MEFT - Programação

1º Ano - 1º Semestre de 2015/2016

Trabalhos Finais (07/12/2015)

Para a realização dos trabalhos tenha em conta os seguintes pontos:

- Os trabalhos finais são realizados em grupo e serão sujeitos a uma discussão final. Cada grupo deve escolher um único trabalho.
- Todos os trabalhos realizados devem ser escritos em **C** em ambiente de janelas;
- Para construir a(s) janela(s) a utilizar no programa deve ser usada uma das bibliotecas descritas durante esta cadeira (GTK+ ou Allegro);
- Os parâmetros, bem como as ordens de execução, para a realização dos objectivos do trabalho devem poder ser dados, em tempo real, a partir das janelas de execução do programa;
- As escalas dos eixos, sempre que tal se justifique, devem poder ser alteradas a partir da janela.
- Deverão existir, sempre que tal se justifique, botões que permitam parar, continuar e recomeçar as representações gráficas.
- Concluído um gráfico, o utilizador deve ter possibilidade de optar por sobrepor um novo gráfico (quando isso tiver cabimento) ao já existente ou fazer um novo desde o início. Deverá ainda ser possível dar a ordem de limpar um gráfico já existente.
- Ao iniciar-se o programa, devem estar introduzidos os valores que permitam executar uma demonstração.
- Os cálculos efectuados para as representações gráficas deverão resultar da resolução numérica da(s) equação(ões) diferencial(is) e não a partir de soluções gerais conhecidas.
- No que respeita às dimensões do sistema, estas deverão ser implicitamente definidas internamente pelo programa de modo a ele se ajustar correctamente às dimensões do ecrã.
- Os trabalhos realizados deverão ainda ser acompanhados por um pequeno texto explicativo (uma a duas páginas) escrito em TeX ou em LaTeX.

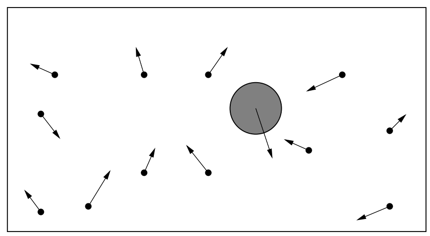
MEFT - Programação

1º Ano - 1º Semestre de 2015/2016

Trabalhos Finais (07/12/2015)

1. Simulação do movimento browniano a duas dimensões

Com vista à representação do movimento browniano a duas dimensões, faça numa caixa rectangular, uma simulação em que se mostra um círculo de raio 'r_1', velocidade inicial 'v_1' e massa 'm_1' e N pequenos círculos de 'r_2' com velocidade média inicial 'v_2' e massas 'm_2'.



Considere apenas as colisões entre as bolas pequenas e a bola grande e admita ainda que os choques são elásticos quer entre as massas quer com as paredes.

O programa deverá permitir definir e alterar o número de bolas pequenas, a sua velocidade inicial e a sua massa, do mesmo modo deverá poder alterar para a bola grande e sua massa e velocidade.

As posições iniciais das massas m_2 devem ser determinadas aleatoriamente. Para obter as suas velocidades iniciais poderá um método à sua escolha.

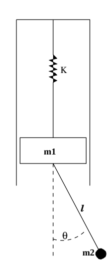
O programa deverá ter ainda uma opção em que apenas fica visível a bola grande.

Deverá poder visualizar-se, ou não, no ecran a velocidade da bola grande.

Deverá ser ainda possível a qualquer momento parar o movimento e depois fazê-lo continuar, bem como alterar quaisquer dos valores e reiniciar o movimento.

2. Massa com mola num cilindro e pêndulo

Pretende-se mostrar o movimento do sistema como se indica na figura ao lado.



Para tal, o programa deverá permitir escolher e alterar livremente as massas m_1 e m_2, suas posições e velocidades iniciais.

Deverá ser ainda possível a qualquer momento parar o movimento e depois fazê-lo continuar, bem como alterar quaisquer dos valores e reiniciar o movimento.

O programa deverá ainda poder, caso o utilizador o peça, mostrar um gráfico da(s) coordenada(s) de m_1 ou m_2 em função do tempo.

MEFT - Programação

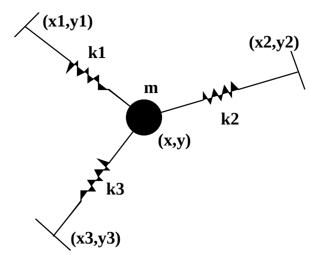
1º Ano - 1º Semestre de 2015/2016

Trabalhos Finais (07/12/2015)

3. Sistema de 3 molas e 1 massa

Considere o sistema ao lado constituído por três molas de constantes, K_1, K_1 e K_3 fixas numa extremidade e ligadas pela outra a uma massa m que se move livremente num plano horizontal. Despreze a massa das molas.

Pretende-se mostrar o movimento do sistema como se indica na figura ao lado.



Para tal, o programa deverá permitir escolher e alterar livremente as posições fixas das três molas, as suas constantes K_i e os seus comprimentos naturais.

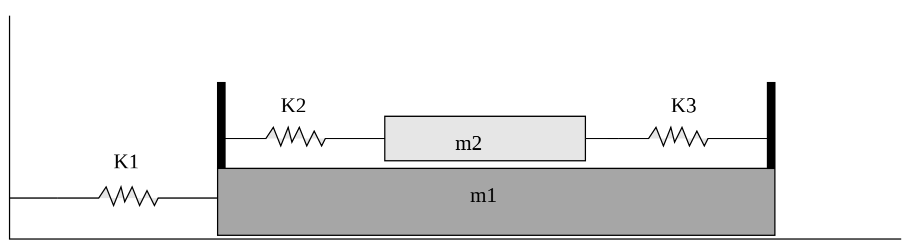
Do mesmo modo, deverá ser possível fornecer e alterar, em tempo real, a massa, posição (x,y), velocidade (v_x, v_y) iniciais de m.

Deverá ser ainda possível a qualquer momento parar o movimento e depois fazê-lo continuar, bem como alterar quaisquer dos valores e reiniciar o movimento.

O programa deverá ainda poder, caso o utilizador o peça, mostrar um gráfico da(s) coordenada(s) da massa m em função do tempo.

4. Duas massa e três molas

Considere um sistema constituído por dois corpos e três molas como se representa na figura abaixo. Pretende-se mostrar movimento desse sistema.



Para tal, o programa deverá permitir escolher e alterar, em tempo real, os valores das suas massas, dos seus tamanhos, das suas posições e das suas velocidades iniciais. Igualmente devem-se poder escolher as constantes das molas. Admita ainda que, no estudo deste sistema, pode desprezar as massas das molas.

Deverá ser ainda possível a qualquer momento parar o movimento e depois fazê-lo continuar, bem como alterar quaisquer dos valores e reiniciar o movimento.

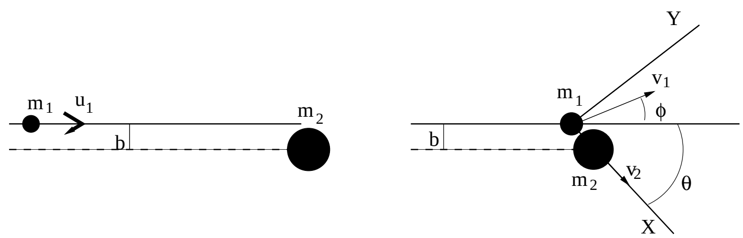
O programa deverá ainda poder, caso o utilizador o peça, mostrar um gráfico da(s) coordenada(s) de m_1 ou m_2 em função do tempo.

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

1. Simulação do movimento browniano a duas dimensões

Estudo do choque no plano entre duas massa m_1 e m_2 de raios respectivamente R_1 e R_2 sem efeitos de rotação e com um parâmetro de impacto 'b'.

Seja então a figura



Antes do choque tem-se:

$$\begin{cases} b &= (R_1 + R_2)\,\sin\theta \\ \vec{u}_1 &= u_1 \cos\theta\,\vec{e}_x + u_1 \sin\theta\,\vec{e}_y \\ \vec{u}_2 &= 0 \end{cases}$$

depois do choque:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 &= v_1 \cos(\theta+\phi)\,\vec{e}_x + u_1 \sin(\theta+\phi)\,\vec{e}_y \\ \vec{v}_2 &= v_2\,\vec{e}_x \end{cases}$$

e o coeficiente de restituição:

$$e = \frac{v_2 - v_1\,\cos(\theta+\phi)}{v_1 \cos\theta}$$

De onde resulta, tendo em conta a conservação da quantidade de movimento e a expressão do coeficiente de restituição:

$$\begin{cases} m_1\,u_1 \cos\theta &= m_1\,v_1 \cos(\theta+\phi) + m_2\,v_2 \\ m_1\,u_1 \sin\theta &= m_1\,v_1 \sin(\theta+\phi) \\ e\,v_1 \cos\theta &= v_2 - v_1\,\cos(\theta+\phi) \end{cases}$$

A solução deste sistema de equações é:

$$\begin{cases} \tan(\theta+\phi) &= \frac{m_1+m_2}{m_1-e\,m_2}\tan\theta \\ v_1 &= \frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\phi)}\,u_1 \\ v_2 &= \frac{m_1}{m_1+m_2}\,(1+e)\,\cos\theta\,u_1 \end{cases}$$

em que θ é obtido a partir da expressão do parâmetro de impacto.

No caso da simulação pedida, o coeficiente de restituição é '1'.

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

2. Sistema de 3 molas e 1 massa

A energia potencial do sistema é igual à soma das energias potencias de cada uma das molas:

$$V = \sum_{\alpha=1}^{3} V_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2} k_\alpha \left(d_\alpha - \ell_\alpha\right)^2$$

em que ℓ_α é o comprimento natural da mola 'α' e d_α é a distância do ponto em que a mola se fixa até à massa m, ambas medidas até ao centro de m, assim:

$$d_\alpha = \sqrt{(x - x_\alpha)^2 + (y - y_\alpha)^2}$$

Por outro lado, a energia cinética do sistema é apenas a energia cinética de m:

$$T = \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

e o lagrangeano do sistema será então:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2} k_\alpha \left(d_\alpha - \ell_\alpha\right)^2$$

A partir das equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

obtêm-se as equações do movimento.

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

3. Massa com mola num cilindro e pêndulo

Considerando um sistema se eixos com o eixo dos $yy's$ para baixo e com origem no ponto em que está fixa a mola, tem-se para as energias cinética e potencial:

A energia cinética do sistema é:

$$T = \frac{1}{2}\, m_1\, \dot{y}^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, \vec{v}_2^2$$

$$\vec{v}_2 = \dot{y}\, \vec{e_y} - \ell_2\, \dot{\theta}\, \vec{e_\theta} \qquad \text{com} \qquad \vec{e_\theta} = cos(\theta)\, \vec{e_x} - sin(\theta)\, \vec{e_y}$$

$$\vec{v}_2 = \ell_2\, \dot{\theta}\, cos(\theta)\, \vec{e_x} + (\dot{y} - \ell_2\, \dot{\theta}\, sin(\theta))\, \vec{e_y}$$

$$\vec{v}_2^2 = \dot{y}^2 + \ell_2\, \dot{\theta}^2 - 2\, \ell_2\, sin(\theta)\, \dot{y}\, \dot{\theta}$$

Ou seja, a energia cinética do sistema é dada por:

$$T = \frac{1}{2}\, (m_1 + m_2)\, \dot{y}^2 + \frac{1}{2}\, \ell_2^2\, m_2\, \dot{\theta}^2 - \ell_2\, m_2\, sin(\theta)\, \dot{y}\, \dot{\theta}$$

E a energia potencial:

$$V = \frac{1}{2}\, K\, (y - \ell_1)^2 - m_1\, g\, y - m_2\, g\, (y + \ell_2\, cos(\theta))$$

Assim, o lagrangeano do sistema é:

$$L = \frac{1}{2}\, (m_1 + m_2)\, \dot{y}^2 + \frac{1}{2}\, \ell^2\, m_2\, \dot{\theta}^2 - \ell_2\, m_2\, sin(\theta)\, \dot{y}\, \dot{\theta} - \frac{1}{2}\, K\, (y - \ell_1)^2 + (m_1 + m_2)\, g\, y + m_2\, g\, \ell_2\, cos(\theta)$$

A partir das equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

obtêm-se as equações do movimento.

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

4. Duas massa e três molas

Considerando o eixo dos $xx's$ como o eixo do movimento, x_1 a coordenada da massa m_1 e x_2 a da massa m_2, tem-se para as energias cinética e potencial:

A energia cinética do sistema é:

$$T = \frac{1}{2}\, m_1\, \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, \dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2}\, K_1\, (x_1 - \ell_1)^2 + \frac{1}{2}\, K_2\, ((x_2 - x_1) - \ell_2)^2 + \frac{1}{2}\, K_3\, (((x_1 + L) - x_2) - \ell_3)^2$$

$$V = \frac{1}{2}\, K_1\, (x_1 - \ell_1)^2 + \frac{1}{2}\, K_2\, ((x_2 - x_1) - \ell_2)^2 + \frac{1}{2}\, K_3\, (x_1 - x_2 + L - \ell_3)^2$$

em que ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 são os comprimentos naturais das respectivas molas e L é o comprimento da massa m_2.

Assim, o lagrangeano do sistema é:

$$L = \frac{1}{2}\, m_1\, \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}\, K_1\, (x_1 - \ell_1)^2 - \frac{1}{2}\, K_2\, ((x_2 - x_1) - \ell_2)^2$$
$$- \frac{1}{2}\, K_3\, (x_1 - x_2 + L - \ell_3)^2$$

A partir das equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \qquad\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

obtêm-se as equações do movimento.