Traitement de Signal

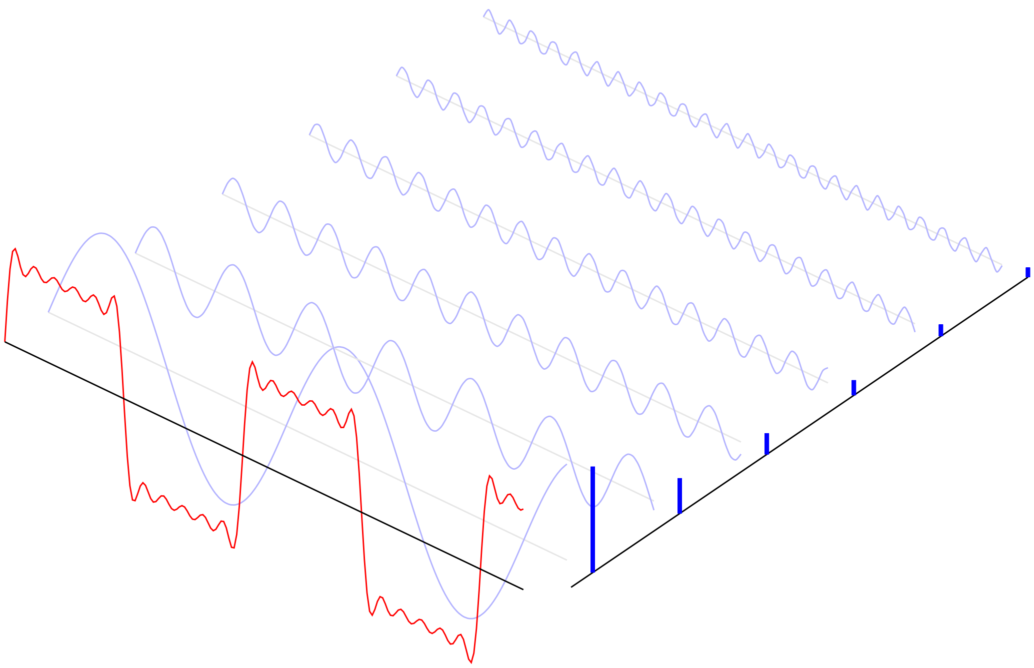
Notes de cours avec exercices corrigés [a]

2020-2021

a. https ://github.com/a-mhamdi/isetbz/

Abdelbacet Mhamdi

Dr.-Ing. en GE – Technologue en GE



$$x(t) \;=\; \bar{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(2k\pi\frac{t}{T}\right)$$

Dépt. GE - Institut Supérieur des Études Technologiques de Bizerte

À propos

Dans ce cours, nous traiterons essentiellement les points suivants :

- ⋆ Définition et classification des signaux ;
- ⋆ Convolution 1D & 2D ;
- ⋆ Décomposition en série de Fourier ;
- ⋆ Transformée de Fourier ;
- ⋆ Filtrage.

A. Mhamdi

Table des matières

1 Mise en situation

2 Signaux & systèmes

3 Analyse fréquentielle

Objectifs

Dans cette manipulation, nous allons :

★ rappeler le formalisme mathématique de la décomposition en série de Fourier

★ montrer le potentiel applicatif de cette transformation dans des applications des télécommunications.

3.1 Introduction

La transformée de Fourier en général est une approche qui permet d'exprimer une fonction comme la somme de ses projections sur une base de fonctions [God03]. La décomposition en série de Fourier en particulier est une expansion infinie d'une fonction périodique en termes de sinus et cosinus [FEF93]. Avec une telle décomposition, on peut construire un diagramme qui renseigne sur les amplitudes et phases de toutes les sinuisoïdes pour toutes fréquences [Pet02]. Elle offre ainsi une nouvelle possibilité d'examiner le signal dans un autre domaine autre que le domaine temporel. Cette technique est largement utilisée dans plusieurs domaines, notamment la télécommunication. On en cite principalement :

- Compression de l'information (JPEG par exemple)
- Suppression de l'écho et filtrage
- Modulation et démodulation.

3.2 Formalisme mathématique

Soit x une fonction déterministe. Elle peut être entièrement définie comme une somme pondérée de fonctions sinusoïdales :

$$x(t) = f_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + f_1 sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \cdots + f_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) + \cdots + f_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

Si x est périodique de période T (i.e. de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$), elle admet alors une décomposition dite en **série de Fourier** avec $\omega_k = k\omega \; \forall k \in \mathbb{N}$:

$$x(t) = f_0 \underbrace{\sin(0\omega t + \varphi_0)}_{\sin(\varphi_0)} + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \cdots + f_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + \cdots + f_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

L'expression de x se réduit à

$$x(t) = \underbrace{f_0 \sin(\varphi_0)}_{a_0} + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \cdots + f_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + \cdots + f_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

Rappelons que : $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta), \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Il en résulte que

$$\boxed{\sin(\ \omega t + \varphi\ ) = \cos(\ \omega t) \sin(\varphi\ ) + \sin(\ \omega t) \cos(\varphi\ )}$$
$$\boxed{\sin(k\omega t + \varphi_k) = \cos(k\omega t) \sin(\varphi_k) + \sin(k\omega t) \cos(\varphi_k)}$$
$$\boxed{\sin(n\omega t + \varphi_n) = \cos(n\omega t) \sin(\varphi_n) + \sin(n\omega t) \cos(\varphi_n)}$$

On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$f_k \sin(k\omega t + \varphi_k) = \underbrace{f_k \sin(\varphi_k)}_{a_k} \cos(k\omega t) + \underbrace{f_k \cos(\varphi_k)}_{b_k} \sin(k\omega t) = a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

On peut alors décomposer x comme suit :

$$x(t) = a_0 + a_1 cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + \cdots + a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) + \cdots + a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Soit encore

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

On pose $\Phi = \omega t$, une mise à jour de x donne

$$x(\Phi) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\Phi) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\Phi)$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi)\, d\Phi = 0} \boxed{\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi)\, d\Phi = 0} \boxed{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi)\sin(j\Phi)\, d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi)\cos(j\Phi)\, d\Phi = \pi \text{ ssi } i = j} \boxed{\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi)\sin(j\Phi) = \pi \text{ ssi } i = j}$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) d\Phi = a_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\Phi}_{=2\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(k\Phi)\, d\Phi}_{=0} + b_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(k\Phi)\, d\Phi}_{=0} \right]$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi) d\Phi = 2\pi a_0} \boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\Phi) d\Phi} \boxed{a_0 = \frac{1}{T} \int_0^{T} x(t) dt}$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) \cos(i\Phi) d\Phi = a_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) d\Phi}_{=0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(k\Phi) \cos(i\Phi) d\Phi}_{=\pi \text{ ssi } (i=k)} + b_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(k\Phi) \cos(i\Phi) d\Phi}_{=\pi \text{ ssi } (i=k)} \right]$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi) \cos(k\Phi)\, d\Phi = \pi a_k} \boxed{a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(\Phi) \cos(k\Phi)\, d\Phi} \boxed{a_k = \frac{2}{T} \int_0^{T} x(t) \cos(k\omega t)\, dt}$$

$$\int_0^{2\pi} x(\Phi) \sin(i\Phi) d\Phi = a_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) d\Phi}_{=0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(k\Phi) \sin(i\Phi) d\Phi}_{=0} + b_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(k\Phi) \sin(i\Phi) d\Phi}_{=\pi \text{ ssi } (i=k)} \right]$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi) \sin(k\Phi)\, d\Phi = \pi b_k} \boxed{b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(\Phi) \sin(k\Phi)\, d\Phi} \boxed{b_k = \frac{2}{T} \int_0^{T} x(t) \sin(k\omega t)\, dt}$$

Un signal périodique $x(t)$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$x(t) = \overline{x} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) \tag{1}$$

Le premier terme a_0 dénote la valeur moyenne du signal et est donné par :

$$\overline{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \tag{2}$$

Le terme a_k est :

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right)dt \tag{3}$$

Le coefficient b_k est :

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin\left(2k\pi\frac{t}{T}\right)dt \tag{4}$$

3.3 Exemple d'une conversion via la série de Fourier

L'exemple étudié par la suite est inspiré des travaux [HMM19]. On se propose de déterminer la série de Fourier de la fonction périodique suivante :

$$x(t) = A \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq T/2 \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

$$= -A \quad \text{si} \quad T/2 \leq t < T \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Le signal est périodique, donc il admet une décomposition en série de Fourier telle que :

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) \tag{9}$$

Calcul de a_0 Le signal est centré par rapport à zéro donc $a_0 = 0$.

Calcul de a_k Le signal est impair puisque $x(-t) = -x(t)$, donc $a_k = 0\ \forall k \geq 1$.

Calcul de b_k Le coefficient b_k se calcule comme suit :

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(2k\pi\frac{t}{T}\right)dt &(10)\\ &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} A\sin\left(2k\pi\frac{t}{T}\right)dt\frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} -A\sin\left(2k\pi\frac{t}{T}\right)dt &(11)\\ &= -\frac{2}{T}A\left\{\int_0^{T/2}\sin\left(2k\pi\frac{t}{T}\right)dt + \int_{T/2}^{T}\sin\left(2k\pi\frac{t}{T}\right)dt\right\} &(12)\end{aligned}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} b_k &= -\frac{2}{T}A\left\{\left[\frac{T}{2k\pi}\cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right)\right]_0^{T/2} + \left[\frac{T}{2k\pi}\cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right)\right]_{T/2}^{T}\right\} &(13)\\ &= \frac{A}{k\pi}\left\{-\underbrace{\cos(k\pi)}_{\pm 1} + \underbrace{\cos(0)}_{+1} + \underbrace{\cos(2k\pi)}_{+1} - \underbrace{\cos(k\pi)}_{\pm 1}\right\} &(14)\end{aligned}$$

Il en résulte :

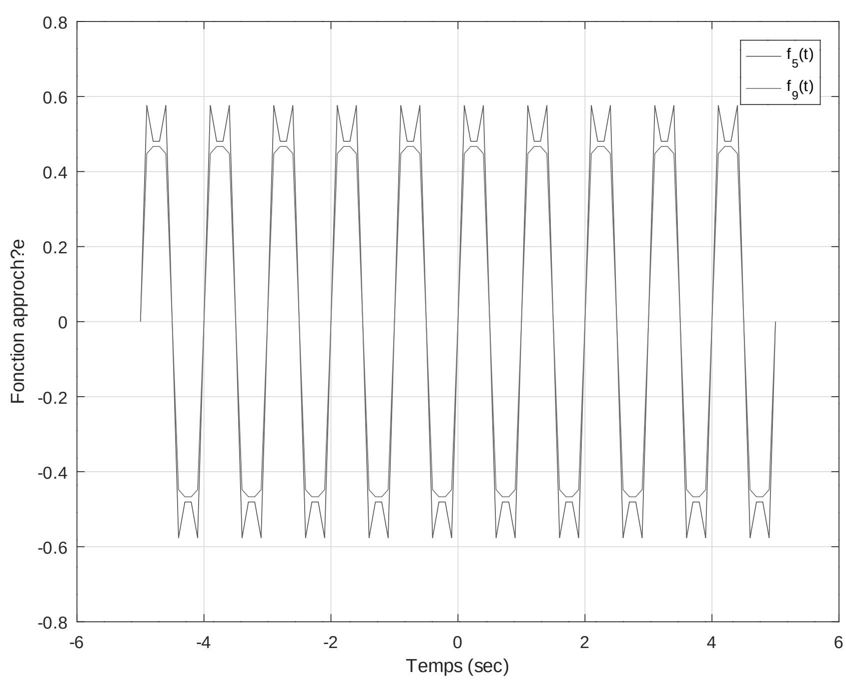
$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \text{ est pair} \\ \dfrac{4A}{k\pi} & \text{si} \quad k \text{ est impair} \end{cases} \tag{15}$$

Compte tenu de ce qui précède, l'expression finale de la fonction x est :

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\left\{\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(6\pi\frac{t}{T}\right) + \frac{1}{5}\sin\left(10\pi\frac{t}{T}\right) + \frac{1}{7}\sin\left(14\pi\frac{t}{T}\right) + \cdots\right\} \tag{16}$$

Résultats en simulation La fonction x est choisie carrée, périodique de période $T = 1$ sec et d'amplitude 0.5. Le code ci-dessous a été implémenté sous `GNU Octave`. Comme indiqué par Fig. **??**, plus on augmente la valeur du k, plus la forme d'onde carrée apprait et on se rapproche de la fonction initiale x.

```
clear all; clc
T = 1; % periode du signal
A = 0.5; % amplitude
vect = -5:0.1:5; % vecteur temps
wt = 2*pi/T*vect;
f5 = 4*A/pi*(sin(wt)+sin(3*wt)/3+sin(5*wt)/5); % k = 5
f9 = 4*A/pi*(sin(wt)+sin(3*wt)/3+sin(5*wt)/5+sin(7*wt)/7+sin(9*wt)/9); % k = 9
plot(vect, f5, vect, f9)
xlabel('Temps (sec)')
ylabel('Fonction f(t)')
legend('f_5(t)', 'f_9(t)')
grid on
```



3.4 Implémentation des signaux avec `Python`

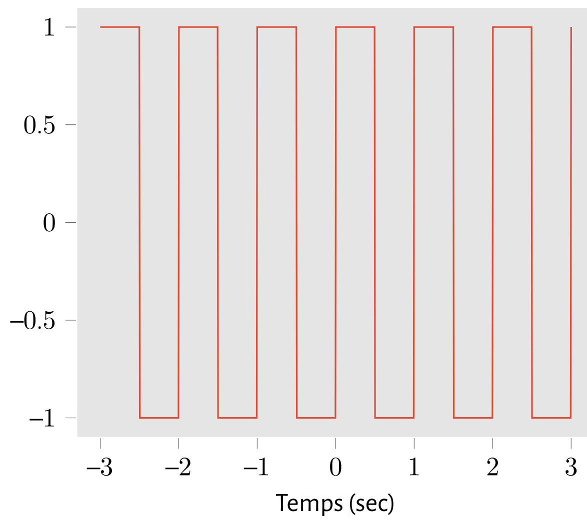
[21]:
```
import numpy as np
from scipy import signal
import matplotlib.pyplot as plt

plt.style.use("ggplot")
```

3.4.1 Signal carré

[22]:
```
nt = 1000
t = np.linspace(-3,3,nt)
wt = 2 * np.pi * t/1 # F = 1Hz, i.e. T = 1 sec
```

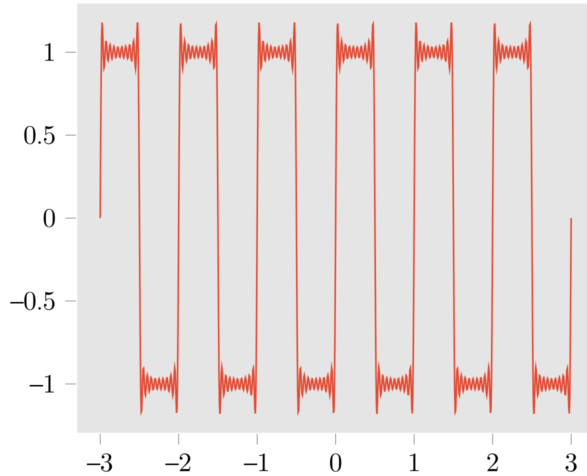
[23]:
```
x = signal.square(wt, 0.5) # Amplitude A = 1
plt.plot(t,x)
plt.grid()
plt.xlabel('Temps (sec)')
```



$$x \approx \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t) \qquad b_k = \frac{4}{k\pi}$$

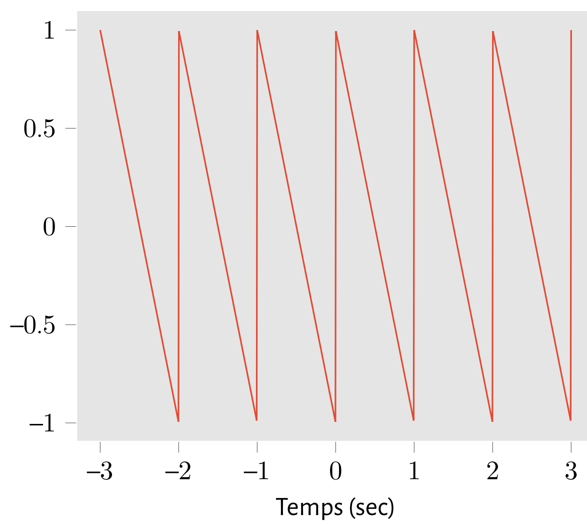
[25]:
```
xapp_lst = [ 4/(k*np.pi) * np.sin(k * wt) for k in range(1,20,2) ]
print(type(xapp_lst))
xapp_np = np.asarray(xapp_lst) # Conversion list --> numpy
print(type(xapp_np))
print(xapp_np.shape)
xapp = xapp_np.sum(axis=0) # Somme sur les colonnes
print(xapp.shape)
plt.plot(t, xapp)
plt.grid()
```

```
<class 'list'>
<class 'numpy.ndarray'>
(10, 1000)
(1000,)
```



3.4.2 Signal en dents de scie

[27]:
```
plt.plot(t, signal.sawtooth(wt, 0))
plt.grid()
plt.xlabel('Temps (sec)')
```



La troncature de x sur une période est :

$$x(t) = \Gamma - 2r$$

La valeur moyenne de x :

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{1}\int_0^1 (\Gamma - 2r)\,dt \\
&= \int_0^1 (1)\,dt - 2\int_0^1 (t)\,dt \\
&= 1 - 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$x = \overline{x} + x_\sim(t)$$

Le signal x est impaire $\Longrightarrow a_k = 0 \forall k$

$$x_\sim = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t) \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega t)$$

Calcul de b_k

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{1}\int_0^1 x(t)\sin(k\omega t) \\
&= 2\int_0^1 (\Gamma - 2r)\sin(k\omega t) \\
&= \underbrace{2\int_0^1 1\sin(k\omega t)}_{=0} - 4\int_0^1 t\sin(k\omega t) \\
&= -4\int_0^1 \underbrace{t}_{F}\,\underbrace{\sin(k\omega t)}_{g} \\
&= -4\left(\left[\quad FG \quad\right]_0^1 - \int_0^1 fG\right) \\
&= 4\left(\left[\quad t\frac{1}{k\omega}\cos\left(k\frac{2\pi}{1}t\right) \quad\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{k\omega}\cos(k\omega t)\right)dt \\
&= 4\left(\frac{1}{2k\pi}\right) \\
&= \frac{2}{k\pi}
\end{aligned}$$

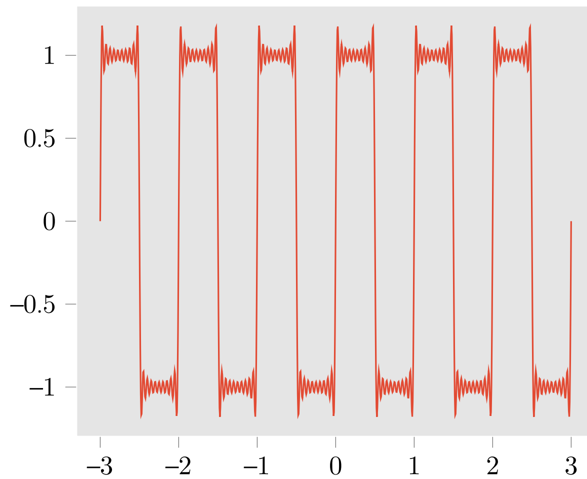
$$(FG)' = fG + gF$$

$$\begin{aligned}
F(t) = t &\rightarrow f(t) = 1 \\
g(t) = \sin(k\omega t) &\rightarrow G(t) = -\frac{1}{k\omega}\cos(k\omega t)
\end{aligned}$$

[28]:
```
xapp_lst = [ 2/(k*np.pi) * np.sin(k * wt) for k in range(1,20) ]
xapp_np = np.asarray(xapp_lst) # Conversion list --> numpy
xapp = xapp_np.sum(axis=0) # Somme sur les colonnes

plt.subplot(1,2,1)
```

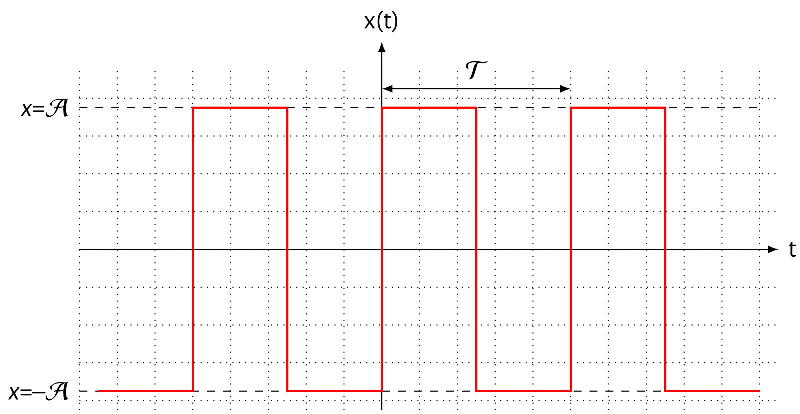
```
plt.plot(t, signal.sawtooth(wt, 0))
plt.grid()
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.subplot(1,2,2)
plt.plot(t, xapp)
plt.grid()
plt.xlabel('Temps (sec)')
```



3.5 Exercices corrigés

Exercice

Calculer la décomposition en série de Fourier d'un signal carré d'amplitude $\mathcal{A}$ et de période $\mathcal{T}$:



$$
\begin{aligned}
x(t) &= \bar{x} + x_{\sim}(t) \\
&= \bar{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(2k\pi \frac{t}{\mathcal{T}}\right) + b_k \sin\left(2k\pi \frac{t}{\mathcal{T}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

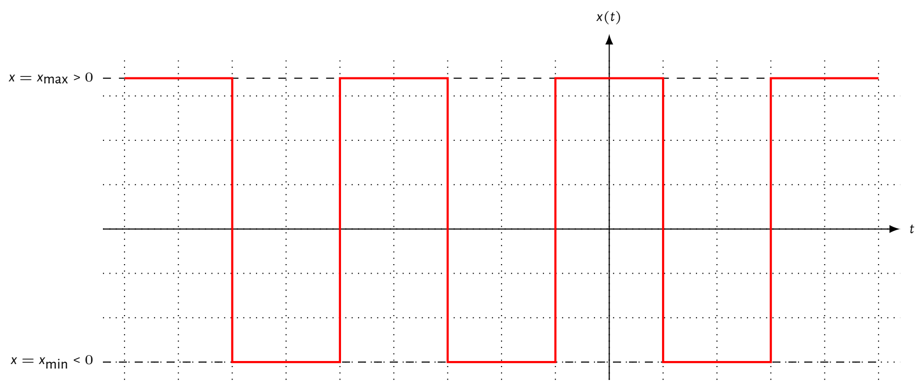
— Signal centré p/r à zéro $\longrightarrow$ $\overline{x} = 0$
— Signal impair $\longrightarrow$ $a_k = 0$.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(b_k \sin\left(2k\pi\frac{t}{\mathcal{T}}\right)\right), \quad \text{où} \\ b_k &= \frac{2}{\mathcal{T}}\int_0^{\mathrm{T}}\left\{2\mathcal{A}\Gamma_0 - 2\mathcal{A}\Gamma_{\frac{T}{2}}\right\}\sin\left(2k\pi\frac{t}{\mathcal{T}}\right)dt \\ &= \frac{4\mathcal{A}}{k\pi}, \quad \text{pour tout } k \text{ impair.} \end{aligned}$$

Exercice

Soit le signal carré x, de valeur maximale $x_{\max} > 0$, de valeur minimale $x_{\min} < 0$ et de période T indiqué par FIG. **??**.

1. Calculer sa valeur moyenne $\overline{x}$.
2. Calculer sa valeur efficace x_e.
3. Déterminer sa décomposition en série de Fourier



$$\overline{x} = \frac{1}{T}\left\{x_{\max}\frac{T}{2} + x_{\min}\frac{T}{2}\right\}$$

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
x_e &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2 dt} \\
&= \sqrt{\frac{1}{T}\left\{\int_0^{T/4} x_{\text{max}}^2 dt + \int_{T/4}^{3T/4} x_{\text{min}}^2 dt + \int_{3T/4}^{T} x_{\text{max}}^2\right\}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{T}\left\{x_{\text{max}}^2 \frac{T}{2} + x_{\text{min}}^2 \frac{T}{2}\right\}} \\
&= \sqrt{\frac{x_{\text{max}}^2 + x_{\text{min}}^2}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{x_e = \sqrt{\frac{x_{\text{max}}^2 + x_{\text{min}}^2}{2}}}
$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \bar{x} + x_{\sim}(t) \\
&= \bar{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos\left(2k\pi\frac{t}{\mathcal{T}}\right) + b_k \sin\left(2k\pi\frac{t}{\mathcal{T}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Le signal x(t) s'écrit sur une période comme suit :

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_{\text{max}}\left(\Gamma(t) - \Gamma_{\frac{T}{4}}(t)\right) + x_{\text{min}}\left(\Gamma_{\frac{T}{4}}(t) - \Gamma_{\frac{3T}{4}}(t)\right) + x_{\text{max}}\Gamma_{\frac{3T}{4}} \\
&= x_{\text{max}}\Gamma(t) + (x_{\text{min}} - x_{\text{max}})\,\Gamma_{\frac{T}{4}}(t) + (x_{\text{max}} - x_{\text{min}})\,\Gamma_{\frac{3T}{4}}(t).
\end{aligned}
$$

Le signal est pair. Ainsi, les termes b_k sont nuls. Les termes a_k sont :

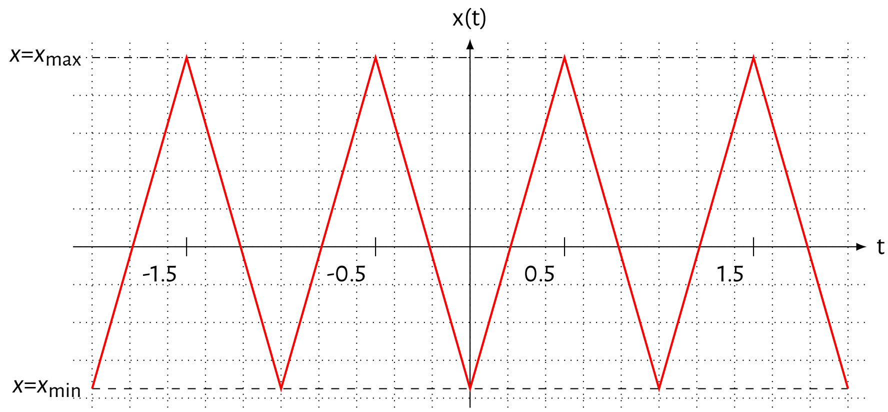
$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T \left\{x_{\text{min}}\Gamma(t) + (x_{\text{max}} - x_{\text{min}})\,\Gamma_{\frac{T}{4}}(t) + (x_{\text{min}} - x_{\text{max}})\,\Gamma_{\frac{3T}{4}}(t)\right\} \cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) dt \\
&= 2\frac{x_{\text{max}}}{T}\underbrace{\int_0^T \cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) dt}_{=0} + 2\frac{(x_{\text{min}} - x_{\text{max}})}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{T} \cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) dt \\
&\qquad + 2\frac{(x_{\text{max}} - x_{\text{min}})}{T}\int_{\frac{3T}{4}}^{T} \cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) dt \\
&= 2\frac{(x_{\text{min}} - x_{\text{max}})}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) dt \\
&= \frac{(x_{\text{min}} - x_{\text{max}})}{k\pi}\left\{\sin\left(k\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

La fonction x(t) peut être approximée par la description suivante :

$$
\begin{aligned}
x(t) \approx\; & \frac{(x_{\text{max}} + x_{\text{min}})}{2} + 2\frac{(x_{\text{max}} - x_{\text{min}})}{\pi}\left\{\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(6\pi\frac{t}{T}\right) + \frac{1}{5}\cos\left(10\pi\frac{t}{T}\right)\right. \\
& \left. -\frac{1}{7}\cos\left(14\pi\frac{t}{T}\right)\cdots\right\}.
\end{aligned}
$$

Exercice

Déterminer la décomposition en série de Fourier de la fonction représentée par le graphique suivant :



$$
\begin{aligned}
x(t) &= \bar{x} + x_{\sim}(t) \\
&= \bar{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_k \cos\left(2k\pi\frac{t}{\mathcal{T}}\right) + b_k \sin\left(2k\pi\frac{t}{\mathcal{T}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

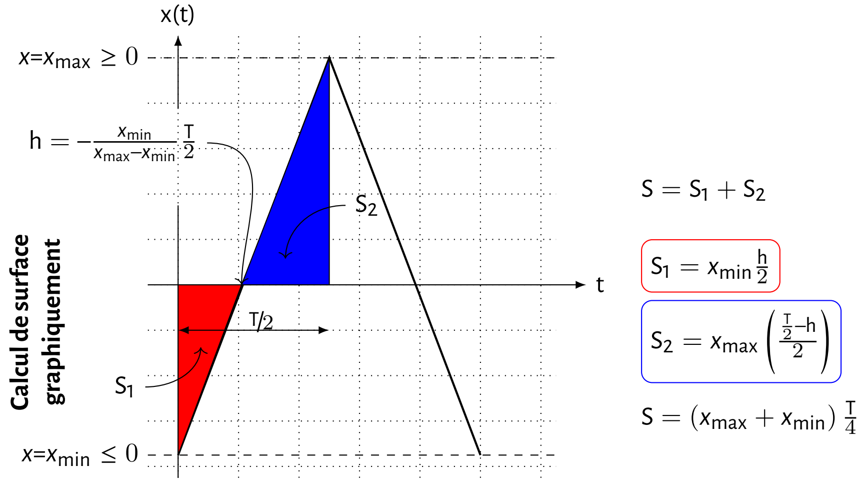
— Signal n'est pas centré p/r à zéro $\longrightarrow \bar{x} \neq 0$

— Signal pair $\longrightarrow b_k = 0$.

Sur une période, le signal x s'écrit comme suit :

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_{\text{min}}\Gamma_0 + 2\frac{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}{\text{T}}\left\{r_0 - 2r_{\frac{T}{2}}\right\} \\
&= x_{\text{min}}\Gamma_0 + 2\frac{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}{\text{T}}\left\{t\Gamma_0 - 2(t-\frac{\text{T}}{2})\Gamma_{\frac{T}{2}}\right\}
\end{aligned}
$$

La valeur moyenne $\bar{x}$ peut être déterminée par :



Ou encore $\overline{x}$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \\
&= x_{min} + 2\frac{x_{max}-x_{min}}{T^2}\int_0^T \left\{t\Gamma_0 - 2(t-\frac{T}{2})\Gamma_{\frac{T}{2}}\right\} dt \\
&= x_{min} + 2\frac{x_{max}-x_{min}}{T^2}\left\{\int_0^T tdt - 2\int_{T/2}^T tdt + \frac{T^2}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(x_{max}+x_{min}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{\sim}(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right)\right), \quad \text{où} \\
a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \left(x_{min}\Gamma_0 + 2\frac{x_{max}-x_{min}}{T}\left\{t\Gamma_0 - 2(t-\frac{T}{2})\Gamma_{\frac{T}{2}}\right\}\right)\cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \frac{2}{T}x_{min}\int_0^T \cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2 &= \frac{4}{T^2}\left(x_{max}-x_{min}\right)\int_0^T t\cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_3 &= -\frac{8}{T^2}\left(x_{max}-x_{min}\right)\int_{\frac{T}{2}}^T t\cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) dt \\
&= 2\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}\left(x_{max}-x_{min}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_4 &= \frac{4}{\mathsf{T}}\left(x_{\max} - x_{\min}\right)\int_{\frac{\mathsf{T}}{2}}^{\mathsf{T}} \cos\left(2k\pi\frac{t}{\mathsf{T}}\right) dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
a_k = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 + \mathcal{I}_4 \quad a_k = 2\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}\left(x_{\max} - x_{\min}\right)
$$

Temps continu	Temps discret
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp^{\jmath k\omega t}$	$x[n] = \sum_{k=\langle \mathsf{N}\rangle} c_k \exp^{\jmath k \frac{2\pi}{\mathsf{N}} n}$
$c_k = \frac{1}{\mathsf{T}}\int_{\mathsf{T}} x(t) \exp^{-\jmath k\omega t} dt$	$c_k = \frac{1}{\mathsf{N}}\sum_{n=\langle \mathsf{N}\rangle} x[n] \exp^{-\jmath k \frac{2\pi}{\mathsf{N}} n}$

3.6 Conclusion

La décomposition en série de Fourier est une procédure mathématique qui permet de décrire une fonction périodique par des termes oscillants en sinus et cosinus de fréquences multiples de la fréquence du signal initial. Cette approche permet d'analyser des signaux et de concevoir des systèmes en télécommunications.

3.7 Décomposition en série de Fourier

3.8 Transformée de Fourier

4 Filtrage des signaux

Références

[Bra99] R. N. Bracewell. *The Fourier Transform & Its Applications*. McGraw-Hill Science/Engineerin, 1999.

[FEF93] A. K. Fritz E. Froehlich. *The Froehlich/Kent Encyclopedia of Telecommunications*. Taylor & Francis Inc, 24 sept. 1993. 496 p. (cf. p. 1).

[God03] R. Godement. *Analyse mathématique II : Calcul différentiel et intégral, séries de Fourier, fonctions holomorphes*. Springer Berlin Heidelberg, 12 juin 2003. 500 p. (cf. p. 1).

[HMM19] A. Hasan, M. Meia et M. Mostofa. “Applications of Fourier Series in Electric Circuit and Digital Multimedia Visualization Signal Process of Communication System”. Dans : *American Journal of Circuits, Systems and Signal Processing* 4.4 (jan. 2019), pp. 72-80 (cf. p. 3).

[Jam11] J. F. James. *A Student's Guide to Fourier Transforms : With Applications in Physics and Engineering (Student's Guides)*. Cambridge University Press, 2011.

[Kay13] S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume III : Practical Algorithm Development (Prentice-Hall Signal Processing Series)*. Prentice Hall, 2013.

[Pet02] J. Petersen. *The Telecommunications Illustrated Dictionary*. Boca Raton, FL : CRC Press, 2002 (cf. p. 1).

[Tre01] H. L. V. Trees. *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I (Pt. 1)*. Wiley-Interscience, 2001.

[Unp13] J. Unpingco. *Python for Signal Processing : Featuring IPython Notebooks*. Springer, 2013.

[Yam+18] R. Yamashita et al. “Convolutional neural networks : an overview and application in radiology”. Dans : *Insights into Imaging* 9.4 (août 2018), pp. 611-629. doi : 10.1007/s13244-018-0639-9.