

# Électronique Analogique

## Notes de cours avec exercices corrigés<sup>a</sup>

Parcours : L2-S3 (EI & AII)

2020-2021

Semestre : 3

a. <https://github.com/a-mhamdi/isetbz/>

**Abdelbacet Mhamdi**

Dr.-Ing. en GE – Technologie en GE

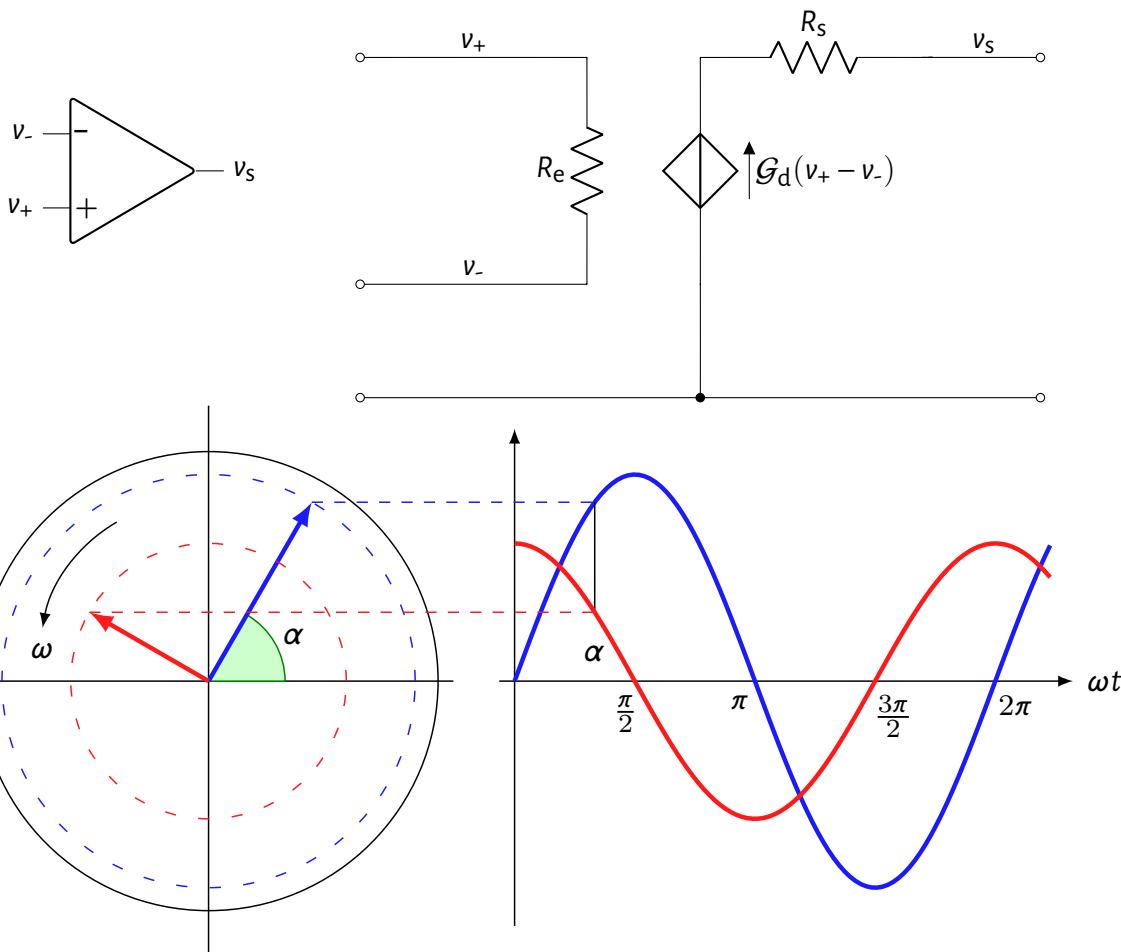
$\Sigma$

$\int$

$\frac{d}{dt}$

$\omega$

$J$



Dépt. GE - Institut Supérieur des Études Technologiques de Bizerte



# AOP DÉRIVATION FILTRE ACTIF MULTIVIBRATEUR INTÉGRATION GÉNÉRATEUR SATURATION LINÉAIRE

## À propos

Ce cours s'adresse plus particulièrement aux étudiants de la licence en génie électrique (**L2-S3**), parcours ÉLECTRICITÉ INDUSTRIELLE (**EI**) & AUTOMATISMES ET INFORMATIQUE INDUSTRIELLE (**AII**).

Dans ce cours, nous traiterons essentiellement les points suivants :

- ★ Caractéristiques d'un AO;
- ★ Types de polarisation d'un AO;
- ★ Fonctionnement sans ou avec une boucle de rétroaction;
- ★ Montages de base : amplification, inversion, addition, soustraction, dérivation, intégration, etc.;
- ★ Multivibrateur astable;
- ★ Filtrage actif.

## FICHE DE L'UNITE D'ENSEIGNEMENT (UE)

| CODE DE L'UE :<br>UEF330                                  |                                      | INTITULE DE L'UE : Electronique et Traitement du Signal |    |    |                            |        |             |               |           |           |
|---|--------------------------------------|---|----|----|----------------------------|--------|-------------|---------------|-----------|-----------|
| DOMAINE : SCIENCES, TECHNOLOGIES ET ÉTUDES TECHNOLOGIQUES |                                      |   |    |    |                            |        |             |               |           |           |
| Diplôme : Licence   |                                      |   |    |    | MENTION : GÉNIE ELECTRIQUE |        |             |               |           |           |
| PARCOURS : Automatismes et Informatique Industrielle      |                                      |   |    |    |                            |        |             | SEMESTRE : S3 |           |           |
| CODE ECUE   | ELEMENTS CONSTITUTIFS DE L'UE (ECUE) | Vol. Horaire (en h)<br>sur 14 semaines                  |    |    | Crédits                    | Coeff. | Evaluations |               |           |           |
|   |                                      | Cours   | TD | TP |                            |        | DC<br>40%   | DS<br>60%     | EC<br>60% | ES<br>40% |
| ECUEF331  | Electronique Analogique              | 14  | 7  |    | 1,5                        | 0,75   | X           | X             |           |           |
| ECUEF332  | Traitement du Signal                 | 14  | 7  |    | 1,5                        | 0,75   | X           | X             |           |           |
| ECUEF333  | Atelier Electronique Analogique      |   |    | 21 | 1,5                        | 0.75   |             |               | X         | X         |
| Total   |                                      | 42  |    | 21 | 4,5                        | 2.25   |             |               |           |           |

| Code : ECUEF331  | Electronique Analogique  |
|------------------|--|
| <b>OBJECTIFS</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Approfondir les connaissances en électronique et mettre en application les circuits analogiques couramment utilisés.</li> </ul>   |
| <b>CONTENU</b>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>Amplificateur opérationnel (fonctionnement, applications) :</li> <li>Ampli. Op. réel : courant de polarisation, saturation, tension de décalage, slew-rate</li> <li>Ampli. Op. en régime linéaire : les montages de bases</li> <li>Ampli. Op. en régime non-linéaire : Comparateur simple, à hystérésis, multivibrateurs.</li> <li>Filtrage (filtres actifs, synthèse des filtres à capacités commutées...)</li> <li>Oscillateurs sinusoïdaux, oscillateurs à relaxation, oscillateurs commandés en tension</li> <li>Boucles à verrouillage de phases.</li> <li>Les convertisseurs analogiques numériques et numériques analogiques.</li> </ul> |

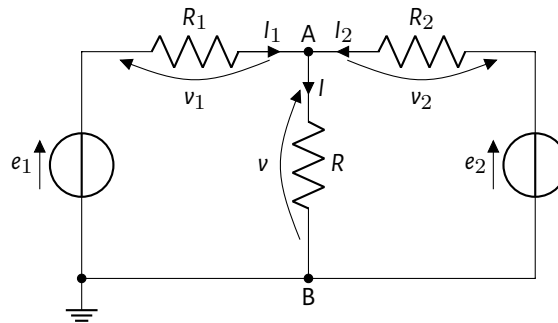
## Table des matières

|          |                                   |           |
|----------|-----------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Rappel</b>                     | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Mise en situation</b>          | <b>4</b>  |
| <b>3</b> | <b>ALI en régime linéaire</b>     | <b>7</b>  |
| <b>4</b> | <b>ALI en régime non linéaire</b> | <b>16</b> |
| <b>5</b> | <b>Générateur de fonctions</b>    | <b>17</b> |
| <b>6</b> | <b>Filtre actif</b>               | <b>28</b> |

# 1 Rappel

## ACTIVITÉ

En appliquant les méthodes d'analyse des circuits électriques : lois de KIRCHHOFF, principe de superposition, théorème de THÉVENIN, théorème de NORTON et théorème de MILLMAN, déterminer la tension  $v$  aux bornes de la résistance  $R$  du montage suivant :



## Lois de KIRCHHOFF

En appliquant les lois de Kirchhoff, on trouve le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} e_1 - R_1 i_1 - RI = 0 \\ e_2 - R_2 i_2 - RI = 0 \\ I = i_1 + i_2 \end{cases} \quad (1)$$

Eq. (1) peut se réduire à la forme matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 0 \end{pmatrix}}_b = \underbrace{\begin{pmatrix} R & R_1 & 0 \\ R & 0 & R_2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} I \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}}_x \quad (2)$$

La méthode de Cramer conduit à :

$$I = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & R_1 & 0 \\ e_2 & 0 & R_2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R & R_1 & 0 \\ R & 0 & R_2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} \quad (3)$$

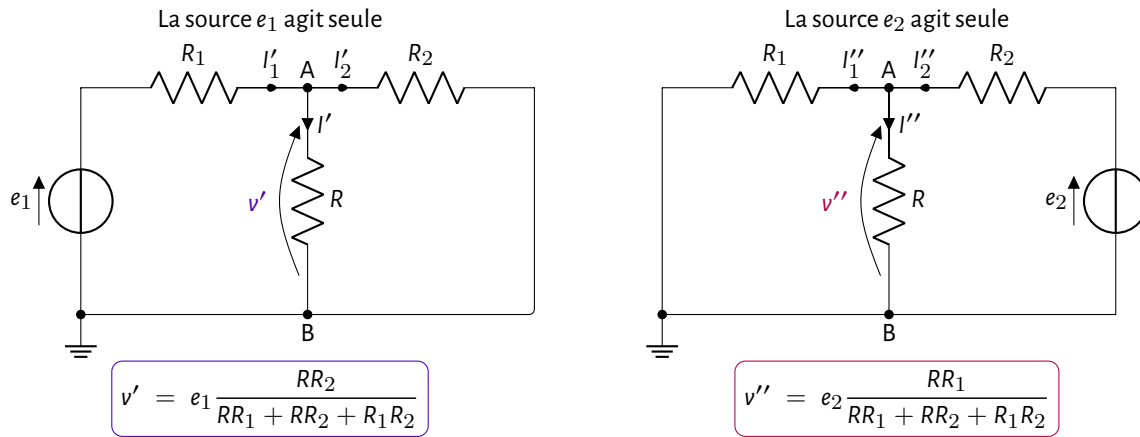
On montre que  $I$  est égal à :

$$I = \frac{R_2 e_1 + R_1 e_2}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2} \quad (4)$$

La tension  $v$  est donnée par :

$$v = \frac{RR_2 e_1 + RR_1 e_2}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2}$$

### Principe de superposition

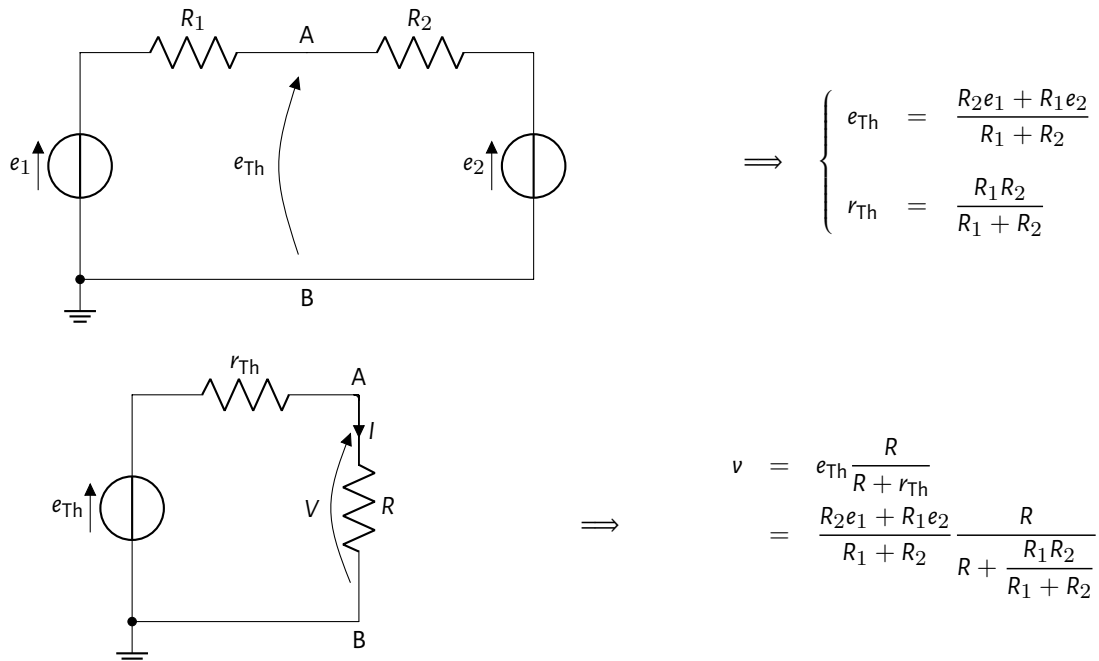


La tension résultante, au quelle soumise la résistance  $R$ , est donnée par Eq. (5) :

$$v = v' + v'' \quad (5)$$

$$v = \frac{RR_2e_1 + RR_1e_2}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}$$

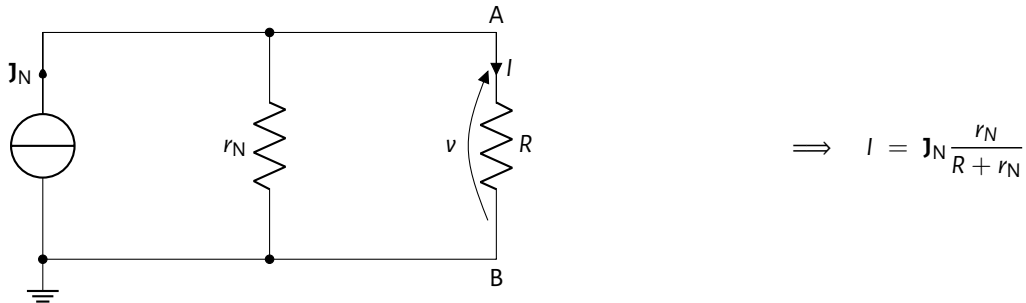
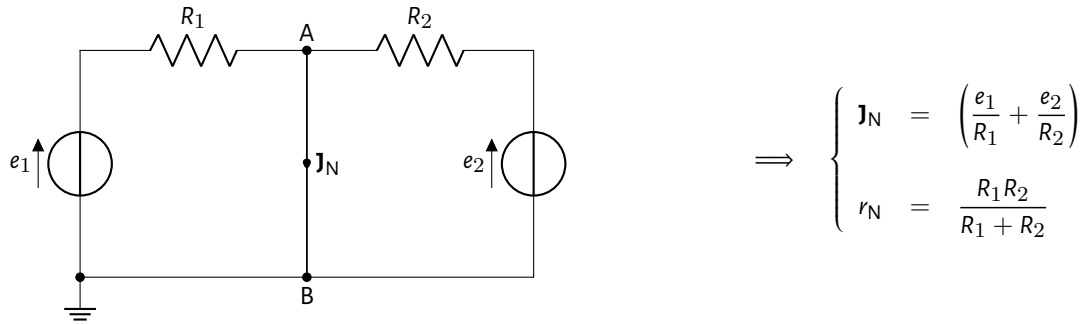
### Théorème de THEVENIN



La tension  $v$  aux bornes de la résistance  $R$  est donnée par :

$$v = \frac{RR_2e_1 + RR_1e_2}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}$$

### Théorème de NORTON



L'application directe de la loi d'Ohm conduit à

$$\begin{aligned} v &= R J_N \frac{r_N}{R + r_N} \\ &= R \left( \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} \right) \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \end{aligned} \quad (6)$$

Soit encore :

$$v = \frac{R R_2 e_1 + R R_1 e_2}{R R_1 + R R_2 + R_1 R_2}$$

### Théorème de MILLMAN

On montre que l'expression de la tension  $v$  est donnée par Eq. (7) :

$$\begin{aligned} v &= \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \\ &= \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \frac{\frac{R R_1 R_2}{R R_1 R_2}}{\frac{R R_1 R_2}{R R_1 R_2}} \end{aligned} \quad (7)$$

Soit finalement



$$v = \frac{RR_2e_1 + RR_1e_2}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}$$

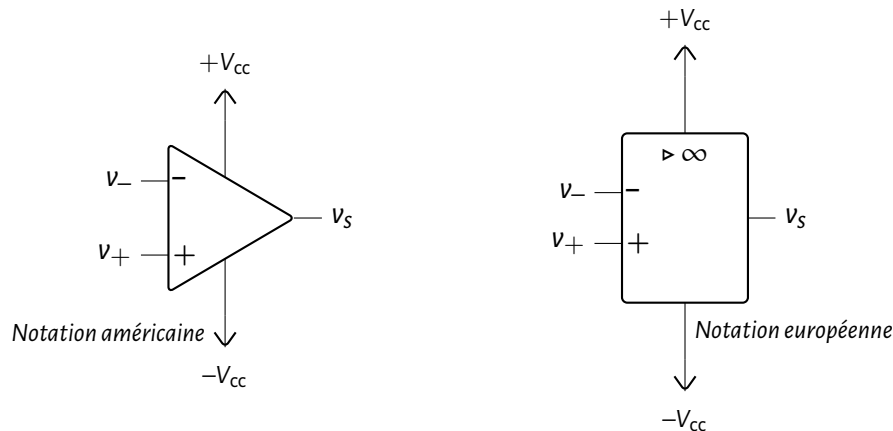
## 2 Mise en situation

Les amplificateurs opérationnels ont été conçus initialement pour le câblage des fonctions mathématiques (addition, soustraction, dérivation, intégration et d'autres) dans les calculateurs analogiques.

Nous étudions ici la famille  $\mu A 741$ . C'est un amplificateur à usage courant. Il a beaucoup d'applications réelles, on en cite principalement :

- ★ adaptation d'impédance;
- ★ sommation, intégration, etc;
- ★ génération de fonctions;
- ★ filtrage actif.

Un amplificateur opérationnel est souvent représenté schématiquement par l'un des symboles ci-dessous



Il possède deux bornes dites inverseuse et non inverseuse. Elles sont désignées par  $v_-$  et  $v_+$ . Une seule sortie  $v_s$  est disponible. Elle est donnée par la relation suivante :

$$v_s(t) = \mathcal{G}_d (v_+ - v_-) + \mathcal{G}_c \left( \frac{v_+ + v_-}{2} \right), \quad (8)$$

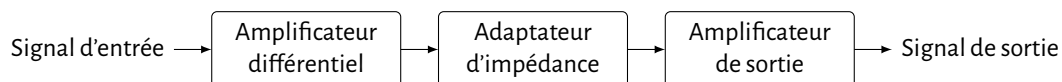
où  $\mathcal{G}_d$  et  $\mathcal{G}_c$  dénotent respectivement le gain différentiel et le gain en mode commun.

Les tensions d'alimentation peuvent être symétriques ou asymétriques. Elles seront souvent omises dans le reste de ce manuel.



La tension de sortie  $v_s$  ne dépasse pas les deux valeurs limites  $\pm V_{cc}$ .

Ce composant regroupe un amplificateur différentiel en entrée, suivi d'un adaptateur d'impédance. La sortie est amplifiée grâce à un étage "push-pull" qui fonctionne en classe B.



Les caractéristiques de l'amplificateur opérationnel  $\mu A 741$  de "Texas Instruments" par exemple sont accessibles à l'adresse suivante : <https://pdf1.alldatasheet.com/datasheet-pdf/view/96584/TI/UA741.html>

# $\mu$ A741, $\mu$ A741Y GENERAL-PURPOSE OPERATIONAL AMPLIFIERS

SLOS094B – NOVEMBER 1970 – REVISED SEPTEMBER 2000

**electrical characteristics at specified free-air temperature,  $V_{CC\pm} = \pm 15$  V (unless otherwise noted)**

| PARAMETER  | TEST CONDITIONS                               | $T_A^\dagger$ | $\mu$ A741C |          |          | $\mu$ A741I, $\mu$ A741M |          |          | UNIT            |
|--|---|---------------|-------------|----------|----------|--------------------------|----------|----------|-----------------|
|  |   |               | MIN         | TYP      | MAX      | MIN                      | TYP      | MAX      |                 |
| $V_{IO}$ Input offset voltage  | $V_O = 0$                                     | 25°C          |             | 1        | 6        |                          | 1        | 5        | mV              |
|  |   | Full range    |             |          | 7.5      |                          |          | 6        |                 |
| $\Delta V_{IO(adj)}$ Offset voltage adjust range                       | $V_O = 0$                                     | 25°C          |             | $\pm 15$ |          |                          | $\pm 15$ |          | mV              |
| $I_{IO}$ Input offset current  | $V_O = 0$                                     | 25°C          |             | 20       | 200      |                          | 20       | 200      | nA              |
|  |   | Full range    |             |          | 300      |                          |          | 500      |                 |
| $I_{IB}$ Input bias current  | $V_O = 0$                                     | 25°C          |             | 80       | 500      |                          | 80       | 500      | nA              |
|  |   | Full range    |             |          | 800      |                          |          | 1500     |                 |
| $V_{ICR}$ Common-mode input voltage range                              |   | 25°C          | $\pm 12$    | $\pm 13$ |          | $\pm 12$                 | $\pm 13$ |          | V               |
|  |   | Full range    | $\pm 12$    |          |          | $\pm 12$                 |          |          |                 |
| $V_{OM}$ Maximum peak output voltage swing                             | $R_L = 10\text{ k}\Omega$                     | 25°C          | $\pm 12$    | $\pm 14$ |          | $\pm 12$                 | $\pm 14$ |          | V               |
|  | $R_L \geq 10\text{ k}\Omega$                  | Full range    | $\pm 12$    |          |          | $\pm 12$                 |          |          |                 |
|  | $R_L = 2\text{ k}\Omega$                      | 25°C          | $\pm 10$    | $\pm 13$ |          | $\pm 10$                 | $\pm 13$ |          |                 |
|  | $R_L \geq 2\text{ k}\Omega$                   | Full range    | $\pm 10$    |          |          | $\pm 10$                 |          |          |                 |
| $A_{VD}$ Large-signal differential voltage amplification               | $R_L \geq 2\text{ k}\Omega$                   | 25°C          | 20          | 200      |          | 50                       | 200      |          | V/mV            |
|  | $V_O = \pm 10\text{ V}$                       | Full range    | 15          |          |          | 25                       |          |          |                 |
| $r_i$ Input resistance   |   | 25°C          | 0.3         | 2        |          | 0.3                      | 2        |          | M $\Omega$      |
| $r_o$ Output resistance  | $V_O = 0$ , See Note 5                        | 25°C          |             | 75       |          |                          | 75       |          | $\Omega$        |
| $C_i$ Input capacitance  |   | 25°C          |             | 1.4      |          |                          | 1.4      |          | pF              |
| CMRR Common-mode rejection ratio                                       | $V_{IC} = V_{ICRmin}$                         | 25°C          | 70          | 90       |          | 70                       | 90       |          | dB              |
|  |   | Full range    | 70          |          |          | 70                       |          |          |                 |
| $k_{SVS}$ Supply voltage sensitivity ( $\Delta V_{IO}/\Delta V_{CC}$ ) | $V_{CC} = \pm 9\text{ V to } \pm 15\text{ V}$ | 25°C          |             | 30       | 150      |                          | 30       | 150      | $\mu\text{V/V}$ |
|  |   | Full range    |             |          | 150      |                          |          | 150      |                 |
| $I_{OS}$ Short-circuit output current                                  |   | 25°C          |             | $\pm 25$ | $\pm 40$ |                          | $\pm 25$ | $\pm 40$ | mA              |
| $I_{CC}$ Supply current  | $V_O = 0$ , No load                           | 25°C          |             | 1.7      | 2.8      |                          | 1.7      | 2.8      | mA              |
|  |   | Full range    |             |          | 3.3      |                          |          | 3.3      |                 |
| $P_D$ Total power dissipation  | $V_O = 0$ , No load                           | 25°C          |             | 50       | 85       |                          | 50       | 85       | mW              |
|  |   | Full range    |             |          | 100      |                          |          | 100      |                 |

$^\dagger$  All characteristics are measured under open-loop conditions with zero common-mode input voltage unless otherwise specified. Full range for the  $\mu$ A741C is 0°C to 70°C, the  $\mu$ A741I is –40°C to 85°C, and the  $\mu$ A741M is –55°C to 125°C.

NOTE 5: This typical value applies only at frequencies above a few hundred hertz because of the effects of drift and thermal feedback.

**operating characteristics,  $V_{CC\pm} = \pm 15$  V,  $T_A = 25^\circ\text{C}$**

| PARAMETER                  | TEST CONDITIONS  | $\mu$ A741C |     |     | $\mu$ A741I, $\mu$ A741M |     |     | UNIT             |
|----------------------------|--|-------------|-----|-----|--------------------------|-----|-----|------------------|
|                            |  | MIN         | TYP | MAX | MIN                      | TYP | MAX |                  |
| $t_r$ Rise time            | $V_I = 20\text{ mV}$ , $R_L = 2\text{ k}\Omega$ ,  |             | 0.3 |     |                          | 0.3 |     | $\mu\text{s}$    |
| Overshoot factor           | $C_L = 100\text{ pF}$ , See Figure 1   |             | 5%  |     |                          | 5%  |     |                  |
| SR Slew rate at unity gain | $V_I = 10\text{ V}$ , $R_L = 2\text{ k}\Omega$ ,<br>$C_L = 100\text{ pF}$ , See Figure 1 |             | 0.5 |     |                          | 0.5 |     | V/ $\mu\text{s}$ |



## TYPICAL CHARACTERISTICS

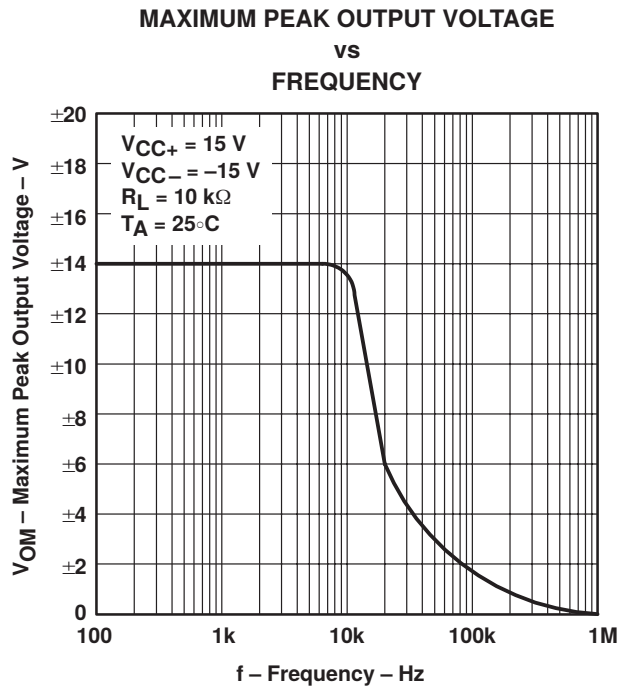


Figure 6

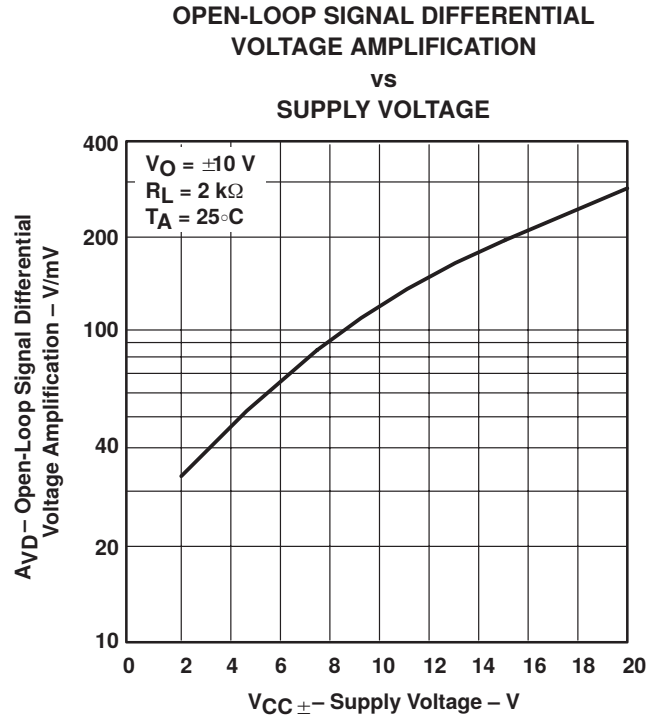
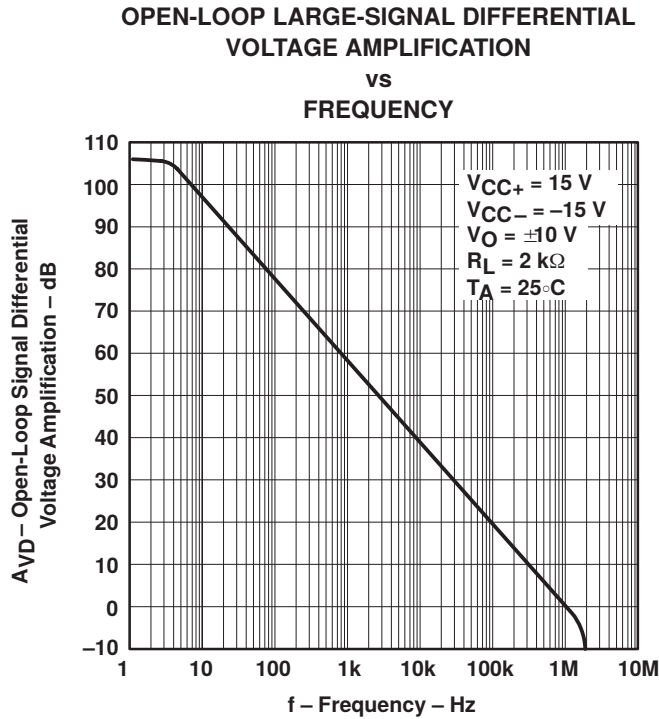


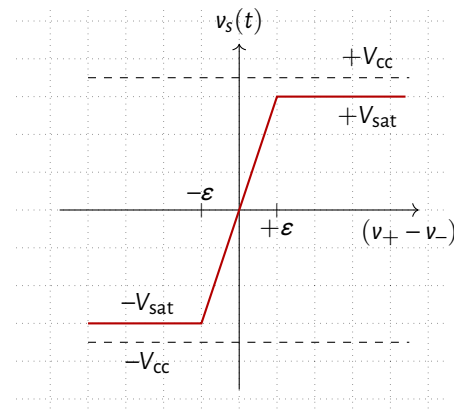
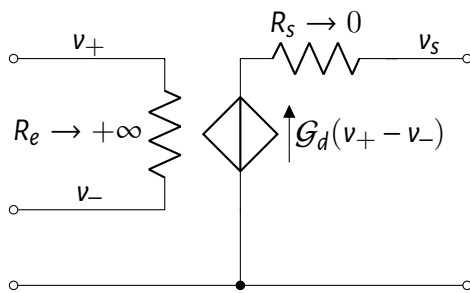
Figure 7



En résumé, nous pouvons dresser la table suivante

| Paramètre       | Désignation                      | $\mu A 741$                   |
|-----------------|----------------------------------|-------------------------------|
| $R_e$           | Résistance d'entrée              | $2 \text{ M}\Omega$           |
| $i_e$           | Courant d'entrée                 | $80 \text{ nA}$               |
| $R_s$           | Résistance de sortie             | $75 \Omega$                   |
| $\mathcal{G}_d$ | Gain en mode différentiel        | $200000$                      |
| CMR             | Taux de réjection du mode commun | $90 \text{ dB}$               |
| SR              | Slew-Rate (gain unitaire)        | $0.5 \text{ V}/\mu\text{sec}$ |
| Gain-BP         | Fréquence (gain unitaire)        | $1 \text{ Mhz}$               |

Le modèle équivalent simplifié résultant de l'amplificateur différentiel est donné par ce circuit



Les tensions de saturation  $\pm V_{\text{sat}}$  sont légèrement inférieures aux tensions d'alimentation  $\pm V_{\text{cc}}$ .

### Amplificateur & contre-réaction

La contre-réaction de la sortie sur l'entrée inverseuse rend le gain en tension de l'AOp indépendant des caractéristiques de l'amplificateur. Ce dernier ne dépend que du gain de la boucle de rétroaction.

### Amplificateur idéal

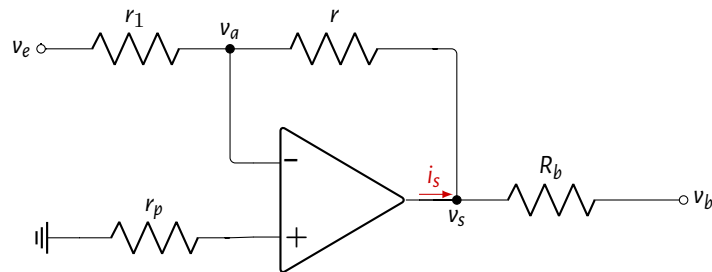
Un amplificateur idéal en régime linéaire est caractérisé par :

$$\begin{cases} v_+ = v_- \\ i_+ = i_- = 0. \end{cases}$$

## 3 ALI en régime linéaire

Avant de se pencher sur l'analyse d'un circuit, il faut savoir appliquer correctement le théorème de MILLMAN. L'application par exemple de ce théorème à la sortie d'un AO ne donnera aucune information utile en général car le courant de sortie lui-même est inconnu à priori.

## AO &amp; théorème de MILLMAN



**Potentiel  $v_a$**  On peut appliquer directement le théorème de MILLMAN  $\rightarrow$

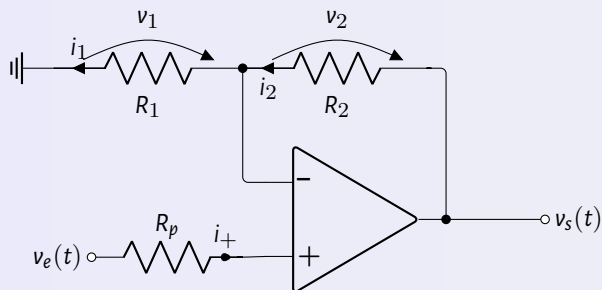
$$v_a = \frac{\frac{v_e}{r_1} + \frac{v_s}{r}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r}}$$

**Potentiel  $v_s$**  Il faut tenir compte du courant de sortie  $i_s$   $\rightarrow$

$$v_s = \frac{\frac{v_a}{r} + \frac{v_b}{R_b} + i_s}{\frac{1}{r} + \frac{1}{R_b}}$$

## Montage #1

## Amplificateur non inverseur



$$v_+ = v_e(t)$$

$$v_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s(t)$$

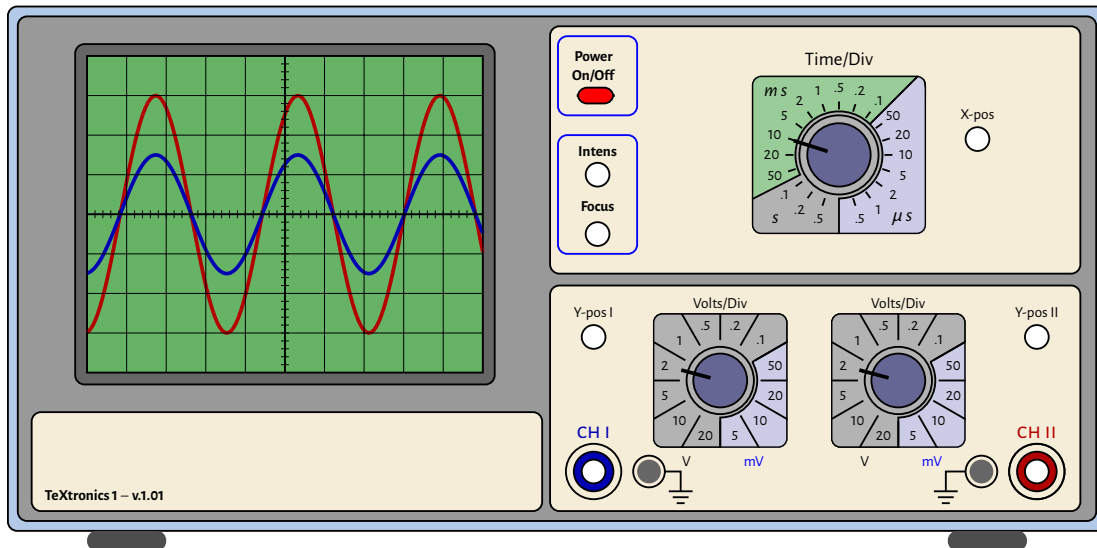
AO idéal en régime linéaire  $\rightarrow v_+ = v_-$ . La tension de sortie  $v_s$  s'écrit alors :

$$v_s(t) = \frac{R_1 + R_2}{R_1} v_e(t) \quad (9)$$

## ACTIVITÉ

Pour une tension d'alimentation symétrique de  $\pm 10$  volts, les courbes d'évolution de l'entrée  $v_e$  et de la sortie  $v_s$  sont affichées sur l'écran de l'oscilloscope<sup>1</sup> de la page qui suit.

1. La tension  $v_e$  (resp.  $v_s$ ) est connectée au canal CH I (resp. CH II).



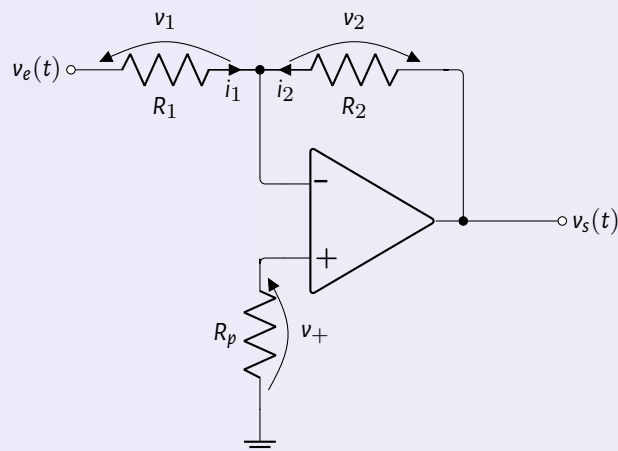
Déterminer les expressions des signaux  $v_e$  et  $v_s$ . En déduire le gain d'amplification qu'on note  $g = \frac{V_{s_{\max}}}{V_{e_{\max}}}$ .

$$v_e(t) = V_{e_{\max}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) \quad \& \quad v_s(t) = V_{s_{\max}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} V_{e_{\max}} = 3 \text{ volts} \\ V_{s_{\max}} = 6 \text{ volts} \\ T = 36 \text{ msec} \\ \varphi_0 \approx 1 \text{ rad} \end{cases}$$

$$g = 2$$

### Montage #2

### Amplificateur inverseur



$$v_+ = 0$$

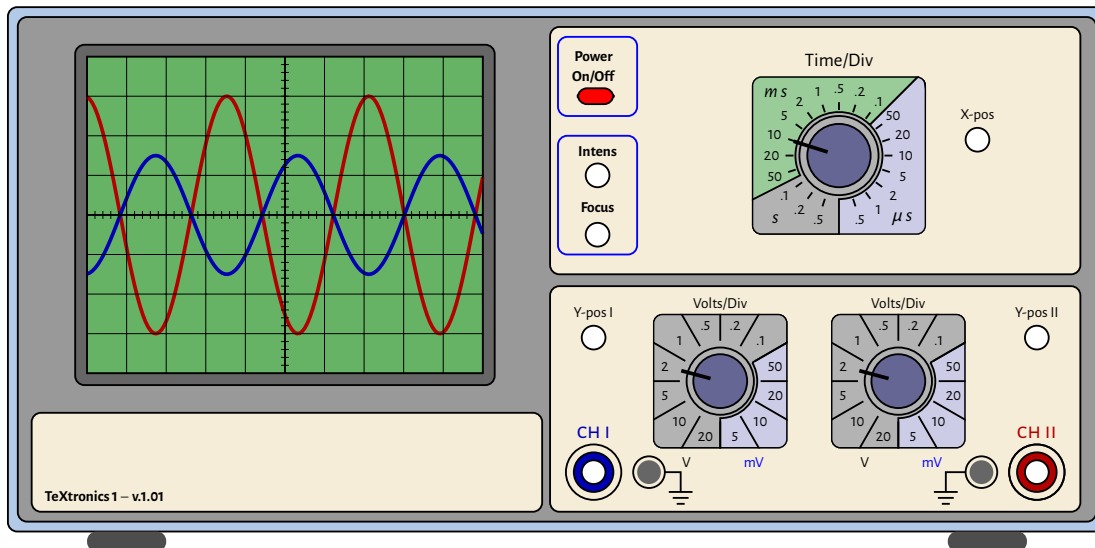
$$v_- = \frac{\frac{v_e}{R_1} + \frac{v_s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

AO idéal en régime linéaire  $\rightarrow v_+ = v_-$ . La tension de sortie  $v_s$  s'écrit alors :

$$v_s(t) = -\frac{R_2}{R_1} v_e(t) \quad (10)$$

### ACTIVITÉ

Pour une tension d'alimentation symétrique de  $\pm 10$  volts, les courbes d'évolution de l'entrée  $v_e$  et de la sortie  $v_s$  sont affichées sur l'écran de l'oscilloscope<sup>2</sup> suivant.



Déterminer les expressions des signaux  $v_e$  et  $v_s$ . En déduire le gain d'amplification qu'on note  $g = \frac{V_{s\max}}{V_{e\max}}$ .

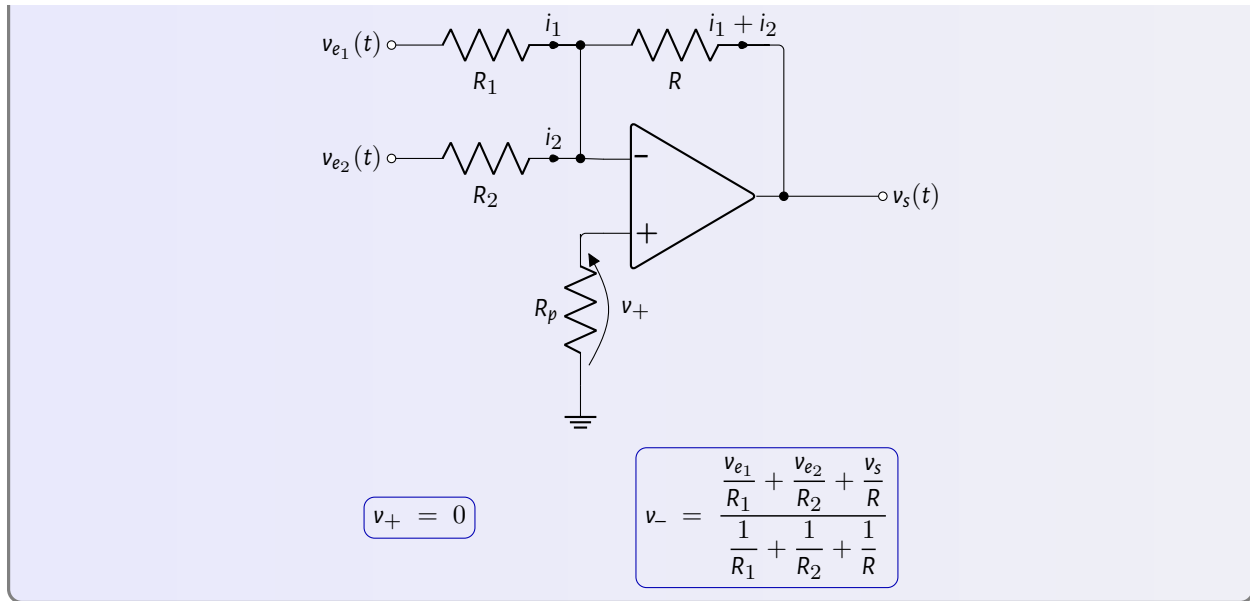
$$v_e(t) = V_{e\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) \quad \& \quad v_s(t) = V_{s\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0 - \pi\right) \quad \text{avec : } \begin{cases} V_{e\max} = 3 \text{ volts} \\ V_{s\max} = 6 \text{ volts} \\ T = 36 \text{ msec} \\ \varphi_0 \approx 1 \text{ rad} \end{cases}$$

$$g = 2$$

### Montage #3

### Amplificateur sommateur inverseur

2. La tension  $v_e$  (resp.  $v_s$ ) est connectée au canal CH I (resp. CH II).

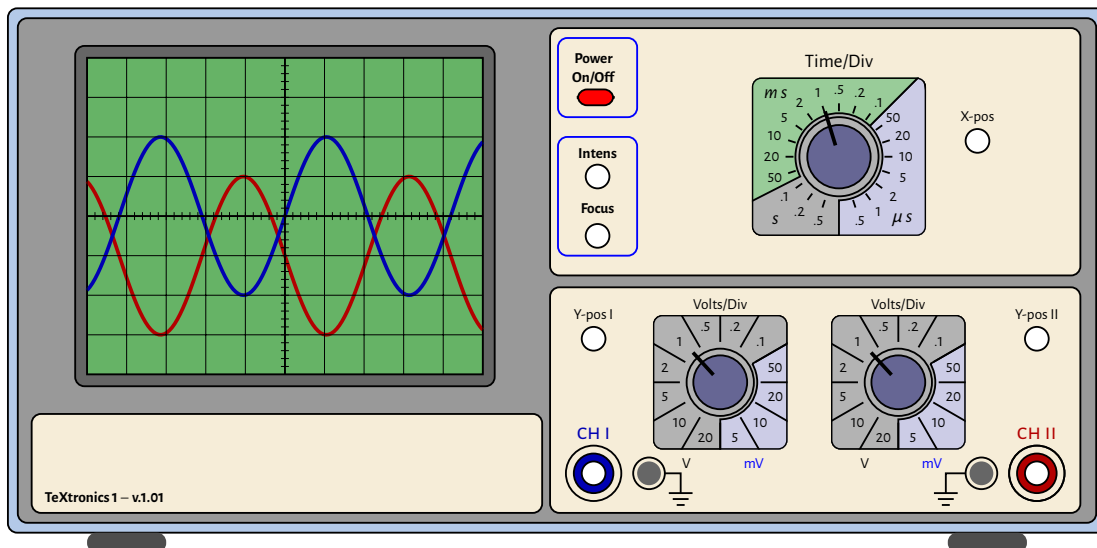


AO idéal en régime linéaire  $\rightarrow v_+ = v_-$ . La tension de sortie  $v_s$  s'écrit alors :

$$v_s(t) = -R \left( \frac{1}{R_1} v_{e1}(t) + \frac{1}{R_2} v_{e2}(t) \right) \quad (11)$$

### ACTIVITÉ

Soit  $v_{e1} = 1$  V. Pour une tension d'alimentation symétrique de  $\pm 10$  volts, les courbes d'évolution de l'entrée  $v_{e2}$  et de la sortie  $v_s$  sont affichées sur l'écran de l'oscilloscope <sup>3</sup> ci-dessous.



3. La tension  $v_{e2}$  (resp.  $v_s$ ) est connectée au canal CH I (resp. CH II).



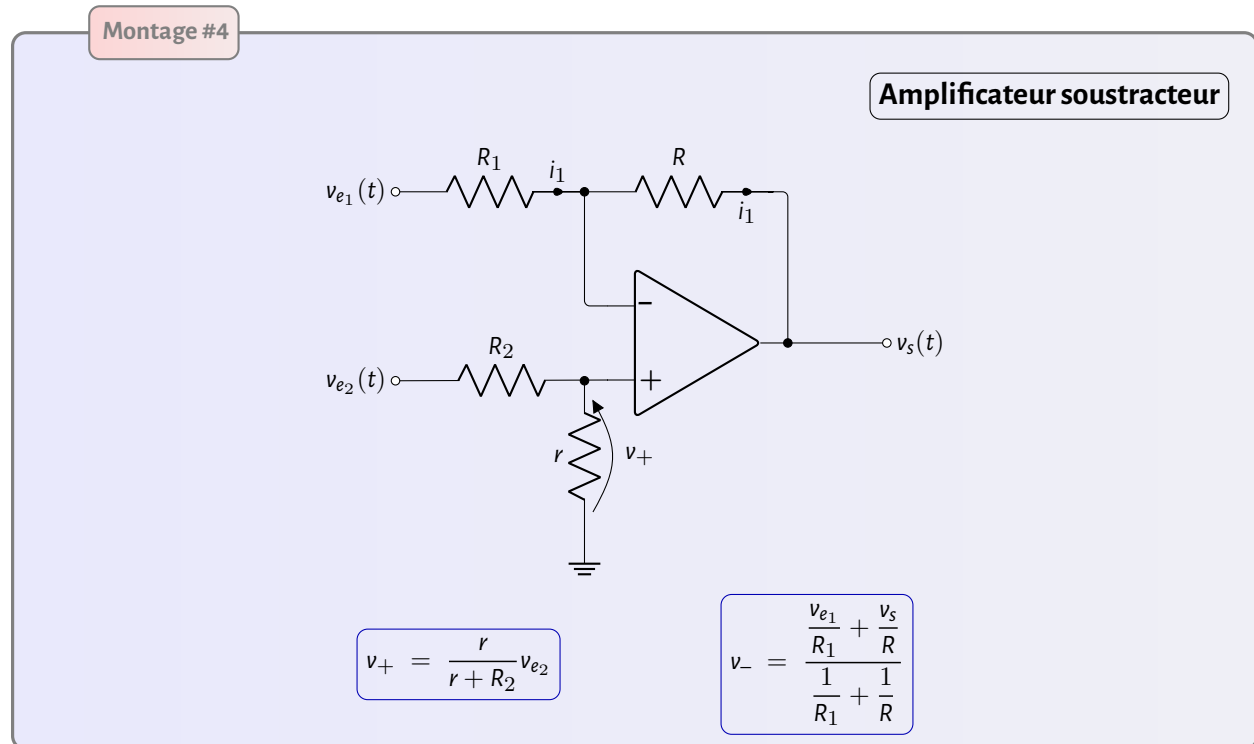


Déterminer les expressions des signaux  $v_{e2}$  et  $v_s$ . En déduire un jeu de résistances qui permet d'avoir la sortie  $v_s$ .

$$v_e(t) = V_{e2\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) \quad \& \quad v_s(t) = V_{\text{offset}} - V_{s\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} V_{e2\max} = 2 \text{ volts} \\ V_{\text{offset}} = -1 \text{ volt} \\ V_{s\max} = 2 \text{ volts} \\ T = 4.2 \text{ msec} \\ \varphi_0 = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

Si  $R_1 = R_2 = R$ , la sortie  $v_s$  devient simplement

$$v_s(t) = -(v_{e1} + v_{e2})$$



AO idéal en régime linéaire  $\rightarrow v_+ = v_-$ . La tension de sortie  $v_s$  s'écrit alors :

$$v_s(t) = \frac{R_1 + R}{R_1} \left( \frac{r}{r + R_2} v_{e2}(t) - \frac{R}{R + R_1} v_{e1}(t) \right) \quad (12)$$

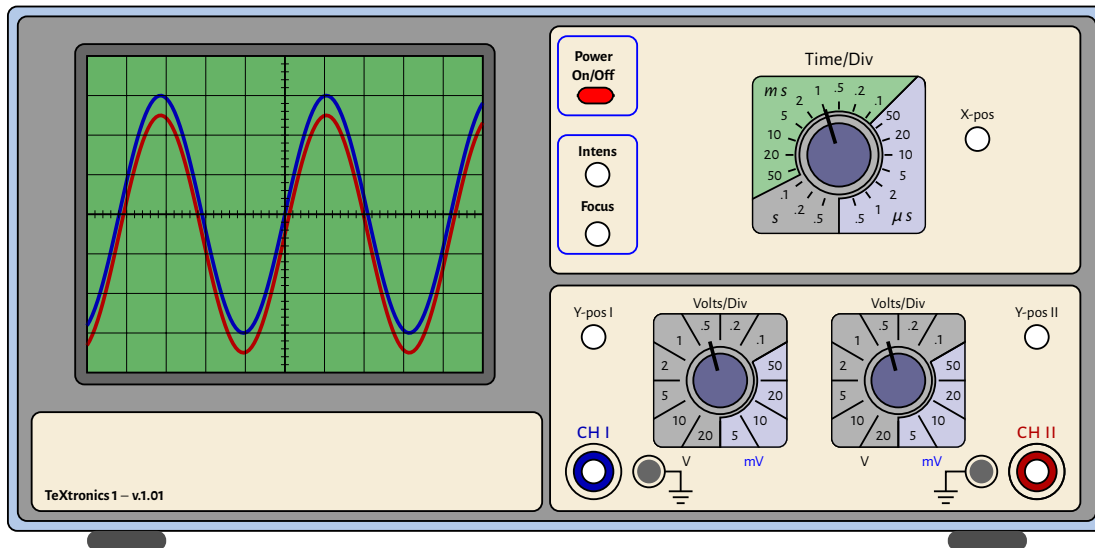
Si on prend  $r = R_1 = R_2 = R$ , la sortie se simplifie à la forme suivante

$$v_s(t) = v_{e2}(t) - v_{e1}(t) \quad (13)$$

### ACTIVITÉ

Soit  $v_{e1} = 0.25 \text{ V}$ . Pour une tension d'alimentation symétrique de  $\pm 10 \text{ volts}$ , les courbes d'évolution de l'entrée  $v_{e2}$  et de la sortie  $v_s$  sont affichées sur l'écran de l'oscilloscope <sup>4</sup> ci-dessous.

4. La tension  $v_{e2}$  (resp.  $v_s$ ) est connectée au canal CH I (resp. CH II).

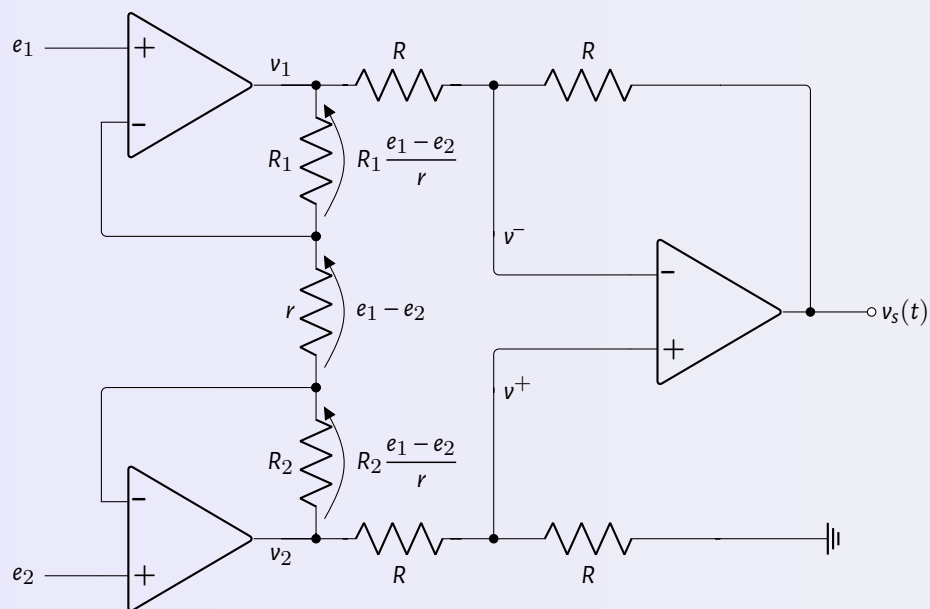


Déterminer les expressions des signaux  $v_{e2}$  et  $v_s$ .

$$v_e(t) = V_{e2\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) \text{ \& \; } v_s(t) = V_{\text{offset}} + V_{s\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) \text{ avec : } \begin{cases} V_{e2\max} = 1.5 \text{ volts} \\ V_{\text{offset}} = -0.25 \text{ volt} \\ V_{s\max} = 1.5 \text{ volts} \\ T = 4.2 \text{ msec} \\ \varphi_0 = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

#### Montage #5

#### Amplificateur différentiel d'instrumentation



$$v^+ = \frac{1}{2}v_2$$

$$v^- = \frac{1}{2}(v_1 + v_s)$$

$$v_1 = e_1 + \frac{R_1}{r}(e_1 - e_2)$$

$$v_2 = e_2 - \frac{R_2}{r}(e_1 - e_2)$$

La relation  $v^+ = v^-$  conduit à

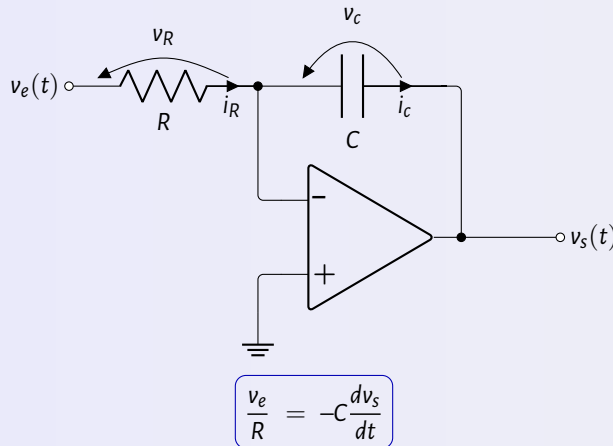
$$v_s(t) = v_2 - v_1 \quad (14)$$

$$= \underbrace{e_2 - \frac{R_2}{r}(e_1 - e_2)}_{v_2} - \underbrace{\left( e_1 + \frac{R_1}{r}(e_1 - e_2) \right)}_{v_1} \quad (15)$$

$$= \left( 1 + \frac{R_1 + R_2}{r} \right) (e_2 - e_1) \quad (16)$$

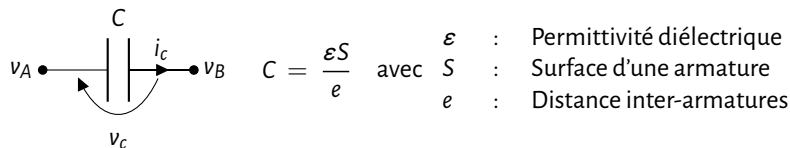
#### Montage #6

#### Amplificateur intégrateur<sup>a</sup>



a. En pratique, on insère une résistance 10R en // à C.

On commence d'abord par exposer l'essentiel sur le condensateur plan.



Physiquement, un condensateur plan est la mise en parallèle de deux surfaces planes, appelées armatures séparées par un diélectrique. Quand il est soumis à une différence de potentiel (ddp)  $v_C = u_{AB} = v_A - v_B$  positive non nulle, une charge positive que l'on note  $q_A$  apparaît au niveau de l'armature liée au potentiel  $v_A$  et une charge négative notée  $q_B$  apparaît au niveau de l'autre armature tel que  $q_A = -q_B$ . Si on change la valeur de la tension  $v_C = v_A - v_B$ , la quantité de charge

$q = q_A = -q_B$  varie linéairement. On déduit expérimentalement la relation :

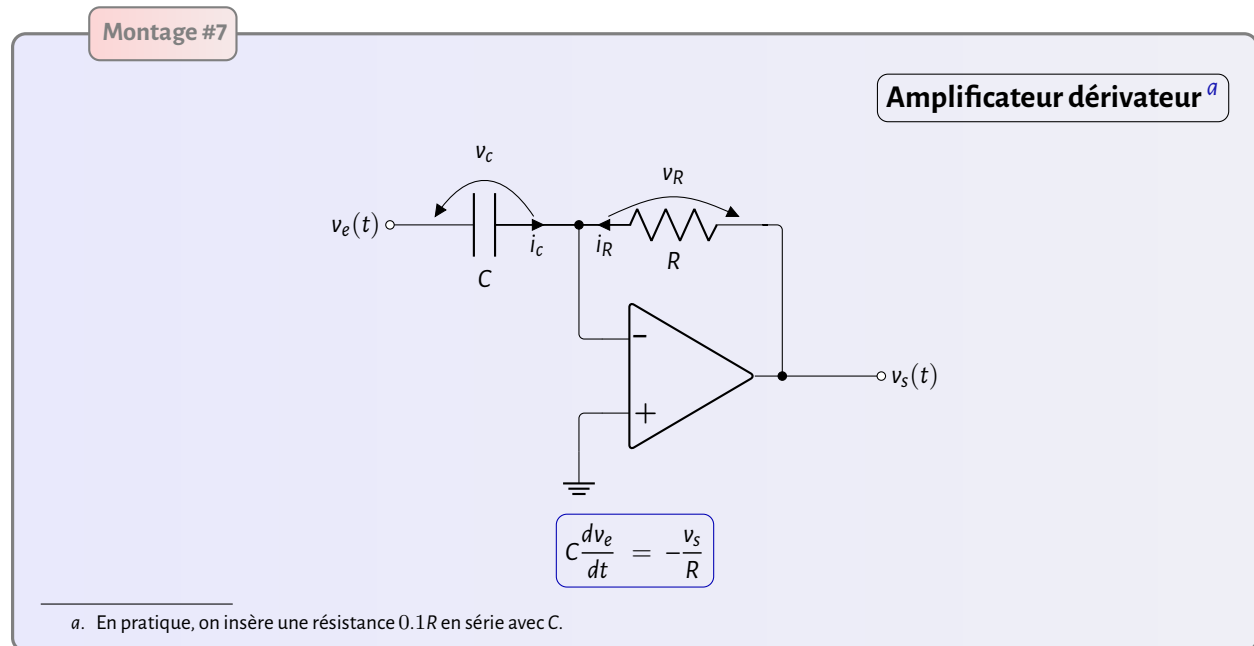
$$\frac{dq}{dv_c} = C.$$

La constante  $C$  désigne la capacité du condensateur. Elle se mesure en FARAD, abrégée en F. Le courant  $i_c(t)$  parcourant le condensateur est la dérivée de la charge  $q$ , i.e.  $i_c(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ , on montre alors que :

$$i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}.$$

Revenons à présent sur le montage de l'amplificateur, on montre finalement que

$$v_s(t) = -\frac{1}{RC} \int v_e(\zeta) d\zeta \quad (17)$$

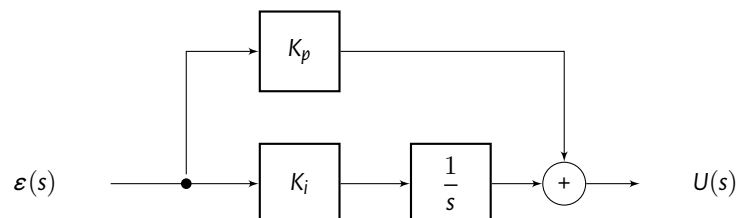


Il en résulte que

$$v_s(t) = -RC \frac{dv_e(t)}{dt} \quad (18)$$

#### Exercice N° 1:

Proposer une structure à base d'amplificateurs pour réaliser le correcteur PI suivant

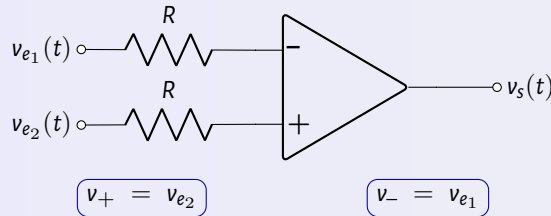


## 4 ALI en régime non linéaire

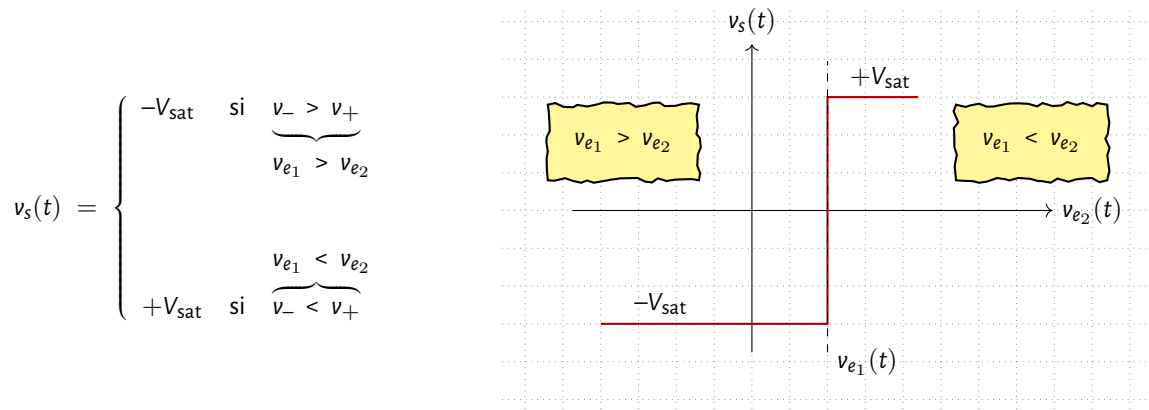
Un ALI idéal avec une réaction négative fonctionne en régime linéaire. Les deux potentiels  $v_+$  et  $v_-$  sont alors égaux. Si on l'utilise en boucle ouverte ou avec une réaction positive, il fonctionne en régime de saturation. Les potentiels des entrées peuvent être différents.

Montage #8

Comparateur simple

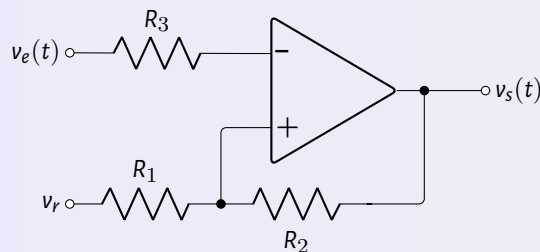


Il n'y a pas une contre-réaction. L'amplificateur fonctionne alors en régime de saturation. La sortie  $v_s$  prend uniquement les deux valeurs de saturation  $\pm V_{sat}$ .



Montage #9

Comparateur à hystérésis - Trigger de Schmitt



$$v_+ = \frac{\frac{v_r}{R_1} + \frac{v_s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

$$v_- = v_e$$

La contre-réaction est positive, la sortie de l'amplificateur ne peut prendre que les deux valeurs limites de saturation  $\pm V_{\text{sat}}$ . L'expression du potentiel de la borne positive est

$$v_+ = \frac{R_2 v_r + R_1 v_s}{R_1 + R_2} \quad (19)$$

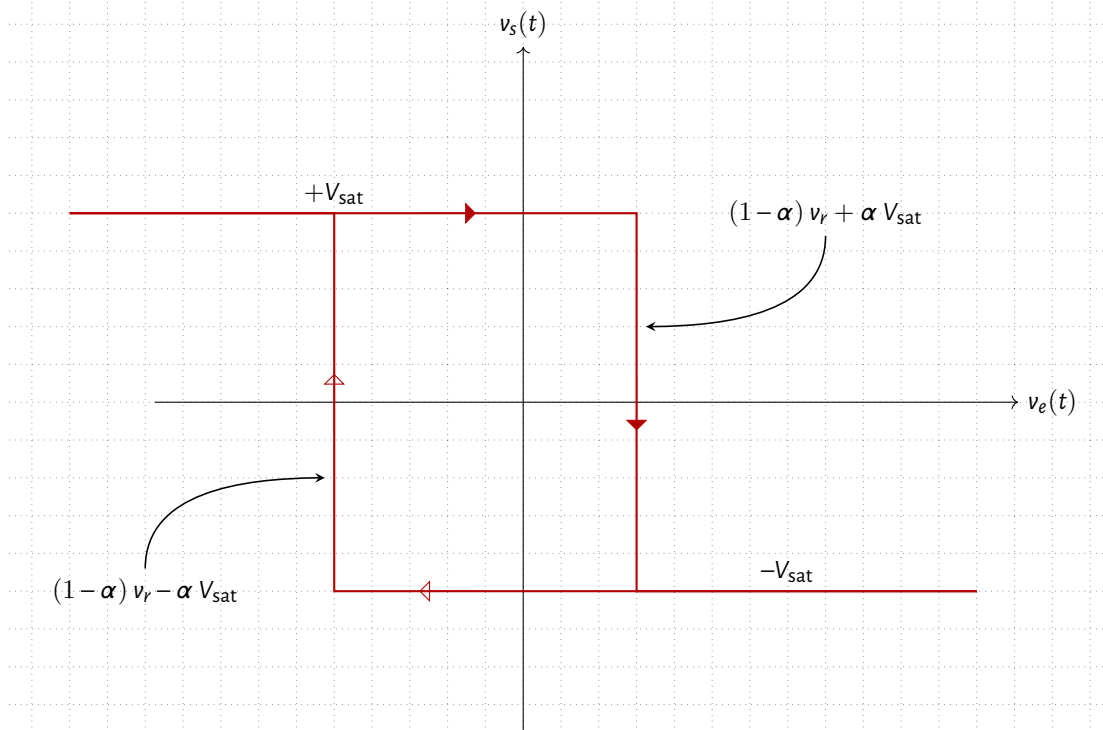
Soit  $\alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ . Eq. (19) se transforme ainsi en

$$v_+ = (1 - \alpha) v_r + \alpha v_s$$

ou encore

$$v_+ = (1 - \alpha) v_r \pm \alpha V_{\text{sat}}$$

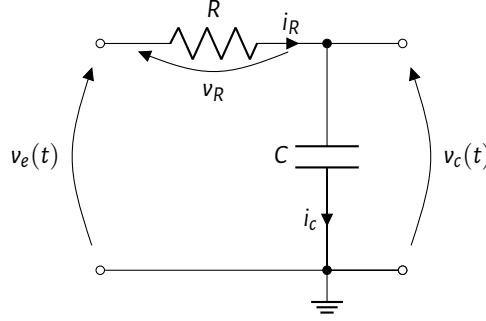
Si la tension  $v_e$  est très négative, le potentiel  $v_+$  est supérieur à  $v_-$ . La sortie est à  $+V_{\text{sat}}$ . La valeur de  $v_+$  est  $(1 - \alpha) v_r + \alpha V_{\text{sat}}$ . Quand la tension d'entrée dépasse cette valeur,  $v_s$  passe à  $-V_{\text{sat}}$  et  $v_+$  devient égal à  $(1 - \alpha) v_r - \alpha V_{\text{sat}}$ . Le circuit présente deux seuils de basculements.



## 5 Générateur de fonctions

Pour un circuit à base des éléments inductifs ou capacitifs et soumis à des entrées constantes, les courants et tensions mettent un certain temps pour s'établir. C'est le régime transitoire.

On considère dans la suite une mise en cascade d'une résistance  $R$  et d'une capacité  $C$ .



Ce circuit est le siège d'une excitation continue  $v_e(t)$  d'amplitude  $E_{\max}$  non nulle. On se propose d'étudier dans la suite l'effet de cette entrée sur la sortie c.-à-d. sur la tension capacitive que l'on note  $v_c(t)$ . On montre que le circuit est régi par l'équation différentielle.

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_e(t) \quad (20)$$

Eq. 20 est dite équation différentielle de premier ordre à coefficients constants. Le produit  $RC$  a la dimension d'une seconde ( $[RC] = \text{sec}$ ). On peut, ainsi, poser  $\tau = RC$ .

La tension  $v_c$  est la superposition de deux solutions : une dite homogène et l'autre dite particulière.

### Solution homogène

On cherche dans ce paragraphe à déterminer l'expression analytique du signal de sortie  $v_c(t)$ , noté  $v_h(t)$ , sous l'effet de condition initiale non nulle c.-à-d.  $v_c(t = t_0) = v_0$ , en supposant que  $v_e(t) = 0$ . Ainsi, Eq. 20 se transforme en :

$$\tau \frac{dv_h(t)}{dt} + v_h(t) = 0, \quad (21)$$

soit encore :

$$\frac{dv_h(t)}{v_h(t)} = -\frac{dt}{\tau}. \quad (22)$$

Intégrons les deux membres de l'Eq. 22 :

$$\int_{t_0}^t \frac{dv_h(\zeta)}{v_h(\zeta)} d\zeta = -\int_{t_0}^t \frac{d\zeta}{\tau} \implies \ln |v_h(t)| - \ln |v_h(t_0)| = -\frac{t - t_0}{\tau}. \quad (23)$$

Afin de se débarrasser de la fonction  $\ln$ , il suffit d'appliquer sa fonction réciproque, le résultat est donné par Eq. 24 :

$$v_h(t) = v_h(t_0) e^{-\frac{t - t_0}{\tau}}. \quad (24)$$

On considère la condition initiale suivante :

$$v_h(t = t_0) = v_0.$$

La solution qui décrit le comportement du condensateur du montage en régime libre, sans l'action de la source  $v_e$  est donc :

$$v_h(t) = v_0 e^{-\frac{t - t_0}{\tau}} \quad (25)$$

**Solution particulière**

Pour déterminer cette solution, on utilise la méthode de variation de la constante. La solution déjà trouvée dans Eq. 25 est de la forme

$$\mathcal{K} e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}.$$

On suppose ici que la constante  $\mathcal{K}$  est variable au cours du temps

$$v_p(t) = \mathcal{K}(t) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}.$$

La quantité  $v_p(t)$  vérifie Eq. 20, cela implique que :

$$\tau \dot{v}_p(t) + v_p(t) = v_e(t) \quad (26)$$

Soit donc,

$$\tau \left( \dot{\mathcal{K}}(t) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} - \frac{1}{\tau} \mathcal{K}(t) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right) + \mathcal{K}(t) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} = v_e(t) \quad (27)$$

L'expression de la fonction  $\mathcal{K}(t)$  est donnée par Eq. 28 :

$$\mathcal{K}(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t v_e(\zeta) e^{\frac{\zeta-t_0}{\tau}} d\zeta \quad (28)$$

Sachant que  $v_e(t) = E_{\max} \forall t \geq 0$ , Eq. 28 devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t) &= \frac{E_{\max}}{\tau} \int_{t_0}^t e^{\frac{\zeta-t_0}{\tau}} d\zeta \\ &= E_{\max} \left( e^{\frac{t-t_0}{\tau}} - 1 \right). \end{aligned}$$

La solution particulière est donc :

$$v_p(t) = E_{\max} \left( 1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right) \quad (29)$$

**Solution générale**

La solution la plus générale est donc la somme de deux solutions : Eq. 25 et Eq. 29, et est donnée par :

$$\begin{aligned} v_c(t) &= v_h(t) + v_p(t) \\ &= v_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + E_{\max} \left( 1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

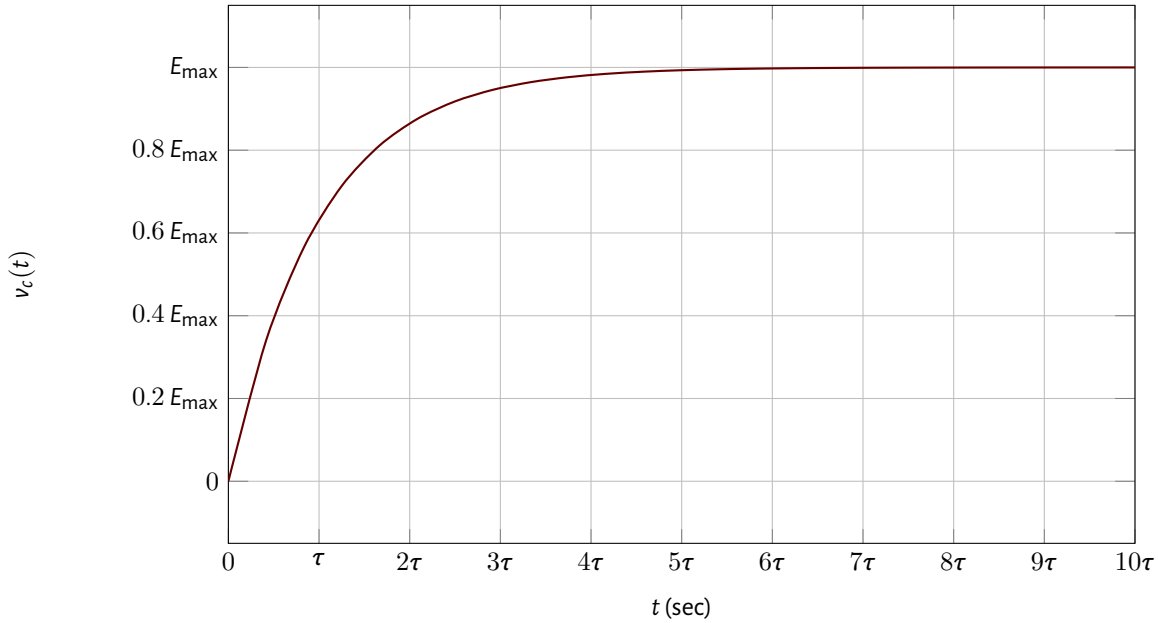


### Cas de la charge

Considérons pour l'instant le cas simplifié, où  $v_0 = 0$  et  $t_0 = 0$ . Eq. 30 devient comme suit :

$$v_c(t) = E_{\max} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (31)$$

La tension capacitive atteint 63.7 % de sa valeur finale au bout d'un temps égal à  $\tau$  d'où l'appellation de  $\tau$  par constante de temps, caractéristique du système.



### Cas de la décharge

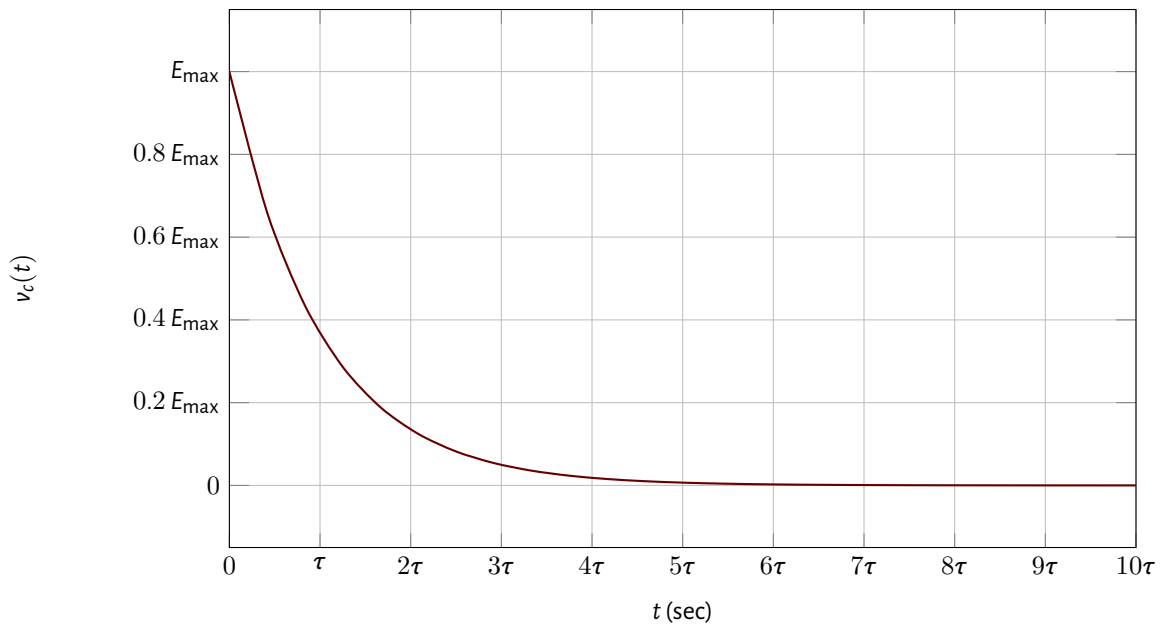
On considère l'expression de la tension de sortie  $v_c(t)$  sous l'effet de sa condition initiale non nulle. On s'intéresse uniquement à la solution homogène. La tension capacitive est donc donnée comme suit :

$$v_c(t) = v_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad (32)$$

Considérons pour l'instant le cas simplifié, où  $v_0 = E_{\max}$  et  $t_0 = 0$ . Eq. 32 se simplifie en :

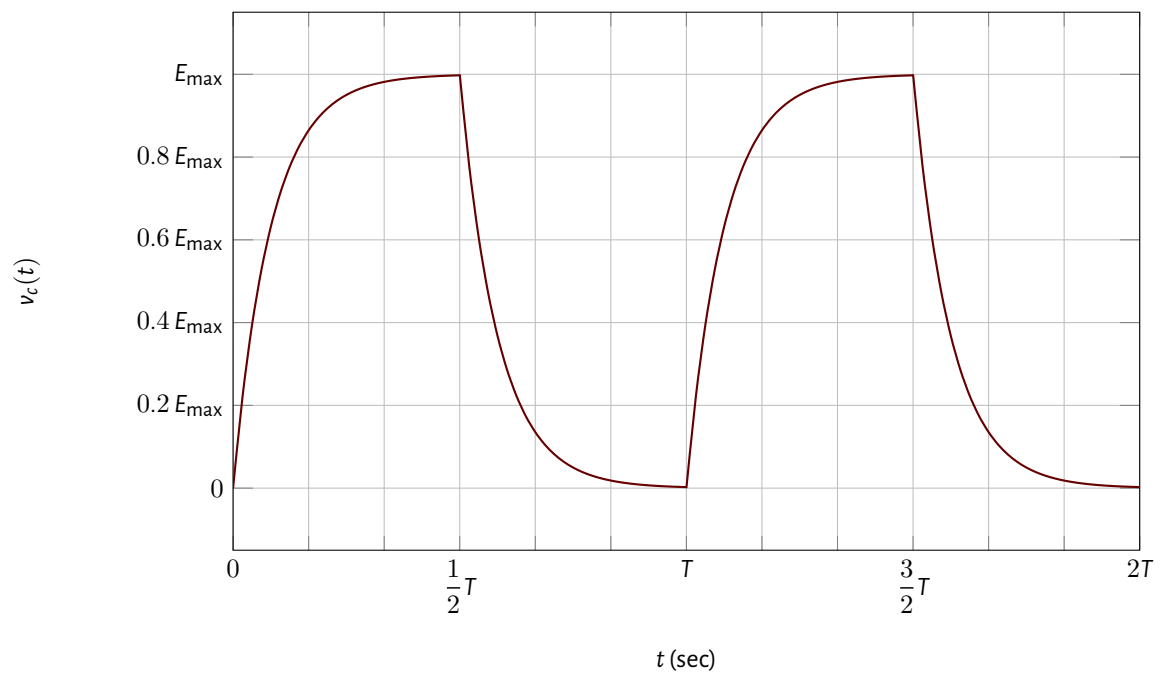
$$v_c(t) = E_{\max} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (33)$$

La courbe de décharge est donnée par la figure suivante.

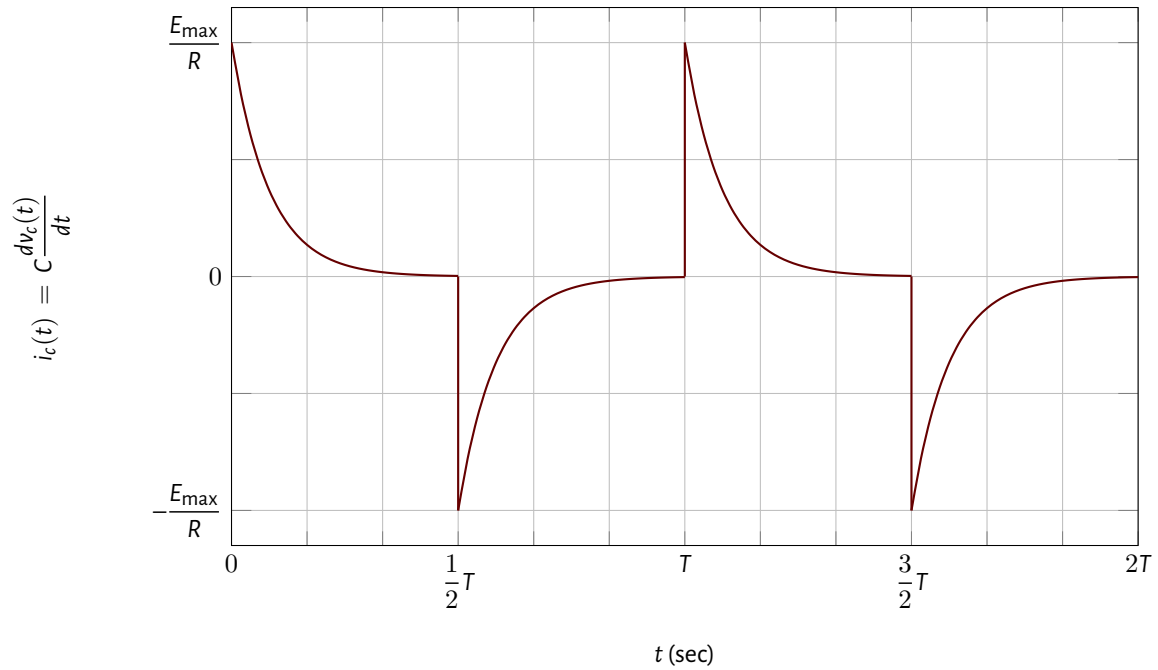


### Charge & décharge

Si on applique à l'entrée du circuit RC un signal carré de période  $T$  suffisamment grande devant la constante  $\tau$ , la courbe de charge et de décharge devient alors cyclique.



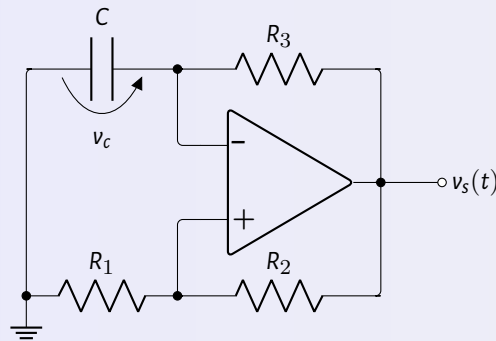
Le graphe d'évolution du courant  $i_c(t)$  est donné par la courbe suivante.



Un multivibrateur astable produit un signal carré à sa sortie. Il ne nécessite aucune entrée externe.

#### Montage #10

#### Multivibrateur astable



$$v_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s$$

$$v_- = v_c \quad (\text{Tension capacitive})$$

On suppose que le retour positif emporte sur la contre-réaction négative. L'AO fonctionne alors en régime de saturation.

$$v_s(t) = \begin{cases} +V_{\text{sat}} & \text{si } v_+ > v_- = v_c \\ -V_{\text{sat}} & \text{si } v_+ < v_- = v_c \end{cases}$$

Soient  $\alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$  et  $\tau = R_3 C$ . Le problème se ramène à la formulation suivante

1<sup>e</sup> cas : (C se charge à travers  $R_3$ )

$$\text{si } v_s = +V_{\text{sat}} \Rightarrow v_+ = +\alpha V_{\text{sat}} \Rightarrow v_c = v_{i1} e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} + V_{\text{sat}} \left( 1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \right)$$

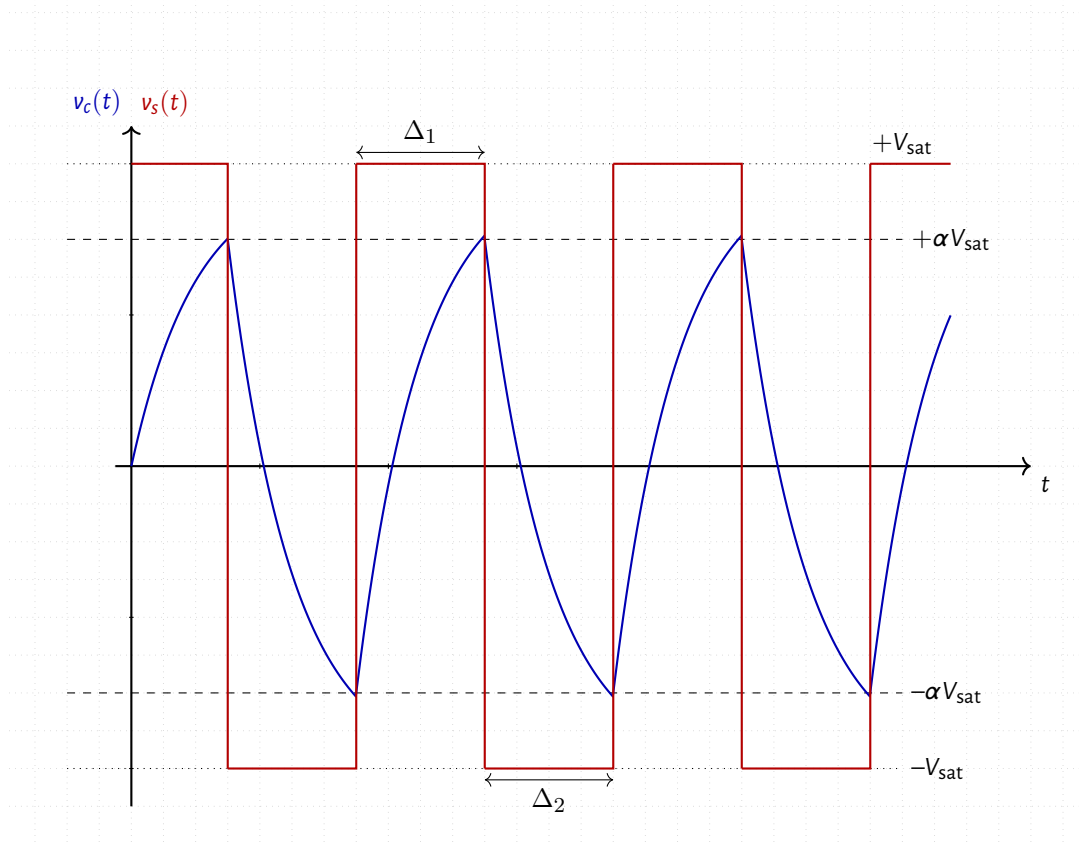
2<sup>d</sup> cas : (C se décharge à travers  $R_3$ )

$$\text{si } v_s = -V_{\text{sat}} \Rightarrow v_+ = -\alpha V_{\text{sat}} \Rightarrow v_c = v_{i2} e^{-\frac{t-t_2}{\tau}} - V_{\text{sat}} \left( 1 - e^{-\frac{t-t_2}{\tau}} \right)$$

### Exercice N° 2 :

1. Tracer, sur la même figure, les allures des signaux  $v_c(t)$  et  $v_s(t)$  ;
2. Déterminer les durées  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ . En déduire la valeur de la période  $T$ .

① On suppose que la tension de sortie à l'origine du temps  $t = 0$ . La borne non inverseuse est portée alors au potentiel  $+\alpha V_{\text{sat}}$ . À l'origine du temps, le condensateur initialement déchargé se met à se charger jusqu'à la valeur  $+\alpha V_{\text{sat}}$ . À ce stade, l'amplificateur voit sa borne inverseuse portée à un potentiel supérieur à la borne positive. La sortie  $v_s$  change d'état en conséquence. Le condensateur se décharge ainsi à travers la résistance  $R_3$  jusqu'à atteindre  $-\alpha V_{\text{sat}}$ . La tension  $v_s$  bascule de nouveau vers  $+V_{\text{sat}}$ . Les courbes de la tension capacitive et de la tension de sortie sont présentées par la figure ci-dessous.



② Durant la charge du condensateur C, la tension à ses bornes s'écrit sous la forme suivante<sup>5</sup> :

$$v_c(t) = -\alpha V_{\text{sat}} e^{-\frac{t}{\tau}} + V_{\text{sat}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

On peut établir la relation

$$+\alpha V_{\text{sat}} = -\alpha V_{\text{sat}} e^{-\frac{\Delta_1}{\tau}} + V_{\text{sat}} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta_1}{\tau}} \right)$$

Soit encore

$$\alpha = -\alpha e^{-\frac{\Delta_1}{\tau}} + \left( 1 - e^{-\frac{\Delta_1}{\tau}} \right)$$

$$1 - \alpha = e^{-\frac{\Delta_1}{\tau}} (1 + \alpha)$$

Il en résulte que

$$\Delta_1 = \tau \ln \left( \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right).$$

De même, on démontre que

$$\Delta_2 = \tau \ln \left( \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right).$$

En effet, durant la décharge du condensateur, la tension  $v_c$  obéit à l'expression

$$v_c(t) = \alpha V_{\text{sat}} e^{-\frac{t}{\tau}} - V_{\text{sat}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Pour  $t = \Delta_2$ ,

$$-\alpha V_{\text{sat}} = \alpha V_{\text{sat}} e^{-\frac{\Delta_2}{\tau}} - V_{\text{sat}} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta_2}{\tau}} \right)$$

Après simplification par  $V_{\text{sat}}$ , on obtient

$$-\alpha = \alpha e^{-\frac{\Delta_2}{\tau}} - \left( 1 - e^{-\frac{\Delta_2}{\tau}} \right)$$

$$1 - \alpha = e^{-\frac{\Delta_2}{\tau}} (1 + \alpha)$$

D'où

$$\Delta_2 = \tau \ln \left( \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)$$

La période d'oscillation de la sortie est égale la somme de  $\Delta_1$  et de  $\Delta_2$

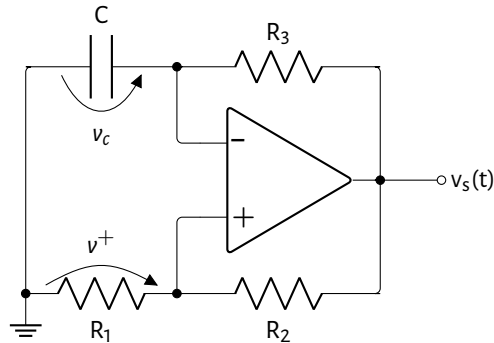
$$\begin{aligned} T &= \Delta_1 + \Delta_2 \\ &= 2\tau \ln \left( \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right), \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ &= 2\tau \ln \left( \frac{2R_1 + R_2}{R_2} \right) \\ &= 2\tau \ln \left( 1 + 2\frac{R_1}{R_2} \right) \end{aligned} \tag{34}$$

---

5. Moyennant un changement d'échelle

**Exercice N° 3 :**

On se propose d'étudier le fonctionnement d'un multivibrateur astable, donné par le schéma suivant :



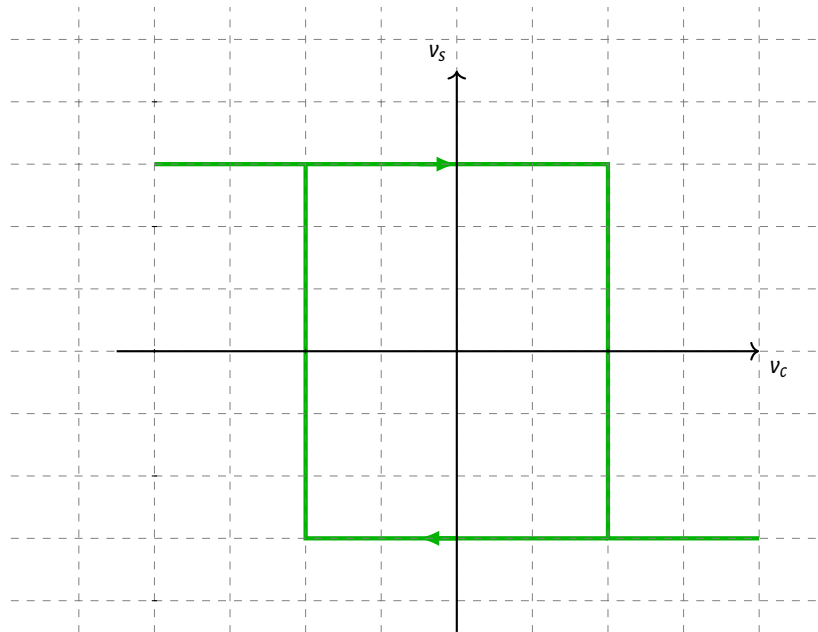
1. Le rebouclage sur l'entrée non inverseuse est prépondérant. Identifier le régime de fonctionnement.
2. L'amplificateur est alimenté par une source symétrique de  $\pm V_{CC}$ . Les tensions de saturation sont  $\pm V_{sat}$ . Donner les valeurs possibles ainsi que la forme d'onde de la tension de sortie  $v_s(t)$ .
3. Donner les niveaux de tension pris par le potentiel  $v^+$ , en posant  $\alpha = R_1/(R_1+R_2)$ .
4. Tracer l'évolution de  $v_s$  en fonction de  $v_c$ .  $v_c$  dénote ici la tension aux bornes du condensateur.
5. Déterminer l'expression de la période  $T$  du signal de sortie  $v_s(t)$ .
6. On pose  $R_1=R_2=10\text{k}\Omega$ ,  $R=47\text{k}\Omega$ ,  $C=10\mu\text{F}$  et  $\pm V_{sat}=\pm 15\text{V}$ . Calculer  $T$ , puis tracer les signaux  $v_c$  et  $v_s$ . (Arrondir le résultat à l'unité près.)

① La contre réaction positive est prépondérante. Il s'agit d'un régime de saturation.

②  $V_s=\pm V_{sat}$ . Le signal de sortie est carré.

③ 
$$v^+ = \pm \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} \implies v^+ = \pm \alpha V_{sat}$$

④ Traçage du graphique de  $v_s$  en fonction de  $v_c$  :



⑤ Sur une demi période et durant la décharge, nous avons :

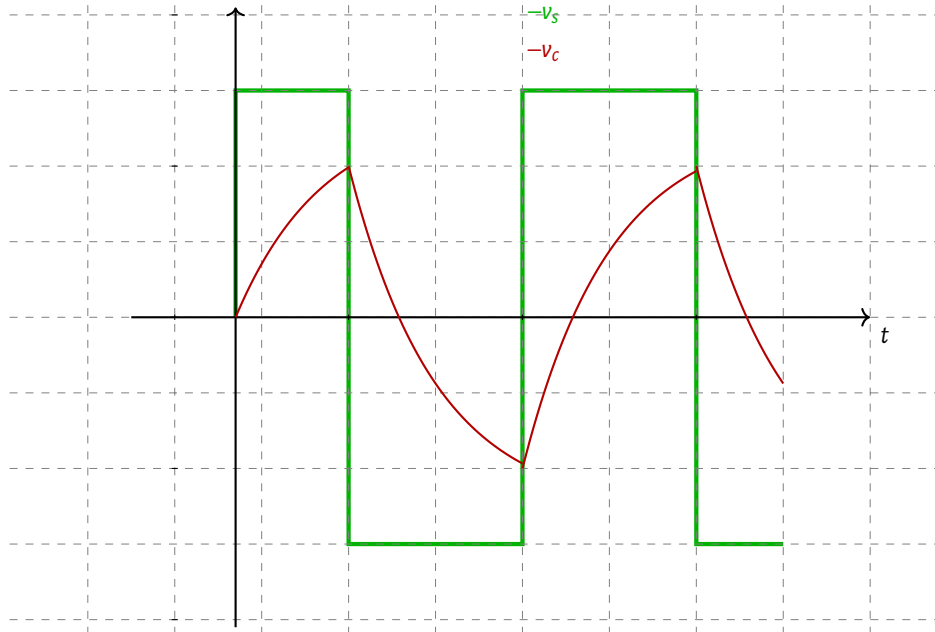
$$\alpha V_{\text{sat}} e^{-\frac{t}{\tau}} - V_{\text{sat}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = -\alpha V_{\text{sat}}$$

On en déduit que :

$$T = 2RC \ln \left(1 + 2 \frac{R_1}{R_2}\right)$$

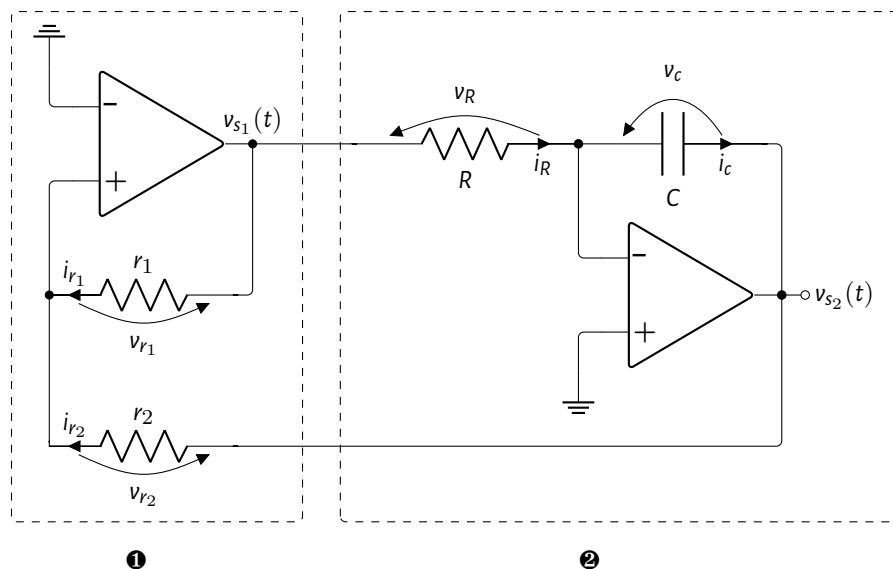
⑥ La période  $T$  est :

$$T \approx 1 \text{ sec}$$



#### Exercice N° 4 :

On considère le montage suivant :



1. Identifier la fonction réalisée par chacun des blocs ❶ et ❷.
2. Déterminer les valeurs possibles de la sortie  $v_{s1}$  du premier amplificateur.
3. Soit  $\alpha = r_1/(r_1+r_2)$ . Montrer que les deux valeurs possibles du potentiel  $v^+$  du premier ampli-op s'écrivent comme suit :

$$v^+ = \pm(1-\alpha)V_{\text{sat}} + \alpha v_{s2}$$

4. En déduire les valeurs de  $v_{s2}$  pour lesquelles le potentiel  $v^+$  du premier bloc s'annule.
5. Établir l'expression de  $v_{s2}$  du second bloc ❷ en fonction  $v_{s1}$ .
6. Au fait, la sortie  $v_{s1}$  est un signal carré comme indiqué sur le graphe ci-après. Le condensateur étant initialement déchargé, tracer l'allure d'évolution de  $v_{s2}$ .
7. Montrer que la période d'oscillation de ce montage est :

$$T = 4 \frac{r_2}{r_1} RC.$$

- ❶ La fonction réalisée par chaque bloc est : ❶ Trigger de Schmitt  
❷ Amplificateur intégrateur inverseur

- ❷ Contre réaction positive  $\rightarrow$  Régime de saturation  $\rightarrow v_{s1} = \pm V_{\text{sat}}$

- ❸ En appliquant Millman, on trouve :

$$\begin{aligned} v^+ &= \frac{\frac{v_{s1}}{r_1} + \frac{v_{s2}}{r_2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} \\ &= \frac{r_2 v_{s1} + r_1 v_{s2}}{r_1 + r_2} \\ &= (1-\alpha)v_{s1} + \alpha v_{s2} \end{aligned}$$

Avec  $v_{s1} = \pm V_{\text{sat}}$ , alors :

$$v^+ = \pm(1-\alpha)V_{\text{sat}} + \alpha v_{s2}$$

- ❹ Quand  $v^+$  s'annule, nous avons :

$$v_{s2} = \pm \frac{(1-\alpha)}{\alpha} V_{\text{sat}} = \pm \frac{r_2}{r_1} V_{\text{sat}}$$

Si  $v_{s1} = +V_{\text{sat}}$  alors  $v^+$  s'annule pour  $v_{s2} = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha} V_{\text{sat}}$

Si  $v_{s1} = -V_{\text{sat}}$  alors  $v^+$  s'annule pour  $v_{s2} = +\frac{(1-\alpha)}{\alpha} V_{\text{sat}}$

- ❺ L'expression de la tension  $v_{s2}$  est :

$$v_{s2} = -\frac{1}{RC} \int v_{s1}(t) dt$$

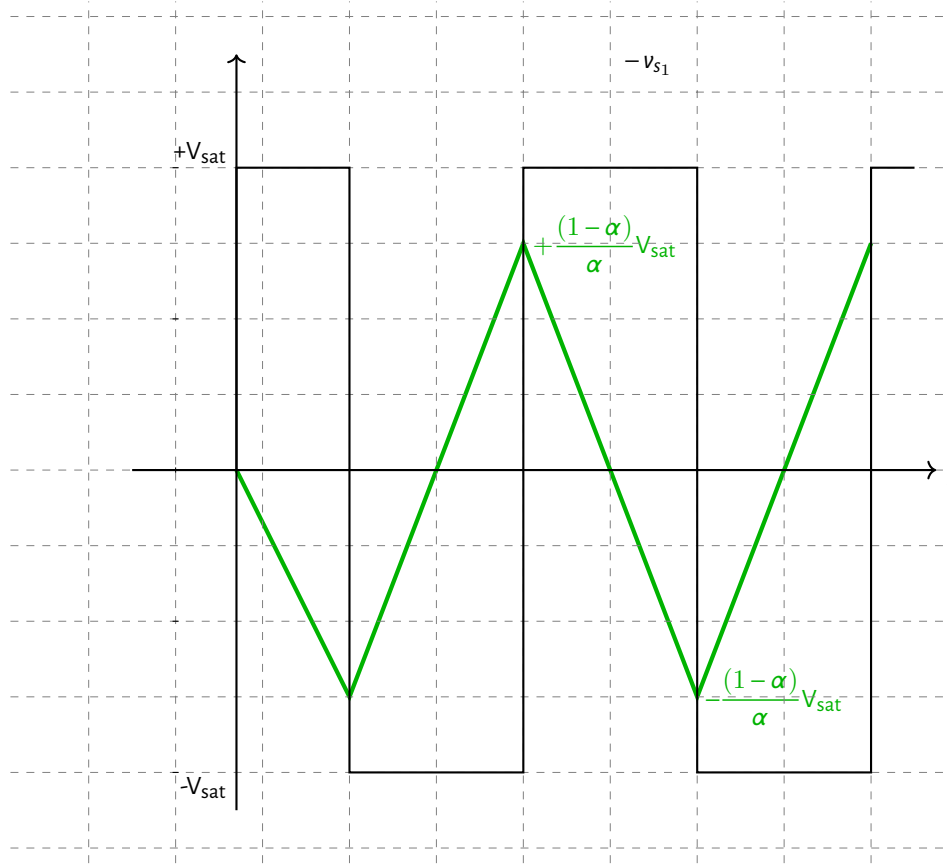
- ❻ Nous envisageons les deux cas limites :

Si  $v_{s1} = +V_{\text{sat}}$  alors  $v_{s2} = -\frac{1}{RC} V_{\text{sat}} t + \text{cte}_1$

Si  $v_{s1} = -V_{\text{sat}}$  alors  $v_{s2} = \frac{1}{RC} V_{\text{sat}} t + \text{cte}_2$



La tension  $v_{s1}$  change de valeur quand le potentiel  $v^+$  du bloc ① s'annule et change de signe. Il en découle que :  $\text{cte}_1 = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha}V_{\text{sat}}$  et  $\text{cte}_2 = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}V_{\text{sat}}$



⑦ Calcul de la période d'oscillation :

Si  $v_{s1} = -V_{\text{sat}}$ , on a

$$v_{s2} = \frac{1}{RC}V_{\text{sat}}t - (1-\alpha)V_{\text{sat}}$$

Quand  $v_{s1}$  passe à  $+V_{\text{sat}}$ ,  $v_{s2} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}V_{\text{sat}}$ .

$$\frac{1}{RC}V_{\text{sat}}t - \frac{(1-\alpha)}{\alpha}V_{\text{sat}} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}V_{\text{sat}}$$

On en déduit :

$$t = 2RC \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

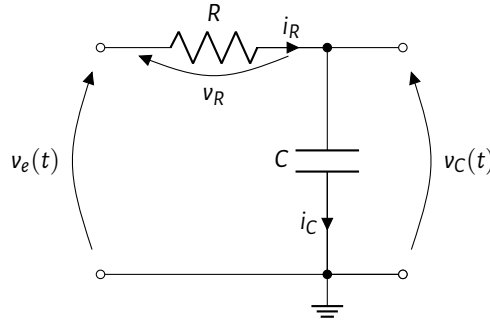
Sachant que  $\alpha = \frac{r_1}{r_1 + r_2}$ , alors :

$$T = 4RC \frac{r_2}{r_1}$$

## 6 Filtre actif

Avant de se pencher sur la définition du filtrage actif, rappelons ici le montage de base d'un classique RC en régime harmonique. Étant donnée qu'il est régi par une équation différentielle linéaire. Ceci implique que si on attaque le montage par un

signal sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , la sortie est également sinusoïdale de même pulsation  $\omega$  mais l'amplitude et la phase d'origine de la sortie sont vus modifiés. Cette déformation a eu lieu à cause du comportement du circuit vis-à-vis de la fréquence d'entrée.



On adoptera dans la suite la notation complexe. On désigne par  $x(t)$  le signal temporel et par  $\underline{X}(j\omega)$  son équivalent polaire

$$x(t) = X_{\max} \sin(\omega t + \varphi_e) \Rightarrow \underline{X}(j\omega) = X_{\max} e^{j(\omega t + \varphi_e)}$$

Il faut noter qu'au niveau de cette transformée, i.e, exponentielle, on allège beaucoup le calcul compte tenu des propriétés de la fonction exponentielle. La caractérisation du circuit RC devient indépendante du couple (Entrée/ Sortie). La fonction exponentielle est une fonction particulièrement intéressante à cause de cette propriété de dérivation :

$$\frac{de^{u(t)}}{dt} = \frac{du(t)}{dt} e^{u(t)} \quad (35)$$

Dans la suite, on considère la fonction  $u(t) = j(\omega t + \phi)$ . La fonction  $u$  représente la phase instantanée du signal considéré. Ainsi, Eq. (35) devient :

$$\frac{de^{u(t)}}{dt} = j\omega e^{u(t)}.$$

La dérivée de  $\underline{X}(j\omega)$  devient donc :  $\dot{\underline{X}}(j\omega) = j\omega \underline{X}(j\omega)$

Rappelons ici la relation courant-tension dans un condensateur de capacité  $C$  :

$$i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

Soit, en utilisant la notation complexe :

$$\underline{I}_c(j\omega) = jC\omega \underline{V}_c(j\omega),$$

ou encore :

$$\underline{V}_c(j\omega) = \frac{1}{jC\omega} \underline{I}_c(j\omega)$$

Le terme  $\frac{1}{jC\omega}$ , que l'on note  $Z_c$ , représente l'impédance complexe d'un condensateur. Son module, se mesurant en  $\Omega$ , représente le rapport tension/ courant et son argument indique la valeur du déphasage entre la tension  $v_c(t)$  et le courant  $i_c(t)$ .

Rappelons encore l'équation différentielle régissant le circuit RC :

$$\tau \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_e(t)$$

On considère la notation complexe :

$$\tau jC\omega \underline{V}_c(j\omega) + \underline{V}_c(j\omega) = \underline{V}_e(j\omega)$$

Soit encore :

$$\frac{\underline{V}_c(j\omega)}{\underline{V}_e(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\tau C\omega}$$

La fonction  $\mathcal{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau C\omega}$  caractérise le transfert harmonique du circuit RC :

- Le module  $|\mathcal{H}(j\omega)|$  est égal à  $\frac{V_{c\max}}{V_{e\max}}$  ;
- L'argument  $\angle \mathcal{H}(j\omega)$  renseigne sur le déphasage :  $\varphi_c - \varphi_e$ .

### Calcul du gain $|\mathcal{H}(j\omega)|$

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \quad (36)$$

- En basse fréquence :  $\tau\omega \ll 1$  c.-à-d.  $\omega \ll \frac{1}{\tau}$

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = 1$$

- En haute fréquence :  $\tau\omega \gg 1$  c.-à-d.  $\omega \gg \frac{1}{\tau}$

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = 0$$

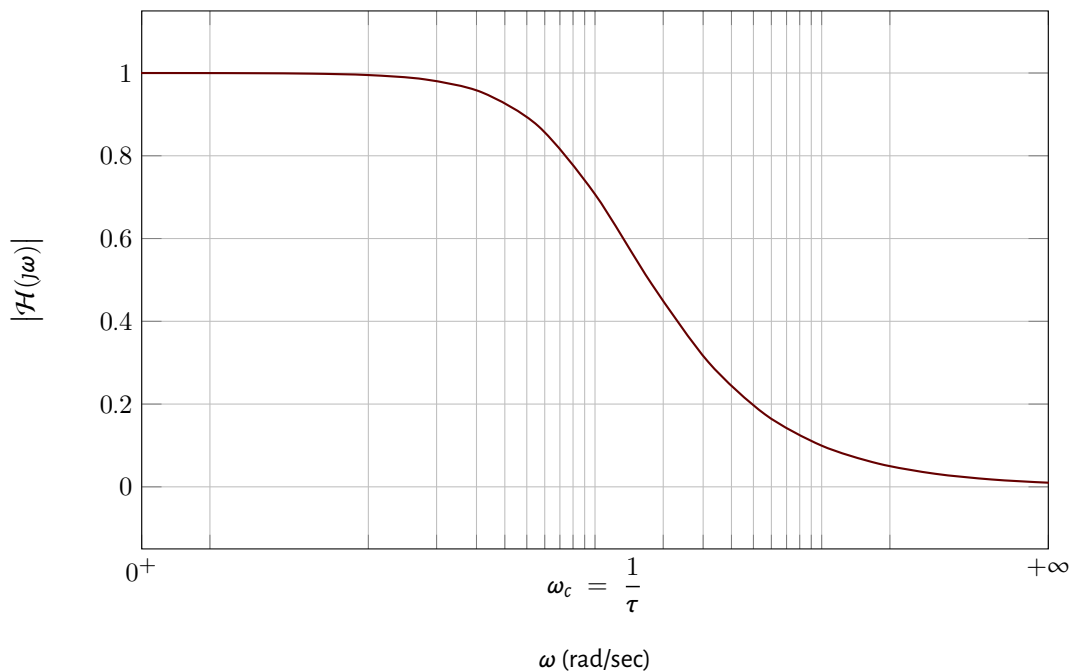
- Si :  $\tau\omega = 1$  c.-à-d.  $\omega = \frac{1}{\tau}$

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

L'allure du graphe d'évolution de ce gain en tension sur une échelle logarithmique pour l'axe des abscisses est indiquée par la figure suivante.



Il faut noter qu'une échelle linéaire n'est pas adéquate pour représenter l'évolution du terme  $|\mathcal{H}(j\omega)|$ .



D'après cette courbe, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert en basses fréquences. Si on monte progressivement en fréquence, la capacité semble exécuter une sorte d'opération de purification ou encore *filtrage* jusqu'à une valeur correspondante à un gain en tension pratiquement nul en très hautes fréquences.

La conclusion à tirer est donc que le circuit RC, sujet à un signal périodique de pulsation  $\omega$ , se comporte comme un filtre passe bas. Il laisse passer les composantes de fréquence inférieure à la constante  $\omega_c$  (*pulsation de coupure*) et annuler toutes les autres composantes dont la pulsation est supérieure à  $\omega_c$ .

### Calcul du gain $\mathcal{G}_{dB}$

Il est intéressant également d'introduire la notion du gain en décibels. Cette dernière notion est souvent utilisée mais parfois mal connue. On se propose dans ce qui suit, de donner un aperçu sur la définition de ce gain.

Le "BELL" (B) est une unité de mesure de transfert de puissance. Elle a été introduite par les laboratoires **BELL** après les années 1920. Ce gain a tiré son nom de l'ingénieur Alexandre Graham BELL<sup>6</sup> (1847 – 1922) qui a inventé le téléphone. Le "BELL" est égale au rapport logarithmique décimal de deux puissances. Le "DÉCIBELL", quant à lui, le sous multiple du "BELL" (1 B = 10 dB) est largement utilisé dans les domaines de la physique, de l'électronique et de l'acoustique.

En considérant deux puissances  $P_e$  et  $P_s$ , nous pouvons déterminer le gain  $\mathcal{G}$ , exprimé en "DÉCIBELL", tel que :

$$\mathcal{G}_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_e}. \quad (37)$$

Sachant que le carré du module de la fonction  $\mathcal{H}(j\omega)$  représente un transfert d'énergie entre l'entrée et la sortie du filtre, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{dB} &= 20 \log_{10} |\mathcal{H}(j\omega)| \\ &= 20 \log_{10} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \right) \\ &= -10 \log_{10} \left( 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \right) \end{aligned} \quad (38)$$

Pour pouvoir tracer la réponse en fréquence de façon plus nette, on peut considérer la méthode simplifiée, inventée par l'ingénieur américain Hendrick Wade BODE<sup>7</sup> (1905). Il s'agit ici de tracer le module  $\mathcal{G}_{dB}$  en fonction du logarithme de la pulsation c.-à-d.  $\omega$ .

- En basse fréquence :  $\omega \ll \omega_c$

$$\mathcal{G}_{dB} = 0$$

- En haute fréquence :  $\tau\omega \gg 1$  c.-à-d.  $\omega \gg \omega_c$

$$\mathcal{G}_{dB} = -20 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)$$

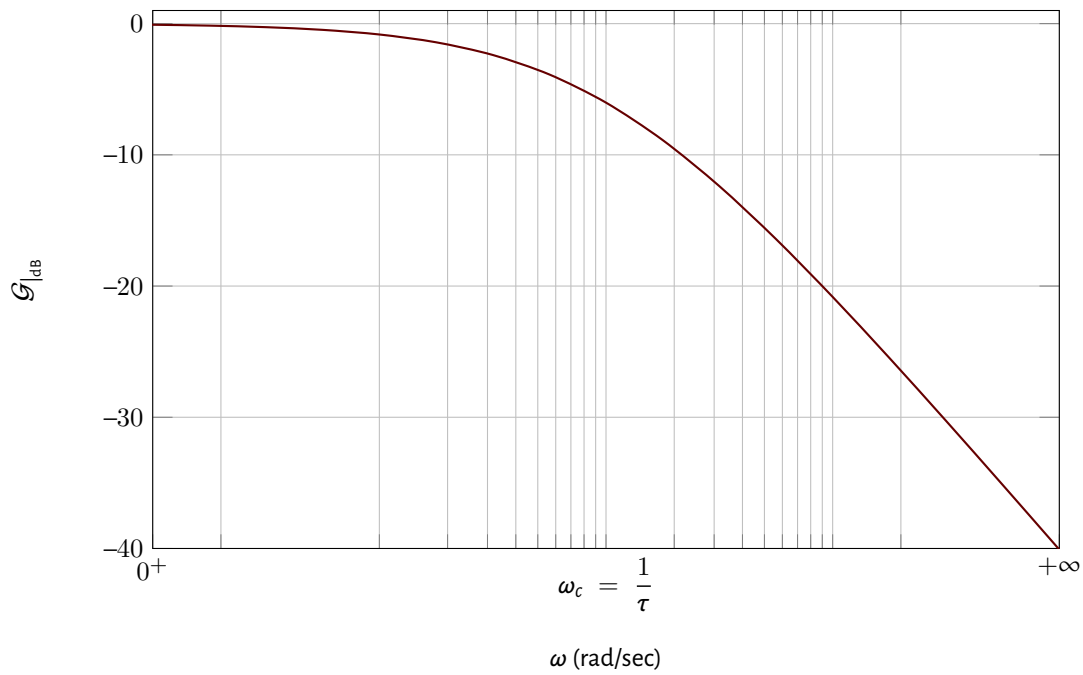
- Si :  $\tau\omega = 1$  c.-à-d.  $\omega = \frac{1}{\tau}$

$$\mathcal{G}_{dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -3 \text{ dB}$$

Les diagrammes de BODE se trace sur un papier dit "semi-log", où l'axe vertical est linéaire et l'axe horizontal est logarithmique. L'allure du graphe d'évolution de ce gain en tension est indiqué sur le graphique suivant. Ce graphe possède une branche asymptotique au voisinage des hautes fréquences de pente  $-20 \text{ dB}$  par décade c.-à-d. que chaque transition d'une pulsation  $\omega$  à une pulsation multiple de valeur  $10 \omega$ , il y aura une atténuation de  $20 \text{ dB}$  au niveau de la puissance perçue à la sortie du circuit.

6. [http://en.wikipedia.org/wiki/Alexander\\_Graham\\_Bell](http://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_Graham_Bell)

7. [http://en.wikipedia.org/wiki/Hendrik\\_Wade\\_Bode](http://en.wikipedia.org/wiki/Hendrik_Wade_Bode)



Calcul de l'argument de  $\mathcal{H}(j\omega)$

$$\begin{aligned}
 \angle \mathcal{H}(j\omega) &= \angle \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \\
 &= -\angle 1 + j\frac{\omega}{\omega_c} \\
 &= -\text{atan} \left( \frac{\Im \left( 1 + j\frac{\omega}{\omega_c} \right)}{\Re \left( 1 + j\frac{\omega}{\omega_c} \right)} \right) \\
 &= -\text{atan} \left( \frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{1} \right) \\
 &= -\text{atan} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)
 \end{aligned}$$

► En basse fréquence :  $\omega \ll \omega_c$

$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = 0$$

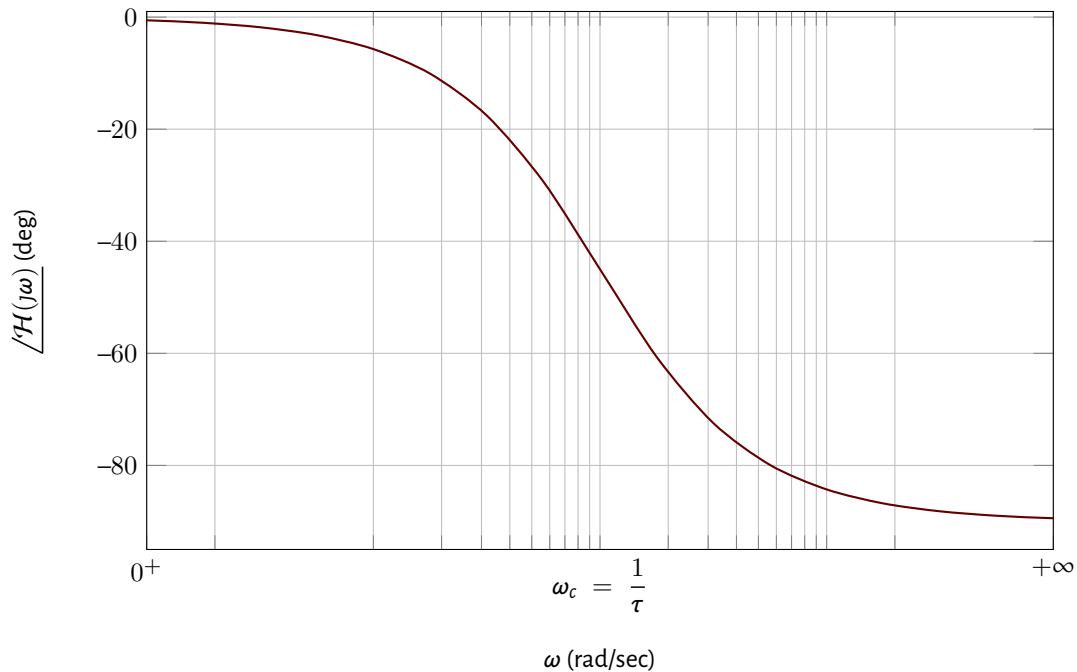
► En haute fréquence :  $\omega \gg \omega_c$

$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = -90 \text{ (deg)}$$

► Si :  $\omega = \omega_c$

$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = -45 \text{ (deg)}$$

Le déphasage  $\Delta\varphi = \varphi_c - \varphi_e$  possède deux branches horizontales en basse fréquence et en haute fréquence, la première est de direction 0 deg, c.-à-d. que le circuit considéré n'introduit aucun déphasage entre l'entrée et la sortie. La deuxième est de direction  $-90$  deg, ce qui permet de dire que les signaux d'entrée et de sortie sont en quadrature de phase. Le signal de sortie est en retard de phase par rapport au signal d'entrée.



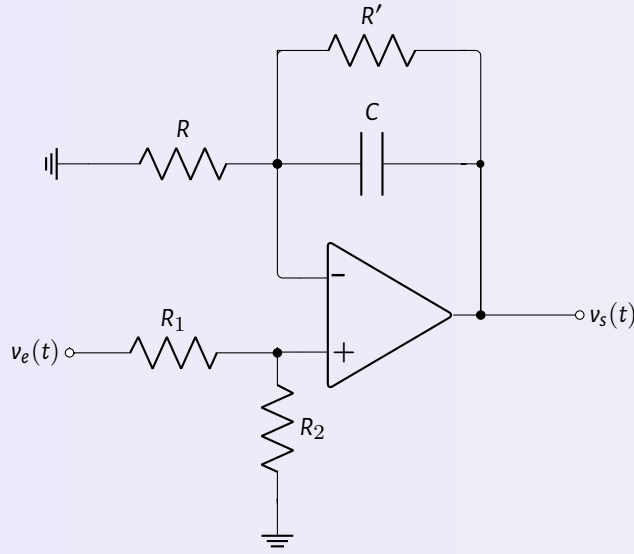
Il résulte d'après ce qui précède que le circuit RC est un filtre passe-bas. Il laisse passer les signaux de faible fréquences et atténue les autres signaux dont la pulsation est supérieure à la pulsation de coupure  $\omega_c$  qui est égale à  $\frac{1}{\tau}$ .

### Exemple d'un filtre actif

Un filtre actif est une forme de circuit analogique mettant en œuvre un filtre électronique utilisant des composants actifs, généralement un amplificateur.

Outre la possibilité de contrôler le gain d'amplification, la présence d'un amplificateur préserve les propriétés du filtre. Elle permet de maintenir les caractéristiques du circuit indépendamment de la charge.

Montage #11



$$v_+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \mathcal{V}_e$$

$$v_- = \frac{R}{R + R' // Z_c} \mathcal{V}_s, \quad \text{avec } Z_c = \frac{1}{jC\omega}$$

## Exercice N° 5 :

1. Démontrer que la fonction de transfert harmonique s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(j\omega) &= \frac{\mathcal{V}_s(j\omega)}{\mathcal{V}_e(j\omega)} \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R + R'}{R} \frac{1 + j \frac{RR'C}{R + R'} \omega}{1 + jR'C\omega} \end{aligned} \quad (39)$$

2. Soit  $R' = 10 \times R$ . Mettre l'expression de  $\mathcal{H}$  comme indiquée par Eq. (40). Identifier ainsi  $K$  et  $\tau$ .

$$\mathcal{H}(j\omega) = K \frac{1 + \frac{1}{11} j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}. \quad (40)$$

3. On pose  $R_1 = R_2 = 2.2 \text{ k}\Omega$ ,  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R' = 100 \text{ k}\Omega$  et  $C = 10 \mu\text{F}$ . Esquisser les diagrammes de Bode (Gain et phase). Nous rappelons les expressions suivantes :

$$\mathcal{G}_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \{|\mathcal{H}(j\omega)|\} \quad \text{et} \quad \angle \mathcal{H}(j\omega) = \text{atan}\left(\frac{1}{11} \tau\omega\right) - \text{atan}(\tau\omega)$$

① ALI idéal en régime linéaire  $\rightarrow v_+ = v_-$ .

$$\begin{aligned} v_+ &= v_- \\ \frac{R_2}{R_1 + R_2} \mathcal{V}_e &= \frac{R}{R + R' // Z_c} \mathcal{V}_s \end{aligned}$$

Le quotient  $\mathcal{H}(j\omega)$  s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(j\omega) &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R + \frac{R'Z_c}{R' + Z_c}}{R} \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R + \frac{R'}{1 + jR'C\omega}}{R} \\ \mathcal{H}(j\omega) &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R + R' \frac{1 + j\frac{RR'C}{R + R'}\omega}{1 + jR'C\omega}}{R}\end{aligned}$$

② Dans le cas où  $R' = 10 \times R$ , la fonction  $\mathcal{H}$  se transforme en

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(j\omega) &= 11 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + j\frac{1}{11}R'C\omega}{1 + jR'C\omega} \\ &= K \frac{1 + j\frac{1}{11}\tau\omega}{1 + j\tau\omega},\end{aligned}$$

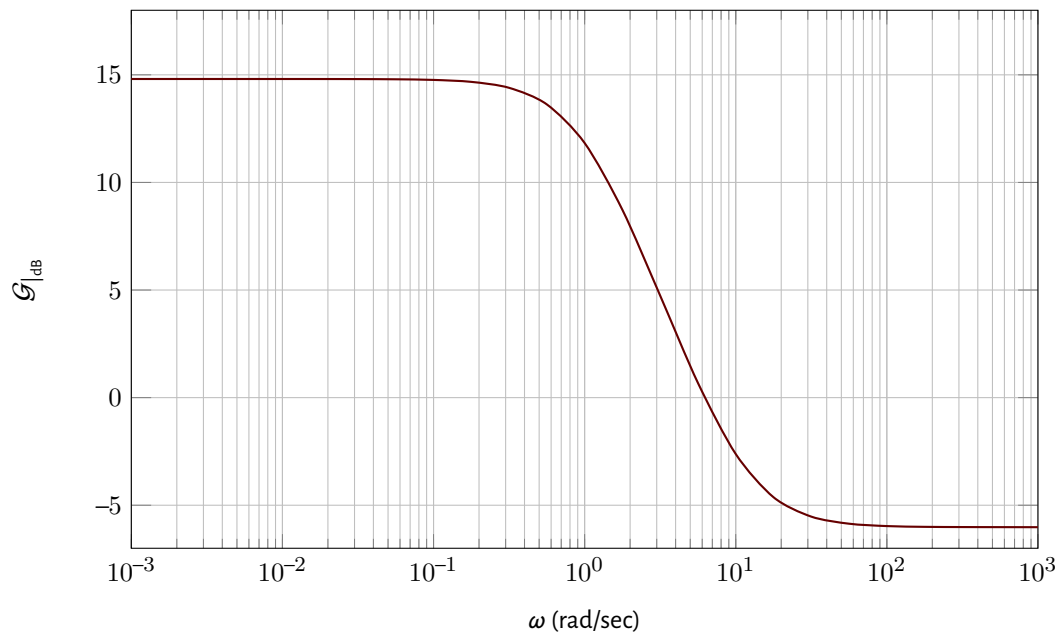
avec

$$K = 11 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad \tau = R'C$$

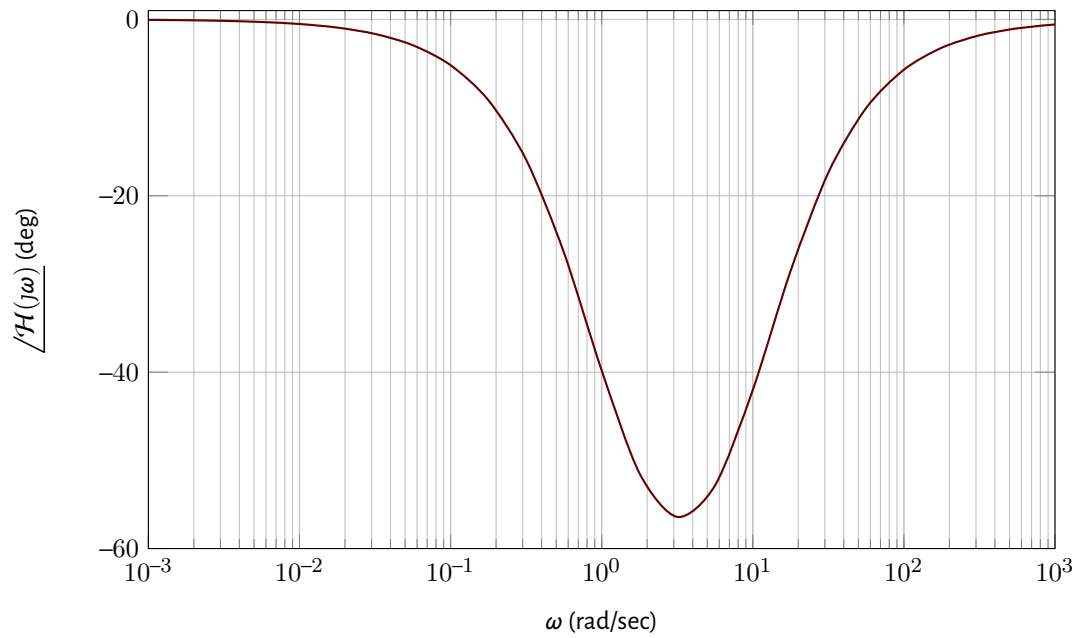
③ En mettant à jour les termes  $K$  et  $\tau$ , on obtient

$$K = 5.5 \quad \text{et} \quad \tau = 1 \text{ sec}$$

Les diagrammes de Bode sont illustrés par les graphiques suivants







## Références

- [AB19] ABRAHAM, HENRI et BLOCH, EUGÈNE. "Mesure en valeur absolue des périodes des oscillations électriques de haute fréquence". Dans : *Journal de Physique Théorique et Appliquée* 9.1 (1919), pp. 211-222. DOI : [10.1051/jphystap:019190090021100](https://doi.org/10.1051/jphystap:019190090021100).
- [Cla13] G. B. CLAYTON. *Operational Amplifiers*. Butterworth-Heinemann, 2013.
- [Lan75] D. E. LANCASTER. *Active-Filter Cookbook*. Macmillan Pub Co, 1975.
- [Mah17] K. MAHER. *Electronique : Vol1 Amplificateur Opérationnel et Applications (PU Polytec Rom)*. PU Polytechnique, 2017.
- [Ras10] M. H. RASHID. *Microelectronic Circuits : Analysis & Design*. CL Engineering, 2010.