Qubits og kvantecomputere

Noter version **DRAFT**

Lektor Kim Splittorff

Niels Bohr Instituttet
Fysik KU

split@nbi.ku.dk

Contents

Introduktion

PART I

Section 1

Formål

Din intuition for klassisk fysik er super nyttig; den fortæller dig hvad der sker hvis du f.eks. slipper din taske (intuition: den falder ned) eller hvis du stikker hånden ind i dampen fra en gryde med kogende vand (intuition: det gør ondt). Denne intuition er super nyttig ikke blot i hverdagen men også når du skal prøve at forstå fysikken bag; i eksemplerne her tyngdekraft og fordampningsvarme.

Det der fascinerer mig mest ved atomer, fotoner og andre kvantesystemer er at de udfordrer vores klassiske intuition. Hvis vi prøver at bruge vores klassiske intuition til at forstå f.eks. hvordan en foton går gennem en plade med to huller, kommer vi frem til, at fotonen skal gå igennem begge huller på en gang!

Formålet med noterne her er at give dig en chance for opbygge din intuition for kvantefysik, med andre ord at give dig en kvante-intuition! Som med klassisk fysik opbygger man bedst sin intuition ved at lave forsøg. Ambitionen er at få dig så hurtigt i gang med selv at kunne udtænke, udføre og analysere kvanteforsøg som muligt. Selve forsøgene vil du lave på IBM's kvantecomputere. IBM's kvantecomputere (IBM Q) er tilgængelige online og noten her giver (forhåbentlig) både en tilstrækkelig baggrund til at komme igang med kvantefysikken og en praktisk introduktion til hvordan du logger på IBM Q og udfører kvanteforsøg.

Section 2

Hvad er kvanteteknologier?

Kvanteteknologier er en fællesbetegnelse for en række forskellige teknologier der er alle er baseret på kvante-fysik: kvantesensorer, kvanteinternet og kvantecomputere. Kvanteteknologier er netop nu i rivende udvikling og har potentialet til at være transformative teknologier, d.v.s. teknologier der fundamentalt ændrer vores samfund. Tænk, opfindelsen af hjulet, vindmøller, telefonen, fly, internettet, ... så har du en god ide om hvad en transformativ teknologi er. Noten her fokuserer på kvantecomputere og den kvantefysik der indgår. Kvantecomputere er interessante fordi de potientielt kan løse problemer der er umulige selv på de hurtigste klassiske computere, f.eks. hvordan man hurtigere udvikler ny medicin der virker optimalt netop på dig, eller nye batterier så din mobil kun skal oplades én gang om året!

Bits og Qubits

PART II

For at vi kan forstå hvad en kvantecomputer er skal vi helt ind i grundelementet af computeren, nemlig den klassiske bit og i kvantecomputeren en qubit.

Section 3

Bits

Grundelementet i klassiske computere, d.v.s. helt almindelige computere, iPads, mobiler o.s.v., er bits. En bit er en *meget* lille kontakt inde i computeren der har to indstillinger kaldet 0 og 1 (slukket og tændt på kontakten). Alle de ting en klassisk computer udfører for os er i sidste ende et resultat af at rigtigt mange af disse bits er blevet skiftet rundt mellem 0 og 1. For at have en form for billede af disse bits i en klassisk computer kan vi tænke på en bit-kugleramme hvor der kun er en kugle på hver pind (normalt er der 9 kugler på hver pind). Hver pind med en kugle svarer til en bit; hvis kuglen er til venstre er bitten 0 og er kuglen til højre er bitten 1.

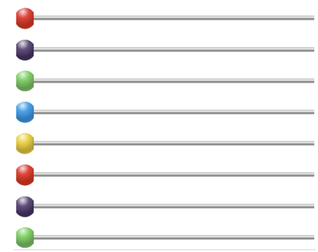

Figure 1. Bit kugleramme: I en klassisk computer kan hvert bit være enten 0 eller 1. På bit-kuglerammen her er alle kugler til venstre, d.v.s. alle 8 bits er 0.

Informationen i en klassisk computer bliver lagret ved at indstille kuglerne enten til venstre, vores bit er 0, eller till højre, vores bit er 1. Hvis vi f.eks har 3 bits har vi 8 forskellige kombinationer 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Opgave 1 Hvor mange kombinationsmuligheder er der med 4 bits? Samme spørgsmål med 10 bits og med n bits?

Som du lige har vist i opgaven vokser antallet af kombinationsmuligheder eksponentielt med antallet af bits (!) og det er rigtigt nyttigt når vi vil lagre information i en klassisk computer.

Section 4

Hvordan man udfordrer en klassisk computer

Den almindelige klassiske computer som du sikkert sidder med lige nu (husk en mobiltelefon er også en klassisk computer) er eminent til at løse opgaver så som: Her er 5 tal mellem 0 og 9: 7, 2, 1, 1, 5. Hvor mange af disse tal er større end 4? Den klassiske computer kan blot tage et tal efter det andet og checke om det er større end 4 eller ej og så tælle sammen. Den er med andre ord rigtig god til at gøre en ting efter en anden. (Ok, lige denne opgave med 5 tal kunne vi nok godt klare helt uden en computer, men hvis der nu havde været 100.000 tal og vi skulle bestemme hvor mange af dem der er større end 4 så er en en klassisk computer det helt rigtige redskab.) Med lad os nu prøve med en anden type opgave

Figure 2. Cykellås med 5 cifre.

Opgave 2 5 tal mellem 0 og 9 udgør koden på en cykellås: Hvor mange kombinationer er der på kodelåsen?

Selv om der kun er 5 tal er opgaven med at finde den kombination der åbner låsen pludselig betydeligt mere kompleks, for der er lige pludseligt rigtigt mange kombinationsmuligheder! Opgaven viser hvor hurtigt kompleksiteten af problemer (d.v.s. hvor mange operationer computeren skal lave for at finde løsningen) meget ofte vokser eksponentielt, og det er netop dette der udfordrer vores klassiske computere. Selv om klassiske computere er rigtigt gode til at gøre en ting efter en anden og kan gøre den enkelte ting rigtigt hurtigt så kan det let tage meget lang tid hvis kompleksiteten af opgaven er meget stor.

Opgave 3 En klassisk supercomputer kan lave 10^{17} opgaver i sekundet. Vi bruger den til at bryde en kodelås som den i figur 2 blot med m-cifre i stedet for 5. Antag at den klassiske supercomputer kan checke 10^{17} forskellige kombinationer på låsen i sekundet. Hvor stor kan m være hvis vores klassiske supercomputer skal kunne løse problemet på et år?

Definition 1 Kompleksitet af beregning: Antal operationer der skal laves for at finde løsningen på et givet problem med antallet m af input.

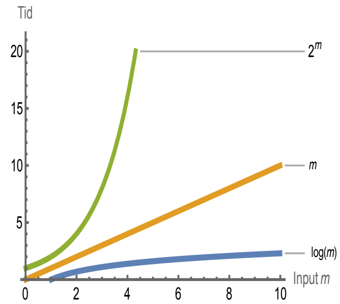

Figure 3. Tiden det tager at løse en opgave vokser forskelligt med antallet af input m afhængigt af kompleksiteten af opgaven.

SECTION 5

Qubits

I en kvantecomputer er grundelementet en qubit og ikke en bit som i en klassisk computer. En qubit er et kvantesystem. Du er allerede stødt på et kvantesystem hvis du har arbejdet med atomfysik, for et atom er et kvantesystem! Du ved måske også fra Bohrs atommodel at atomet kan være i nogle særlige stationære tilstande $n = 1, 2, 3, \ldots$. De stationære tilstande af et atom spiller en særlig rolle: Hvis atomet er i den n'te stationære tilstand og vi måler energien så for vi energien E_n.

En qubit er det simplest mulige kvantesystem og har blot to særlige tilstande. Vi kalder de to særlige tilstande af qubit'en $|0\rangle$ og $|1\rangle$, ligesom vi kalder de to muligheder af den klassiske bit 0 og 1. Det særlige ved tilstandene $|0\rangle$ og $|1\rangle$ er at hvis vores qubit er i tilstanden $|0\rangle$ og vi måler på den med kvantecomputeren så er svaret med sikkerhed 0, tilsvarende hvis vores qubit er i tilstanden $|1\rangle$ så vil kvantecomputeren med sikkerhed måle 1.

Notationen $|\ldots\rangle$ bruges når vi beskriver et kvantesystems tilstand

Postulat 1 Et kvantesystem er beskrevet ved en tilstand der benævnes $|\ldots\rangle$

Opsummeret har vi altså at en klassisk bit kan være 0 eller 1 og en qubit har nogle særlige tilstande $|0\rangle$ og $|1\rangle$. Bortset fra den lidt underlige notation, $|\ldots\rangle$, ser dette jo ret ens ud. Men her hører ligheden mellem den klassiske bit og qubit'en også op. For mens den klassiske bit er enten 0 eller 1 så kan qubit'en i være andet en $|0\rangle$ og $|1\rangle$, den kan f.eks også være $1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle)$! Hvad det går ud på ser vi på i næste afsnit.

Postulat: Et postulat er en af de grundlæggende antagelser som en teori bygger på.

PART III

Superposition & sammenfiltring

Superposition og sammenfiltring (på engelsk entanglement) er ikke bare to helt centrale begreber i kvantefysik, det er også helt centrale for kvantecomputere.

SECTION 6

Superposition

Når en qubit er i en superposition af $|0\rangle$ og $|1\rangle$ betyder det at dens tilstand er en sum af $|0\rangle$ og $|1\rangle$, eller mere precist

Definition 2 Superposition: $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

hvor α og β er tal.[1] (Det græske bogstav ψ udtales 'psi'.) En qubit kan være i en vilkårlig superposition af $|0\rangle$ og $|1\rangle$, eller i mere daglig tale, α og β kan være lige hvad de vil. Men det er afgørende at tilstanden er normaliseret

α**:** alfa
β**:** beta
ψ**:** psi
θ**:** theta

[1]Konstanterne α og β kan være komplekse tal. Men i denne note holder vi os til reelle tal.

Definition 3 Qubit tilstanden $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ er normaliseret hvis $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Så der er altså en sammenhæng mellem α og β, nemlig at $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, der gør at vi ikke kan vælge dem begge helt frit.

Eksempel Tilstanden $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ er normaliseret. For at se dette ganger vi først $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ind i parentesen: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$. Vi kan nu aflæse at $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ og $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ og dermed har vi at $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Opgave 4 Vis at tilstanden $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ er normaliseret.

Opgave 5 Vis at tilstanden $\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$ er normaliseret for en vilkårlig vinkel θ.

OK, nu ved vi hvad en superposition er og vi ved hvad normalisering er. Men det bliver hurtigt abstrakt at tænke på og det kan derfor være en god ide at lave en tegning! En måde at visualisere tilstanden af en qubit på er ved at tænke på $|0\rangle$ og $|1\rangle$ som enhedsvektorer langs x- og y-aksen i et koordinatsystem. Superpositionen $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ er så vektoren fra $(0, 0)$ i koordinatsystemet til punktet (α, β).

Opgave 6 Tegn et koordinatsystem og indfør de tre vektorer svarende til $|0\rangle$, $|1\rangle$ og $\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$ for $\theta = 45°$.

Bemærk Bemærk at en qubit kan være i uendeligt mange forskellige superpositioner af $|0\rangle$ og $|1\rangle$ simpelthen fordi vinklen θ tager uendeligt mange forskellige værdier mellem 0° og 360° når når superpositionen $\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$ tager en tur rundt på enhedscirklen.

Vi har lige set at vi kan tænke på de to tilstande $|0\rangle$ og $|1\rangle$ af en qubit som enhedsvektorer langs x- og y-aksen i et koordinatsystem. Hvis du har det fint med dette (indrømmet stadig ret abstrakte) billede af en qubit's tilstande så gå endeligt videre. Hvis du savner et fysisk eksempel på hvad en qubit kan være så tag et kig på appendiks 13 inden du læser videre.

SUBSECTION 6.1
Måling & Sandsynlighed

Hvis du måler bredden af det bord du sikkert sidder ved lige nu, så er der et korrekt svar. Bordet har nu den bredde det har og hvis du måler den tilstrækkeligt nøjagtigt så måler du den samme bredde hver gang. Dette er god klassisk fysik: den størrelse vi ønsker at måle har en bestemt værdi både før og efter vi måler den. Men for kvantesystemer er det ikke helt så lige til.

Vi starter med de særlige tilstande $|0\rangle$ og $|1\rangle$: Når en qubit er i den særlige tilstand $|0\rangle$ og kvantecomputeren laver en måling så får vi 0. D.v.s. at sandsynligheden, P_0, for at måle 0 er $P_0 = 1$. Helt tilsvarende, hvis vores qubit er i tilstanden $|1\rangle$ og kvantecomputeren laver en måling så får vi helt sikkert 1, d.v.s. med sandsynligheden $P_1 = 1$.[2] Dette er helt ligesom for vores klassiske system (bordet) og det er det der gør tilstandene $|0\rangle$ og $|1\rangle$ særlige.

Når en qubit er i superpositionen $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ så er den hverken i $|0\rangle$ eller i $|1\rangle$ den er i tilstanden $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Vektoren for tilstanden $\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$ med $\theta = 45°$ du tegnede i opgaven ovenfor ligger jo heller ikke på hverken x- eller y-aksen! Det virker måske fornuftigt nok, i det mindste når vi kun tænker på tilstanden som en vektor. Men når vi nu måler på tilstanden så sker der noget højst uklassisk: Svaret bliver enten 0 eller 1 og aldrig 0.5 eller 3 for den sags skyld. Ikke nok med at svaret kun kan blive 0 eller 1, vi kan ikke forudsige om svaret vil blive 0 eller 1 (med mindre α eller β er nul)!

[2] På engelsk hedder sandsynlighed 'probability', derfor bruges bogstavet P ofte til at betegne sandsynlighed.

Det eneste vi kan er at udregne sandsynligheden, P_0, for at få 0 og sandsynligheden, P_1, for at få 1[3]:

Definition 4 Sandsynlighed: Hvis vores qubit er i tilstanden $|\psi\rangle$ så er sandsynligheden for at måle 0 givet ved $P_0 = (\langle 0|\psi\rangle)^2$ og for at måle 1 givet ved $P_1 = (\langle 1|\psi\rangle)^2$.

For at regne disse sandsynligheder ud har vi brug for nogle regneregler

Definition 5 Regleregler:

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1 \quad \text{og} \quad \langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0 \tag{6.1}$$

Bemærk I forrige afsnit illustrerede vi $|0\rangle$ og $|1\rangle$ som en enheds-vektorer langs h.h.v. x- og y-aksen i et koordinatsystem. Hvis vi bliver i den tankegang så svarer vores regneregler ovenfor til at tage prikproduktet mellem to vektorer. Regnereglen $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$ betyder at vektorerne $|0\rangle$ og $|1\rangle$ har længde 1 og regnereglen $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$ betyder at vektorerne $|0\rangle$ og $|1\rangle$ står vinkelret på hinanden.

Bemærk Vi vil lige om lidt støde på sådan noget som f.eks. $\langle 1|3|1\rangle$. Her kan 3-tallet bare sættes udenfor så vi får $\langle 1|3|1\rangle = 3\langle 1|1\rangle = 3 \cdot 1 = 3$. Dette er igen helt ligesom med prikproduktet for vektorer.

Lad os tage et par eksempler, så vi kan se hvordan vi bestemmer sandsynligheder og hvordan regnereglerne virker.

Eksempel Vores qubit er i tilstanden $|0\rangle$ og vi vil gerne bestemme sandsynligheden, P_0 for at måle 0 og sandsynligheden, P_1, for at måle 1.
Løsning: Vores qubit starter i tilstanden $|\psi\rangle = |0\rangle$ og vi har derfor $P_0 = (\langle 0|\psi\rangle)^2 = (\langle 0|0\rangle)^2 = 1^2 = 1$ samt $P_1 = (\langle 1|0\rangle)^2 = 0^2 = 0$.

OK, det lyder jo ikke så overraskende. Vores qubit er i tilstanden $|0\rangle$ og vi måler 0 med 100% sandsynlighed. Det er helt som det skal være for det er jo netop den særlige egenskab af $|0\rangle$. Men hvad hvis vores qubit starter i en superposition af $|0\rangle$ og $|1\rangle$?

Eksempel Vores qubit er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ og vi vil gerne bestemme sandsynligheden, P_0 for at måle 0 og sandsynligheden, P_1, for at måle 1.
Løsning: Vores qubit starter i tilstanden $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ og vi har derfor

$$\begin{aligned} P_0 &= (\langle 0|\psi\rangle)^2 \qquad (6.2) \\ &= (\langle 0|\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle))^2 \\ &= \frac{1}{2}(\langle 0|(|0\rangle + |1\rangle))^2 \\ &= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle)^2 \\ &= \frac{1}{2}(1)^2 \\ &= \frac{1}{2}\ . \end{aligned}$$

Da $P_0 + P_1 = 1$ er $P_1 = 1 - P_0 = \frac{1}{2}$.

[3]Dette er egentligt et postulat men vi venter lige til vi ved hvad det er vi måler med at ophøje det til et postulat. Bemærk også at hvis α og β er komplekse skal kvadraterne, $(\ldots)^2$, i definitionen udskiftes med absolut-kvadrater, $|\ldots|^2$.

Så hvis vores qubit er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ er der lige stor sandsynlighed for at måle 0 som der er for at måle 1. Men vi kan ikke forudsige om en måling vil give 0 eller 1.

Bemærk Bemærk at vi her opgiver intet mindre end det deterministiske klassiske verdensbillede! Selvom vi kender alt relevant der kan vides om vores qubits tilstand, f.eks. at tilstanden er $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, kan vi ikke sige, hvad udfaldet af en måling er!

Opgave 7 Bestem P_0 og P_1 hvis vores qubit til en start er i tilstanden $|\psi\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$. Check at $P_0 + P_1 = 1$ uanset hvilken værdi af θ du vælger.

SUBSECTION 6.2

Hvad er det vi måler?

Vi har lige set at når en qubit er i en superposition af $|0\rangle$ og $|1\rangle$ så kan vi ikke forudsige hvad vi får hvis vi laver en måling på vores qubit. Vi kan få enten 0 eller 1 men vi ved ikke med sikkerhed hvad målingen giver. Det eneste vi kan er at udregne sandsynligheden for at målingen giver 0 eller 1. Men hvad er det vi måler og hvad betyder det for systemet at vi får enten 0 eller 1?

Hvis vi tænker på et atoms to laveste tilstande, og vi kan jo passende kalde dem $|0\rangle$ og $|1\rangle$, så vil atomet have en veldefineret energi, E_0, hvis det er i tilstanden $|0\rangle$ og en veldefineret energi, E_1, hvis det er i tilstanden $|1\rangle$. Men hvad hvis vores atom er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, hvad kan vi så sige om energien af atomet? Svaret er ganske overraskende, at vi ikke ved hvad energien af atomet er, eller mere præcist sagt vi kan ikke med sikkerhed sige hvad udfaldet vil blive hvis vi måler energien! Hvis vores atom er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ og vi måler energien så kan svaret blive E_0 eller E_1, og der er lige stor sandsynlighed for de to udfald.

Når vi måler energien af et atom, er det energioperatoren (som også kaldes Hamilton-operatoren) der er i spil. Når vi arbejder med qubit's er der en række operatorer i spil, så lad os først lige få på plads hvad en operator er.

Definition 6 Operator: En operator virker på en tilstand og giver en tilstand tilbage.

For at forstå dette så lad os tage et kig på måleoperatoren (den der giver 0 eller 1 når vi måler på en qubit)

Definition 7 Måleoperatoren: $M = 0|0\rangle\langle 0| + 1|1\rangle\langle 1| = |1\rangle\langle 1|$

Bemærk Bemærk at rækkefølgen er afgørende $|0\rangle\langle 0|$ er *ikke* det samme som $\langle 0|0\rangle = 1$.

Eksempel Vi prøver først at lade operatoren M virke på tilstandene $|0\rangle$ og $|1\rangle$

$$M|0\rangle = |1\rangle\langle 1|0\rangle = 0 \quad \text{og} \quad M|1\rangle = |1\rangle\langle 1|1\rangle = |1\rangle. \tag{6.3}$$

For at få dette i hus brugte vi regnereglerne 6.1.

Bemærk Bemærk at vi har

$$M|0\rangle = 0|0\rangle \quad \text{og} \quad M|1\rangle = 1|1\rangle. \tag{6.4}$$

Dvs. at når M virker på $|0\rangle$ så får vi den samme tilstand $|0\rangle$ tilbage gange et tal, her 0. Det samme sker når vi lader M virke på $|1\rangle$ så får vi den samme tilstand $|1\rangle$ tilbage gange et tal, nu 1.

Bemærkningen ovenfor er vigtig den er nemlig vores første eksempel på egentilstande og egenvektorer

Definition 8 Egentilstand og egenværdi: Hvis en operator M virker på en tilstand $|m\rangle$ og vi får et tal, m, gange tilstanden $|m\rangle$ tilbage, dvs. hvis $M|m\rangle = m|m\rangle$, så er $|m\rangle$ en egentilstand for M med egenværdien m.

Opgave 8 Vis at $|1\rangle$ er en egentilstand for $M = |1\rangle\langle 1|$ med egenværdi 1.

Det at være en egentilstand for en operator er noget ganske særligt. Langt de fleste tilstande er ikke egentilstande

Opgave 9 Vis, at tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ *ikke* er en egentilstand af operatoren $M = |1\rangle\langle 1|$. *Vink:* M virker lineært, d.v.s. $M(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(M|0\rangle + M|1\rangle)$.

Postulat 2 Målepostulat del 1: Hvis vi måler en operator M er de mulige udfald af målingen egenværdierne af M.

Eksempel Måleoperatoren M har egenværdierne 0 og 1, så hvis vi måler M kan målingen give 0 og 1.

Postulat 3 Målepostulat del 2: Hvis vores qubit er i tilstanden $|\psi\rangle$ og vi måler en operator M er sandsynligheden for at målingen giver egenværdien m af M givet ved $P_m = (\langle m|\psi\rangle)^2$, hvor $|m\rangle$ er egentilstanden af M med egenværdien m.

Eksempel Måleoperatoren M har egenværdierne 0 og 1, med de tilhørende egentilstande $|0\rangle$ og $|1\rangle$. Så hvis qubit'en er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ og vi måler M kan målingen give 0 og 1. Sandsynligheden for at målingen giver 0 er $P_0 = (\langle 0|\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle))^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle))^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|0\rangle)^2 = \frac{1}{2}$.

Opgave 10 Vores qubit starter i tilstanden $\frac{1}{5}(3|0\rangle + 4|1\rangle)$ og vi måler måleoperatoren M. Hvad er de mulige udfald af målingen og hvad er sandsynligheden for at målingen giver disse udfald?

Nu er vi blevet klogere på hvad det er vi måler på en qubit. Hvis du savner et fysisk eksempel på hvad man kan måle så se appendix 13 hvor vi arbejder med måling af lys' polarisation.

Subsection 6.3
Hvad sker der når vi måler på en tilstand?

Når du kigger op og ser en af dine venner komme hen mod dig måler dine øjne og hjerne din vens position og hastighed. Inden du kiggede op var din ven selvfølgeligt også på vej hen mod dig med denne hastig og fra netop denne position. Dette er god klassisk fysik, din ven har en klassisk tilstand beskrevet ved position og hastighed og du kan måle denne tilstand. Men for kvanter (og dermed qubits) er verden anderledes.

Vi har allerede set at når en qubit er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ og vi måler M så får vi 0 eller 1 med lige stor sandsynlighed. Men bemærk:

Bemærk En måling af M på tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ afslører ikke hvad tilstanden var inden vi målte. Hvis vi f.eks målte 1 kunne til standen også have været $|1\rangle$ eller $\frac{1}{5}(3|0\rangle + 4|1\rangle)$ for i begge tilfælde er sandsynligheden for at måle 1 forskellig fra nul.

Opgave 11 Vis at tilstanden $\frac{1}{5}(3|0\rangle + 4|1\rangle)$ er normaliseret og bestem sandsynligheden, P_1, for at få 1 hvis qubit'en starter i tilstanden $|\psi\rangle = \frac{1}{5}(3|0\rangle + 4|1\rangle)$ og vi måler M.

Men ikke nok med at vi ikke ud fra en måling kan bestemme hvad tilstanden af qubit'en var inden vi målte, målingen påvirker også qubit'ens tilstand! Hvis vi f.eks. måler M og får svaret 1 så er qubit'en efter målingen i tilstanden $|1\rangle$. Tilsvarende hvis målingen giver 0 så er tilstanden umiddelbart efter målingen $|0\rangle$.

Postulat 4 Målepostulatet del 3: Hvis vi måler en operator M og resultatet er egenværdien m, så er tilstanden af qubit'en umiddelbart efter målingen egentilstanden $|m\rangle$.

Eksempel Måleoperatoren M har egentilstande $|0\rangle$ og $|1\rangle$, med egenværdier hhv. 0 og 1. Hvis vores qubit starter i tilstanden $\frac{1}{5}(3|0\rangle + 4|1\rangle)$ og vi måler M, så kan vi få enten 0 eller 1 (da 0 og 1 er egenværdierne af M). Hvis målingen giver 0 er tilstanden efter målingen $|0\rangle$ (da $|0\rangle$ er egentilstanden for M der har egenværdi 0) og hvis vi får 1 er tilstanden efter målingen $|1\rangle$.

Hvis vi prøver at bruge vores klassiske intuition til at give mening til dette svarer det til at det først var da du kiggede op at din vens position og hastighed blev fastlagt![4]

Figure 4. "I like to think the moon is there even if I am not looking at it." - Albert Einstein

SUBSECTION 6.4
Postulaterne samlet

Nu har vi fået alle de grundlæggende postulater som kvantemekanik bygger på banen, og man kan (indrømmet lidt kækt) sige at resten bare er et spørgsmål om at regne. Så lad os lige opsummere så vi har postulaterne samlet:

Postulat 1 Et kvantesystems er beskrevet ved en tilstand der benævnes $|\ldots\rangle$

Postulat 2 Målepostulat del 1: Hvis vi måler en operator M er de mulige udfald af målingen egenværdierne af M.

Postulat 3 Målepostulat del 2: Hvis vores qubit er i tilstanden $|\psi\rangle$ og vi måler en operator M er sandsynligheden for at målingen giver egenværdien m af M givet ved $P_m = (\langle m|\psi\rangle)^2$, hvor $|m\rangle$ er egentilstanden af M med egenværdien m.

Postulat 4 Målepostulatet del 3: Hvis vi måler en operator M og resultatet er egenværdien m, så er tilstanden af qubit'en umiddelbart efter målingen egentilstanden $|m\rangle$.

SECTION 7
Sammenfiltring

Indtil nu har vi set på en enkelt qubit, hvad dens tilstand kan være og hvad der sker når vi laver en måling på denne ene qubit. Som vi har set påvirker en måling qubit'ens tilstand. Dette er helt afgørende i en kvantecomputer, særligt når flere qubits er sammenfiltrede for så vil en måling på en qubit påvirke de qubits den er filtret sammen med.

Lad os holde os til to qubit's: Hvis vi skal beskrive den samlede tilstand af disse to så kunne man let tro at det var nok at beskrive de to qubits hver for sig. Her er først 2 eksempler hvor dette går godt:

[4] Hvis du syntes at dette virker underligt så er du i godt selskab. Einstein, mente at der var noget galt med kvantemekanik. Når man tænker på at han havde trænet sin intuition ved at udarbejde relativitetsteorien kan man godt forstå at kvantemekanikken stred mod hans intuition, for i relativitetsteorien tog han udgangspunkt i en reel fysisk begivenhed. (Ultra kort fortalt beskriver den specielle relativitetsteori hvordan en reel fysisk begivenhed ser ud alt efter hvor hurtigt den der observerer bevæger sig.)

Eksempel To qubits (*ikke sammenfiltret*): Hvis qubit 1 er i tilstanden $|0\rangle$ og qubit 2 er i tilstanden $|1\rangle$ så er den samlede tilstand af de to qubit's $|1\rangle|0\rangle = |10\rangle$.

Bemærk Bemærk at qubit 1 er længst til højre i $|10\rangle$ og qubit 2 er til venstre. (De læses altså fra højre mod venstre.)

Eksempel To qubits (*ikke sammenfiltret*): Hvis qubit 1 er i tilstanden $|0\rangle$ og qubit 2 er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ så er den samlede tilstand af de to qubit's $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$.

I disse eksempler er vores to qubit's *ikke* sammenfiltret. Men hvis den ene quibit's tilstand afhænger af den andens så kan vi ikke bare sætte de to sammen.

Definition 9 To qubits er sammenfiltret hvis den ene qubit's tilstand afhænger af den andens.

Eksempel To qubit's i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$ er sammenfiltrede fordi den første qubit's tilstand afhænger af den andens. Hvis den første qubit er 1 er den anden 0 og omvendt hvis den første er 0 er den anden 1. Sagt på en anden måde, man kan ikke skrive tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$ som et produkt af to tilstande $|\ldots\rangle|\ldots\rangle$.

Opgave 12 Afgør hvilke af følgende tilstande for to qubit's der er sammenfiltrede $|11\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle)$ og $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |11\rangle)$.

SUBSECTION 7.1

Måling på sammenfiltret tilstand

Nu kommer vi til en af de ting der har givet anledning til meget af den mystik der omgiver kvantemekanik, nemlig hvad der sker når vi måler på en sammenfiltret tilstand. Det er matematisk set ret lige til, men konsekvenserne er meget uklassiske og dermed uintuitive.

Lad os starte med at se på to qubit's der *ikke* er sammenfiltrede og lave en måling herpå.

Eksempel Måling på *ikke* sammenfiltrede qubits: Vores to qubit's er i tilstanden $|01\rangle$. Hvis vi måler på den første (husk at det er den længst til højre) så er udfaldet med 100% sandsynlighed 1, og efter målingen er tilstanden uændret for det første qubit var jo også i tilstanden $|1\rangle$ før målingen. Hvis vi i stedet måler på den anden qubit så bliver svaret 0 og tilstanden er igen uændret $|01\rangle$.

Som eksemplet viser påvirker en måling på en qubit ikke den anden qubits tilstand hvis de to qubit's ikke er sammenfiltrede. Men hvad hvis de er sammenfiltrede?

Eksempel Måling på sammenfiltrede qubits: To qubit's i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Hvis vi måler på den første så er udfaldet med 50% sandsynlighed 1, og med 50% sandsynlighed 0. Hvis vi måler 0 på den første qubit så er tilstanden af de to qubit's efter målingen $|10\rangle$ og dvs. at hvis vi efterfølgende måler den anden qubit så får vi med 100% sandsynlighed 1. Omvendt hvis målingen på den første qubit giver 1 så er tilstanden af de to qubit's efter målingen $|01\rangle$ og så vil en efterfølgende måling med 100% sandsynlighed give 0.

Eksemplet viser at når vi måler på en af de to sammenfiltrede qubit's så påvirker vi den anden qubits tilstand.

Opgave 13 To qubit's er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. Hvad er sandsynligheden for at en måling på den første qubit giver h.h.v. 0 og 1? Hvis vi måler på den første qubit og udfaldet er 1, hvad er så tilstanden af de to qubits umiddelbart efter målingen?

Opgave 14 To qubit's er i tilstanden $\frac{1}{5}(3|01\rangle - 4|10\rangle)$. Vil en måling på den anden qubit påvirke den første qubits tilstand?

Når to qubit's er sammenfiltrede påvirker målingen på den ene den andens tilstand! Dette sker også selvom de to qubit's er placeret langt fra hinanden, så længe de er sammenfiltrede påvirker en måling på den ene den anden instantant (d.v.s. uden forsinkelse). Einstein var ikke helt glad ved dette og kaldte det for "Spooky action at a distance." Men virkningen er helt reel og vi vil lave forsøg på IBM's kvantecomputer der viser effekten af sammenfiltring.

PART IV

Operatorer & Diagrammer

Når vi om lidt kaster os over at bruge IBM's kvantecomputere så får vi brug for at give den nogle instrukser der forstæller hvilket eksperiment vi vil have den til at udføre. Instrukserne bliver givet i form af operatorer der ændrer og sammenfiltrer de qubit's vi laver forsøg med. Vi starter med de simpleste operatorer der virker på en enkelt qubit og ser derefter på en operator der virker på to qubits ad gangen. Vi vil bruge diagrammer til at visualisere, hvordan operatorerne virker. Det er de samme diagrammer der f.eks. bliver brugt når vi instruerer IBM Q.

Section 8

Enkelt qubit operatorer

Lad os starte med en enkelt qubit, som vi illustrerer med en horisontal linje, se figur 5.

$$|0\rangle \;\text{———}\; |0\rangle$$

Figure 5. En qubit angives ved en horisontal linje. Vi har i hver ende angivet hvilken tilstand qubit'en er i. Her er der ikke indsat nogen operator så qubit'ens tilstand ændres ikke.

Hvis en operator virker på vores qubit kan den ændre qubit'ens tilstand. En af de simpleste operatorer er Z

Definition 10 Operatoren Z: $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$

Operatoren Z's indvirken på tilstandene $|0\rangle$ og $|1\rangle$ kan illustreres sådan her

$$|0\rangle \;\text{—}\boxed{Z}\text{—}\; |0\rangle$$

$$|1\rangle \;\text{—}\boxed{Z}\text{—}\; -|1\rangle$$

Figure 6. Operatoren Z virker på en qubit. Diagrammet læses fra venstre mod højre. Som formel vil det samme se sådan ud $Z\,|0\rangle = |0\rangle$ og $Z\,|1\rangle = -\,|1\rangle$

Bemærk Diagrammerne er super nyttige, men vær opmærksom på at de læses fra venstre mod højre. Det gør at rækkefølgen af operatorer og tilstande ikke helt ser ud som når man skriver diagrammet som en formel. Der er givet et eksempel i figur 6.

Opgave 15 Brug definitionen af Z, dvs at $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ og lad den virke på $|0\rangle$ og $|1\rangle$. Vis at resultatet er som i figur 6.

Eksempel Lad os se hvad der sker når vi lader Z virker på tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Vi skal altså udregne $Z\big(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\big)$. Operatorer virker lineært, dvs. at vi bare kan lade Z virke ind på hvert led, lige som hvis vi ganger ind i en parentes. $Z\big(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z|0\rangle + Z|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

Eksemplet viser at tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ *ikke* er en en egentilstande for operatoren Z. Egentilstandene af Z er $|0\rangle$ og $|1\rangle$ (når Z virker på $|0\rangle$ får vi $Z|0\rangle = 1|0\rangle$, så vi får vi tilstanden tilbage gange tallet 1, altså er $|0\rangle$ en egentilstand med egenværdi 1).

Den næste operator vi vil kigge på er X operatoren, der bytter om på 0 og 1:

Definition 11 Operatoren X: $X = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$

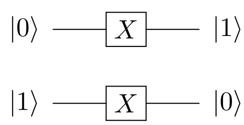

Figure 7. Operatoren X virker på en qubit sådan her. Husk at diagrammet læses fra venstre mod højre.

Opgave 16 Vis hvad der sker når X virker på tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Du har netop vist, at $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ er en egentilstand for X med egenværdi 1!

Den sidste operator vi skal have et kig på der kun virker på en enkelt qubit er H, kendt som Hadamard operatoren. Denne operator er helt central når vi vil sætte en qubit i en superposition af $|0\rangle$ og $|1\rangle$:

Definition 12 Operatoren H: $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\Big)$

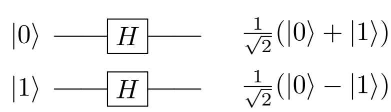

Figure 8. Hadamard operatoren H virker på en qubit.

Eksempel I figur 8 kan vi se at $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Vi checker lige at det er rigtigt (det er rigtigt men det er god øvelse at checke):

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\Big)|0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle\langle 0|0\rangle + |0\rangle\langle 1|0\rangle + |1\rangle\langle 0|0\rangle - |1\rangle\langle 1|0\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) \end{aligned}$$

Opgave 17 Vis, at $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

Opgave 18 Vis, at $H\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |0\rangle$ og at $H\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |1\rangle$.

Operatorer kan også virke den ene efter den anden, men som eksemplet her viser er det vigtigt at holde styr på rækkefølgen

Eksempel Vi udregner først $HX\,|0\rangle$. Først lader vi X virke, $HX\,|0\rangle = H\,|1\rangle$, og så lader vi H virke, $HX\,|0\rangle = H\,|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$. Men hvis vi gør det i den omvendte rækkefølge, d.v.s. udregner $XH\,|0\rangle$ så får vi, $XH\,|0\rangle = X\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Så rækkefølgen af operatorerne er vigtig!

Opgave 19 Prøv at udregne $XZ\,|0\rangle$ og $ZX\,|0\rangle$. Du vil se at dine to udregninger *ikke* giver samme resultat!

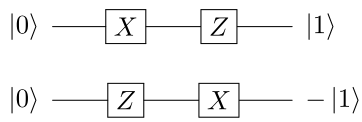

Figure 9. Rækkefølgen af operatorer er vigtig: $ZX\,|0\rangle$ er *ikke* det samme som $ZX\,|0\rangle$.

Section 9

Operatorer der virker på to qubit's ad gangen

De operatorer vi har introduceret ind til nu virker på en enkelt qubit. Når vi skal sammenfiltre to (eller flere) qubit's får vi brug for operatorer der virker på to qubit's på en gang.

Definition 13 $CNOT$ operatoren : $CNOT = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10|$

Lad os prøve at blive lidt klogere på hvordan denne virker med et eksempel.

Eksempel Vi ser hvad der sker når $CNOT$ virker på tilstanden $|01\rangle$

$$\begin{aligned} CNOT|01\rangle &= (|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10|)\,|01\rangle \\ &= |00\rangle\langle 00|01\rangle + |01\rangle\langle 01|01\rangle + |10\rangle\langle 11|01\rangle + |11\rangle\langle 10|01\rangle \\ &= |00\rangle 0 + |01\rangle 1 + |10\rangle 0 + |11\rangle 0 \\ &= |01\rangle \end{aligned} \tag{9.1}$$

Ja, OK der skete jo ikke rigtigt noget. Men hvad nu hvis:

Eksempel Vi lader $CNOT$ virker på tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |00\rangle)$

$$\begin{aligned} & CNOT\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |00\rangle) \\ &= (|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10|)\,\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |00\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle) \end{aligned} \tag{9.2}$$

Nu skete der noget! Vi gik fra tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |00\rangle)$ der *ikke* er sammenfiltret til tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle)$ der *er* sammenfiltret!

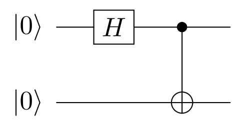

Figure 10. Diagrammet viser hvordan vi v.h.a. en Hadamard- og en CNOT-operator kan skabe den sammenfiltrede tilstand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle)$.

Section 10

Diagrammer med målinger

Inden vi kaster os over IBM Q er det nyttigt også lige at få målinger med ind i vores diagrammer så vi kan illustrere et helt kvante-kredsløb.

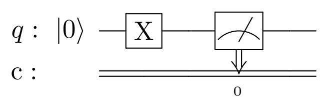

Figure 11. Et kvantekredsløb med en qubit q (den øverste linje) og en klassisk bit c (den nederste dobbeltlinje). Den klassiske bit bruges til at gemme resultatet af målingen på qubit'en. Det lille 0 der hvor pilen peger ned på den klassiske bit betyder at vi gemmer resultatet i den klassiske bit nummer 0 (ikke at resultatet er nul, som man ellers godt kunne tro!).

Eksempel Vores første kvantekredsløb er illustreret i figur 11. I kredsløbet er der en enkelt qubit q der til en start er i tilstanden $|0\rangle$ (husk at diagrammerne læses fra venstre mod højre). Derefter virker operatoren X på vores qubit. Tilstanden derefter er altså $X|0\rangle$. Kredsløbet afsluttes med at vi laver en måling og genner svaret i det 0'te klassiske bit c.

Opgave 20 Forudse hvad målingen i figur 11 vil give.

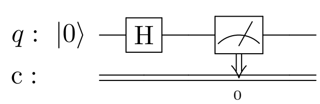

Figure 12. I dette kvantekredsløb lader vi Hadamard operatoren H virke på en enkelt qubit og måler derefter på tilstanden.

Eksempel I kvantekredsløbet i figur 12 virker vi med H på qubit'en der til en start er i tilstanden $|0\rangle$. Efter H har virket er qubit'en i tilstanden $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Vi laver afslutningsvis en måling. Sandsynligheden for at målingen giver 0 er $(\langle 0| \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle))^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle))^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1+0))^2 = \frac{1}{2}$. Da den eneste anden mulighed er at målingen giver 1 må sandsynligheden herfor også være $\frac{1}{2}$ ellers ville summen af sandsynlighederne ikke give 1. Det er god øvelse lige at checke ved at berege eksplicit: sandsynligheden for at målingen giver 1 er $(\langle 1| \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle))^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle))^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}(0+1))^2 = \frac{1}{2}$, som forventet.

Opgave 21 Vores qubit starter i tilstanden $|0\rangle$. Forklar hvad tilstanden af vores qubit er efter H og dernæst Z har virket på den, dvs udregn $ZH|0\rangle$. Bestem derefter hvad sandsynligheden er for at målingen giver h.h.v. 0 og 1.

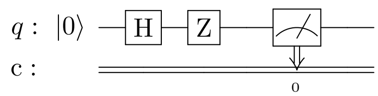

Figure 13. Her starter vores ene qubit i tilstanden $|0\rangle$ og vi lader vi først operatoren H og dernæst operatoren Z virke på tilstanden. Endeligt udfører vi en måling på tilstanden.

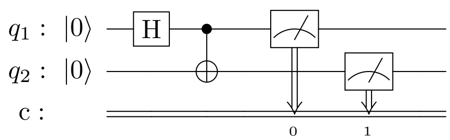

Figure 14. Her udfører vi målinger på den sammenfiltrede tilstand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle)$.

PART

V

IBM Q

SECTION 11

IBM Q

Kvantecomputere er ikke en fjern fremtidsdrøm, IBM har allerede udviklet en række fungerende kvantecomputere som det er muligt at lave forsøg på. Forsøgene svarer til de kvantekredsløb vi arbejdede med ovenfor. Vi kan altså selv instruere kvantecomputerne til at lave netop de forsøg vi ønsker (altså køre netop de kvantekredsløb vi selv designer). Kvantecomputerne står rundt om i verdenen, og vi arbejder med dem online.

| Section 11. IBM Q

SUBSECTION 11.1

Sådan kommer du på IBM Q

Det er helt ligetil at bruge IBM's kvantecomputere. Først gå til

https://quantum-computing.ibm.com/

vælg sign-in, og opret en IBMid konto. Når du efterfølgende logger på har du adgang til IBM's kvantecomputere.

SUBSECTION 11.2

Sådan får du øvelserne ind på IBM Q

For at komme igang med de IBM Q øvelser vi arbejder med i denne note skal du gøre følgende

1) Download filerne fra IBM Q øvelsen på din computer.

2) På IBM's Quantum Computing platform, åben menuen ved at clicke på de 9 prikker i det øverste venstre hjørne og vælg 'Lab'.

3) Vær tålmodig! IBM Q er ved at starte en server op til dig og det kan godt tage lidt tid. Så træk vejret dybt og tæl til 10 meget langsomt. Når du ser bien er du der næsten.

4) Upload filen fra øvelsen som du har på din computer til IBM's Quantum Computing platform: For at gøre dette clicker du på upload ikonet (det er en blå pil der peger op i venstre side af din skærm).

Filen med øvelsen optræder nu i listen på venstre side. Dobbelt click på fil-navnet og så åbner øvelsen i det store panel til højre. Prøv at give det et skud, det fungerer normalt uden problemer.

Subsection 11.3

Sådan laver du øvelserne

IBM Q øvelsen du (forhåbentligt) sidder med foran dig nu indeholder to ting: 1) Helt almindelig tekst der introducerer øvelsen og måske giver nogle opgaver du kan løse med papir og blyant. 2) Instruktioner som du sender til kvante-computeren. For at give kvantecomputeren instruktionerne clicker du cellen og trykker dernæst på 'play' knappen i instruktions-linjen lige over teksten ('play' knappen er den lille trekant der peger mod højre). Hvis du foretrækker at bruge dit key-board så click på cellen og tast Shift+Return.

Bemærk Det er afgørende at du sender alle instruktionerne til IBM Q startende oppefra! Ellers ved kvantecomputeren ikke hvad det er vi beder den om.

Subsection 11.4

IBM Q øvelser

IBM Q 1 Åben filen '....iphy' på IBM Q og gennemfør forsøget. **links til forsøgene øvelserne kommer sammen med den endelige version af noten**

PART VI

Appendix:

Section 12

Grover

Grovers algoritme er en kvantealgoritme der kan benyttes til at søge. Hvis du f.eks. har 10.000 skuffer i din kommode og har lagt din telefon i den ene, men har glemt hvilken, så vil det være nyttigt med en søgealgoritme der kan hjælpe dig med at finde den. En almindelig computer udfører en operation efter en anden, så hvis du beder en klassisk computer om at lede efter din telefon vil den åbne en skuffe efter en anden og se om din telefon er der. Den klassiske computer kan være heldig at telefonen er i en af de første skuffer den kigger i men den kan også være uheldig at det er en af de sidste. I gennemsnit (hvis du beder den klassiske computer hjælpe dig med at finde din telefon mange gange) vil den skulle kigge i halvdelen af skufferne, dvs. den skal lave 5.000 operationer. Med Grovers algoritme kan en kvantecomputer finde telefonen med ca. 100

operationer! Hvorfor 100? Fordi antallet af operationer Grover's algoritme skal bruge er kvadratroden af antallet af skuffer og $\sqrt{10.000} = 100$.

Lad os lige opsummere inden vi kaster os over at forstå Grovers algoritme. Opgaven er at finde den rigtige (skuffe) blandt N mulige (de 10.000 skuffer). En klassisk computer vil i gennemsnit skulle bruge $N/2$ operationer (kigge i halvdelen af skufferne) for at finde den rigtige. Med Grovers algoritme vil en kvantecomputer skulle bruge $\sqrt{N}$ operationer. Kvantecomputeren er altså en faktor $N/\sqrt{N} = \sqrt{N}$ hurtigere end den klassiske computer til at søge. For små N gør dette ikke den store forskel men hvis N er stor er der meget at vinde ved at benytte en kvantecomputer.

For at gøre det lidt lettere at se på siger vi at N (antallet af skuffer) er $N = 2^n$, for et passende helt tal n. Med andre ord vi kan have $N = 2$ eller $N = 4$ eller $N = 8$, ... Hvorfor gør $N = 2^n$ det lettere? Fordi med n qubit's så er antallet af kombinationer 2^n. Vi kan derfor bruge n qubit's til at beskrive de $N = 2^n$ muligheder.

Vi starter med at se på hvordan Grovers algoritme virker for $N = 4$:

Eksempel

Grovers algoritme for $N = 4$: For at få en fornemmelse for Grovers algoritme så lad os gå den igennem for $N = 4$. Da $4 = 2^2$ kan vi med $n = 2$ qubits lave netop 4 kombinationer $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$. De her 4 kombinationer svarer så til de 4 muligheder (skuffer).

Lad os sige at den den korrekte løsning (d.v.s. den skuffe telefonen ligger i) er 11. Opgaven for Grovers algoritme er at pege på skuffen med 11, så vi kan åbne den og tage telefonen. Det første skridt i Grovers algoritme er at lave tilstanden

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \tag{12.1}$$

Tilstanden $|\psi\rangle$ peger lige meget på $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$. Hvis vi laver en måling på tilstanden $|\psi\rangle$ er der lige stor sandsynlighed for at resultatet er 00, 01, 10 eller 11. Grovers algoritme vil transformere $|\psi\rangle$ over i en ny tilstand der peger mere i retningen $|11\rangle$. Hvis vi efterfølgende måler på de to qubit's vil vi derfor med stor sandsynlighed få 11.

Det første Grovers algoritme gør ved $|\psi\rangle$ er at lade et orakel virke på tilstanden. Oraklet vender fortegnet på den koefficient der står foran $|11\rangle$ i den tilstand den virker på. Grover starter med at lade O virke på $|\psi\rangle$

$$O|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \ . \tag{12.2}$$

Derefter lader Grovers algoritme operationen $(2|\psi\rangle\langle\psi| - I)$ virke på tilstanden. (Identitets operatoren, I, giver den samme tilstand tilbage som den virker på.) Sammenfatter vi de to første skridt i algoritmen har vi

$$(2|\psi\rangle\langle\psi| - I)O|\psi\rangle \tag{12.3}$$

Den samlede operation kalder vi G, efter Grover, dvs. $G = (2|\psi\rangle\langle\psi| - I)O$.

$$G|\psi\rangle = (2|\psi\rangle\langle\psi| - I)O|\psi\rangle \ . \tag{12.4}$$

Nu kunne vi blot skrive ud hvad $|\psi\rangle$ er og regne løs. Dette kan godt lade sig gøre for $N = 4$, selvom der kommer mange led. Men der er mere fiks måde at gøre det på som hjælper os når N bliver større: Tricket er at lave følgende omskrivning

$$\begin{aligned} O|\psi\rangle &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) - |11\rangle \\ &= |\psi\rangle - |11\rangle \ . \end{aligned} \tag{12.5}$$

Benytter vi nu dette har vi at

$$\begin{aligned} G|\psi\rangle &= (2|\psi\rangle\langle\psi| - I)(|\psi\rangle - |11\rangle) \\ &= 2|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle - I|\psi\rangle - 2|\psi\rangle\langle\psi|11\rangle + I|11\rangle \\ &= 2|\psi\rangle - |\psi\rangle - 2|\psi\rangle\frac{1}{2} + |11\rangle \\ &= |11\rangle \ . \end{aligned} \tag{12.6}$$

Vi har virket en gang med Grovers G og tilstanden $|\psi\rangle$, der peger lige meget i alle 4 retninger, er i stedet blevet til tilstanden $|11\rangle$ der peger lige på den løsning vi søger! Det eneste vi mangler er at lave en måling på vores to qubit's, så får vi med 100% sandsynlighed 11 hvilket fortæller os at vi skal kigge i den skuffe.

Eksemplet med $N = 4$ ($n = 2$) giver os en første ide om hvordan Grovers algoritme virker. Inden vi går videre bliver vi nød til at indføre lidt mere notation for når n bliver større bliver det lynhurtigt rigtigt bøvlet at skrive alle tilstandene op. Så for at lette notationen skriver vi i stedet de $N = 2^n$ tilstande som $|0\rangle$, $|1\rangle$ ... $|N-1\rangle$. I eksemplet ovenfor ville vi altså have skrevet $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ i stedet for $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$. Når vi nu går til $N = 8$ skriver vi $|0\rangle$, $|1\rangle$, … $|7\rangle$ i stedet for $|000\rangle$, $|001\rangle$, … $|111\rangle$

Eksempel **Grovers algoritme for $N = 8$:** Vi starter igen fra en lige superposition over tilstande

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}(|0\rangle + |1\rangle + \ldots + |6\rangle + |7\rangle) \tag{12.7}$$

Lad os sige at løsningen er 7, men det er ikke afgørende, det er kun oraklet der ved dette. Oraklet vender igen fortegnet på den koefficient der står foran $|7\rangle$. Vi lader O virker på $|\psi\rangle$ og laver igen den fikse omskrivning heraf:

$$O|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}(|0\rangle + |1\rangle + \ldots + |6\rangle - |7\rangle) = |\psi\rangle - \frac{2}{\sqrt{8}}|7\rangle \ . \tag{12.8}$$

Vi lader nu $(2|\psi\rangle\langle\psi| - I)$ virke på $O|\psi\rangle$

$$\begin{aligned} G|\psi\rangle &= (2|\psi\rangle\langle\psi| - I)O|\psi\rangle \\ &= (2|\psi\rangle\langle\psi| - I)(|\psi\rangle - \frac{2}{\sqrt{8}}|7\rangle) \\ &= 2|\psi\rangle - |\psi\rangle - 2|\psi\rangle\frac{2}{8} + \frac{2}{\sqrt{8}}|7\rangle \\ &= \frac{1}{2}|\psi\rangle + \frac{2}{\sqrt{8}}|7\rangle \\ &= \frac{1}{2}|\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|7\rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{8}}(|0\rangle + |1\rangle + \ldots + |6\rangle) + (\frac{1}{2\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{2}})|7\rangle \end{aligned} \tag{12.9}$$

Efter at have anvendt Grovers G en gang finder vi derfor sandsynligheden for at måle

7

$$P_7 = (\langle 7|G|\psi\rangle)^2 = (\frac{1}{2\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{25}{32} = 0.78125 \tag{12.10}$$

Allerede efter at have ladet G virke en gang på $|\psi\rangle$ får vi en tilstand hvor der er over 78% sandsynlighed for at en måling giver det rette svar. Lader vi algoritmen køre en gang mere, svarende til at vi udregner $G^2|\psi\rangle$ finder vi herefter at $P_7 = 0.945312$, eller med andre ord at Grovers algoritme med næsten 95% sandsynlighed peget på den rette løsning. Det er en fin øvelse at check dette selv, så prøv selv at checke!

Bemærk forskellen mellem de to eksempler: For $N = 4$ er vi heldige og finder faktisk den rette løsning med 100% sandsynlighed efter at have anvendt G en gang på $|\psi\rangle$. For $N = 8$ anvender vi G to gange på $|\psi\rangle$ og får en tilstand hvor der er næsten 95% sandsynlighed for at en måling vil give os et svar der peger på den rette løsning. Eksemplet med $N = 8$ svarer til det der sker for et generelt N.

Grovers algoritme for generelt $N = 2^n$: Start med tilstanden

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle \tag{12.11}$$

Lad os sige at løsningen er $k = N - 1$, så oraklet, O, vender fortegnet på koefficienten foran $|N-1\rangle$ i den tilstand O virker på. Som i eksemplerne ovenfor gør v i nu følgende

$$G|\psi\rangle = (2|\psi\rangle\langle\psi| - I)O|\psi\rangle \tag{12.12}$$

og vi lader G virke ca. $\sqrt{N}$ gange på $|\psi\rangle$ og måler derefter. Svaret vi få er et bud på løsningen.

Hvorfor kan G være hurtigere end en søgealgoritme på en klassisk computer? Fordi operatoren virker på en meget lang superposition på en gang! Når den gør dette kan den på engang ændre alle koefficienter i den lange superposition. I stedet for at dykke ned i den desværre ret tunge matematik det kræver at udlede dette så lad os hellere afprøve Grovers algoritme på en kvantecomputer. Øvelsen vil forhåbentligt også gøre det lidt mere klart hvad det er for en rolle oraklet har og hvordan man i praksis konstruerer sådan et:

IBM Q 2 IBM Q øvelse med Grovers algoritme for $N = 4$ og $N = 8$.

Section 13

Polarisering of lys

Hvis du har det sådan "Qubit, $|0\rangle$ og $|1\rangle$, øhhhh ...?" så er dette kapitel det helt rigtige at læse nu!

h

Når du sidder og kigger på din computer tænker du sikker ikke umiddelbart over at lyset fra din skærm er polariseret. Men hvis du tager et par polaorid solbriller på, se figur 15, vil du opdage at skærmen ikke bare bliver lidt mørkere (som forventet det er jo et par solbriller du har på) men hvis du drejer hovedet i en bestemt vinkel så forsvinder lyset helt!

De enkelte fotoner i en lysstråle kan være i to polarisationstilstande, og vi kan jo passende kalde dem $|0\rangle$ og $|1\rangle$. Eller rettere sagt de kan være i en superposition $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ af de to polarisationstilstande $|0\rangle$ og $|1\rangle$. Vi vil først lave 5 forsøg med disse tilstande og derefter forklare forsøgene.

Figure 15. Polaroid solbriller: Lys har to polariserings-retninger svarende til tilstandene $|0\rangle$ og $|1\rangle$. Efter lys passerer

Subsection 13.1

Eksperimenter med polarisering

Her er 5 forsøg. De første 4 skulle give dig en lidt bedre fornemmelse for hvad de disse polarisations-tilstande er og det sidste forsøg vil formodentligt få dig til at tænke *hmm-mmm .....* Det eneste der kræves for at lave disse forsøg er 3 glas fra polaroid solbriller eller lige så godt 3 polariserings filtre fra jeres fysik-samling.

Forsøg 1: Se på din computerskærm gennem et polariseringsfilter. Lyset fra din skærm er (næsten helt sikkert) polariseret i en bestemt retning og polariseringsfilteret lader kun lys med en bestemt polarisering slippe igennem. Skærmen bliver derfor helt mørk når polariseringsfilteret er vinkelret på polariseringen af lyset fra skærmen.

Forsøg 2: Kig gennem et polariseringsfilter på lyset der kommer ind ad vinduet. Prøv at rotere polariseringsfilteret. Du vil nok se at rotationen af filteret ikke gør nogen synderlig forskel. Konklusion? I så fald er lyset fra vinduet er polariseret lige meget i alle retninger.

Forsøg 3: Prøv nu at lægge en bog i lyset fra vinduet og kig på bogen gennem polariseringsfilteret. Roter igen polariseringsfilteret. Nu vil du se at lysets styrke afhænger af hvilken retning du holder polariseringsfilteret. (Det fungerer bedst hvis bogens omslag er sort.) Hvad kan du konkludere heraf om lyset der kommer fra bogen?

Figure 16. Effekten af et polarisationsfilter, et must for enhver instagrammer.

Forsøg 4: Læg to polariseringsfiltere oven på hinanden og kig gennem dem mod vinduet. Efter passagen gennem det første filter er lyset polariseret (altså lige som lyset fra din computerskærm). Det skulle altså gerne ske precist det samme når du roterer det andet filter i.f.t. det første som der gjorde i forsøg 1. Check at det er tilfældet!

Forsøg 5: Læg de to polariseringsfiltre så polarisationsretningerne er vinkelret på hinanden. (Hvis du har gjort det, bør der ikke slippe noget lys igennem.) Tag nu et tredje polariseringsfilter, placer det foran de to andre og roter det. Beskriv hvad du observerer. Prøv også at placere det tredje polariseringsfilter bagved de andre to og beskriv hvad du observerer. Endeligt, prøv, at placere det tredje filter mellem de to andre og roter det (det første og andet skal stadig være placeret som vi startede med). Beskriv igen hvad du observerer!

De første 4 forsøg giver dig et eksempel på to kvantetilstande, polarisering op $= |0\rangle$ og polarisering ned $= |1\rangle$, der kunne udgøre en qubit. Det sidste af de 5 forsøg, giver et "Hvad f***** ...?" resultat.

Polariseringsfilterene vi har eksperimenteret med laver en måling af polariseringen af fotonerne der rammer filteret. Hvis fotonen kommer gennem filteret så er resultatet af målingen at fotonen har en polarisering der er samme retning som filteret og den foton der kommer ud på den anden side af filteret har denne polariseringsretning.

Subsection 13.2

Beregninger der forklarer eksperimenterne med polarisering

De forsøg vi lige har lavet kan forklares ud fra de regler vi opstillede i ligning 6.1 og de grundliggende postulater se afsnit 6.4.

Beregning forsøg 1: Lad os sige at lys der kommer fra din computerskærm er polariseret i retningen vi kalder $|0\rangle$ (hvis dette ikke lige passer med den retning du har tænkt på at $|0\rangle$ har så bare drej din computer skærm så det passer!). Sandsynligheden for at lyset kommer igennem polarisationsfilteret afhænger af den vinkel θ som polarisationsfilteret danner med $|0\rangle$-retningen. Polarisationsfilteret måler om lyset er polariseret i θ-retningen. Den egentilstand der hører til polarisation i θ-retningen er $\cos(\theta)|0\rangle+\sin(\theta)|1\rangle$ så benytter Definition 5 og finder $P = ((\cos(\theta)\langle 0| + \sin(\theta)\langle 1|)|0\rangle)^2 = \cos(\theta)^2$.

Beregning forsøg 4: Beregningen her er helt lig forsøg 1. Det er blot det første polarimeter der fastsætter polarisationsretningen i stedet for din computerskærm.

Beregning forsøg 5: Efter det første polariseringsfilter er lyset polariseret. Lad os sige at sige at denne retning er $|0\rangle$ (vi kan jo selv vælge hvilken retning filteret peger!) Sandsynligheden, $P_{1\to 2}$, for at det kommer i gennem det andet polarisationsfilter beregnes helt som i forsøg 1 så vi får igen $P_{1\to 2} = \cos(\theta)^2$, hvor θ er vinklen mellem polarisationsretningen af det første og det andet filter. Efter lyset er kommet igennem det andet filter (hvis det gør) er det i tilstanden $\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$. Det tredje filter er i $|1\rangle$-retningen, så for at finde sandsynligheden, $P_{2\to 3}$ for at lyset fra polarisationsfilter 2 kommer igennem polarisationsfilter 3 her skal vi udregne $P_{2\to 3} = (\langle 1|(\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta))|1\rangle\rangle)^2 = \sin^2(\theta)$. Endeligt finder vi sandsynligheden for at lyset kommer hele vejen gennem alle 3 polarisationsfiltre ved at tage produktet af de to sandsynligheder vi netop har udregner $P_{1\to 3} = P_{1\to 2} \cdot P_{2\to 3} = \cos(\theta)^2 \cdot \sin(\theta)^2$.

Opgave 22 Prøv at plotte funktionen $f(\theta) = \cos(\theta)^2 \cdot \sin(\theta)^2$ som funktion af θ. Check at resultatet giver mening for $\theta = 0°$ og for $\theta = 90°$.