ESERCITAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

APPUNTI NON UFFICIALI DELLE LEZIONI DEL PROF. M.C. CAMPI
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA
AA 2019/2020

Esercizi sui sistemi I

Esercizi tratti da temi di esame

1 T.E. 8/06/2015

Dato il seguente sistema:

$$\overset{\circ}{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 0 \\ 4 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathrm{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{x}$$

1.1 Si determinino gli autovalori della matrice di stato

Si deve calcolare e mettere a 0 il determinante di:

$$\lambda I - A_{11} = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 8 \\ -4 & \lambda + 9 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 5) = 0$$

da cui si ottiene che gli autovalori valgono: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -5, \lambda_3 = -2$.

1.2 Si dica se il sistema è asintoticamente stabile

Siccome gli autovalori sono negativi, i modi sono **delle esponenziali che vanno a 0**, quindi il sistema è asintoticamente stabile.

1.3 Si dica se la matrice di stato è diagonalizzabile

Abbiamo tre autovalori distinti, quindi, se mettiamo in forma di Jordan la matrice 3×3, avremo 3 blocchi di dimensione 1×1 (le dimensioni dei sotto-blocchi di una matrice di Jordan hanno dimensioni pari alla molteplicità dell'av associato). La matrice di Jordan è quindi diagonale **tutte le volte che gli autovalori sono presenti tutti solo con molteplicità 1.**

1.4 Posto $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{x}$ e $u(t) = 0$, si calcoli $y(t)$

Possiamo "accorciare" il procedimento ricordandoci che:

- il movimento libero $x_l(t)$ è cl dei modi del sistema
- i modi li abbiamo, perchè abbiamo gli autovalori:

$$\text{modi: } e^{-t}, e^{-5t}, e^{-2t}$$

- Siccome $y(t) = c \cdot x_l(t)$, anche y(t) sarà cl dei modi:

$$y(t) = c \cdot x_l(t) = \alpha e^{-t} + \beta e^{-5t} + \gamma e^{-2t}$$

Dobbiamo quindi ora solo trovare α, β, γ; riscriviamo le equazioni di stato in forma di equazione a partire dalle matrici:

$$\begin{cases} \overset{\circ}{x}_1 &= 3x_1 - 8x_2 \\ \overset{\circ}{x}_2 &= 4x_1 - 9x_2 \\ \overset{\circ}{x}_3 &= -2x_3 \end{cases}$$

$$y = x_1$$

Da $y(t) = x_1(t)$, deduciamo che $y(0) = x_1(0)$, e sappiamo che $x_1(0) = 1$ dalla condizione iniziale.
Dalla relazione $y(0) = 1$ concludiamo:

$$1 = y(0) = \alpha + \beta + \gamma$$

Poi, cerchiamo il valore di $\mathring{y}$: la calcoliamo dalla seguente relazione

$$y = x_1 \rightarrow \mathring{y} = \mathring{x}_1$$

La $\mathring{x}_1$ la ricavo dalla prima equazione di stato (con $u = 0$, quindi procediamo solo ad analizzare il **movimento libero**):

$$\mathring{x}_1 = 3x_1 - 8x_2$$

Le condizioni iniziali sono assegnate: $x_1 = 1, x_2 = 0$. Le usiamo per sostituire e trovare il valore della derivata iniziale di y:

$$\mathring{y} = 3 \cdot 1 - 8 \cdot 0 = 3$$

Dalla uguaglianza $y(t) = c \cdot x_l(t) = \alpha e^{-t} + \beta e^{-5t} + \gamma e^{-2t}$, che deriviamo, otteniamo che:

$$\mathring{y} = 3 = -\alpha - 5\beta - 2\gamma$$

Siccome non ci bastano le equivalenze per trovare tutte e tre le incognite, andiamo avanti a calcolare anche $\overset{\circ\circ}{y}$:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ\circ}{y}(x_1, x_2) &= \frac{\partial \mathring{x}_1}{\partial t} \\
&= 3\mathring{x}_1 - 8\mathring{x}_2 \\
&= 3 \cdot (3x_1 - 8x_2) - 8 \cdot (4x_1 - 9x_2) \\
\overset{\circ\circ}{y}(x_1 = 1, x_2 = 0) &= -23
\end{aligned}$$

Usando lo stesso passo di sopra, concludiamo:

$$-23 = \overset{\circ\circ}{y}(0) = \alpha + 25\beta + 4\gamma$$

A questo punto, abbiamo un sistema di tre incognite con tre equazioni, che quindi risolviamo per trovare i valori espliciti di α, β e γ.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 1 \\ -\alpha - 5\beta - 2\gamma & = 3 \\ \alpha + 25\beta + 4\gamma & = -23 \end{cases}$$

Per risolvere velocemente questo sistema, notiamo che il sistema è in realtà fatto da due sottoparti indipendenti: le prime due variabili di stato (x_1, x_2) evolvono in dipendenza tra di loro, ma la terza dipende invece solo da x_3 (crea un piccolo sistema da sola). Siccome l'uscita prende solo il valore della variabile di stato x_1, possiamo ignorare almeno la variabile x_3 (la quale è governata dal modo e^{-2t}), perchè non influenza nè viene influenzata dalle altre due e non rientra nella espressione finale dell'uscita. Il modo associato al secondo sistema, quindi, non deve entrare nella soluzione $\rightarrow$ il risultato avrà un $\gamma \cdot e^{-2t} = 0$ (quindi $\gamma = 0$).

Ponendo $\gamma = 0$ per i ragionamenti di cui sopra, otteniamo:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \beta \\ 3 &= -1 + \beta - 5\beta \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$\begin{cases} \alpha & = 2 \\ \beta & = -1 \\ \gamma & = 0 \end{cases}$$

La terza equazione è soddisfatta, come ci aspettavamo, per $\gamma = 0$.
Per concludere, scriviamo la $y(t)$:

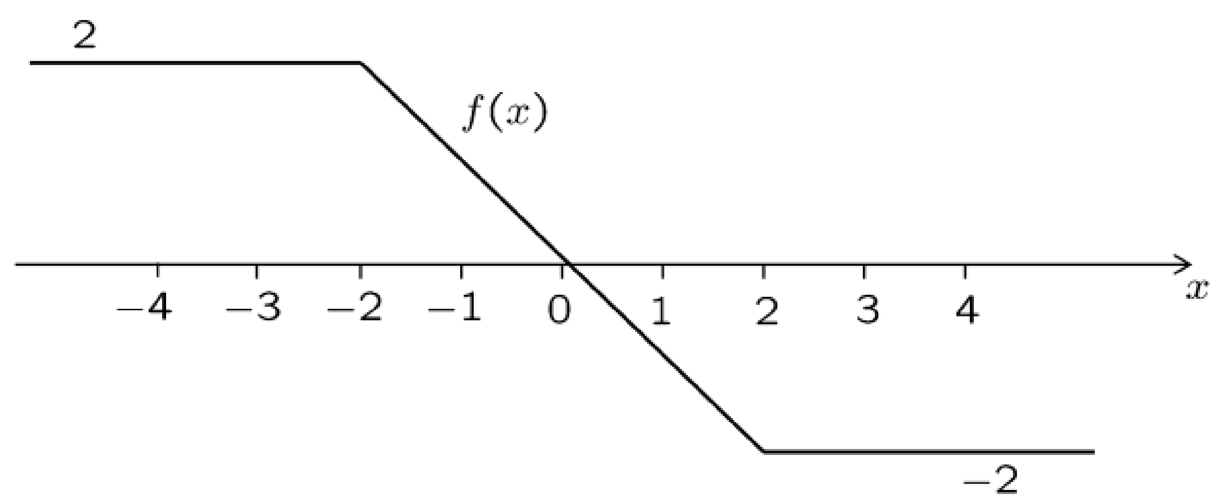
$$y(t) = 2e^{-t} - 1e^{-5t}$$

2 T.E. 9/01/2014

Una variabile x evolve secondo l'equazione nonlineare

$$\mathring{x} = f(x) + u$$

dove $f(x)$ è la funzione rappresentata in figura:



Posto $u = 0$, si risponda alle seguenti domande.

2.1 Si determini lo stato di equilibrio

Se prendiamo l'equazione di sistema, otteniamo:

$$\mathring{x} = f(x) + 0 = f(x)$$

I punti di equilibrio si trovano **annullando la derivata**, in quanto la definizione stessa di equilibrio è una evoluzione costante con derivata nulla.

$$\mathring{x} = f(x) = 0$$

Questa equazione ammette una e una sola soluzione:

$$\bar{x} = 0$$

Il sistema ammette quindi un solo stato di equilibrio, $x = 0$.

2.2 Si dica se l'equilibrio è stabile

Un pto di equilibrio $\bar{x}$ si dice stabile quando c'è un **intorno** tale che, prendendo qualsiasi punto in quell'intorno si tende durante l'evoluzione ad andare verso $\bar{x}$.

Esiste un intorno dell'equilibrio tc se mi sposto dall'equilibrio rimanendo lì torno al punto dell'equilibrio?

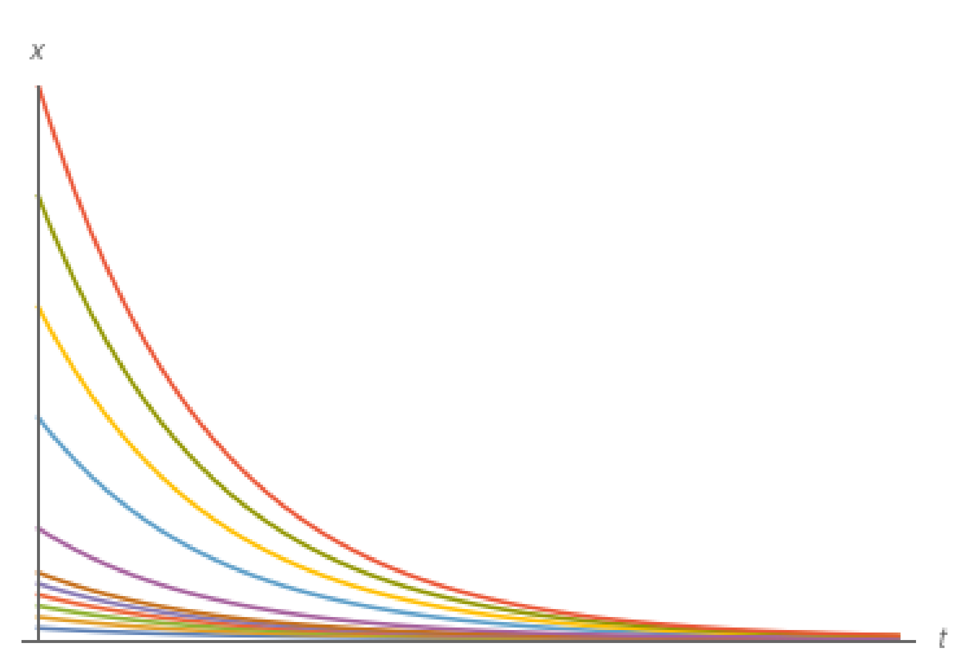
Lo spazio di stato è R (infatti, se si vede la f, tracciamo un piano a due dimensioni), quindi, prendere un intorno dell'equilibrio equivale a prendere un intorno dell'origine del piano $(x, f(x))$. Se prendiamo un intorno di raggio 1, vediamo che la $f(x)$ corrispondente a quei punti è una retta di equazione $-x$; il comportamento del sistema in quell'intorno, quindi, è governato dall'equazione:

$$\mathring{x} = -x$$

Se risolviamo l'equazione, che è lineare, otteniamo che l'evoluzione $x(t)$ è:

$$x(t) = e^{-t} \cdot x(0)$$

A seconda del valore effettivo della condizione iniziale $x(0)$ avremo una famiglia di soluzioni:



per tutte, però, si converge verso il valore 0, per via dell'esponenziale. Questo vuol dire che c'è un intorno attrattivo verso 0, intorno composto dai punti rappresentanti le condizioni iniziali di cui sopra.

Interpretazione grafica di questo fatto è data guardando l'immagine di $f(x) = \mathring{x}$:

- prendendo come ci il valore $x = 1$, $f(x) = -1$ negativa; ciò significa che il valore di **velocità** $(\mathring{x})$ **è negativo**, quindi la x andrà diminuendo.
- in $x = 1.5$, la derivata è negativa; ciò vuol dire che la x diminuirà (andrà verso 0): se siamo a $x = 1.5$ ci muoveremo verso sinistra (la traiettoria ci porterà a 0).
- in $x = -1.5$ la derivata sarà positiva, quindi la x tenderà a andare verso a 0 avanzando verso destra.

Siccome allontanandoci un pochino da 0 torniamo indietro, si parla di **equilibrio** **stabile**.

2.3 Si dica se l'equilibrio è stabile in grande

Uno stato di equilibrio si dice stabile **in grande** se la convergenza all'equilibrio si ha partendo per **qualsiasi** punto.

Analizzando il grafico di $f(x)$, possiamo capire che, partendo ad esempio da $x = 4$, la derivata è negativa. Se risolvessimo l'equazione differenziale, vedremmo che questo si traduce in una traiettoria che si sta spostando verso 0 con velocità costante ($\mathring{x} = 2$ risolta è una retta con pendenza -2: $x(t) = -2t + x(0)$. Quando arriviamo a $x = 2$ (a $t = 1$), entriamo nella parte governata da $\mathring{x} = -x$, la cui soluzione $(x(t) = e^{-t})$ ha andamento esponenziale, e **asintoticamente** (con velocità sempre più decrescente una volta che siamo arrivati nella parte lineare del grafico) arriviamo in 0.

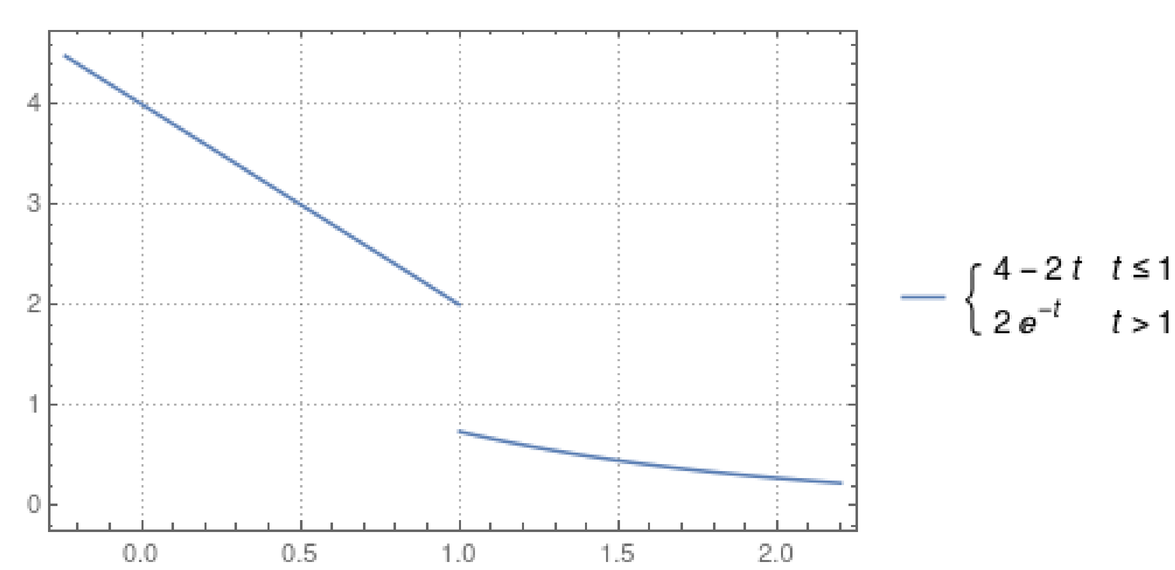
Riassumendo:

1. Per $x = 4$, la derivata (pendenza della curva) è -2. Si avanza fino al $x = 2$ per moto rettilineo (velocità costante) (lo si capisce integrando l'equazione differenziale $\mathring{x} = -2$: $x(t) = -2t + x(0) = -2t + 4$);
2. Raggiungiamo il valore 2 all'istante $t = 1$ (lo sappiamo usando l'equazione del moto rettilineo uniforme). da quel momento in poi l'equazione diventa $\mathring{x} = -x$, con soluzione $x(t) = e^{-t} \cdot 2$ (2 è la ci).
3. Si raggiunge l'origine solo **asintoticamente**, perchè man mano che ci avviciniamo a 0 percorrendo la parte lineare la velocità **diminuisce** sempre di più, al punto da rendere l'andamento solo asintotico.

Il valore 0, quindi, "risucchia" verso di sè l'evoluzione, qualunque sia il punto di partenza: la stabilità vale *in grande*.

2.4 Posto $x(0) = 4$, si determini l'espressione analitica di $x(t)$ e se ne disegni il grafico

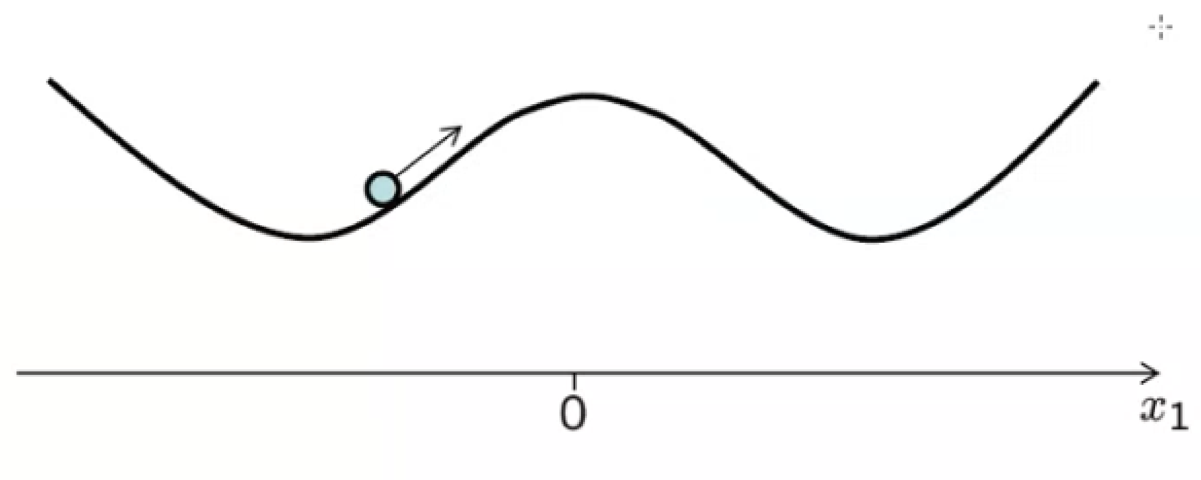
$$x(t) = \begin{cases} 4 - 2t & t \leq 1 \\ 2e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$



3 T.E. 16/06/2016

Una pallina si muove su una guida orizzontale soggetta al proprio peso e a una forza esterna (vedi figura). Tenuto conto della reazione vincolare della guida, la forza peso genera una forza orizzontale pari a $-x_1^3 + 4x_1$; u è invece la componente orizzontale della forza esterna; la massa della pallina vale 1. Quindi, l'equazione di moto della pallina (*accelerazione = somma delle forze orizzontali*) è:

$$\ddot{x}_1 = -x_1^3 + 4x_1 + u \tag{1}$$



3.1 Si scrivano le equazioni in variabili di stato del sistema, dove x_1 è la posizione e x_2 è la velocità

Si tratta di ricondurre l'equazione differenziale di secondo grado (1) alla forma canonica, in cui ci sono solo equazioni differenziali di primo grado.

Siccome la derivata della posizione è la velocità, e la derivata della velocità è l'accelerazione, scriviamo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 + 4x_1 + u \end{cases} \tag{2}$$

3.2 Posto $u = 0$, si trovino gli stati di equilibrio del sistema

Si tratta di eguagliare a 0 le due equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 + 4x_1 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

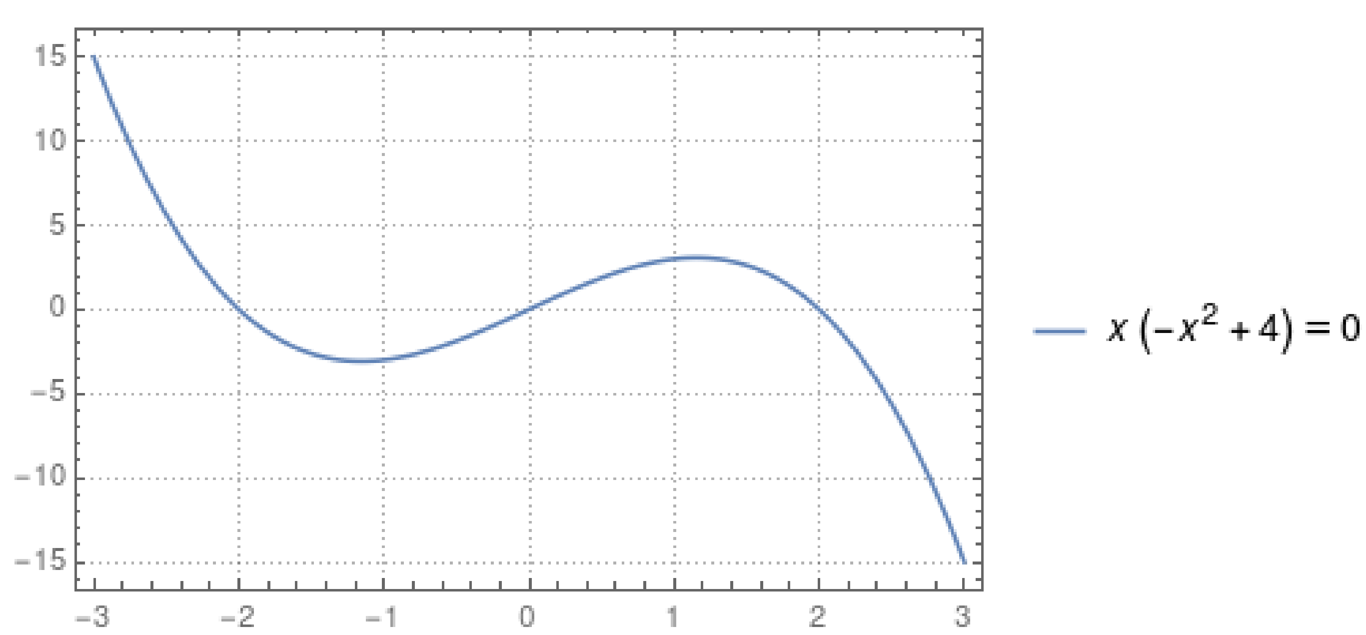
La prima equazione impone che la pallina non si muova, e la seconda ci dice effettivamente quali sono i punti dove ciò non accade.

Sviluppiamo la seconda equazione:

$$x_1(-x_1^2 + 4) = 0$$

ovvero:

$$\begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_1 &= \mp 2 \end{cases}$$



Il disegno è del tutto in accordo con l'immagine della pallina: intuitivamente, capiamo che la pallina sta ferma nell'apice 0 e nei punti più bassi delle concautovalorità (che ora sappiamo essere $x = \pm 2$).

3.3 Si studi la stabilità dell'equilibrio $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

3.4 Si disegnino le traiettorie libere del sistema linearizzato attorno a $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

Per prima cosa, linearizziamo il sistema (2), derivando rispetto a x_1, x_2 e u la funzione a secondo membro, calcolarla nel punto, e moltiplicando i risultati per le variabili incrementali. In particolare, per la seconda espressione avremo:

1. La derivata fatta rispetto ad x_1 è $-3x_1^2 + 4$, che, calcolata nel punto 0 di equilibrio, fa 4.
2. La derivata rispetto a x_2, siccome x_2 non appare, sarà 0.
3. La derivata rispetto ad u sarà 1.

$$\begin{cases} \Delta \mathring{x}_1 &= \Delta x_2 \\ \Delta \mathring{x}_2 &= 4\Delta x_1 + \Delta u \end{cases} \tag{4}$$

Questo sistema è capace di catturare quello che succede alla pallina quando essa si muove attorno al punto $x = 0$, senza scostarsi troppo, nè in velocità nè in posizione, da velocità e posizione $(0, 0)$.

Disegno delle traiettorie libere del sistema linearizzato Il metodo più *canonico* di fare ciò è integrare le equazioni differenziali per ottenere il movimento, da cui si elimina poi la variabile tempo per ottenere la traiettoria.

A lezione abbiamo visto, però, che ci sono delle direzioni particolari, quelle degli autovettori, che vengono percorse con **moto rettilineo**. Partiamo con l'individuare quelle.

- Cerchiamo gli autovalori della matrice di stato $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, ovvero gli annullanti di $\det(\lambda I - A)$ (ricorda: $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$):

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -4 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = -2$$
$$\lambda_2 = +2$$

- Calcoliamo gli autovettori:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_1'' \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} v_1' \\ v_1'' \end{bmatrix}$$

$$v_1'' = -2v_1'$$
$$v_1' = -2v_1''$$

  Le due condizioni trovate dicono la medesima cosa; due autovettori che le rispettano potrebbero essere:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ +2 \end{bmatrix}$$

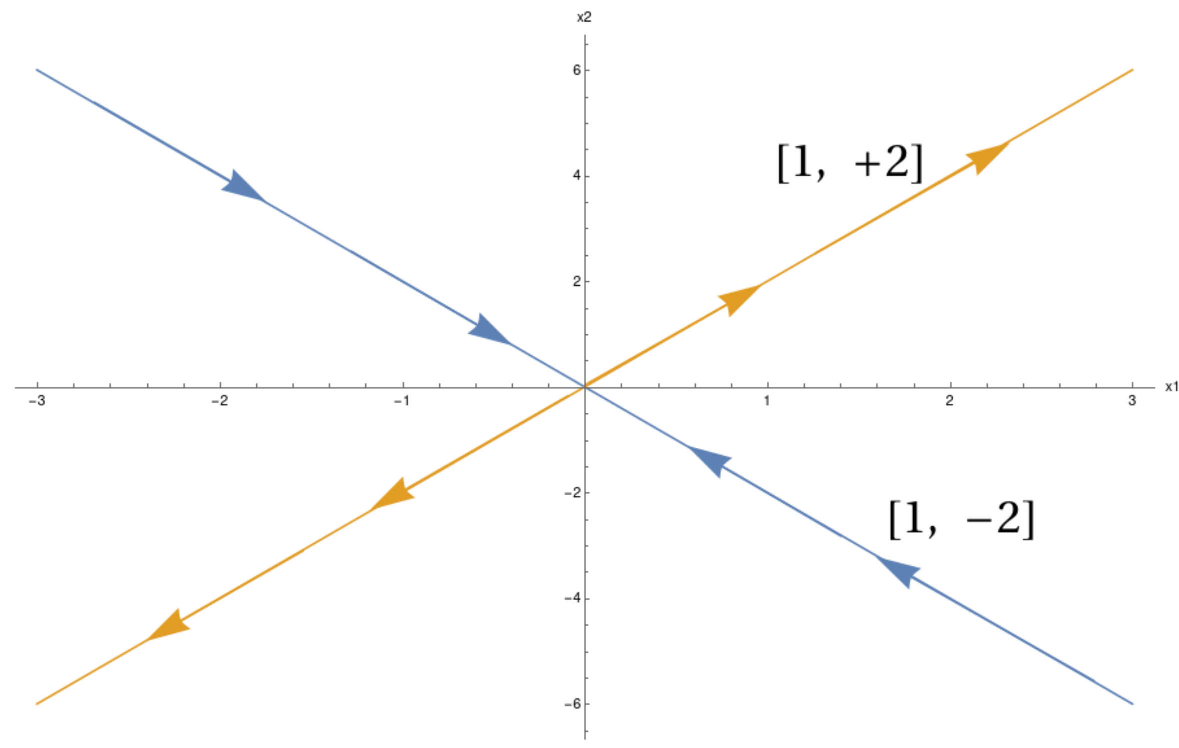
- Disegniamo gli autovettori sul piano (x_1, x_2):
  - All'autovettore $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ corrisponde l'autovalore -2, quindi l'andamento è del tipo:

$$e^{-2t} \cdot \text{(C.I.)}$$

    siccome è una esponenziale negativa, questo autovettore verrà percorso con un movimento che va via via **avvicinandosi verso l'origine**.
  - All'autovettore $\begin{bmatrix} 1 \\ +2 \end{bmatrix}$ corrisponde l'autovalore $+2$, quindi l'andamento è del tipo:

$$e^{+2t} \cdot \text{(C.I.)}$$

    siccome è una esponenziale positiva, essa aumenta nel tempo: se partiamo da un certo punto il valore cresce, e quindi ci spostiamo **lontano dall'origine**.



Una volta che abbiamo capito qual è il comportamento lungo gli autovettori, possiamo capire come va il movimento partendo da *qualsiasi* punto, scomponendolo nelle sue componenti lungo x_1 e lungo x_2. Il movimento libero, infatti, è la somma del movimento generato dalle due componenti, che poi dobbiamo sommare:

$$x_l(t) = L(t) \cdot x(0) = L(t) \cdot x_1(0) + L(t) \cdot x_2(0)$$

Istante per istante sommiamo i due contributi (Figura 1).

Una componente tenderà ad esaurirsi, mentre l'altra (quella che ci sposta verso l'alto e verso destra) aumenterà.

Se osserviamo questi andamenti, osserviamo che rispettano bene quella che è la fisica del problema:

- Se partiamo con un valore negativo di x_1 e una velocità iniziale positiva ma non troppo grande, intuiamo che la pallina sale ma poi torna indietro verso sinistra. È il caso della traiettoria disegnata a sinistra (la posizione va verso l'origine ma la velocità si annulla prima che vi arriviamo, quindi ricaschiamo indietro).
- Se invece la velocità iniziale è abbastanza grande, la pallina arriva allo 0 e scollina dall'altra parte, allontanandosi verso destra (è il caso della traiettoria disegnata in alto: partiamo da una velocità grande, ci spostiamo verso l'origine, e, quando vi arriviamo, lo facciamo ancora con una velocità positiva, che permette di portare la x_1 ad un valore positivo: la pallina è caduta a destra dell'origine!).

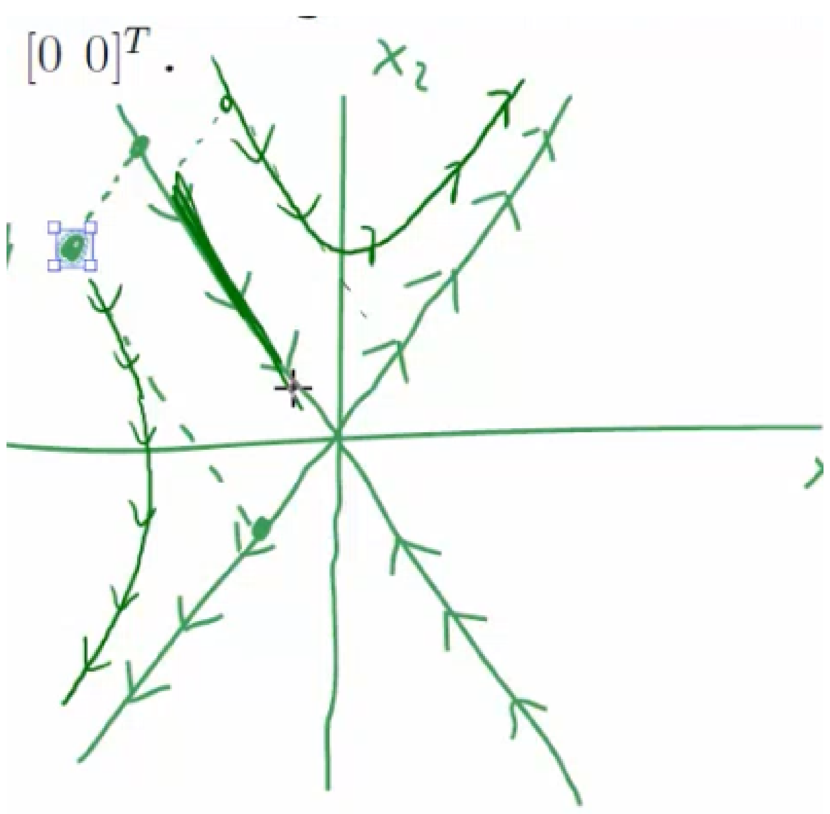


Figura 1: Andamento dei movimenti vicino agli autovettori

3.5 Si ponga ancora $u = 0$. A partire dal risultato trovato al punto 3.4, si determini un valore approssimato della velocità iniziale $x_2(0)$ tale che la pallina inizialmente in $x_1(0) = -0.5$ e soggetta alla velocità $x_2(0)$ «scavalli» il punto di massimo della guida corrispondente a $x_1 = 0$ e cada nella parte destra della guida

Questa domanda fa riferimento a quanto descritto precedentemente: prendiamo nella Figura 1 il punto $x_1 = 0.5$ e osserviamo che:

- per i valori di velocità che stanno sotto l'autovettore, la pallina non arriva a 0 e torna indietro
- per i valori di velocità che stanno sopra, invece, si arriva allo 0 con velocità ancora positiva, per poi scavallare.

Lo spartiacque tra i due comportamenti è chiaramente il punto di ascissa -0.5 e di ordinata uguale a quella dell'autovettore $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Siccome l'autovettore identifica una retta di pendenza 2, percorrendola, al valore -0.5 troviamo ordinata 1. La velocità 1, quindi, è quella che **esattamente** quella che permette di discriminare tra due comportamenti.

Il testo dell'esercizio chiede un valore *approssimato* in quanto il sistema linearizzato non descrive il sistema matematico originale non lineare in maniera perfetta.

Esercizi sulla stabilità

Esercizi tratti da temi di esame

1 T.E. 02/07/2018

Un sistema lineare ha le seguenti equazioni di stato:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -20 & 1 \\ 10 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

1.1 Si dica se il sistema è stabile

Calcoliamo gli autovalori della matrice di stato $\begin{bmatrix} 0 & -20 & 1 \\ 10 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Notiamo che la matrice è **triangolare a blocchi**, quindi gli autovalori sono l'unione degli autovalori di $\begin{bmatrix} 0 & -20 \\ 10 & -30 \end{bmatrix}$ e di $[-1]$:

$$\lambda(\lambda + 30) + 200 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -10, -20$$

$$\lambda_3 = -1$$

I tre autovalori, $-1, -10, -20$ sono **a parte reale negativa, dunque il sistema è stabile**.

1.2 Si scrivano i modi del sistema

Abbiamo tre autovalori distinti - la forma di Jordan è a mini-blocchi di ordine 1 - quindi i modi sono esponenziali del tipo:

$$e^{-t}, e^{-10t}, e^{-20t}$$

1.3 Si dica qual è il modo dominante

Il modo dominante è quello che mette più tempo ad esaurirsi; nel nostro caso è e^{-t}. I transitori sono essenzialmente caratterizzati da e^{-t}.

1.4 Preso un generico valore $x(0)$ dello stato iniziale, si dica in quanto tempo ci si aspetta che l'evoluzione libera del sistema porti ad uno stato il cui modulo è pari a $\frac{1}{1000}$ del modulo dello stato iniziale

Il modo dominante è quello che mette più tempo ad esaurirsi; in questo caso è e^{-t}. Il momento che ci interessa è quando lui si sia contratto di un fattore 1000 (in quel momento, gli altri modi saranno praticamente esauriti, quindi non conteranno nulla): dobbiamo trovare il t per cui valga

$$e^{-t} = \frac{1}{1000}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} t &= \ln(1000) \\ &= 3\ln(10) \simeq 7 \end{aligned}$$

quindi, è a circa $t = 7$ che ci siamo contratti di un fattore 1000.

Nota Bene Guardando A, notiamo che $\dot{x_3}$ dipende solo dalla x_3: $\dot{x_3} = -x_3$. Se il valore iniziale di x_3 è 0, esso rimane tale sempre: in altre parole, se lo stato iniziale appartiene solo al piano x_1, x_2 - piano in cui l'evoluzione è governata solo dalla parte $\begin{bmatrix} 0 & -20 \\ 10 & -30 \end{bmatrix}$ - allora anche l'evoluzione non uscirà mai da esso. Gli autovettori $-10, -20$ legati alla matrice 2×2 sono collegati solo a modi veloci, il che ci suggerisce che non è vero che qualunque sia la C.I. ci mettiamo 7 secondi: se partiamo dal sottospazio generato esclusivamente dagli autovettori veloci la dinamica è governata solo da questi, e quindi si va a 0 molto più rapidamente di 7 secondi.
Se scegliamo invece come C.I. un punto $\in \mathbb{R}^3$ con tre (invece che solo due) componenti non nulle, ci sarà anche la componente x_3, che si contrarrà in ragione di e^{-t}, il modo lento responsabile del fatto che per entrare nella sfera di raggio 1/1000 rispetto alla posizione iniziale impieghiamo molto tempo.

2 T.E. 16/01/2018

Una variabile x evolve secondo l'equazione nonlineare $\dot{x} = f(x) + u$, dove $f(x)$ è la funzione rappresentata in Figura 1.

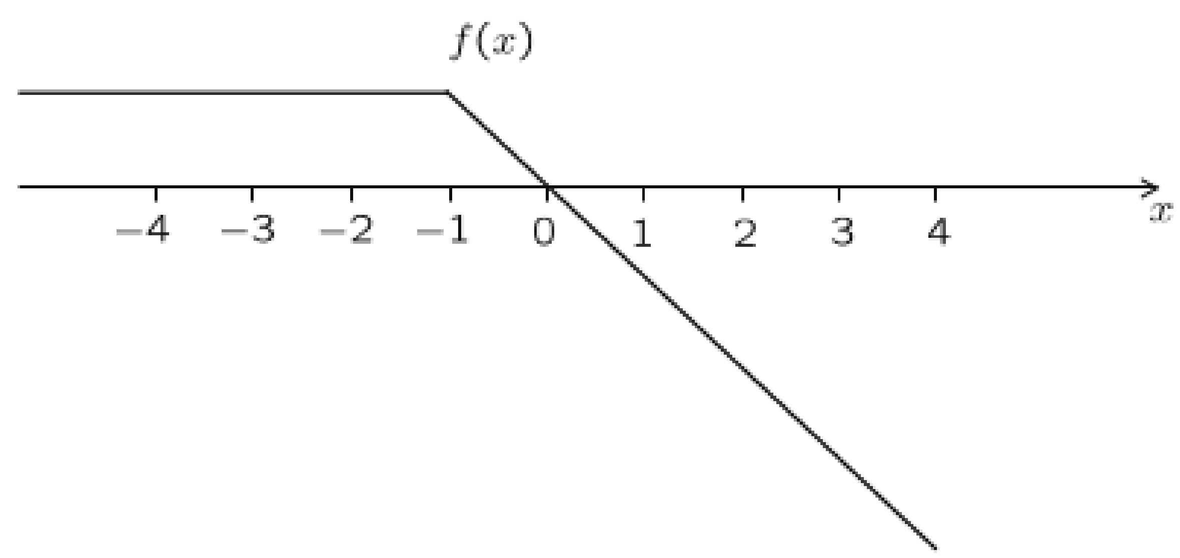


Figura 1: $f(x)$

2.1 Si determini lo stato di equilibrio $\bar{x}$ corrispondente a $u = 0$

Ponendo $\dot{x} = f(x) + 0 = 0$ troviamo come soluzione l'equilibrio $\bar{x} = 0$.

2.2 Si dica se l'equilibrio è stabile

Linearizziamo:

$$\Delta x = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} \Delta x + \Delta u$$

Siccome $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = -1$, quantità < 0, usando il teorema concludiamo che il sistema **è stabile**.

2.3 Si dica se l'equilibrio è stabile in grande

Attenzione! Non si può più usare il sistema linearizzato, perchè una volta che abbiamo visto che è stabile esso lo è sempre anche in grande **a prescindere da come lo è il non linearizzato**.

Analizziamo il comportamento del sistema non lineare, semplicemente facendo alcune considerazioni sul disegno:

- Se parto da $x = 2$ la derivata corrispondente è negativa $\rightarrow$ ci spostiamo verso l'origine
- Se parto da $x = -2$ la derivata è positiva $\rightarrow$ ci spostiamo verso l'origine

Dunque, **la stabilità vale in grande**.

2.4 Posto $x(0) = -2$ e $u = 0$, si determini l'espressione analitica di $x(t)$ e se ne disegni il grafico

Partendo da $t = 0$ con il valore -2, la derivata corrispondente vale $+1$: la soluzione si incrementa con velocità unitaria (moto lineare $x = t$), e continua a farlo fintanto che non raggiungiamo $t = 1$:

$$x(t) = -2 + t$$

Dopo $t = 1$ la $f(x)$ cambia, perchè diventa inclinata per via di $\dot{x} = -x$, la cui soluzione è $x(t) = c \cdot e^{-t}$ (in realtà e^{-t-1}, perchè deve partire dal valore -1 a $t = 1$), con $c = -1$ per via della C.I..

Riassumendo:

$$x(t) = \begin{cases} -2+t & t \leq 1 \\ -e^{-(t-1)} & t > 1 \end{cases}$$

Dalla Figura 2 si vede come **c'è convergenza a** 0 **in accordo con il risultato precedente di stabilità (in grande):**

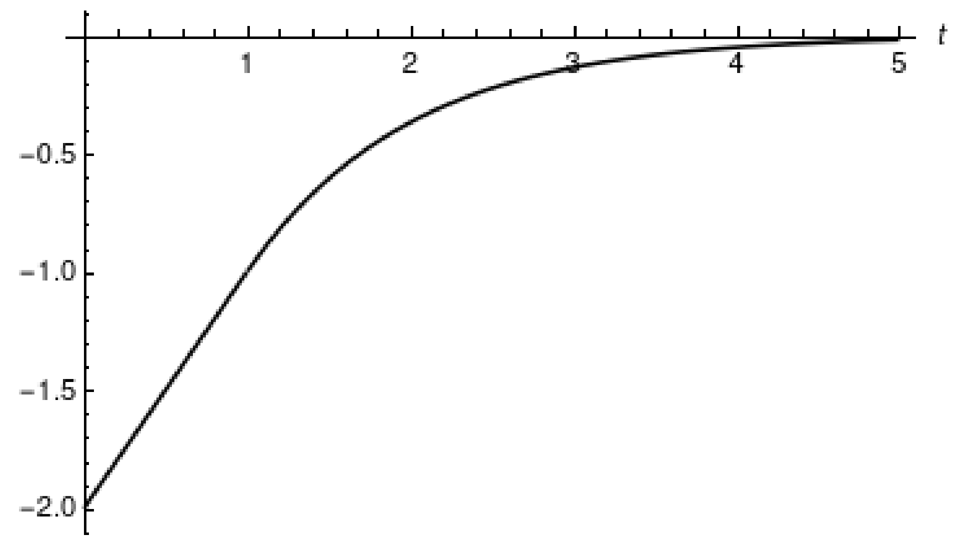


Figura 2: $x(t)$

2.5 Si determini un valore costante di u tale che, qualunque sia il valore di $x(0)$, lo stato del sistema tenda al valore 3

Ci viene richiesto di rendere 3 il nuovo equilibrio in grande. Per farlo, dobbiamo alzare $f(x)$ di 3, e lo facciamo ponendo $u = 3$:

$$\dot{x} = f(x) + 3 = g(x)$$

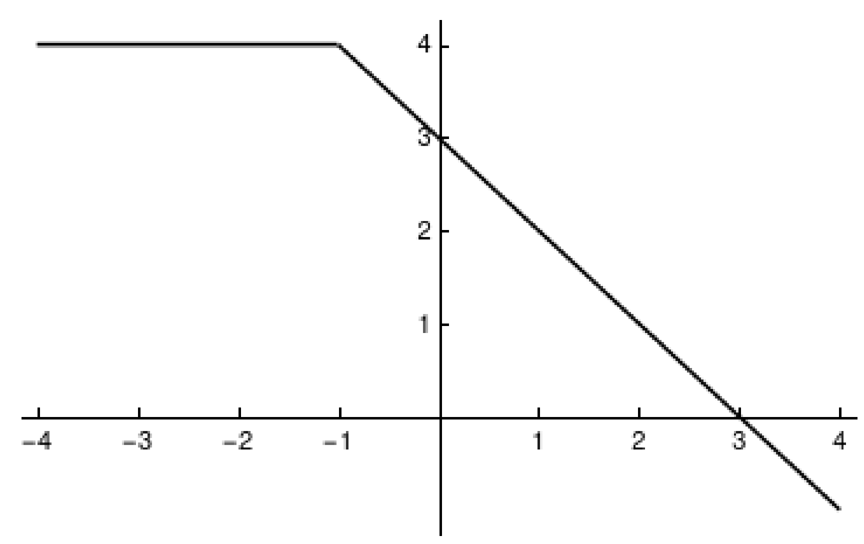


Figura 3: $g(x)$

Valgono le medesime considerazioni di prima per concludere che questo è un equilibrio stabile in grande.
Integrando l'equazione differenziale, si vede che l'andamento ora tenderà asintoticamente al valore $x = 3$.

Nota per sistemi con variabili di stato non scalari Il ragionamento compiuto sopra è possibile solo perchè x è uno scalare, e quindi $\dot{x} = -x$ è una retta bidimensionale. In un sistema scalare (ovvero con una sola variabile di stato), la stabilità **corrisponde ad un progressivo avvicinamento di x all'origine**, ma ciò **non è vero** per sistemi di ordine superiore: preso $x(t)$ come vettore multidimensionale e calcolatane la norma (la distanza dall'origine del vettore), anche se questa decresce continuamente fino a 0 non vuol dire sempre avere stabilità. In altre parole, se si ha una contrazione del modulo di $x(t)$ si ottiene stabilità, ma **la stabilità non richiede necessariamente una contrazione del modulo** di $x(t)$.
Lo dimostriamo con un esempio:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \dots$$

Gli autovalori sono $-1, -2$, quindi il sistema è stabile.
La traiettoria nello spazio di stato quando la C.I. è in $(1,1)$ si trova prendendo una scorciatoia: la prima equazione di stato è

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 4x_2$$

che, calcolata in $t = 0$, vale:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(0) &= -x_1(0) + 4x_2(0) \\ &= -1 + 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

La derivata di x_1 all'istante iniziale $t = 0$ vale 3, quindi **la velocità iniziale di incremento di x_1 è pari a** $+3$.
Analogamente, troviamo che la velocità iniziale di incremento di x_2 è -2 (decremento).

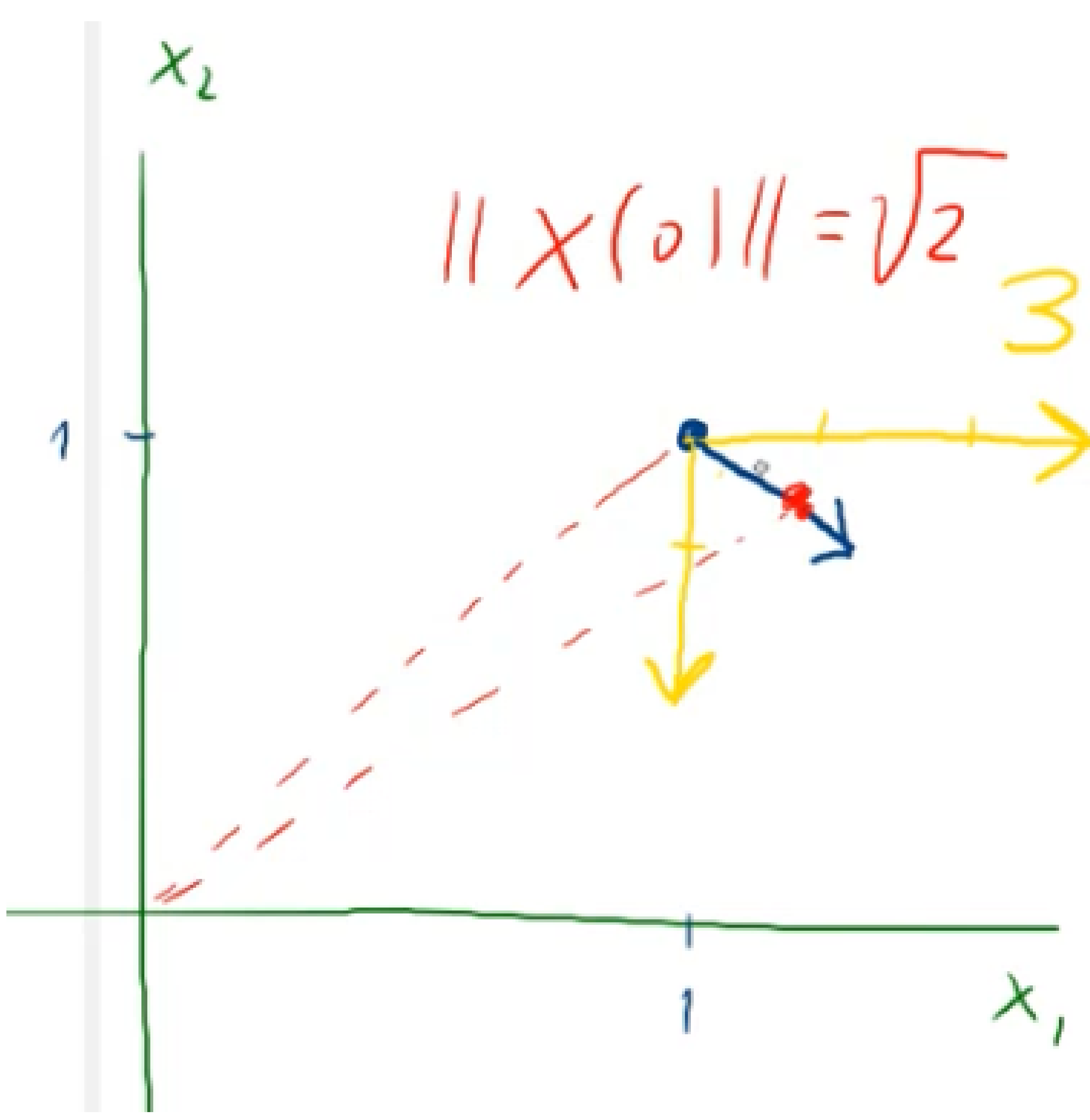


Figura 4: Esempio di tracciamento qualitativo della traiettoria partente dal punto $(1,1)$.

Mettendo insieme le due componenti, la traiettoria partirà con una direzione obliqua del genere rappresentato in Figura 4.
Già se tracciamo ad occhio le norme relative ai due punti in figura (*linee tratteggiate*) notiamo che **dal primo al secondo ci siamo allontanati dall'origine**! La traiettoria, anche se sappiamo che dovrà finire nell'**origine**, per un certo momento **se ne allontana**.
Per vedere più precisamente le traiettorie (lungo cui la percorrenza sappiamo essere rettilinea), prendiamo la matrice A e ne calcoliamo due autovettori: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ corrispondente all'autovalore -1, $\begin{bmatrix} -4 \\ +1 \end{bmatrix}$ corrispondente all'autovalore -2 (modo più veloce).

- Se partiamo da un punto qualunque, possiamo scomporre la sua posizione lungo i due autovettori e calcolare la traiettoria sommando i contributi, ma con la componente lungo $\begin{bmatrix} -4 \\ +1 \end{bmatrix}$ che va a 0 più rapidamente: la traiettoria tende a "piegarsi" verso l'autovettore più lento $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- Se si ripete lo stesso ragionamento per un altro punto iniziale, si trova sempre che la traiettoria seguita prima di andare all'origine se ne allontana, per via della curva di cui sopra.

Esercizi su raggiungibilità ed osservabilità

Esercizi tratti da temi di esame

1 T.E. 13/01/2015

Si consideri il sistema:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} x = \begin{bmatrix} 8 & -18 \\ 9 & -19 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \mathrm{u} \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases} \tag{1}$$

1.1 Si calcoli il modo dominante di $\mathcal{S}$

I modi sono le esponenziali dove compaiono gli autovalori all'esponente, moltiplicati per il tempo, eventualmente ad una certa potenza.

Il polinomio caratteristico è dato da:

$$(\lambda - 8)(\lambda + 19) + 18 \cdot 9 = (\lambda + 1)(\lambda + 10)$$

da cui si ricava, ponendo $= 0$, due modi: e^{-t}, e^{-10t}.

Il modo dominante è quello più lento; e^{-t} è un'esponenziale che va a 0 più lentamente di e^{-10t}, quindi il modo dominante è e^{-t}.

1.2 Si ricavi la scomposizione di Kalman per la osservabilità del sistema

Prima di tutto, bisogna calcolare il **sottospazio di osservabilità** X_o; per farlo, usiamo la formula:

$$\begin{aligned} X_0 &= \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ +2 \end{bmatrix}\right) + \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -18 & -19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ +2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ +2 \end{bmatrix}\right) + \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} 10 \\ -20 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Vediamo subito che $\begin{bmatrix} -1 \\ +2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 10 \\ -20 \end{bmatrix}$ sono linearmente dipendenti tra di loro (sono vettori "allineati": uno è l'altro moltiplicato per -10); quindi, il risultato è semplicemente l'immagine di $\begin{bmatrix} -1 \\ +2 \end{bmatrix}$ (l'altra immagine non aggiunge nulla).

Il nostro sottospazio X_o, bidimensionale, è la retta passante per l'origine e il punto $(-1, 2)$ (Figura 1).

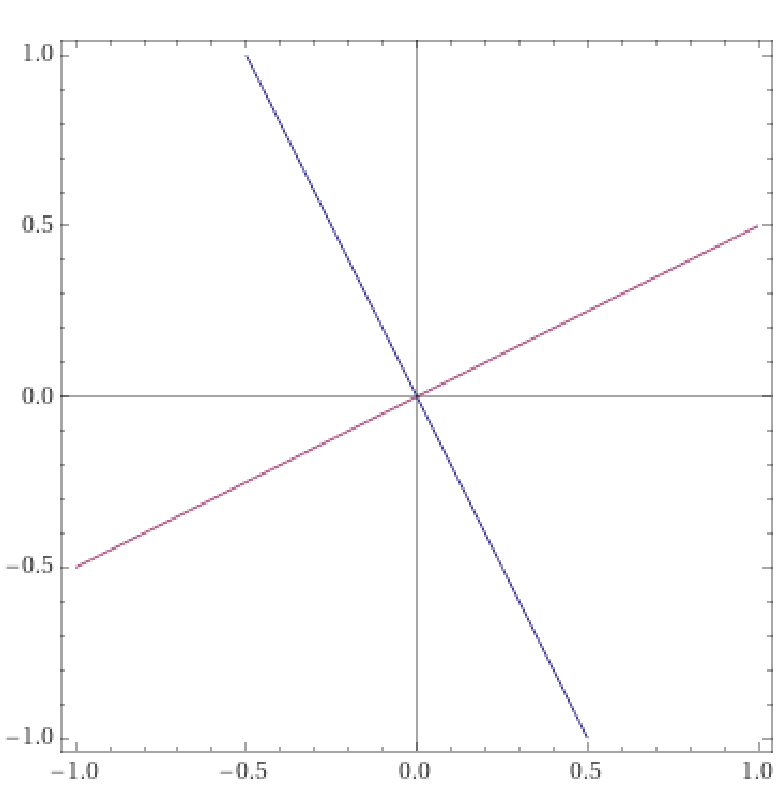


Figura 1: Spazio di osservabilità X_0 (blu) e il suo ortogonale, X_{no} (rosso)

Tutti i punti della retta che è ortogonale ad X_0 **sono punti non osservabili** (punti partendo dai quali si genera un'uscita ugualmente nulla).

Procediamo calcolando la **scomposizione di Kalman**, scrivendo una T^{-1} fatta nel seguente modo:

- La prima colonna (v_1) è una base nel sottospazio di osservabilità
- La seconda colonna (v_2) è una base nel sottospazio di non-osservabilità

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & +2 \\ +2 & +1 \end{bmatrix}$$

di conseguenza, T è:

$$T = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} +1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

e le matrici trasformate sono:

$$\tilde{A} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} +1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} +8 & -18 \\ +9 & -19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & +2 \\ +2 & +1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ -27 & -1 \end{bmatrix}$$

Essendo questa una matrice triangolare, i suoi autovalori sono facilmente trovati [1] [2] (sono $-1, -10$).

$$\tilde{b} = T \cdot b = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{11}{5} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c} = c \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Scritto in modo esteso:

$$\begin{cases} \dot{z}_o = -10z_o + \frac{2}{5}u \\ \dot{z}_{no} = -27z_o - z_{no} + \frac{11}{5}u \end{cases}$$
$$y = 5z_o$$

1.3 Si supponga ora che l'ingresso venga ottenuto attraverso una retroazione dell'uscita. Si dica se è possibile progettare la retroazione in modo tale da modificare il modo dominante di $\mathcal{S}$

Il modo associato all'autovalore -1, e^{-t}, è quello **dominante** nel sistema. Si vede bene, dalla matrice $\tilde{A}$ calcolata nel punto precedente, che l'autovalore -1 è **relativo alla parte non osservabile**, e, in quanto tale, nessuna retroazione può spostarlo.

2 T.E. 10/09/2013

2.1 Si dia una definizione di stato osservabile

Uno stato $\bar{x}$ è osservabile se l'uscita $y(t) = cL(t)\bar{x}$ **non è** sempre identicamente uguale a 0.

2.2 Si dia una definizione di sistema completamente osservabile

Un sistema è completamente osservabile se l'insieme degli $\bar{x}$ osservabili è $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, dove n è l'ordine del sistema (ovvero: il sottospazio di non osservabilità è **solo l'origine**).

2.3 Due sistemi $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ sono interconnessi in parallelo. $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ hanno dinamiche diverse, ma essi condividono un eguale autovalore $\lambda = -2$. Si dica se il sistema complessivo costituito dal parallelo di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ può essere completamente osservabile

$\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ non hanno nulla a che vedere l'uno con l'altro, tranne per l'avere un autovalore uguale; un modo alla e^{-2t} per entrambi suggerisce che potrebbe capitare (per opportune condizioni iniziali e trasformazione di uscita) che abbiano un segnale emesso da $\mathcal{S}$ e uno emesso da $\mathcal{S}'$ che sono uguali e opposti, causando un'uscita identicamente nulla.

Vogliamo sollecitare il primo sistema in modo tale che esso dia luogo ad una evoluzione del tipo e^{-2t}, prendendo una ci sull'autovettore associato all'autovalore -2, perchè in quel caso la percorrenza è rettilinea esattamente del tipo e^{-2t}. Per farlo, mettiamo la matrice del sistema $\mathcal{S}$ in una forma che rivela la struttura interna, la forma di Jordan:

$$A_{\mathcal{S}_J} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \dots & -2 \end{bmatrix} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

[1] Una matrice 2×2 deve avere, per essere nella forma di Kalman, uno 0 in alto a destra.
[2] Una matrice triangolare ha sulla diagonale principale gli autovalori.

La prima riga si scrive come $\dot{z_1} = -2z_1 + z_2$. Mettendo condizione iniziale $= 0$ per ogni z tranne che per z_1, la seconda riga $\dot{z_2} = -2z_2$ genera la soluzione $z_2(t) = 0$. Sostituendo quest'ultima nella prima riga, otteniamo

$$\dot{z_1} = -2z_1 + 0$$

l'unica variabile che evolve è quindi z_1, secondo $z_1(t) = e^{-2t} \cdot z_1(0)$: stiamo eccitando l'autovettore associato a -2. Nelle variabili z quell'autovettore è la prima componente $(1\,0\,0\,0\;\ldots)$, come si vede esplicitamente grazie alla forma di Jordan.

Concludiamo quindi che se mettiamo $= 0$ a tutte le variabili z tranne z_1, l'evoluzione è $z_1(t) = e^{-2t} \cdot z_1(0)$. Questo ragionamento è completamente replicabile anche per il sistema $\mathcal{S}'$ (perchè sappiamo per certo che nella sua forma di Jordan c'è una prima riga del miniblocco associato all'autovalore -2): $v_1(t) = e^{-2t} \cdot v_1(0)$.

Andiamo avanti nel ragionamento: qual è l'uscita complessiva del parallelo?

L'uscita è data da una y composta dalla concatenazione delle c di $\mathcal{S}$ e della c di $\mathcal{S}'$, e possiede al suo interno due particolari coefficienti, $\boxtimes$, che moltiplicheranno z_1 e v_1 (gli altri sono inutili da scrivere, perchè moltiplicheranno sempre degli 0 per come abbiamo imposto a zero le variabili che non siano z_1 e v_1).

$$y = \begin{bmatrix} \boxtimes & 0\ldots & | & \boxtimes & 0\ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \ldots \\ - \\ v_1 \\ \ldots \end{bmatrix}$$

Dando dei valori concreti ai $\boxtimes$, ad es.: $z_1 = 7$ e $v_1 = -5$, l'evoluzione complessiva sarà $y(t) = (5 \cdot 7) \cdot e^{-2t} + (-5 \cdot 7) \cdot e^{-2t} = 0\,\forall t$. Il sottospazio di non osservabilità quindi **non può essere sicuramente vuoto**.

Riassumendo: **mettendo una C.I. non nulla**, uguale e opposta al coefficiente sulla trasformazione di uscita, otteniamo un risultato identicamente nullo, *anche quando i due sottosistemi, presi singolarmente, sarebbero completamente osservabili.* Abbiamo dimostrato che l'osservabilità è una proprietà "che si può perdere" mettendo insieme diversi sistemi osservabili!

3 T.E. 14/07/2015

3.1 Si scriva il modello in variabili di stato della rete elettrica in Figura 2

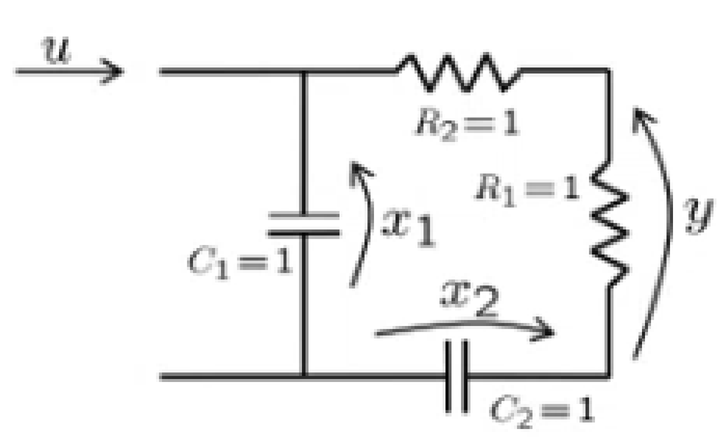


Figura 2: Rete elettrica

Osserviamo che

- la corrente in C1 è $\dot{x_1}$, perchè la corrente, a meno della capacità (unitaria), è la derivata della tensione.
- la corrente in C2 è $\dot{x_2}$ per lo stesso motivo.
- per bilancio delle correnti al nodo in alto a sinistra, otteniamo una corrente su R2 $= u - \dot{x_1}$.
- la tensione su R2 è $u - \dot{x_1}$.
- La corrente su R1 dà una caduta di tensione sempre $= u - \dot{x_1}$

Per scrivere le equazioni di stato, esprimiamo in formule...

- ... il bilancio delle tensioni alla maglia: $x_2 + u - \dot{x_1} + u - \dot{x_1} = x_1$
- ... il bilancio delle correnti: $\dot{x_2} = u - \dot{x_1}$

Il sistema è dunque:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + u \\ \dot{x_2} = & +\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

3.2 Si ricavi la scomposizione di Kalman per l'osservabilità della rete elettrica

Sappiamo che la scomposizione di Kalman si ottiene a partire da una matrice T, la cui inversa ha sulle colonne una base del sottospazio di osservabilità e una di quello di non osservabilità.

$$\begin{aligned} X_0 &= \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) + \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) + \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Siccome $\begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$ sono uno lo scalato dell'altro, l'immagine del primo è uguale a quella del secondo, e possiamo fare a meno di calcolare entrambe[3].

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo ora la forma di Kalman[4]:

$$\begin{aligned} \tilde{A} = TAT^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\tilde{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c} = c \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Scritto in forma estesa nelle variabili z:

$$\begin{cases} \dot{z}_o = -z_o & +\frac{1}{2}u \\ z_{no} = & \frac{1}{2}u \\ y = z_o \end{cases}$$

Notiamo che c'è una parte "appesa a nulla": solo la parte osservabile contribuisce ad y, e non c'è alcun accoppiamento tra la parte non osservabile e quella osservabile. Il sistema che si ottiene togliendo la parte non osservabile, quindi, ha un comportamento ingresso-uscita del tutto identico al sistema iniziale. La variabile z_{no} è interna e non si manifesta sull'uscita in alcun modo; per questo, possiamo togliere direttamente dal nostro sistema la seconda equazione, $z_{no} = \frac{1}{2}u$, ottenendo un sistema del primo ordine equivalente all'originale ai morsetti esterni.

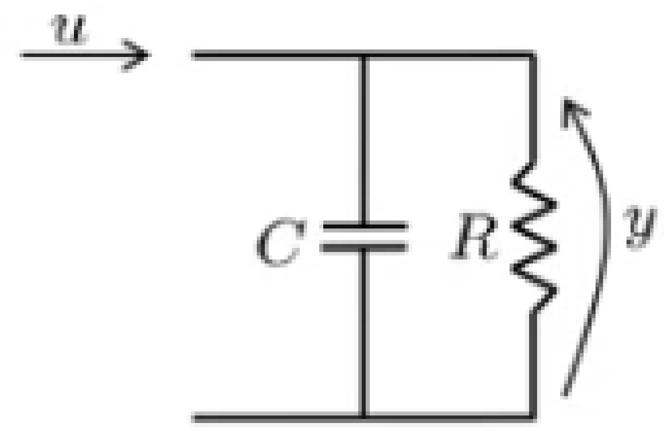


Figura 3: Nuovo sistema equivalente a quello in Figura 2

3.3 Si dimensioni il circuito RC in Figura 3 in modo che esso abbia il medesimo comportamento esterno della rete elettrica in Figura 2

Nel punto precedente abbiamo ottenuto che il sistema originale è rappresentabile, ai morsetti esterni, come:

$$\begin{cases} \dot{z}_o &= -z_o + \frac{1}{2}u \\ y &= z_o \end{cases}$$

Il nostro sistema attuale (Figura 3), invece, è rappresentabile come (mediante bilancio delle correnti al nodo dove entra u):

$$u = c\dot{x} + \frac{1}{R}\dot{x}$$

ovvero:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{C}u \\ y = x \end{cases}$$

($x =$ tensione sul condensatore, $C\dot{x}$ =corrente nel condensatore, $y = x$, $\frac{1}{R}x$ =corrente nel resistore).

Vediamo che anche quest'ultimo è un sistema del primo ordine; **per rendere uguale tra i due sistemi il legame tra u ed y, basta imporre che:**

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2} \rightarrow C = 2$$

$$-\frac{1}{RC} = -1 \rightarrow R = \frac{1}{2}$$

In conclusione, con $C = 2$ e $R = \frac{1}{2}$, il sistema in Figura 3 e quello in Figura 2 sono *equivalenti ai morsetti esterni* (**a parità di ingresso si ha la medesima uscita**).

Nota Bene Nei sistemi ci sono delle parti nascoste che non si vedono nel comportamento esterno, **ma questo non vuol dire** che nel sistema fisico iniziale ci sia una parte identificabile che è fisicamente rimovibile per ottenere qualcosa di comunque equivalente a quello iniziale: per fare queste osservazioni abbiamo dovuto cambiare la base, che ha evidenziato la parte appesa, espressa con variabili che **non hanno equivalenti fisici nel sistema iniziale**.

[3]Potremmo usare come primo vettore semplicemente $\begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, ma per comodità moltiplichiamo tutto per 2 così da non tirarci dietro frazioni.

Il secondo vettore si calcola semplicemente facendo un ortogonale del primo.

[4]Per controllare i calcoli, ricordiamo che la traccia (somma degli elementi sulla diagonale principale) di una matrice è la somma degli autovalori, e che la trasformazione di Kalman non li altera, quindi la traccia non deve cambiare tra A e $\tilde{A}$, e nemmeno il determinante, in quanto prodotto degli autovalori. Inoltre, $\tilde{A}$ deve avere lo *zero strutturale* in alto a destra e $\tilde{c}$ pure ha uno zero strutturale a destra.

Esercizi su funzione di trasferimento e risposta in frequenza

Esercizi tratti da temi di esame

1 T.E. 19/04/2017

Si desidera valutare il comportamento in frequenza del sistema

$$\mathcal{S}: \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -100 & 0 \\ -100 & -1 \end{bmatrix} \mathrm{x} + \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \mathrm{u} \\ y = \begin{bmatrix} 100 & -98 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

1.1 Si calcoli la funzione di trasferimento S(s) di S

La calcoliamo nel modo seguente:

$$\begin{aligned} c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b &= \begin{bmatrix} 100 & -98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+100 & 0 \\ 100 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1000}{s+100} + \frac{-980s}{(s+100)(s+1)} \\ &= \frac{20s+1000}{(s+100)(s+1)} \end{aligned}$$

1.2 Si disegni il diagramma di Bode asintotico del modulo di S(s)

Poli: $1, 100$
Zeri: 50
Guadagno: $\frac{20s+1000}{(s+100)(s+1)} \Big[_{s=0} = 10 \rightarrow 20 \cdot Log(10)\mathrm{dB} = 20\mathrm{dB}$

Partiamo dal valore del guadagno, e andiamo dritti fino a che troviamo la prima singolarità; se essa è un *polo*, il diagramma piega verso il basso, se è uno *zero* piega verso l'alto. La pendenza 1 corrisponde a 20dB per decade.

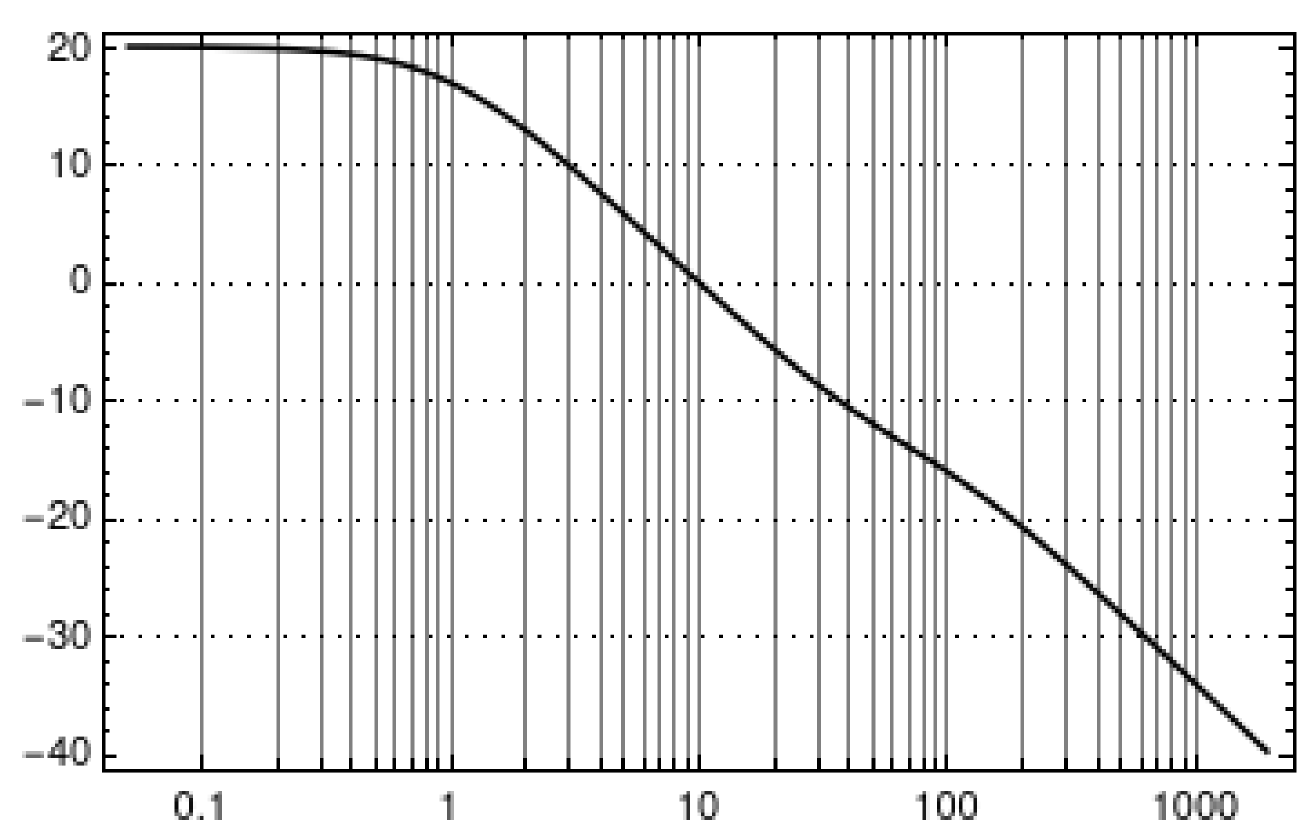


Figura 1: Diagramma di Bode reale

1.3 Basandosi sul diagramma disegnato al punto precedente, si determini un valore approssimato per l'ampiezza dell'uscita di regime di S quando $u(t) = \sin(7t)$

Siccome $u(t) = 7t$, abbiamo $\omega = 7$, che individuiamo sul diagramma di Bode. In corrispondenza di $\omega = 7$, vediamo che siamo a circa 4dB, che corrisponde a $20 \cdot Log(ampiezza)$, quindi l'ampiezza è circa 1.5.

1.4 Si dica approssimativamente dopo quanto tempo si inizia a iniettare il segnale $u(t) = \sin(7t)$ il risultato calcolato al punto precedente diventa un buon approssimante dell'ampiezza dell'uscita

Ci chiediamo quanto impiega il sistema a produrre una sinusoide in uscita dopo averne ricevuta una in ingresso. Sappiamo che un sistema, alimentato con una sinusoide in ingresso, non ne produce immediatamente una in uscita, a meno che la condizione non sia "opportuna" secondo il teorema della risposta in frequenza; abbiamo anche visto che, se il sistema è asintoticamente stabile, la sinusoide emerge comunque secondo il teorema **quando i transitori liberi si sono esauriti**. Essenzialmente, questo quesito ci sta chiedendo *quando* avviene ciò, e rispondiamo andando a trovare la **costante di tempo dominante**.

Sappiamo che l'ampiezza di 1.5 calcolata prima non viene raggiunta immediatamente: è presente prima un transitorio, esaurito il quale emerge la sinusoide.

Il transitorio dipende fondalmente dalla costante di tempo dominante, che mette più tempo ad esaurirsi; nel nostro caso, abbiamo due poli, collocati in 1 e 100, di cui il più veloce è chiaramente 100 (se fossero numeri complessi coniugati, ricordarsi di guardare solo la parte reale).

Approssimativamente, **dopo** $4/5$ **volte la costante di tempo più lenta** ci aspettiamo che il transitorio si sia esaurito; nel nostro caso, questo vuol dire $4/5 \cdot 1$ secondi prima che emerga la sinusoide dell'ampiezza che abbiamo calcolato.

2 T.E. 24/07/2012

Si consideri lo schema a blocchi rappresentato in Figura 2, dove

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$
$$G_2(s) = \frac{1}{s+3}$$
$$G_3(s) = \frac{1}{s+10}$$
$$G_4(s) = \frac{s+1}{s+5}$$

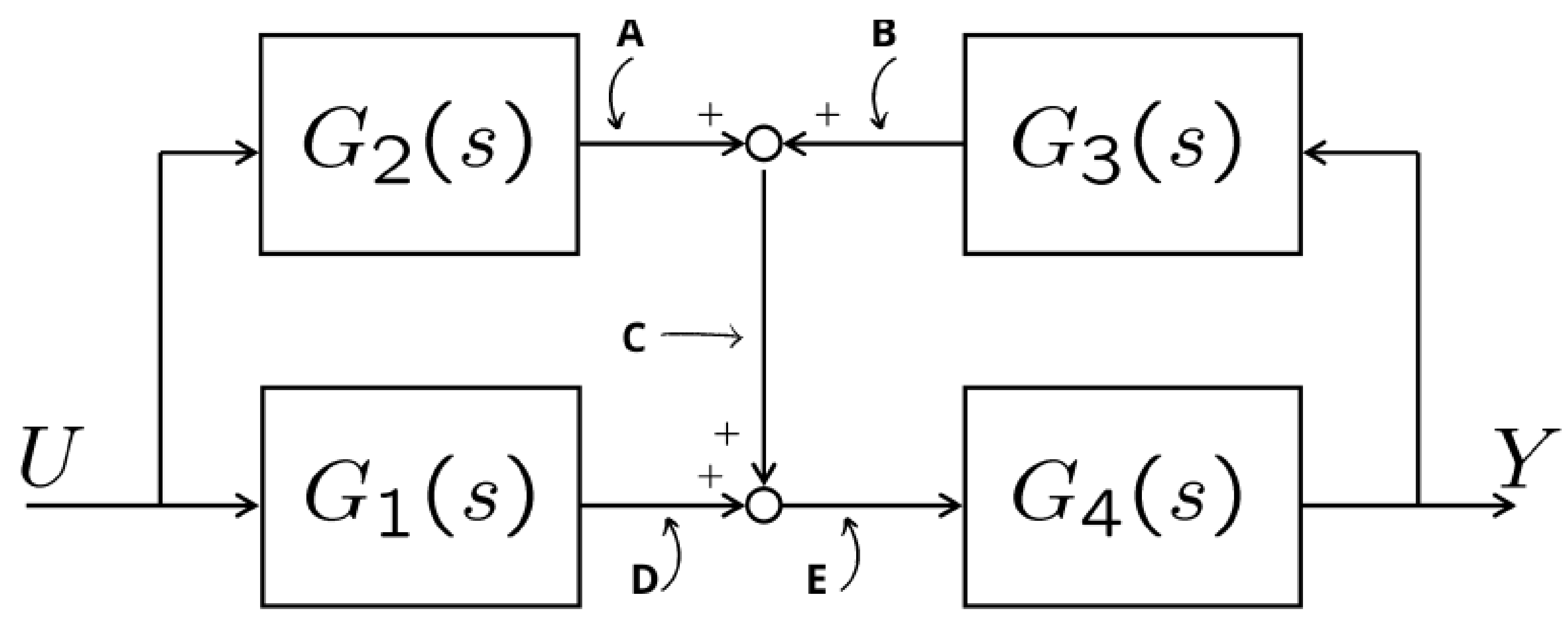


Figura 2: Schema a blocchi

2.1 Si calcoli la funzione di trasferimento $\frac{Y}{U}$

Nel dominio delle trasformate, il calcolo della funzione di trasferimento avviene mediante relazioni algebriche:

- $A = G_2 \cdot U$
- $B = G_3 \cdot Y$
- $C = A + B$
- $D = G_1 \cdot U$
- $E = (A + B + D) \cdot G_4$

Ricaviamo Y come funzione di s moltiplicata per U:

$$(1 - G_4 \cdot G_3)\, Y = G_4\,(G_1 + G_2)\, U$$

ovvero

$$\frac{Y}{U} = \frac{G_4\,(G_1 + G_2)}{1 - G_4 G_3} = \frac{(2s+4)(s+10)}{(s+3)(s^2+14s+49)} \tag{1}$$

2.2 Si dica se il sistema complessivo di Figura 2 presenta delle parti nascoste (parte non raggiungibile o non osservabile)

Sappiamo che **se c'è una parte nascosta**, **il corrispondente autovalore non è polo**, e che **se un autovalore non è polo**, allora **è autovalore di una parte nascosta**.

Osserviamo qui che abbiamo quattro sistemi del primo ordine, che vanno a formare un sistema complessivo con quattro variabili di stato: un sistema del quarto ordine, per cui ci aspettiamo **quattro autovalori**. Però, abbiamo solo un polinomio di ordine tre al denominatore della funzione di trasferimento, quindi avremo solo tre suoi annullanti, o *poli*. Il sistema ha quindi sicuramente una parte nascosta.

Si consideri ora lo schema a blocchi in figura che differisce dal precedente solo per l'uscita

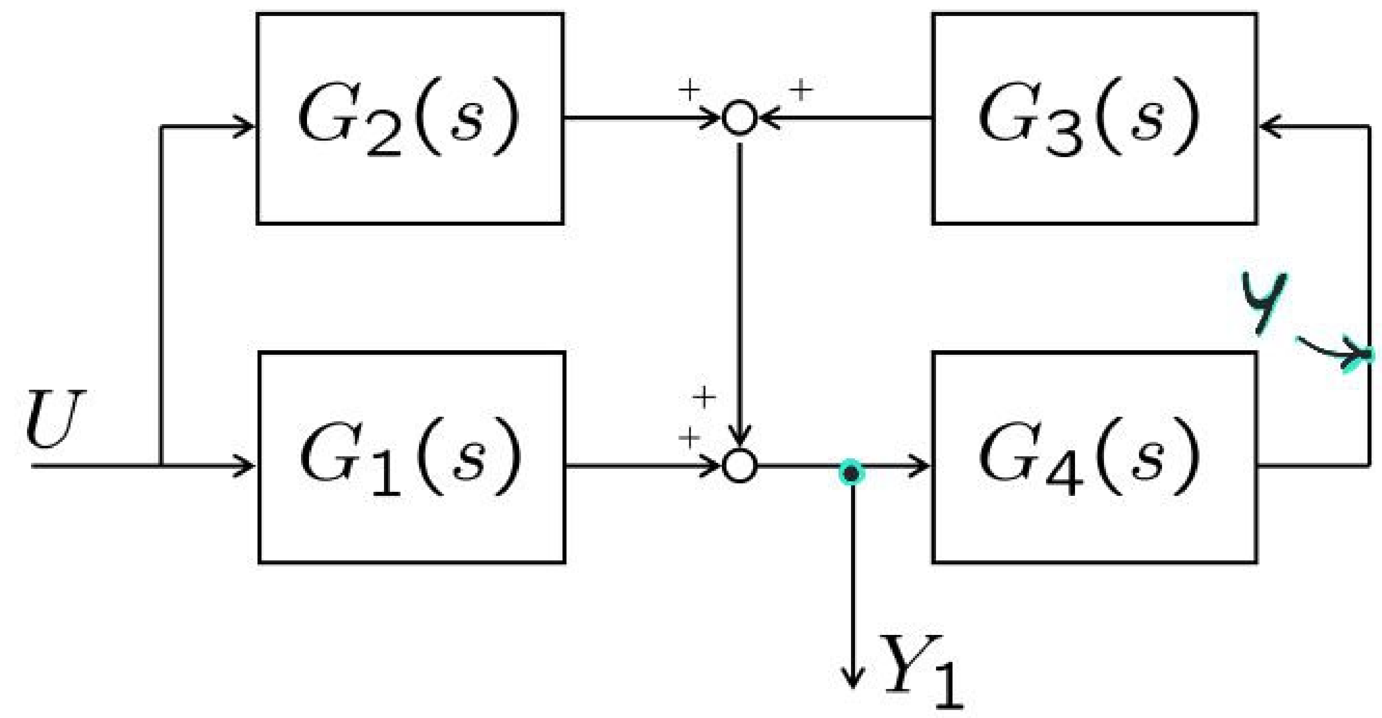


Figura 3: Schema a blocchi modificato

2.3 Si calcoli la funzione di trasferimento $\frac{Y_1}{U}$

Possiamo ripetere i conti del passo precedente, ma si vede facilmente che tra i segnali Y_1 e Y sussiste il legame istituito dalla funzione G_4, perchè Y1 entra in G4 e dà Y.

$$G_4 \cdot Y_1 = Y \rightarrow Y_1 = \frac{Y}{G_4}$$

Y è legata alla U dalla funzione di trasferimento (1) calcolata prima. Facendo una sostituzione:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{Y}{G_4} = \frac{1}{G_4} \cdot (1) \cdot U \\ &= \frac{s+5}{s+1} \frac{(2s+4)(s+10)}{(s+3)(s^2+14s+49)} \cdot U \end{aligned}$$

2.4 Tornando allo schema della Figura 2, si dica se quel sistema complessivo è completamente osservabile

La funzione di trasferimento trovata al punto precedente, $\frac{Y_1}{U} = \frac{s+5}{s+1} \frac{(2s+4)(s+10)}{(s+3)(s^2+14s+49)}$, **ha quattro poli,** quindi il sistema (con quattro autovalori) che ha come ingresso U e come uscita Y_1 **è completamente osservabile e raggiungibile** (perchè $\frac{Y_1}{U}$ ha quattro poli). Se non fosse completamente raggiungibile o osservabile, un autovalore non sarebbe polo.
Tornando allo schema in Figura 2 in cui l'uscita è Y, notiamo che la U è la stessa; siccome abbiamo appena concluso che il sistema in Figura 3 è completamente raggiungibile da U, **lo sarà anche il sistema in Figura 2.**
Nei passi precedenti abbiamo però concluso che il sistema in Figura 2 ha sicuramente una parte *nascosta* (per via del numero di poli); l'unica conclusione possibile coerente con entrambi i fatti trovati è che quella parte nascosta sia una non osservabile.
Un altro modo per giungere alla stessa soluzione è *realizzare* e usare il criterio per l'osservabilità.

Nota Se la domanda ci avesse fatto cambiare l'ingresso, il ruolo di raggiungibilità e osservabilità si sarebbe invertito, ma il ragionamento sarebbe rimasto lo stesso.

3 T.E. 02/07/2018

Un filtro ha funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{s^2 + as + b}{c(0.1s + 1)^2}$$

dove a, b e c sono parametri da determinare.

3.1 Si determini la condizione che deve essere soddisfatta dai parametri a, b e c affinchè un segnale costante in ingresso al filtro passi inalterato a regime sull'uscita del filtro

Osserviamo per prima cosa che il filtro è **stabile**, perchè i suoi poli sono entrambi -10; il valore di regime in risposta ad uno scalino è **uguale al guadagno**. Siccome il segnale è richesto che passi inalterato, il guadagno deve essere $= 1$.

Calcoliamo il guadagno:

$$F(0) = \frac{b}{c} = 1 \tag{2}$$

3.2 Si determini la condizione che deve essere soddisfatta dai parametri a, b, c affinchè un segnale sinusoidale a pulsazione $\omega = 10$ dia effetto nullo a regime sull'uscita del filtro

Ci appelliamo al teorema della risposta in frequenza: sappiamo che $|F(i\omega)|$ è l'ampiezza della sinusoide di uscita a regime. Il testo chiede che questo sia rigorosamente $= 0$:

$$|F(i\omega)| = \left| \frac{-\omega^2 + ai\omega + b}{\cdots} \right| = 0$$

Cioè, nel nostro caso:

$$|F(i10)| = 0 \iff |-100 + 10a \cdot i + b| = 0$$

questa quantità è $= 0$ solo se:

$$\begin{cases} Re & = b - 100 = 0 \\ Im & = a \cdot 10 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricavano le condizioni su a e b:

$$\begin{cases} b & = 100 \\ a & = 0 \end{cases}$$

Per cui $c = 100$.

Se torniamo al numeratore di $F(s)$, inserendo i valori delle costanti trovate stiamo mettendo due zeri sull'asse immaginario (punti $\pm i10$), quindi se ω transita per di lì la funzione di trasferimento va a 0, ovvero la sinusoide non dà nulla in uscita.

3.3 Si scriva una funzione di trasferimento $F(s)$ che soddisfa le due condizioni precedentemente determinate

$$F(s) = \frac{s^2 + 100}{100 \cdot (0.1s + 1)^2}$$

3.4 Si supponga ora che il segnale in ingresso sia una sinusoide a pulsazione $\omega = 9$ ed ampiezza unitaria. Si determini l'ampiezza del segnale di regime in uscita dal filtro $F(s)$ scritto al punto precedente

Si tratta di applicare di nuovo il teorema della risposta in frequenza; con $s = i\omega$ e $\omega = 9$ otteniamo:

$$\begin{aligned} |F(i9)| &= \left| \left. \frac{s^2 + 100}{100 \cdot (0.1s + 1)^2} \right|_{s=i9} \right| \\ &= 0.105 \end{aligned}$$

Alla pulsazione $\omega = 10$ abbiamo imposto che entrasse una sinusoide e uscisse $= 0$, ma già spostandoci di pochissimo lo smorzamento non è più così perfetto (si vede una componente oscillante di ampiezza 0.1).

4 T.E. 29/08/2017

Si consideri il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathrm{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{u}$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \mathrm{x}$$

4.1 Lavorando unicamente nel dominio del tempo, si calcoli $y(t)$ quando $u(t) = sca(t)$ e $x(0) = 0$

Il sistema è triangolare, quindi non serve diagonalizzazione o altri abbellimenti; conviene integrare la prima equazione di stato $\dot{x_1} = -3x_1 + 1$, dove 1 è u:

$$x(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$$

sostituiamo quanto trovato nella seconda equazione $\dot{x_2} = -x_2 + x_1$ per ricavare x_2:

$$\dot{x_2} = -x_2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3\cdot t} \rightarrow x_2(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3\tau}\right) d\tau$$
$$\rightarrow x_2(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t}$$

Leggendo la trasformazione di uscita $y = 3x_2$ e sostituendo quanto appena ottenuto:

$$y(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-t}$$

4.2 A partire dalla risposta calcolata al punto precedente, e senza fare riferimento alle equazioni del sistema, si ricavi la funzione di trasferimento del sistema

Per trovare la funzione di trasferimento partendo dai segnali $u(t) = sca(t)$ e $y(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-t}$, dobbiamo ricavare, mediante trasformazioni, $Y(s)$ e $U(s)$, per poi farne il rapporto, il quale è **sempre invariante rispetto all'ingresso**[1].

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s+3} + \frac{-\frac{3}{2}}{s+1}$$
$$U(s) = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ &= \frac{3}{(3+s)(1+s)} \end{aligned}}$$

4.3 Alla luce dei punti precedenti, si giustifichi la seguente affermazione: in un sistema lineare, a partire dalla conoscenza della risposta allo scalino è possibile calcolare la risposta a qualunque segnale in ingresso

Sapendo che $u(t) = sca(t)$ e come è fatta $y(t)$, siamo stati in grado di trovare la funzione di trasferimento $G(s) = Y(s) \cdot s$, che è una **rappresentazione esterna completa** del sistema. Dato un qualunque altro segnale di ingresso $\tilde{u}(t)$, esso può essere trasformato con Laplace ($\tilde{U}(s)$), e, moltiplicando la trasformata con $G(s)$, si ottiene la corrispondente uscita $\tilde{Y}(s)$, da cui si risale a $\tilde{y}(t)$.

Nota La modellistica classica guarda un oggetto all'interno e lo descrive; una strada alternativa che questo esercizio ci suggerisce, tipica della *modellistica basata sui dati (sulle misure)* (*data driven modelling*), è quella di iniettare un segnale, di cui si calcola la risposta, senza andare ad indagare cosa c'è all'interno del sistema (*black box*). Già così si può costruire la funzione di trasferimento del sistema, che contiene tutti i suoi comportamenti dinamici, anche quelli non sperimentati direttamente.

[1] perchè il rapporto tra Y e U è G, funzione di trasferimento, dipendente solo dalle matrici A,b e c.

Progetto del controllore

Esercizi tratti da temi di esame

1 T.E. 15/06/2018

Un sistema $S(s) = \frac{100}{s+100}$[1] è soggetto ad un disturbo d sinusoidale puro a pulsazione $\bar{\omega} \leq 0.05$. Esso viene controllato in retroazione come mostrato in Figura 1.

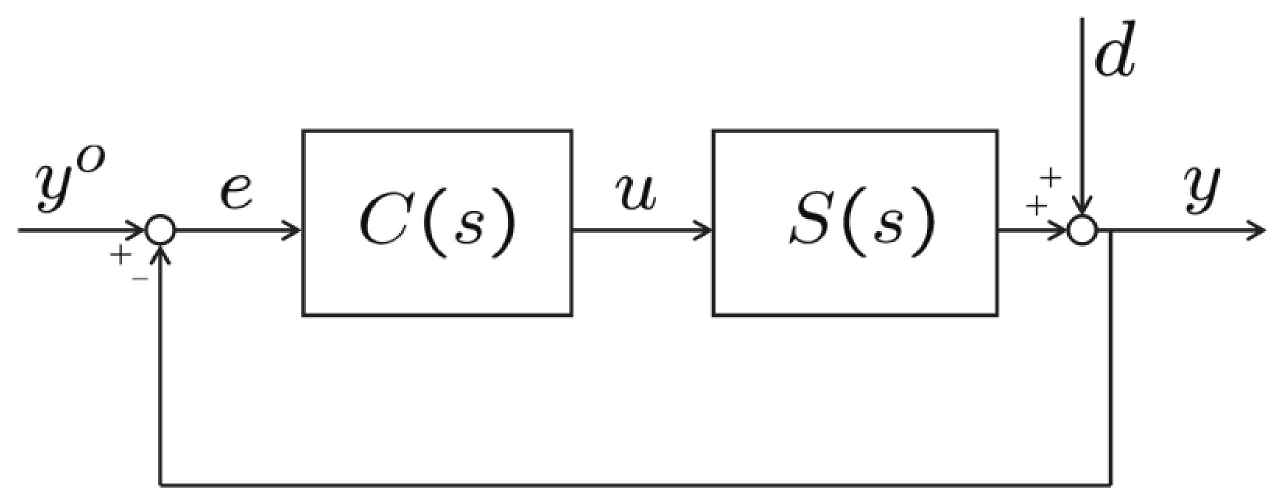


Figura 1: Sistema retroazionato

1.1 Si progetti il controllore $C(s)$ in modo tale da soddisfare le seguenti specifiche

1. Se $y^\circ(t)$ è costante, $y(t) \to y^\circ(t)$ quando $t \to \infty$;
   (a) Questo punto richiede **la presenza di un integratore $\frac{1}{s}$ nel controllore**, che quindi sarà del tipo $C(s) = \frac{1}{s} \cdot C'(s)$.
2. $\omega_c \simeq 10$;
   (a) Vuol dire che vogliamo che il Bode tagli l'asse degli 0dB in quel punto.
3. a regime, il disturbo sinusoidale venga attenuato almeno di un fattore 100 sull'uscita.
   (a) Il disturbo sinusoidale, secondo il testo del problema, sta in una delle pulsazioni minori di 0.05. Ricordiamo che:
      i. l'attenuazione di un disturbo si ha se quel disturbo è **in banda**, ovvero se **L è elevato**
      ii. l'effetto del disturbo sull'errore (quindi sulla Y) è circa $\frac{1}{|L|}$ dove $|L|$ è grande (cioè dove siamo *in banda*). *Quanto* grande ce lo dice il testo: almeno $\frac{1}{|L|} \simeq \frac{1}{100}$.
   (b) Sull'asse delle ω, questo requisito si traduce nel fatto che $|L|$ **deve stare sopra il valore** 40**dB (**40dB= 100**).**

Non ci resta che fare il diagramma di Bode del progetto di L. Iniziamo con il disegnare il diagramma di Bode di $|S(s)| = |\frac{100}{s+100}|$:

[1] guadagno = 1, polo in 100

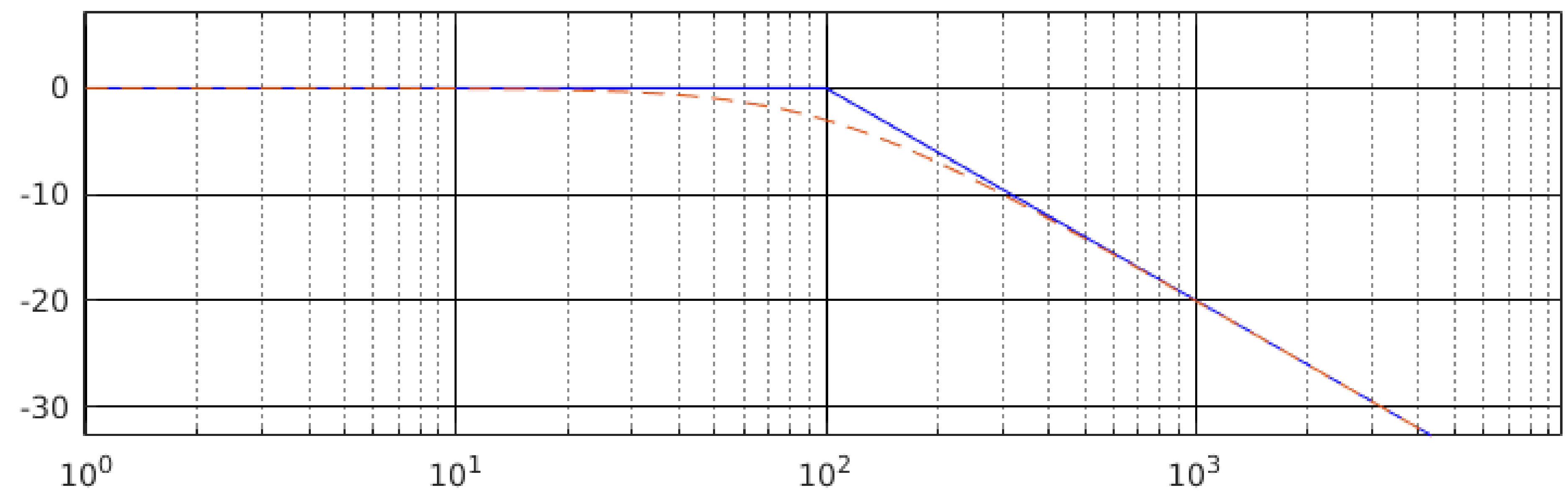


Figura 2: Un polo in 100, guadagno = 1

Partendo dal controllore che abbiamo realizzato fino ad adesso, $C(s) = \frac{1}{s} \cdot ⊛$, modifichiamo progressivamente il diagramma di $|S|$, aggiungendo varie parti in ⊛, **iniziando da quelle in bassa frequenza**[2].

Alcune delle modifiche che possiamo fare:

- Aggiungiamo al Bode il polo in zero dato dall'integratore; il valore 0 si colloca in $\omega = -\infty$,e fa sì che la pendenza iniziale del diagramma sia -1. Di conseguenza, il polo in 100 si farà andare a pendenza -2.
- Notiamo che il modulo di S continua a passare per la zona sotto i 40dB, quindi non si attenuerà abbastanza il disturbo; per tirare su il diagramma, **si moltiplica per una costante maggiore di** 1. Nel nostro caso moltiplichiamo tutto per 10, in modo da "tirare su" il diagramma di 20dB.
- L'ultima modifica è ottima anche da punto di vista del taglio in ω_c, perchè andiamo proprio a tagliare l'asse degli 0dB con un buon margine di fase (tagliamo con pendenza -1 come sarebbe ottimale fare, e $\phi_m \simeq 84°$).

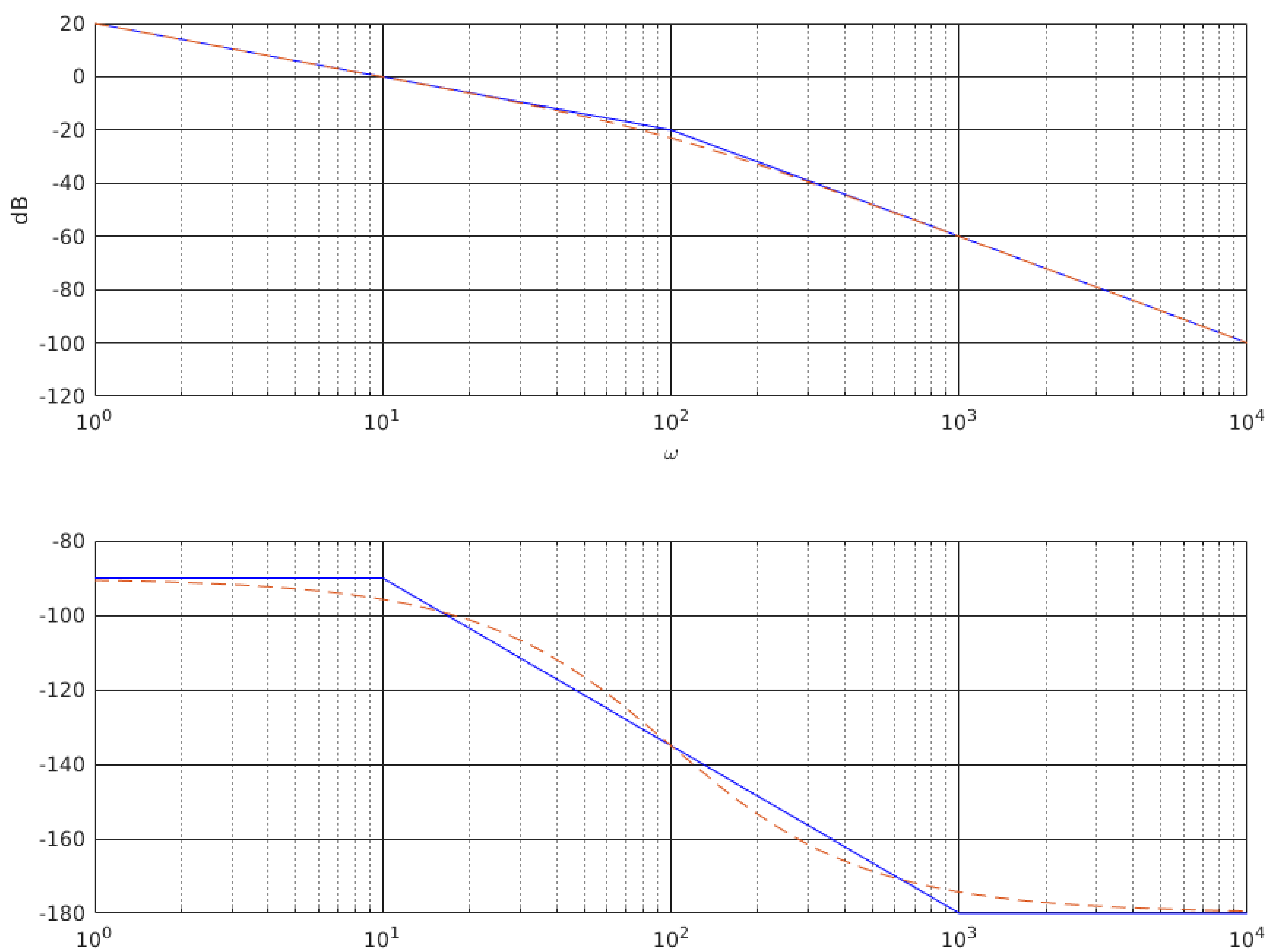


Figura 3: Risultato finale $|L|$

[2]Questo perchè quando introduciamo una singolarità in una certa ω, noi stiamo modificando il Bode anche **per tutte le pulsazioni che vengono dopo**!

1.2 Si calcoli l'ampiezza di regime di $u(t)$ quando $d(t) = 0$ e $y^\circ(t) = 2$

Il controllore progettato al punto precedente è $C(s) = 10 \cdot \frac{1}{s}$, e ciò viene messo in cascata con l'impianto $S(s) = \frac{100}{s+100}$ (vedi 1). Per rispondere a quanto vale l'azione di controllo $u(t)$ a regime, possiamo scegliere tra diverse strategie:

- Calcolare la funzione di trasferimento tra Y° e U, e di essa trovare il guadagno:

$$\frac{\text{linea di andata}}{\text{1+ funzione di anello}} = \frac{10 \cdot \frac{1}{s}}{1 + 10\frac{1}{s} \cdot \frac{100}{s+100}} = \frac{10}{s + 10 \cdot \frac{100}{s+100}}$$

  per $s = 0$, questo vale 1, il nostro guadagno. Ciò significa che, a regime, a fronte di un ingresso che vale 2, si determina un segnale che vale anche lui 2.

- Ricordare che, in accordanza con una specifica data, a fronte di un riferimento costante (in questo caso 2), l'uscita segue **esattamente** il riferimento. Quindi, noi sappiamo che, a regime, se il riferimento è 2, lo è anche l'uscita. Siccome il guadagno dell'impianto è 1, il segnale di ingresso che può dare un'uscita che vale 2 in questo caso è solo il riferimento $y^\circ(t) = 2$.

2 T.E. 02/07/2018

Si consideri il sistema di controllo in 1 dove il sistema è descritto dalla funzione di trasferimento

$$S(s) = \frac{1}{5s+1}$$

2.1 Si progetti un controllore $C(s)$ di ordine 1 in modo tale da soddisfare le seguenti specifiche:

1. Se $y^\circ(t)$ e $d(t)$ sono costanti, allora $y(t) = y^\circ(t)$ a regime;
   - ➟ Questa prima specifica richiede la presenza di un **integratore** $\frac{1}{s}$ in $C(s)$.
2. Il polo dominante in anello chiuso sia reale e di modulo pari circa a 1.
   - ➟ Questo corrisponde a dire che $\omega_c \simeq 1$, e φ_m "grande" (almeno $70 - 80°$)

Iniziamo con il disegnare Bode del sistema $S(s) = \frac{1}{5s+1}$ in cascata con l'integratore (la funzione di trasferimento complessiva è un prodotto tra le due, e il Bode risultante è la somma dei singoli diagrammi):

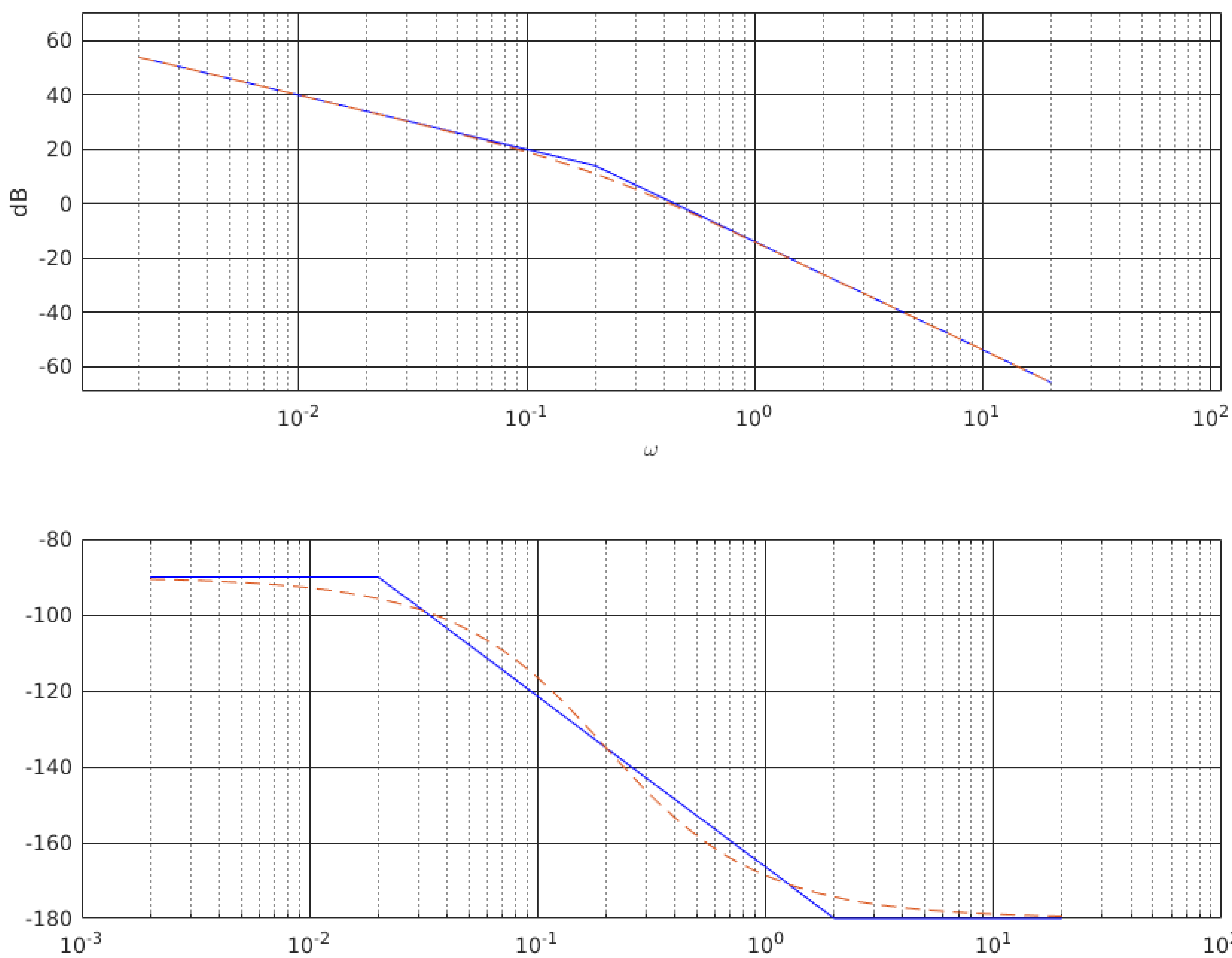


Figura 4: **Modulo:** Polo di S in $\frac{1}{5}$ (circa 0.2), guadagno di S $= 1 = 0$dB, polo dell'integratore in 1.
Fase: parte da $-\frac{\pi}{2}$ a causa dell'integratore, e in $\omega = 0.2$ scende al valore $-\pi$ a causa del polo dell'impianto.

Noi vogliamo un'ω_c che si colloca attorno a $\omega = 1$, e vogliamo anche un φ_m grande; ora come ora, invece, la fase è molto bassa (è attorno a $-\pi$), quindi sicuramente quella dovremo **aumentarla in corrispondenza di** $\omega = 1$. **Per farlo, introduciamo uno zero.**
Scegliamo di mettere uno zero in corrispondenza del polo dell'impianto (0.2) per "cancellarne l'effetto" nel diagramma:

$$C(s) = \frac{1}{s} \cdot (s + 0.2) \cdot \boxtimes$$

Si effettua una cancellazione tra lo zero del controllore e il polo dell'impianto ($\cancel{\frac{1}{(5s+1)}} \cdot \frac{1}{s} \cancel{(s+0.2)} \cdot \boxtimes = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{5} \cdot \boxtimes$), ma è una cancellazione stabile, quindi non c'è alcun problema.
Per ottenere un taglio al valore ω_c desiderato, $\boxtimes = 5$, in modo che $L(s) = S(s) \cdot C(s)$ diventi semplicemente $\frac{1}{s}$, che taglia proprio dove vogliamo e soddisfa tutti gli altri requisiti ($\varphi_m = 90°$).

$$\boxed{C(s) = \frac{5s+1}{s}}$$

2.2 Si disegni il diagramma di Bode approssimato del modulo della funzione di trasferimento $\frac{U}{Y^\circ}$

Una generica $\frac{U}{Y^\circ}$ ha il seguente aspetto:

$$\frac{U}{Y^\circ} = \frac{\text{linea di andata}}{\text{1+funzione di anello}} = \frac{C}{1+CS}$$

Sappiamo che questo è uguale a:

$$\frac{U}{Y^\circ} \simeq \begin{cases} \simeq \frac{\cancel{C}}{\cancel{C}S} & \text{per } |CS| \text{ "grande"} \\ \simeq C & \text{per } |CS| \text{ "piccolo"} \end{cases}$$

Al solito, la condizione discriminante $|CS|$ "grande" o "piccolo" viene estesa su tutto l'asse delle ω usando ω_c come confine.

Prima ω_c rappresentiamo $\frac{1}{s}$; siccome questo è un diagramma di Bode, in realtà dovremo tracciare $20Log(\frac{1}{s}) = -20Log(s)$ (sarà lo speculare rispetto all'asse delle ω del grafico di $\frac{1}{s}$).

Dopo ω_c rappresentiamo il diagramma di $|C|$, che in quel range è costante.

2.3 Si supponga ora che l'azione di controllo $u(t)$ venga erogata da un attuatore con limiti di saturazione. Si determini un valore di saturazione $\bar{u}$ abbstanza grande in modo che l'attuatore non vada in saturazione quando $y^\circ(t) = sca(t)$ e $d(t) = 0$ (fra i valori di $\bar{u}$ che soddisfano il requisito, è preferibile scegliere un valore piccolo)

Abbiamo appena determinato nel passo precedente la funzione di trasferimento tra il riferimento Y° (che è l'unico ingresso) e la U (segnale che controllerà l'azione dell'attuatore); da essa ricaviamo l'effetto su U (azione di controllo) di un riferimento a scalino.

Scriviamo l'espressione analitica della funzione di trasferimento tra Y° e U, sapendo che:

1. il guadagno è 0dB$= 1$ (per questo mettiamo 5 al numeratore)
2. in 0.2 c'è uno zero
3. in ω_c c'è un polo

$$\begin{aligned}\frac{U}{Y^\circ} &= \frac{(s+0.2)\cdot 5}{(s+1)} \\ &= 5 - \frac{4}{s+1}\end{aligned}$$

(l'ultimo passaggio l'abbiamo compiuto per facilità di calcoli, per evidenziare il valore asintotico 5 mediante il calcolo del limite per $s \to \infty$)

La risposta allo scalino con questa funzione di trasferimento è:

$$\frac{1}{s} \cdot \left[5 - \frac{4}{s+1}\right]$$

che, antitrasformata pezzo per pezzo, dà:

$$u(t) = 5 \cdot sca(t) - 4 \cdot (1 - e^{-t})$$

Abbiamo dunque trovato **qual è la $u(t)$ che verrà iniettata dal controllore del sistema in anello chiuso a fronte di un riferimento pari allo scalino.**

Questo grafico permette di dimensionare l'attuatore, che **non è in grado di erogare nessun segnale $u(t)$ maggiore di** 5: una $\bar{u} = 5$ permette che tutta la curva stia sotto quel valore.

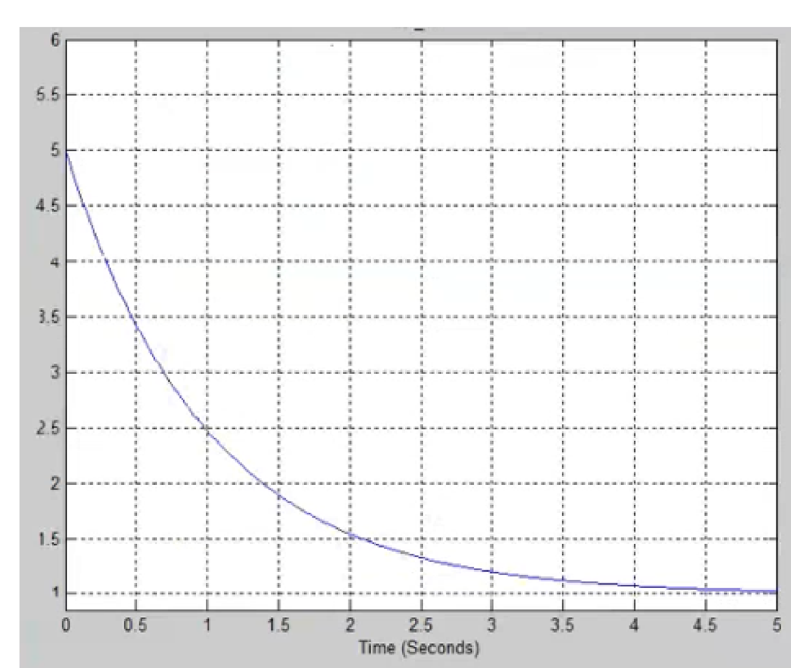


Figura 5: $u(t) = 5 \cdot sca(t) - 4 \cdot (1 - e^{-t})$

Nota Il comportamento di cui sopra si poteva anche vedere usando il teorema del valore finale e iniziale: $u(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\frac{5(s+0.2)}{s+1} = 1$, e $u(0) = \lim_{s\to\infty} s\frac{1}{s}\frac{5(s+0.2)}{s+1} = 5$.
Tornando al diagramma di Bode approssimato, potevamo anche vedere la risposta allo scalino già da esso: per ω basse siamo a 0dB, il guadagno, che è **il valore asintotico, perchè la risposta allo scalino di un sistema tende al guadagno**. Il valore iniziale di $u(t)$ invece è uguale al *guadagno in alta frequenza* ($\lim_{\omega\to\infty}$), cioè 5.

2.4 Simulazione del sistema retroazionato

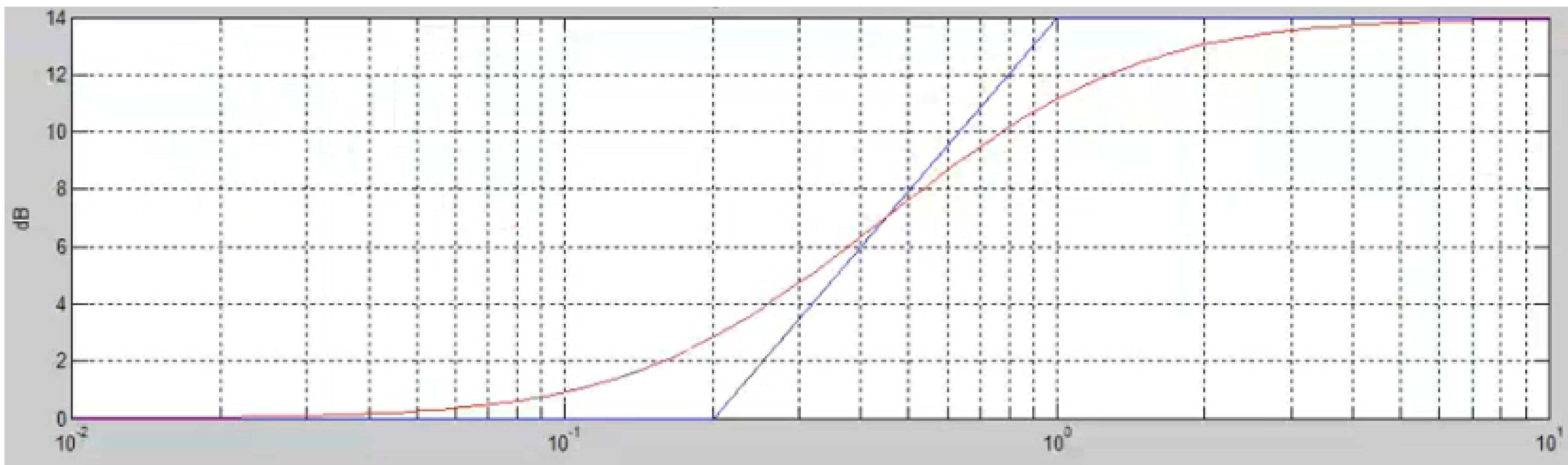


Figura 6: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $\frac{U}{Y^{\circ}}$ (14dB= 5)

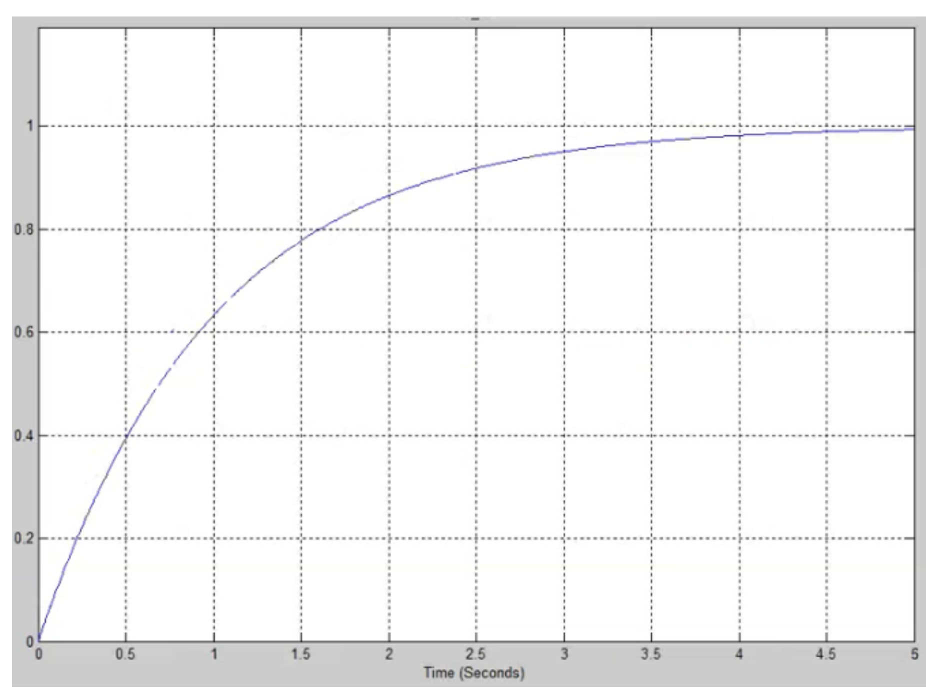


Figura 7: Risposta allo scalino senza disturbo

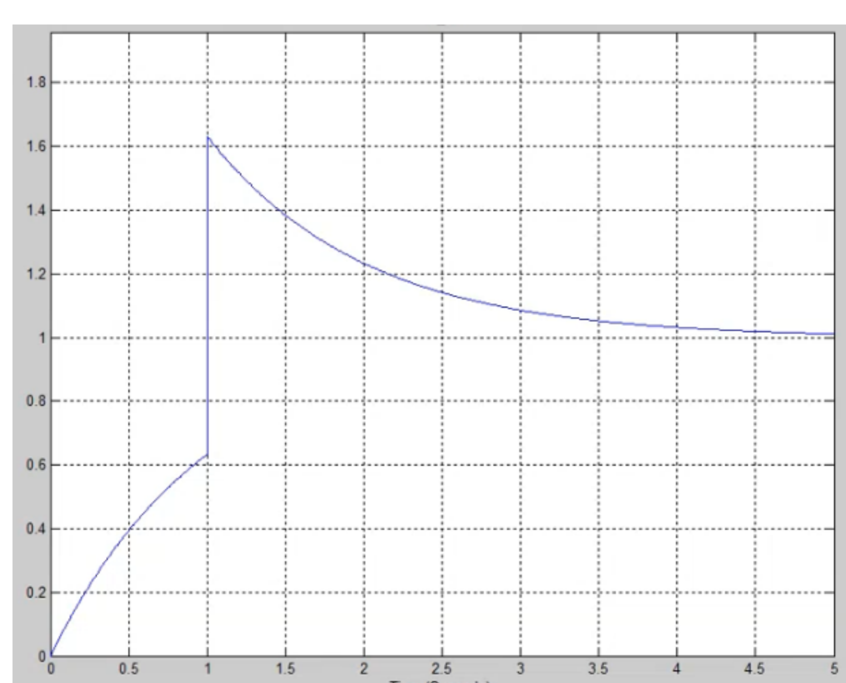


Figura 8: Risposta allo scalino (riferimento) con disturbo a scalino unitario dopo 1 sec

Osserviamo che le due esponenziali in Figura 8, una in salita e l'altra in discesa, hanno la stessa costante di tempo ± 1, a riprova del fatto che gli autovalori sono ovviamente sempre gli stessi, reggenti sempre la stessa dinamica che si vede in figura.

Con Matlab possiamo calcolare anche le singolarità: -1 è il **polo dominante**, mentre -0.2 è stato "retrocesso" a solo autovalore (non è più polo), in quanto è diventato una singolarità nascosta; c'è un solo polo nel nostro sistema perchè abbiamo avuto una cancellazione; -0.2 è un autovalore che, ovviamente, non si è spostato a seguito della retroazione in quanto nascosto.

Nota Cosa succederebbe se mettessimo un attuatore che satura ad un valore più basso? Un saturatore è un elemento non lineare oltre il valore di saturazione (perchè è costante). Studiare i sistemi a saturazione non è, perciò, facile: la y che si genera da una u che satura non è più quella pre-saturazione.
Spesso l'ingegnere lavora per simuazione, laddove gli strumenti analitici escono dal loro ambito amplicativo o sono troppo difficili da applicare.

3 T.E. 08/06/2015

Un sistema è descritto dalla funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{20}{(s+0.01)(s+10)^2}$$

3.1 Si determini una funzione di trasferimento $S(s)$ del primo ordine che sia un buon approssimante di bassa frequenza di $S(s)$

C'è una distinzione molto ampia tra i poli: in P ci sono poli in -0.01, -10, -10, due in alta frequenza e uno in bassa. Noi dobbiamo cancellare quelli in alta, stando attenti a non cambiare il guadagno (il 100 va tenuto...), che se nocambierebbe anche la bassa frequenza

$$S(s) = \frac{20}{100 \cdot (s+0.01)}$$

3.2 Per la funzione di trasferimento $S(s)$, si progetti un controllore $C(s)$ che, inserito nello schema di controllo in Figura 1, soddisfi le seguenti specifiche

1. Se $y^\circ(t)$ è costante e $d(t) = 0$, a regime $y(t) = y^\circ(t)$;

   ➟ Solita specifica che richiede la presenza nel controllore di un integratore $\frac{1}{s}$

2. $\varphi_m \geq 80^\circ$;

3. La costante di tempo dominante del sistema retroazionato vale circa 10;

   ➟ Vuol dire $\omega_c \simeq 0.1$ e polo in anello chiuso in 0.1

4. Un disturbo $d(t)$ a pulsazione $\omega \leq 0.001$ viene attenuato almeno di un *fattore* 50.

   ➟ Per evidenziare l'effetto del disturbo sull'uscita dobbiamo evidenziare la relativa funzione di trasferimento $\frac{Y}{D}$, e imporre che il modulo di questa quantità (il fattore di attenuazione nella risposta in frequenza) sia $\leq \frac{1}{50}$:

   $$\left|\frac{Y}{D}\right| = \left|\frac{1}{1+L(i\omega)}\right| = \left|\frac{1}{1+CS}\right| \leq \frac{1}{50}$$

   ciò vuol dire, grossomodo, che L deve essere **almeno** 50 (in realtà, visto che che potrebbero esserci numeri complessi, diremo **almeno** 51). In conclusione, la risposta a questa richiesta è che $|L(i\omega)| \geq 50$ per $\omega \leq 0.001$, secondo la regola per cui un **disturbo è ben attenuato se la L è grande in quella frequenza.**

Procediamo con il progetto del controllore per l'impianto approssimato $S(s) = \frac{20}{100 \cdot (s+0.01)}$.

Iniziamo con il disegnare il Bode di solo $S(s)$:

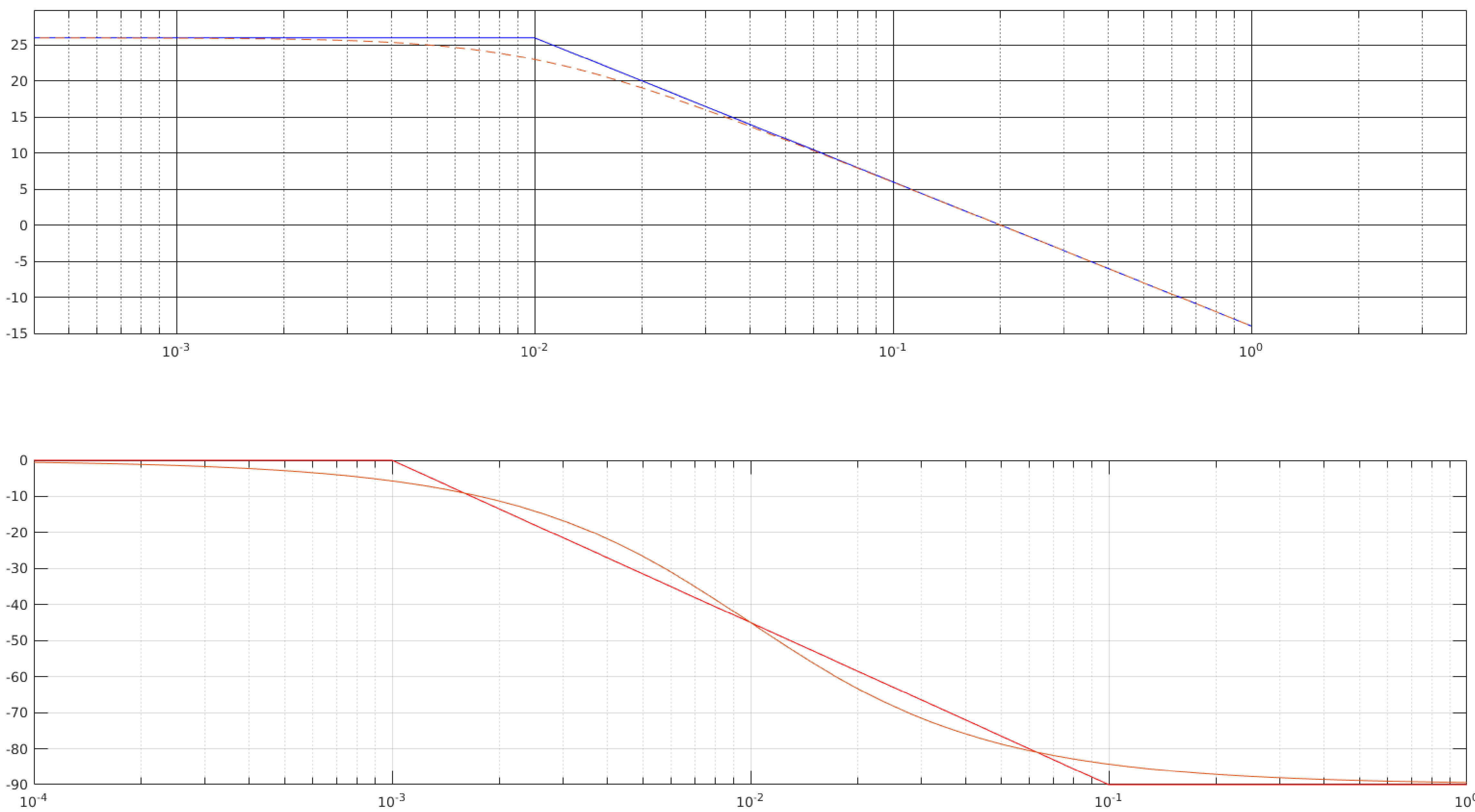


Figura 9: $S(s) = \frac{20}{100 \cdot (s+0.01)}$

Nel diagramma finiamo sicuramente nella zona proibita, perchè la L va sotto il $20Log(50)$dB di cui al punto 4. Apponiamo alcune modifiche, sommando i diagrammi dei vari pezzi a quello del $S(s)$.

1. Aggiungiamo l'effetto di un integratore $\frac{1}{s}$ per via della prima specifica;
2. In ω_c tagliamo con pendenza -2, quindi dobbiamo aggiungere uno zero per risollevare la fase; lo mettiamo in corrispondenza del polo dell'impianto per annullarne l'effetto depressorio, e lo facciamo mettendo $(s + 0.01)$ al controllore
3. L ora ha la forma $\frac{0.2}{s}$; se vogliamo ω_c in 0.1, dobbiamo dividere per 2 il controllore.
4. $L(s)$ ora non supera, per pulsazioni basse, il valore $20Log(50)$dB, ma rimane a 40dB (100).
5. Il margine di fase ora è ben elevato, siccome stiamo tagliando con pendenza -1 (margine 90°).

$$C(s) = \frac{s + 0.01}{2 \cdot s}$$

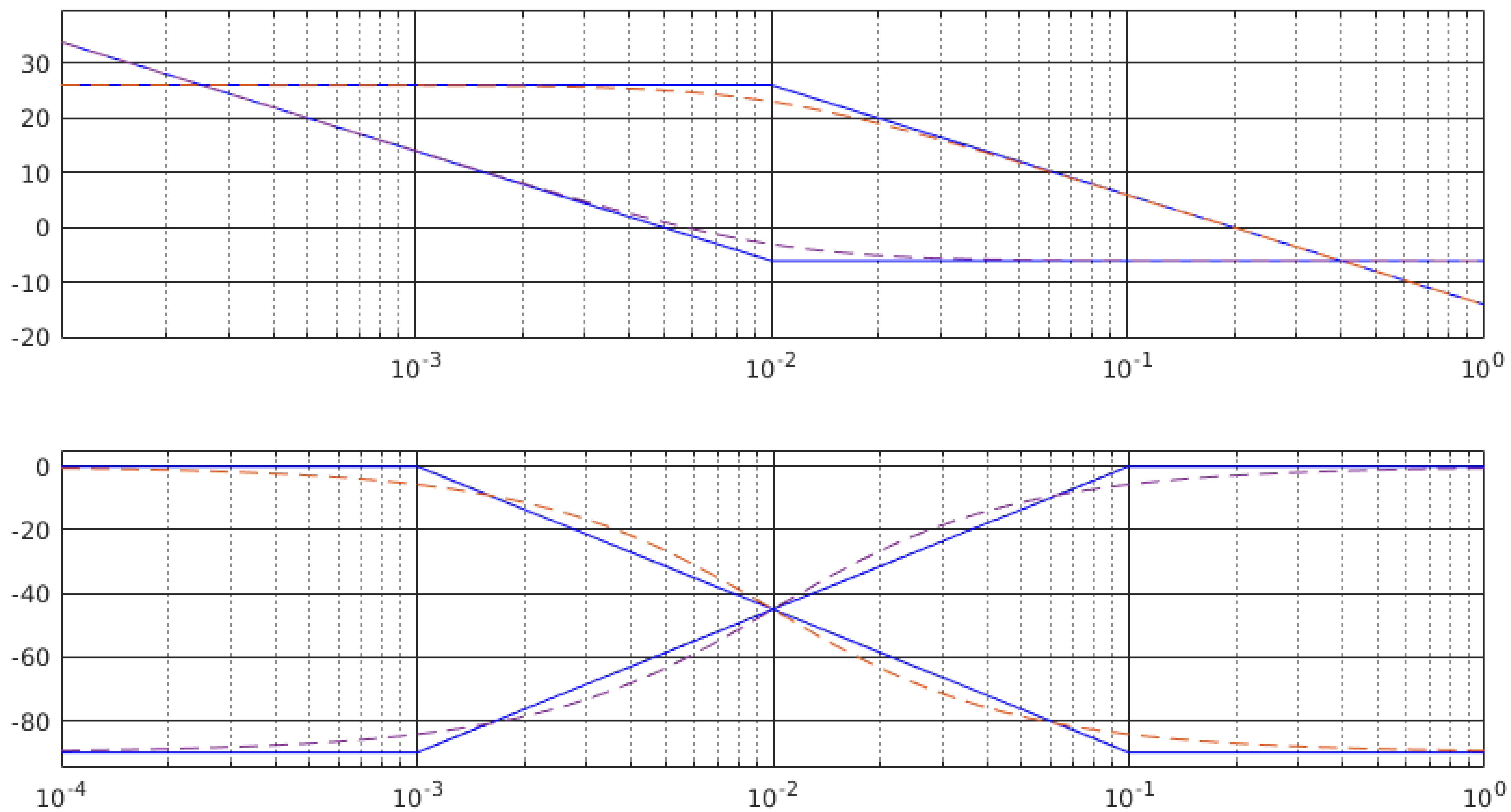


Figura 10: $|L|$ è la somma dei diagrammi del sistema originale e del controllore

3.3 Il controllore $C(s)$ progettato a partire da $S(s)$ viene applicato al sistema iniziale con funzione di trasferimento $P(s)$. Si dica se la presenza delle dinamiche di $P(s)$ non modellate da $S(s)$ determina un degrado significativo delle specifiche 1-4

Ricordiamo che le dinamiche che abbiamo trascurato in $P(s)$ sono **due poli in** 10; se questi fossero **reintrodotti** nel diagramma di L, questi ***non darebbero un significativo cambiamento al diagramma di Bode in bassa frequenza, dove abbiamo specifiche da rispettare***.

1. Il diagramma di L lì raggiunge pendenza -3 in alta frequenza (omega >10)
2. ω_c è cambiata ma non in maniera apprezzabile
3. Ogni polo in $\omega = 10$ abbassa la fase di 0.6°in ω_c

Nota L'aver aggiunto un polo in un certo ω *"si sente" di 0.6° a due decadi di distanza, e 6° a una decade di distanza*; in generale, nel modellizzare un sistema reale i poli in alta frequenza si possono trascurare, perchè intervengono pochissimo nel comportamento complessivo del sistema a quelle basse (tra l'altro, si vede subito dal Bode del modulo che in alta frequenza i fenomeni su L già sono fortemente attenuati). È invece fondamentale modellizzare il meglio possibile attorno a ω_c, dove ci interessa tenere a bada qualsiasi rischio di instabilità.