RELAZIONE LABORATORIO 1 MATLAB

Laboratorio eseguito da (in ordine alfabetico):
-Cuneo Giulio: s4516855
-Magno Alessandro: s4478234

Esercizio 1

Risultati ottenuti:

VA =	VB =
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1

VAtA =	VBtB =
0.0012459	0.0012459
0.0112036	0.0112036

0.0310693	0.0310693
0.0607442	0.0607442
0.1000804	0.1000804
0.1488819	0.1488819
0.2069055	0.2069055
0.2738623	0.2738623
0.3494185	0.3494185
0.4331979	0.4331979
0.5247831	0.5247831
0.6237177	0.6237177
0.7295088	0.7295088
0.8416295	0.8416295
0.9595211	0.9595211
1.0825963	1.0825963
1.2102420	1.2102420
1.3418223	1.3418223
1.4766815	1.4766815
1.6141479	1.6141479
1.7535365	1.7535365
1.8941531	1.8941531
2.0352970	2.0352970
2.1762650	2.1762650
2.3163549	2.3163549
2.4548687	2.4548687
2.5911164	2.5911164
2.7244191	2.7244191
2.8541129	2.8541129
2.9795515	2.9795515
3.1001100	3.1001100
3.2151878	3.2151878
3.3242117	3.3242117
3.4266383	3.4266383
3.5219576	3.5219576
3.6096945	3.6096945
3.6894120	3.6894120
3.7607129	3.7607129
3.8232421	3.8232421
3.8766879	3.8766879
3.9207842	3.9207842
3.9553112	3.9553112
3.9800970	3.9800970
3.9950181	3.9950181

norm(B − A)/norm(A) = 5.0031e-45
norm(VB-VA)/norm(VA) = 0
norm(BtB-AtA)/norm(AtA) = 2.5031e-45
norm(VBtB-VatA)/norm(VAtA) = 0

Quello che dobbiamo discutere in questo esercizio è quant'è condizionato il problema degli autovalori. Fissiamo il problema: la matrice A è il nostro input. Ci chiediamo, perturbando l'input, di quanto si sposta il relativo autovalore? Per rispondere a questa domanda occorre il teorema di Bauer-Fike. Il teorema espone usando come misura, l'errore assoluto, di quant'è lo scarto dell'autovalore in funzione dell'eventuale scarto della matrice.
Il teorema presenta la seguente ipotesi: sia A diagonalizzabile, ($\Leftrightarrow A = X\Lambda X^{-1}$) , allora λ autovalore di A, μ autovalore di B

$$\forall\lambda\ \exists\mu \text{ tale che } |\lambda - \mu| <= \mu(X)\,\|A - B\|$$

La matrice di partenza (blocco di Jordan) non è diagonalizzabile, per cui già a priori il problema è mal condizionato. Siccome l'ipotesi non è garantita, si presenta un condizionamento peggiore che comporta uno spostamento maggiore degli autovalori.

Esercizio 2

Risultati ottenuti:

matrice G =

0.00000	1.00000	0.50000	0.33333	0.25000	0.33333	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.16667	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.16667	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.33333	0.00000
0.16667	0.00000	0.00000	0.00000	0.25000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.33333	0.00000
0.16667	0.00000	0.00000	0.33333	0.00000	0.33333	0.00000	0.33333	0.00000	0.00000	0.00000
0.16667	0.00000	0.00000	0.00000	0.25000	0.00000	0.00000	0.33333	0.00000	0.00000	0.00000
0.16667	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.25000	0.33333	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.33333	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.50000	0.33333	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.33333	0.00000

autovettori V =

Columns 1 through 5:

-0.61237 + 0.00000i	-0.05213 + 0.00000i	-0.73855 + 0.00000i	-0.23142 + 0.00000i	0.62722 + 0.00000i
-0.10206 + 0.00000i	-0.01137 + 0.00000i	-0.21320 + 0.00000i	-0.17212 + 0.00000i	-0.11847 + 0.00000i
-0.20412 + 0.00000i	-0.26338 + 0.00000i	0.00000 + 0.00000i	-0.22833 + 0.00000i	-0.32122 + 0.00000i
-0.30619 + 0.00000i	-0.17267 + 0.00000i	0.00000 + 0.00000i	0.48571 + 0.00000i	-0.33072 + 0.00000i
-0.40825 + 0.00000i	0.27720 + 0.00000i	0.00000 + 0.00000i	0.64003 + 0.00000i	0.03353 + 0.00000i
-0.30619 + 0.00000i	0.30860 + 0.00000i	-0.00000 + 0.00000i	0.25389 + 0.00000i	-0.16216 + 0.00000i
-0.10206 + 0.00000i	-0.01137 + 0.00000i	-0.21320 + 0.00000i	-0.17212 + 0.00000i	-0.11847 + 0.00000i
-0.30619 + 0.00000i	0.52545 + 0.00000i	0.36927 + 0.00000i	-0.19363 + 0.00000i	0.09050 + 0.00000i
-0.10206 + 0.00000i	0.22926 + 0.00000i	0.21320 + 0.00000i	-0.28803 + 0.00000i	-0.03419 + 0.00000i
-0.30619 + 0.00000i	-0.57758 + 0.00000i	0.36927 + 0.00000i	-0.03779 + 0.00000i	0.53672 + 0.00000i
-0.10206 + 0.00000i	-0.25201 + 0.00000i	0.21320 + 0.00000i	-0.05621 + 0.00000i	-0.20275 + 0.00000i

Columns 6 through 10:

0.37647 + 0.00000i	0.73855 + 0.00000i	0.07081 + 0.00000i	-0.00000 + 0.00000i	-0.00000 - 0.00000i
-0.08649 + 0.00000i	-0.21320 + 0.00000i	-0.03104 + 0.00000i	-0.29916 - 0.02887i	-0.29916 + 0.02887i
0.04408 + 0.00000i	0.00000 + 0.00000i	-0.13040 + 0.00000i	-0.56118 + 0.05773i	-0.56118 - 0.05773i
0.16062 + 0.00000i	-0.00000 + 0.00000i	0.36441 + 0.00000i	0.15076 - 0.26712i	0.15076 + 0.26712i
-0.33818 + 0.00000i	0.00000 + 0.00000i	-0.75252 + 0.00000i	0.00000 - 0.00000i	0.00000 + 0.00000i
-0.27350 + 0.00000i	0.00000 + 0.00000i	0.50105 + 0.00000i	-0.15076 + 0.26712i	-0.15076 - 0.26712i
-0.08649 + 0.00000i	-0.21320 + 0.00000i	-0.03104 + 0.00000i	0.57975 + 0.00000i	0.57975 - 0.00000i
0.66064 + 0.00000i	-0.36927 + 0.00000i	-0.04252 + 0.00000i	0.00000 + 0.00000i	0.00000 - 0.00000i
-0.30355 + 0.00000i	0.21320 + 0.00000i	0.03728 + 0.00000i	0.05025 - 0.08904i	0.05025 + 0.08904i
-0.28417 + 0.00000i	-0.36927 + 0.00000i	0.11333 + 0.00000i	-0.00000 + 0.00000i	-0.00000 - 0.00000i
0.13057 + 0.00000i	0.21320 + 0.00000i	-0.09936 + 0.00000i	0.23034 + 0.06017i	0.23034 - 0.06017i

Column 11:

-0.00000 + 0.00000i

```
  -0.43853 + 0.00000i
  -0.50979 + 0.00000i
  -0.01031 + 0.00000i
   0.00000 + 0.00000i
   0.01031 + 0.00000i
   0.69343 + 0.00000i
   0.00000 + 0.00000i
  -0.00344 + 0.00000i
  -0.00000 + 0.00000i
   0.25833 + 0.00000i
```

autovalori D =

Diagonal Matrix

Columns 1 through 5:

```
   1.00000 + 0.00000i                    0                    0                    0                    0
                    0   0.76397 + 0.00000i                    0                    0                    0
                    0                    0   0.57735 + 0.00000i                    0                    0
                    0                    0                    0   0.22409 + 0.00000i                    0
                    0                    0                    0                    0  -0.88240 + 0.00000i
                    0                    0                    0                    0                    0
                    0                    0                    0                    0                    0
                    0                    0                    0                    0                    0
                    0                    0                    0                    0                    0
                    0                    0                    0                    0                    0
                    0                    0                    0                    0                    0
```

Columns 6 through 10:

```
                    0                    0                    0                    0                    0
                    0                    0                    0                    0                    0
                    0                    0                    0                    0                    0
                    0                    0                    0                    0                    0
                    0                    0                    0                    0                    0
  -0.72545 + 0.00000i                    0                    0                    0                    0
                    0  -0.57735 + 0.00000i                    0                    0                    0
                    0                    0  -0.38021 + 0.00000i                    0                    0
                    0                    0                    0  -0.00000 + 0.00000i                    0
                    0                    0                    0                    0  -0.00000 - 0.00000i
                    0                    0                    0                    0                    0
```

Column 11:

```
                    0
                    0
                    0
                    0
                    0
                    0
                    0
                    0
                    0
                    0
  -0.00000 + 0.00000i
```

Prima colonna autovettori generalizzata con affianco una stima “intuitiva dell’importanza”:

x =

0.214286 $\quad x_1 = x_2 + ½\, x_3 + {}^1/_3\, x_4 + ¼\, x_5 + {}^1/_3\, x_6 + x_7$

0.035714	$x_2 = {}^1/_6\, x_1$
0.071429	$x_3 = {}^1/_6\, x_1 + {}^1/_3\, x_{10}$
0.107143	$x_4 = {}^1/_6\, x_1 + ¼\, x_5 + {}^1/_3\, x_{10}$
0.142857	$x_5 = {}^1/_6\, x_1 + {}^1/_3\, x_4 + {}^1/_3\, x_6 + {}^1/_3\, x_8$
0.107143	$x_6 = {}^1/_6\, x_1 + ¼\, x_5 + {}^1/_3\, x_8$
0.035714	$x_7 = {}^1/_6\, x_1$
0.107143	$x_8 = ¼\, x_5 + {}^1/_3\, x_6 + x_9$
0.035714	$x_9 = {}^1/_3\, x_8$
0.107143	$x_{10} = ½\, x_3 + {}^1/_3\, x_4 + x_{11}$
0.035714	$x_{11} = {}^1/_3\, x_{10}$

Bisogna verificare che la trasposta della matrice G sia stocastica, infatti la nostra G trasposta è stocastica per righe. Quindi si può dire a priori che ha un autovalore = 1 e avrò un autovettore associato alla matrice, con componenti comprese tra 0 e 1 tutte non negative e inoltre in genere visto che c'è l'ambiguità rispetto ai multipli, si cerca di normalizzare in modo da imporre che la somma delle "importanze" sia uguale a 1.

Esercizio 3

Risultati ottenuti con metodo delle potenze, approssimazione autovalore di massimo modulo (lambda):

vettore = $(1,1,1)^T$

lambda = 5.59761854124889
lambda = 7.45126006764928
lambda = 5.77641138860191
lambda = 5.46257789048665
lambda = 5.24552094576929
lambda = 5.14283747736402
lambda = 5.08308142508227
lambda = 5.04915917792715
lambda = 5.02920997291556
lambda = 5.01743311987889
lambda = 5.01042501992230
lambda = 5.00624286510884
lambda = 5.00374129159631
lambda = 5.00224319737759
lambda = 5.00134534840473
lambda = 5.00080700450465
lambda = 5.00048412898941
lambda = 5.00029045088446
lambda = 5.00017426098437
lambda = 5.00010455315510
lambda = 5.00006273065616
lambda = 5.00003763794846
lambda = 5.00002258260879
lambda = 5.00001354950757
lambda = 5.00000812968377
lambda = 5.00000487780278
lambda = 5.00000292667898
lambda = 5.00000175600642
lambda = 5.00000105360350
lambda = 5.00000063216198
lambda = 5.00000037929714
lambda = 5.00000022757827
lambda = 5.00000013654695
lambda = 5.00000008192817
lambda = 5.00000004915690

vettore = $(3,10,4)^T$

lambda2 = 7.45373873851088
lambda2 = 5.23131532183056
lambda2 = 5.31867608008753
lambda2 = 5.14554527997913
lambda2 = 5.09188469169397
lambda2 = 5.05283918700203
lambda2 = 5.03166068417212
lambda2 = 5.01883022119809
lambda2 = 5.01126887811356
lambda2 = 5.00674486143528
lambda2 = 5.00404220391914
lambda2 = 5.00242339006059
lambda2 = 5.00145338695247
lambda2 = 5.00087178983679
lambda2 = 5.00052298860608
lambda2 = 5.00031376208305
lambda2 = 5.00018824613880
lambda2 = 5.00011294366840
lambda2 = 5.00006776475881
lambda2 = 5.00004065833549
lambda2 = 5.00002439481430
lambda2 = 5.00001463682123
lambda2 = 5.00000878206850
lambda2 = 5.00000526923237
lambda2 = 5.00000316153628
lambda2 = 5.00000189692064
lambda2 = 5.00000113815198
lambda2 = 5.00000068289104
lambda2 = 5.00000040973457
lambda2 = 5.00000024584072
lambda2 = 5.00000014750443
lambda2 = 5.00000008850265
lambda2 = 5.00000005310159

Risultati ottenuti con metodo delle potenze inverse :

lambda = 5.75229357798165	lambda2 = 5.69362380880969
lambda = 5.41618497109827	lambda2 = 5.25131319623854
lambda = 5.21220657276995	lambda2 = 5.10370058582229
lambda = 5.10675805257387	lambda2 = 5.04667201505108
lambda = 5.05350754461218	lambda2 = 5.02208044005196
lambda = 5.02678202223068	lambda2 = 5.01073115300578
lambda = 5.01339761607774	lambda2 = 5.00528890847704
lambda = 5.00670040367160	lambda2 = 5.00262536176935
lambda = 5.00335059388800	lambda2 = 5.00130791706471
lambda = 5.00167539410587	lambda2 = 5.00065276873827
lambda = 5.00083772123737	lambda2 = 5.00032608706565
lambda = 5.00041886665156	lambda2 = 5.00016296922507
lambda = 5.00020943483235	lambda2 = 5.00008146603787
lambda = 5.00010471779261	lambda2 = 5.00004072837555
lambda = 5.00005235899039	lambda2 = 5.00002036302696
lambda = 5.00002617951871	lambda2 = 5.00001018122329
lambda = 5.00001308976524	lambda2 = 5.00000509053909
lambda = 5.00000654488409	lambda2 = 5.00000254525141
lambda = 5.00000327244241	lambda2 = 5.00000127262117
lambda = 5.00000163622130	lambda2 = 5.00000063630945
lambda = 5.00000081811067	lambda2 = 5.00000031815444
lambda = 5.00000040905534	lambda2 = 5.00000015907715
lambda = 5.00000020452767	lambda2 = 5.00000007953856
lambda = 5.00000010226384	lambda2 = 5.00000003976927
lambda = 5.00000005113192	
lambda = 5.00000002556596	

Per evitare problemi di underflow e overflow sono stati utilizzati algoritmi diversi da quelli presenti nelle dispense.
Nel primo vettore, si impiegano 35 iterazioni, mentre nel secondo 33, per l'approssimazione dell'autovalore con metodo delle potenze. Utilizzando, invece, il metodo delle potenze inverse si nota che ponendo come shift un numero vicino all'autovalore, occorrono meno iterazioni: 26 per il primo vettore e 24 per il secondo. Inoltre si può constatare dalle approssimazioni dell'autovalore lambda, come la convergenza sia lineare in questo ultimo metodo. In conclusione, in questo caso si vede chiaramente come il metodo delle potenze inverse con shift impostato correttamente sia più efficiente rispetto il metodo delle potenze, dove occorrono più iterazioni per raggiungere lo stesso risultato.