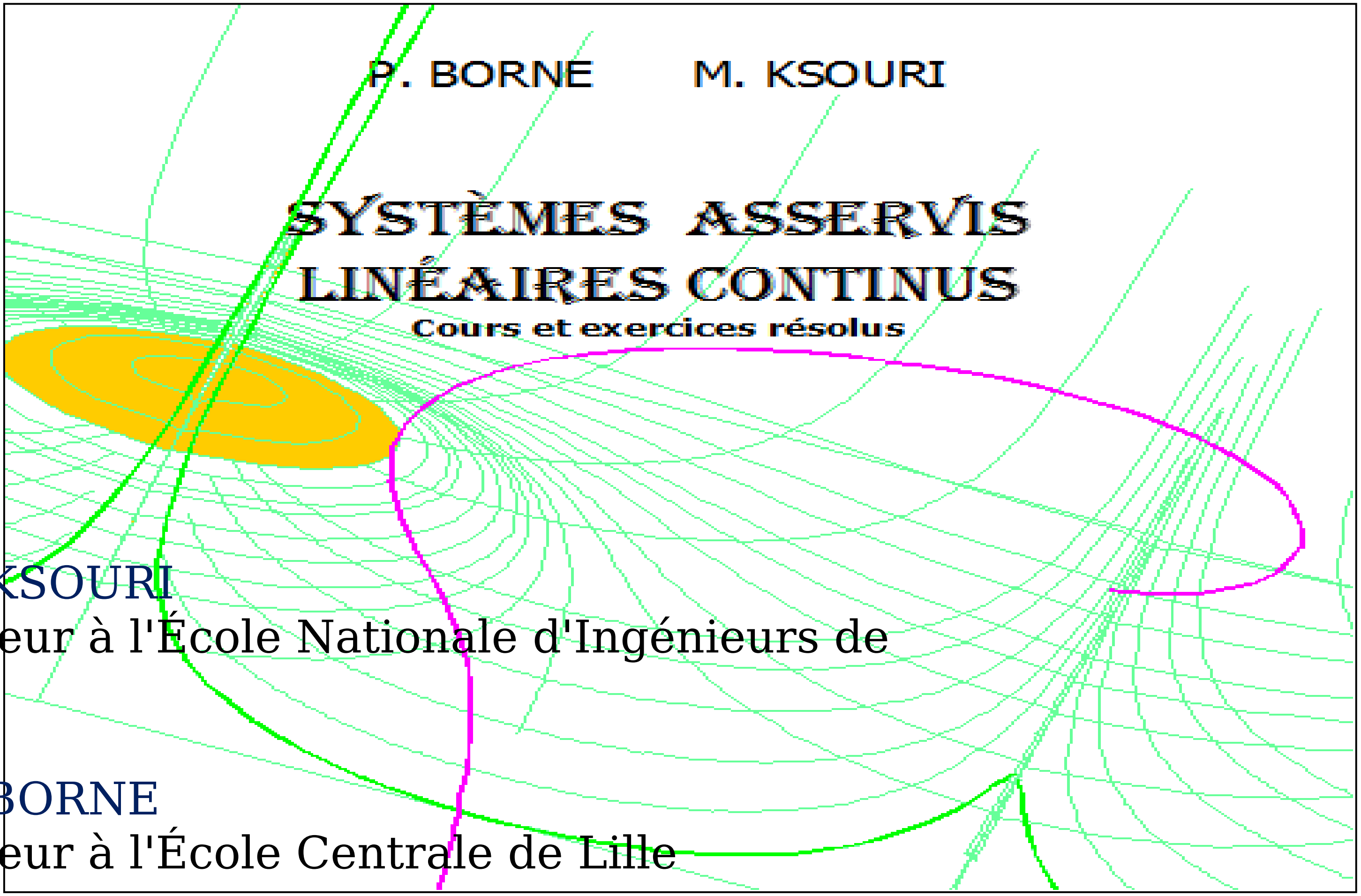
Discipline : Automatique Continue

A. Mhamdi & Y. Ben Brahem

Année universitaire : 2017-2018

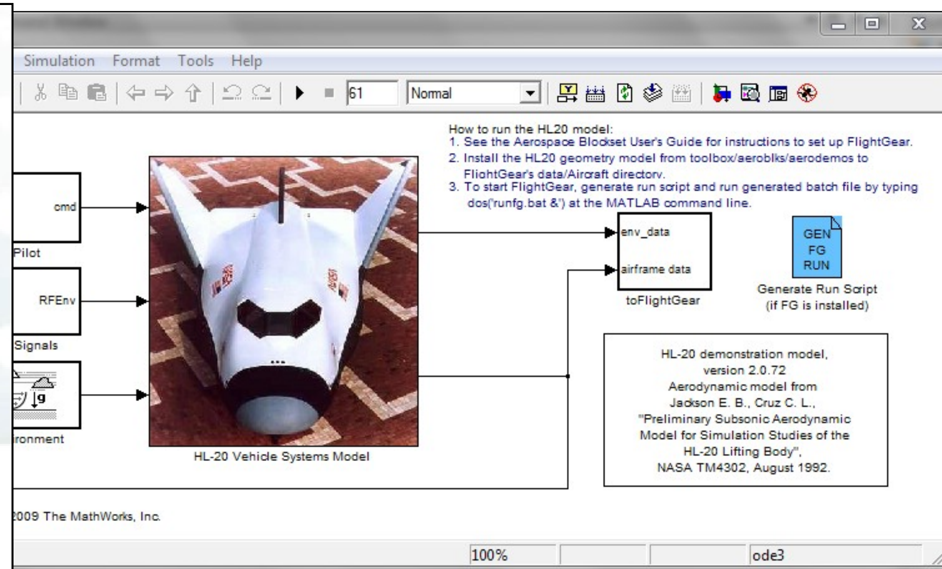
Ouvrage de Référence

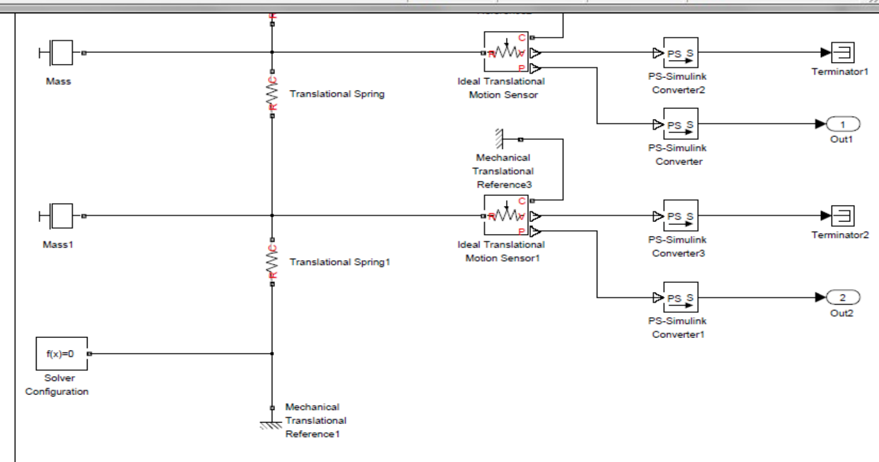


Mekki KSOURI
Professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis

Pierre BORNE
Professeur à l'École Centrale de Lille

Logiciel de Base





http://
www.mathworks.com

Contenu du Cours

- ✓ Chapitre I

Introduction

- ✓ Chapitre II

Représentation Fréquentielle Des Systèmes Continus Linéaires : Transformée De Laplace

- ✓ Chapitre III

Étude Temporelle Des Systèmes Continus Linéaires

- ✓ Chapitre IV

Approche Harmonique Des Systèmes Linéaires

- ✓ Chapitre V

Analyse Des Systèmes Asservis Linéaires Continus

Introduction

Plan du Chapitre :

1. **Systèmes continus linéaires**

2. **Systèmes asservis**

3. **Applications**

Introduction

1. Systèmes continus linéaires
2. Systèmes asservis
3. Applications

SYSTÈMES CONTINUS LINÉAIRES

Les Systèmes Continus Linéaires sont des systèmes dont l'évolution peut être décrite par un système d'équations différentielles à coefficients constants.

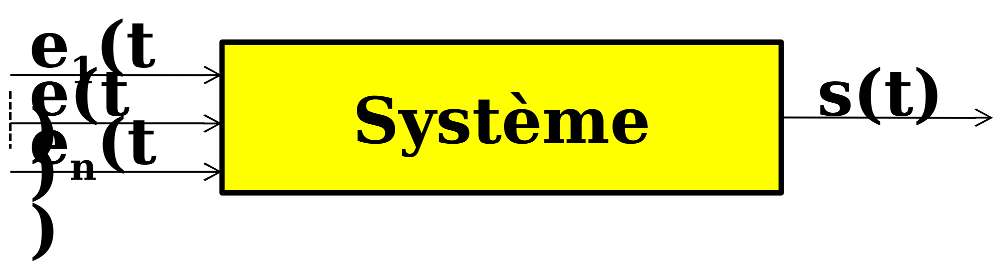
$$\sum_{i=0}^{n} a_i * \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j * \frac{d^j e(t)}{dt^j} \qquad avec (m<n)$$

Introduction

Systèmes

Ensemble d'éléments, en interaction dynamique organisés pour satisfaire un besoin et atteindre un objectif.

Un système peut posséder plusieurs entrées (causes) et plusieurs sorties (effets). Il est représenté par un bloc contenant le nom du système.



Introduction

Systèmes **continus**

- Un système est **continu**, par opposition à un système discret, lorsque les variations des grandeurs physiques sont définies à chaque instant (ils sont caractérisés par des fonctions continues).

- On parle aussi dans ce cas de système analogique.

Introduction

Systèm es

Contin us

Linéaires

Un système est dit <u>linéaire</u> si la fonction qui décrit son comportement est elle-même linéaire. Cette dernière vérifie alors les principes de proportionnalité et de superposition.

Introduction

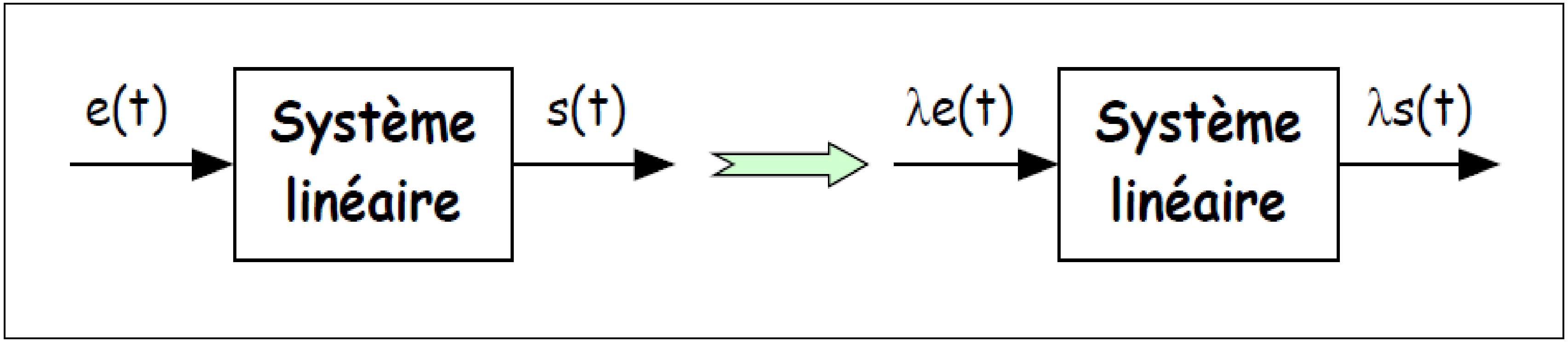
1. Systèmes continus linéaires
2. Systèmes asservis
3. Applications

Systèmes

Continus

Linéaires

❑ **Proportionnalité**

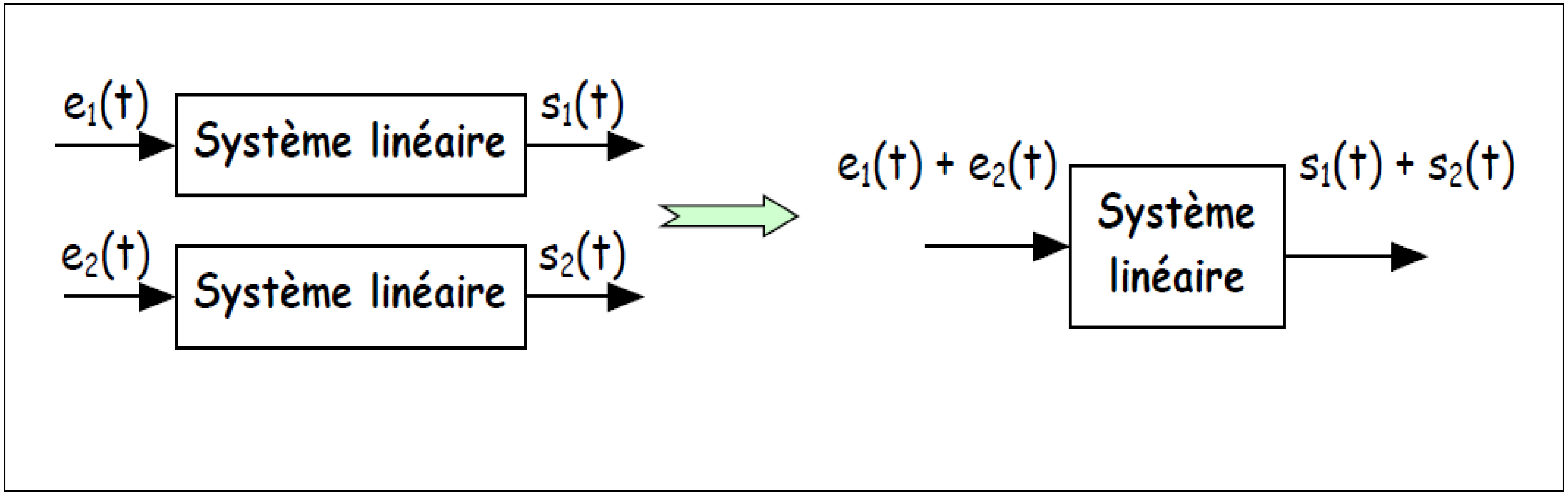


Introduction

1. Systèmes continus linéaires
2. Systèmes asservis
3. Applications

Systèm es | Contin us | Linéaires

- **Superposition**



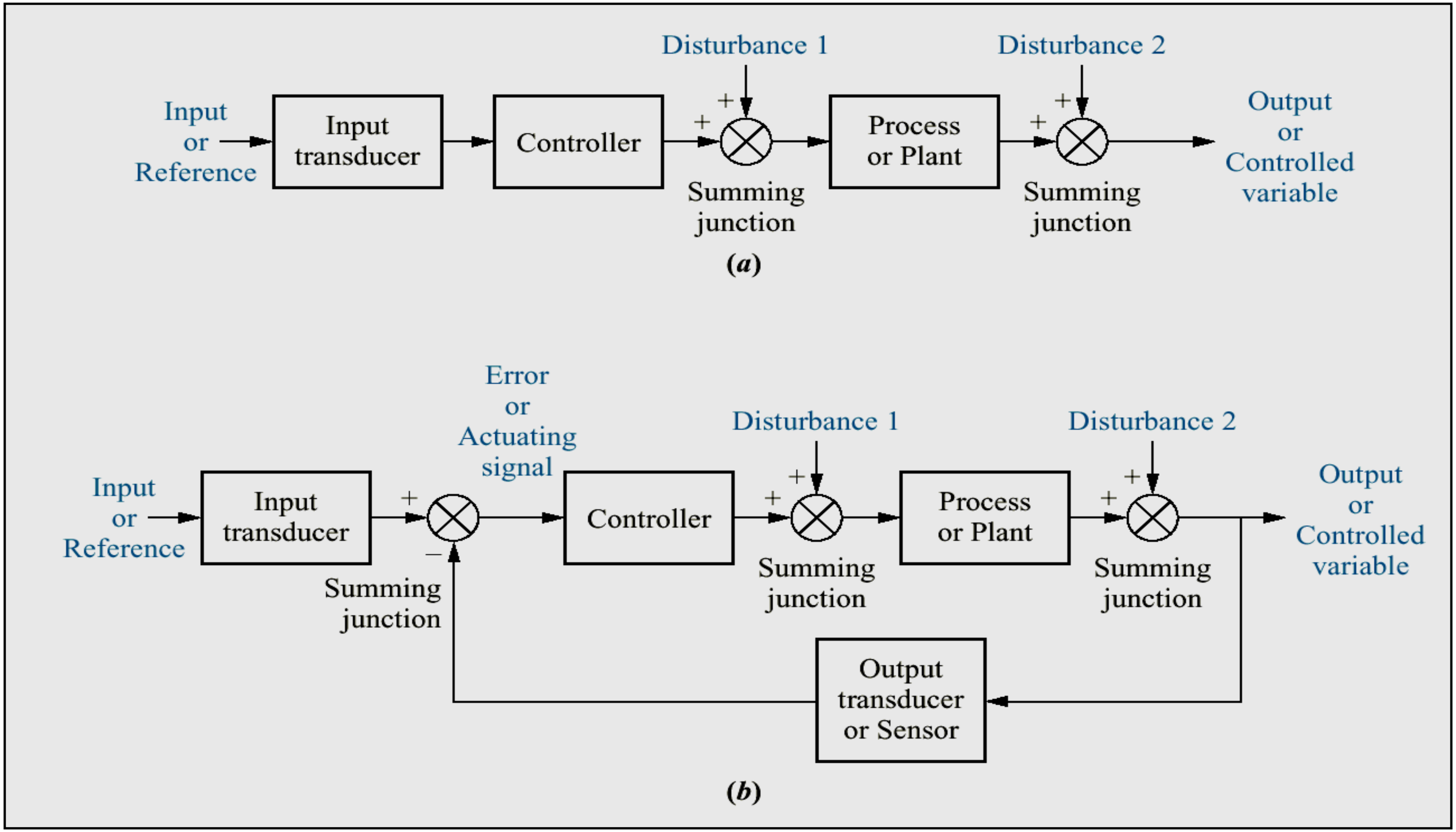
Introduction

Invariance dans le temps :

Un système est dit **invariant** si on suppose que les caractéristiques du système (masse, dimensions, résistance, impédance, ...) ne varient pas au cours du temps ("le système ne vieillit pas").

Introduction

1. Systèmes continus linéaires
2. Systèmes asservis
3. Applications



Introduction

- Régulation et asservissement

  - ✓ Régulation :

On appelle régulation, un système asservi qui doit maintenir constante la sortie conformément à la consigne (constante) indépendamment des perturbations.

Ex: Régulation de température

  - ✓ Asservissement :

On appelle asservissement, un système asservi dont la sortie doit suivre le plus fidèlement possible la consigne(consigne variable).

Ex: suivi de trajectoire

- Exercice d’Application (1/ 4)

  Si $s_1(t)$ est solution de l’équation :

Exercice d’Application (1/ 4)
Si $s_1(t)$ est solution de l’équation :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i * \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j * \frac{d^j e(t)}{dt^j}$$

avec(m<n)

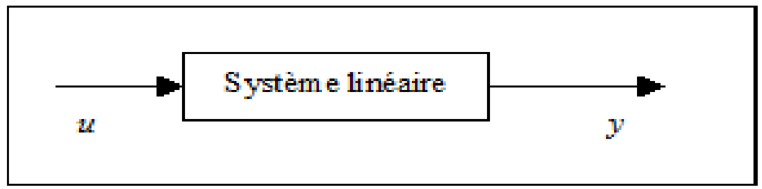
avec(m<n)

Que peut-on dire de $s_1(t-\tau)$?

Que peut-on dire de $s_1(t-\tau)$?

Introduction

- Exercice d'Application (2/ 4) (Extrait de l'ouvrage de référence)



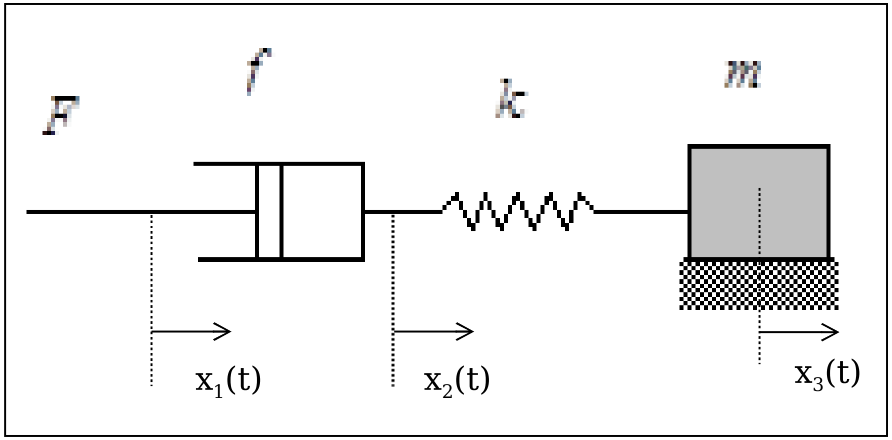
On lui applique successivement, à conditions initiales nulles les entrées suivantes :

$$u_1(t) = u(t) \qquad u_2(t) = u(t-\tau)$$

$$u_3(t) = u_1(t) - u_2(t)$$

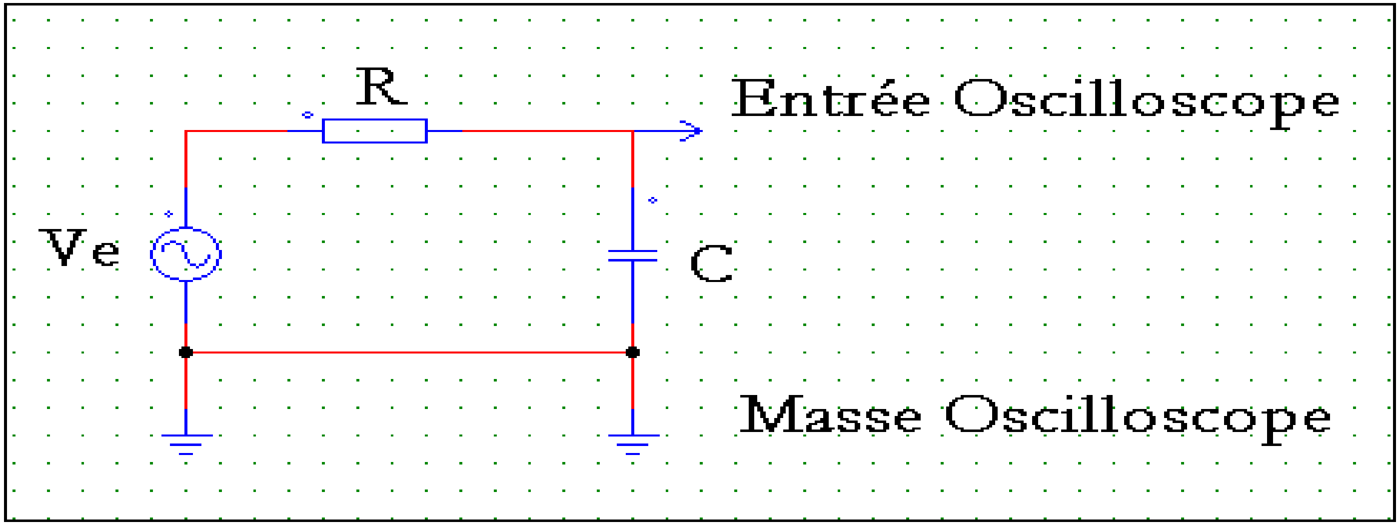
Calculer les sorties?

- Exercice d'Application (3/ 4)



Déterminer la loi de mouvement de la sortie $x_3(t)$.

- Exercice d'Application (4/ 4)



Ve(t) est un signal sinusoïdal, d'amplitude E et de fréquence F. réglable

1. Déterminer la tension capacitive pour une entrée de fréquence fixe.
2. Déterminer cette tension pour une entrée de fréquence

Conclusions à Tirer :

- Possibilité d'avoir d'autres domaines de représentation d'un signal :

  Temporel, Fréquentiel, etc.

- Caractériser un système

  Rapport Sortie-Entrée ≡ Fonction de Transfert

  Entrée □ Sortie

- Analyser un système

Chapitre II :

Représentation Fréquentielle Des Systèmes Continus Linéaires : Transformée De Laplace

1. Définition
2. Propriétés de la transformée de Laplace
3. Transformées de Laplace des signaux usuels
4. Fonction de transfert

CHAP II

REPRÉSENTATION FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES CONTINUS LINÉAIRES

TRANSFORMÉE DE LAPLACE

TRANSFORMÉE DE LAPLACE

Plan du Chapitre :

1. **Définition**
2. **Propriétés de la transformée de Laplace**
3. **Transformées de Laplace des signaux usuels**
4. **Fonction de transfert**

Transformée de Laplace

Définition :

Elle permet une représentation simplifiée des systèmes linéaires dont l'évolution est régie par une équation différentielle.

$$V(p) = \mathcal{L}(v(t)) = \int_{0}^{\infty} v(t)e^{-pt}\,dt$$

Transformée inverse:

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}(V(p)) = \int_{-j\infty}^{+j\infty} V(p)\,e^{pt}\,dp$$

Propriétés :

- Linéarité: $\mathcal{L}\left(\alpha x(t)+\beta y(t)\right)=\alpha X(p)+\beta Y(p)$

- Dérivation:

$$\mathcal{L}\left(x^{(k)}(t)\right)=p^{k}X(p)-p^{k-1}x(0^{+})-p^{k-2}x^{(1)}(0^{+})-\cdots-x^{(k-1)}(0^{+})$$

- Intégration:

$$\mathcal{L}\left(\int_{0}^{t}x(\lambda)d\lambda\right)=\frac{X(p)}{p}$$

Propriétés :

- Théorème de la valeur initiale: $x(0^+) = \lim_{p \to \infty} pX(p)$
- Théorème de la valeur finale: $\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{p \to 0} pX(p)$
- Retard T: $\mathcal{L}(x(t-T)) = e^{-pT} X(p)$
- Convolution: $\mathcal{L}\left(\int_0^\infty x(\tau) y(t-\tau) d\tau\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^\infty y(\tau) x(t-\tau) d\tau\right) = X(p)Y(p)$

Transformée de Laplace

Transformées des signaux usuels :

Les signaux les plus utilisés en automatique sont

- l'impulsion de Dirac
- l'échelon de position,
- l'échelon de vitesse ou rampe
- la sinusoïde.

Transformée de Laplace

Impulsion de Dirac δ(t–t_0) :

$d(t) = 0$ si $t \neq 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

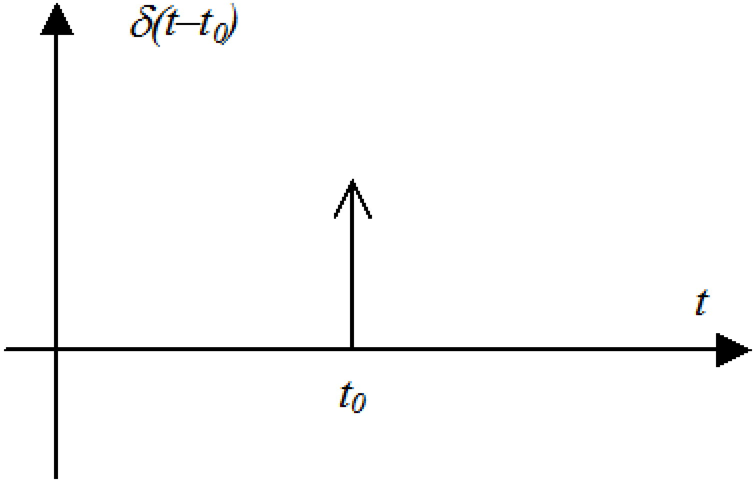


Figure 2.3 : Impulsion unité à $t = t_0$.

$$\mathcal{L}(\delta(t - t_0)) = e^{-t_0 p}$$

Transformée de Laplace

Echelon :

Notons $\Gamma(t)$ l'échelon d'amplitude unité à l'instant $t = 0$:

$\Gamma(t) = 0$ pour $t < 0$

$\Gamma(t) = 1$ pour $t \geq 0$

$$\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \Gamma(p) = \frac{1}{p}$$

Transformée de Laplace

Echelon retardé :

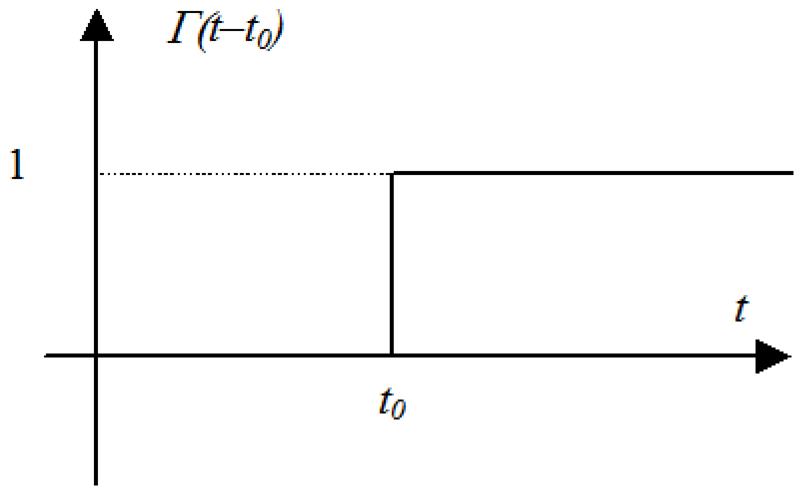
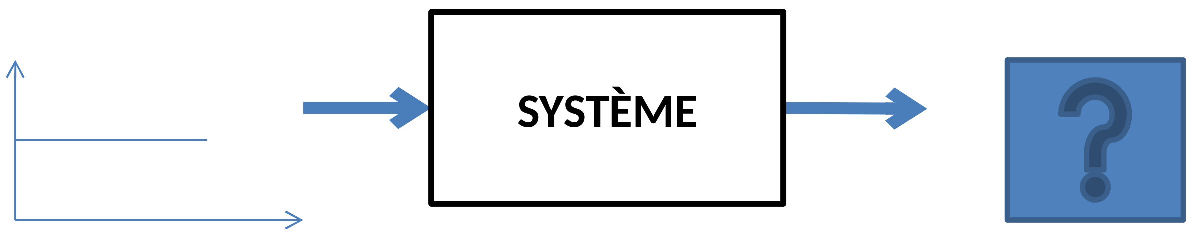


Figure 2.4 : Échelon unité à $t = t_0$.

$$\mathcal{L}\left(\Gamma(t-t_0)\right) = \frac{e^{-t_0 p}}{p}$$

Réponse indicielle unitaire d'un processus :

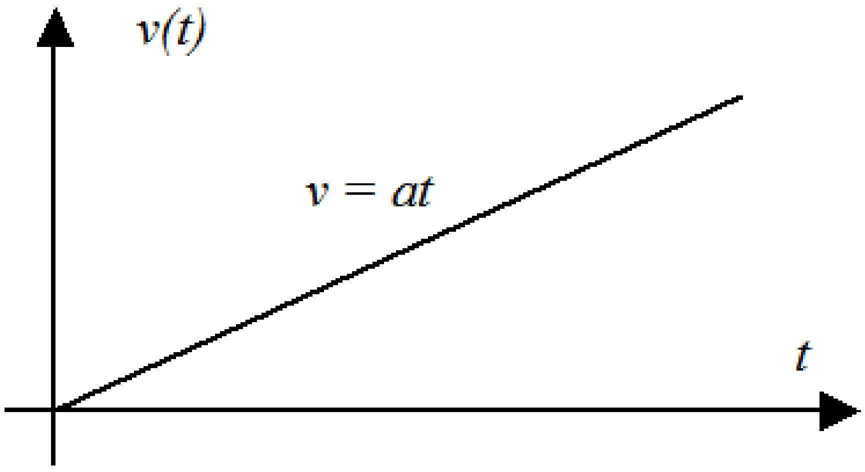
C’est la réponse à une entrée de type échelon unité en partant de conditions initiales nulles.



Rampe :

$$v(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0$$

$$v(t) = a.t \quad \text{pour } t \geq 0$$



Transformée de Laplace

Signal sinusoïdal :

$v(t) = 0$ pour $t < 0$

$v(t) = sin(w\ t)$ pour $t > 0$

$$\mathrm{L}(v(t)) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Considérons une équation différentielle de la forme :

$$a_0 y + a_1 y^{(1)} + a_2 y^{(2)} + \ldots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)} = b_0 u + b_1 u^{(1)} + \ldots + b_m u^{(m)}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} + p^n}$$

D'où: $Y(p) = F(p)\ U(p)$

$$F(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} + p^n}$$

Fonction de transfert / Transmittance

$y(t) = L^{-1}(F(p)\ U(p))$

Transformée de Laplace

$$F(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} + p^n}$$

$$b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^m = 0$$

Zéros

$$a_0 + a_1 p + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} + p^n = 0$$

Pôles

REMARQUE :

Si $u(t) = \delta(t) \quad ; \quad U(p) = \delta\ (p) = 1$

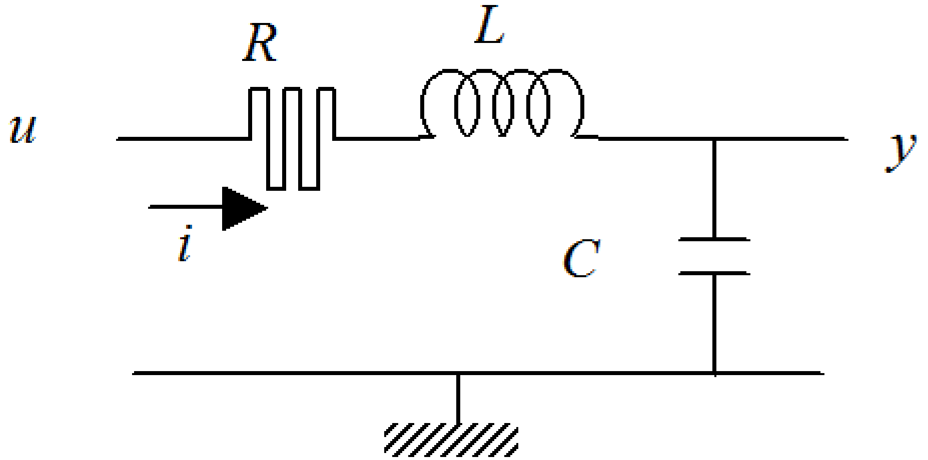
alors $Y(p) = F(p)$

La fonction de transfert d'un processus est donc la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle.

APPLICATIONS

Transformée de Laplace

APPLICATION 1 :



FONCTION DE TRANSFERT ?

APPLICATION 2 :

Calculer la réponse indicielle à un échelon d'amplitude *a* du système de transmittance :

$$\frac{Y}{U} = \frac{1}{1+\tau\, p}$$

en partant de la condition initiale $y(0) = y_0$.

APPLICATION 3 :

Calculer les réponses indicielles unitaires des systèmes de transmittances (MATLAB):

$$F_1 = \frac{1}{1+2p}, \qquad F_3 = \frac{2+p}{(1+2p)(1+4p)},$$

$$F_2 = \frac{1-p}{1+2p}, \qquad F_4 = \frac{2+2p+p^2}{(1+2p)(1+4p)}$$

APPLICATION 4 :

On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 + 4y_1 = 4\dot{u} + u \\ \ddot{y} + \dot{y} + y = \dot{y}_1 - 2y_1 \end{cases}$$

On demande d'écrire l'équation différentielle reliant *y* à *u* en éliminant y_1.

Discipline : Automatique I

Chapitre III :

Étude Temporelle Des Systèmes Continus Linéaires

Références Bibliographiques et Netographie

[AUT97] Automatique des systèmes continus, C. SUEUR, P. VANHEEGHE, P. BORNE, 1997, Editions TECHNIP, Paris.

[WEB10] http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/equadiff/equadiff.html

Ouvrages à consulter :

1. Régulation industrielle, Problèmes résolus, M. Ksouri, P. Borne, 1997, Editions TECHNIP, Paris.

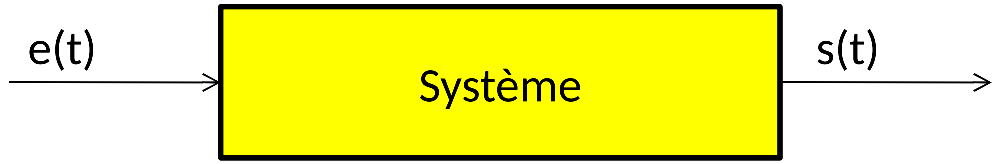
2. Automatique de base, P. Siarry, 1989, Ellipses.

Introduction

Plan du Chapitre :

1. **Cas général**
2. **Systèmes du premier ordre**
3. **Systèmes du deuxième ordre**

Mise en équation d’un système continu linéaire d’ordre quelconque



$$\sum_{i=0}^{n} a_i * \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j * \frac{d^j e(t)}{dt^j} \qquad avec(m<n)$$

Soit dans le domaine symbolique de Laplace

Rappel

$f(t)*u(t)$ ⟶ $F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$

$g(t)=\frac{d^k f(t)}{dt^k}$ ⟶ $G(p)=p^k*F(p)-\sum_{i=0}^{n-1} p^{(n-i-1)} * f^{(i)}(0+)$

Étude Temporelle Des Systèmes Continus Linéaires

Résultat ($\frac{d^k s(t=0^+)}{dt^k}=0 \ \forall k \in \{0..(n-1)\}$)

$$H(p)=\frac{L\{s(t)\}}{L\{e(t)\}}=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{\sum_{j=0}^{m} b_j * p^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i * p^i}$$

But à atteindre

Déterminer l'évolution temporelle de la sortie : s(t)

But à atteindre

Déterminer l'évolution temporelle de la sortie : s(t)

Principe général

« Le comportement temporel d'un système d'ordre quelconque s'étudie en décomposant sa fonction de transfert en éléments simples et en superposant les effets de l'entrée envisagée sur chacun d'entre eux. » [AUT97]

Principe général

« Le comportement temporel d'un système d'ordre quelconque s'étudie en décomposant sa fonction de transfert en éléments simples et en superposant les effets de l'entrée envisagée sur chacun d'entre eux. » [AUT97]

Système du premier ordre ?

Un système continu linéaire d'entrée **x** et de sortie **y** est dit du premier ordre s'il est régi par une équation différentielle à coefficients constants du type:

$$\tau . \frac{dy}{dt} + y = K.x$$

τ : Constante de temps du système (homogène à un temps)

K : Gain statique du système (gain en régime permanent)

$$\tau.\frac{dy}{dt}+y=K.x$$

En passant au **domaine de Laplace** :

$$\frac{dy}{dt}\rightarrow\ p.Y(p)-Y(0)$$

$$y\rightarrow\ Y(p)$$

$$x\rightarrow\ X(p)$$

L'équation devient :

$$\tau.pY(p)-\tau.Y(0)+Y(p)=K.X(p)$$

Réponse du système en utilisant la transformée de Laplace :

$$\tau.pY(p) - \tau.Y(0) + Y(p) = K.X(p)$$

En tenant compte des CI :

$$Y(p) = \frac{K}{1+\tau p} X(p) + \frac{\tau}{1+\tau p} Y(0)$$

D'où :

L-1

$$y(t) = L^{-1}[\frac{K}{1+\tau p} X(p)] + L^{-1}[\frac{\tau}{1+\tau . p} Y(0)]$$

Réponse du Sys.

Réponse forcée

Réponse libre

Résultat de l'action de sollicitation

$$x = 0$$

Réponse indicielle unitaire :

Entrée : Echelon unitaire

$$u(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\leq 0\\ 1 & \text{si } t\succ 0\end{cases} \xrightarrow{L} U(p)=\begin{cases}0 & \text{si } t\leq 0\\ \dfrac{1}{p} & \text{si } t\succ 0\end{cases}$$

d'où :

$$Y(p)=H(p).U(p)=\frac{K}{p(1+\tau.p)}=\frac{K}{p}-\frac{K.\tau}{(1+\tau.p)}$$

$$\Rightarrow \quad y(t)=K.u(t)-\frac{K\tau}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}.u(t)$$

Conditions initiales nulles :

$$\tau.\frac{dy}{dt}+y=K.x \xrightarrow{\mathcal{L}} \tau.pY(p)+Y(p)=K.X(p)$$

Fonction de transfert : $H(p)=\dfrac{Y(p)}{X(p)}$

D'où la fonction de transfert d'un Sys. 1er ordre s'écrit :

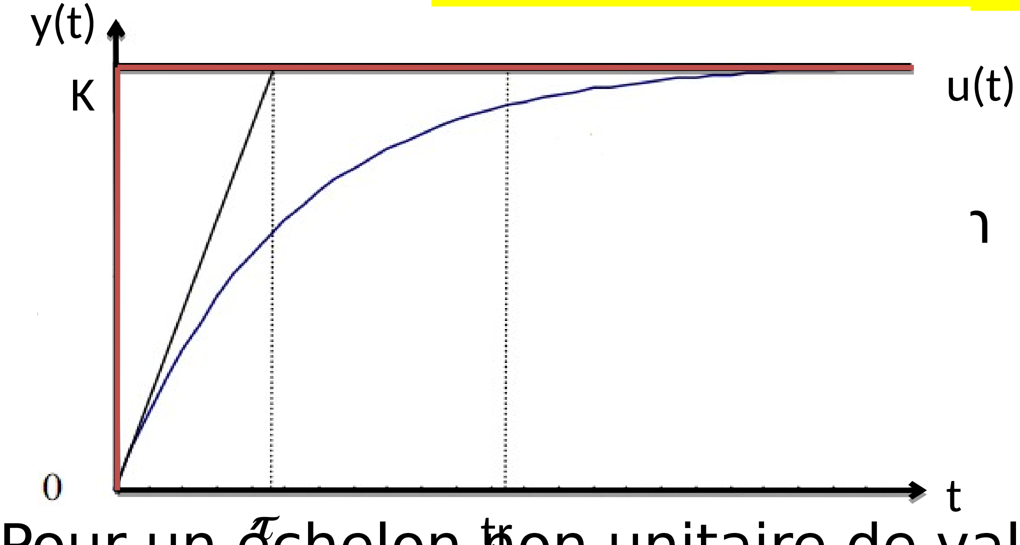
$$\boxed{H(p)=\frac{K}{1+\tau.p}}$$

Elle admet un pôle simple : $-\dfrac{1}{\tau}$

On appelle réponse indicielle, la réponse temporelle à un échelon pour un système linéaire initialement au repos. Cette réponse se compose de deux parties, la première correspond au régime transitoire, la seconde au régime permanent.

Réponse indicielle unitaire :

Réponse: pour t>0 $y(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})u(t)$



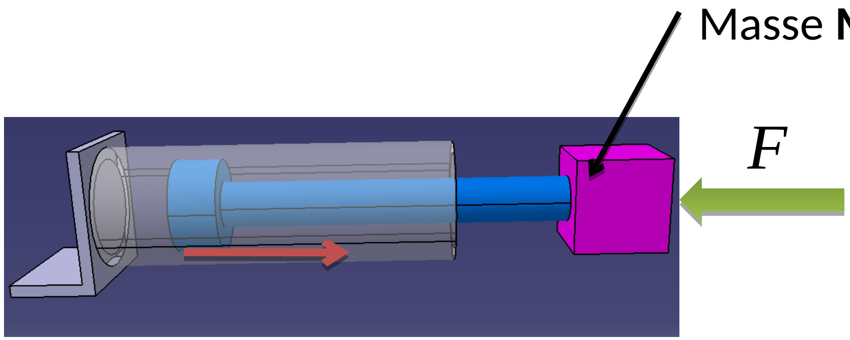
τ

$tr \approx 3.\tau$

✓Pour un échelon non unitaire de valeur *E*, le système se stabilise en *K.E*:

Exercice d'application :

Soit le système mécanique présenté comme suit :



f

F : Force appliquée

f : Force de frottement $f = h.v$

1) En appliquant le PFD, déterminer l'équation différentielle reliant la **vitesse** de déplacement de la masse M et la force F. Quel est l'ordre de ce système ?

2) Donner l'expression de la fonction de transfert correspondante notée G(p).

3) On donne : M= 500 Kg ; f=5 ; F= 10N

Système de second ordre (m=0; n=2)

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b0}{a_2 * p^2 + a_1 * p + a_0}$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^{\,2}}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^{\,2}}$$

Pulsation propre/
Pulsation naturelle

Coefficient d'amortissement

Gain statique

Mise en situation

$e(t)=E_0*u(t)$

Réponse indicielle d'un système continu linéaire de second ordre

$s(t)=R(e(t))$

Domaine Temporel

$$\sum_{i=0}^{2} a_i * \frac{d^i s(t)}{dt^i} = b_0 * e(t)$$

Domaine de Laplace

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^2}$$

- Méthodologie de résolution

$$T(p) = p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2$$

$$\Delta' = 2\xi^2\omega_0^2 - 2\omega_0^2$$
$$= 2\omega_0^2(\xi^2 - 1)$$

Soit $S_h = \{p /\ T(p) = 0\}$

Tableau Récapitulatif

Domaine de ξ	Signe de Δ	S_h	Régime
$\xi > 1$	$\Delta > 0$	Deux solutions réelles	Apériodique
$\xi = 1$	$\Delta = 0$	Racine double	Critique
$0 < \xi < 1$	$\Delta < 0$	Deux racines complexes conjuguées	Pseudopériodique
$\xi = 0$	$\Delta < 0$	Deux racines imaginaires pures conjuguées	Oscillatoire

Domaine de ξ	Signe de Δ	S_h	Régime	Domaine de ξ	Signe de Δ	S_h	Régime
$\xi>1$	$\Delta > 0$	Deux solutions réelles	Apériodique	$\xi>1$	$\Delta > 0$	Deux solutions réelles	Apériodique
$\xi=1$	$\Delta = 0$	Racine double	Critique	$\xi=1$	$\Delta = 0$	Racine double	Critique
$0<\xi < 1$	$\Delta < 0$	Deux racines complexes conjuguées	Pseudopériodique	$0<\xi < 1$	$\Delta < 0$	Deux racines complexes conjuguées	Pseudopériodique
$\xi=0$	$\Delta < 0$	Deux racines imaginaires pures conjuguées	Oscillatoire	$\xi=0$	$\Delta < 0$	Deux racines imaginaires pures conjuguées	Oscillatoire

Régime Apériodique ($\xi>1$)

$S_h=\{(p_1,p_2)\}\in \mathbb{R}x\mathbb{R}\}$

$$p_1=-\xi\omega_0+\omega\sqrt{\xi^2-1}\ ;\ p_2=-\xi\omega_0+\omega\sqrt{\xi^2-1}$$

$(p_1>p_2)$

On pose $p_1=-\frac{1}{\tau_1}$ et $p_2=-\frac{1}{\tau_2}$

$$\boxed{p_1p_2=\frac{1}{\tau_1\tau_2}=\omega_0{}^2}$$

$$\boxed{p_1+p_2=-2\xi\omega_0}$$

$$\boxed{p_1\text{-}p_2=\frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_1\tau_2}=2\omega_0\sqrt{\xi^2-1}}$$

Régime Apériodique (suite)

Décomposition de S(p) en éléments simples

Décomposition de S(p) en éléments simples

$$S(p) = H(p)E(p)$$

$$= \frac{K\omega_0^2}{p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^2}\frac{E_0}{p}$$

$$= \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta 1}{p-p1} + \frac{\beta 2}{p-p2}$$

- Déterminons les coefficients 2
- Déterminons les coefficients α, β1 et β2

$$\alpha = p * S(p)\big|_{p=0} = K E_0$$

$$\alpha = p * S(p)\big|_{p=0} = K E_0$$

Régime Apériodique (suite)

$= (p\text{-}p_1)S(p)\,\big|_{p=p1} =$

- $\beta_1 = (p\text{-}p_1)S(p)\,\big|_{p=p1} = \dfrac{K\,\omega_0{}^2 E_0}{p_1(p_1-p_2)} = \dfrac{\tau_1{}^2\tau_2 K\,\omega_0{}^2 E_0}{(\tau_2-\tau_1)}$

$= (p\text{-}p_2)S(p)\,\big|_{p=p2} = \; =$

- $\beta_2 = (p\text{-}p_2)S(p)\,\big|_{p=p2} = \dfrac{K\,\omega_0{}^2 E_0}{p_2(p_2-p_1)} = \dfrac{\tau_2{}^2\tau_1 K\,\omega_0{}^2 E_0}{(\tau_1-\tau_2)}$

$$\boxed{\alpha = K\,E_0}$$

$$\boxed{\beta_1 = \frac{\tau_1 K\,E_0}{(\tau_2-\tau_1)}}$$

$$\boxed{\beta_2 = \frac{\tau_2 K\,E_0}{(\tau_1-\tau_2)}}$$

Régime Apériodique (suite)

Régime Apériodique (suite)

$$S(p)=\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta_1}{p-p_1}+\frac{\beta_2}{p-p_2}$$

$L^{-1}\{\}$

$s(t)=[+\ +\ ]u(t)$

$$s(t)=[\alpha+\beta_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}+\beta_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}]u(t)$$

$$\boxed{s(t)=KE_0[1+\frac{1}{(\tau_2-\tau_1)}[\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}]]u(t)}$$

Régime Apériodique (suite)

Calcul des dérivées temporelles successives

- $$s(t)=KE_0\left[1+\frac{1}{(\tau_2-\tau_1)}\left[\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]\right]u(t)$$

- $$s'(t)=\frac{KE_0}{(\tau_2-\tau_1)}\left[e^{-\frac{t}{\tau_2}}-e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right]u(t)$$

- $$s''(t)=\frac{KE_0}{\tau_1\tau_2(\tau_2-\tau_1)}\left[\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]u(t)$$

Régime Apériodique (suite)

Régime Apériodique (suite)

Propriétés graphiques particulières

Valeur Initiale $s(0) = 0$ $\quad (s(0)=\lim_{\infty} pS(p))$

Valeur Finale $s(\infty) = KE_0$ $\quad (s(\infty)=\lim_{0} pS(p))$

Tangente Horizontale $\Delta:\ y(t) = s'(0)t + s(0)$

$$\Delta: y(t) = 0$$

Régime Apériodique (suite)

Point d'Inflexion $M(T_M, S_M) / \{s''(T_M)=0 \text{ et } S_M=s(t=T_M)\}$

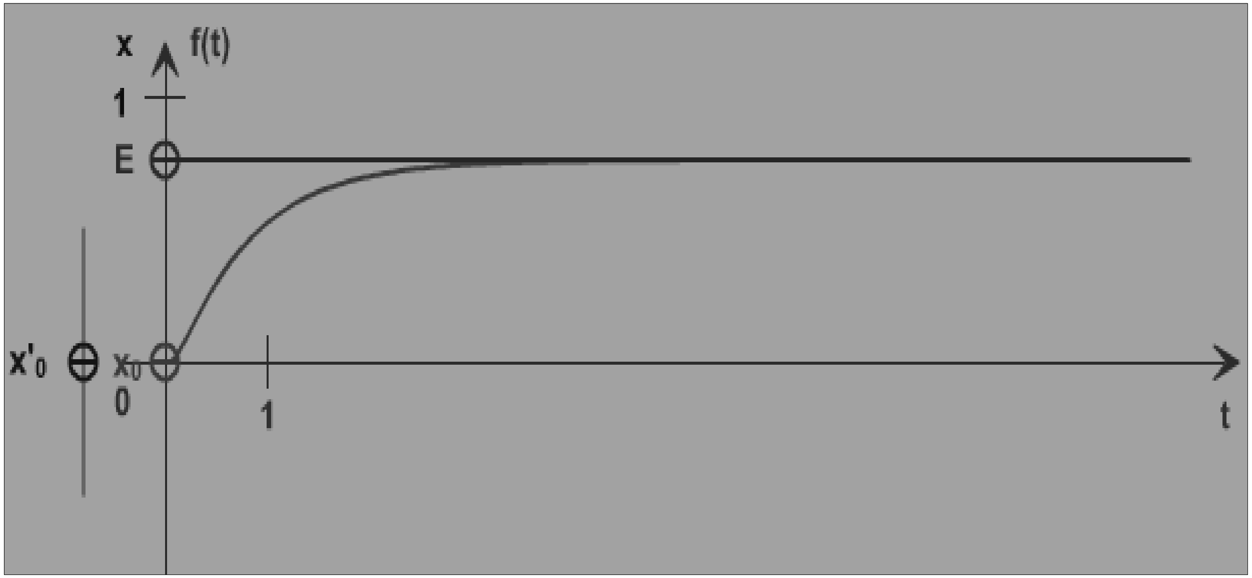
$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} = 0 \rightarrow \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_2}} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{T_M = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_2-\tau_1} Ln(\frac{\tau_2}{\tau_1})}$$

$$S_M = s(t=T_M)=KE_0[1 + \frac{1}{(\tau_2-\tau_1)}[\tau_1 e^{-\frac{T_M}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{T_M}{\tau_2}}]]$$

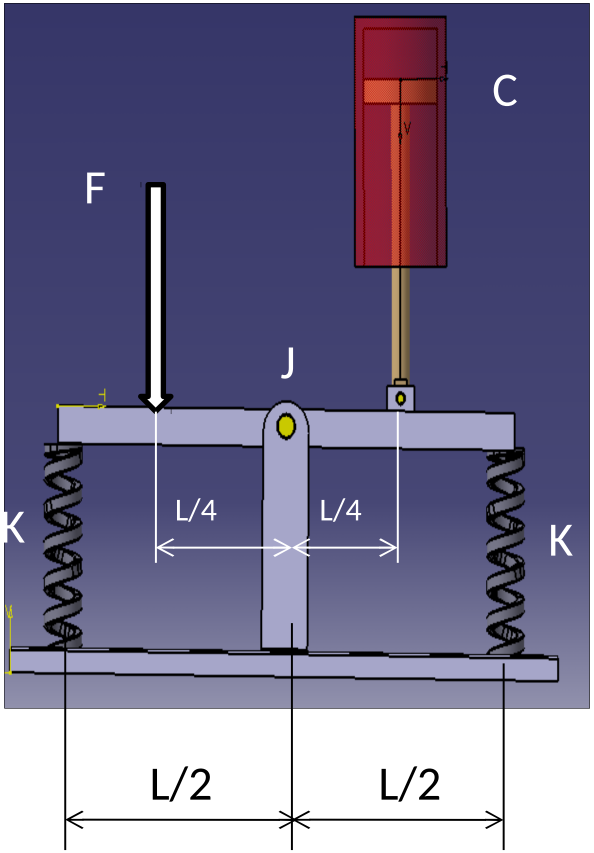
Régime Apériodique (suite)

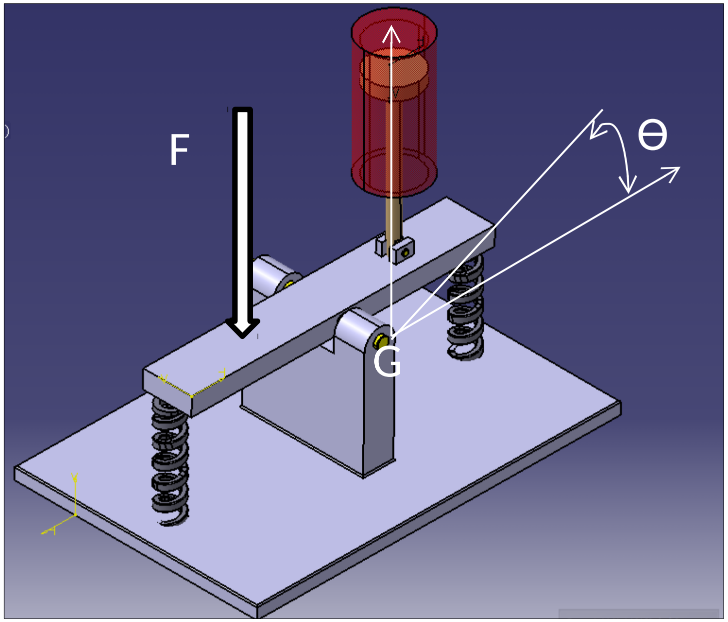
Allure de la courbe traduisant les variations temporelles du signal de sortie



Exercice Récapitulatif (1/2)

- **Présentation du système physique**





- Caractéristiques du système

J: Moment d'inertie du système
F: Effort d'excitation
C: Frottement visqueux
L: Longueur de la poutre
K: Raideur du ressort
Ɵ: Angle d'excitation

Exercice Récapitulatif (2/2)

- **Enoncé de l'exercice**

  - Appliquer le principe fondamental de la dynamique relatif aux champs des moments au centre du gravité du système, c.-à-d. au point G.

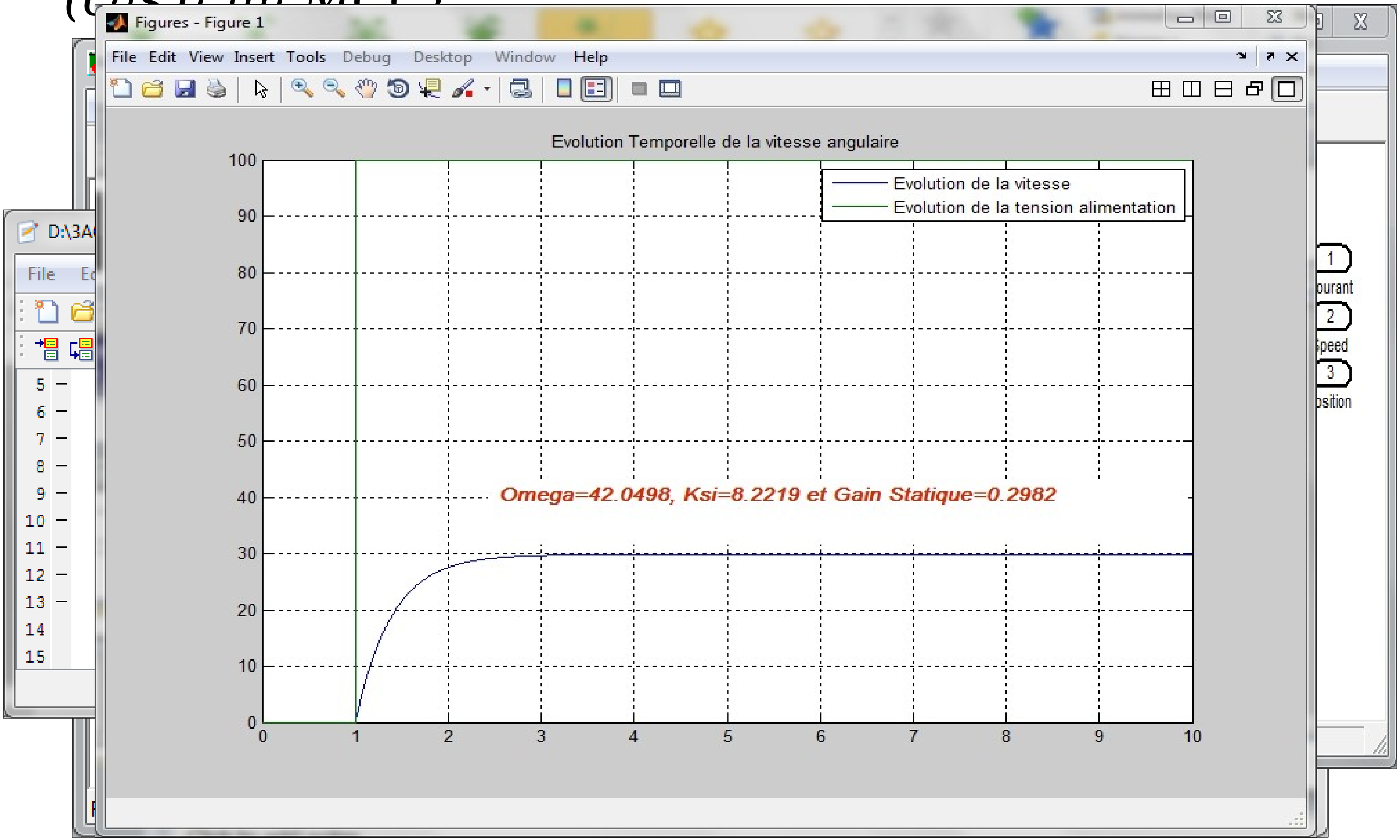
  - Transformer l'équation dans le domaine symbolique de Laplace.

  - Déterminer le coefficient d'amortissement ξ, la pulsation propre ω_0 et le gain statique.

  - Donner l'allure [illegible]lution temporelle de $\Theta(t)$ pour une excitation indicielle de cou[illegible]ée.

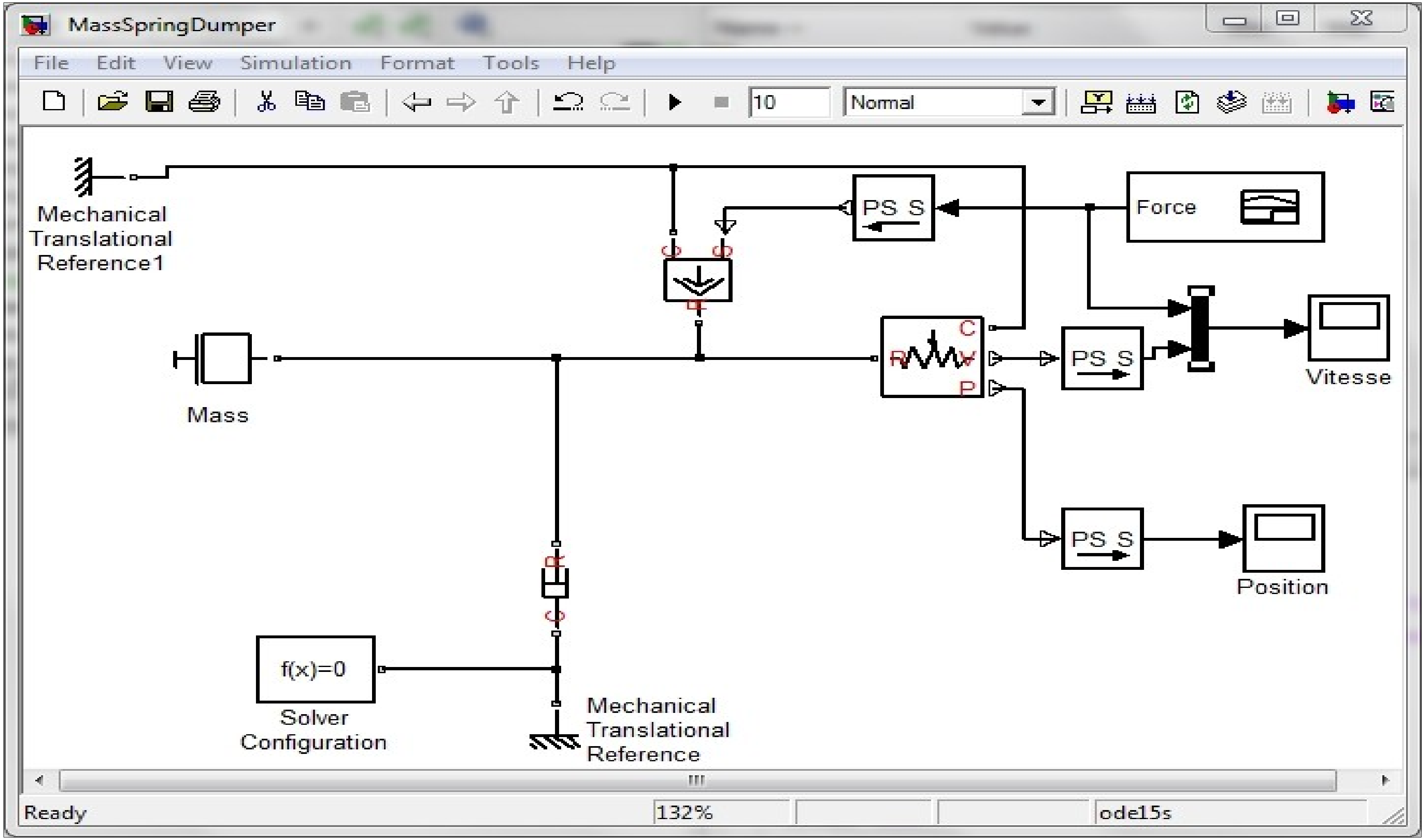
- **Corrigé de l'exercice**

Exemple d'un modèle électrique (cas d'un MCC)



Étude Temporelle Des Systèmes Continus Linéaires

1. Cas général
2. Systèmes du premier ordre
3. Systèmes du deuxième ordre



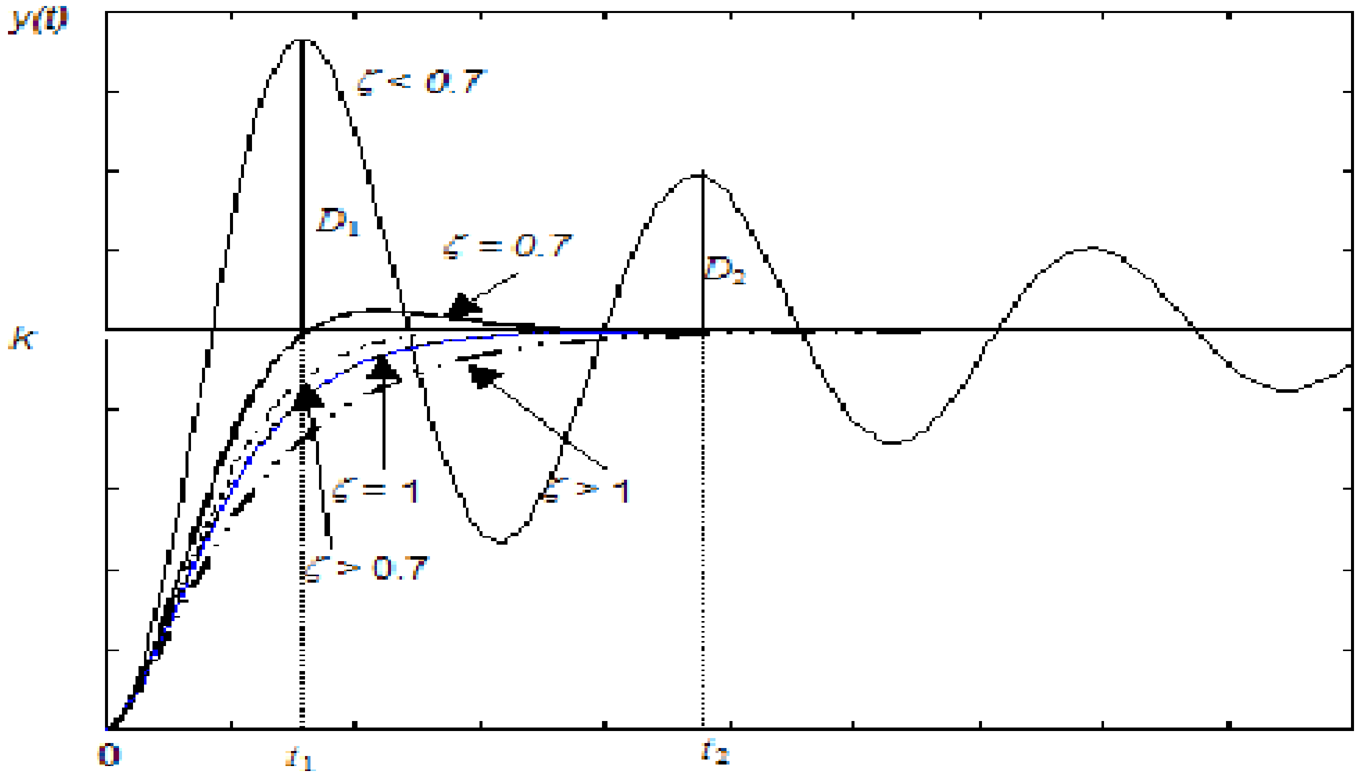
De la même façon, on montre que :

- $\xi > 1$ $$y(t) = k\left(1 - \frac{\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_1 - \tau_2}\right)$$

- $\xi = 1$ $$y(t) = k\left(1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

- $\xi < 1$ $$y(t) = k\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_p t + \varphi)\right)$$

$$\varphi = arctg\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} = \arccos\zeta$$



Réponses indicielles d'un second ordre
Suivant les valeurs de ζ

Pour ξ < 1, l'instant t_1 du premier dépassement D_1, s'appelle temps de pic *(t_p).*

$$D_1(\%) = \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\frac{D_1}{D_2} = e^{\frac{2\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_p}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega_p}$$

Pour ξ = 0.7, le temps de pic est le plus court et le système admet un seul dépassement, inférieur à 4% de la réponse finale.

Différents cas d'excitation [WEB10]

Applications

Application N°1 :

Calculer les réponses indicielles unitaires des systèmes suivants :

$$H_1(p) = \frac{1}{p(1+p)(1+2p)}$$

Application N°2 :

Calculer la réponse impulsionnelle unitaire des systèmes suivants :

$$H_1(p) = \frac{1}{(0.5 + p)(p^2 + p + 1)}$$

Application N°3 : (Système à Déphasage Non Minimale)

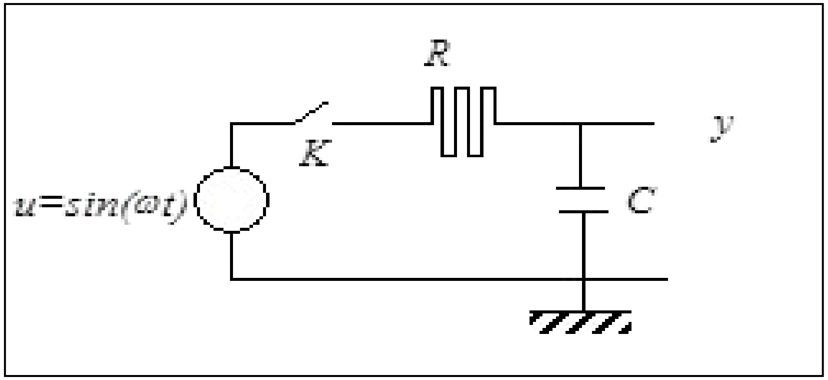
On considère le système de transmittance :

$$H(p) = \frac{1 - p}{(1 + p)(1 + 2p)}$$

Calculer et représenter sa réponse indicielle unitaire. Préciser la valeur de la dérivée à l'origine. Conclure.

Application N°4 :

On considère le filtre RC suivant :

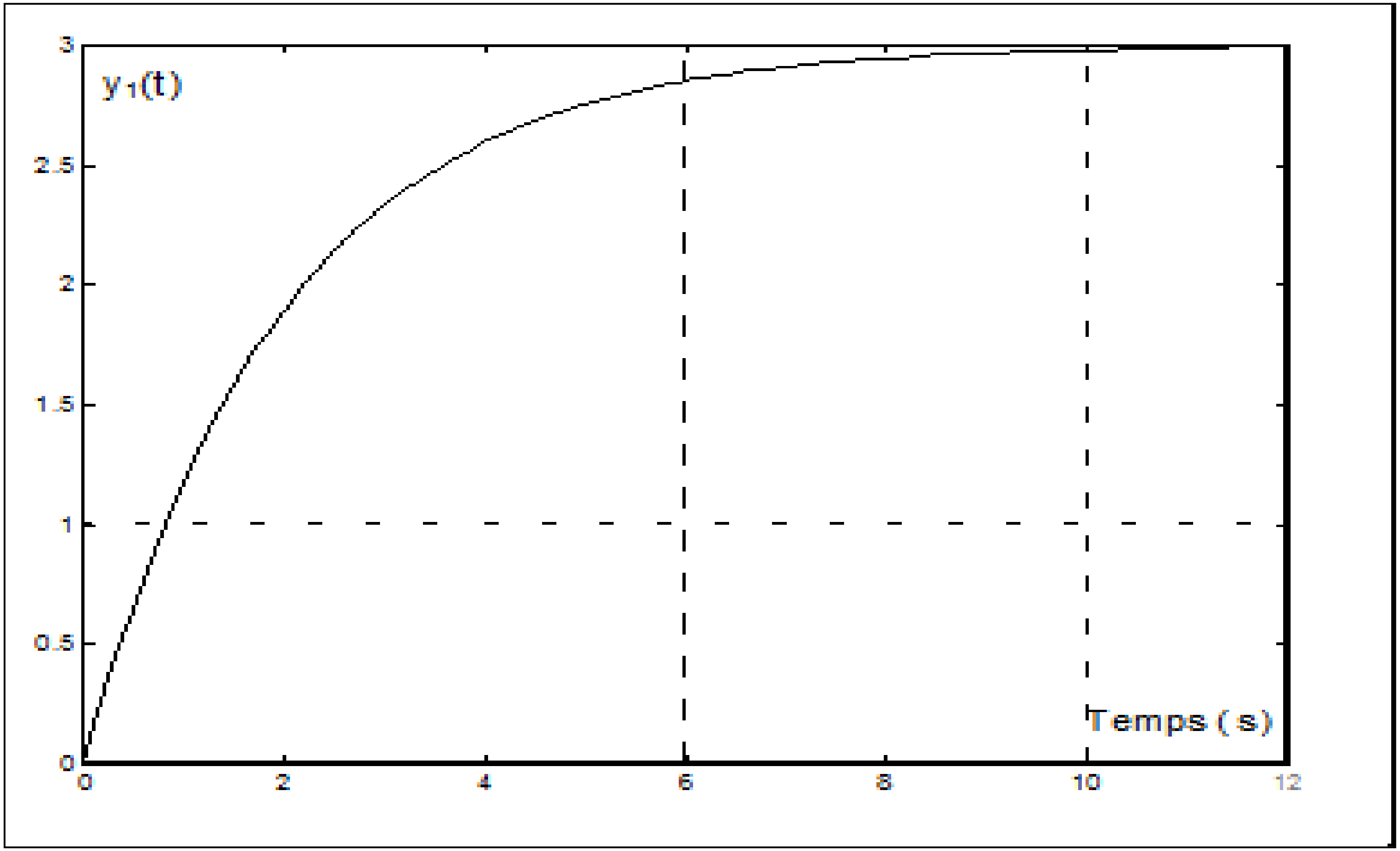


Le condensateur étant initialement déchargé, on ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$. Calculer et représenter la sortie $y(t)$. préciser la valeur en régime permanent de l'amplitude du signal y.

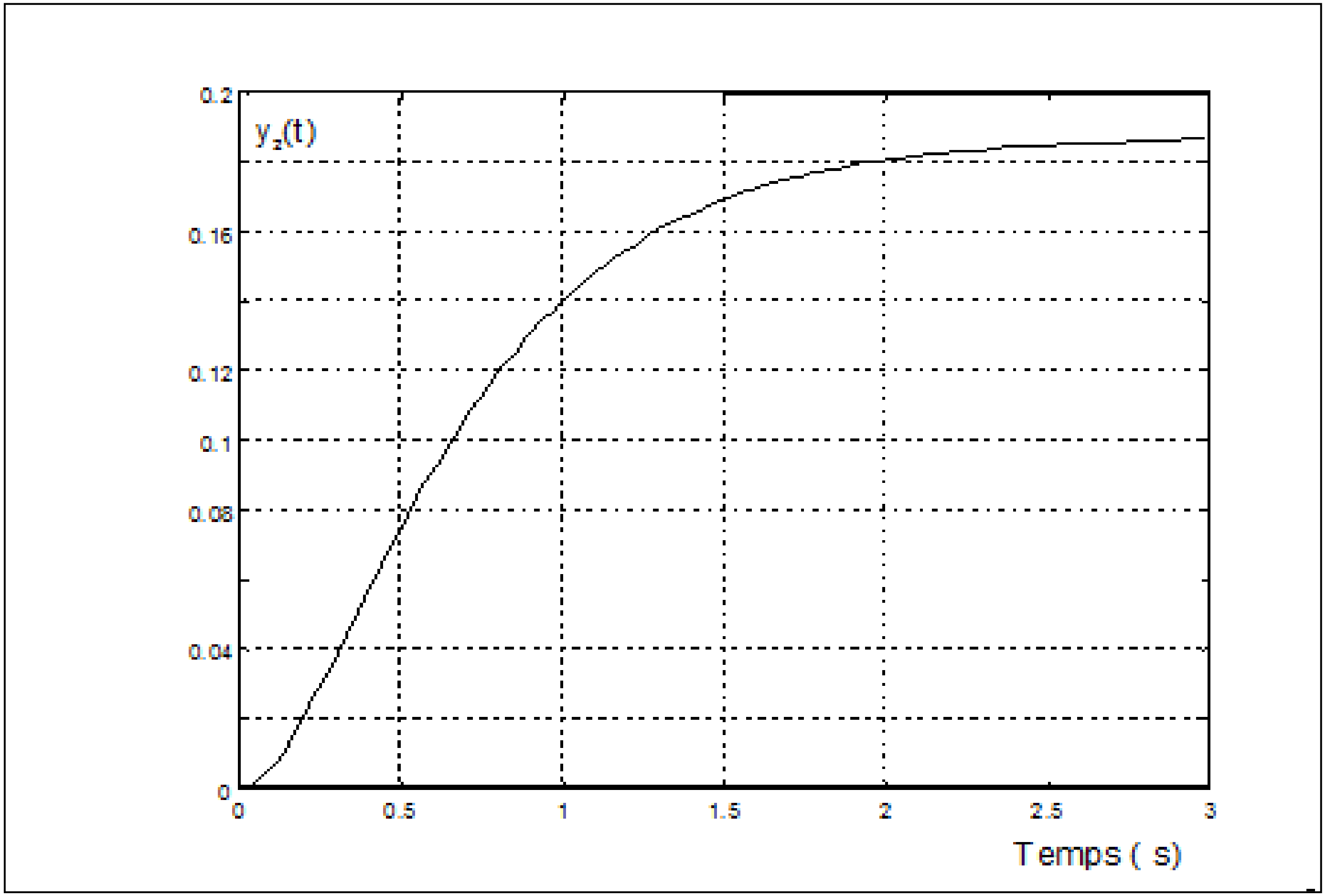
Application N°5 :

Les courbes des figures suivantes correspondent à des réponses indicielles unitaires de systèmes d'ordre inférieur à 3. On demande d'identifier dans chaque cas le système correspondant.

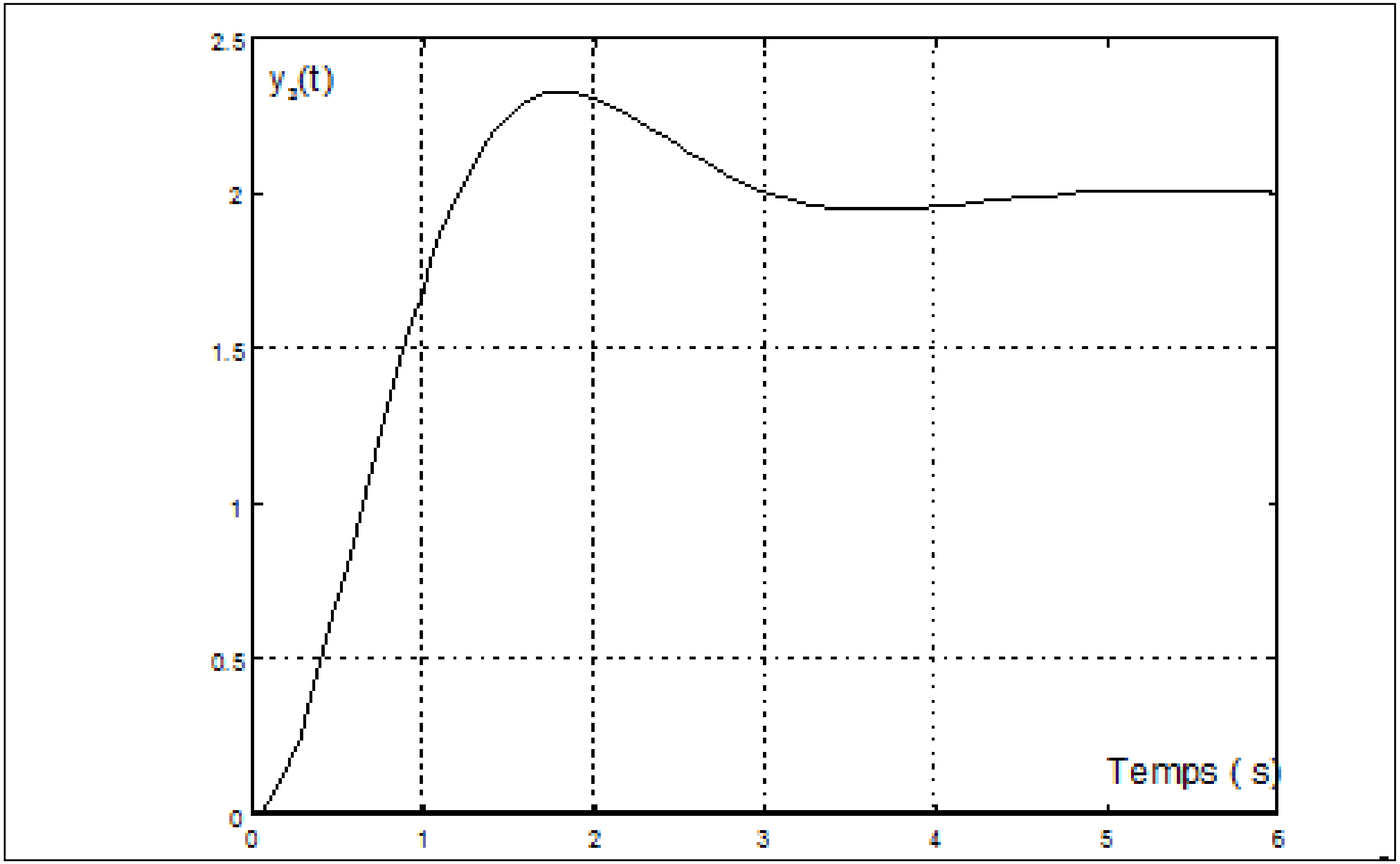
Application N°5 (Suite) :



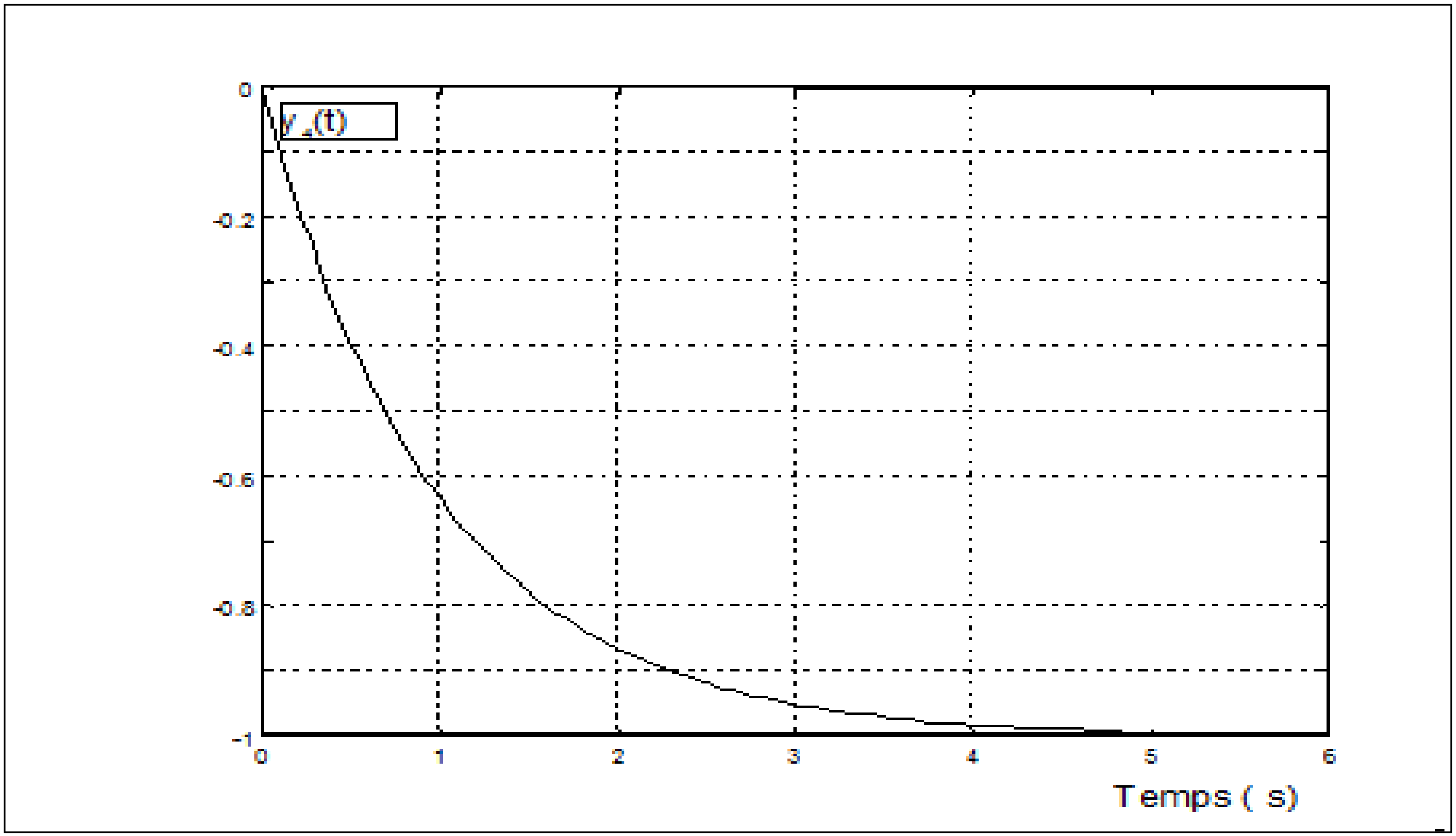
Application N°5 (Suite) :



Application N°5 (Suite) :



Application N°5 (Suite) :



Chapitre IV :

Approche harmonique des systèmes linéaires

1. Principe
2. Systèmes du premier ordre
3. Systèmes du deuxième ordre

CHAP IV

ANALYSE DES SYSTÈMES ASSERVIS LINÉAIRES CONTINUS

Plan du Chapitre :

1. **Définition d'un système asservi**

2. **Schéma fonctionnel et Fonction de transfert**

3. **Performances d'un système asservi**

Analyse des SAL

Définition :

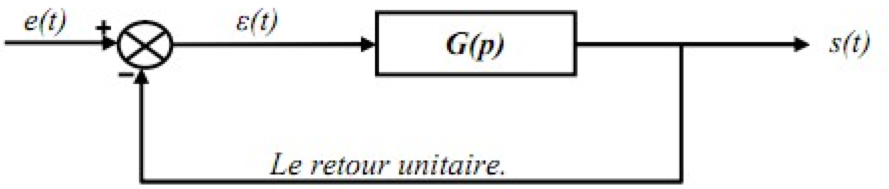
Un système asservi est un système dont une variable de sortie suit plus précisément que possible une variable d'entrée dite consigne, quelque soit l'effet des perturbations extérieures.

On parle de: Régulation

Poursuite

C'est un système qui fonctionne en boucle fermée

systèmes à retour unitaire :

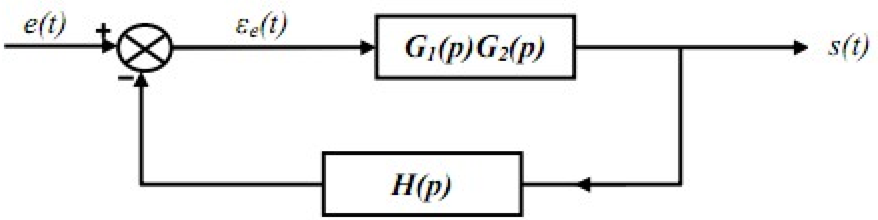


$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$$

Fonction de transfert en Boucle fermée

$$H(p) = S(p)/E(p) = G(p)/(1+G(p))$$

systèmes à retour non unitaire :



$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + H(p)G_1(p)G_2(p)} \bullet E(p).$$

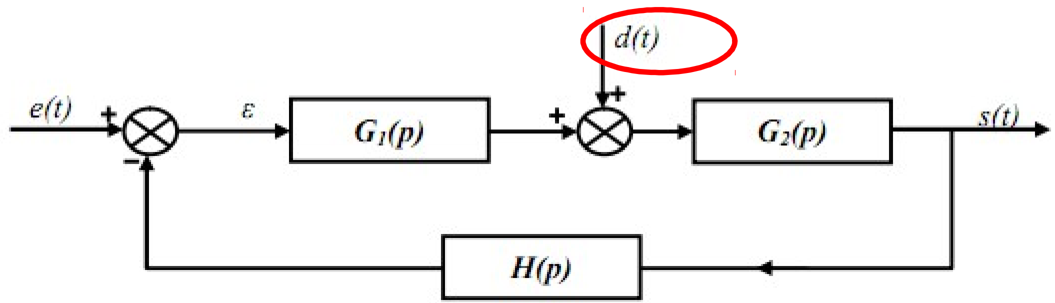
Fonction de transfert en Boucle Fermée

H(p)= S(p)/E(p)= G_1(p).G_2(p)/(1+H(p).G_1(p).G_2(p))

Analyse des SAL

1. **Définition d'un SAL**
2. **Schéma fonctionnel et FT**
3. **Performances des SAL**

Prise en compte des perturbations :



$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + H(p)G_1(p)G_2(p)} \bullet E(p) - \frac{H(p)G_2(p)}{1 + H(p)G_1(p)G_2(p)} \bullet D(p)$$

H_1 H_2

Fonction de transfert en Boucle fermée

$$H(p) = H_1(p).E(p) + H_2(p).D(p)$$

Analyse des SAL

Pour assurer le bon fonctionnement d'un système asservi, il faut garantir les 3 performances:

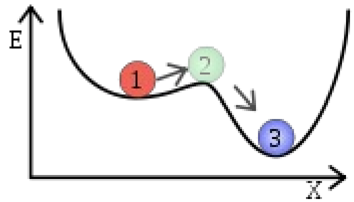
Stabilité

Précision

Rapidité

- Définition de la STABILITE :

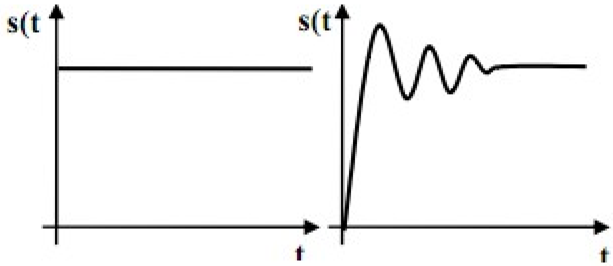
C'est la propriété physique selon laquelle, un système écarté de sa position d'équilibre initiale par une sollicitation extérieure, revient à sa position initiale dès que cette perturbation cesse.



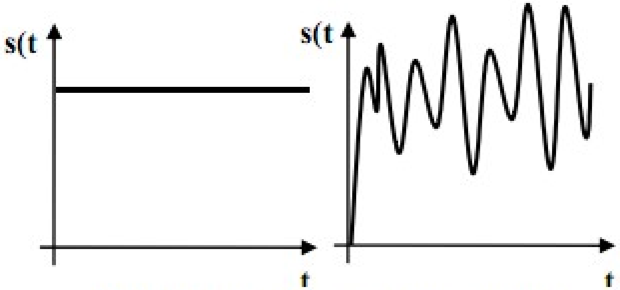
Analyse des SAL

- Stabilité des systèmes asservis :

Un système est stable si à une entrée finie correspond une sortie finie:



(a) : Réponse d'un système stable



(b) : Réponse d'un système instable

COMMENT VÉRIFIER LA STABILITÉ ?

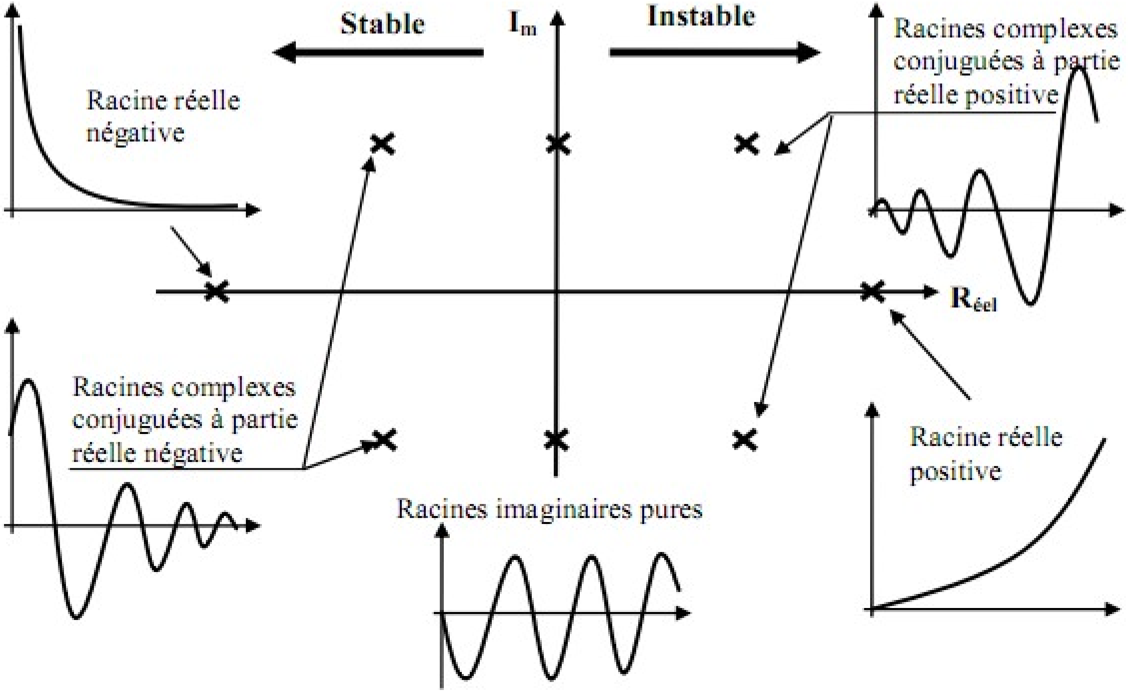
Plusieurs méthodes existent pour vérifier la stabilité des systèmes asservis et qui peuvent s'effectuer dans le domaine temporel ou fréquentiel (Bode, Nyquist,…)

1ère méthode : Premier Critère de Stabilité

Un système est dit stable si toutes les racines de son équation caractéristique sont à **parties réelles strictement négatives**

Remarque : On a besoin de connaitre les pôles du système pour l'analyse de stabilité.

Les configurations de stabilité d'un système asservi :



2ème méthode : Critère de ROUTH

On appelle critère de Routh un critère algébrique permettant d’évaluer la stabilité d’un système sans connaitre ses pôles, à partir des coefficients du dénominateur D(p) de sa fonction de transfert en boucle fermée (FTBF).

2ème méthode : Critère de ROUTH

H(p) est la fonction de transfert du système bouclé :

$$\text{Soit } H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{b_0+b_1\,p+b_2\,p^2+\;\ldots.\;+b_{m-1}\,p^{m-1}+b_m\,p^m}{a_0+a_1\,p+a_2\,p^2+\;\ldots.\;+a_{n-1}\,p^{n-1}+a_n\,p^n}=\frac{N(p)}{D(p)}$$

$$D(p)=a_0+a_1\,p+a_2\,p^2+\;\ldots.\;+a_{n-1}\,p^{n-1}+a_n\,p^n \quad avec\ a_n\neq 0$$

$$b_{n-2}=\frac{-1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2}\\ a_{n-1} & a_{n-3}\end{vmatrix}$$

$$c_{n-3}=\frac{-1}{b_{n-2}}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3}\\ b_{n-2} & b_{n-4}\end{vmatrix}$$

$$b_{n-i}=\frac{-1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-i}\\ a_{n-1} & a_{n-i-1}\end{vmatrix}$$

$$c_{n-j}=\frac{-1}{b_{n-2}}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-j}\\ b_{n-2} & b_{n-j-1}\end{vmatrix}$$

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	…	a_2	a_0	…	a_3	a_1
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	…	a_1		…	a_2	a_0
p^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	…	*si n pair*		…	*si n impair*	
p^{n-3}	c_{n-3}	…	…						
…	…	…							
p^1	…	…							
p^0	…								

Première colonne, dite des pivots

$2^{ème}$ méthode : Critère de ROUTH

Enoncé du critère :

Le système est stable si et seulement si

tous les termes de la première colonne sont strictement positifs

a_n

a_{n-1}

b_{n-2}

c_{n-3}

…

…

…

Propriétés de la méthode

- Il y a autant de racines à partie réelle positive que de changements de signe dans la première colonne.
- L'apparition de lignes de zéros indique l'existence de racines imaginaires pures (par paires).
  Dans ce cas, correspondant à un système oscillant, on continue le tableau en remplaçant la ligne nulle par les coefficients obtenus en dérivant le polynôme reconstitué à partir de la ligne supérieure, les racines imaginaires pures étant les racines imaginaires de ce polynôme bicarré reconstitué.

$2^{ème}$ méthode : Critère de ROUTH

Exemple1 :

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $\quad b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

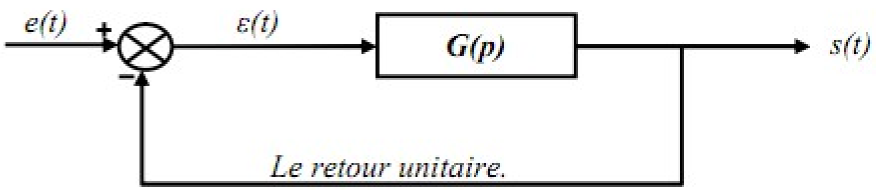
$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,5$; $\quad c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0,5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0,5 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

2ème méthode : Critère de ROUTH

Exemple 2 :



G(p)= $\frac{10}{s(s^2+s+3)}$

$$H_{BF}(s)=\frac{H(s)}{1+H(s)}=\frac{10}{s^3+s^2+3s+10}$$

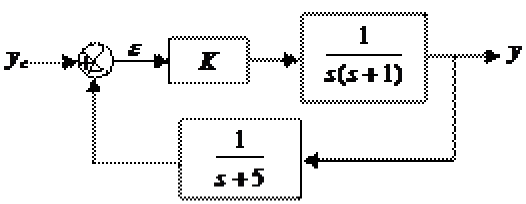
Ligne 1	1	3
Ligne2	1	10
Ligne 3	-7	0
Ligne 4	10	0

Changement de signe
système instable

2ème méthode : Critère de ROUTH

Exemple 3 :

$$H_{BO}(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)}$$



$$H_{BF}(s) = \frac{K(s+5)}{s^3+6s^2+5s+K}$$

Ligne 1	1	5
Ligne2	6	K
Ligne 3		0
Ligne 4	K	0

Le système est stable si $K > 0$ et $\frac{30-K}{6} > 0$

$$0 < K < 30$$

- Précision des systèmes asservis :

- La précision est caractérisée par **l'erreur permanente**, qui est la différence entre la consigne et la sortie du système obtenue.
- Le système est d'autant précis que cet écart tend vers 0.
- Pour l'étude de la précision statique d'un système asservi, nous allons, pour une entrée bien définie, déterminer l'erreur qui en résultera.

Analyse des SAL

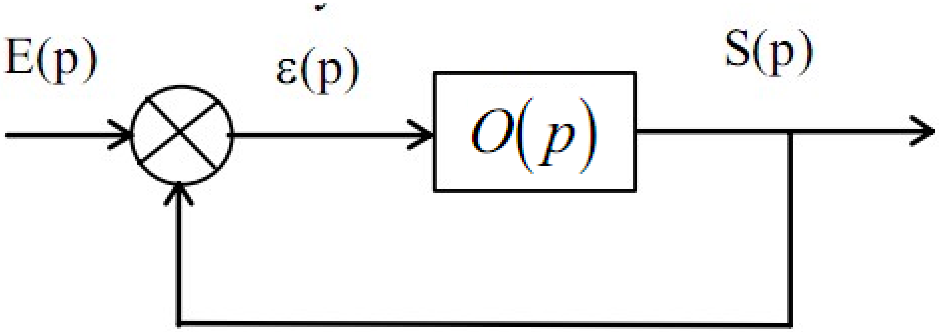
- Précision des systèmes asservis :

Erreur Statique (Erreur en régime permanent) :

L'écart en régime permanent est la limite quand t tend vers l'infini de e(t) - s(t).

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = e(t) - s(t)$$

- Précision des systèmes asservis :



$$FTBO = O(p)$$

La FTBO peut s'écrire dans tous les cas sous la forme

$$O(p) = \frac{K \cdot N(p)}{p^{\alpha} \cdot D(p)}$$

avec

$$\begin{cases} N(0) = 1 \qquad D(0) = 1 \\ \alpha = classe \qquad \alpha \geq 0 \\ K = gain\ statique \end{cases}$$

Analyse des SAL

- Précision des systèmes asservis :

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) = E(p) - \frac{O(p)}{1+O(p)} \cdot E(p)$$

en remplaçant $\varepsilon(p) = \left(1 - \dfrac{\dfrac{K \cdot N(p)}{p^{\alpha} \cdot D(p)}}{1 + \dfrac{K \cdot N(p)}{p^{\alpha} \cdot D(p)}} \right) \cdot E(p)$

donc : $\varepsilon(p) = \dfrac{p^{\alpha} \cdot D(p)}{p^{\alpha} \cdot D(p) + K \cdot N(p)} \cdot E(p)$

Analyse des SAL

- Précision des systèmes asservis :

Nous supposerons pour la suite que le système est stable, donc nous pouvons utilisez le théorème de la valeur finale:

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0}\left[p \cdot S(p)\right]$$

Ici on peut donc écrire pour l'écart : $\varepsilon_s = \varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0}\left[p \cdot \varepsilon(p)\right]$

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to O}\left[p \cdot \frac{p^{\alpha} \cdot D(p)}{p^{\alpha} \cdot D(p) + K \cdot N(p)} \cdot E(p)\right]$$

On le voit l'erreur statique dépend de la nature de l'entrée mais aussi de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Nous allons dans la suite étudier l'erreur indicielle d'un système asservi.

- Précision des systèmes asservis :

Erreur indicielle :

L’erreur indicielle est l’erreur entre une entrée en échelon et la sortie du système.

L’entrée est donc de la forme : $e(t) = E_0 \cdot u(t)$

dans le domaine symbolique : $E(p) = \dfrac{E_0}{p}$

$$\varepsilon_s = \varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0}\left[p \cdot \varepsilon(p)\right] = \lim_{p\to 0}\left[p \cdot \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} \cdot \frac{E_0}{p}\right]$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0}\left[\frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} \cdot E_0\right] = \lim_{p\to 0}\left[\frac{E_0 \cdot p^\alpha}{p^\alpha + K}\right]$$

on voit que la précision est fonction de la classe du système

- Précision des systèmes asservis :

Réponse indicielle: erreur indicielle :

a) système de classe $\alpha = 0$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \to 0} \left[\frac{E_0 \cdot p^0}{p^0 + K} \right] = \frac{E_0}{1 + K}$$

b) système de classe $\alpha > 0$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \to 0} \left[\frac{E_0 \cdot p^\alpha}{p^\alpha + K} \right] = \lim_{p \to 0} \left[\frac{E_0 \cdot p^\alpha}{K} \right] = 0$$

- Précision des systèmes asservis :

TABLE RECAPITULATIVE

entrée	Classe du système			
	classe 0, $\alpha = 0$ pas d'intégration	Classe 1 1 intégration	Classe 2 2 intégrations	classe >2
Entrée en échelon	$\varepsilon_s = \dfrac{E_0}{1+K}$	$\varepsilon_s = 0$	$\varepsilon_s = 0$	$\varepsilon_s = 0$
Entrée rampe	$\varepsilon_s = +\infty$	$\varepsilon_s = \dfrac{a}{K}$	$\varepsilon_s = 0$	$\varepsilon_s = 0$
Entrée parabolique	$\varepsilon_s = +\infty$	$\varepsilon_s = +\infty$	$\varepsilon_s = \dfrac{2a}{K}$	$\varepsilon_s = 0$