

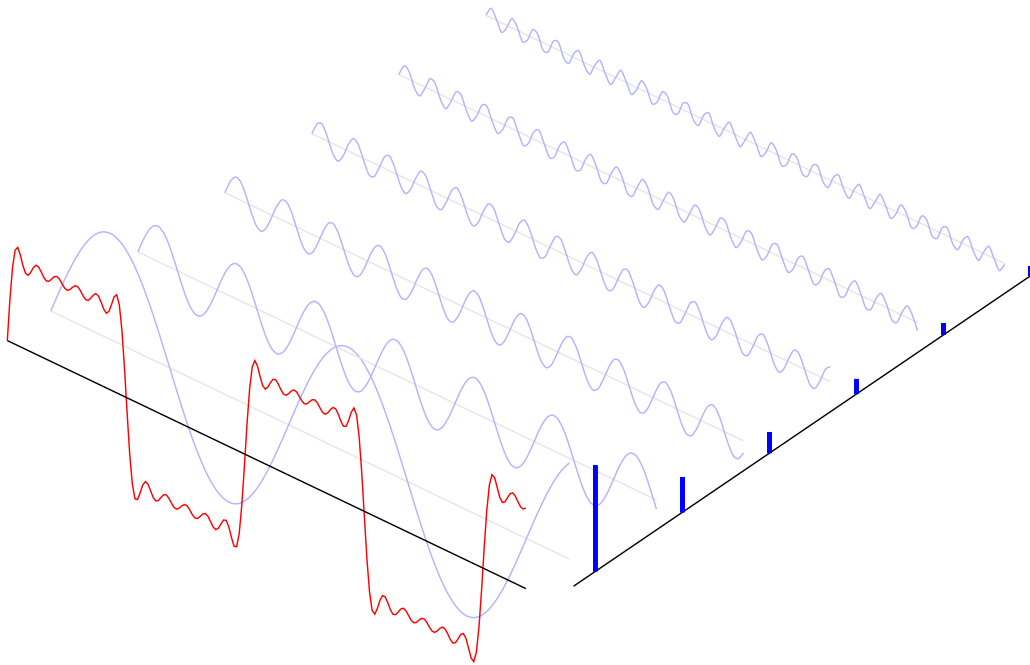
Traitement de Signal

Notes de cours avec exercices corrigés^a

2020-2021

a. <https://github.com/a-mhamdi/isetbz/>

Abdelbacet Mhamdi
Dr.-Ing. en GE – Technologue en GE



$$x(t) = \bar{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right)$$

Dépt. GE - Institut Supérieur des Études Technologiques de Bizerte

Σ
 \int
 $\frac{d}{dt}$
 ω
 J

VIDÉO FFT FILTRAGE BLOQUEUR CONVOLUTION MODULATION FOURIER AUDIO BRUIT IMAGE

À propos

Dans ce cours, nous traiterons essentiellement les points suivants :

- ★ Définition et classification des signaux;
- ★ Convolution 1D & 2D et corrélation;
- ★ Décomposition en série de Fourier;
- ★ Transformée de Fourier;
- ★ Filtrage.



Le code est disponible via <https://github.com/a-mhamdi/cosnip/> → Python → sig-proc → code-ts.ipynb

Table des matières

1	Mise en situation	1
1.1	Généralités	1
1.2	Classification des signaux	3
1.3	Exercices corrigés	7
2	Convolution et corrélation	11
2.1	Convolution	11
2.2	Corrélation	15
2.3	Exercices corrigés	16
3	Décomposition en série de Fourier	21
3.1	Formalise mathématique	21
3.2	Exemples de simulation avec Python	24
3.3	Exercices corrigés	27
4	Analyse fréquentielle	31
4.1	Transformée de Fourier	32
4.2	Exercices corrigés	34
5	Filtrage des signaux	36
5.1	Approche temporelle	36
5.2	Approche fréquentielle	42
5.3	Exercices corrigés	46

1 Mise en situation

Objectifs

Dans cette partie, nous allons :

- ★ définir et classer quelques signaux;
- ★ montrer des exemples d'implémentation sous Python.

1.1 Généralités

▼ Définition 1.1

Un **signal** est

- la représentation physique d'une information à communiquer;
- le support pour véhiculer des données.

EXEMPLE

1. Signaux biologiques : EEG ¹, ECG ²;
2. Géophysiques : vibrations sismiques;
3. Finances : cours de la bourse;
4. Images/Vidéos;
5. ...

▼ Définition 1.2

Un **bruit** est tout phénomène gênant la perception ou l'interprétation d'un signal.

NSR (Noise to Signal Ratio)

$$\text{NSR}(\%) = \frac{\int_0^t |v(t)|}{\int_0^t |y(t)|}$$

SNR (Signal to Noise Ratio)

$$\text{SNR}(\text{dB}) = 20 \log_{10}(1/\text{NSR})$$

⇒ EXTRAIRE LE MAXIMUM D'INFORMATION UTILE D'UN SIGNAL PERTURBÉ.

1. Électroencéphalogramme (en : *Electroencephalography*)

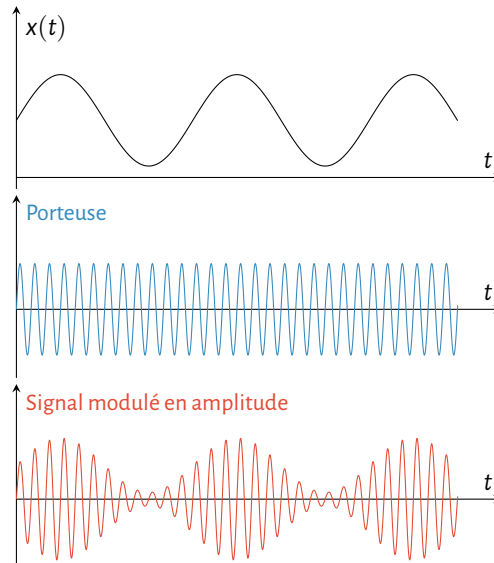
2. Électrocardiogramme (en : *Electrocardiography*)

▼ Définition 1.3

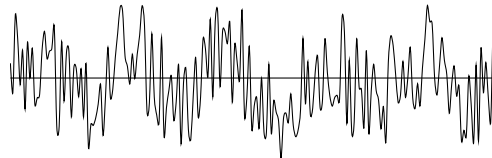
Le **traitement de signal** est un ensemble de techniques pour générer, analyser et transformer les signaux en vue de leur exploitation.

EXEMPLE

- Synthétiser des signaux par superposition de signaux élémentaires;
- Adapter le signal au canal de transmission (Modulation AM ³, FM ⁴, PM ⁵)

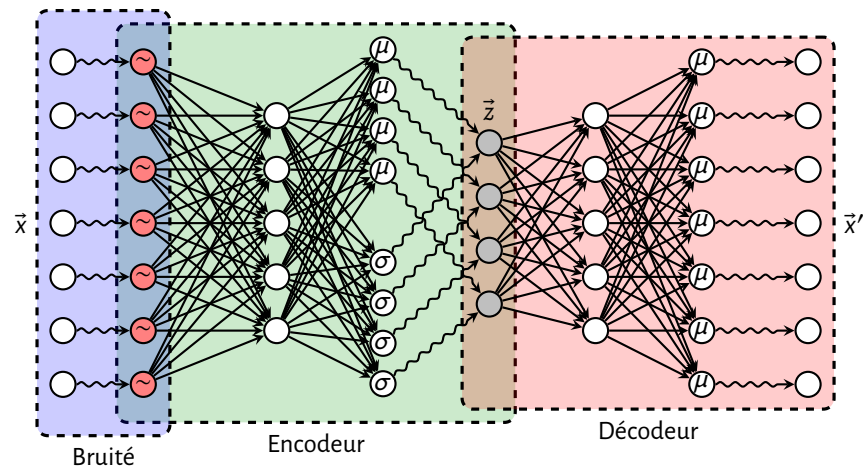


- Détecter les composantes utiles d'un signal complexe
- Classifier les signaux (Identification d'une pathologie sur un ECG, reconnaissance vocale)



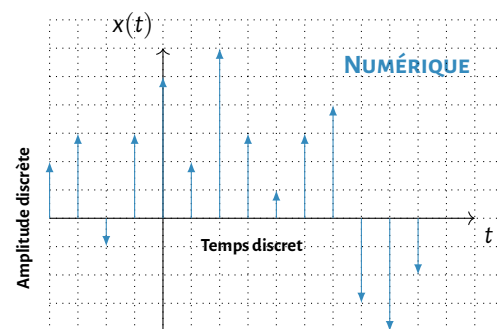
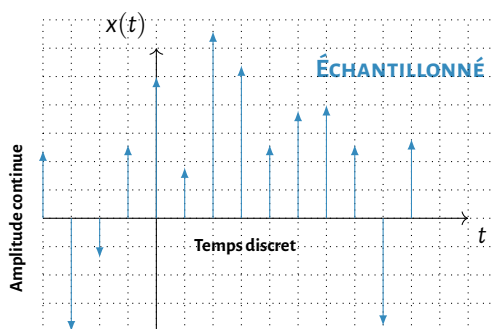
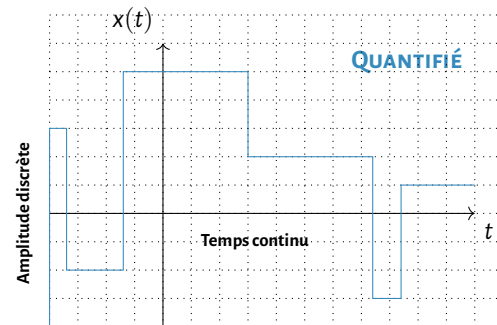
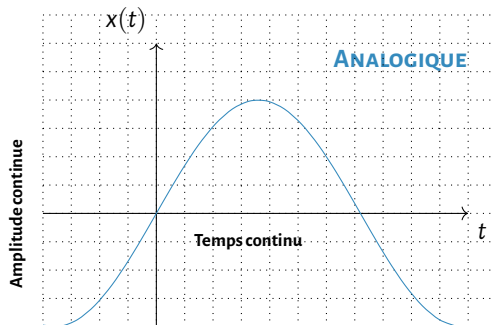
- Filtrer le signal contre les impuretés
- Coder/Compresser

3. Amplitude modulation
4. Frequency modulation
5. Phase modulation



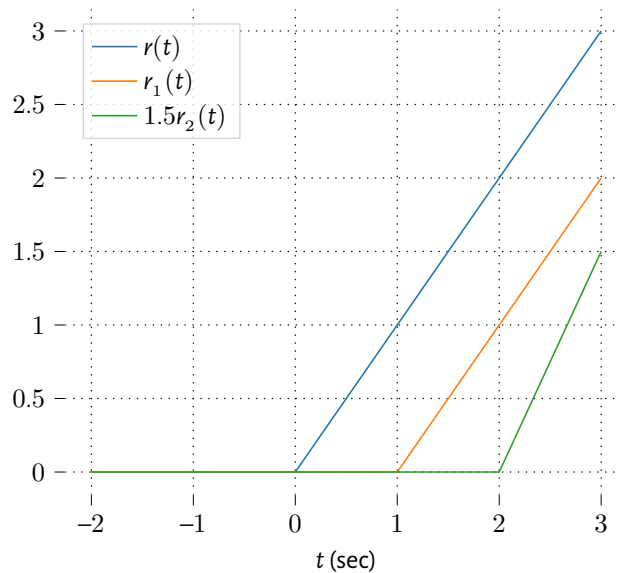
1.2 Classification des signaux

On peut classer les signaux selon leurs formes comme suit :



Signaux usuels

La rampe $r(t)$



$$r(t) = t \quad \text{ssi} \quad t \geq 0$$

$$r_1(t) = t - 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 1$$

$$1.5r_2(t) = 1.5(t - 2) \quad \text{ssi} \quad t \geq 2$$

$$\alpha r_\tau(t) = \alpha(t - \tau) \quad \text{ssi} \quad t \geq \tau$$

$$\frac{d}{dt}r(t) = \Gamma(t) \Leftrightarrow \int \Gamma(t) = r(t)$$

$$\star \quad f_\tau(t) = f(t - \tau)$$

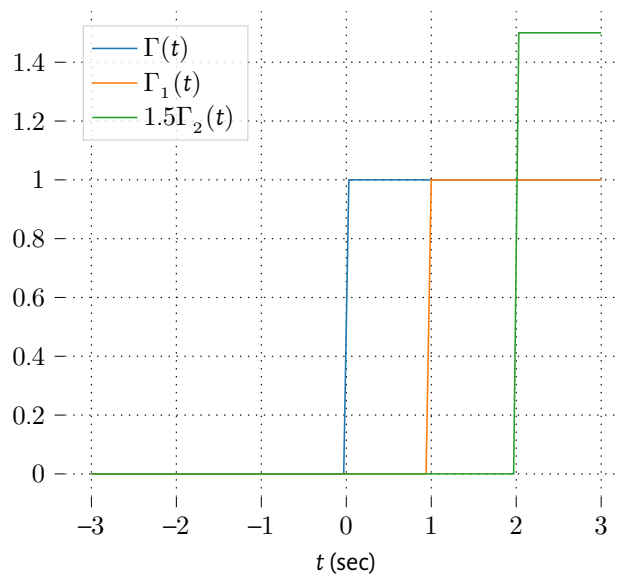
```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
[2]: t = np.linspace(-2, 3, 1000)

# Rampe
x = ( t >= 0 ).astype(int) * t
y = ( t >= 1 ).astype(int) * (t - 1)
z = 1.5 * ( t >= 2 ).astype(int) * (t - 2)
```

```
[3]: plt.plot(t, x, t, y, t, z)
plt.legend( ('$r(t)$', r'$r_{1}(t)$', r'$1.5r_{2}(t)$' ) )

plt.xlabel('$t$ (sec)')
plt.grid()
plt.show()
```


L'échelon $\Gamma(t)$ 

$$\Gamma(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 0$$

$$\Gamma_1(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 1$$

$$1.5\Gamma_2(t) = 1.5 \quad \text{ssi} \quad t \geq 2$$

$$\alpha\Gamma_\tau(t) = \alpha \quad \text{ssi} \quad t \geq \tau$$

$$\frac{d}{dt}\Gamma(t) = \delta(t) \Leftrightarrow \int \delta(t) = \Gamma(t)$$

$$\star \quad f_\tau(t) = f(t-\tau)$$

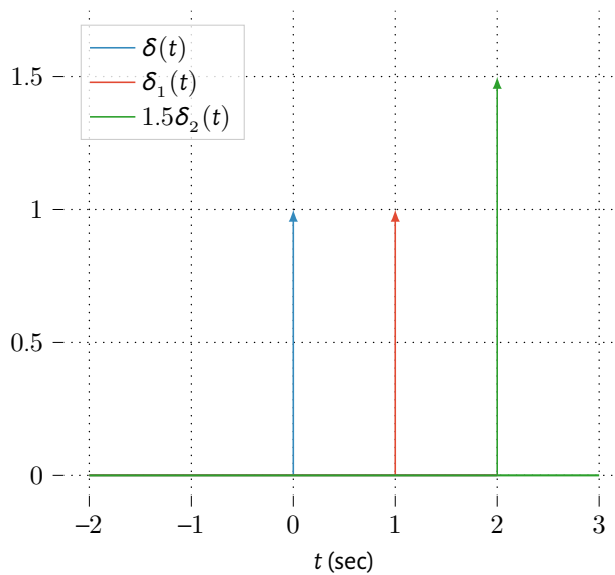
```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
[2]: t = np.linspace(-2, 3, 1000)

# \Echelon
x = ( t>=0 ).astype(int)
y = ( t>=1 ).astype(int)
z = 1.5 * ( t>=2 ).astype(int)
```

```
[3]: plt.plot(t, x, t, y, t, z)
plt.legend( ('$ \Gamma(t)$', r'$ \Gamma_{_1}(t)$', r'$1.5 \Gamma_{_2}(t)$' ) )

plt.xlabel('$t$ (sec)')
plt.grid()
plt.show()
```

La distribution de Dirac $\delta(t)$ 

$$\delta(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t = 0$$

$$\delta_1(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t = 1$$

$$1.5\delta_2(t) = 1.5 \quad \text{ssi} \quad t = 2$$

$$\alpha\delta_\tau(t) = \alpha \quad \text{ssi} \quad t = \tau$$

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

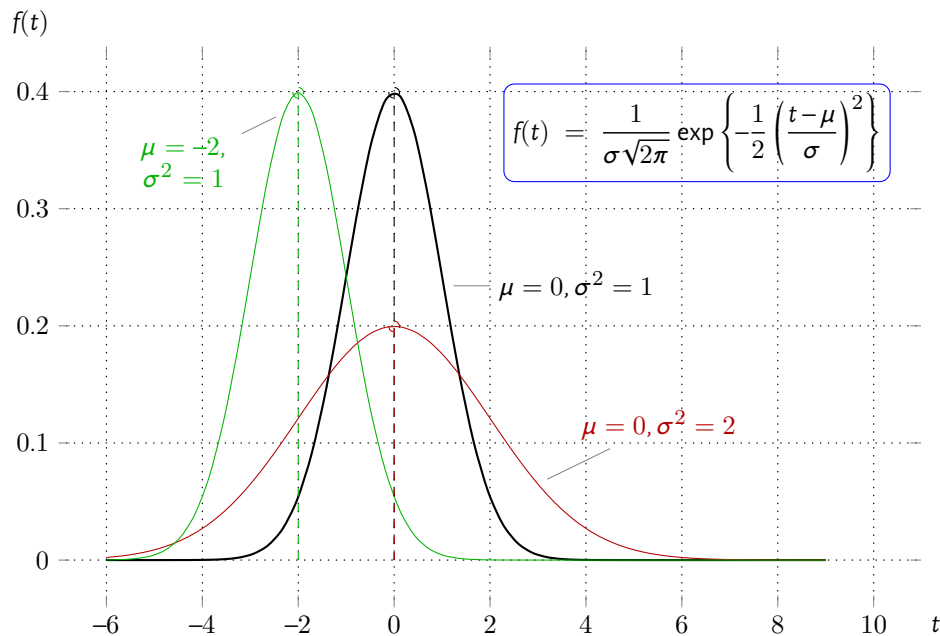
$$\lim_{(\mu, \sigma) \rightarrow (0, 0)} f(t) \rightarrow \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

$$\star \quad f_\tau(t) = f(t - \tau)$$



Densité de probabilité de la loi normale



```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
[2]: t = np.linspace(-2, 3, 6); nt = len(t)
x = np.zeros(len(t)); x[ t==0.0 ] = 1;
y = np.zeros(len(t)); y[ t==1.0 ] = 1;
z = np.zeros(len(t)); z[ t==2.0 ] = 1.5;
```

```
[3]: plt.stem(t,x,'C0',markerfmt='C0^',basefmt="┐
↪",label=r'$\delta(t)$',use_line_collection=True)
```

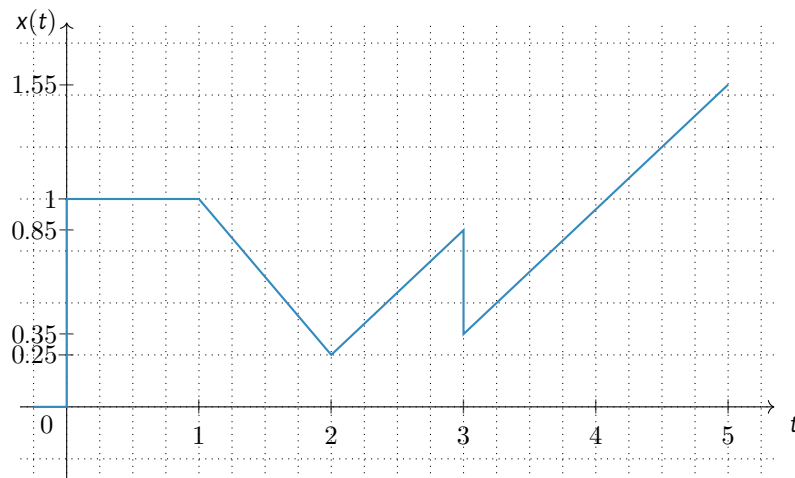
```
plt.stem(t,y,'C1',markerfmt='C1^',basefmt="┐",label=r'$\delta_1(t)$',use_line_collection=True)
plt.stem(t,z,'C2',markerfmt='C2^',basefmt="┐",label=r'$1.5\delta_2(t)$',use_line_collection=True)

plt.xlabel('$t$ (sec)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

EXEMPLE

Tracer la fonction

$$x(t) = \Gamma(t) - 0.75r_1(t) + 1.35r_2(t) - 0.5\Gamma_3(t).$$



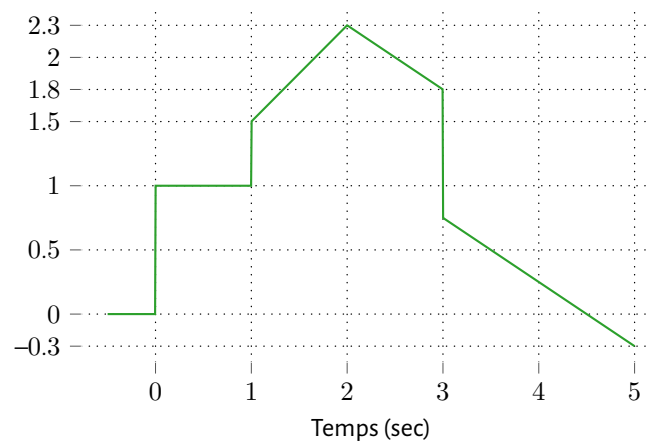
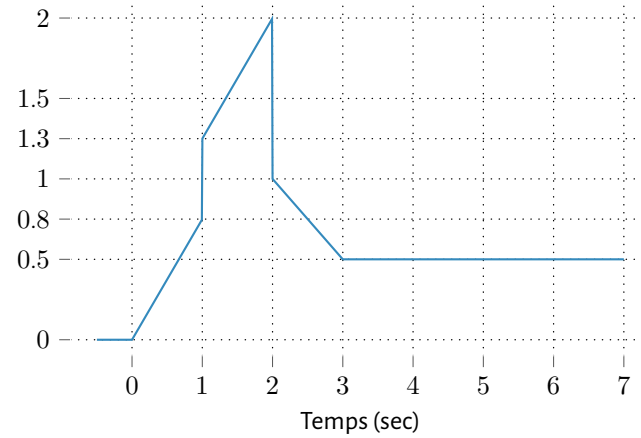
1.3 Exercices corrigés

Exercice N°1 :

- a) Tracer le graphique de w

$$w(t) = \Gamma(t) + 0.5\Gamma_1(t) + 0.75r_1(t) - 1.25r_2(t) - \Gamma_3(t) \quad (1)$$

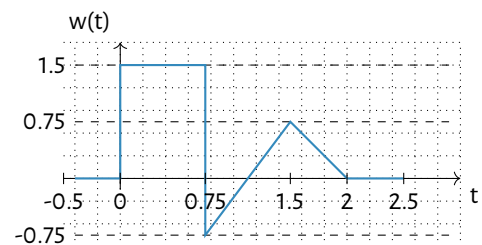
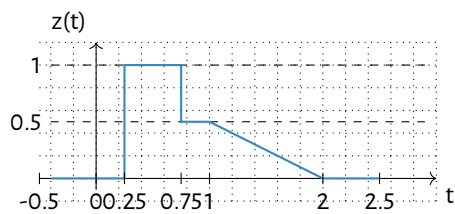
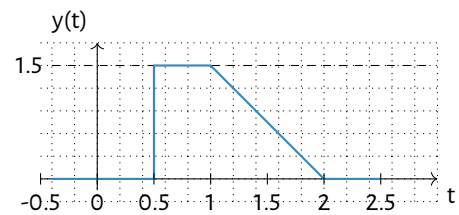
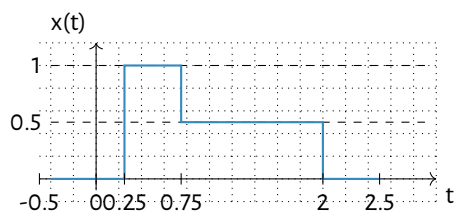
- b) Déterminer l'expression du signal x indiqué sur la figure suivante

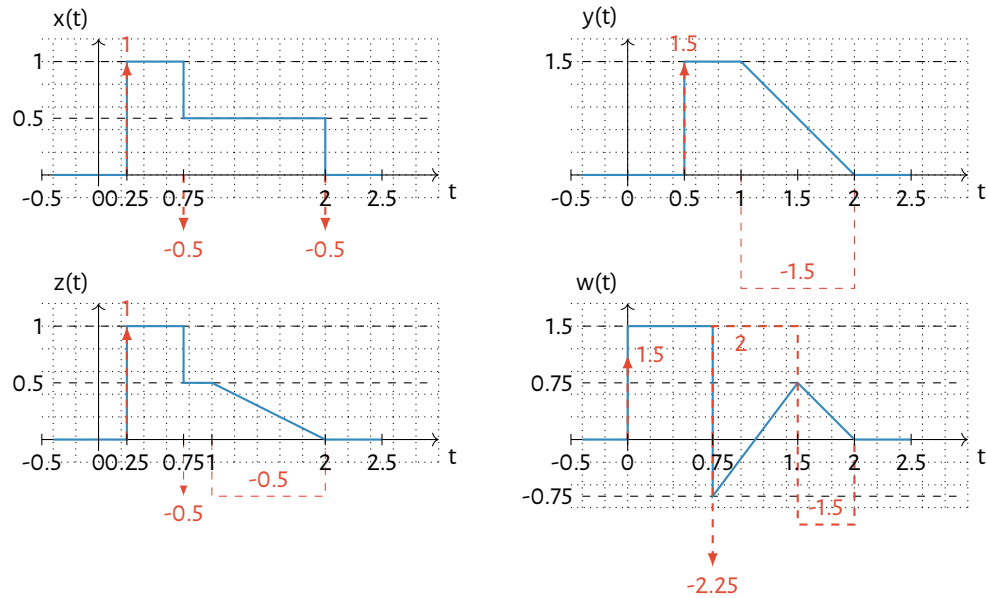


$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 0.75(\Gamma - \Gamma_1) + 0.5\delta_1 + 0.75(\Gamma_1 - \Gamma_2) - \delta_2 - 0.5(\Gamma_2 - \Gamma_3) \\ x(t) &= 0.75r(t) + 0.5\Gamma_1(t) - 1.25r_2(t) - \Gamma_2(t) + 0.5r_3(t)\end{aligned}$$

Exercice N° 2 :

Déterminer les expressions des signaux donnés par les courbes ci-dessous :





$$\dot{x}(t) = \delta_{0.25} - 0.5\delta_{0.75} - 0.5\delta_2 \xrightarrow{\int dt} x(t) = \Gamma_{0.25} - 0.5\Gamma_{0.75} - 0.5\Gamma_2$$

$$\dot{y}(t) = 1.5\delta_{0.5} - 1.5(\Gamma_1 - \Gamma_2) \xrightarrow{\int dt} y(t) = 1.5\Gamma_{0.5} - 1.5(r_1 - r_2)$$

$$\dot{z}(t) = \delta_{0.25} - 0.5\delta_{0.75} - 0.5(\Gamma_1 - \Gamma_2) \xrightarrow{\int dt} z(t) = \Gamma_{0.25} - 0.5\Gamma_{0.75} - 0.5(r_1 - r_2)$$

$$\dot{w}(t) = 1.5\delta - 2.25\delta_{0.75} + 2(\Gamma_{0.75} - \Gamma_{1.5}) - 1.5(\Gamma_{1.5} - \Gamma_2) \xrightarrow{\int dt} w(t) = 1.5\Gamma - 2.25\Gamma_{0.75} + 2r_{0.75} + 0.5r_{1.5} - 1.5r_2$$

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
[2]: t = np.linspace(-0.5, 2.5, 1000)
```

Echelon retardé de τ

```
[3]: def G_tau(t, tau=0):
    return (t >= tau).astype(int)
```

Rampe retardée de τ

```
[4]: def r_tau(t, tau=0):
    return (t >= tau).astype(int) * (t - tau)
```

$$x(t) = \Gamma_{0.25} - 0.5\Gamma_{0.75} - 0.5\Gamma_2$$

```
[5]: x = G_tau(t, 0.25) - 0.5 * G_tau(t, 0.75) - 0.5 * G_tau(t, 2)
```

$$y(t) = 1.5\Gamma_{0.5} - 1.5(r_1 - r_2)$$

```
[6]: y = 1.5*G_tau(t,0.5)-1.5*(r_tau(t,1)-r_tau(t,2))
```

$$z(t) = \Gamma_{0.25} - 0.5\Gamma_{0.75} - 0.5(r_1 - r_2)$$

```
[7]: z = G_tau(t,0.25)-0.5*G_tau(t,0.75)-0.5*(r_tau(t,1)-r_tau(t,2))
```

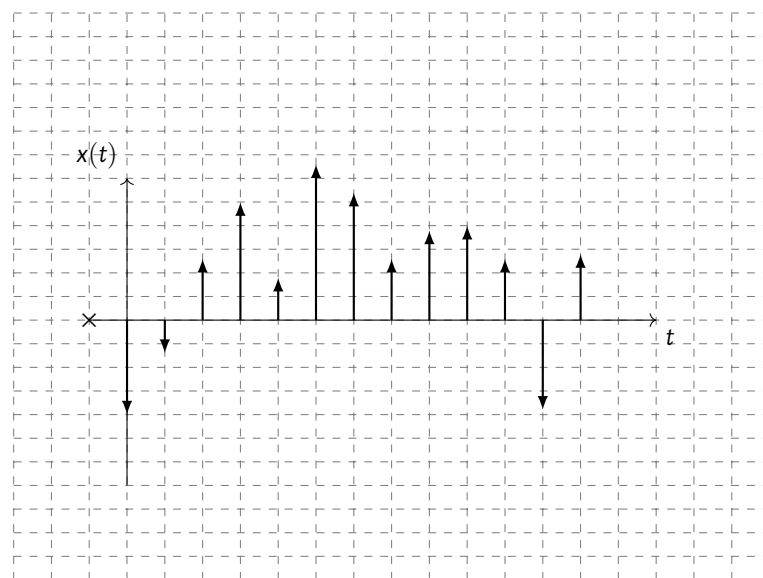
$$w(t) = 1.5\Gamma - 2.25\Gamma_{0.75} + 2(r_{0.75} - r_{1.5}) - 1.5(r_{1.5} - r_2)$$

```
[8]: w = 1.5*G_tau(t)-2.25*G_tau(t,0.75)+2*(r_tau(t,0.75)-r_tau(t,1.5))-1.5*(r_tau(t,1.5)-r_tau(t,2))
```

```
[9]: plt.subplot(2,2,1); plt.plot(t, x);plt.grid()
plt.xlabel('$t$ (sec)');plt.ylabel('$x(t)$')
plt.xticks([-0.5,.25,0.75,2,2.5],[-0.5,.25,0.75,2,2.5])
plt.subplot(2,2,2); plt.plot(t, y);plt.grid()
plt.xlabel('$t$ (sec)');plt.ylabel('$y(t)$')
plt.xticks([-0.5,.5,1,2,2.5],[-0.5,.5,1,2,2.5])
plt.subplot(2,2,3); plt.plot(t, z);plt.grid()
plt.xlabel('$t$ (sec)');plt.ylabel('$w(t)$')
plt.xticks([-0.5,.25,.75,1,2,2.5],[-0.5,.25,.75,1,2,2.5])
plt.subplot(2,2,4); plt.plot(t, w);plt.grid()
plt.xlabel('$t$ (sec)');plt.ylabel('$z(t)$')
plt.xticks([-0.5,0,.75,1.5,2,2.5],[-0.5,0,.75,1.5,2,2.5])
plt.tight_layout()
plt.show()
```

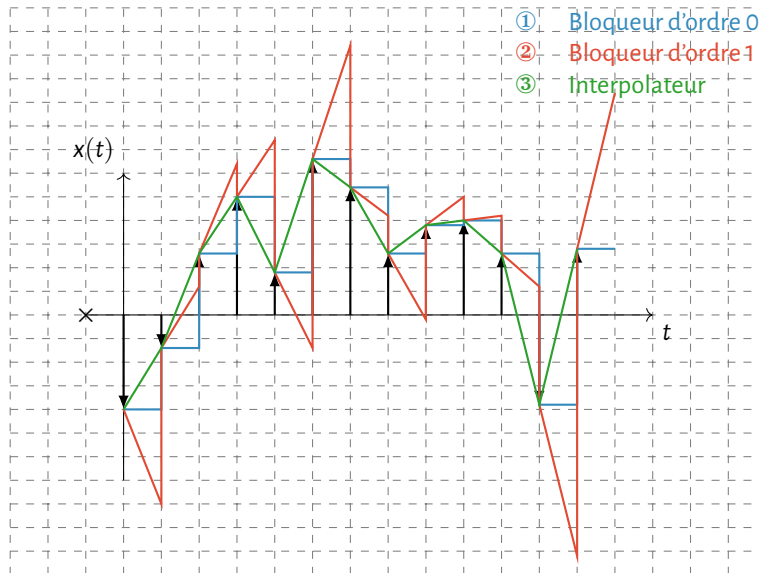
Exercice N° 3 :

Soit le graphe suivant :



Reconstruire le signal par :

- un bloqueur d'ordre zéro;
- un bloqueur d'ordre un;
- un filtre interpolateur.



2 Convolution et corrélation

Objectifs

Cette partie est réservée à :

- ★ la présentation du produit de convolution et la corrélation ;
- ★ l'analyse des réponses dynamiques des SLCIT.

2.1 Convolution

La convolution est une opération mathématique, qu'on dénote par $*$, sur deux fonctions (f et g) qui produit une troisième fonction ($f * g$). Elle traduit la manière avec laquelle la forme d'une fonction f par exemple est modifiée par l'autre fonction g .

Convolution 1D

Le produit de convolution est défini comme l'intégrale du produit de deux fonctions dont une est retardée par rapport à l'autre. Cette intégrale est évaluée pour toutes les valeurs du retard, produisant ainsi la fonction résultat de convolution.

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^t f(t-\varsigma)g(\varsigma) d\varsigma = \int_{-\infty}^t f(\varsigma)g(t-\varsigma) d\varsigma$$

Interprétation géométrique Le produit de convolution peut être approximé de la façon suivante :

$$f * g \approx (f_{l_0}g_{l_n} + \dots + f_{l-1}g_{l_n-l+1} + f_l g_{l_n-l} + f_{l+1}g_{l_n-l-1} + \dots + f_{l_n}g_{l_0}) \Delta t \text{ avec } \Delta t = \frac{t_n - t_0}{n + 1}$$

$$t_0 = l_0 \Delta t$$

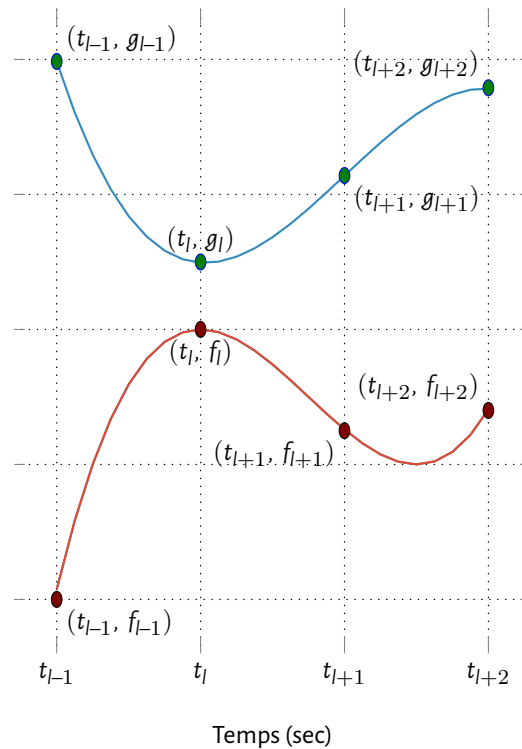
$$t_n = l_n \Delta t$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_{l_0} \\ \vdots \\ f_{l-1} \\ f_l \\ f_{l+1} \\ \vdots \\ f_{l_n} \end{bmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} g_{l_0} \\ \vdots \\ g_{l-1} \\ g_l \\ g_{l+1} \\ \vdots \\ g_{l_n} \end{bmatrix}$$

$$f * g \approx \sum_{l=l_0}^{l_n} f_l g_{l_n+l_0-l} \Delta t$$

Il en découle :

$$f * g \xrightarrow{\Delta t \rightarrow dt} \int_{t_0}^{t_n} f(t)g(t)dt$$



Le produit de convolution est

bilinéaire $f * (g + \gamma h) = (f * g) + \gamma(f * h)$

associatif $(f * g) * h = f * (g * h)$

commutatif $f * g = g * f$

Quelques propriétés

★ *Identité* $f(t) * \delta(t) = f(t)$

★ *Retard* $f(t) * \delta_\tau(t) = f_\tau(t)$

★ *Intégration* $\int_0^t f(\zeta) d\zeta = \Gamma(t) * f(t)$

EXEMPLE

Soient les commandes MATLAB suivantes :

```
1 x = [-0.5 0 1 0.75 2 1 2.1 -0.5];
2 y = [0 1 0 0 1 -1];
3 z = conv(x, y);
4 disp(z)
```

- Pour une période d'échantillonnage de 0.2 sec, donner l'expression de x;
- Pour une même période d'échantillonnage de 0.2 sec, donner l'expression de y;
- Déterminer la sortie z;
- Donner alors le résultat retourné après exécution du code.

① Le signal x est donné par :

$$x(t) = -0.5\delta + \delta_{0.4} + 0.75\delta_{0.6} + 2\delta_{0.8} + \delta_1 + 2.1\delta_{1.2} - 0.5\delta_{1.4}$$

② y s'écrit comme suit :

$$y(t) = \delta_{0.2} + \delta_{0.8} - \delta_1$$

③ Le résultat du produit de convolution z est

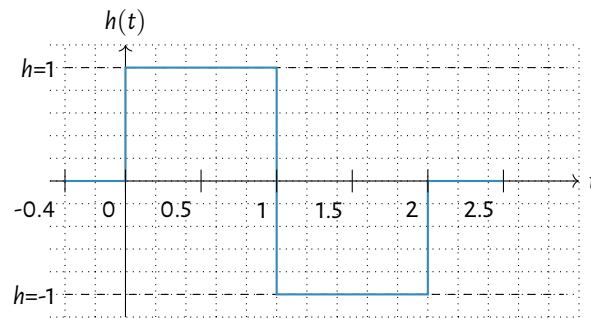
$$z(t) = -0.5\delta_{0.2} + \delta_{0.6} + 0.25\delta_{0.8} + 2.5\delta_1 + 2\delta_{1.2} + 1.85\delta_{1.4} + 0.75\delta_{1.6} - \delta_{1.8} + 1.1\delta_2 - 2.6\delta_{2.2} + 0.5\delta_{2.4}$$

④ Le résultat affiché par Mat1ab

$$z(t) = [0, -0.5, 0, 1, 0.25, 2.5, 2, 1.85, 0.75, -1, 1.1, -2.6, 0.5]$$

EXEMPLE

Soit la réponse impulsionnelle h , donnée par le graphique ci-dessous, d'un système linéaire et invariant dans le temps :



- Trouver l'expression analytique de la fonction h ;
- Exprimer la réponse y de ce système suite à l'application d'un échelon en entrée, d'amplitude 2;
- Tracer le graphique d'évolution temporelle de y ;
- Calculer l'énergie \mathcal{E} ⁶ du signal $y(t)$.

① La fonction h s'écrit :

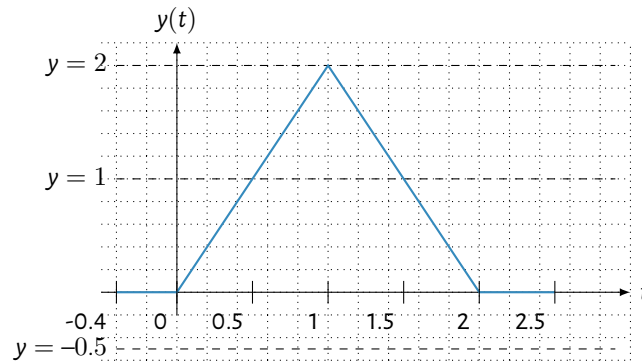
$$h(t) = \Gamma(t) - 2\Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)$$

② La réponse y du système est :

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\Gamma(t) * h(t) \\ &= 2\Gamma(t) * [\Gamma(t) - 2\Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)] \\ &= 2r(t) - 4r_1(t) + 2r_2(t), \quad \text{avec } r(t) = t\Gamma(t) \end{aligned}$$

③ Le graphique d'évolution de y est donné par :

$$6. \mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt$$



④ L'énergie peut se calculer comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt \\
 &= \int_0^2 y^2(t) dt \\
 &= 2 \int_0^1 (2t)^2 dt \\
 &= 8 \frac{[t^3]_0^1}{3} \\
 &= 8/3
 \end{aligned}$$

Convolution 2D

La convolution s'applique aussi aux données spatiales. Elle est présente aussi en traitement d'image. Il s'agit de faire une convolution entre un noyau, un masque ou *kernel* et une image. Il permet de mettre en relief des caractéristiques de l'image d'origine telles que la netteté, la détection des bords, etc.

Une explication visuelle de comment fonctionne la convolution 2D est accessible à l'adresse <http://setosa.io/ev/image-kernels/>

EXEMPLE

On se propose d'appliquer l'opérateur de convolution sur une petite zone d'une image en niveaux de gris. La matrice suivante regroupe les luminances de la portion en question.

30	32	34	53	85
78	71	66	58	53
173	173	172	158	137
30	32	34	53	85

Filtre passe-bas : On considère un masque binomial (3×3), dont le noyau de convolution est donné par :

1/16	1/8	1/16
1/8	1/4	1/8
1/16	1/8	1/16

Compléter le tableau ci-dessous afin d'obtenir la matrice résultat.
(Arrondissement à la partie entière)

87	84	82
112	110	107

Filtre rehausseur de contraste : Le masque proposé permet d'accentuer le contraste sur les bords des objets. Il est donné par :

0	-1/16	0
-1/16	5/16	-1/16
0	-1/16	0

Compléter le tableau ci-dessous afin d'obtenir la matrice résultat.

(Arrondissement à la partie entière)

0	0	0
26	27	23



Le produit de convolution est une métrique instantanée qui renseigne sur le degré de chevauchement, à un instant donné, d'une fonction par une autre inversée et retardée dans le temps. Il s'applique aussi bien pour des données spatiales que temporelles.

2.2 Corrélation

Cas des signaux à énergie finie

Auto-corrélation : L'auto-corrélation d'une fonction complexe f est la corrélation croisée de f avec elle-même. Elle est donnée, dans un cadre continu, par :

$$\begin{aligned}\gamma_{ff}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varsigma + t) f^*(\varsigma) d\varsigma \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varsigma) f^*(\varsigma - t) d\varsigma,\end{aligned}\quad (2)$$

où f^* dénote le complexe conjugué de f .

Dans le cas des fonctions réelles, $\gamma_{ff}(t)$ devient :

$$\begin{aligned}\gamma_{ff}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varsigma + t) f(\varsigma) d\varsigma \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varsigma) f(\varsigma - t) d\varsigma\end{aligned}\quad (3)$$

La version discrète de $\gamma_{ff}(j)$ se simplifie en :

$$\gamma_{ff}(j) = \mathbb{E} \left\{ \left[f(i) - \bar{f} \right] \left[f(i-j) - \bar{f} \right] \right\}$$

où \bar{f} désigne la moyenne de la série f .

Propriétés de l'auto-corrélation

- ★ $\gamma_{ff}(t) = \gamma_{ff}^*(t)$ pour toute fonction f complexe;
- ★ $\gamma_{ff}(t)$ atteint son maximum si $t = 0$.

Inter-corrélation : L'inter-corrélation entre deux fonctions complexes f et g est la corrélation de f par g^* , où g^* dénote le complexe conjugué de g . Elle est donnée, dans un cadre continu, par :

$$\begin{aligned}\gamma_{fg}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varsigma + t)g^*(\varsigma)d\varsigma \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varsigma)g^*(\varsigma - t)d\varsigma,\end{aligned}\quad (4)$$

Dans le cas des fonctions réelles, $\gamma_{fg}(t)$ devient :

$$\begin{aligned}\gamma_{fg}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\varsigma + t)g(\varsigma)d\varsigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\varsigma)g(\varsigma - t)d\varsigma\end{aligned}\quad (5)$$

La version discrète de γ_{fg} se simplifie en :

$$\gamma_{fg}(j) = \mathbb{E} \left\{ \left[f(i) - \bar{f} \right] \left[g(i-j) - \bar{g} \right] \right\}$$

où \bar{f} et \bar{g} désignent les valeurs moyennes des séries f et g respectivement.

Propriétés de l'inter-corrélation

- ★ $\gamma_{fg}(-t) \neq \gamma_{gf}(t)$ c.-à-d. non symétrique;
- ★ $\gamma_{fg}(t) = 0 \implies f \perp g$ (f et g sont orthogonales).



La corrélation est une métrique énergétique qui renseigne sur la similitude de forme et de position entre deux fonctions décalées.

Cas des signaux à énergie infinie

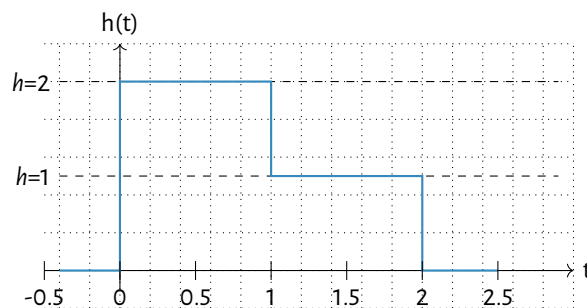
Auto-corrélation :
$$\gamma_{ff}(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\varsigma)f^*(\varsigma - t)d\varsigma$$

Inter-corrélation :
$$\gamma_{fg}(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\varsigma)g^*(\varsigma - t)d\varsigma$$

2.3 Exercices corrigés

Exercice N° 4 :

Soit un système linéaire invariant dans le temps caractérisé par sa réponse impulsionnelle h suivante :



- a) Déterminer l'expression mathématique de h ;
 b) Calculer la réponse y de ce système suite à une excitation u donnée par :

$$u(t) = v(t) + v_2(t), \quad \text{avec} \quad v(t) = 2\Gamma_1 - \Gamma_3(t).$$

① À partir du graphe, la fonction h est

$$h(t) = 2\Gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2$$

② La réponse y est

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * u(t) \\ &= h * (v + v_2) \\ &= \underbrace{h * v}_{z(t)} + h * v_2 \end{aligned}$$

On pose $z(t) = h(t) * v(t)$, alors

$$h * v_2 = \underbrace{h * v * \delta_2}_{z_2}$$

Ainsi :

$$y = z + z_2$$

Calculons l'expression de la fonction $z(t)$:

$$z = h * v$$

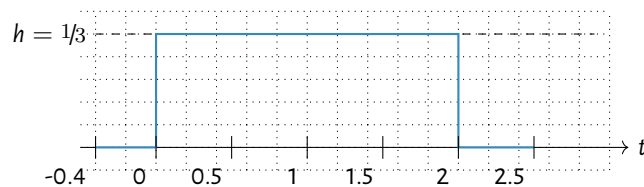
$$\begin{aligned} z(t) &= (2\Gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2) * (2\Gamma_1 - \Gamma_3) \\ &= 4\Gamma * \Gamma_1 - 2\Gamma * \Gamma_3 - 2\Gamma_1 * \Gamma_1 + \Gamma_1 * \Gamma_3 - \Gamma_1 * \Gamma_2 + \Gamma_2 * \Gamma_3 \\ &= 4r_1 - 2r_3 - 2r_2 + r_4 - 2r_3 + r_5 \\ &= 4r_1 - 2r_2 - 4r_3 + r_4 + r_5. \end{aligned}$$

La sortie y se calcule comme suit :

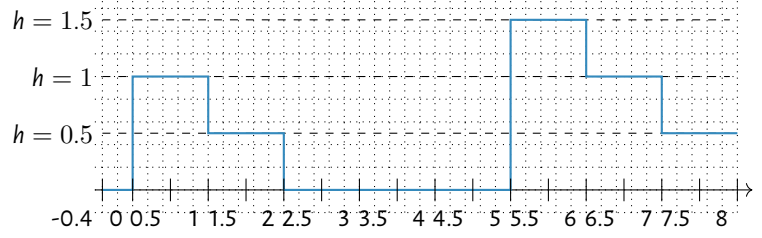
$$\begin{aligned} y(t) &= z(t) + z_2(t) \\ &= 4r_1 - 2r_2 - 4r_3 + r_4 + r_5 + 4r_3 - 2r_4 - 4r_5 + r_6 + r_7 \\ &= 4r_1 - 2r_2 - r_4 - 3r_5 + r_6 + r_7. \end{aligned}$$

Exercice n° 5 :

Soit un système linéaire invariant dans le temps caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ suivante :



- a) Déterminer l'expression mathématique de $h(t)$;
 b) Calculer la réponse $y(t)$ de ce système suite à une excitation $u(t)$ donné par le graphique ci-dessous :



① La réponse impulsionnelle $h(t)$ s'écrit comme suit :

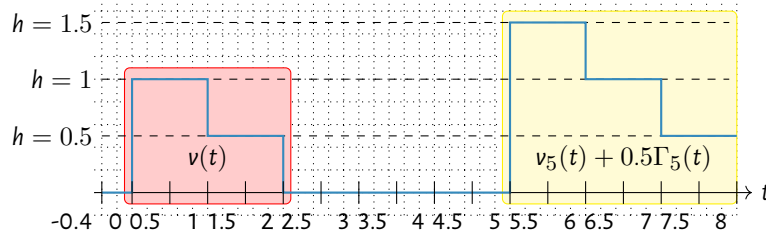
$$h(t) = \frac{1}{3}\Gamma(t) - \frac{1}{3}\Gamma_2(t).$$

② Le signal u peut être décomposé de la façon suivante :

$$u(t) = v(t) + v_5(t) + 0.5\Gamma_5(t),$$

avec

$$v(t) = \Gamma(t) - 0.5\Gamma_1(t) - 0.5\Gamma_2(t).$$



La réponse y à l'excitation u est :

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * u(t) \\ &= h(t) * \left(v(t) + v_5(t) + 0.5\Gamma_5(t) \right) \\ &= h(t) * v(t) + h(t) * v_5(t) + 0.5h(t) * \Gamma_5(t) \end{aligned}$$

On examine d'abord $h(t) * v(t)$:

$$\begin{aligned} h(t) * v(t) &= \frac{1}{3} \left(\Gamma(t) - \Gamma_2(t) \right) * \left(\Gamma(t) - 0.5\Gamma_1(t) - 0.5\Gamma_2(t) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(r(t) - 0.5r_1(t) - 1.5r_2(t) + 0.5r_3(t) + 0.5r_4(t) \right), \end{aligned}$$

où $r(t) = t\Gamma(t)$. La quantité $h(t) * v_5(t)$ est donc :

$$\begin{aligned} h(t) * \underbrace{v_5(t)}_{v(t) * \delta_5(t)} &= h(t) * v(t) * \delta_5(t) \\ &= \frac{1}{3} \left(r_5(t) - 0.5r_6(t) - 1.5r_7(t) + 0.5r_8(t) + 0.5r_9(t) \right). \end{aligned}$$

Le terme $0.5h(t) * \Gamma_5(t)$ se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 0.5h(t) * \Gamma_5(t) &= 0.5 \underbrace{h(t) * \Gamma(t)}_{\int_0^t h(\mu) d\mu} * \delta_5(t) \\
 &= 0.5/3 \int_0^t \left(\Gamma(\mu) - \Gamma_2(\mu) \right) * \delta_5(t) \\
 &= 0.5/3 \left(r(t) - r_2(t) \right) * \delta_5(t) \\
 &= 0.5/3 \left(r_5(t) - r_7(t) \right).
 \end{aligned}$$

La réponse finale est donnée par :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= 1/3 \left(r(t) - 0.5r_1(t) - 1.5r_2(t) + 0.5r_3(t) + 0.5r_4(t) \right. \\
 &\quad \left. + 1.5r_5(t) - 0.5r_6(t) - 2r_7(t) + 0.5r_8(t) + 0.5r_9(t) \right).
 \end{aligned}$$

Exercice n° 6 :

Calculer le résultat de la convolution 2D suivante :

1	0	1	0	2
1	1	3	2	1
1	1	0	1	1
2	3	2	1	3
0	2	0	1	0

ENTRÉE

*

0	1	0
0	0	2
0	1	0

FILTRE

=

...
...
...

SORTIE

Le résultat de la convolution 2D est :

1	0	1	0	2
1	1	3	2	1
1	1	0	1	1
2	3	2	1	3
0	2	0	1	0

ENTRÉE

*

0	1	0
0	0	2
0	1	0

FILTRE

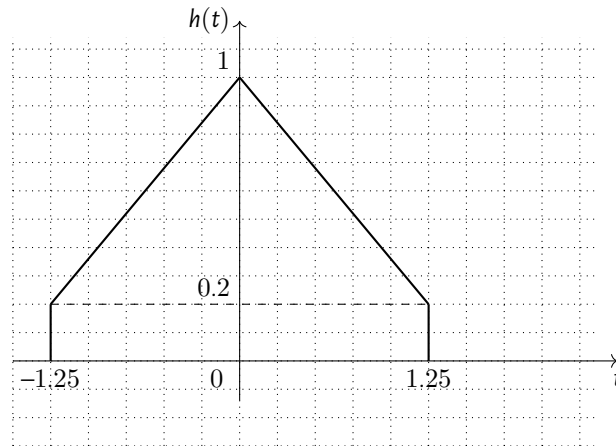
=

7	5	3
4	7	5
7	2	8

SORTIE

Exercice n° 7 :

La fonction h dénote la réponse impulsionnelle d'un système LCIT. Son graphe d'évolution est indiqué par le graphique suivant :

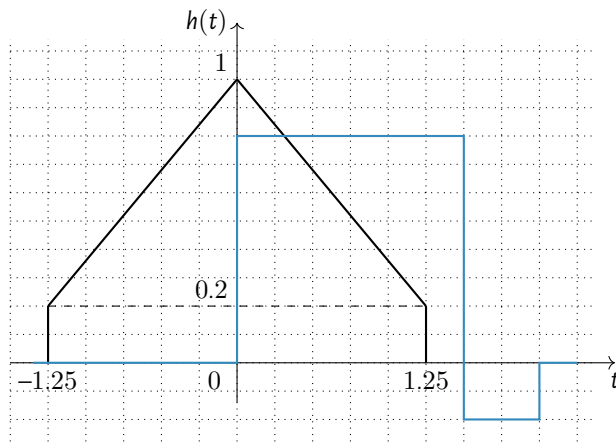


- a) Déterminer l'expression du signal h .
 b) Tracer l'évolution de l'entrée u . Le signal u est donné par

$$u(t) = 0.8\Gamma(t) - \Gamma_{1.5}(t) + 0.2\Gamma_2(t).$$

- c) Calculer la réponse y de ce système suite à l'application de l'excitation u .

$$h(t) = 0.2\Gamma_{-1.25} + 0.64r_{-1.25} - 1.28r_0 + 0.64r_{1.25} - 0.2\Gamma_{1.25}.$$



$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * u(t) \\ &= (0.2\Gamma_{-1.25} + 0.64r_{-1.25} - 1.28r_0 + 0.64r_{1.25} - 0.2\Gamma_{1.25}) * (0.8\Gamma - \Gamma_{1.5} + 0.2\Gamma_2) \\ &= 0.16r_{-1.25} - 0.2r_{0.25} + 0.02r_{0.75} + 0.512 \int r_{-1.25} - 0.64 \int r_{0.5} + 0.128 \int r_{0.75} \\ &\quad - 1.024 \int r_0 + 1.28 \int r_{1.5} - 0.256 \int r_2 + 0.512 \int r_{1.25} - 0.64 \int r_{2.75} \\ &\quad + 0.128 \int r_{3.25} - 0.16r_{1.25} + 0.2r_{2.75} - 0.04r_{3.25} \end{aligned}$$

$$y(t) = 0.16r_{-1.25} - 0.2r_{0.25} + 0.02r_{0.75} - 0.16r_{1.25} + 0.2r_{2.75} - 0.04r_{3.25} + 0.512 \int r_{-1.25} - 1.024 \int r_0 - 0.64 \int r_{0.5} + 0.128 \int r_{0.75} + 0.512 \int r_{1.25} + 1.28 \int r_{1.5} - 0.256 \int r_2 - 0.64 \int r_{2.75} + 0.128 \int r_{3.25}$$

3 Décomposition en série de Fourier

Objectifs

Dans cette partie, nous allons :

- ★ rappeler le formalisme mathématique de la décomposition en série de Fourier des fonctions périodiques;
- ★ implémenter des exemples des signaux avec Python.

3.1 Formalise mathématique

Soit x une fonction déterministe. Elle peut être entièrement définie comme une somme pondérée de fonctions sinusoïdales :

$$x(t) = f_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + f_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \dots + f_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) + \dots + f_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

Si x est périodique de période T (i.e. de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$), elle admet alors une décomposition dite en **série de Fourier** avec $\omega_k = k\omega \forall k \in \mathbb{N}$:

$$x(t) = f_0 \underbrace{\sin(0\omega t + \varphi_0)}_{\sin(\varphi_0)} + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \dots + f_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + \dots + f_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

L'expression de x se réduit à

$$x(t) = \underbrace{f_0 \sin(\varphi_0)}_{a_0} + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \dots + f_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + \dots + f_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

Rappelons que :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Il en résulte que

$$\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \sin(\varphi) + \sin(\omega t) \cos(\varphi)$$

$$\sin(k\omega t + \varphi_k) = \cos(k\omega t) \sin(\varphi_k) + \sin(k\omega t) \cos(\varphi_k)$$

$$\sin(n\omega t + \varphi_n) = \cos(n\omega t) \sin(\varphi_n) + \sin(n\omega t) \cos(\varphi_n)$$

On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$f_k \sin(k\omega t + \varphi_k) = \underbrace{f_k \sin(\varphi_k)}_{a_k} \cos(k\omega t) + \underbrace{f_k \cos(\varphi_k)}_{b_k} \sin(k\omega t) = a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

On peut alors décomposer x comme suit :

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + \dots + a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) + \dots + a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Soit encore

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

On pose $\Phi = \omega t$, une mise à jour de x donne

$$x(\Phi) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\Phi) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\Phi)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) d\Phi &= 0 & \int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) d\Phi &= 0 & \int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) \sin(j\Phi) d\Phi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) \cos(j\Phi) d\Phi &= \pi \text{ ssi } i = j & \int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) \sin(j\Phi) d\Phi &= \pi \text{ ssi } i = j \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) d\Phi = a_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\Phi}_{=2\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(k\Phi) d\Phi}_{=0} + b_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(k\Phi) d\Phi}_{=0} \right]$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi) d\Phi = 2\pi a_0} \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\Phi) d\Phi} \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt}$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) \cos(i\Phi) d\Phi = a_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) d\Phi}_{=0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(k\Phi) \cos(i\Phi) d\Phi}_{=\pi \text{ ssi } (i=k)} + b_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(k\Phi) \cos(i\Phi) d\Phi}_{=0} \right]$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi) \cos(k\Phi) d\Phi = \pi a_k} \quad \boxed{a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(\Phi) \cos(k\Phi) d\Phi} \quad \boxed{a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega t) dt}$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) \sin(i\Phi) d\Phi = a_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) d\Phi}_{=0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(k\Phi) \sin(i\Phi) d\Phi}_{=0} + b_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(k\Phi) \sin(i\Phi) d\Phi}_{=\pi \text{ ssi } (i=k)} \right]$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi) \sin(k\Phi) d\Phi = \pi b_k} \quad \boxed{b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(\Phi) \sin(k\Phi) d\Phi} \quad \boxed{b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega t) dt}$$

La décomposition en série de Fourier permet d'approximer globalement un signal périodique $x(t)$, qui peut s'écrire de la façon suivante :

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) \quad (6)$$

Le premier terme a_0 dénote la valeur moyenne \bar{x} du signal x et est donné par :

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (7)$$

Le terme a_k est :

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt \quad (8)$$

Le coefficient b_k est :

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt \quad (9)$$

EXEMPLE

L'exemple étudié par la suite est inspiré des travaux [HMM19]. On se propose de déterminer la série de Fourier de la fonction périodique suivante :

$$x(t) = A \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq T/2 \quad (10)$$

$$(11)$$

$$= -A \quad \text{si} \quad T/2 \leq t < T \quad (12)$$

$$(13)$$

Le signal est périodique, donc il admet une décomposition en série de Fourier telle que :

$$x(t) = \bar{x} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) \quad (14)$$

Calcul de \bar{x} Le signal est centré par rapport à zéro donc $\bar{x} = 0$.

Calcul de a_k Le signal est impair puisque $x(-t) = -x(t)$, donc $a_k = 0 \quad \forall k \geq 1$.

Calcul de b_k Le coefficient b_k se calcule comme suit :

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt \quad (15)$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt - \frac{2}{T} \int_{T/2}^T A \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt \quad (16)$$

$$= -\frac{2}{T} A \left\{ \int_0^{T/2} \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt + \int_{T/2}^T \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt \right\} \quad (17)$$

Soit encore :

$$b_k = -\frac{2}{T} A \left\{ \left[\frac{T}{2k\pi} \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) \right]_0^{T/2} + \left[\frac{T}{2k\pi} \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) \right]_{T/2}^T \right\} \quad (18)$$

$$= \frac{A}{k\pi} \left\{ \underbrace{-\cos(k\pi)}_{\pm 1} + \underbrace{\cos(0)}_{+1} + \underbrace{\cos(2k\pi)}_{+1} - \underbrace{\cos(k\pi)}_{\pm 1} \right\} \quad (19)$$

Il en résulte :

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{4A}{k\pi} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \quad (20)$$

Compte tenu de ce qui précède, l'expression finale de la fonction x est :

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left\{ \sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(6\pi\frac{t}{T}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(10\pi\frac{t}{T}\right) + \frac{1}{7} \sin\left(14\pi\frac{t}{T}\right) + \dots \right\} \quad (21)$$

3.2 Exemples de simulation avec Python

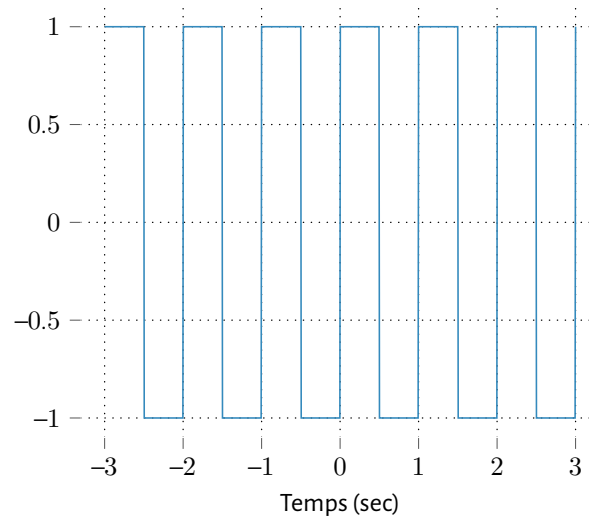
```
[1]: import numpy as np
      from scipy import signal
      import matplotlib.pyplot as plt

      plt.style.use("ggplot")
```

Signal carré

```
[2]: nt = 1000
      t = np.linspace(-3,3,nt)
      wt = 2 * np.pi * t/1 # F = 1Hz, i.e. T = 1 sec

[3]: x = signal.square(wt, 0.5) # Amplitude A = 1
      plt.plot(t,x)
      plt.xlabel('Temps (sec)')
      plt.grid()
```

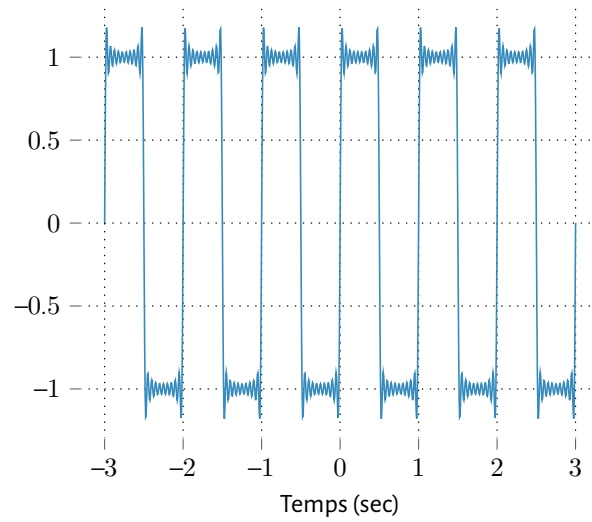


$$x \approx \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t) \quad b_k = \frac{4}{k\pi}$$

```
[4]: xapp_lst = [ 4/(k*np.pi) * np.sin(k * wt) for k in range(1,20,2) ]
      print(type(xapp_lst))
      xapp_np = np.asarray(xapp_lst) # Conversion list --> numpy
      print(type(xapp_np))
      print(xapp_np.shape)
```

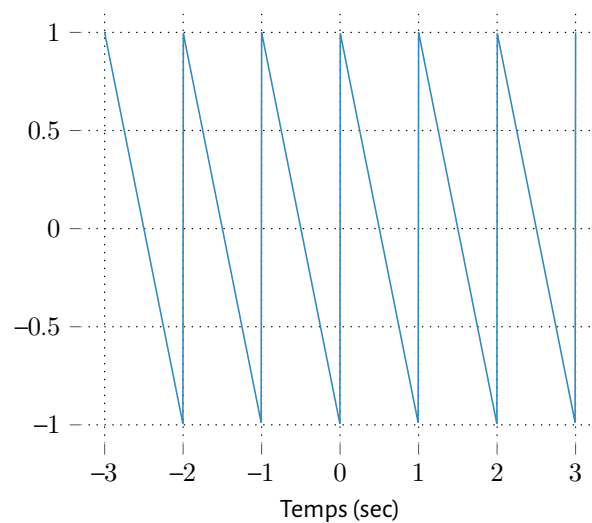
```
xapp = xapp_np.sum(axis=0) # Somme sur les colonnes
print(xapp.shape)
plt.plot(t, xapp)
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.grid()
```

```
<class 'list'>
<class 'numpy.ndarray'>
(10, 1000)
(1000,)
```



Signal en dents de scie

```
[5]: plt.plot(t, signal.sawtooth(wt, 0))
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.grid()
```



$$x = \bar{x} + x_{\sim}(t)$$

Le signal x est impaire $\implies a_k = 0 \quad \forall k$

$$x_{\sim} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\omega t) \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega t)$$

Calcul de b_k

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{1} \int_0^1 x(t) \sin(k\omega t) \\ &= 2 \int_0^1 (\Gamma - 2r) \sin(k\omega t) \\ &= 2 \underbrace{\int_0^1 1 \sin(k\omega t)}_{=0} - 4 \int_0^1 t \sin(k\omega t) \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} b_k &= -4 \int_0^1 \underbrace{t}_F \underbrace{\sin(k\omega t)}_g \\ &= -4 \left(\left[FG \right]_0^1 - \int_0^1 fG \right) \end{aligned}$$

$$F(t) = t \rightarrow f(t) = 1$$

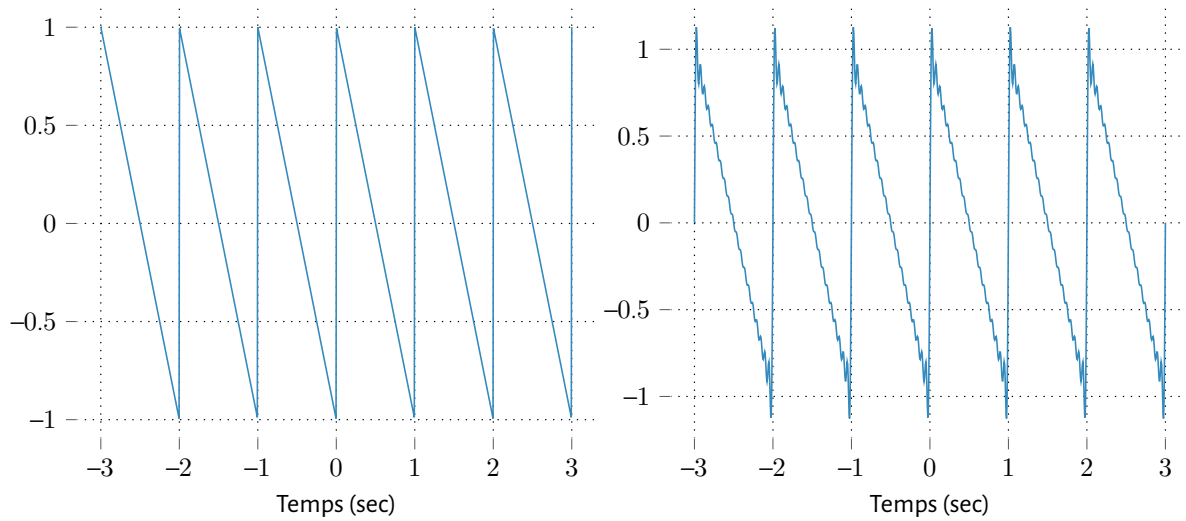
$$g(t) = \sin(k\omega t) \rightarrow G(t) = -\frac{1}{k\omega} \cos(k\omega t)$$

Il en découle que :

$$\begin{aligned} b_k &= 4 \left(\left[t \frac{1}{k\omega} \cos\left(k \frac{2\pi}{1} t\right) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{k\omega} \cos(k\omega t) dt \right) \\ &= 4 \left(\frac{1}{2k\pi} \right) \\ &= \frac{2}{k\pi} \end{aligned}$$

```
[6]: xapp_lst = [ 2/(k*np.pi) * np.sin(k * wt) for k in range(1,20) ]
xapp_np = np.asarray(xapp_lst) # Conversion list --> numpy
xapp = xapp_np.sum(axis=0) # Somme sur les colonnes

plt.subplot(1,2,1)
plt.plot(t, signal.sawtooth(wt, 0))
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.grid()
plt.subplot(1,2,2)
plt.plot(t, xapp)
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.grid()
```

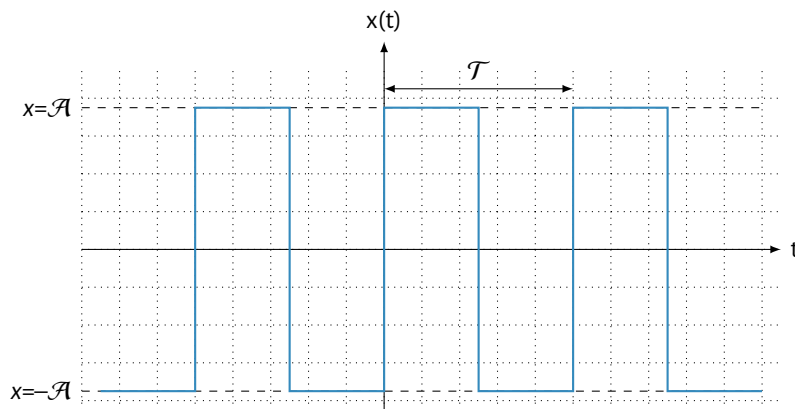


La décomposition en série de Fourier est une procédure mathématique qui permet de décrire une fonction périodique par des termes oscillants en sinus et cosinus de fréquences multiples de la fréquence du signal initial.

3.3 Exercices corrigés

Exercice N° 8 :

Calculer la décomposition en série de Fourier d'un signal carré d'amplitude \mathcal{A} et de période \mathcal{T} :



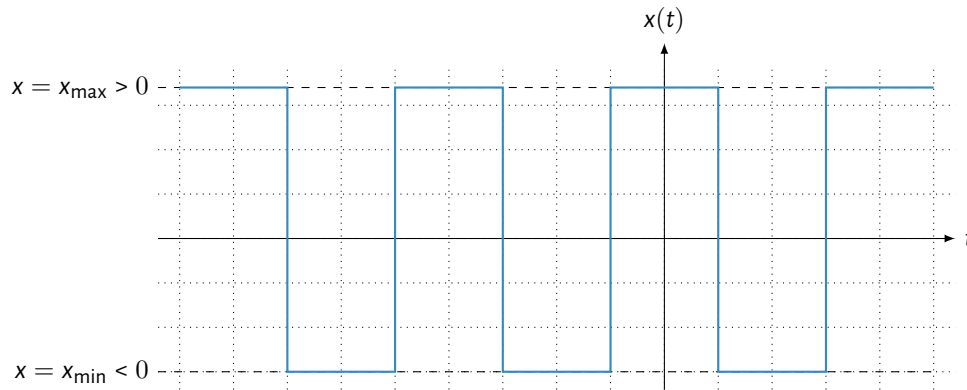
$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{x} + x_-(t) \\ &= \bar{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(2k\pi \frac{t}{\mathcal{T}}\right) + b_k \sin\left(2k\pi \frac{t}{\mathcal{T}}\right) \right) \end{aligned}$$

- Signal centré p/r à zéro $\rightarrow \bar{x} = 0$
- Signal impair $\rightarrow a_k = 0$.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(b_k \sin \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) \right), \quad \text{où} \\
 b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T \left\{ 2\mathcal{A}\Gamma_0 - 2\mathcal{A}\Gamma_{\frac{T}{2}} \right\} \sin \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) dt \\
 &= \frac{4\mathcal{A}}{k\pi}, \quad \text{pour tout } k \text{ impair.}
 \end{aligned}$$

Exercice N° 9 :

Soit le signal carré x , de valeur maximale $x_{\max} > 0$, de valeur minimale $x_{\min} < 0$ et de période T :



- Calculer sa valeur moyenne \bar{x} ;
- Calculer sa valeur efficace x_e ;
- Déterminer sa décomposition en série de Fourier.

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \left\{ x_{\max} \frac{T}{2} + x_{\min} \frac{T}{2} \right\}$$

$$\bar{x} = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 x_e &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{T} \left\{ \int_0^{T/4} x_{\max}^2 dt + \int_{T/4}^{3T/4} x_{\min}^2 dt + \int_{3T/4}^T x_{\max}^2 dt \right\}} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{T} \left\{ x_{\max}^2 \frac{T}{2} + x_{\min}^2 \frac{T}{2} \right\}} \\
 &= \sqrt{\frac{x_{\max}^2 + x_{\min}^2}{2}}
 \end{aligned}$$

$$x_e = \sqrt{\frac{x_{\max}^2 + x_{\min}^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{x} + x_-(t) \\ &= \bar{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) + b_k \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) \right) \end{aligned}$$

Le signal $x(t)$ s'écrit sur une période comme suit :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\max} \left(\Gamma(t) - \Gamma_{\frac{T}{4}}(t) \right) + x_{\min} \left(\Gamma_{\frac{T}{4}}(t) - \Gamma_{\frac{3T}{4}}(t) \right) + x_{\max} \Gamma_{\frac{3T}{4}}(t) \\ &= x_{\max} \Gamma(t) + (x_{\min} - x_{\max}) \Gamma_{\frac{T}{4}}(t) + (x_{\max} - x_{\min}) \Gamma_{\frac{3T}{4}}(t). \end{aligned}$$

Le signal est pair. Ainsi, les termes b_k sont nuls. Les termes a_k sont :

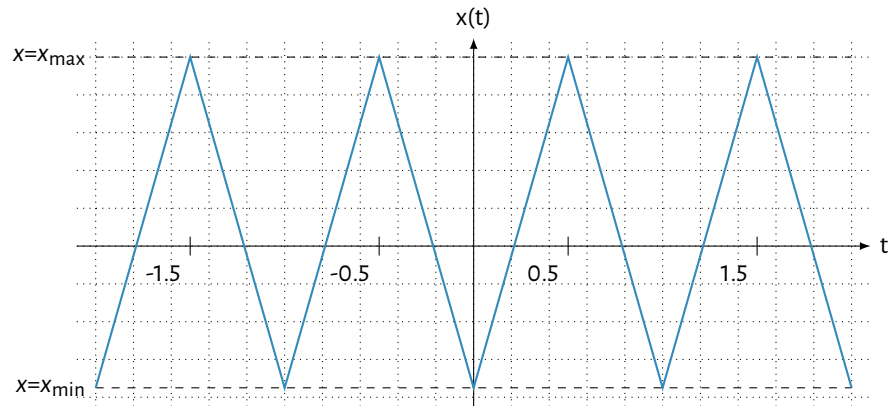
$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T \left\{ x_{\min} \Gamma(t) + (x_{\max} - x_{\min}) \Gamma_{\frac{T}{4}}(t) + (x_{\min} - x_{\max}) \Gamma_{\frac{3T}{4}}(t) \right\} \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt \\ &= \underbrace{2 \frac{x_{\max}}{T} \int_0^T \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt}_{=0} + 2 \frac{(x_{\min} - x_{\max})}{T} \int_{\frac{T}{4}}^T \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt \\ &\quad + 2 \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{T} \int_{\frac{3T}{4}}^T \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt \\ &= 2 \frac{(x_{\min} - x_{\max})}{T} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt \\ &= \frac{(x_{\min} - x_{\max})}{k\pi} \left\{ \sin\left(k \frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

La fonction $x(t)$ peut être approximée par la description suivante :

$$\begin{aligned} x(t) \approx & \frac{(x_{\max} + x_{\min})}{2} + 2 \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{\pi} \left\{ \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) - \frac{1}{3} \cos\left(6\pi \frac{t}{T}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(10\pi \frac{t}{T}\right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{7} \cos\left(14\pi \frac{t}{T}\right) \cdots \right\}. \end{aligned}$$

Exercice N°10 :

Déterminer la décomposition en série de Fourier de la fonction représentée par le graphique suivant :



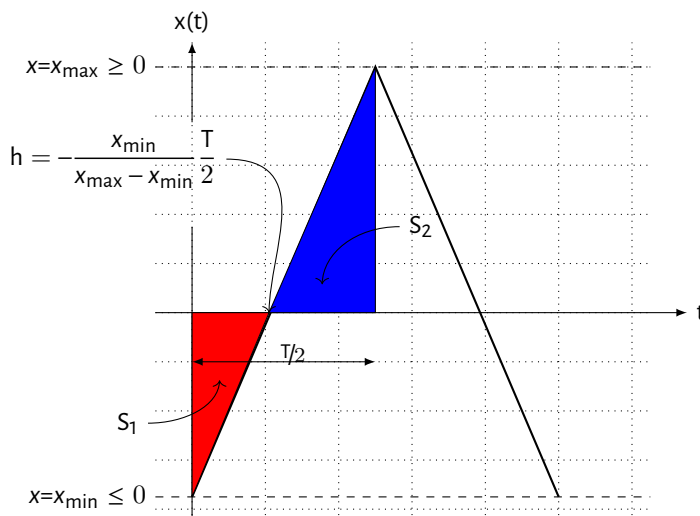
$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{x} + x_-(t) \\ &= \bar{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) + b_k \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) \right) \end{aligned}$$

- Signal n'est pas centré p/r à zéro $\rightarrow \bar{x} \neq 0$
- Signal pair $\rightarrow b_k = 0$.

Sur une période, le signal x s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\min} \Gamma_0 + 2 \frac{x_{\max} - x_{\min}}{T} \left\{ r_0 - 2r_{\frac{T}{2}} \right\} \\ &= x_{\min} \Gamma_0 + 2 \frac{x_{\max} - x_{\min}}{T} \left\{ t \Gamma_0 - 2\left(t - \frac{T}{2}\right) \Gamma_{\frac{T}{2}} \right\} \end{aligned}$$

La valeur moyenne \bar{x} peut être déterminée par :



$$S = S_1 + S_2$$

$$S_1 = x_{\min} \frac{h}{2}$$

$$S_2 = x_{\max} \left(\frac{\frac{T}{2} - h}{2} \right)$$

$$S = (x_{\max} + x_{\min}) \frac{T}{4}$$

Ou encore \bar{x} comme suit :

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\
 &= x_{\min} + 2 \frac{x_{\max} - x_{\min}}{T^2} \int_0^T \left\{ t\Gamma_0 - 2\left(t - \frac{T}{2}\right)\Gamma_{\frac{T}{2}} \right\} dt \\
 &= x_{\min} + 2 \frac{x_{\max} - x_{\min}}{T^2} \left\{ \int_0^T t dt - 2 \int_{T/2}^T t dt + \frac{T^2}{2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} (x_{\max} + x_{\min})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{\sim}(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) \right), \quad \text{où} \\
 a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) dt \\
 &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(x_{\min}\Gamma_0 + 2 \frac{x_{\max} - x_{\min}}{T} \left\{ t\Gamma_0 - 2\left(t - \frac{T}{2}\right)\Gamma_{\frac{T}{2}} \right\} \right) \cos \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) dt
 \end{aligned}$$

$$a_k = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$\begin{array}{l|l}
 I_1 = \frac{2}{T} x_{\min} \int_0^T \cos \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) dt & I_2 = \frac{4}{T^2} (x_{\max} - x_{\min}) \int_0^T t \cos \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) dt \\
 = 0 & = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
 I_3 = -\frac{8}{T^2} (x_{\max} - x_{\min}) \int_{\frac{T}{2}}^T t \cos \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) dt & I_4 = \frac{4}{T} (x_{\max} - x_{\min}) \int_{\frac{T}{2}}^T \cos \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) dt \\
 = 2 \frac{1 - (-1)^k}{k^2 \pi^2} (x_{\max} - x_{\min}) & = 0
 \end{array}$$

$$a_k = 2 \frac{1 - (-1)^k}{k^2 \pi^2} (x_{\max} - x_{\min})$$

4 Analyse fréquentielle

Objectifs

Dans cette partie, nous allons :

- ★ rappeler la définition de la transformée de Fourier;
- ★ énoncer quelques propriétés de cette transformation.

4.1 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier en général est une approche qui permet d'exprimer une fonction comme la somme de ses projections sur une base de fonctions [Cod03]. La décomposition en série de Fourier en particulier est une expansion infinie d'une fonction périodique en termes de sinus et cosinus [EFF93]. Avec une telle décomposition, on peut construire un diagramme qui renseigne sur les amplitudes et phases de toutes les sinusoïdes pour toutes fréquences [Pet02].

Temps continu	Temps discret
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp^{jk\omega t}$	$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k \exp^{jk \frac{2\pi}{N} n}$
$c_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \exp^{-jk\omega t} dt$	$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \exp^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$

Elle offre ainsi une nouvelle possibilité d'examiner le signal dans un autre domaine autre que le domaine temporel. Cette technique est largement utilisée dans plusieurs domaines, notamment la télécommunication. On en cite principalement :

- compression de l'information (JPEG par exemple) ;
- suppression de l'écho et filtrage ;
- modulation et démodulation.

Transformée directe

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathcal{F}\{x(t)\} \\ X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp^{-2j\pi ft} dt \end{aligned}$$

Transformée inverse

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} \\ x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp^{2j\pi ft} df \end{aligned}$$

Propriétés de la Transformée de Fourier

Linéarité $h(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} \mathcal{H}(f) = \alpha X(f) + \beta Y(f)$

Translation $y(t) = x(t - \tau) \xleftrightarrow[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} Y(f) = \exp^{-2j\pi f\tau} X(f)$

Modulation $y(t) = \exp^{2j\pi \frac{t}{\tau}} x(t) \xleftrightarrow[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} Y(f) = X(f - \frac{1}{\tau})$

Similitude (Changement d'échelle) $y(t) = x(\alpha t) \xleftrightarrow[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} Y(f) = \frac{1}{|\alpha|} X(\frac{f}{\alpha}) \text{ pour } \alpha > 0$

Énergie finie

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Puissance

$$\mathcal{P} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Théorème de Parseval Plancherel

Soit x un signal tel que

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp^{-2j\pi ft} dt \implies \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df.$$

- L'énergie peut se calculer indifféremment dans l'espace du temps ou des fréquences;
- La quantité $|X(f)|^2$ dénote la densité spectrale d'énergie. Dans le cas où le signal x est limité dans le temps, on parle de densité spectrale de puissance.

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.style.use("ggplot")
plt.rcParams['figure.figsize'] = [16, 12]

[2]: # Créer un signal sinusoïdal
ts = 0.001
t = np.arange(0,1,ts)
n = len(t)
# Deux fréquences : f1 = 50Hz et f2 = 150Hz
x = np.sin(2*np.pi*50*t) + np.sin(2*np.pi*150*t)
b = 3*np.random.randn(n) # Ajout du bruit
xb = x + b # Signal bruité
```

Calcul de la Transformée de Fourier Rapide (en : FFT)

```
[3]: x_f = np.fft.fft(xb, n)
```

Densité spectrale de puissance (en : *Power Spectrum Density*) (puissance/ fréquence)

```
[4]: dsp = x_f * np.conj(x_f) / n
print(np.max(dsp))
```

(322.6697988608362+0j)

Usage de la DSP pour le débruitage

```
[5]: idx = dsp > 100
x_f = idx * x_f
x_t_app = np.fft.ifft(x_f)
```

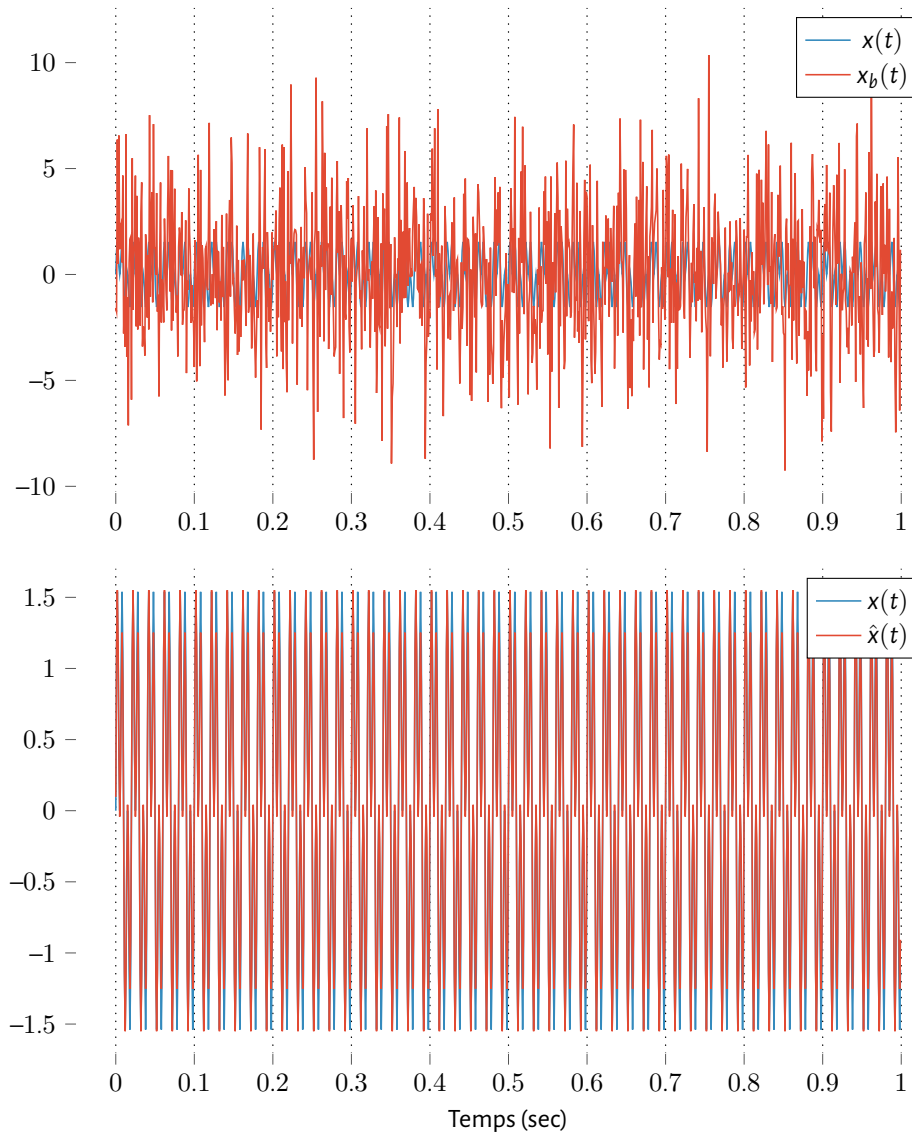
Il reste maintenant à tracer les graphiques de x , de x_b et de \hat{x}

```
[6]: plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(t, x, label=r'$x(t)$')
plt.plot(t, xb, label=r'$x_b(t)$')
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.legend()

plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(t,x,label=r'$x(t)$')
plt.plot(t,x_t_app,label=r'$\hat{x}(t)$')
```

```
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.legend()
```

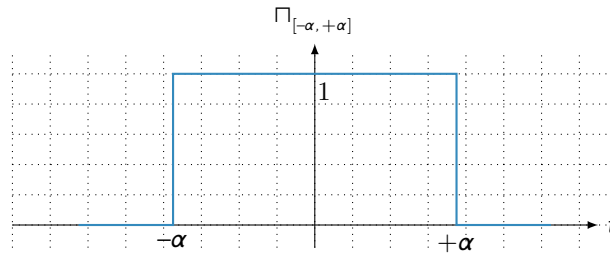
/home/mhamdi/anaconda3/lib/python3.7/site-packages/numpy/core/_asarray.py:85:
ComplexWarning: Casting complex values to real discards the imaginary part
return array(a, dtype, copy=False, order=order)



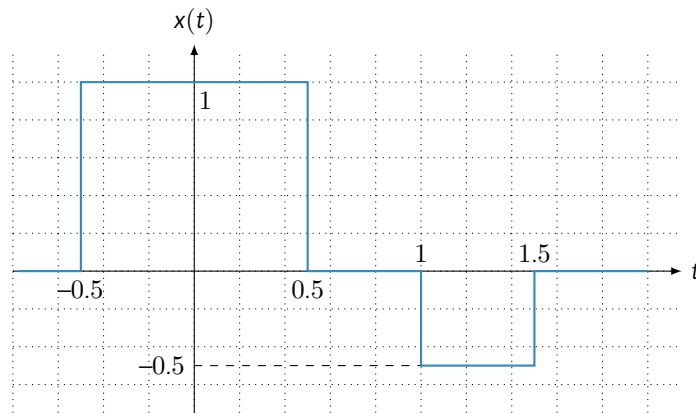
4.2 Exercices corrigés

Exercice N°11 :

- a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte $\Pi_{[-\alpha, +\alpha]}$, avec $\alpha > 0$, indiquée par la courbe suivante :



b) En déduire l'expression de la transformée de Fourier de la fonction $x(t)$ donnée par le graphique suivant :



① La transformée de Fourier de $\Pi_{[-\alpha, +\alpha]}(t)$ est :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{\Pi_{[-\alpha, +\alpha]}(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{[-\alpha, +\alpha]}(t) e^{-2j\pi f t} dt \\
 &= \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-2j\pi f t} dt \\
 &= -\frac{1}{2j\pi f} \left[e^{-2j\pi f t} \right]_{-\alpha}^{+\alpha} \\
 &= \frac{e^{-2j\pi f \alpha} - e^{2j\pi f \alpha}}{2j\pi f} \\
 &= \frac{2j \sin(2\pi f \alpha)}{2j\pi f} \\
 &= 2\alpha \frac{\sin(2\pi f \alpha)}{2\pi f \alpha}.
 \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\mathcal{F}\{\Pi_{[-\alpha, +\alpha]}(t)\} = 2\alpha \operatorname{sinc}(2\pi f \alpha).$$

② La fonction $x(t)$ peut s'écrire comme suit :

$$x(t) = \Pi_{[-0.5, +0.5]}(t) - 0.5 \Pi_{[-0.25, +0.25]}(t - 1.25).$$

Sa transformée de Fourier est alors :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{x(t)\} &= \mathcal{F}\left\{\Pi_{[-0.5, +0.5]}(t) - 0.5 \Pi_{[-0.25, +0.25]}(t - 1.25)\right\} \\
 &= \mathcal{F}\left\{\Pi_{[-0.5, +0.5]}(t)\right\} - 0.5 \mathcal{F}\left\{\Pi_{[-0.25, +0.25]}(t - 1.25)\right\} \\
 &= \mathcal{F}\left\{\Pi_{[-0.5, +0.5]}(t)\right\} - 0.5 e^{-2j\pi f \times 1.25} \mathcal{F}\left\{\Pi_{[-0.25, +0.25]}(t)\right\} \\
 &= 2 \times 0.5 \operatorname{sinc}(2\pi f \times 0.5) - 0.5 \times 2 \times 0.25 \operatorname{sinc}(2\pi f \times 0.25) e^{-2.5j\pi f}.
 \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \operatorname{sinc}(\pi f) - 0.25 \operatorname{sinc}(0.5\pi f) e^{-2.5j\pi f}.$$

5 Filtrage des signaux

Objectifs

Dans cette partie, nous allons :

- ★ montrer le potentiel applicatif du produit de convolution en présence du bruit;
- ★ analyser fréquentiellement des systèmes linéaires;
- ★ esquisser des diagrammes de Bode.

La conception d'un filtre consiste à construire une structure qui permet de satisfaire un ensemble de spécifications. On se propose dans la suite de ce cours d'étudier quelques formes répondues dans la littérature.

5.1 Approche temporelle

La synthèse d'un filtre peut être vue comme un problème d'optimisation, où l'ensemble des contraintes contribue à la minimisation d'une fonction erreur, notamment l'écart quadratique entre la valeur réelle de x et de sa valeur approchée \tilde{x} .

```
[1]: import numpy as np
      from scipy import signal
      import matplotlib.pyplot as plt
```

Soit le signal x défini par :

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t), \quad \text{avec } f_0 = 1\text{Hz}$$

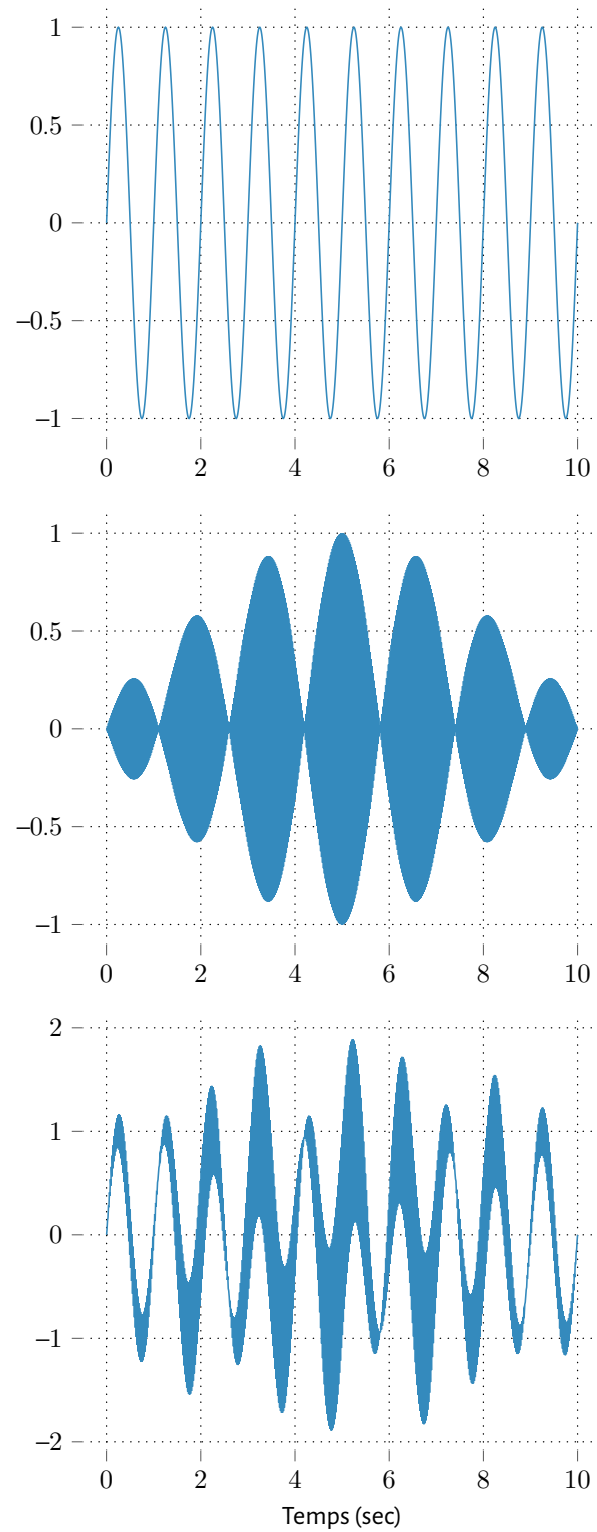
On lui ajoute un bruit additif :

$$b(t) = -0.4 \sin(2\pi f_1 t) + 0.6 \sin(2\pi f_2 t), \quad \text{avec } f_1 = 250\text{Hz} \text{ \& } f_2 = 350\text{Hz}$$

```
[2]: t = np.linspace(0,10,1000)
      x = np.sin(2*np.pi*t)
      f1, f2 = 250, 350
      b = -0.4*np.sin(2*np.pi*f1*t)+0.6*np.sin(2*np.pi*f2*t)
      xb = x+b
      # Signal non bruité
      plt.subplot(3,1,1)
      plt.plot(t,x)
      plt.grid()
      # Bruit additif
      plt.subplot(3,1,2)
```



```
plt.plot(t,b)
plt.grid()
# Signal bruité
plt.subplot(3,1,3)
plt.plot(t,xb)
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.grid()
```

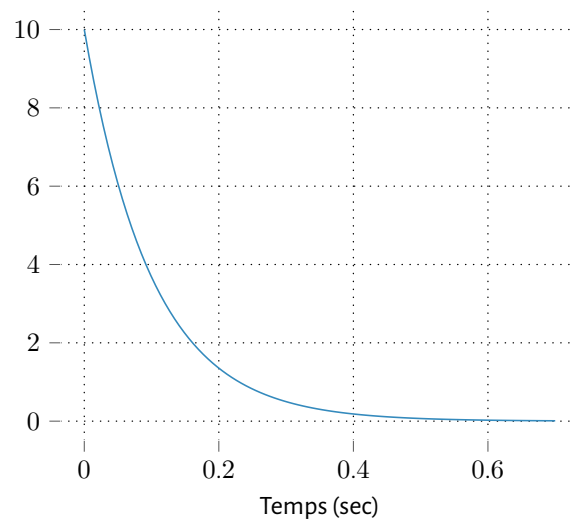


On se propose d'appliquer le filtre de réponse impulsionnelle suivante :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec } \tau = 0.4 \text{ sec}$$

```
[3]: tau = 0.1; th = np.linspace(0, 7*tau, 100)
h = 1/tau*np.exp(-th/tau);
plt.plot(th, h)
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.grid()

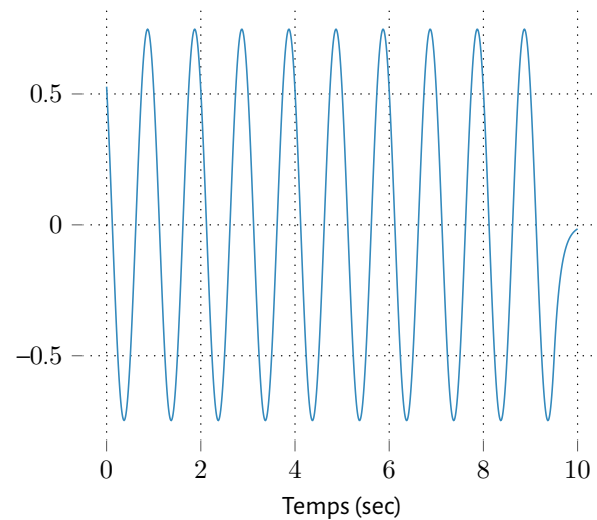
filt = h/h.sum() # Normaliser le filtre filt = h/Sigma_h
```



$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \underbrace{\left[x(t) + b(t) \right]}_{x_b} * h(t) \\ &= \underbrace{x * h}_{x_h} + \underbrace{b * h}_{b_h} \end{aligned}$$

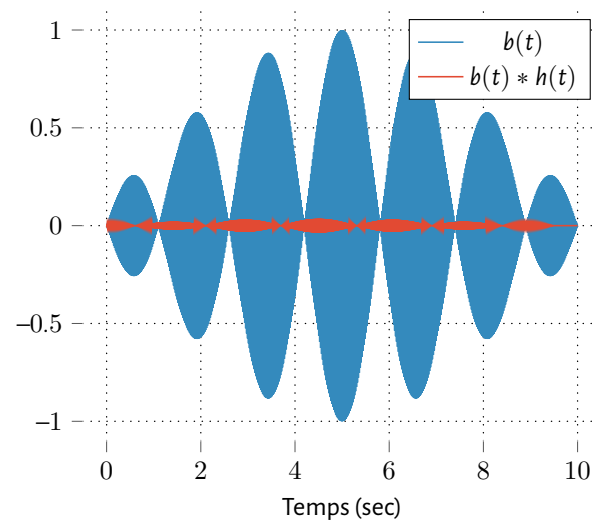
L'application du filtre à la fonction d'origine n'a presque aucun effet sur le signal d'origine x

```
[4]: xh = np.convolve(x, filt, 'same')
plt.plot(t, xh)
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.grid()
```



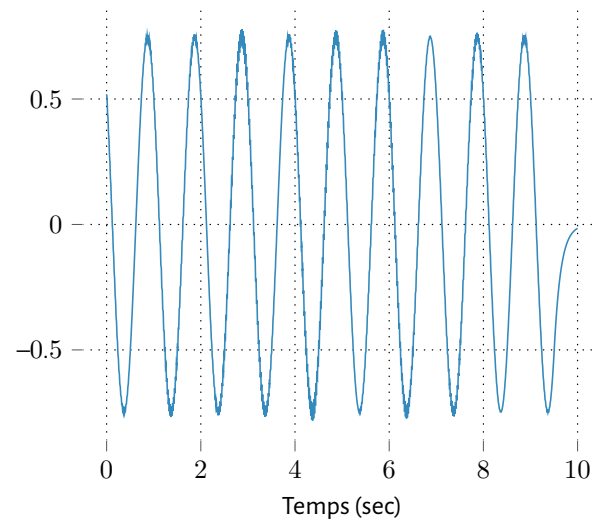
On se propose d'étudier l'effet du filtre h sur le bruit additif b . On remarque qu'il annule presque la contribution de b .

```
[5]: bh = np.convolve(b, filt, 'same')
plt.plot(t, b, label=r'$b(t)$')
plt.plot(t, bh, label=r'$b(t) \ast h(t)$')
plt.legend()
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.grid()
```



Finalement, la convolution du filtre avec le signal bruité donne :

```
[6]: xf = np.convolve(xb, filt, 'same')
plt.plot(t, xf)
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.grid()
```



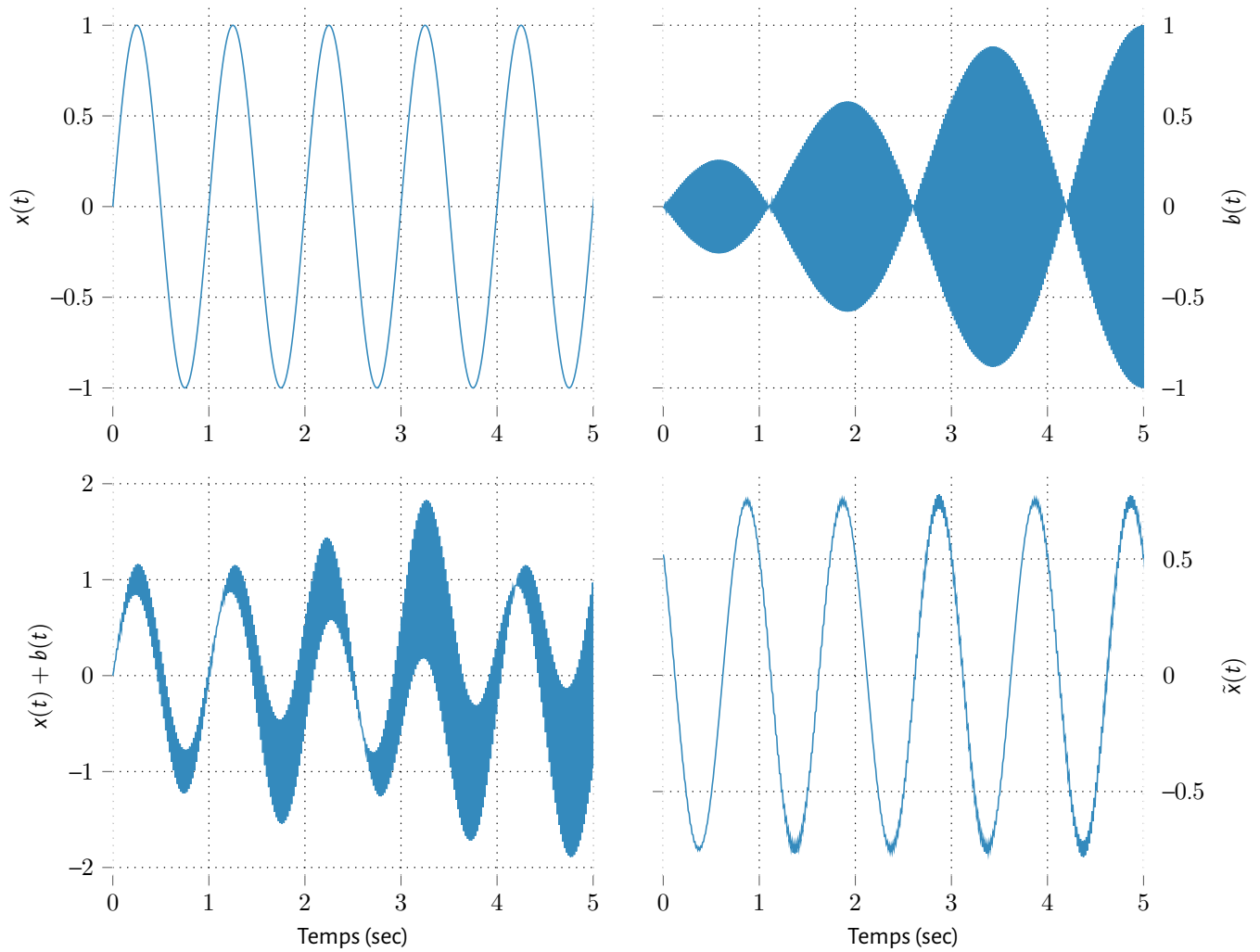
En résumé, pour pouvoir comparer les graphiques, le code de la cellule suivante permet de visualiser les différents signaux.

```
[7]: plt.subplot(2,2,1)
plt.plot(t, x); plt.title(r'$x(t)$')
plt.grid(); plt.xlim(0,5)

plt.subplot(2,2,2)
plt.plot(t, b); plt.title(r'$b(t)$')
plt.grid(); plt.xlim(0,5)

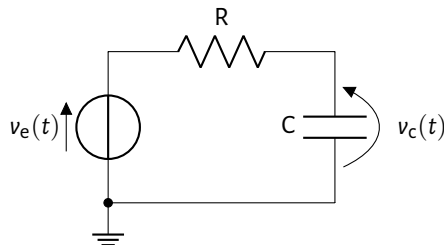
plt.subplot(2,2,3)
plt.plot(t, xb); plt.title(r'$x(t)+b(t)$')
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.grid(); plt.xlim(0,5)

plt.subplot(2,2,4)
plt.plot(t, xf); plt.title(r'$\tilde{x}(t)$')
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.grid(); plt.xlim(0,5)
```



5.2 Approche fréquentielle

On se propose d'étudier un filtre passif. Il s'agit de la mise en cascade d'une résistance R et d'un condensateur C , soumis à une entrée sinusoïdale $v_e(t)$. On s'intéresse à la tension capacitive $v_c(t)$:



On démontre qu'un tel circuit pour un condensateur initialement déchargé, c.-à-d. $v_c(t = 0) = 0$, est régi par l'équation différentielle suivante :

$$\tau \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_e(t), \quad \text{avec } v_c(t = 0) = 0,$$

où $\tau = 1$ sec désigne la constante de temps du montage.

Sa réponse impulsionnelle est :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Gamma(t).$$

La transformée de Fourier de h est :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-2j\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} \Gamma(t) e^{-2j\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-2j\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^{+\infty} e^{-(1+2j\pi\tau f)\frac{t}{\tau}} dt \\ &= \frac{-1}{(1+2j\pi\tau f)} \left[e^{-(1+2j\pi\tau f)\frac{t}{\tau}} \right]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

Le module et l'argument seront donnés ainsi par :

$$\mathcal{H}(f) = \frac{1}{1+2j\pi\tau f}$$

$$|\mathcal{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2\tau^2 f^2}}$$

$$\angle \mathcal{H}(f) = -\arctan(2\pi\tau f)$$

Considérations asymptotiques

- Basses fréquences

$$\lim_{f \rightarrow 0} |\mathcal{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2\tau^2 0^2}} = 1$$

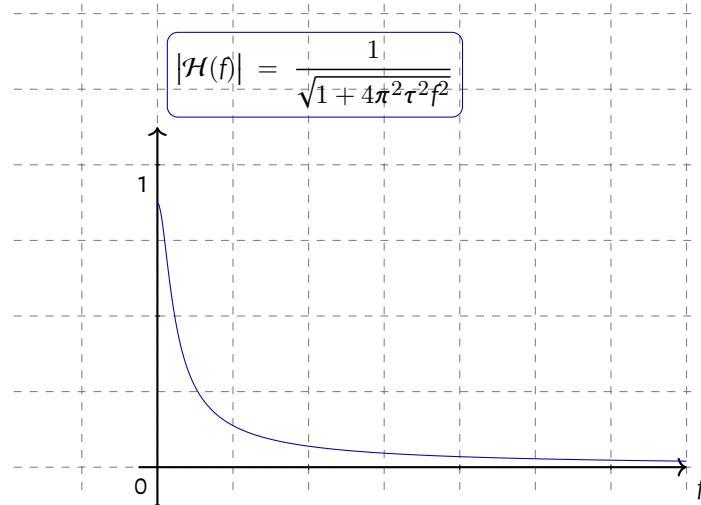
- Fréquence de coupure

$$\left| \mathcal{H}\left(f = \frac{1}{2\pi\tau}\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2\tau^2 \left(\frac{1}{2\pi\tau}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Hautes fréquences

$$\lim_{f \rightarrow \infty} |\mathcal{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2\tau^2 f^2}} \Big|_{f \rightarrow \infty} = 0$$

Lorsque la fréquence augmente, une plus grande partie de la puissance est transférée vers la masse et la tension de sortie diminue progressivement.



Le circuit proposé laisse passer les fréquences basses et atténue les fréquences hautes.

Considérations asymptotiques

- Basses fréquences

$$\lim_{f \rightarrow 0} \angle H(f) = -\arctan(2\pi\tau \cdot 0) = 0$$

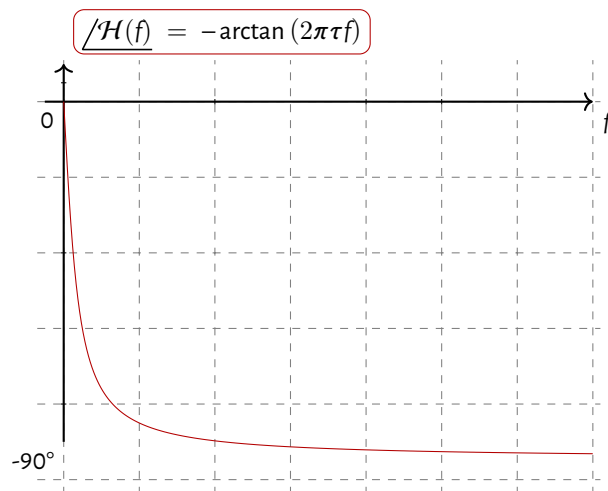
- Fréquence de coupure

$$\angle H\left(f = \frac{1}{2\pi\tau}\right) = -\arctan\left(2\pi\tau \frac{1}{2\pi\tau}\right) = -45^\circ$$

- Hautes fréquences

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \angle H(f) = -\arctan(2\pi\tau f)|_{f \rightarrow \infty} = -90^\circ$$

L'impédance complexe du condensateur $\frac{1}{2j\pi fC}$ présente un argument nul aux fréquences les plus basses. La tension v_c à ses bornes est alors en phase avec la tension d'entrée v_e .



GAIN EN DÉCIBELS

Nous introduisons également la notion du gain en décibels. Cette dernière notion est souvent utilisée mais parfois mal connue. Le "BELL" (B) est une unité de mesure de transfert de puissance. Elle a été introduite par les laboratoires **BELL** après

les années 1920. Ce gain a tiré son nom de l'ingénieur Alexandre Graham BELL⁷ (1847 – 1922) qui a inventé le téléphone.

Le “BELL” est égal au rapport logarithmique décimal de deux puissances. Le “DÉCIBELL”, quant à lui, le sous multiple du “BELL” ($1 \text{ B} = 10 \text{ dB}$) est largement utilisé dans les domaines de la physique, de l'électronique et de l'acoustique.

En considérant deux puissances P_e et P_s , nous pouvons déterminer le gain \mathcal{G} , exprimé en “DÉCIBELL”, tel que :

$$\mathcal{G}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_e}. \quad (22)$$

Sachant que le carré du module de la fonction $\mathcal{H}(f)$ représente un transfert d'énergie entre l'entrée et la sortie du filtre, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{G}_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |\mathcal{H}(f)| \quad (23)$$

Rappelons l'expression de $|\mathcal{H}(f)|$:

$$|\mathcal{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 \tau^2 f^2}}$$

Nous pouvons simplifier davantage l'expression de \mathcal{G} (dB) :

$$\mathcal{G} \text{ (dB)} = -10 \log_{10} (1 + 4\pi^2 \tau^2 f^2)$$

Pour pouvoir tracer la réponse en fréquence de façon plus nette, on peut considérer la méthode simplifiée, inventée par l'ingénieur américain Hendrick Wade BODE⁸ (1905). Il s'agit ici de tracer le module \mathcal{G}_{dB} en fonction du logarithme de la pulsation c.-à-d. f .

Considérations asymptotiques

- Basses fréquences

$$\mathcal{G} \text{ (dB)}|_{f=0} = 0$$

- Fréquence de coupure

$$\mathcal{G} \text{ (dB)}|_{f=\frac{1}{2\pi\tau}} = -10 \log_{10} (2) = -3$$

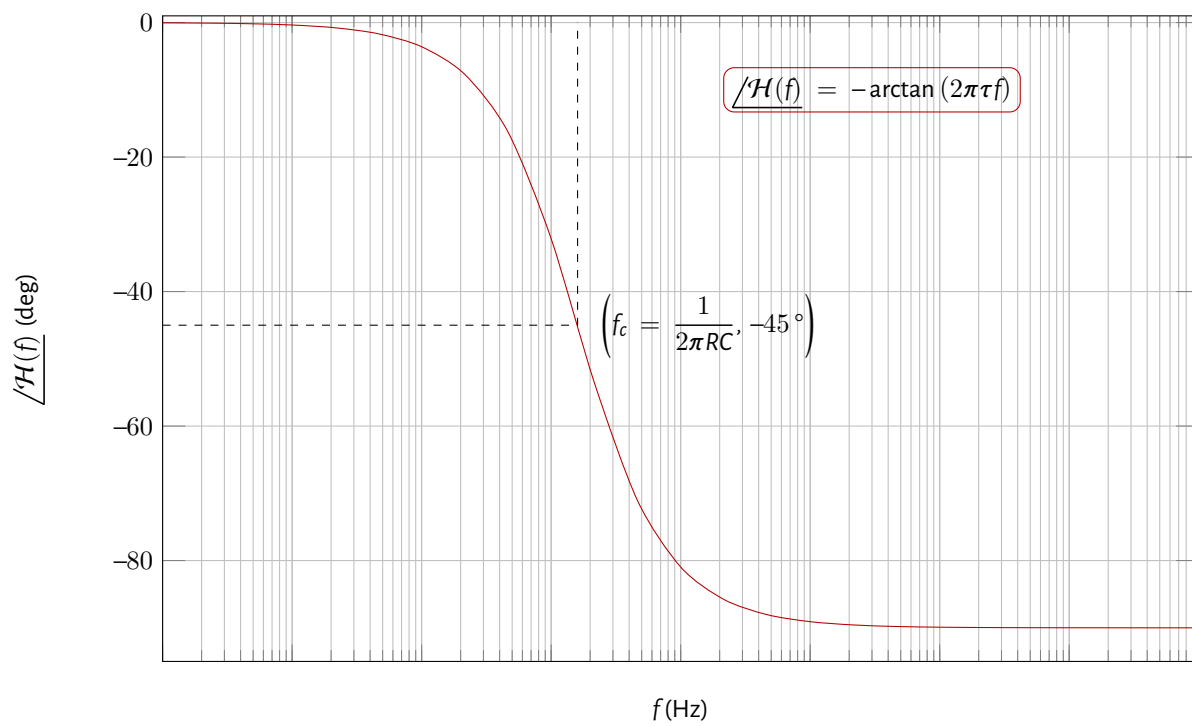
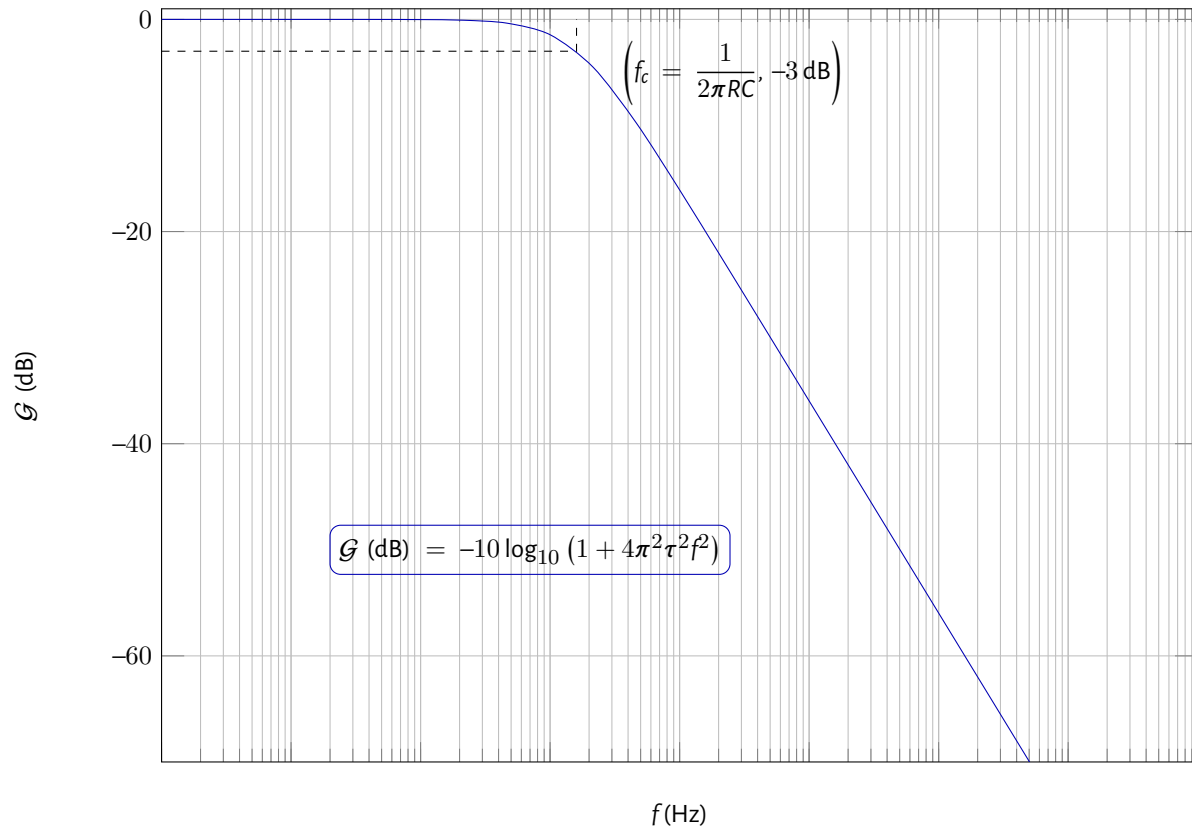
- Hautes fréquences

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \mathcal{G} \text{ (dB)} \sim -20 \log_{10} (2\pi\tau f)$$

On désigne par f_c la fréquence de coupure du circuit, soit encore $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$.

7. http://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_Graham_Bell

8. http://en.wikipedia.org/wiki/Hendrik_Wade_Bode



5.3 Exercices corrigés

Exercice N° 12 :

La réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un filtre passe-bas est donnée par :

$$h(t) = e^{-t} \Gamma(t).$$

Sa transformée de Fourier est :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f) &= \mathcal{F}\{h(t)\}, \\ &= \frac{1}{1 + 2j\pi f}. \end{aligned}$$

Le module et l'argument de $\mathcal{H}(f)$ sont donnés respectivement par :

$$|\mathcal{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2}}, \quad \angle \mathcal{H}(f) = -\arctan(2\pi f).$$

Calculer la réponse $y(t)$ du système $h(t)$ suite à l'application de l'entrée

$$u(t) = \cos(4\pi t) - 0.5 \sin(0.5t).$$

L'entrée $u(t)$ est :

$$u(t) = \cos(2\pi f_1 t) - 0.5 \sin(2\pi f_2 t),$$

avec $f_1 = 2$ Hz et $f_2 \approx 80$ mHz. La sortie $y(t)$ sera calculée comme suit :

$$y(t) = |\mathcal{H}(f_1)| \cos\left(2\pi f_1 t + \angle \mathcal{H}(f_1)\right) - 0.5 |\mathcal{H}(f_2)| \sin\left(2\pi f_2 t + \angle \mathcal{H}(f_2)\right),$$

avec :

$$\begin{array}{ll} |\mathcal{H}(f_1)| \approx 0.08 & |\mathcal{H}(f_2)| \approx 0.89 \\ \angle \mathcal{H}(f_1) \approx -1.491 \text{ rad} & \angle \mathcal{H}(f_2) \approx -0.465 \text{ rad}. \end{array}$$

La sortie y s'écrit finalement :

$$y(t) = 0.08 \cos(4\pi t - 1.491 \text{ rad}) - 0.445 \sin(0.5t - 0.465 \text{ rad}).$$

Exercice N°13 :

Considérons un système linéaire et invariant dans le temps décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 4y = 5 \frac{du}{dt} - 3u.$$

- Identifier l'entrée et la sortie;
- Calculer la réponse en fréquence de ce système qu'on dénote par $\mathcal{H}(f)$:

$$\mathcal{H}(f) = \frac{\mathcal{Y}(f)}{\mathcal{U}(f)},$$

$$\text{où } \mathcal{Y}(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} \quad \& \quad \mathcal{U}(f) = \mathcal{F}\{u(t)\}$$

- c) Calculer son module et sa phase;
- d) Calculer la réponse de ce système soumis à une entrée $u(t) = \cos(3t)$;
- e) Calculer la transformée de Fourier de la sortie de ce système soumis à une entrée échelon d'amplitude 2.

① L'entrée et la sortie sont respectivement u et y ;

② L'opérateur $j\omega = 2j\pi f$ permet de représenter l'action dérivée dans le domaine fréquentiel. L'équation différentielle devient alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 4y\right\} &= \mathcal{F}\left\{5\frac{du}{dt} - 3u\right\} \\ (j\omega)^2 \mathcal{Y}(f) + 5j\omega \mathcal{Y}(f) + 4\mathcal{Y}(f) &= 5j\omega \mathcal{U}(f) - 3\mathcal{U}(f) \\ \{5j\omega + 4 - \omega^2\} \mathcal{Y}(f) &= \{5j\omega - 3\} \mathcal{U}(f) \\ \{10j\pi f + 4 - 4\pi^2 f^2\} \mathcal{Y}(f) &= \{10j\pi f - 3\} \mathcal{U}(f)\end{aligned}$$

La fonction \mathcal{H} s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f) &= \frac{\mathcal{Y}(f)}{\mathcal{U}(f)} \\ &= \frac{10j\pi f - 3}{10j\pi f + 4(1 - \pi^2 f^2)}\end{aligned}$$

③ Module & argument

$$\begin{aligned}|\mathcal{H}(f)| &= \sqrt{\frac{100\pi^2 f^2 + 9}{100\pi^2 f^2 + 16(1 - \pi^2 f^2)^2}} \\ \angle \mathcal{H}(f) &= -\arctan\left(\frac{10}{3}\pi f\right) - \arctan\left(\frac{10}{4} \frac{\pi f}{1 - \pi^2 f^2}\right)\end{aligned}$$

$$\textcircled{4} 2\pi f = 3 \text{ rad/sec} \Rightarrow \pi f = 3/2 \text{ rad/sec}$$

$$\begin{aligned}|\mathcal{H}(f)| &= \sqrt{\frac{100\frac{9}{4} + 9}{100\frac{9}{4} + 16\left(1 - \frac{9}{4}\right)^2}} \\ &= 0.967\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle \mathcal{H}(f) &= -\arctan\left(\frac{10}{3} \frac{3}{2}\right) - \arctan\left(\frac{10}{4} \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{4}}\right) \\ &= -0.12 \text{ rad}\end{aligned}$$

La sortie y est alors :

$$y(t) = 0.967 \cos(3t).$$

⑤ La transformée de Fourier de la sortie y est ⁹

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y}(f) &= \mathcal{F}\{y(t)\} \\
 &= \mathcal{F}\{h(t) * u(t)\} \\
 &= \mathcal{F}\{h(t)\} \times \mathcal{F}\{u(t)\} \\
 &= \mathcal{H}(f) \times \mathcal{U}(f) \\
 &= \frac{10j\pi f - 3}{10j\pi f + 4(1 - \pi^2 f^2)} \left(\delta(f) - \frac{j}{\pi f} \right) \\
 &= -\frac{3}{4} \delta(f) - \frac{10j\pi f - 3}{10j\pi f + 4(1 - \pi^2 f^2)} \frac{j}{\pi f}
 \end{aligned}$$

Exercice n° 14 :

Soit $h(t)$ la réponse impulsionnelle d'un système linéaire continu et invariant dans le temps, d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$. $\mathcal{H}(f)$ dénote la transformée de Fourier de $h(t)$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}(f) &= \mathcal{F}\{h(t)\}, \\
 &= \frac{1}{jf} \sin(\pi f).
 \end{aligned}$$

- a) Déterminer le module de $\mathcal{H}(f)$;
- b) Déterminer l'expression de l'argument de $\mathcal{H}(f)$;
- c) Calculer la réponse $y(t)$ du système $h(t)$ suite à l'application de l'entrée

$$u(t) = \cos(4\pi t) - 0.5 \sin(0.5t + \pi).$$

$$|\mathcal{H}(f)| = \frac{|\sin(\pi f)|}{f}$$

$$\angle \mathcal{H}(f) = -\frac{\pi}{2} + \begin{cases} 0 & \text{si } \sin(\pi f) \geq 0 \\ \pi & \text{sinon} \end{cases}$$

$$y(t) \approx 0.055 \cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{2}\right) - 0.03 \sin\left(0.5t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice n° 15 :

9. Sachant $\mathcal{F}\{\Gamma(t)\} = (1/2) \left(\delta(f) - \frac{j}{\pi f} \right)$

Un système LCIT, d'entrée x et de sortie y , est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad (24)$$

- a) Déterminer le transfert harmonique $\mathcal{H}(\nu)$;
- b) Calculer et tracer l'allure du spectre d'amplitude : $|\mathcal{H}(\nu)|$;
- c) Calculer et esquisser le croquis du spectre de phase : $\angle \mathcal{H}(\nu)$.

Le transfert harmonique $\mathcal{H}(\nu)$ est :

$$\mathcal{H}(\nu) = \frac{\mathcal{Y}(\nu)}{\mathcal{X}(\nu)}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathcal{Y}(\nu) = \mathcal{F}(y(t)), \\ \mathcal{X}(\nu) = \mathcal{F}(x(t)). \end{cases} \quad (25)$$

Il s'agit d'un système de premier ordre de constante de temps $\tau = 0.5$ sec. Sa réponse impulsionnelle est :

$$\begin{aligned} h(t) &= (\mathcal{K}\tau) e^{-t/\tau} \Gamma(t) \\ &= 2e^{-2t} \Gamma(t). \end{aligned} \quad (26)$$

La transformée de Fourier de h est :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-2j\pi\nu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} \Gamma(t) e^{-2j\pi\nu t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-2t} e^{-2j\pi\nu t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-2(1+j\pi\nu)t} dt \\ &= \frac{-1}{2(1+j\pi\nu)} \left[e^{-2(1+j\pi\nu)t} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{0.5}{1+j\pi\nu}. \end{aligned} \quad (27)$$

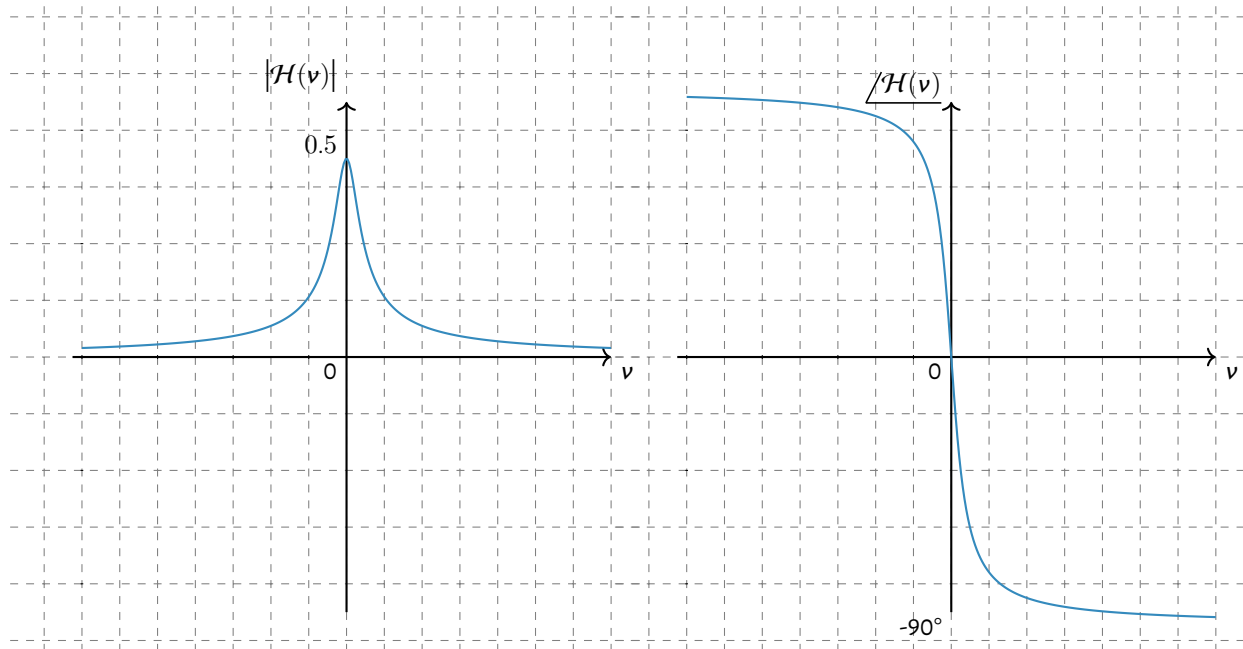
$$\mathcal{H}(\nu) = \frac{0.5}{1+j\pi\nu}$$

Calcul & traçage du graphique de $|\mathcal{H}(\nu)|$

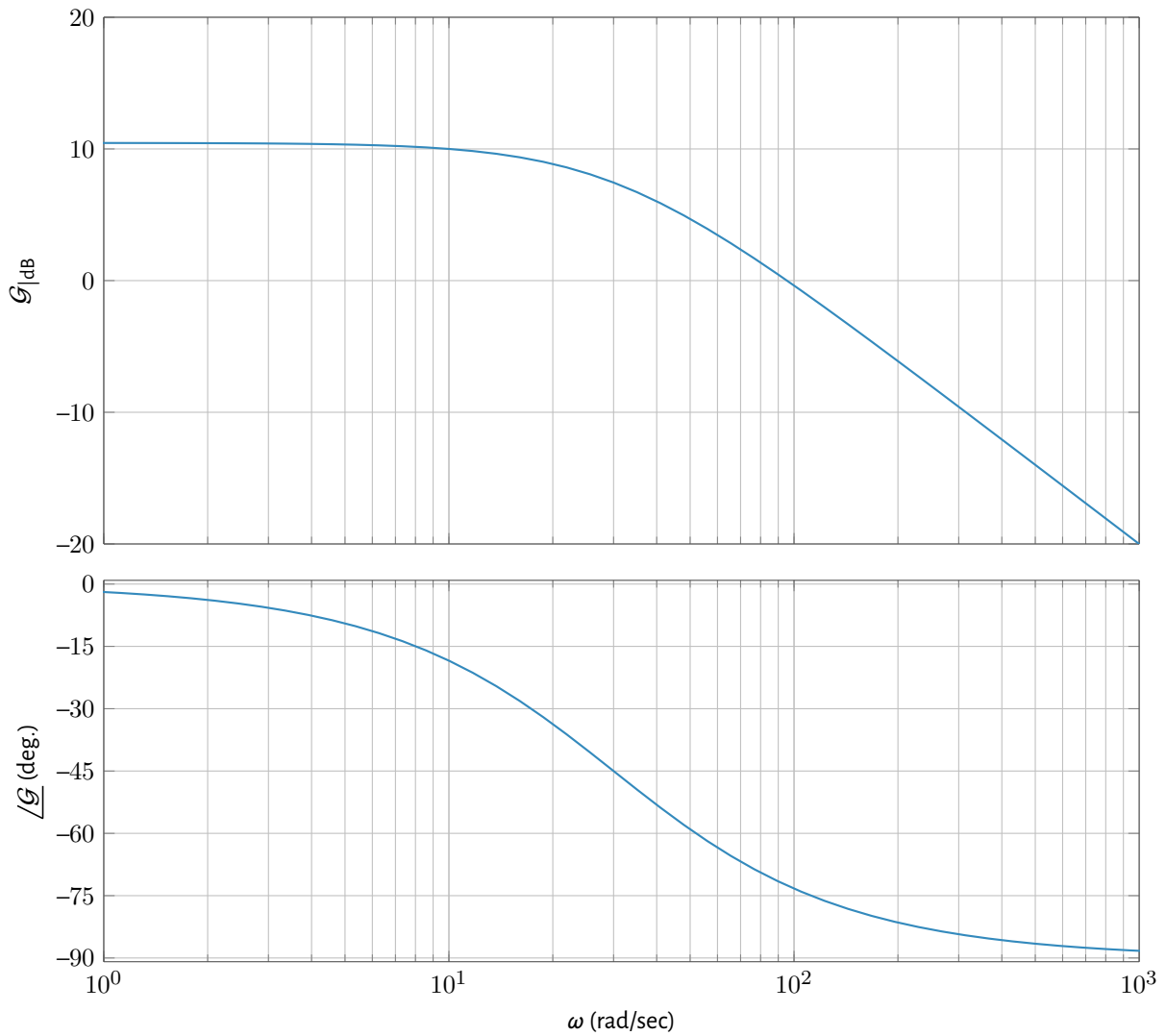
$$|\mathcal{H}(\nu)| = \frac{0.5}{\sqrt{1 + \pi^2 \nu^2}}$$

Calcul & traçage du graphique de $\angle \mathcal{H}(\nu)$

$$\angle \mathcal{H}(\nu) = -\arctan(\pi\nu)$$

**Exercice N° 16 :**

Le diagramme de Bode d'un système de fonction de transfert \mathcal{G} , d'entrée u et de sortie y est indiqué sur la figure suivante :



- a) Soit une entrée $u(t) = 1.5 \cos(8t - 30^\circ)$, déterminer l'expression de la sortie y ;
 b) Pour une sortie $y(t) = 0.5 \sin(100t + 15^\circ)$, déterminer l'expression de l'entrée u .

Soit une entrée $u(t) = 1.5 \cos(8t - 30^\circ)$, déterminer l'expression de la sortie y .

$$\omega = 8 \text{ rad/sec} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{G}_{\text{dB}} = 20 \log\left(\frac{A_y}{A_u}\right) = 10 \\ \angle \mathcal{G} = \varphi_y - \varphi_u = -15^\circ \end{cases}$$

soit encore :

$$\begin{cases} A_y = A_u \times 10^{\left(\frac{\mathcal{G}_{\text{dB}}}{20}\right)} = 1.5 \times 10^{\left(\frac{10}{20}\right)} \approx 4.744 \\ \varphi_y = \varphi_u + \angle \mathcal{G} = -30 - 15 = -45^\circ \end{cases}$$

Finalement :

$$y(t) \approx 4.744 \cos(8t - 45^\circ)$$

Pour une sortie $y(t) = 0.5 \sin(100t + 15^\circ)$, déterminer l'expression de l'entrée u .

$$\omega = 100 \text{ rad/sec} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{G}_{\text{dB}} = 20 \log \left(\frac{A_y}{A_u} \right) = 0 \\ \angle \mathcal{G} = \varphi_y - \varphi_u = -75^\circ \end{cases}$$



Un gain en dB nul est équivalent à un rapport d'amplification unitaire. Sans faire du calcul, on peut dire directement $A_u = A_y = 0.5$.

Ou encore :

$$\begin{cases} A_u = \frac{A_y}{10^{\left(\frac{\mathcal{G}_{\text{dB}}}{20}\right)}} = \frac{0.5}{10^{\left(\frac{0}{20}\right)}} = 0.5 \\ \varphi_u = \varphi_y - \angle \mathcal{G} = 15 - (-75) = 90^\circ \end{cases}$$

Finalement :

$$u(t) = 0.5 \sin(100t + 90^\circ)$$

Références

- [Bra99] R. N. BRACEWELL. *The Fourier Transform & Its Applications*. McGraw-Hill Science/Engineerin, 1999.
- [FEF93] A. K. FRITZ E. FROELICH. *The Froehlich/Kent Encyclopedia of Telecommunications*. Taylor & Francis Inc, 24 sept. 1993. 496 p. (cf. p. 32).
- [God03] R. GODEMENT. *Analyse mathématique II : Calcul différentiel et intégral, séries de Fourier, fonctions holomorphes*. Springer Berlin Heidelberg, 12 juin 2003. 500 p. (cf. p. 32).
- [HMM19] A. HASAN, M. MEIA et M. MOSTOFA. « Applications of Fourier Series in Electric Circuit and Digital Multimedia Visualization Signal Process of Communication System ». Dans : *American Journal of Circuits, Systems and Signal Processing* 4.4 (jan. 2019), pp. 72-80 (cf. p. 23).
- [Jam11] J. F. JAMES. *A Student's Guide to Fourier Transforms : With Applications in Physics and Engineering (Student's Guides)*. Cambridge University Press, 2011.
- [Kay13] S. M. KAY. *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume III : Practical Algorithm Development (Prentice-Hall Signal Processing Series)*. Prentice Hall, 2013.
- [Pet02] J. PETERSEN. *The Telecommunications Illustrated Dictionary*. Boca Raton, FL : CRC Press, 2002 (cf. p. 32).
- [Tre01] H. L. V. TREES. *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I (Pt. 1)*. Wiley-Interscience, 2001.
- [Unp13] J. UNPINGCO. *Python for Signal Processing : Featuring IPython Notebooks*. Springer, 2013.
- [Yam+18] R. YAMASHITA et al. « Convolutional neural networks : an overview and application in radiology ». Dans : *Insights into Imaging* 9.4 (août 2018), pp. 611-629. DOI : [10.1007/s13244-018-0639-9](https://doi.org/10.1007/s13244-018-0639-9).