# Chapitre 2 : Interpolation et Approximation

## Exemple 1 : (Problème d'interpolation)

$$L_1(x) = \frac{(x-1,1)\,(x-1,8)\,(x-2,4)\,(x-3,7)}{(0,0-1,1)\,(0,0-1,8)\,(0,0-2,4)\,(0,0-3,7)} = \frac{x^4 - 9,0\,x^3 + 28,55\,x^2 - 37,83\,x + 17,5824}{17,5824}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0,0)\,(x-1,8)\,(x-2,4)\,(x-3,7)}{(1,1-0,0)\,(1,1-1,8)\,(1,1-2,4)\,(1,1-3,7)} = \frac{x^4 - 7,9\,x^3 + 19,86\,x^2 - 15,984\,x}{2,6026}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0,0)\,(x-1,1)\,(x-2,4)\,(x-3,7)}{(1,8-0,0)\,(1,8-1,1)\,(1,8-2,4)\,(1,8-3,7)} = \frac{x^4 - 7,2\,x^3 + 15,59\,x^2 - 9,768\,x}{1,4364}$$

$$L_4(x) = \frac{(x-0,0)\,(x-1,1)\,(x-1,8)\,(x-3,7)}{(2,4-0,0)\,(2,4-1,1)\,(2,4-1,8)\,(2,4-3,7)} = \frac{x^4 - 6,6\,x^3 + 12,71\,x^2 - 7,326\,x}{-2,4336}$$

$$L_5(x) = \frac{(x-0,0)\,(x-1,1)\,(x-1,8)\,(x-2,4)}{(3,7-0,0)\,(3,7-1,1)\,(3,7-1,8)\,(3,7-2,4)} = \frac{x^4 - 5,3\,x^3 + 8,94\,x^2 - 4,752\,x}{23,7614}$$

$$\begin{aligned}
P(x) &= y_1\,L_1(x) + y_2\,L_2(x) + y_3\,L_3(x) + y_4\,L_4(x) + y_5\,L_5(x) \\
&= 0,5\,L_1(x) + 1,1\,L_2(x) + 2,1\,L_3(x) + 2,9\,L_4(x) + 4,0\,L_5(x) \\
&= 0,044462\,x^4 - 0,4706\,x^3 + 1,5695\,x^2 - 0,67071\,x + 0,5
\end{aligned}$$

## Exemple 2 : Problème d'approximation

$$L_1(x) = \frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)}{\left(0-\frac{1}{3}\right)\left(0-\frac{2}{3}\right)(0-1)} = \frac{x^3 - 2\,x^2 + \frac{11}{9}\,x - \frac{2}{9}}{-\frac{2}{9}}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)}{\left(\frac{1}{3}-0\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \frac{x^3 - \frac{5}{3}\,x^2 + \frac{2}{3}\,x}{\frac{2}{27}}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)}{\left(\frac{2}{3}-0\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)} = \frac{x^3 - \frac{4}{3}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x}{-\frac{2}{27}}$$

$$L_4(x) = \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{(1-0)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)} = \frac{x^3 - x^2 + \frac{2}{9}\,x}{\frac{2}{9}}$$

$$\begin{aligned}
P(x) &= 1,0000\,L_1(x) + 0,7165\,L_2(x) + 0,5134\,L_3(x) + 0,3679\,L_4(x) \\
&= -0,1025\,x^3 + 0,4641\,x^2 - 0,99372\,x + 1
\end{aligned}$$