# Systèmes Multivariables

## Notes de cours [a]

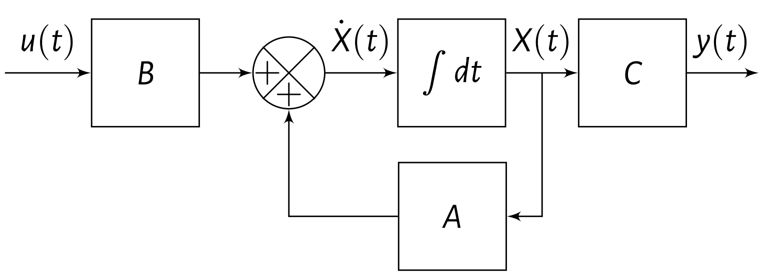
*2020-2021*

a. https ://github.com/a-mhamdi/isetbz/

**Abdelbacet Mhamdi**

Dr.-Ing. en GE – Technologue en GE

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{X}(t) & = & AX(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & CX(t) \end{array}\right.$$




**Dépt. GE - Institut Supérieur des Études Technologiques de Bizerte**

**À propos**

Dans ce cours, nous traiterons essentiellement les points suivants :

- ⋆ Caractéristiques d'un AOP ;
- ⋆ Types de polarisation d'un AOP ;
- ⋆ Fonctionnement sans ou avec une boucle de rétroaction ;
- ⋆ Montages de base : amplification, inversion, addition, soustraction, dérivation, intégration, etc. ;
- ⋆ Multivibrateur astable ;
- ⋆ Filtrage actif.

# Table des matières

**1 Résolution d'une équation différentielle linéaire 1**

**2 Représentation d'état 3**

2.1 Formes canoniques . . . . . 3

2.2 Passage d'une $\mathcal{RE}$ vers matrice $\mathcal{FT}$ . . . . . 5

**3 Commande par retour d'état 6**

**4 Observateur de Luenberger 6**

# 1 Résolution d'une équation différentielle linéaire

Une équation différentielle linéaire est souvent mise sous la forme suivante :

$$\dot{X}(t) = \mathcal{F}(t, X), \tag{1}$$

où $t$ n'est pas necessairement un paramètre temporel. La derivée de $X$ par rapport à $t$ est designée par $\dot{X}$. Les conditions initiales sont données par le biais du vecteur $X(t_0) = X_0$.

Par la suite, on considère un système linéaire de premier ordre suivant :

$$\tau\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \tag{2}$$

La solution générale de l'équation précedente est la superosition de deux solutions. Une due au régime libre (i.e., sous l'effet de la condition initiale). L'autre est le résultat du régime forcé.

**Régime libre**

La sortie $y_h$ dans ce cas agit sous l'effet de la condition initiale seule.

$$\tau\dot{y}_h(t) + y_h(t) = 0 \tag{3}$$

Après intégration de l'Eq. (3), on obtient :

$$\ln(|y_h(t)|) = -\frac{t}{\tau} + ci, \tag{4}$$

où ln dénote le logarithme naturel. Soit encore, après application de la fonction exp aux deux membre de l'Eq. (4) :

$$y_h(t) = CI\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{\tau}}. \tag{5}$$

$ci$ and $CI$ sont deux constantes et $CI = \mathrm{e}^{ci}$. On se donne la condition initiale $y(t = t_0) = y_0$, la constante $CI$ est égale à $y_0\mathrm{e}^{\frac{t_0}{\tau}}$. On en déduit alors l'expression de la solution homogène par l'expression de l'Eq. (6).

$$y_h(t) = y_0\mathrm{e}^{-\dfrac{t-t_0}{\tau}} \tag{6}$$

**Régime forcé**

On considère de nouveau Eq. (2). Par application de la méthode de variation de constante, on obtient :

$$y_p(t) = A(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7}$$

Après dérivation de $y_p(t)$ par rapport à $t$, on trouve :

$$\dot{y}_p(t) = \dot{CI}(t)\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{\tau}} + CI(t)\frac{d\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{\tau}}}{dt} \tag{8}$$

Après developpement, $\dot{y}_p(t)$ devient come suit :

$$\dot{y}_p(t) = \dot{CI}(t)\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau}CI(t)\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{\tau}} \tag{9}$$

On remplace $y_p(t)$ de l'éq. (2) par son terme équiavlent de l'éq. (9) :

$$\tau\left(\dot{CI}(t) - \frac{1}{\tau}CI(t)\right)\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{\tau}} + CI(t)\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{\tau}} = Ku(t) \tag{10}$$

Soit encore, après simplification :

$$\tau \dot{CI}(t)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad = \quad Ku(t) \tag{11}$$

On déduit l'expression de $\dot{CI}(t)$ :

$$\dot{CI}(t) = \frac{K}{\tau}e^{\frac{t}{\tau}}u(t) \tag{12}$$

Après intégration sur l'intervalle $[t_0,\ t]$,

$$CI(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{K}{\tau}e^{\frac{\varsigma}{\tau}}u(\varsigma)d\varsigma \tag{13}$$

La mise à jour de l'eq. (13) dans $y_p$ donne :

$$y_p(t) \quad = \quad \int_{t_0}^{t} \frac{K}{\tau}e^{-\dfrac{t-\varsigma}{\tau}}u(\varsigma)d\varsigma \tag{14}$$

Il en résulte que la solution la plus générale est $y = y_p + y_h$ :

$$y(t) \quad = \quad y_0 e^{-\dfrac{t-t_0}{\tau}} + \int_{t_0}^{t} \frac{K}{\tau}e^{-\dfrac{t-\varsigma}{\tau}}u(\varsigma)d\varsigma \tag{15}$$

**Généralisation**

On considère désormais un système linéaire d'ordre $n$ supérieur à $1$. L'équation représentative du système peut s'écrire de la façon suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) \quad = \quad \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}(t), \qquad m \leq n. \tag{16}$$

Soit $a_n = 1$. Eq. (16) s'actualise comme suit :

$$y^{(n)}(t) \quad = \quad -\sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}(t) \tag{17}$$

Soit le vecteur $X(t)$ qui regroupe les variables d'état du système. C'est donc un vecteur à $n$ élements. Il présente la capacité mémoire minimale que le système peut sauvegarder afin de pouvoir déterminer son évolution ultérieure. Nous rappelons qu'on peut transformer l'éq. (17) sous la forme matricielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{X}(t) & = & AX(t) + Bu(t) \\ \\ y(t) & = & CX(t) + Du(t) \end{array} \right. \tag{18}$$

avec

$$(A,\ B,\ C,\ D) \in \mathbb{M}_{(n,\,n)}(\mathbb{C})\mathrm{x}\mathbb{M}_{(n,\,1)}(\mathbb{C})\mathrm{x}\mathbb{M}_{(1,\,n)}(\mathbb{C})\mathrm{x}\mathbb{M}_{(1,\,1)}(\mathbb{C})$$

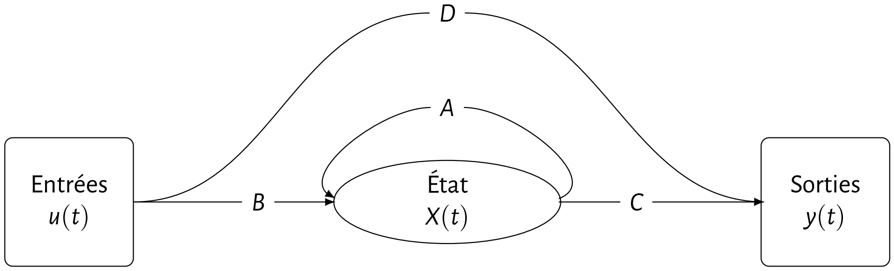
$A$ est la matrice d'état.

$B$ est la matrice d'entrée ;

$C$ est la matrice de sortie ;

$D$ caractérise le transfert direct entrée-sortie. Elle existe ssi $m = n$.

Un schéma explicatif des interactions mutuelles entre ces grandeurs est donné dans [PM82].




Étant donné la solution de l'éq. (15), le vecteur d'état $X(t)$ peut être déduit par la relation suivante :

$$X(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(t-\varsigma)}Bu(\varsigma)d\varsigma \tag{19}$$

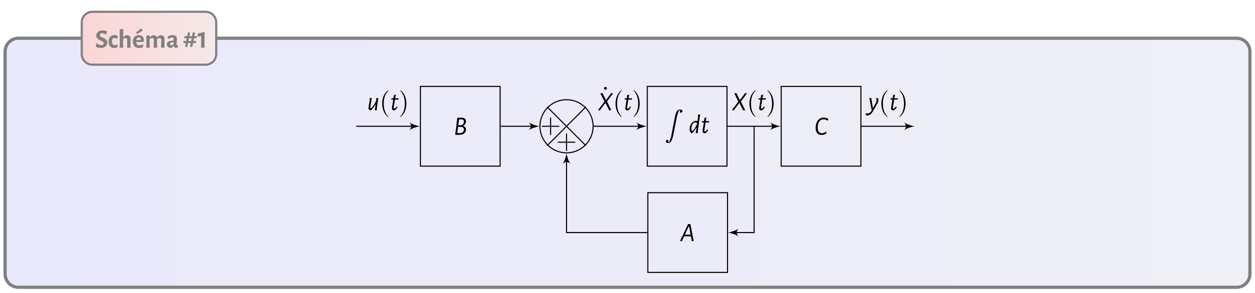
## 2 Représentation d'état

Nous considérons, ci-après,le scénario d'un système linéaire mono-entrée, mono-sortie (sauf indication). Un système pareil est décrit par l'équation différentielle suivante, avec $m \leq n$ :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j}. \tag{20}$$

En appliquant la transformée de Laplace, on trouve :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}. \tag{21}$$




### 2.1 Formes canoniques

**Forme Campagne**

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \tag{22}$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j (\frac{1}{s})^{n-j}}{\sum_{i=0}^{n} a_i (\frac{1}{s})^{n-i}}, \tag{23}$$

Soit $a_n = 1$. Nous multiplions les deux cotés de l'équation précédente par la quantité $\frac{1}{s^n}$ afin d'éviter toute forme derivée dans la réalisation du schéma bloc du système. Le résultat est donné ainsi par Eq. (24).

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j(\frac{1}{s})^{n-j}}{1+\sum_{i=0}^{n-1} a_i(\frac{1}{s})^{n-i}} \tag{24}$$

Soit encore :

$$Y(s) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\frac{1}{s})^{n-i} Y(s) = \sum_{j=0}^{m} b_j(\frac{1}{s})^{n-j} U(s) \tag{25}$$

La sortie $Y(s)$ est accessible à travers Eq. (26).

$$Y(s) = \sum_{j=0}^{m} b_j(\frac{1}{s})^{n-j} U(s) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\frac{1}{s})^{n-i} Y(s) \tag{26}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} b_j(\frac{1}{s})^{n-j} \underbrace{[U(s) - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(\frac{1}{s})^{n-i}}{\sum_{j=0}^{m} b_j(\frac{1}{s})^{n-j}} Y(s)]}_{W(s)} \tag{27}$$

Soit la nouvelle variable $W(s)$ telle que :

$$\begin{aligned} W(s) &= U(s) - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(\frac{1}{s})^{n-i}}{\sum_{j=0}^{m} b_j(\frac{1}{s})^{n-j}} Y(s) \\ &= U(s) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\frac{1}{s})^{n-i} \frac{Y(s)}{\sum_{j=0}^{m} b_j(\frac{1}{s})^{n-j}} \\ &= U(s) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\frac{1}{s})^{n-i} W(s) \\ &= U(s) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\frac{1}{s})^{n-i} W(s) \qquad (28) \end{aligned}$$

La sortie $Y(s)$ est finalement donnée par Eq. (30).

$$Y(s) = \sum_{j=0}^{m} b_j \underbrace{(\frac{1}{s})^{n-j} W(s)}_{x_k(s)} \tag{29}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} b_k x_k(s) \tag{30}$$

Les matrices d'état $A_c$, d'entrée $B_c$ et de sortie $C_c$ sont :

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

(32)

$$C_c = \begin{pmatrix} b_0 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

## 2.2 Passage d'une $\mathcal{RE}$ vers matrice $\mathcal{FT}$

Soit un système décrit dans l'espace d'état par Eq. (34).

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t) \\ y(t) &= CX(t) + Du(t) \end{cases} \tag{34}$$

La matrice $\mathcal{FT}$ est indiquée par Eq. (35), où $Y(s)$ et $U(s)$ dénotent respectivement les images des signaux $y(t)$ et $u(t)$ par application de la transformée de Laplace :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI_n - A)^{-1}B + D, \tag{35}$$

La matrice $\mathcal{FT}$ est unique. Elle a autant de lignes que nombre de sorties. Elle a autant de colonnes que nombre d'entrées.

Exercice

On considère la représentation suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t), \\ y(t) &= CX(t) + Du(t), \end{cases} \tag{36}$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0.35 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3.2 \\ 4 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.15 & 1 \\ 2 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice $\mathcal{FT}$.

Soit :

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & b_2 \end{matrix} \end{array} \qquad C = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1} \\ \boxed{0 \quad 3.2} \\ \boxed{4 \quad 0.5} \end{pmatrix} & \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \end{array}$$

La dimension de la matrice $D$ est $(3, 2)$, Le système décrit par Eq. (36) a $3$ sorties et $2$ entrées.

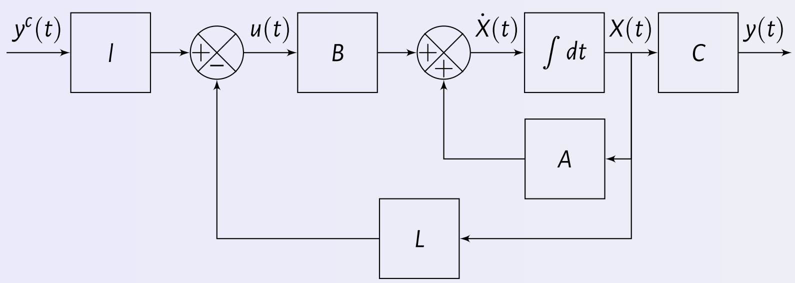
Soit $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ et $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{Y_1(s)}{U_1(s)} & \dfrac{Y_1(s)}{U_2(s)} \\ \\ \dfrac{Y_2(s)}{U_1(s)} & \dfrac{Y_2(s)}{U_2(s)} \\ \\ \dfrac{Y_3(s)}{U_1(s)} & \dfrac{Y_3(s)}{U_2(s)} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} c_1(sI_2 - A)^{-1}b_1 + D(1,1) & c_1(sI_2 - A)^{-1}b_2 + D(1,2) \\ c_2(sI_2 - A)^{-1}b_1 + D(2,1) & c_2(sI_2 - A)^{-1}b_2 + D(2,2) \\ c_3(sI_2 - A)^{-1}b_1 + D(3,1) & c_3(sI_2 - A)^{-1}b_2 + D(3,3) \end{pmatrix}}_{\text{Matrix Transfer Function : } M} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix}$$

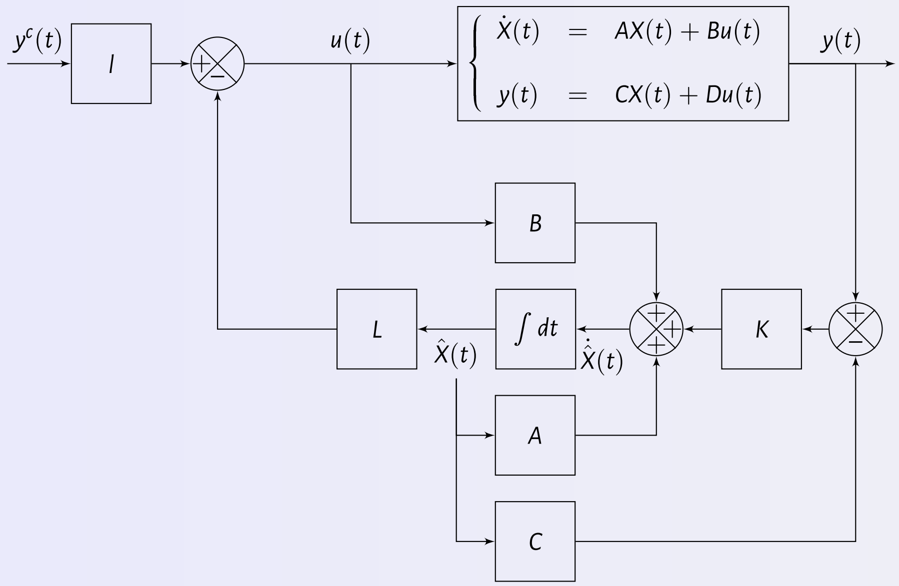
# 3 Commande par retour d'état

**Schéma #2**




# 4 Observateur de Luenberger

**Schéma #3**




## Références

[PM82] R. V. Patel et N. Munro. *Multivariable system theory and design*. Oxford, Eng. New York : Pergamon Press, 1982 (cf. p. 2).