

Traitement de signal

Notes de cours avec exercices corrigés¹

Abdelbacet Mhamdi

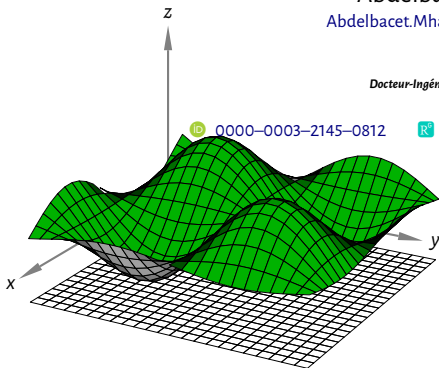
Abdelbacet.Mhamdi@bizerte.r-iset.tn

Docteur-Ingénieur en Génie Électrique

 0000-0003-2145-0812

 Abdelbacet_Mhamdi

 linMhamdi



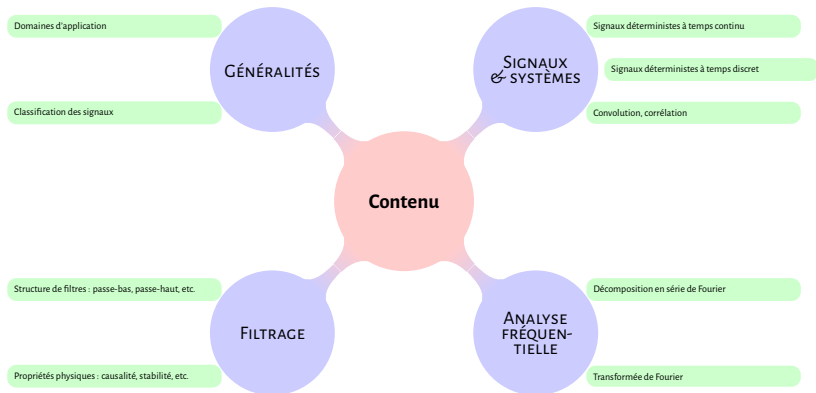
"If you torture the data long enough, it will confess."

Ronald H. Coase, *Essays on Economics and Economists*

¹Disponible à l'adresse suivante : <https://github.com/a-mhamdi/isetbz/>

À propos du module

Domaine de formation	Sciences, Technologies & Études Technologiques			
Spécialité	Licence en Génie Électrique : L2-S3			
Parcours	Automatismes et Informatique Industrielle - AII			
Unité d'enseignement	Électronique & Traitement du Signal			
Semestre : 3	Charge : 21h	Crédits : 1.5	Code : 332	Évaluation : 0.4DC+0.6DS



Les grandes lignes

- 1 Mise en situation
- 2 Signaux & systèmes
- 3 Analyse fréquentielle
- 4 Filtrage des signaux

En cours...



- 1 Mise en situation
- 2 Signaux & systèmes
- 3 Analyse fréquentielle
- 4 Filtrage des signaux

Généralités (1/2)

Signal

- ▶ Représentation physique d'une information à communiquer ;
- ▶ Support pour véhiculer des données.

Exemples

- 1 Signaux biologiques : EEG, ECG ;
- 2 Géophysiques : vibrations sismiques ;
- 3 Finances : cours de la bourse ;
- 4 Images/Vidéos ;
- 5 ...

Bruit

Phénomène gênant la perception ou l'interprétation d'un signal.

⇒ Extraire le maximum d'information utile d'un signal perturbé.

Généralités (2/2)

Traitement de signal

Ensemble de techniques pour générer, analyser et transformer les signaux en vue de leur exploitation.

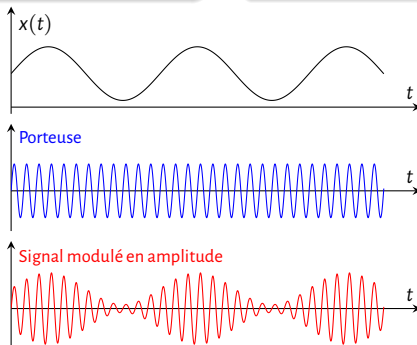
Généralités (2/2)

Traitement de signal

Ensemble de techniques pour **générer**, analyser et transformer les signaux en vue de leur exploitation.

► Synthétiser des signaux par superposition de signaux élémentaires

► Adapter le signal au canal de transmission (Modulation AM, FM, PM)



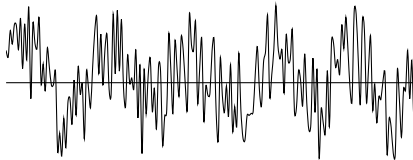
Généralités (2/2)

Traitement de signal

Ensemble de techniques pour générer, analyser et transformer les signaux en vue de leur exploitation.

- Détecter les composantes utiles d'un signal complexe

- Classifier les signaux (Identification d'une pathologie sur un ECG, reconnaissance vocale)



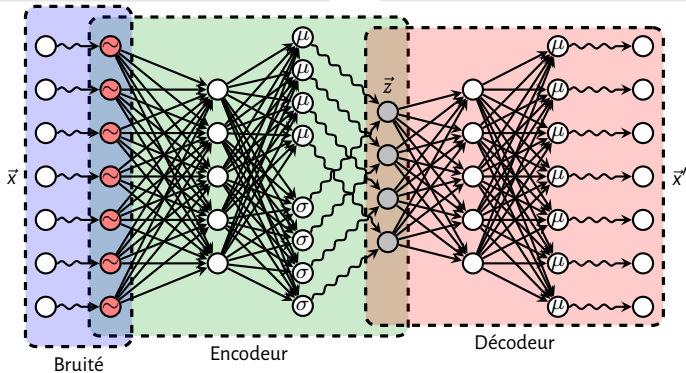
Généralités (2/2)

Traitement de signal

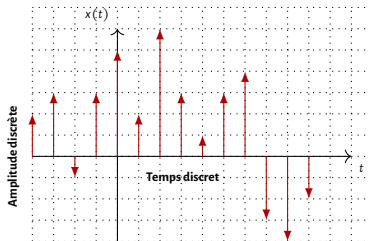
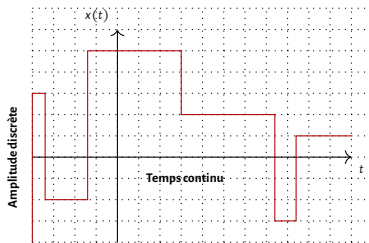
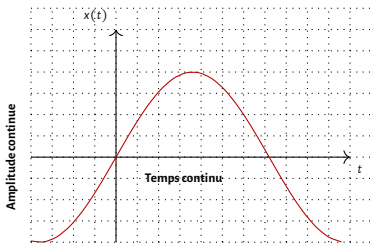
Ensemble de techniques pour générer, analyser et transformer les signaux en vue de leur exploitation.

► Filtrer le signal contre les impuretés

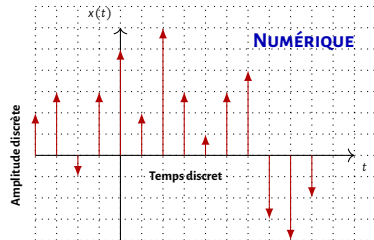
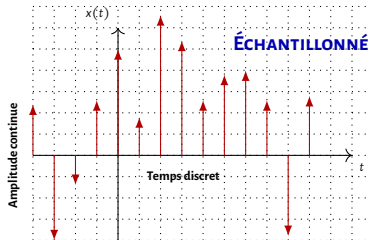
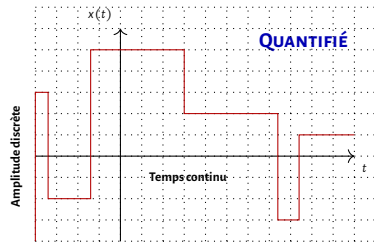
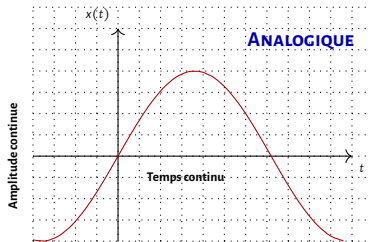
► Coder/ Compresser



Classification morphologique des signaux



Classification morphologique des signaux



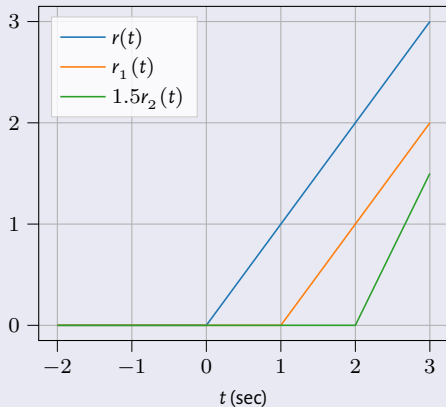
En cours...



- 1 Mise en situation
- 2 Signaux & systèmes**
- 3 Analyse fréquentielle
- 4 Filtrage des signaux

Signaux usuels (1/3)

La rampe $r(t)$



$$r(t) = t \quad \text{ssi} \quad t \geq 0$$

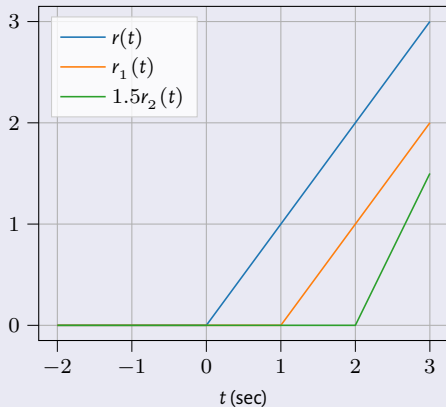
$$r_1(t) = t - 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 1$$

$$1.5r_2(t) = 1.5(t - 2) \quad \text{ssi} \quad t \geq 2$$

$$\star \quad f_\tau(t) = f(t - \tau)$$

Signaux usuels (1/3)

La rampe $r(t)$



$$r(t) = t \quad \text{ssi} \quad t \geq 0$$

$$r_1(t) = t - 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 1$$

$$1.5r_2(t) = 1.5(t - 2) \quad \text{ssi} \quad t \geq 2$$

$$\alpha r_\tau(t) = \alpha(t - \tau) \quad \text{ssi} \quad t \geq \tau$$

$$\star \quad f_\tau(t) = f(t - \tau)$$

Signaux usuels (1/3)

La rampe $r(t)$



$$r(t) = t \quad \text{ssi} \quad t \geq 0$$

$$r_1(t) = t - 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 1$$

$$1.5r_2(t) = 1.5(t - 2) \quad \text{ssi} \quad t \geq 2$$

$$\alpha r_\tau(t) = \alpha(t - \tau) \quad \text{ssi} \quad t \geq \tau$$

$$\frac{d}{dt}r(t) = \Gamma(t) \Leftrightarrow \int \Gamma(t) = r(t)$$

$$\star \quad f_\tau(t) = f(t - \tau)$$

Signaux usuels (1/3)

La rampe $r(t)$

CODE SNIPPET

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
[2]: t = np.linspace(-2, 3, 1000)

# Rampe
x = ( t >= 0 ).astype(int) * t
y = ( t >= 1 ).astype(int) * (t-1)
z = 1.5 * ( t >= 2 ).astype(int) * (t-2)
```

```
[3]: plt.plot(t, x, t, y, t, z)
plt.legend( ('$r(t)$', r'$r_{-1}(t)$', r'$1.5r_{-2}(t)$' ) )

plt.xlabel('$t$ (sec)')
plt.grid()
plt.show()
```



Signaux usuels (2/3)

L'échelon $\Gamma(t)$



$$\Gamma(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 0$$

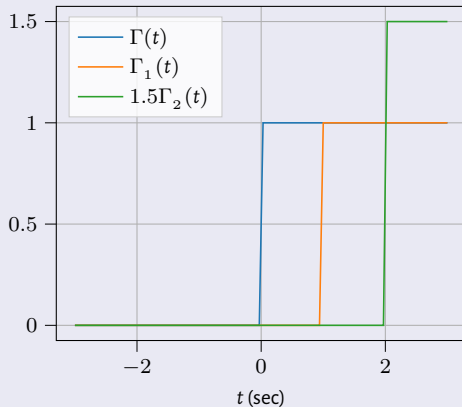
$$\Gamma_1(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 1$$

$$1.5\Gamma_2(t) = 1.5 \quad \text{ssi} \quad t \geq 2$$

$$\star \quad f_{\tau}(t) = f(t - \tau)$$

Signaux usuels (2/3)

L'échelon $\Gamma(t)$



$$\Gamma(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 0$$

$$\Gamma_1(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 1$$

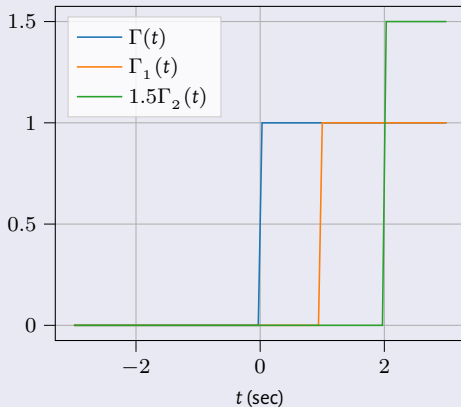
$$1.5\Gamma_2(t) = 1.5 \quad \text{ssi} \quad t \geq 2$$

$$\alpha\Gamma_\tau(t) = \alpha \quad \text{ssi} \quad t \geq \tau$$

$$\star \quad f_\tau(t) = f(t - \tau)$$

Signaux usuels (2/3)

L'échelon $\Gamma(t)$



$$\Gamma(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 0$$

$$\Gamma_1(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 1$$

$$1.5\Gamma_2(t) = 1.5 \quad \text{ssi} \quad t \geq 2$$

$$\alpha\Gamma_\tau(t) = \alpha \quad \text{ssi} \quad t \geq \tau$$

$$\frac{d}{dt}\Gamma(t) = \delta(t) \Leftrightarrow \int \delta(t) = \Gamma(t)$$

$$\star \quad f_\tau(t) = f(t - \tau)$$

Signaux usuels (2/3)

L'échelon $\Gamma(t)$

CODE SNIPPET

```
[2]: t = np.linspace(-2, 3, 1000)

# \ 'Echelon
x = ( t>=0 ).astype(int)
y = ( t>=1 ).astype(int)
z = 1.5 * ( t>=2 ).astype(int)
```

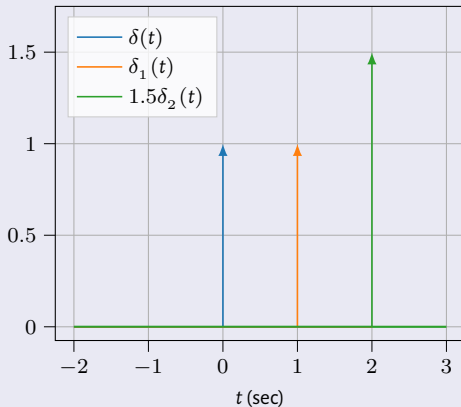
```
[3]: plt.plot(t, x, t, y, t, z)
plt.legend( ('$\\Gamma(t)$', r'$\\Gamma_{-1}(t)$', r'$1.5\\Gamma_{-2}(t)$' ) )

plt.xlabel('$t$ (sec)')
plt.grid()
plt.show()
```



Signaux usuels (3/3)

La distribution de Dirac $\delta(t)$



$$\delta(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t = 0$$

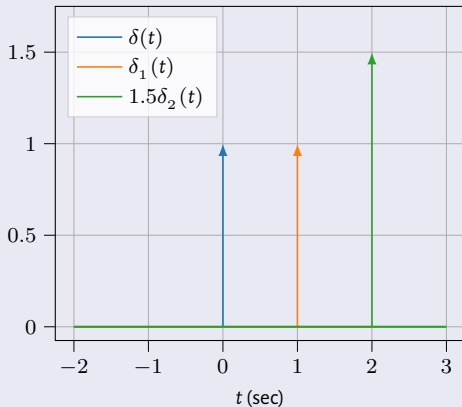
$$\delta_1(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t = 1$$

$$1.5\delta_2(t) = 1.5 \quad \text{ssi} \quad t = 2$$

$$\star \quad f_{\tau}(t) = f(t - \tau)$$

Signaux usuels (3/3)

La distribution de Dirac $\delta(t)$



$$\delta(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t = 0$$

$$\delta_1(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t = 1$$

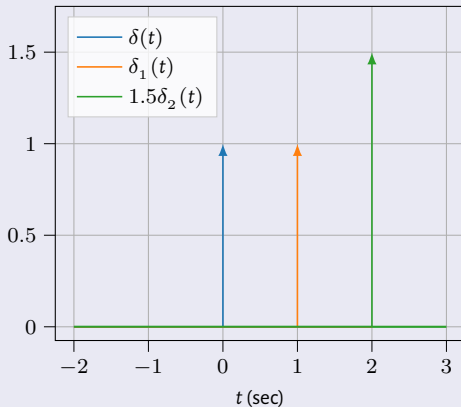
$$1.5\delta_2(t) = 1.5 \quad \text{ssi} \quad t = 2$$

$$\alpha\delta_\tau(t) = \alpha \quad \text{ssi} \quad t = \tau$$

$$\star \quad f_\tau(t) = f(t - \tau)$$

Signaux usuels (3/3)

La distribution de Dirac $\delta(t)$



$$\delta(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t = 0$$

$$\delta_1(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t = 1$$

$$1.5\delta_2(t) = 1.5 \quad \text{ssi} \quad t = 2$$

$$\alpha\delta_\tau(t) = \alpha \quad \text{ssi} \quad t = \tau$$

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\lim_{(\mu, \sigma) \rightarrow (0, 0)} f(t) \longrightarrow \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

$$\star \quad f_\tau(t) = f(t - \tau)$$

Signaux usuels (3/3)

La distribution de Dirac $\delta(t)$

CODE SNIPPET

```
[2]: t = np.linspace(-2, 3, 6); nt = len(t)
x = np.zeros(len(t)); x[ t==0.0 ] = 1;
y = np.zeros(len(t)); y[ t==1.0 ] = 1;
z = np.zeros(len(t)); z[ t==2.0 ] = 1.5;

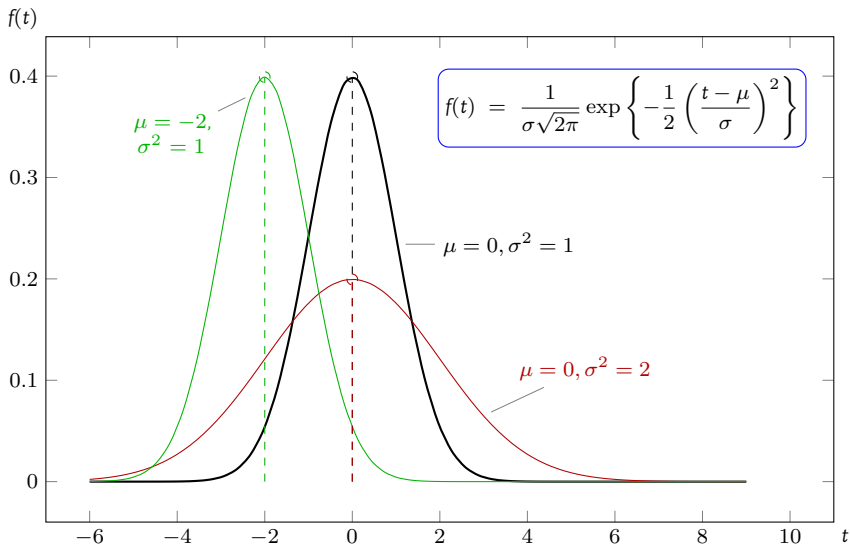
[3]: plt.stem(t,x,'C0',markerfmt='C0^',basefmt="┐",label=r'$\delta(t)$',use_line_collection=True)
plt.stem(t,y,'C1',markerfmt='C1^',basefmt="┐",label=r'$\delta_1(t)$',use_line_collection=True)
plt.stem(t,z,'C2',markerfmt='C2^',basefmt="┐",label=r'$1.5\delta_2(t)$',use_line_collection=True)

plt.xlabel('$t$ (sec)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



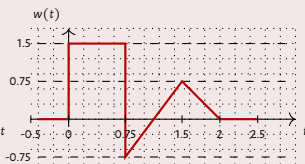
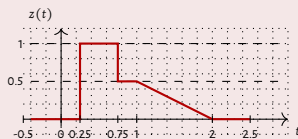
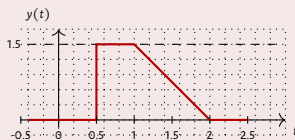
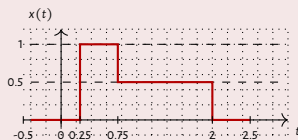
Lecture complémentaire

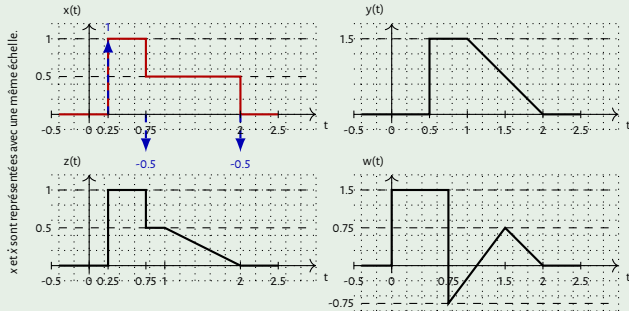
Densité de probabilité de la loi normale



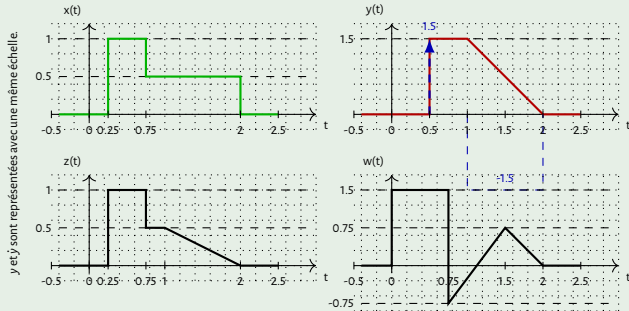
Exercice #1

Déterminer les expressions des signaux donnés par les courbes ci-dessous :

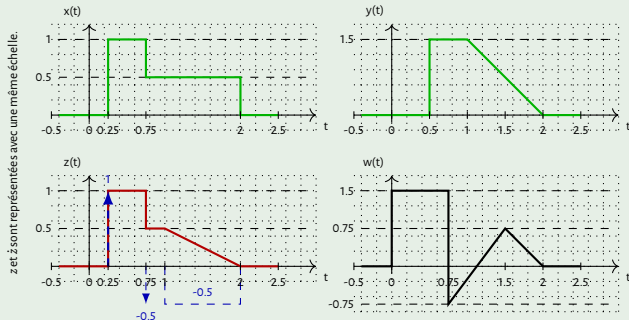




$$\dot{x}(t) = \delta_{0.25} - 0.5\delta_{0.75} - 0.5\delta_2 \xrightarrow{\int dt} x(t) = \Gamma_{0.25} - 0.5\Gamma_{0.75} - 0.5\Gamma_2$$



$$\dot{y}(t) = 1.5\delta_{0.5} - 1.5(\Gamma_1 - \Gamma_2) \xrightarrow{\int dt} y(t) = 1.5\Gamma_{0.5} - 1.5(r_1 - r_2)$$

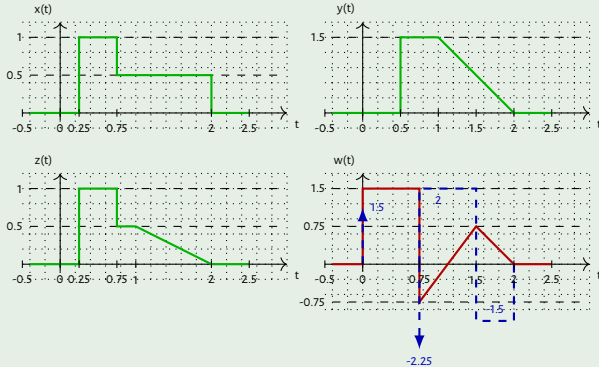


$$\dot{z}(t) = \delta_{0.25} - 0.5\delta_{0.75} - 0.5(\Gamma_1 - \Gamma_2)$$

$$\xrightarrow{\int dt}$$

$$z(t) = \Gamma_{0.25} - 0.5\Gamma_{0.75} - 0.5(r_1 - r_2)$$

w et \dot{w} sont représentées avec deux échelles différentes.



$$\dot{w}(t) = 1.5\delta - 2.25\delta_{0.75} + 2(\Gamma_{0.75} - \Gamma_{1.5}) - 1.5(\Gamma_{1.5} - \Gamma_2)$$

$$\int dt \rightarrow$$

$$w(t) = 1.5\Gamma - 2.25\Gamma_{0.75} + 2(r_{0.75} - r_{1.5}) - 1.5(r_{1.5} - r_2)$$

```
[1]: import numpy as np  
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
[2]: t = np.linspace(-0.5, 2.5, 1000)
```

Echelon retardé de τ

```
[3]: def G_tau(t, tau=0):  
    return ( t>=tau ).astype(int)
```

Rampe retardée de τ

```
[4]: def r_tau(t, tau=0):  
    return ( t>=tau ).astype(int) * (t-tau)
```

$$x(t) = \Gamma_{0.25} - 0.5\Gamma_{0.75} - 0.5\Gamma_2$$

```
[5]: x = G_tau(t,0.25)-0.5*G_tau(t,0.75)-0.5*G_tau(t,2)
```

$$y(t) = 1.5\Gamma_{0.5} - 1.5(r_1 - r_2)$$

[6]: `y = 1.5*G_tau(t,0.5)-1.5*(r_tau(t,1)-r_tau(t,2))`

$$z(t) = \Gamma_{0.25} - 0.5\Gamma_{0.75} - 0.5(r_1 - r_2)$$

[7]: `z = G_tau(t,0.25)-0.5*G_tau(t,0.75)-0.5*(r_tau(t,1)-r_tau(t,2))`

$$w(t) = 1.5\Gamma - 2.25\Gamma_{0.75} + 2(r_{0.75} - r_{1.5}) - 1.5(r_{1.5} - r_2)$$

[8]: `w = 1.5*G_tau(t)-2.25*G_tau(t,0.75)+2*(r_tau(t,0.75)-r_tau(t,1.5))-1.
 ↪ 5*(r_tau(t,1.5)-r_tau(t,2))`

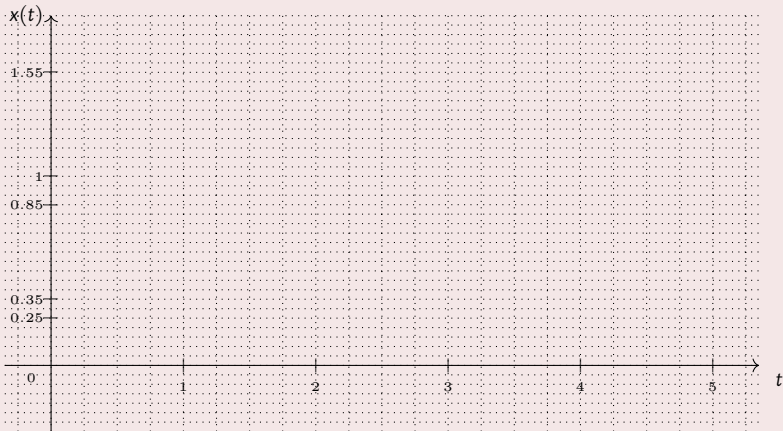

```
[9]: plt.subplot(2,2,1); plt.plot(t, x);plt.grid()
plt.xlabel('$t$ (sec)');plt.ylabel('$x(t)$')
plt.xticks([-0.5,.25,0.75,2,2.5],[-0.5,.25,0.75,2,2.5])
plt.subplot(2,2,2); plt.plot(t, y);plt.grid()
plt.xlabel('$t$ (sec)');plt.ylabel('$y(t)$')
plt.xticks([-0.5,.5,1,2,2.5],[-0.5,.5,1,2,2.5])
plt.subplot(2,2,3); plt.plot(t, z);plt.grid()
plt.xlabel('$t$ (sec)');plt.ylabel('$w(t)$')
plt.xticks([-0.5,.25,.75,1,2,2.5],[-0.5,.25,.75,1,2,2.5])
plt.subplot(2,2,4); plt.plot(t, w);plt.grid()
plt.xlabel('$t$ (sec)');plt.ylabel('$z(t)$')
plt.xticks([-0.5,0,.75,1.5,2,2.5],[-0.5,0,.75,1.5,2,2.5])
plt.tight_layout()
plt.show()
```



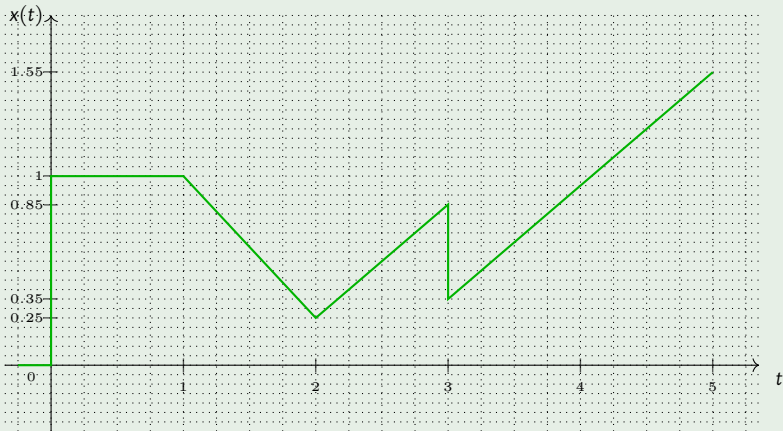
Exercice #2

Tracer la fonction

$$x(t) = \Gamma(t) - 0.75r_1(t) + 1.35r_2(t) - 0.5\Gamma_3(t).$$



$$x(t) = \Gamma(t) - 0.75r_1(t) + 1.35r_2(t) - 0.5\Gamma_3(t)$$

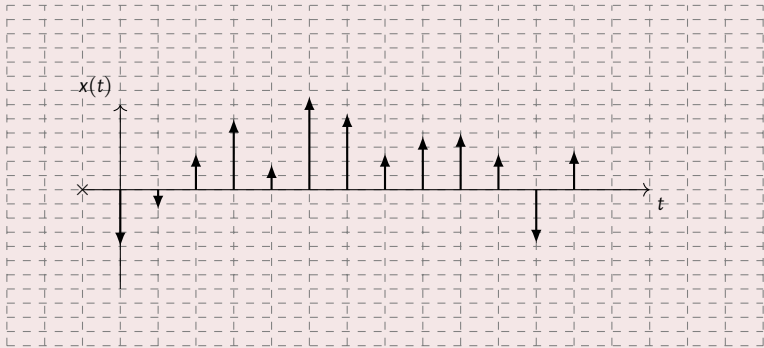


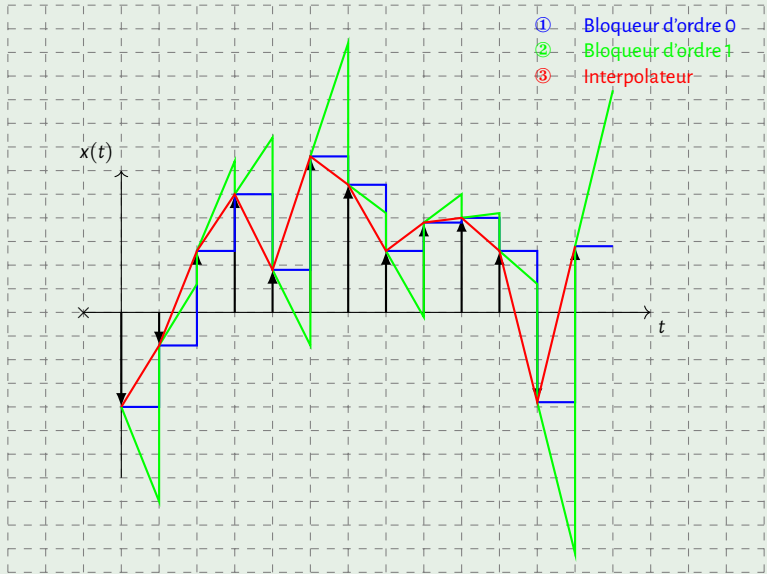
Reconstitution des signaux

Exercice #3

Sur le même graphe, reconstruire le signal par :

- 1 un bloqueur d'ordre zéro ;
- 2 un bloqueur d'ordre un ;
- 3 un filtre interpolateur.





Produit de convolution

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^t f(t - \varsigma) g(\varsigma) d\varsigma = \int_{-\infty}^t f(\varsigma) g(t - \varsigma) d\varsigma$$

Le produit de convolution est

bilinéaire

$$f * (g + \gamma h) = (f * g) + \gamma(f * h)$$

associatif

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

commutatif

$$f * g = g * f$$

Quelques propriétés

★ *Identité*

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

★ *Retard*

$$f(t) * \delta_{\tau}(t) = f_{\tau}(t)$$

★ *Intégration*

$$\int_0^t f(\varsigma) d\varsigma = \Gamma(t) * f(t)$$

Produit de convolution

Illustration graphique

Exercice #4

Soient les commandes MATLAB suivantes:

```
>> x = [-0.5 0 1 0.75 2 1 2.1 -0.5];  
>> y = [0 1 0 0 1 -1];  
>> z = conv(x, y);  
>> disp(z)
```

- ❶ Pour une période d'échantillonnage de 0.2 sec, donner l'expression de x ;
- ❷ Pour une même période d'échantillonnage de 0.2 sec, donner l'expression de y ;
- ❸ Déterminer la sortie z ;
- ❹ Donner alors le résultat retourné après exécution du code.

$$\textcircled{1} \quad x(t) = -0.5\delta + \delta_{0.4} + 0.75\delta_{0.6} + 2\delta_{0.8} + \delta_1 \\ + 2.1\delta_{1.2} - 0.5\delta_{1.4}$$

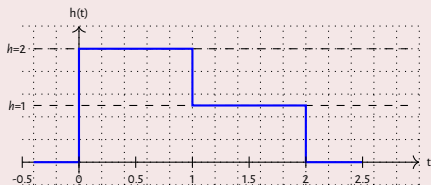
$$\textcircled{2} \quad y(t) = \delta_{0.2} + \delta_{0.8} - \delta_1$$

$$\textcircled{3} \quad z(t) = -0.5\delta_{0.2} + \delta_{0.6} + 0.25\delta_{0.8} + 2.5\delta_1 \\ + 2\delta_{1.2} + 1.85\delta_{1.4} + 0.75\delta_{1.6} - \delta_{1.8} + 1.1\delta_2 \\ - 2.6\delta_{2.2} + 0.5\delta_{2.4}$$

$$\textcircled{4} \quad z(t) = [0, -0.5, 0, 1, 0.25, 2.5, 2, 1.85, 0.75, -1, 1.1, -2.6, 0.5]$$

Exercice #5

Soit un système linéaire invariant dans le temps caractérisé par sa réponse impulsionnelle h suivante :



- ❶ Déterminer l'expression mathématique de h ;
- ❷ Calculer la réponse y de ce système suite à une excitation u donnée par :

$$u(t) = v(t) + v_2(t), \quad \text{avec} \quad v(t) = 2\Gamma_1 - \Gamma_3(t).$$

① À partir du graphe, la fonction h est

$$h(t) = 2\Gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2$$

② La réponse y est

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * u(t) \\ &= h * (v + v_2) \\ &= \underbrace{h * v}_{z(t)} + h * v_2 \end{aligned}$$

On pose $z(t) = h(t) * v(t)$, alors

$$h * v_2 = \underbrace{h * v * \delta_2}_{z_2}$$

Ainsi :

$$y = z + z_2$$

Calculons l'expression de la fonction $z(t)$:

$$z = h * v$$

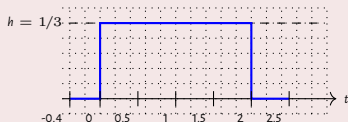
$$\begin{aligned}z(t) &= (2\Gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2) * (2\Gamma_1 - \Gamma_3) \\&= 4\Gamma * \Gamma_1 - 2\Gamma * \Gamma_3 - 2\Gamma_1 * \Gamma_1 + \Gamma_1 * \Gamma_3 - \Gamma_1 * \Gamma_2 + \Gamma_2 * \Gamma_3 \\&= 4r_1 - 2r_3 - 2r_2 + r_4 - 2r_3 + r_5 \\&= 4r_1 - 2r_2 - 4r_3 + r_4 + r_5.\end{aligned}$$

La sortie y se calcule comme suit :

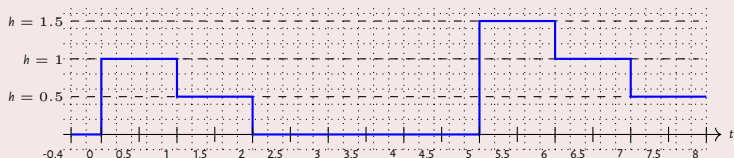
$$\begin{aligned}y(t) &= z(t) + z_2(t) \\&= 4r_1 - 2r_2 - 4r_3 + r_4 + r_5 + 4r_3 - 2r_4 - 4r_5 + r_6 + r_7 \\&= 4r_1 - 2r_2 - r_4 - 3r_5 + r_6 + r_7.\end{aligned}$$

Exercice #6

Soit un système linéaire invariant dans le temps caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ suivante :



- ① Déterminer l'expression mathématique de $h(t)$;
- ② Calculer la réponse $y(t)$ de ce système suite à une excitation $u(t)$ donné par le graphique ci-dessous :



① La réponse impulsionnelle $h(t)$ s'écrit comme suit :

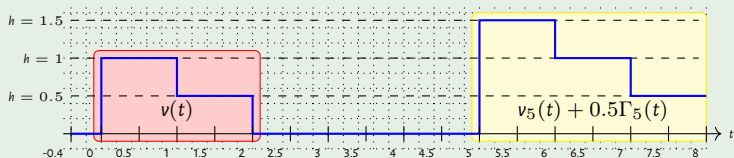
$$h(t) = 1/3\Gamma(t) - 1/3\Gamma_2(t).$$

② Le signal u peut être décomposé de la façon suivante :

$$u(t) = v(t) + v_5(t) + 0.5\Gamma_5(t),$$

avec

$$v(t) = \Gamma(t) - 0.5\Gamma_1(t) - 0.5\Gamma_2(t).$$



La réponse y à l'excitation u est :

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * u(t) \\ &= h(t) * \left(v(t) + v_5(t) + 0.5\Gamma_5(t) \right) \\ &= h(t) * v(t) + h(t) * v_5(t) + 0.5h(t) * \Gamma_5(t) \end{aligned}$$

On examine d'abord $h(t) * v(t)$:

$$\begin{aligned} h(t) * v(t) &= 1/3 \left(\Gamma(t) - \Gamma_2(t) \right) * \left(\Gamma(t) - 0.5\Gamma_1(t) - 0.5\Gamma_2(t) \right) \\ &= 1/3 \left(r(t) - 0.5r_1(t) - 1.5r_2(t) + 0.5r_3(t) + 0.5r_4(t) \right), \end{aligned}$$

où $r(t) = t\Gamma'(t)$. La quantité $h(t) * v_5(t)$ est donc :

$$\begin{aligned} h(t) * \underbrace{v_5(t)}_{v(t) * \delta_5(t)} &= h(t) * v(t) * \delta_5(t) \\ &= 1/3 \left(r_5(t) - 0.5r_6(t) - 1.5r_7(t) + 0.5r_8(t) + 0.5r_9(t) \right). \end{aligned}$$

Le terme $0.5h(t) * \Gamma_5(t)$ se calcule de la façon suivante :

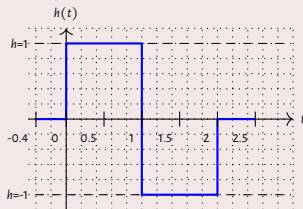
$$\begin{aligned}
 0.5h(t) * \Gamma_5(t) &= 0.5 \underbrace{h(t) * \Gamma(t)}_{\int_0^t h(\mu) d\mu} * \delta_5(t) \\
 &= 0.5/3 \int_0^t \left(\Gamma(\mu) - \Gamma_2(\mu) \right) * \delta_5(t) \\
 &= 0.5/3 \left(r(t) - r_2(t) \right) * \delta_5(t) \\
 &= 0.5/3 \left(r_5(t) - r_7(t) \right) .
 \end{aligned}$$

La réponse finale est donnée par :

$$\begin{aligned}
 y(t) = 1/3 \bigg(& r(t) - 0.5r_1(t) - 1.5r_2(t) + 0.5r_3(t) + 0.5r_4(t) \\
 & + 1.5r_5(t) - 0.5r_6(t) - 2r_7(t) + 0.5r_8(t) + 0.5r_9(t) \bigg) .
 \end{aligned}$$

Exercice #7

Soit la réponse impulsionnelle h , donnée par le graphique ci-dessous, d'un système linéaire et invariant dans le temps :



- ❶ Trouver l'expression analytique de la fonction h ;
- ❷ Exprimer la réponse y de ce système suite à l'application d'un échelon en entrée, d'amplitude 2 ;
- ❸ Tracer le graphique d'évolution temporelle de y ;
- ❹ Calculer l'énergie \mathcal{E}^a du signal $y(t)$.

$$^a\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt$$

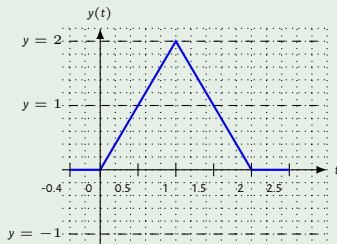
① La fonction h s'écrit :

$$h(t) = \Gamma(t) - 2\Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)$$

② La réponse y du système est :

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\Gamma(t) * h(t) \\ &= 2\Gamma(t) * [\Gamma(t) - 2\Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)] \\ &= 2r(t) - 4r_1(t) + 2r_2(t), \quad \text{avec } r(t) = t\Gamma(t) \end{aligned}$$

③ Le graphique d'évolution de y est donné par :



④ L'énergie peut se calculer comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt \\ &= \int_0^2 y^2(t) dt \\ &= 2 \int_0^1 (2t)^2 dt \\ &= 8 \frac{[t^3]_0^1}{3} \\ &= 8/3\end{aligned}$$

Convolution 2D

Exercice #8

Calculer le résultat de la convolution 2D suivante :

1	0	1	0	2
1	1	3	2	1
1	1	0	1	1
2	3	2	1	3
0	2	0	1	0

ENTRÉE

*

0	1	0
0	0	2
0	1	0

FILTRE

=

...
...
...

SORTIE

Convolution 2D

Exercice #8

Calculer le résultat de la convolution 2D suivante :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \end{array}$$

ENTRÉE FILTRE SORTIE

Le résultat de la convolution 2D est :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & 5 & 3 \\ \hline 4 & 7 & 5 \\ \hline 7 & 2 & 8 \\ \hline \end{array}$$

ENTRÉE FILTRE SORTIE

En cours...



- 1 Mise en situation
- 2 Signaux & systèmes
- 3 Analyse fréquentielle**
- 4 Filtrage des signaux

Signal sinusoïdal (1/2)

$$x(t) = x_{\max} \sin \left(\underbrace{\omega t + \varphi}_{\Phi(t)} \right)$$

$$\varphi = \Phi(t = 0)$$

x_{\max} Valeur maximale

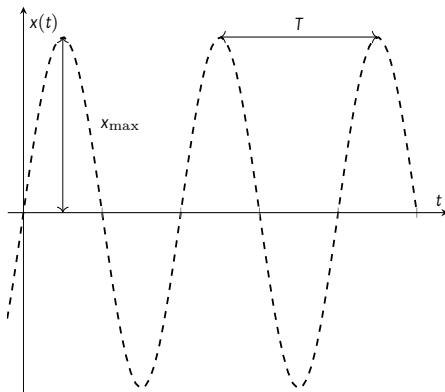
T Période (sec)

$f = \frac{1}{T}$ Fréquence (Hz)

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ Pulsation (rad/sec)

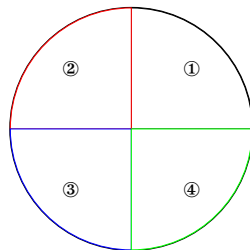
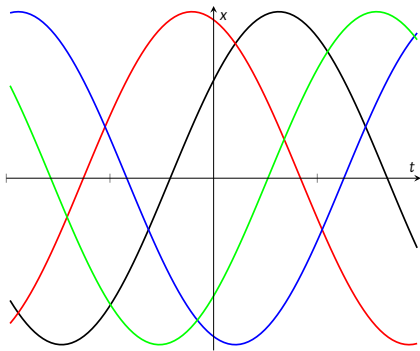
φ Phase à l'origine (rad)

Φ Phase instantanée.



Signal sinusoïdal (2/2)

Phase à l'origine!



Principe (1/2)

Soit x une fonction déterministe. Elle peut être entièrement définie comme une somme pondérée de fonctions sinusoïdales :

$$x(t) = f_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + f_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \dots + f_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) + \dots + f_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

Si x est périodique de période T (i.e. de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$), elle admet alors une décomposition dite en **série de Fourier** avec $\omega_k = k\omega \forall k \in \mathbb{N}$:

$$x(t) = f_0 \underbrace{\sin(0\omega t + \varphi_0)}_{\sin(\varphi_0)} + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \dots + f_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + \dots + f_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

L'expression de x se réduit à

$$x(t) = \underbrace{f_0 \sin(\varphi_0)}_{a_0} + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \dots + f_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + \dots + f_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

Rappelons que :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Principe (2/2)

Il en résulte que

$$\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \sin(\varphi) + \sin(\omega t) \cos(\varphi)$$

$$\sin(k\omega t + \varphi_k) = \cos(k\omega t) \sin(\varphi_k) + \sin(k\omega t) \cos(\varphi_k)$$

$$\sin(n\omega t + \varphi_n) = \cos(n\omega t) \sin(\varphi_n) + \sin(n\omega t) \cos(\varphi_n)$$

On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$f_k \sin(k\omega t + \varphi_k) = \underbrace{f_k \sin(\varphi_k)}_{a_k} \cos(k\omega t) + \underbrace{f_k \cos(\varphi_k)}_{b_k} \sin(k\omega t) = a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

On peut alors décomposer x comme suit:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + \dots + a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) + \dots + a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Soit encore

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

On pose $\Phi = \omega t$, une mise à jour de x donne

$$x(\Phi) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\Phi) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\Phi)$$

Résolution

$$x(\Phi) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\Phi) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\Phi)$$

Soit $i, j \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) \sin(j\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) \cos(j\Phi) d\Phi = \pi \text{ si } i = j$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) \sin(j\Phi) d\Phi = \pi \text{ si } i = j$$

Résolution

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) d\Phi = a_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\Phi}_{=2\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\underbrace{a_k \int_0^{2\pi} \cos(k\Phi) d\Phi}_{=0} + \underbrace{b_k \int_0^{2\pi} \sin(k\Phi) d\Phi}_{=0} \right]$$

Soit $i, j \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) \sin(j\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) \cos(j\Phi) d\Phi = \pi \text{ ssi } i = j$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) \sin(j\Phi) d\Phi = \pi \text{ ssi } i = j$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) d\Phi = 2\pi a_0$$

Résolution

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) \cos(i\Phi) d\Phi = a_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) d\Phi}_{=0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\underbrace{a_k \int_0^{2\pi} \cos(k\Phi) \cos(i\Phi) d\Phi}_{=\pi \text{ ssi } (i=k)} + \underbrace{b_k \int_0^{2\pi} \sin(k\Phi) \cos(i\Phi) d\Phi}_{=0} \right]$$

Soit $i, j \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) \sin(j\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) \cos(j\Phi) d\Phi = \pi \text{ ssi } i = j$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) \sin(j\Phi) d\Phi = \pi \text{ ssi } i = j$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) d\Phi = 2\pi a_0$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) \cos(k\Phi) d\Phi = \pi a_k$$

Résolution

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) \sin(i\Phi) d\Phi = a_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) d\Phi}_{=0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\underbrace{a_k \int_0^{2\pi} \cos(k\Phi) \sin(i\Phi) d\Phi}_{=0} + \underbrace{b_k \int_0^{2\pi} \sin(k\Phi) \sin(i\Phi) d\Phi}_{=\pi \text{ ssi } (i=k)} \right]$$

Soit $i, j \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) \sin(j\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) \cos(j\Phi) d\Phi = \pi \text{ ssi } i = j$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) \sin(j\Phi) d\Phi = \pi \text{ ssi } i = j$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) d\Phi = 2\pi a_0$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) \cos(k\Phi) d\Phi = \pi a_k$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) \sin(k\Phi) d\Phi = \pi b_k$$

Résolution

$$x(\Phi) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\Phi) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\Phi)$$

Soit $i, j \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) \sin(j\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) \cos(j\Phi) d\Phi = \pi \text{ si } i = j$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) \sin(j\Phi) d\Phi = \pi \text{ si } i = j$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) d\Phi = 2\pi a_0$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) \cos(k\Phi) d\Phi = \pi a_k$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) \sin(k\Phi) d\Phi = \pi b_k$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\Phi) d\Phi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(\Phi) \cos(k\Phi) d\Phi$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(\Phi) \sin(k\Phi) d\Phi$$

Résolution

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

Soit $i, j \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) \sin(j\Phi) d\Phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) \cos(j\Phi) d\Phi = \pi \text{ si } i = j$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) \sin(j\Phi) d\Phi = \pi \text{ si } i = j$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) d\Phi = 2\pi a_0$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) \cos(k\Phi) d\Phi = \pi a_k$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) \sin(k\Phi) d\Phi = \pi b_k$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega t) dt \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega t) dt$$

Illustration graphique

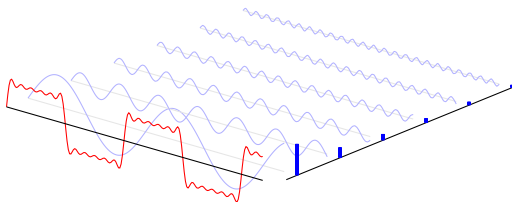
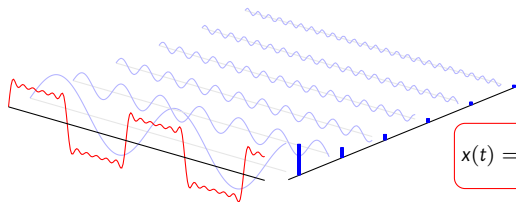
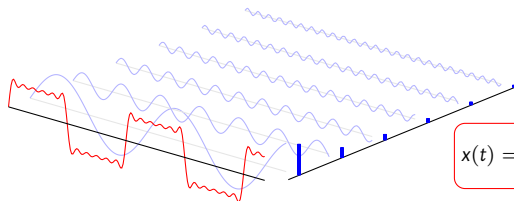


Illustration graphique



$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \dots \right)$$

Illustration graphique



$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \dots \right)$$

Temps continu

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp^{jk\omega t}$$

Temps discret

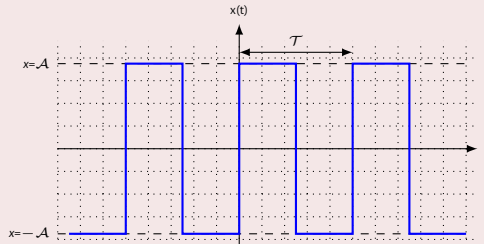
$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k \exp^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \exp^{-jk\omega t} dt$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \exp^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

Exercice #9

Calculer la décomposition en série de Fourier d'un signal carré d'amplitude \mathcal{A} et de période \mathcal{T} :



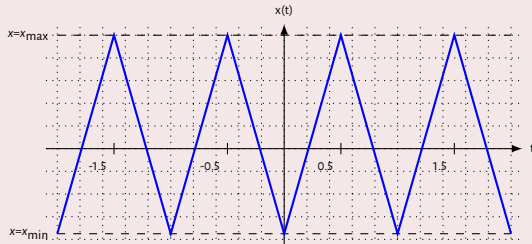
$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{x} + x_{\sim}(t) \\ &= \bar{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) + b_k \sin \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) \right) \end{aligned}$$

- Signal centré p/r à zéro $\longrightarrow \bar{x} = 0$
- Signal impair $\longrightarrow a_k = 0$.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(b_k \sin \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) \right), \quad \text{où} \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T \left\{ 2\mathcal{A}\Gamma_0 - 2\mathcal{A}\Gamma_{\frac{T}{2}} \right\} \sin \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) dt \\ &= \frac{4\mathcal{A}}{k\pi}, \quad \text{pour tout } k \text{ impair.} \end{aligned}$$

Exercice #10

Déterminer la décomposition en série de Fourier de la fonction représentée par le graphique suivant :



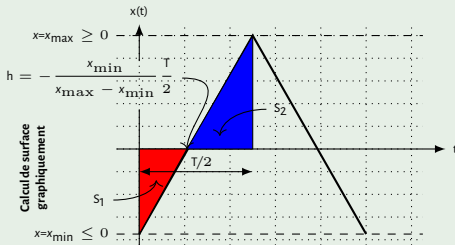
$$\begin{aligned}x(t) &= \bar{x} + x_{\sim}(t) \\&= \bar{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) + b_k \sin \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) \right)\end{aligned}$$

- Signal **n'est pas** centré p/r à zéro $\longrightarrow \bar{x} \neq 0$
- Signal pair $\longrightarrow b_k = 0$.

Sur une période, le signal x s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}x(t) &= x_{\min} \Gamma_0 + 2 \frac{x_{\max} - x_{\min}}{T} \left\{ r_0 - 2r_{\frac{T}{2}} \right\} \\&= x_{\min} \Gamma_0 + 2 \frac{x_{\max} - x_{\min}}{T} \left\{ t \Gamma_0 - 2 \left(t - \frac{T}{2} \right) \Gamma_{\frac{T}{2}} \right\}\end{aligned}$$

La valeur moyenne \bar{x} peut être déterminée par :



$$S = S_1 + S_2$$

$$S_1 = x_{\min} \frac{h}{2}$$

$$S_2 = x_{\max} \left(\frac{\frac{T}{2} - h}{2} \right)$$

$$S = (x_{\max} + x_{\min}) \frac{T}{4}$$

Ou encore \bar{x} comme suit :

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\
 &= x_{\min} + 2 \frac{x_{\max} - x_{\min}}{T^2} \int_0^T \left\{ t\Gamma_0 - 2\left(t - \frac{T}{2}\right)\Gamma_{\frac{T}{2}} \right\} dt \\
 &= x_{\min} + 2 \frac{x_{\max} - x_{\min}}{T^2} \left\{ \int_0^T t dt - 2 \int_{T/2}^T t dt + \frac{T^2}{2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} (x_{\max} + x_{\min})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{\sim}(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) \right), \quad \text{où} \\
 a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) dt \\
 &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(x_{\min}\Gamma_0 + 2 \frac{x_{\max} - x_{\min}}{T} \left\{ t\Gamma_0 - 2\left(t - \frac{T}{2}\right)\Gamma_{\frac{T}{2}} \right\} \right) \cos \left(2k\pi \frac{t}{T} \right) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= \frac{2}{T} x_{\min} \int_0^T \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2 &= \frac{4}{T^2} (x_{\max} - x_{\min}) \int_0^T t \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3 &= -\frac{8}{T^2} (x_{\max} - x_{\min}) \int_{\frac{T}{2}}^T t \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt \\ &= 2 \frac{1 - (-1)^k}{k^2 \pi^2} (x_{\max} - x_{\min})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_4 &= \frac{4}{T} (x_{\max} - x_{\min}) \int_{\frac{T}{2}}^T \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_1 = 0$$

$$\mathcal{I}_2 = 0$$

$$\mathcal{I}_3 = 2 \frac{1 - (-1)^k}{k^2 \pi^2} (x_{\max} - x_{\min})$$

$$\mathcal{I}_4 = 0$$

$$a_k = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 + \mathcal{I}_4$$

$$a_k = 2 \frac{1 - (-1)^k}{k^2 \pi^2} (x_{\max} - x_{\min})$$

Retour sur la décomposition en SF (1/3)

Repérage dans l'espace & produit scalaire

$$\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle = \langle \vec{i}, \vec{k} \rangle = \langle \vec{j}, \vec{k} \rangle = 0$$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthogonale de \mathbb{R}^3

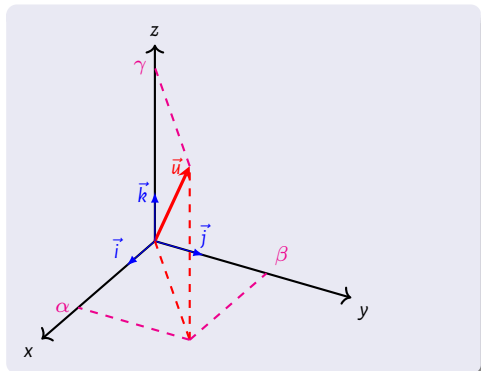
Soit \vec{u} un vecteur dans l'espace

$$\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$$

Abscisse $\alpha = \langle \vec{u}, \vec{i} \rangle$

Ordonnée $\beta = \langle \vec{u}, \vec{j} \rangle$

Cote $\gamma = \langle \vec{u}, \vec{k} \rangle$



$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2$$

Retour sur la décomposition en SF (2/3)

Cas des fonctions

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle \approx (f_{l_0}g_{l_0} + \dots + f_{l-1}g_{l-1} + f_l g_l + f_{l+1}g_{l+1} + \dots + f_{l_n}g_{l_n}) \Delta t \text{ avec } \Delta t = \frac{t_n - t_0}{n+1}$$

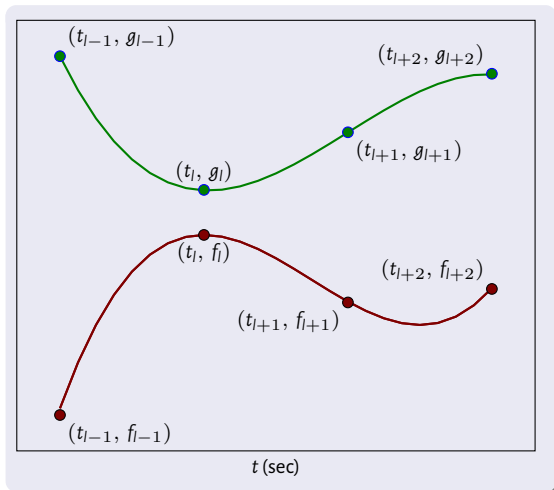
$$t_0 = l_0 \Delta t$$

$$t_n = l_n \Delta t$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_{l_0} \\ \vdots \\ f_{l-1} \\ f_l \\ f_{l+1} \\ \vdots \\ f_{l_n} \end{bmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} g_{l_0} \\ \vdots \\ g_{l-1} \\ g_l \\ g_{l+1} \\ \vdots \\ g_{l_n} \end{bmatrix}$$

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle \approx \sum_{l=l_0}^{l_n} f_l g_l \Delta t$$

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0]{} \int_{t_0}^{t_n} f(t)g(t)dt$$



La transformée de Fourier

Transformée directe

$$\mathcal{X}(f) = \mathfrak{F}\{x(t)\}$$

$$\mathcal{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp^{-2j\pi ft} dt$$

Transformée inverse

$$x(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{\mathcal{X}(f)\}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{X}(f) \exp^{2j\pi ft} df$$

Linéarité

$$h(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \xLeftrightarrow[\mathfrak{F}^{-1}]{\mathfrak{F}} \mathcal{H}(f) = \alpha \mathcal{X}(f) + \beta \mathcal{Y}(f)$$

Translation

$$y(t) = x(t - \tau) \xLeftrightarrow[\mathfrak{F}^{-1}]{\mathfrak{F}} \mathcal{Y}(f) = \exp^{-2j\pi f\tau} \mathcal{X}(f)$$

Modulation

$$y(t) = \exp^{2j\pi \frac{t}{\tau}} x(t) \xLeftrightarrow[\mathfrak{F}^{-1}]{\mathfrak{F}} \mathcal{Y}(f) = \mathcal{X}(f - \frac{1}{\tau})$$

Similitude (Changement d'échelle)

$$y(t) = x(\alpha t) \xLeftrightarrow[\mathfrak{F}^{-1}]{\mathfrak{F}} \mathcal{Y}(f) = \frac{1}{|\alpha|} \mathcal{X}(\frac{f}{\alpha}) \text{ pour } \alpha > 0$$

Énergie finie

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Puissance

$$\mathcal{P} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{-T/2} |x(t)|^2 dt$$

Théorème de Parseval Plancherel

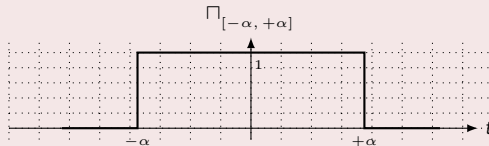
Soit x un signal tel que

$$\mathcal{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp^{-2j\pi ft} dt \implies \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{X}(f)|^2 df.$$

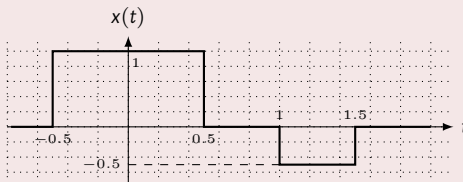
- ▶ L'énergie peut se calculer indifféremment dans l'espace du temps ou des fréquences ;
- ▶ La quantité $|\mathcal{X}(f)|^2$ dénote la densité spectrale d'énergie. Dans le cas où le signal x est limité dans le temps, on parle de densité spectrale de puissance.

Exercice #11

- ① Calculer la transformée de Fourier de la fonction $\Pi_{[-\alpha, +\alpha]}$, avec $\alpha > 0$, indiquée par la courbe suivante :



- ② En déduire l'expression de la transformée de Fourier de la fonction $x(t)$ donnée par le graphique suivant :



① La transformée de Fourier de $\Pi_{[-\alpha, +\alpha]}(t)$ est :

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F} \left\{ \Pi_{[-\alpha, +\alpha]}(t) \right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{[-\alpha, +\alpha]}(t) e^{-2j\pi f \times t} dt \\
 &= \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-2j\pi f \times t} dt \\
 &= -\frac{1}{2j\pi f} \left[e^{-2j\pi f \times t} \right]_{-\alpha}^{+\alpha} \\
 &= -\frac{e^{-2j\pi \alpha f} - e^{2j\pi \alpha f}}{2j\pi f} \\
 &= \frac{\cancel{2j} \sin(2\pi \alpha f)}{\cancel{2j}\pi f} \\
 &= 2\alpha \frac{\sin(2\pi \alpha f)}{2\pi \alpha f}.
 \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\mathfrak{F} \left\{ \Pi_{[-\alpha, +\alpha]}(t) \right\} = 2\alpha \operatorname{sinc}(2\pi \alpha f).$$

② La fonction $x(t)$ peut s'écrire comme suit :

$$x(t) = \Pi_{[-0.5, +0.5]}(t) - 0.5 \Pi_{[-0.25, +0.25]}(t - 1.25).$$

Sa transformée de Fourier est alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{x(t)\} &= \mathfrak{F}\left\{\Pi_{[-0.5, +0.5]}(t) - 0.5 \Pi_{[-0.25, +0.25]}(t - 1.25)\right\} \\ &= \mathfrak{F}\left\{\Pi_{[-0.5, +0.5]}(t)\right\} - 0.5 \mathfrak{F}\left\{\Pi_{[-0.25, +0.25]}(t - 1.25)\right\} \\ &= \mathfrak{F}\left\{\Pi_{[-0.5, +0.5]}(t)\right\} - 0.5 e^{-2j\pi f \times 1.25} \mathfrak{F}\left\{\Pi_{[-0.25, +0.25]}(t)\right\} \\ &= 2 \times 0.5 \operatorname{sinc}(2\pi f \times 0.5) - 0.5 \times 2 \times 0.25 \operatorname{sinc}(2\pi f \times 0.25) e^{-2.5j\pi f}. \end{aligned}$$

Soit encore :

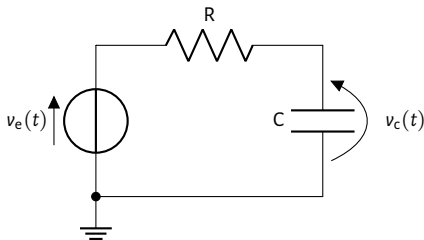
$$\mathfrak{F}\{x(t)\} = \operatorname{sinc}(\pi f) - 0.25 \operatorname{sinc}(0.5\pi f) e^{-2.5j\pi f}.$$

En cours...



- 1 Mise en situation
- 2 Signaux & systèmes
- 3 Analyse fréquentielle
- 4 Filtrage des signaux

On se propose d'étudier la mise en cascade d'une résistance R et d'un condensateur C , soumis à une entrée sinusoïdale $v_e(t)$. On s'intéresse à la tension capacitive $v_c(t)$:



On démontre qu'un tel circuit pour un condensateur initialement déchargé, c.-à-d. $v_c(t = 0) = 0$, est régi par l'équation différentielle suivante :

$$\tau \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_e(t), \quad \text{avec} \quad v_c(t = 0) = 0,$$

où $\tau = 1 \text{ sec}$ désigne la constante de temps du montage.

Sa réponse impulsionnelle est :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Gamma(t).$$

La transformée de Fourier de h est :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-2j\pi ft} dt \\
 &= \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} \Gamma(t) e^{-2j\pi ft} dt \\
 &= \frac{1}{\tau} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-2j\pi ft} dt \\
 &= \frac{1}{\tau} \int_0^{+\infty} e^{-(1+2j\pi\tau f)\frac{t}{\tau}} dt \\
 &= \frac{-1}{(1+2j\pi\tau f)} \left[e^{-(1+2j\pi\tau f)\frac{t}{\tau}} \right]_0^{+\infty}
 \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de h est :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-2j\pi ft} dt \\
 &= \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} \Gamma(t) e^{-2j\pi ft} dt \\
 &= \frac{1}{\tau} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-2j\pi ft} dt \\
 &= \frac{1}{\tau} \int_0^{+\infty} e^{-(1+2j\pi\tau f)\frac{t}{\tau}} dt \\
 &= \frac{-1}{(1+2j\pi\tau f)} \left[e^{-(1+2j\pi\tau f)\frac{t}{\tau}} \right]_0^{+\infty}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{H}(f) = \frac{1}{1+2j\pi\tau f}}$$

La transformée de Fourier de h est :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-2j\pi ft} dt \\
 &= \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} \Gamma(t) e^{-2j\pi ft} dt \\
 &= \frac{1}{\tau} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-2j\pi ft} dt \\
 &= \frac{1}{\tau} \int_0^{+\infty} e^{-(1+2j\pi\tau f)\frac{t}{\tau}} dt \\
 &= \frac{-1}{(1+2j\pi\tau f)} \left[e^{-(1+2j\pi\tau f)\frac{t}{\tau}} \right]_0^{+\infty}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(f) = \frac{1}{1 + 2j\pi\tau f}$$

$$|\mathcal{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2\tau^2 f^2}}$$

$$\angle \mathcal{H}(f) = -\arctan(2\pi\tau f)$$

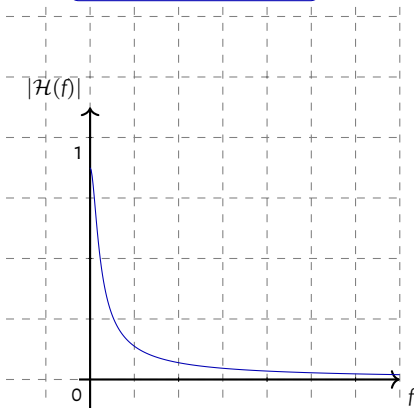
$$\lim_{f \rightarrow 0} |\mathcal{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 \tau^2 0^2}} = 1$$

$$\left| \mathcal{H}(f = \frac{1}{2\pi\tau}) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 \tau^2 \left(\frac{1}{2\pi\tau}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{f \rightarrow \infty} |\mathcal{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 \tau^2 f^2}}_{|f \rightarrow \infty} = 0$$

Lorsque la fréquence augmente, une plus grande partie de la puissance est transférée vers la masse et la tension de sortie diminue progressivement.

$$|\mathcal{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 \tau^2 f^2}}$$



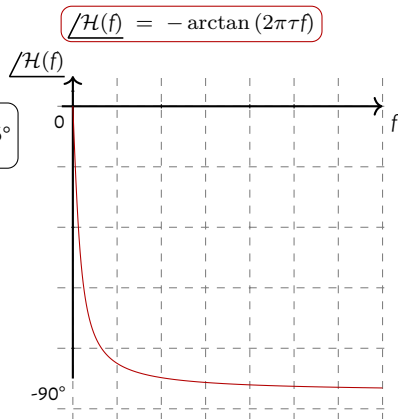
Le circuit proposé laisse passer les fréquences basses et atténue les fréquences hautes.

$$\lim_{f \rightarrow 0} \angle \mathcal{H}(f) = -\arctan(2\pi\tau \cdot 0) = 0$$

$$\angle \mathcal{H}\left(f = \frac{1}{2\pi\tau}\right) = -\arctan\left(2\pi\tau \frac{1}{2\pi\tau}\right) = -45^\circ$$

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \angle \mathcal{H}(f) = -\arctan(2\pi\tau f)_{|f \rightarrow \infty} = -90^\circ$$

L'impédance complexe du condensateur $\frac{1}{2j\pi fC}$ présente un argument nul aux fréquences les plus basses. La tension v_c à ses bornes est alors en phase avec la tension d'entrée v_e .



Soit le gain \mathcal{G} (dB) qui se définit par :

$$\mathcal{G} \text{ (dB)} = 20 \log_{10} (|\mathcal{H}(f)|)$$

Rappelons l'expression de $|\mathcal{H}(f)|$:

$$|\mathcal{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2\tau^2 f^2}}$$

Nous pouvons simplifier davantage l'expression de \mathcal{G} (dB) :

$$\mathcal{G} \text{ (dB)} = -10 \log_{10} (1 + 4\pi^2\tau^2 f^2)$$

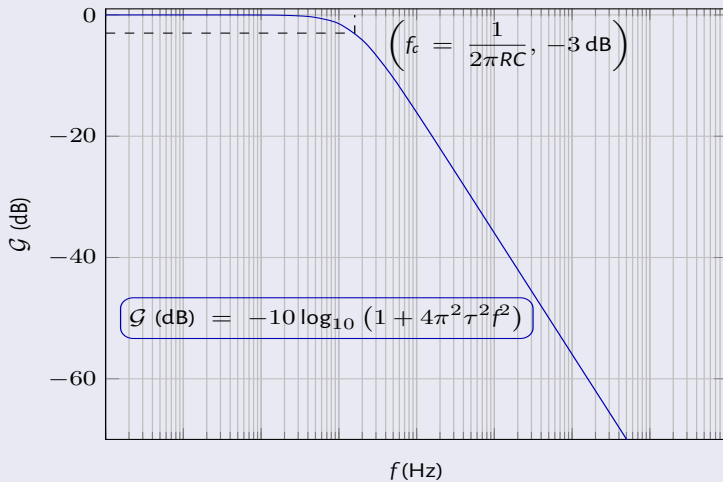
Considérations asymptotiques

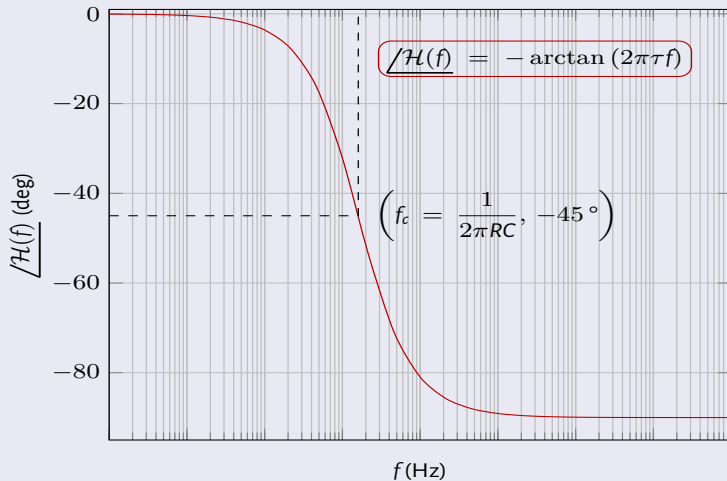
$$\mathcal{G} \text{ (dB)}|_{f=0} = 0$$

$$\mathcal{G} \text{ (dB)}|_{f=\frac{1}{2\pi\tau}} = -10 \log_{10} (2) = -3$$

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \mathcal{G} \text{ (dB)} \sim -20 \log_{10} (2\pi\tau f)$$

On désigne par f_c la fréquence de coupure du circuit, soit encore $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$.





Exercice #12

La réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un filtre passe-bas est donnée par :

$$h(t) = e^{-t} \Gamma(t).$$

Sa transformée de Fourier est :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f) &= \mathfrak{F}\{h(t)\}, \\ &= \frac{1}{1 + 2j\pi f}. \end{aligned}$$

Le module et l'argument de $\mathcal{H}(f)$ sont donnés respectivement par :

$$|\mathcal{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2}}, \quad \angle \mathcal{H}(f) = -\arctan(2\pi f).$$

Calculer la réponse $y(t)$ du système $h(t)$ suite à l'application de l'entrée

$$u(t) = \cos(4\pi t) - 0.5 \sin(0.5t).$$

L'entrée $u(t)$ est :

$$u(t) = \cos(2\pi f_1 t) - 0.5 \sin(2\pi f_2 t),$$

avec $f_1 = 2 \text{ Hz}$ et $f_2 \approx 80 \text{ mHz}$. La sortie $y(t)$ sera calculée comme suit :

$$y(t) = |\mathcal{H}(f_1)| \cos\left(2\pi f_1 t + \underline{\angle \mathcal{H}(f_1)}\right) - 0.5 |\mathcal{H}(f_2)| \sin\left(2\pi f_2 t + \underline{\angle \mathcal{H}(f_2)}\right),$$

avec :

$$|\mathcal{H}(f_1)| \approx 0.08$$

$$|\mathcal{H}(f_2)| \approx 0.89$$

$$\underline{\angle \mathcal{H}(f_1)} \approx -1.491 \text{ rad}$$

$$\underline{\angle \mathcal{H}(f_2)} \approx -0.465 \text{ rad}.$$

$$y(t) = 0.08 \cos(4\pi t - 1.491 \text{ rad}) - 0.445 \sin(0.5t - 0.465 \text{ rad}).$$

Exercice #13

Considérons un système linéaire et invariant dans le temps décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 4y = 5\frac{du}{dt} - 3u.$$

- ❶ Identifier l'entrée et la sortie ;
- ❷ Calculer la réponse en fréquence de ce système qu'on dénote par $\mathcal{H}(f)$:

$$\mathcal{H}(f) = \frac{\mathcal{Y}(f)}{\mathcal{U}(f)},$$

$$\text{où } \mathcal{Y}(f) = \mathfrak{F}\{y(t)\} \quad \& \quad \mathcal{U}(f) = \mathfrak{F}\{u(t)\}$$

- ❸ Calculer son module et sa phase ;
- ❹ Calculer la réponse de ce système soumis à une entrée $u(t) = \cos(3t)$;
- ❺ Calculer la transformée de Fourier de la sortie de ce système soumis à une entrée échelon d'amplitude 2 ^a.

$$^a \mathfrak{F}\{\Gamma(t)\} = (1/2) \left(\delta(f) - \frac{j}{\pi f} \right)$$

- ① L'entrée et la sortie sont respectivement u et y ;
- ② L'opérateur $j\omega = 2j\pi f$ permet de représenter l'action dérivée dans le domaine fréquentiel. L'équation différentielle devient alors :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} \left\{ \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 4y \right\} &= \mathfrak{F} \left\{ 5 \frac{du}{dt} - 3u \right\} \\ (j\omega)^2 \mathcal{Y}(f) + 5j\omega \mathcal{Y}(f) + 4\mathcal{Y}(f) &= 5j\omega \mathcal{U}(f) - 3\mathcal{U}(f) \\ \{5j\omega + 4 - \omega^2\} \mathcal{Y}(f) &= \{5j\omega - 3\} \mathcal{U}(f) \\ \{10j\pi f + 4 - 4\pi^2 f^2\} \mathcal{Y}(f) &= \{10j\pi f - 3\} \mathcal{U}(f)\end{aligned}$$

La fonction \mathcal{H} s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f) &= \frac{\mathcal{Y}(f)}{\mathcal{U}(f)} \\ &= \frac{10j\pi f - 3}{10j\pi f + 4(1 - \pi^2 f^2)}\end{aligned}$$

③ Module & argument

$$|\mathcal{H}(f)| = \sqrt{\frac{100\pi^2 f^2 + 9}{100\pi^2 f^2 + 16(1 - \pi^2 f^2)^2}}$$

$$\angle \mathcal{H}(f) = -\arctan\left(\frac{10}{3}\pi f\right) - \arctan\left(\frac{10}{4} \frac{\pi f}{1 - \pi^2 f^2}\right)$$

$$\textcircled{4} 2\pi f = 3 \text{ rad/sec} \Rightarrow \pi f = 3/2 \text{ rad/sec}$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}(f)| &= \sqrt{\frac{100\frac{9}{4} + 9}{100\frac{9}{4} + 16\left(1 - \frac{9}{4}\right)^2}} \\ &= 0.967 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle \mathcal{H}(f) &= -\arctan\left(\frac{10}{3} \frac{3}{2}\right) - \arctan\left(\frac{10}{4} \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{4}}\right) \\ &= -0.12 \text{ rad} \end{aligned}$$

La sortie y est alors:

$$y(t) = 0.967 \cos(3t - 0.12).$$

⑤ La transformée de Fourier de la sortie y est

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(f) &= \mathfrak{F}\{y(t)\} \\ &= \mathfrak{F}\{h(t) * u(t)\} \\ &= \mathfrak{F}\{h(t)\} \times \mathfrak{F}\{u(t)\} \\ &= \mathcal{H}(f) \times \mathcal{U}(f) \\ &= \frac{10j\pi f - 3}{10j\pi f + 4(1 - \pi^2 f^2)} \left(\delta(f) - \frac{j}{\pi f} \right) \\ &= -\frac{3}{4}\delta(f) - \frac{10j\pi f - 3}{10j\pi f + 4(1 - \pi^2 f^2)} \frac{j}{\pi f} \end{aligned}$$

Lectures complémentaires



R. N. Bracewell. *The Fourier Transform & Its Applications*. McGraw-Hill Science/Engineering, 1999.



J. F. James. *A Student's Guide to Fourier Transforms: With Applications in Physics and Engineering (Student's Guides)*. Cambridge University Press, 2011.



S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume III: Practical Algorithm Development (Prentice-Hall Signal Processing Series)*. Prentice Hall, 2013.



H. L. V. Trees. *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I (Pt. 1)*. Wiley-Interscience, 2001.



J. Unpingco. *Python for Signal Processing: Featuring IPython Notebooks*. Springer, 2013.



R. Yamashita et al. "Convolutional neural networks: an overview and application in radiology". In: *Insights into Imaging* 9.4 (Aug. 2018), pp. 611–629. DOI: 10.1007/s13244-018-0639-9.