía es por qué las mareas son diferentes cada día. Esto se debe a que la posición de la Luna en el cielo es diferente cada día. Esto, a su vez, a que el periodo de rotación de la Luna en torno a la Tierra es mayor que el periodo de rotación de la Tierra.

# Apéndice A

## Registro de cambios

### A.1. Versión 1.0.0

- Primera versión de los apuntes.

#### A.1.1. Versión 1.0.1

- Corregido el hecho de que hasta el capítulo tercero no aparece la sección en el encabezado.
- En la proposición 68, en la página 161, se ha cambiado «y la velocidad **el** momento circular viene dada por la expresión:» por «y la velocidad **del** momento circular viene dada por la expresión:».
- En la solución del ejercicio 10 en la página 164, se ha añadido un **espacio** entre «por la proposición 68 en la página 160» y «tenemos».
- Se ha cambiado el nombre de la sección 3.4.2 de «Órbitas para la ley cuadrática inversa» a «Órbitas **y trayectorias** para la ley cuadrática inversa».
- En el ejemplo 8 en la página 31 se ha cambiado «otra bola que impacta **con** la varilla» por «otra bola que impacta **contra** la varilla».
- En todos los dibujos de la sección 1.7.1 «Expresión de la posición, la velocidad y la aceleración en coordenadas cilíndricas y esféricas (ejercicio para casa)», se ha cambiado  $\phi$  por  $\varphi$  para que cuadre con el texto.
- En la demostración del lema 3 en la página 60, hemos cambiado el párrafo:

**Asombrosamente, se cumple:**

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{dt}{\partial q_j} = \frac{\frac{\partial \vec{r}_i}{dt}}{\frac{\partial q_j}{dt}} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad \forall i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n$$

por:

**Asombrosamente, por el teorema de la función inversa, se cumple:**

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{dt}{\partial q_j} = \frac{\frac{\partial \vec{r}_i}{dt}}{\frac{\partial q_j}{dt}} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad \forall i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n$$

### A.1.2. Versión 1.0.2

- Al comienzo de la demostración de la proposición 105, en la página 276, se ha cambiado:

$$m\dot{\vec{r}}' \approx \vec{F}_{ng} + m\vec{g}' - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

por:

$$m\ddot{\vec{r}}' \approx \vec{F}_{ng} + m\vec{g}' - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

- En la demostración de la proposición 106, en la página 277, en la expresión matemática que viene a continuación de «Así, obtenemos:», se ha llevado a cabo el siguiente cambio:

$$\ddot{\vec{r}}' = -2m \left( \omega \cos \lambda \hat{j} + \omega \sin \lambda \hat{k} \right) \times \left( \dot{x}' \hat{i} + \dot{y}' \hat{j} \right) = -2 \left[ -\dot{x}' \omega \cos \lambda \hat{k} + \omega \sin \lambda \hat{k} \times \dot{\vec{r}}' \right] \Leftrightarrow$$

por:

$$\ddot{\vec{r}}' = -2 \left( \omega \cos \lambda \hat{j} + \omega \sin \lambda \hat{k} \right) \times \left( \dot{x}' \hat{i} + \dot{y}' \hat{j} \right) = -2 \left[ -\dot{x}' \omega \cos \lambda \hat{k} + \omega \sin \lambda \hat{k} \times \dot{\vec{r}}' \right] \Leftrightarrow$$

### A.1.3. Versión 1.0.3

- En la demostración de la proposición 31 en la página 81, en la referencia dada a la proposición 24, no se mencionaba la página donde aparecía esta última; dicha página es la página 74.
- Se ha cambiado el nombre de la sección 1.8 «Coordenadas generalizadas, ligaduras y sistemas» a «Coordenadas generalizadas y ligaduras».
- Se ha cambiado el nombre de la sección 1.8.2 de «Tipos de sistemas» a «Coordenadas naturales y forzadas».

# Bibliografía

- [1] Clases impartidas por Pilar Arroyo en la asignatura de Mecánica Clásica I del curso 2018-2019 de la carrera de Física en la Universidad de Zaragoza.
- [2] Taylor, John. R. (2013) *Mecánica clásica*. Barcelona: Editorial Reverté.
- [3] Rañada, Antonio (1990) *Dinámica clásica*. Madrid: Alianza Universidad.
- [4] Kibble, T.W.B. (1974) *Mecánica clásica*. Bilbao: URMO.