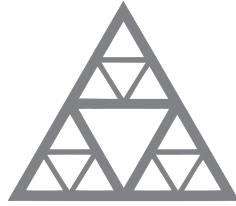


ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES



École des Ponts
ParisTech

DÉPARTEMENT GÉNIE MÉCANIQUE ET MATÉRIAUX - 2019/2020

PROJET3 - Matériaux Hétérogènes

Réalisé par : **Andrey Latyshev** & **Siyuan HE**

Encadré par : **Karam SAB** & **Francis LAVERGNE**

Table des matières

1	Préliminaires	2
2	Les problèmes plans de la détermination de C_{\approx}^{DP}	2
2.1	Essai ① - Détermination de A	3
2.2	Essai ② - Détermination de C	3
2.3	Essai ③ - Détermination de B	4
2.4	Essai ④ - Détermination de D	4
3	Détermination numérique des composantes de C_{\approx}^{DP}	4
3.1	Géométrie	4
3.2	Propriétés	5
3.3	Conditions aux limites	5
3.4	Maillage	7
3.5	Résultats de la modélisation	8
4	Estimation théorique de C_{\approx}^{DP}	10
4.1	Essai ①	11
4.2	Essai ②	12
4.3	Essai ③	13
4.4	Essai ④	13
4.4.1	façon 1	13
4.4.2	façon 2	14
5	Comparaison et synthèse	15
6	Annexe	17

1 Préliminaires

On considère un matériau cellulaire constitué d'une matrice élastique, linéaire et isotrope et de vide. Voici l'image pour montrer la géométrie de notre projet :

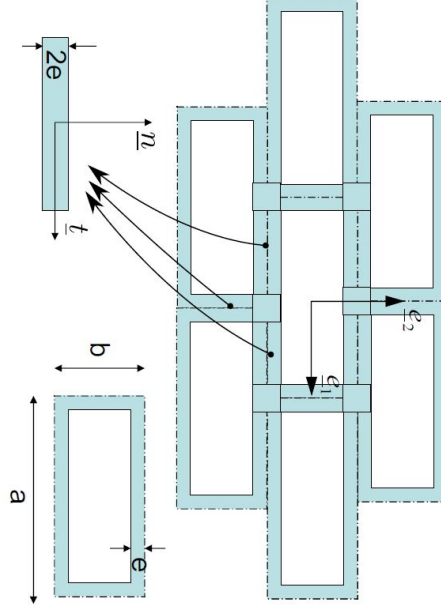


FIGURE 1 – Géométrie du Projet3

L'hétérogénéité est invariant dans le sens 3. La répartition de la matière est périodique comme ci-dessus. Notre objectif est d'estimer numériquement le tenseur d'élasticité homogénéisé en déformation plane(1,2), $\underset{\approx}{C}^{DP} = C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{DP}, \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$, et de comparer cette estimation à une estimation théorique à construire. Le contrainte macroscopique et la déformation macroscopique n'a que les composantes en déformation plane (1,2). Le tenseur $\underset{\approx}{C}^{DP}$ lie le contrainte macroscopique $\underset{\approx}{\Sigma}$ avec la déformation macroscopique $\underset{\approx}{E}$. On le écrit ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ 2\Sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{pmatrix}$$

Son énergie de déformation est :

$$\begin{aligned} W(\underline{E}) &= \frac{1}{2} \langle \underline{\varepsilon} : \underset{\approx}{C} : \underline{\varepsilon} \rangle \\ &= \frac{1}{l_1 l_2} \iint_S \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underset{\approx}{C} : \underline{\varepsilon} dS \\ &= \frac{1}{2} (A E_{11}^2 + 2B E_{11} E_{22} + C E_{22}^2 + 4D E_{12}^2) \end{aligned}$$

2 Les problèmes plans de la détermination de $\underset{\approx}{C}^{DP}$

Dans cette partie on essaie d'utiliser la périodicité et la symétrie du motif ci-dessus pour simplifier notre calculs. Il faut garder l'invariance de motif par rapport à la translation quelconque. D'abord on considère le cellule de base ci-dessous :

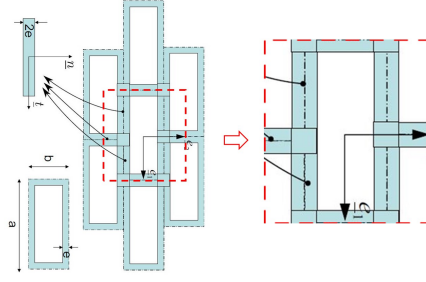


FIGURE 2 – la première simplification par la périodicité

En considérant la symétrie de ce profil, on a le droit de le simplifier encore. Il est centrosymétrique. On doit le couper par quatre morceaux et y ajouter les contraintes au bord sur le côté à gauche et sur le côté en haut. On précise le type des contraintes selon le chargement. Ensuite on obtient un cellule de base ci-dessous :

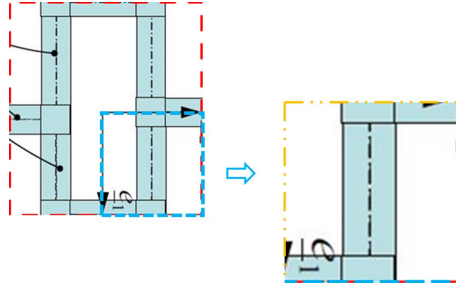


FIGURE 3 – la deuxième simplification par la symétrie

Rappelons l'expression de l'énergie, on veut déterminer les composantes de $\underline{\underline{C}}^{DP}$ séparément selon l'énergie totale mesurée par Abaqus ou bien estimée par la théorie de poutre. On élabore quatre cas de chargement :

2.1 Essai ① - Détermination de A

On fait un essai de la traction simple dans le sens 1 : $\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On impose $E_{11} = 1$ et exprime le A en fonction de l'énergie totale correspondante :

$$A = 2W(\underline{\underline{E}}\textcircled{1})$$

Pour les conditions aux limites, en considérant les simplifications par la périodicité et la symétrie, on fixe les libérté perpendiculaire aux côtés à gauche et en haut.

2.2 Essai ② - Détermination de C

On fait un essai de la traction simple dans le sens 2 : $\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix}$. On impose $E_{22} = 1$ et exprime le A en fonction de l'énergie totale correspondante :

$$C = 2W(\underline{\underline{E}}\textcircled{2})$$

Pour les conditions aux limites, en considérant les simplifications par la périodicité et la symétrie, on fixe les liberté perpendiculaire aux côtés à gauche et en haut.

2.3 Essai ③ - Détermination de B

On fait un essai de la traction en double sens 1 et 2 : $\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix}$. C'est-à-dire que l'on garde les trois termes A, B et C. On exprime le B en fonction de l'énergie totale correspondante avec A et C déterminées dans les essais avants :

$$B = \frac{1}{2}(2W(\underline{\underline{E}}\textcircled{3}) - A - C)$$

Pour les conditions aux limites, en considérant les simplifications par la périodicité et la symétrie, on fixe les liberté perpendiculaire aux côtés à gauche et en haut.

2.4 Essai ④ - Détermination de D

On fait un essai du cisaillement simple : $\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 0 & E_{12} \\ E_{12} & 0 \end{pmatrix}$. On impose $E_{12} = \frac{1}{2}$ et exprime le D en fonction de l'énergie totale correspondante :

$$D = 2W(\underline{\underline{E}}\textcircled{4})$$

Pour les conditions aux limites, en considérant les simplifications par la périodicité et la symétrie, on fixe les libertés coïncidentes avec les côtés à gauche et en haut.

3 Détermination numérique des composantes de $\underline{\underline{C}}^{DP}$

On explique qu'est-ce que on a fait dans chaque partie de Abaqus.

3.1 Géométrie

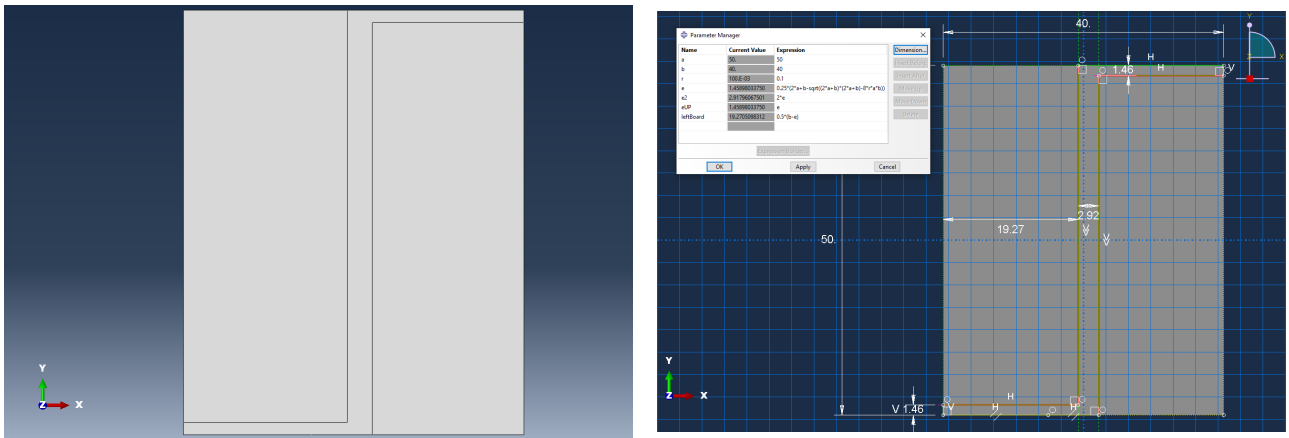


FIGURE 4 – La partie : Part

On a pris l'hauteur $a = 50$ et le longueur $b = 40$. Pour simplifier la variation de la quantité entre des volumes du "vide" et du matériau ($r = \frac{\text{superficie du matériau}}{\text{superficie totale}}$), on utilise Parameter manager d'Abaqus.

$$r = \frac{2e(\frac{b}{2} + e) + 2e(a - 2e)}{ab}$$

$$abr = -2e^2 + e(b + 2a)$$

$$e^2 - e\frac{b + 2a}{2} + \frac{abr}{2} = 0$$

$$e = \frac{2a + b - \sqrt{(2a + b)^2 - 8abr}}{4}$$

Ici, on a pris en compte ce que $e < 2b < 2a$.

3.2 Propriétés

Notre structure contient deux matériaux élastiques : "l'acier abstrait" et "le vide".

$$E_{acier} = 1, \quad \nu_{acier} = 0.3$$

$$E_{vide} = 1^{-10}, \quad \nu_{vide} = 0.3$$

Car E_{vide} est presque null, donc cette partie ne influera pas sur le comportement du solid, mais très utile pour appliquer les conditions aux limites. Pour l'avenir on aura besoin de

$$E_s^{dp} = \frac{E_{acier}}{1 - \nu_{acier}^2} = \frac{1}{1 - 0.09} \approx 1.1$$

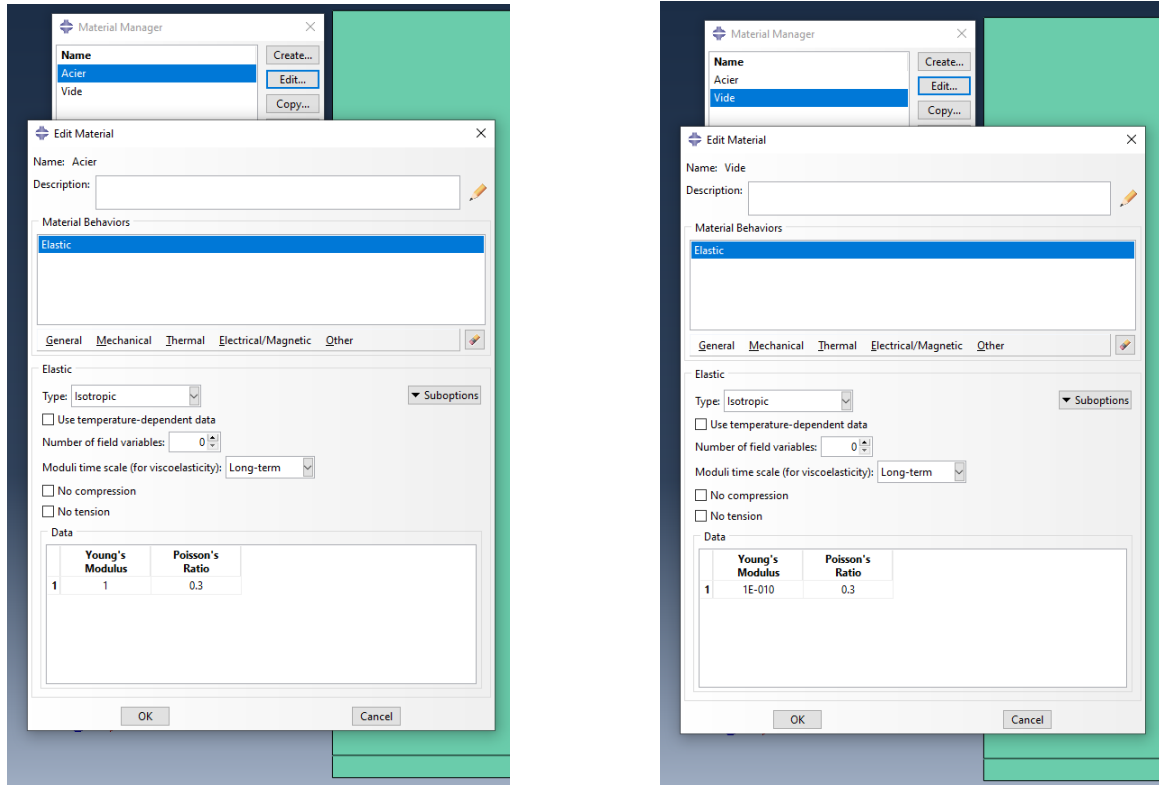
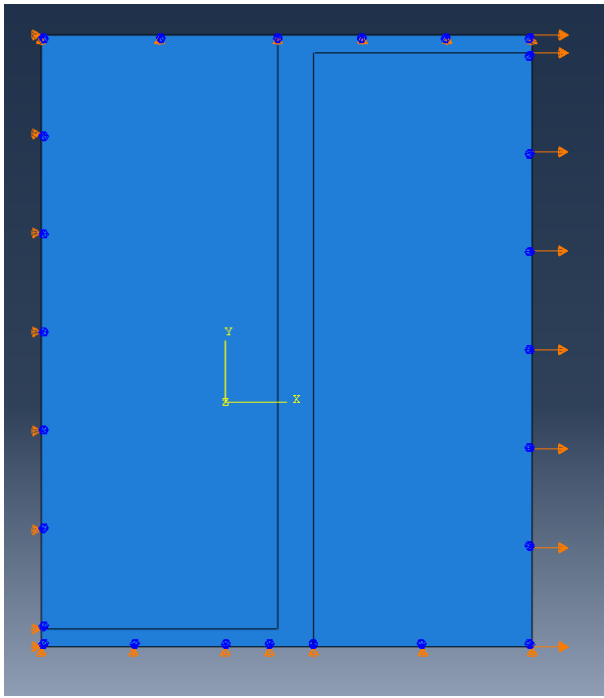


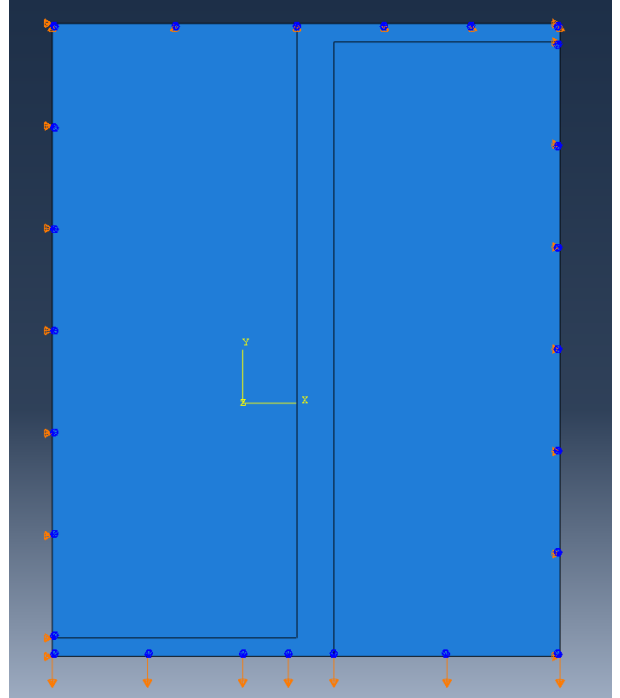
FIGURE 5 – La partie : Property

3.3 Conditions aux limites

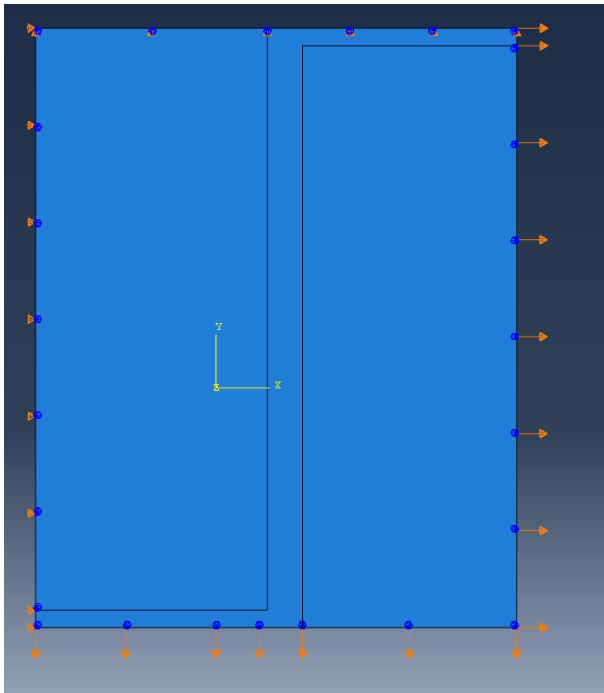
En prenant en compte des symétries de notre cellule, on peut appliquer les déplacements suivants



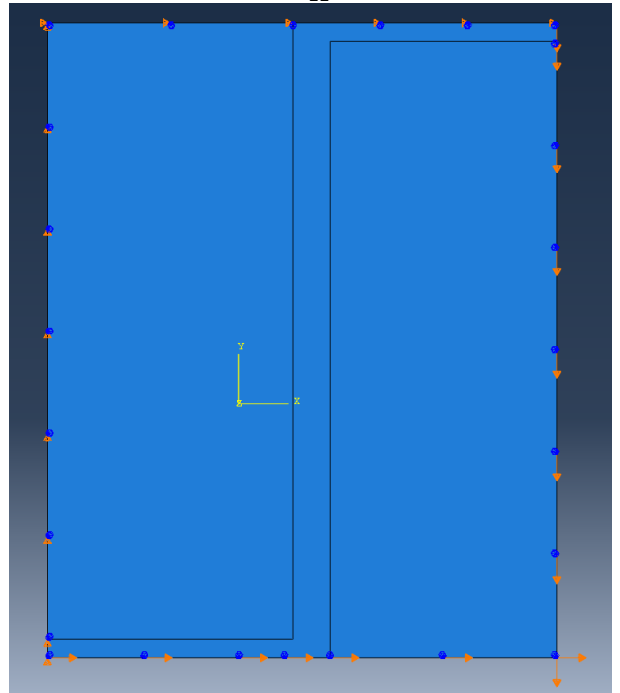
E_{11}



E_{22}



$E_{11} + E_{22}$



E_{12}

FIGURE 6 – La partie : Load

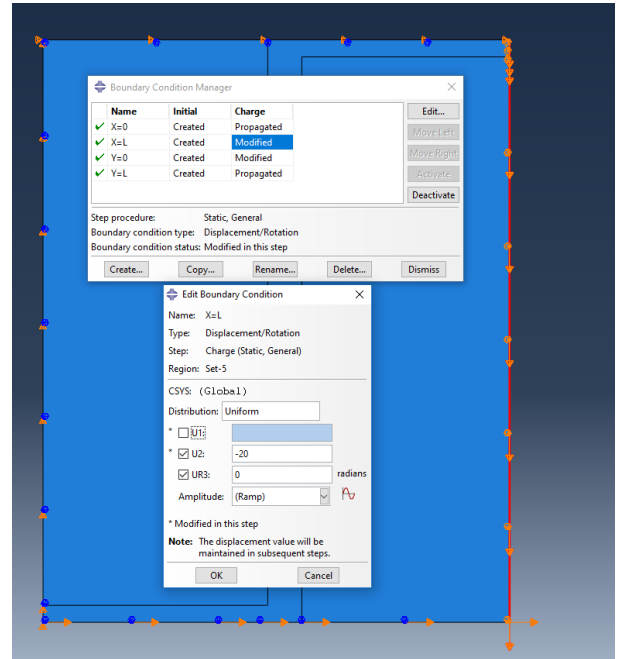
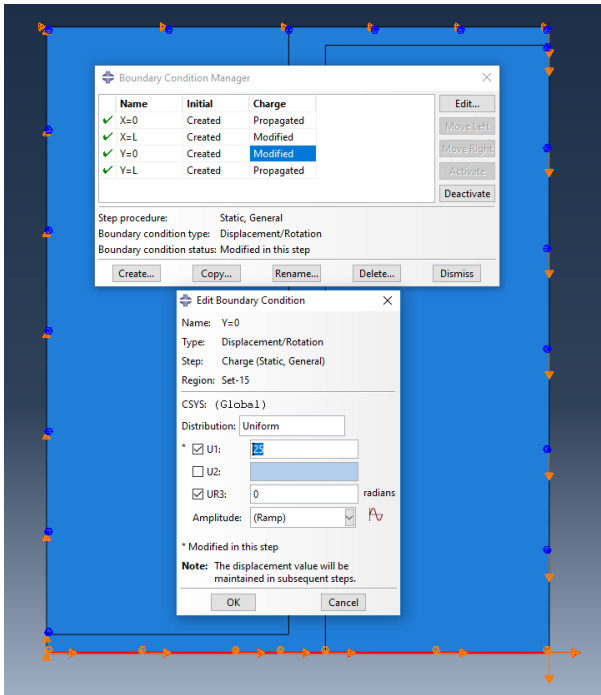


FIGURE 7 – La partie : Load. Les conditions aux limites pour le cas de cisaillement

On impose

- Cas E_{11} : $x = b$, $u_1 = E_{11}b = 1 * 40$
- Cas E_{22} : $y = 0$, $u_2 = -E_{22}a = -1 * 50$
- Cas $E_{11} + E_{22}$: $x = b$, $u_1 = E_{11}b = 1 * 40$; $y = 0$, $u_2 = -E_{22}a = -1 * 50$
- Cas E_{12} : $x = b$, $u_2 = -E_{12}b = \frac{1}{2} * 40 = 20$; $y = 0$, $u_1 = E_{12}a = \frac{1}{2} * 50 = 25$

3.4 Maillage

On résout le problème Plane strain, donc on peut prendre des paramètres du maillage suivants

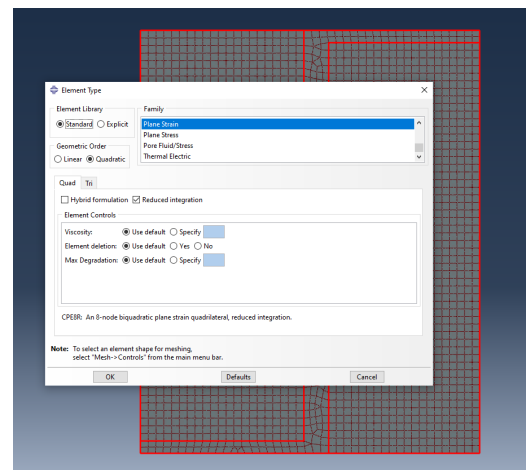
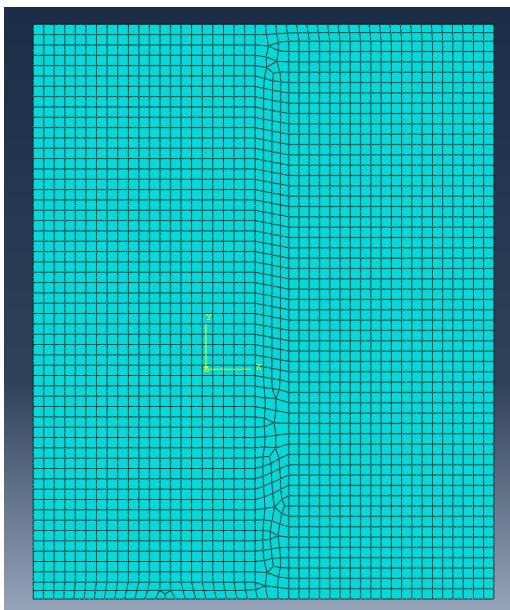


FIGURE 8 – La partie : Mesh

3.5 Résultats de la modélisation

En résultat, on a calculé l'énergie élastique du solide pour 5 cas différents de la relation entre les quantités des matériaux et il y a respectivement quatre énergies pour quatre types des chargements.

r	0.1	0.05	0.03	0.02	0.01
e	1.458980338	0.721726998	0.4312279651	0.2868900846	0.1431498841
$W(\underline{E}①)$	0.180153	0.0215743	0.004444592	0.0012557	0.000158278
$W(\underline{E}②)$	80.4211	39.7397	23.7238	15.761	7.86863
$W(\underline{E}③)$	80.7134	39.7748	23.7312	15.7642	7.86911
$W(\underline{E}④)$	0.112192	0.01320525	0.002795175	0.000823555	0.00009979875
$A(C_{\approx 1111}^{DP})$	0.360306	0.0431486	0.00889184	0.0025114	0.000316556
$B(C_{\approx 1122}^{DP})$	0.112147	0.0135257	0.00295408	0.0019443	0.000321722
$C(C_{\approx 2222}^{DP})$	160.8422	79.4794	47.4476	31.522	15.73726
$D(C_{\approx 1212}^{DP})$	0.224384	0.0264105	0.00559035	0.00164711	0.0001995975

TABLE 1 – L'énergie élastique et composantes C_{ijkl} calculés par Abaqus

$\log_{10}(r)$	-1	-1.301029996	-1.522878745	-1.698970004	-2
$\log_{10}(A)$	-0.4433285057	-1.365033291	-2.051008361	-2.60008411	-3.49954945
$\log_{10}(B)$	-0.9502123396	-1.868840249	-2.529577748	-2.711236724	-3.49251924
$\log_{10}(C)$	2.206400005	1.90025458	1.67621425	1.498613765	1.19692912
$\log_{10}(D)$	-0.6490081143	-1.578223377	-2.252561001	-2.783277396	-3.699844903

TABLE 2 – Les valeurs des logarithmes

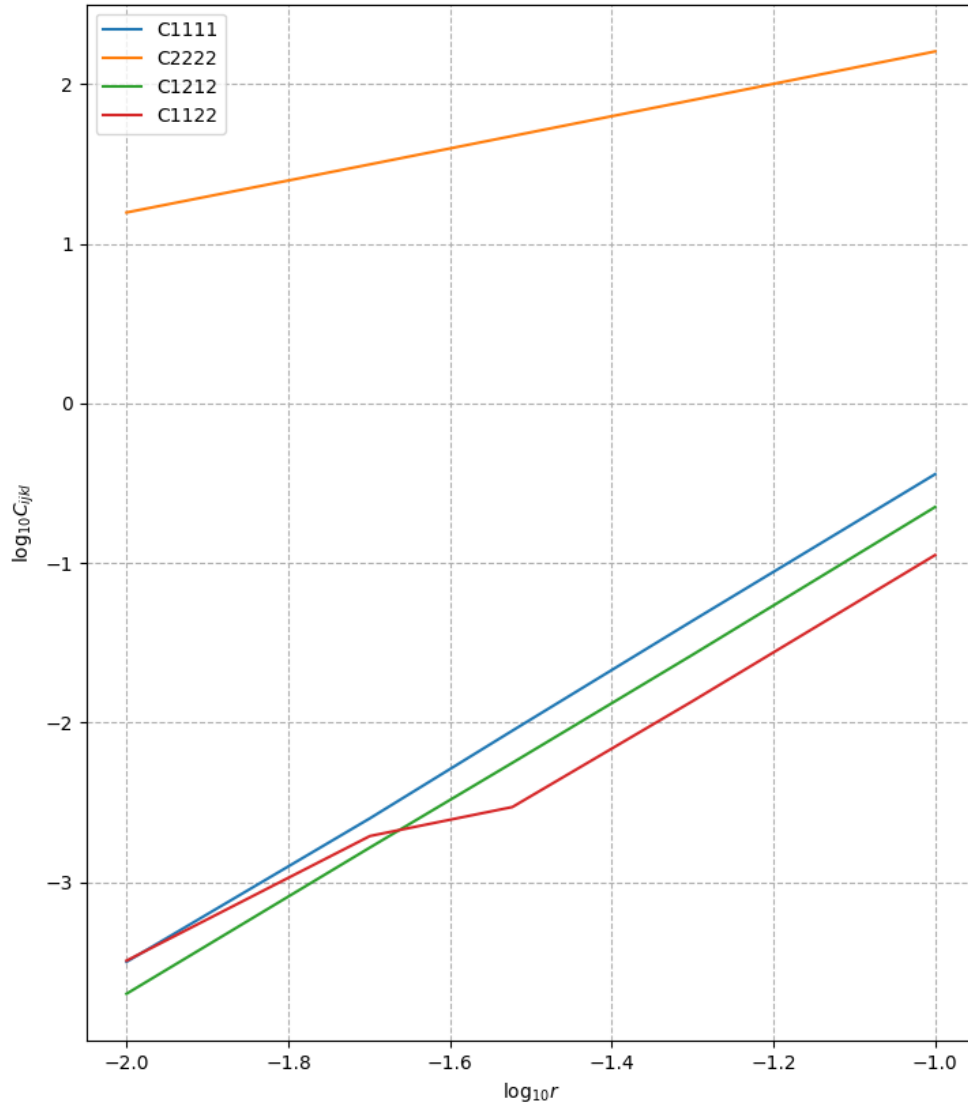


FIGURE 9 – La dépendance logarithmique de r

On peut exprimer le loi de cette dépendance. Soit

$$\log_{10}(C_{ijkl}) = k * \log_{10}(r) + h$$

$$C_{ijkl} = \text{const} * r^k$$

					Médian
k_A	3.061837021	3.092084454	3.118131771	2.987959185	$3.065003108 \approx 3$
k_B	3.051615863	2.978324193	1.031618362	2.595364341	$2.41423069 \approx 2.4$
k_C	1.016993088	1.009878715	1.008570704	1.002174697	$1.009404301 \approx 1$
k_D	3.086786287	3.039627789	3.013871318	3.044771351	$3.046264186 \approx 3$

Ainsi,

$$C_{1111} = \text{const} * r^3 \quad (1)$$

$$C_{1122} = \text{const} * r^{2.4} \quad (2)$$

$$C_{2222} = \text{const} * r \quad (3)$$

$$C_{1212} = \text{const} * r^3 \quad (4)$$

4 Estimation théorique de C_{\approx}^{DP}

On décompose le cellule de base en trois poutres, et on estime ses énergies par la théorie des poutres en flexion cylindrique. selon cette théorie, l'énergie par unité de longueur dans le sens 3 d'une "poutre" droite de longueur L et d'épaisseur h est égale à :

$$\frac{1}{2} E_s^{dp} \left(\frac{h}{L} (u^+ - u^-)^2 + \frac{h^3}{L^3} (\nu^+ - \nu^- + L \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2})^2 + \frac{h^3}{12L} (\varphi^+ - \varphi^-)^2 \right)$$

Où $E_s^{dp} = \frac{E_s}{1-\nu^2}$ et $(u^+, \nu^+, \varphi^+)(u^-, \nu^-, \varphi^-)$ sont les libertés de deux extrémités du poutre en déformation plane. Les deux blocs sont différents en topologie donc on le nomme comme noeud type 1 et noeud type 2. Voici un schéma ci-dessous :

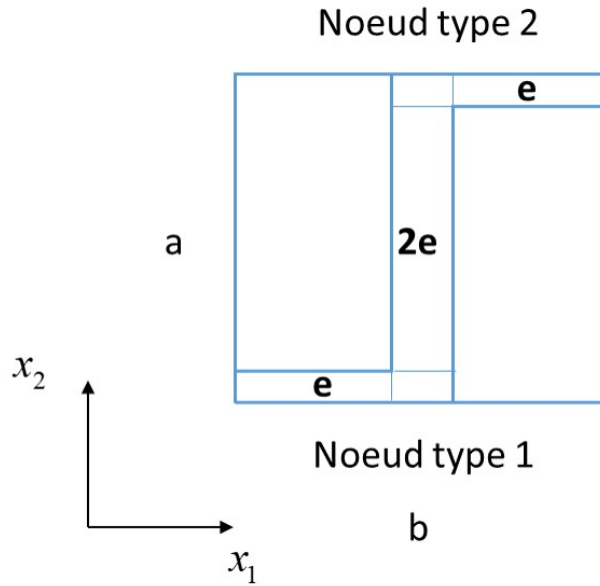


FIGURE 10 – Répartition du cellule de base

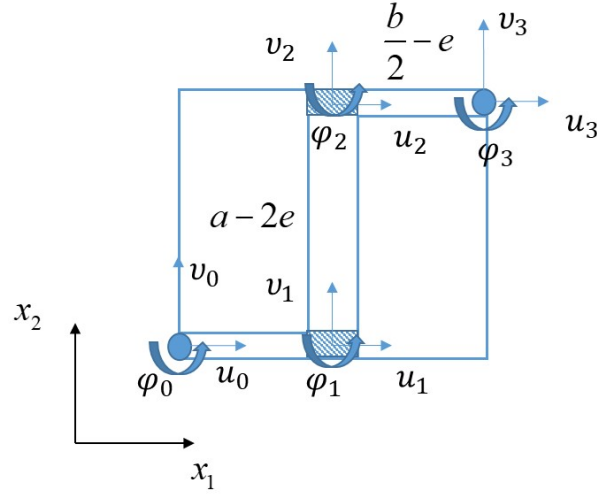


FIGURE 11 – Libertés correspondant aux poutres

Les énergies dans les deux petits blocs sont négligeables par rapport à la dimension du cellule. Mais on vas utiliser les déplacements en bout du poutre pour exprimer l'énergie du système. On regarde les libertés comme les variables dans la minimisation de l'énergie élastique totale. Selon le "Principe d'énergie potentielle minimale", le champs de déplacement correspondant à l'énergie minimale est cinématiquement admissible. Il reste alors à trouver un moyen de déterminer des composantes de ξ . On utilise alors la relation :

$$\underline{\xi} = \underline{E} \cdot \underline{y} + \underline{\xi}_{per}$$

$$CA(\underline{E}) = \{ \xi, \xi(\underline{y}) = \underline{E} \cdot \underline{y} + \underline{\xi}_{per}(\underline{y}), \underline{\xi}_{per} \text{ périodique sur } \partial Y \}$$

avec

$$\underline{\xi}_{per} = \underline{\xi}_{per}^1 \text{ sur les blocs de type 1}$$

$$\underline{\xi}_{per} = \underline{\xi}_{per}^2 \text{ sur les blocs de type 2}$$

4.1 Essai ①

Au vu de la déformation considérée (traction selon e_1), nous avons : $\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Condition au limite en bas : $\xi_2(x_2 = 0) = 0$

Maintenant on arrive au niveau d'un noeud de type 1 :

$$\underline{\xi}(x_1 = \frac{b}{2}, x_2 = 0) = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{b}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{\xi}_{per}^1$$

On en déduit que : $\xi_{per,2}^1 = 0$

Condition au limite en haut : $\xi_2(x_2 = a) = 0$

Maintenant on arrive au niveau d'un noeud de type 2 :

$$\underline{\xi}(x_1 = \frac{b}{2}, x_2 = a) = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{b}{2} \\ a \end{pmatrix} + \underline{\xi}_{per}^2$$

On en déduit que : $\xi_{per,2}^2 = 0$

Alors on exprime l'énergie élastique en fonction de $\xi_{per,1}^1 = 0$ et $\xi_{per,1}^2 = 0$:

$$W = \frac{1}{2} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\frac{e}{\frac{b}{2} - e} (E_{11} \frac{b}{2} + \xi_{per,1}^1 - 0)^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\left(\frac{2e}{a - 2e} \right)^3 (\xi_{per,1}^1 - \xi_{per,1}^2)^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\frac{e}{\frac{b}{2} - e} (E_{11} \frac{b}{2} + \xi_{per,1}^2 - E_{11}b)^2 \right)$$

La valeur minimale se trouve seulement dans cette condition :

$$\begin{aligned} \xi_{per,1}^1 &= -E_{11} \frac{b}{2} \\ \xi_{per,1}^2 &= E_{11} \frac{b}{2} \end{aligned}$$

L'énergie élastique cinématique admissible :

$$W = \frac{1}{2} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\left(\frac{2e}{a - 2e} \right)^3 (E_{11}b)^2 \right)$$

4.2 Essai ②

Au vu de la déformation considérée (traction selon e2), nous avons : $\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix}$$

Condition au limite en bas : $\xi_2(x_2 = 0) = -E_{22}$

Maintenant on arrive au niveau d'un noeud de type 1 :

$$\underline{\xi}(x_1 = \frac{b}{2}, x_2 = 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{b}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{\xi}_{per}^1$$

On en déduit que : $\xi_{per,2}^1 = -E_{22}a$

Condition au limite en haut : $\xi_2(x_2 = a) = 0$

Maintenant on arrive au niveau d'un noeud de type 2 :

$$\underline{\xi}(x_1 = \frac{b}{2}, x_2 = a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{b}{2} \\ a \end{pmatrix} + \underline{\xi}_{per}^2$$

On en déduit que : $\xi_{per,2}^2 = -E_{22}a$

Alors on exprime l'énergie élastique en fonction de $\xi_{per,1}^1 = 0$ et $\xi_{per,1}^2 = 0$:

$$W = \frac{1}{2} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\frac{e}{\frac{b}{2} - e} (\xi_{per,1}^1)^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\frac{2e}{a - 2e} (E_{22}a)^2 + \left(\frac{2e}{a - 2e} \right)^3 (\xi_{per,1}^1 - \xi_{per,1}^2)^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\frac{e}{\frac{b}{2} - e} (\xi_{per,1}^2)^2 \right)$$

La valeur minimale se trouve seulement dans cette condition :

$$\xi_{per,1}^1 = \xi_{per,1}^2 = 0$$

L'énergie élastique cinématique admissible :

$$W = \frac{1}{2} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\frac{2e}{a - 2e} (E_{22}a)^2 \right)$$

4.3 Essai ③

Au vu de la déformation considérée (traction selon e_1 et e_2), nous avons : $\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix}$$

L'énergie élastique cinématique admissible :

$$W = \frac{1}{2} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\left(\frac{2e}{a - 2e} \right)^3 (E_{11}b)^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\frac{2e}{a - 2e} (E_{22}a)^2 \right)$$

4.4 Essai ④

4.4.1 façon 1

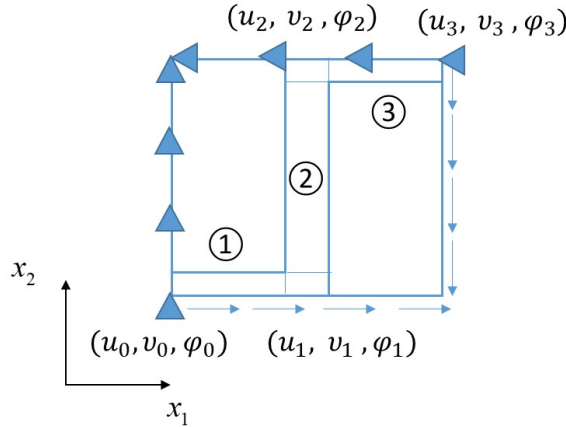


FIGURE 12 – Les conditions aux limites

Apparemment il n'y pas de compression ni de traction dans le poutre ③. Selon l'anti-symétrie, le poutre ① est pareil, ainsi donc le premier terme de l'énergie élastique totale est nulle. En raison du cisaillement simple, tous les déplacements vers la direction 1 sont nuls. Selon la symétrie par rapport au côté en haut, le $\varphi_2 = 0$. Selon la périodicité, le bord déformé doit coïncider. On en déduit que $\varphi_1 = 0$. Selon l'anti-symétrie, la rotation du poutre ① et celle-ci du ③ sont pareils. On impose $\varphi_3 = \varphi_0 = \phi$.

Le déplacement des quatre extrémités s'écrit comme :

$$\begin{aligned} (u_0, \nu_0, \phi_0) &= (0, 0, \phi) \\ (u_1, \nu_1, \phi_1) &= (0, \nu_1, 0) \\ (u_2, \nu_2, \phi_2) &= (0, \nu_2, 0) \\ (u_3, \nu_3, \phi_3) &= (0, E_{12}b, \phi) \end{aligned}$$

Pour le poutre ①, l'énergie élastique s'écrit comme ci-dessous :

$$W_1 = \frac{1}{2} E_s^{dp} \left(\frac{h^3}{L^3} (0 - \nu_1 + L \frac{\phi}{2})^2 + \frac{h^3}{12L} \phi^2 \right)$$

$$h = e$$

$$L = \frac{b}{2} - e$$

Pour le poutre ③, l'énergie élastique s'écrit comme ci-dessous :

$$W_3 = \frac{1}{2} E_s^{dp} \left(\frac{h^3}{L^3} (\nu_2 - E_{12} \cdot b + L \frac{\phi}{2})^2 + \frac{h^3}{12L} \phi^2 \right)$$

$$h = e$$

$$L = \frac{b}{2} - e$$

Pour le poutre ②, l'énergie élastique s'écrit comme ci-dessous :

$$W_2 = \frac{1}{2} E_s^{dp} \left(\frac{h}{L} (\nu_1 - \nu_2)^2 \right)$$

$$h = 2e$$

$$L = a - 2e$$

Finalement on obtient l'énergie élastique totale :

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

On utilise le logiciel Wolfram Mathematica pour minimiser cette fonction par rapport aux variables ϕ , ν_1 , et ν_2 . On précise les paramètres géométriques et montre les résultats trouvés dans la dernière section.

4.4.2 façon 2

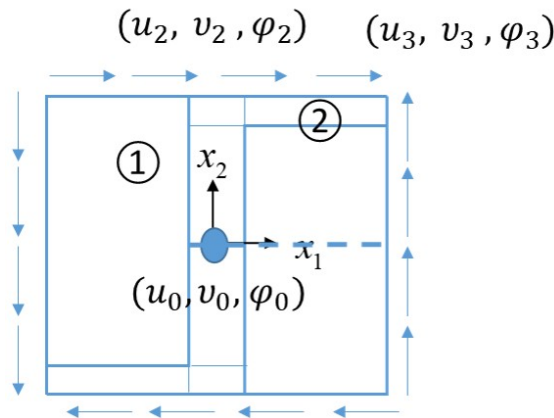


FIGURE 13 – Les conditions aux limites

$$\begin{aligned}
(u_0, \nu_0, \phi_0) &= (0, 0, \phi_0) \\
(u_2, \nu_2, \phi_2) &= (E_{12} \frac{a}{2}, \nu_2, \phi_2) \\
(u_3, \nu_3, \phi_3) &= (E_{12} \frac{a}{2}, E_{12} \frac{b}{2}, \phi_3)
\end{aligned}$$

$$W_1 = \frac{1}{2} E_s^{dp} \left(\frac{h}{L} (\nu_2)^2 + \frac{h^3}{L^3} \left(-E_{12} \frac{a}{2} + L \frac{\phi_0 + \phi_2}{2} \right)^2 + \frac{h^3}{12L} (\phi_0 - \phi_2)^2 \right)$$

$$h = 2e$$

$$L = \frac{a}{2} - e$$

$$W_2 = \frac{1}{2} E_s^{dp} \left(\frac{h^3}{L^3} \left(E_{12} \frac{b}{2} - \nu_2 + L \frac{\phi_2 + \phi_3}{2} \right)^2 + \frac{h^3}{12L} (\phi_2 - \phi_3)^2 \right)$$

$$h = e$$

$$L = \frac{b}{2} - e$$

$$W = 2 * (W_1 + W_2)$$

5 Comparaison et synthèse

L'application de ces formules nous donne l'approximation théorique des valeurs d'énergie.

r	0.1	0.05	0.03	0.02	0.01
$W(\underline{\underline{E}}\textcircled{1})_{theorie}$	0.209277	0.0230948	0.00475356	0.00137535	0.000167913
$W(\underline{\underline{E}}\textcircled{2})_{theorie}$	85.132	40.8342	24.1097	15.9462	7.91067
$W(\underline{\underline{E}}\textcircled{3})_{theorie}$	85.341277	40.8572948	24.11445356	15.94757535	7.910837913
$W(\underline{\underline{E}}\textcircled{4})_{theorie}$	0.0133727	0.00144118	0.000293965	0.000084677	0.0000102929
$A_{theorie}$	0.418554	0.0461896	0.00950712	0.0027507	0.000335826
$B_{theorie}$	0	0	0	0	0
$C_{theorie}$	170.264	81.6684	48.2194	31.8924	15.82134
$D_{theorie}$	0.0267454	0.00288236	0.00058793	0.000169354	0.0000205858

TABLE 3 – L'énergie élastique et composantes C_{ijkl} calculés par Abaqus

On peut comparer les résultats analytiques et numériques en calculant une erreur relative : $Erreur = \frac{|W(\underline{\underline{E}}\textcircled{i}) - W(\underline{\underline{E}}\textcircled{i})_{theorie}|}{W(\underline{\underline{E}}\textcircled{i})} * 100\%$

r	0.1	0.05	0.03	0.02	0.01
Erreur de $W(\underline{E}①)$, %	16.16625868	7.047737354	6.919602692	9.528549813	6.087390541
Erreur de $W(\underline{E}②)$, %	5.857791052	2.754172779	1.626636542	1.175052344	0.5342734377
Erreur de $W(\underline{E}③)$, %	5.733715839	2.721559379	1.614977582	1.163239175	0.5302748723
Erreur de $W(\underline{E}④)$, %	88.08052268	89.08631037	89.48312717	89.71811233	89.68634377

TABLE 4 – Erreur relative de l'énergie élastique

$\log_{10}(r)$	-1	-1.301029996	-1.522878745	-1.698970004	-2
$\log_{10}(A_{theorie})$	-0.3782485033	-1.335455799	-2.021951024	-2.560556773	-3.473885683
$\log_{10}(C_{theorie})$	2.231122832	1.912054047	1.683221802	1.503687202	1.199243264
$\log_{10}(D_{theorie})$	-1.572750902	-2.540251778	-3.230674379	-3.771204541	-4.686432251

TABLE 5 – Les valeurs des logarithmes

					Médian
k_A	3.179773807	3.094429096	3.058673957	3.034012969	$3.091722457 \approx 3$
k_C	1.05992356	1.031478634	1.019554296	1.011340874	$1.030574341 \approx 1$
k_D	3.213968339	3.112132037	3.069602463	3.040320642	$3.10900587 \approx 3.1$

TABLE 6 – Degré de r dans la relation $C_{ijkl} = const * r^k$

Ainsi, la théorie donne les expressions de C_{ijkl} suivantes

$$C_{1111} = const * r^3 \quad (5)$$

$$C_{1122} = 0 \quad (6)$$

$$C_{2222} = const * r \quad (7)$$

$$C_{1212} = const * r^{3.1} \quad (8)$$

Ces résultats sont très proche de valeurs numériques 1. Pour démontrer plus visuellement les résultats de la comparaison, on vous présente un graphique des valeurs.

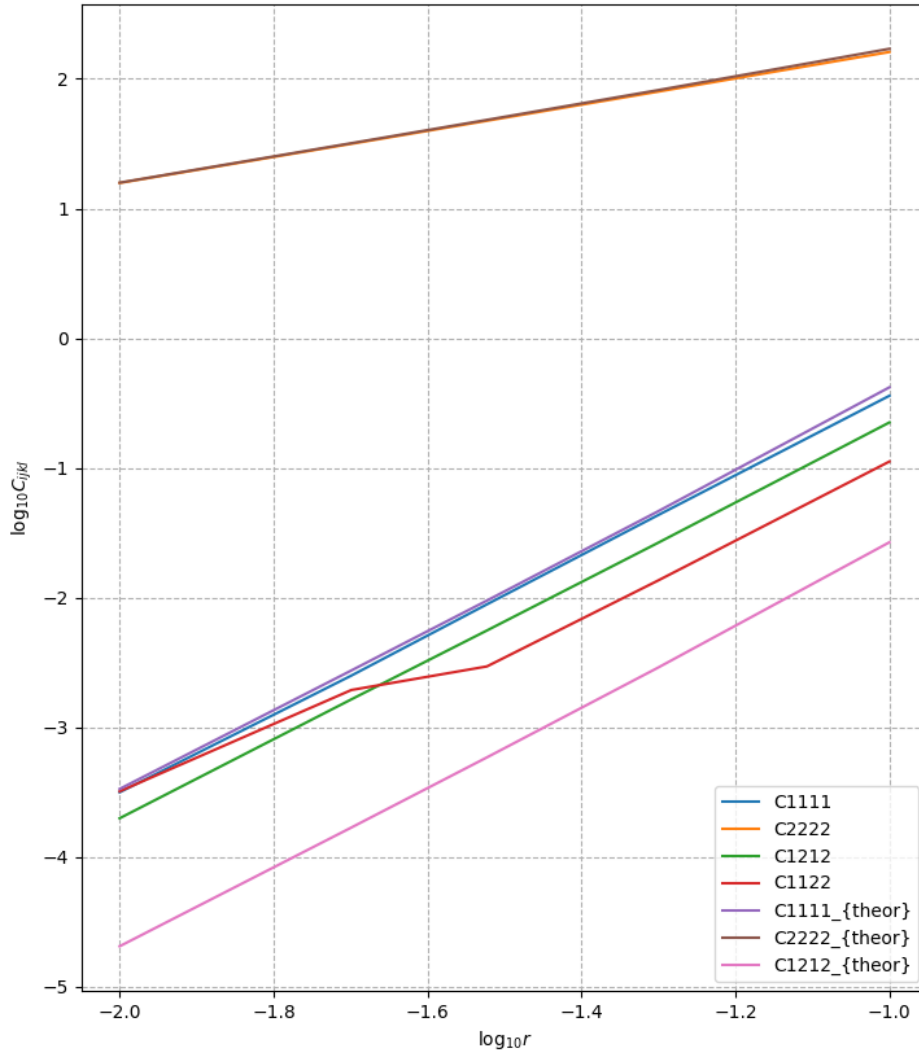


FIGURE 14 – La dépendance logarithmique de r

Remarque. On voit que $C_{2222} = \text{const} * r$. Cette relation est très proche au comportement de la famille des poutres de Bernoulli-Euler.

6 Annexe

Pour la première façon on a obtenu les chiffres suivants

r	0.1	0.05	0.03	0.02	0.01
v_1	9.99018	9.99779	9.99924	9.99967	9.99992
v_2	10.0098	10.0022	10.0008	10.0003	10.0001
φ	0.808223	0.777906	0.766469	0.76089	0.755401

TABLE 7 – Les valeurs optimales après la minimisation de l'énergie pour le cas des cisaillements de la première façon

Pour la deuxième façon on a reçu les mêmes résultats numériques que et pour la première façon, mais la théorie donne les valeurs différents.

r	0.1	0.05	0.03	0.02	0.01
$W(\underline{\underline{E}}\textcircled{4})_{theorie_facon2}$	0.0454578	0.00494386	0.00101191	0.000291974	0.0000355497
$W(\underline{\underline{E}}\textcircled{4})_{theorie_facon1}$	0.0133727	0.00144118	0.000293965	0.000084677	0.0000102929
$W(\underline{\underline{E}}\textcircled{4})_{numerique}$	0.112192	0.01320525	0.002795175	0.000823555	0.00009979875

TABLE 8 – L'énergie de cisaillements pour la deuxième façon

Il faut noter, que pour les deux approches théorétiques on perde un ordre par rapport aux résultats numériques, mais par contre les chiffres sont très proches.

r	0.1	0.05	0.03	0.02	0.01
v_2	0.0168168	0.0037976	0.00131448	0.000573017	0.000140535
φ_2	0.384508	0.374314	0.37045	0.368561	0.3667
φ_0	0.604228	0.585139	0.577939	0.574426	0.570969
φ_3	-0.999911	-0.964939	-0.951652	-0.945152	-0.938746

TABLE 9 – Les valeurs optimales après la minimisation de l'énergie pour le cas des cisaillements de la deuxième façon