

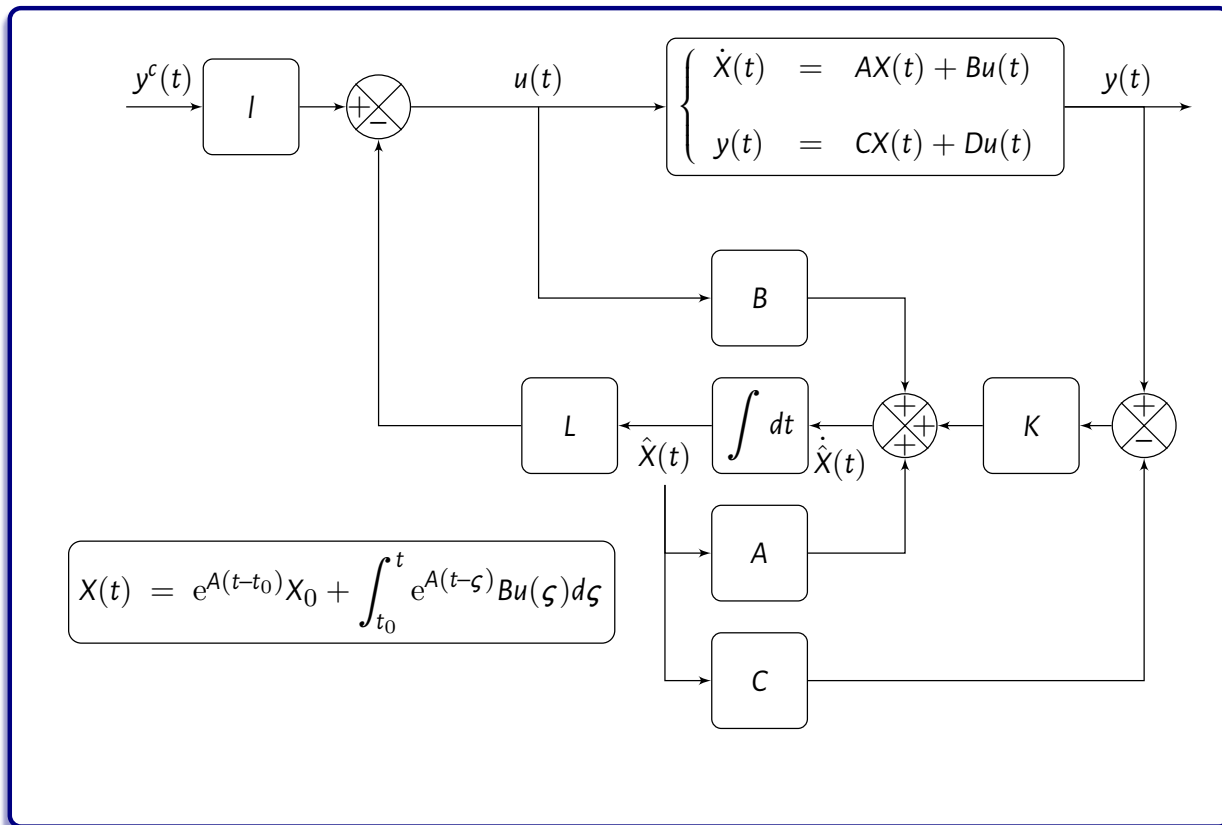
# Systèmes Multivariables

## Notes de cours avec exercices corrigés<sup>a</sup>

2020-2021

a. <https://github.com/a-mhamdi/isetbz/>

**Abdelbacet Mhamdi**  
Dr.-Ing. en GE – Technologue en GE



Dépt. GE - Institut Supérieur des Études Technologiques de Bizerte

$\Sigma$   
 $\int$   
 $\frac{d}{dt}$   
 $\omega$   
 $J$





#### À propos

Dans ce cours, nous traiterons essentiellement les points suivants :

- ★ Représentation d'état;
- ★ Analyse dynamique des systèmes MIMO;
- ★ Commandabilité et commande d'état;
- ★ Observabilité et observation d'état.



Le code est disponible via <https://github.com/a-mhamdi/cosnip/> → Python → sys-ctrl → code-smv.ipynb

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Calcul algébrique</b>	<b>1</b>
1.1	Définition d'une matrice . . . . .	1
1.2	Matrices particulières . . . . .	1
1.3	Opérations sur les matrices . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Représentation d'état</b>	<b>8</b>
2.1	Formes canoniques . . . . .	19
2.2	Forme modale . . . . .	23
2.3	Passage d'une $\mathcal{E}\mathcal{E}$ vers matrice de transfert . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Résolution d'une équation différentielle linéaire</b>	<b>27</b>
3.1	Particularité . . . . .	27
3.2	Généralité . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Commande par retour d'état</b>	<b>30</b>
<b>5</b>	<b>Observateur de Luenberger</b>	<b>32</b>
<b>6</b>	<b>Exercices corrigés</b>	<b>35</b>
	<b>Références</b>	<b>45</b>
	<b>Annexes</b>	<b>47</b>

# 1 Calcul algébrique

## 1.1 Définition d'une matrice

Une matrice à  $n$  lignes et  $m$  colonnes est un tableau rectangulaire de  $(n \times m)$  éléments rangés. Il y a  $n$  lignes, et dans chaque ligne  $m$  éléments.

### EXEMPLE

Une matrice  $M$ , à coefficients complexes, et de dimension  $(4, 6)$  :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 2i & 56 & 26 \\ 2 & 4 & 3 & 65 & -14 & 0 \\ 1 & 12 & 4.44 & 7 & -3.5i & 0 \\ 6 & 0 & 9 & 9 & 3.15 & 67 \end{bmatrix}$$

Dans cette représentation, le premier coefficient de la dimension est le nombre de lignes, et le deuxième représente le nombre de colonnes du tableau. Pour repérer un élément d'une matrice, on indique son indice de ligne puis son indice de colonne, les lignes se comptant du haut vers le bas et les colonnes de la gauche vers la droite.

On notera  $m_{ij}$ , les coefficients de la matrice  $M$ ,  $i$  compris entre 1 et 4 désignant le numéro de la ligne sur laquelle figure le coefficient envisagé, et  $j$  compris entre 1 et 6 désignant son numéro de colonne. Par exemple :  $m_{35} = -3.5i$ .

**Matrice carrée**  $n = m$  (nombre de lignes est égal au nombre de colonnes)

**Vecteur ligne**  $m = 1$  (nombre de colonnes est égal à 1)

**Vecteur colonne**  $n = 1$  (nombre de lignes est égal à 1)

De façon générale, la disposition des éléments dans une matrice  $M$  de dimension  $(n, m)$  est :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{1m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & m_{ij} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{nm} \end{bmatrix}$$

On notera par la suite  $m_{ij}$  l'élément d'indice  $(i, j)$  de la matrice  $M$ , c'est-à-dire le coefficient qui apparaît au niveau de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne. Donc :  $m_{ij} = M(i, j)$

## 1.2 Matrices particulières

### Matrice diagonale

Soit  $M$  une matrice carrée de taille  $n$ .  $M$  est dite diagonale si et seulement si :

$$m_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j, \quad (i, j) \in \{1..n\}^2 \quad (1)$$

### Matrices triangulaire (inférieure ou supérieure)

Soit  $M$  une matrice carrée.  $M$  est dite triangulaire inférieure (respectivement supérieure) ssi :

$$m_{ij} = 0 \quad \forall i > j \quad (\text{resp. } i < j) \quad (2)$$

### Matrice à diagonale (strictement) dominante

Pour une matrice carrée  $M$  de taille  $n$ , le module de tout terme diagonal est supérieur (strict) à la somme des modules des autres termes de sa ligne :

$$\forall i \in \{1 \dots n\} \quad \sum_{j=1, j \neq i}^n |m_{ij}| \leq (\neq) |m_{ii}| \quad (3)$$

### Matrice symétrique

Soit  $M$  une matrice carrée.  $M$  est dite symétrique ssi  $M^T = M$

## 1.3 Opérations sur les matrices

### La transposée

Soit  $M_1$  une matrice de taille  $(n, m)$ , on appelle matrice transposée de  $M_1$ , la matrice  $M_2$  qui a pour coefficients :  $m_{2_{ji}} = m_{1_{ij}}$  avec  $(i, j) \in \{1 \dots m\} \times \{1 \dots n\}$ . On note  $M_2 = M_1^T$

### Somme

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de taille  $(n, m)$ .  $C = A + B$ ;  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  avec  $(i, j) \in \{1 \dots n\} \times \{1 \dots m\}$

### Produit

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de tailles respectives  $(n_A, m_A)$  et  $(n_B, m_B)$

Condition nécessaire :  $m_A = n_B = p$ , (c.-à-d. : Le nombre de lignes de  $B$  est égal au nombre de colonnes de  $A$ )  $C = A \times B$

La matrice  $C$  est de taille  $(n_A, m_B)$  avec :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \times b_{kj}$$

C a autant de lignes que  $A$  et autant de colonnes que  $B$ .

### Changement de base

La matrice peut référencer une application linéaire.

Soit :

$$f : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^l \quad (4)$$

$$u \mapsto v = f(u) \quad (5)$$

L'espace de départ est muni d'une base  $B_1$ , qui contient  $p$  éléments linéairement indépendants et non nuls, avec laquelle on peut écrire un vecteur  $u$ , antécédent d'un vecteur  $v$  par la fonction  $f$ , appartenant à cet espace.

L'espace d'arrivée est muni d'une base  $B_2$ , qui contient  $l$  éléments linéairement indépendants et non nuls, avec laquelle on peut écrire un vecteur  $v$ , image d'un vecteur  $u$  par la fonction  $f$ , appartenant à cet espace

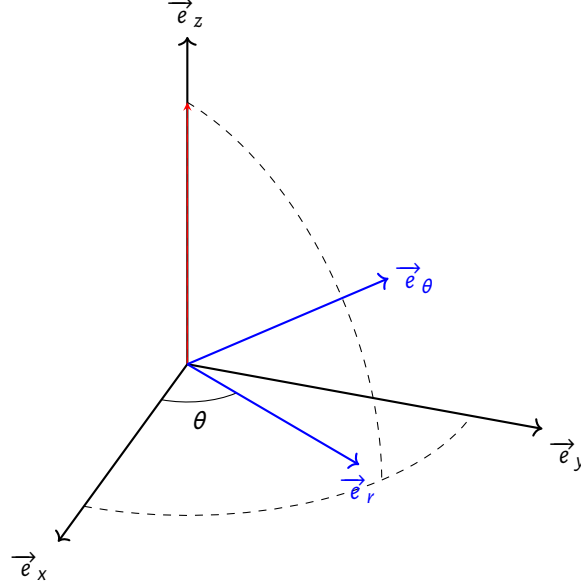
La matrice  $M$  est donc peut être vu comme un regroupement de relations entre les deux bases selon une fonction  $f$ . Elle est de taille  $(l, p)$ .

$$v = f(u) = M \times u$$

Le vecteur  $v$  est l'image du vecteur  $u$  dans la nouvelle base par la fonction  $f$ . L'expression d'un tel vecteur est relative à une base. Si on change cette base, l'expression de ce vecteur change. Ce passage d'une base à une autre peut être traduit également par une matrice dite de passage.

### EXEMPLE

On considère les deux référentiels suivants : Cartésien & Cylindrique.



Soit  $B_1 = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  la base orthonormée directe du repère cartésien.

Soit  $B_2 = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  la base orthonormée directe du repère cylindrique.

Soit  $\vec{u}$  un vecteur de l'espace.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{B_1} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix}_{B_2}$$

Soit  $P$  la matrice de passage de la base  $B_2$  vers la base  $B_1$ , on écrit donc les éléments de la base  $B_2$  en fonction des éléments de la base  $B_1$  :

$$P = P_{B_2 \rightarrow B_1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, tout vecteur écrit dans le référentiel cylindrique peut être écrit dans le repère cartésien par multiplication par la matrice  $P$ .

$$\vec{u}_{B_2} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

$$\vec{u}_{B_1} = P \times \vec{u}_{B_2}$$

$$\vec{u}_{B_1} = P \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix}_{B_1}$$

$$\vec{u}_{B_1} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{bmatrix}_{B_1}$$

On aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$



Considérer le passage de la base sphérique vers la base cartésienne.



Un vecteur écrit dans une base  $B_1$ , peut être écrit dans une base  $B_2$ . Il suffit de le multiplier par la matrice de passage de la base  $B_1$  vers la base  $B_2$ . Cette matrice traduit l'expression des éléments de la base  $B_1$  en fonction des éléments de la base  $B_2$ .

### Valeur propre et vecteur propre

On appelle valeur propre de la matrice  $M$ , le coefficient  $\lambda$  qui vérifie cette propriété :

$$\exists \text{ un vecteur } \vec{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\}, \text{ telle que : } M \times u = \lambda \times u \quad (6)$$

Le vecteur  $\vec{u}$  qui vérifie cette propriété s'appelle le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Il peut exister plus qu'un vecteur vérifiant cette égalité. Le nombre de ces vecteurs (linéairement indépendants) s'appelle ordre de multiplicité de  $\lambda$ .



```
[8]: A = np.array([[2.0, 0.0], [1.0, 1.0]])
      print(np.linalg.eig(A)[0])
```

```
[1. 2.]
```

```
[9]: import numpy as np
      A = np.array([[1.0, 1.0], [0.0, 1.0]])
      print(np.linalg.eig(A)[0])
      print(np.linalg.eig(A)[1])
```

```
[1. 1.]
```

```
[[ 1.00000000e+00 -1.00000000e+00]
```

```
[ 0.00000000e+00  2.22044605e-16]]
```

### Spectre d'une matrice

On appelle spectre d'une matrice carrée l'ensemble de ses valeurs propres munis de leurs ordres de multiplicité. Si la dimension du spectre d'une matrice carrée est égale à sa taille, on peut alors diagonaliser cette matrice.

Comment calculer le spectre d'une matrice carrée ?

$$Sp(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \chi(M) = 0\} \quad (7)$$

$\chi(M)$  s'appelle le polynôme caractéristique de la matrice  $M$ . Il est donné par :

$$\chi(M) = \det(\lambda \times I_n - M)$$



Chercher les valeurs propres de la matrice identité  $I_5$ .

### Déterminant d'une matrice

On fait le développement selon une ligne ou une colonne mais non pas avec les deux à la fois. Souvent, on choisit la ligne ou colonne qui présente le maximum de zéros

$$\det(M) = \sum_{i(\text{resp. } j)=1}^n (-1)^{i+j} \times m_{ij} \times \Delta_{ij} \quad (8)$$

$\Delta_{ij}$  est le déterminant de la matrice  $M$  après avoir soustraire la ligne  $n^\circ i$  et la colonne  $n^\circ j$ .

#### EXEMPLE

Soit la fonction suivante :

$$\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{F} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice est le produit des valeurs propres :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\text{trace}(A) = 3 = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\det\{A\} = 2 = \lambda_1 \times \lambda_2$$

Pour déterminer les valeurs propres, on se trouve finalement avec le trinôme suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 3 = \Sigma \\ \lambda_1 \lambda_2 = 2 = \Pi \end{cases}$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2 = x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\Sigma} x + \underbrace{x_1x_2}_{\Pi}$$

$$\lambda^2 - \Sigma\lambda + \Pi = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \& \quad \lambda_2 = 2$$



Déterminer le déterminant d'une matrice diagonale.

### Trace d'une matrice

Soit  $M$  une matrice carrée à coefficients complexes de taille  $n$ . On appelle Trace de  $M$  la somme des éléments qui se situent sur la diagonale de  $M$  c'est-à-dire les éléments ayant des indices identiques (i.e.  $i = j$ ) avec  $i, j \in \{1..n\}$

$$\text{trace}(M) = \sum_{k=1}^n m_{kk} \quad (9)$$

### EXEMPLE

Soit  $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$

$$A = \begin{bmatrix} \overbrace{a_{11}}^1 & 2 \\ -1 & \underbrace{a_{22}}_1 \end{bmatrix}$$

La trace de  $A$  est  $a_{11} + a_{22} = 1 + 1 = 2$ . De façon générale, la trace d'une matrice est la somme des valeurs propres :

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$


---

### Rang d'une matrice

On appelle rang d'une matrice le nombre de colonnes linéairement indépendantes.

### Inversion d'une matrice

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n$ .  $A$  est inversible ssi son déterminant est différent de zéro. On appelle  $B$  la matrice inverse de  $A$ , la matrice qui vérifie l'égalité suivante :

$$A \times B = B \times A = I_n \quad (10)$$

$I_n$  s'appelle la matrice identité. On note la matrice inverse  $A^{-1}$ .

### Méthode de calcul

#### Méthode directe

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}_A^T$$

$\text{com}_A$  s'appelle la comatrice de  $A$ . On pose  $B = \text{com}_A$ ;  $b_{ij} = (-1)^{i+j} \times \Delta_{ij}$

$\Delta_{ij}$  est le déterminant de la matrice  $M$  après avoir soustrait la ligne  $n^\circ i$  et la colonne  $n^\circ j$ .

#### EXEMPLE

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - M) &= \begin{vmatrix} \lambda - m_{11} & -m_{12} \\ -m_{21} & \lambda - m_{22} \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - m_{11})(\lambda - m_{22}) - m_{12}m_{21} \\ &= \lambda^2 - \lambda \underbrace{(m_{11} + m_{22})}_{\text{trace}(M)} + \underbrace{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}}_{\det(M)} \end{aligned}$$


---



Inverser une matrice diagonale.

**Méthode de pivot de Gauss (Principe Général)** Elle consiste en fait à effectuer des opérations sur les lignes et les colonnes jusqu'à aboutir à la matrice identité puis on refait le processus inverse sur la matrice identité.

## 2 Représentation d'état

Pour pouvoir prédire correctement le comportement futur de la réponse d'un système linéaire d'ordre  $n$  connaissant déjà l'entrée, on aura besoin de  $n$  conditions initiales. Ces valeurs de démarrage présentent ainsi la capacité minimale de mémoire que le système peut stocker pour pouvoir déterminer son évolution ultérieure.

La fonction de transfert représente uniquement le transfert extrinsèque entre l'entrée et la sortie d'un système donné. Elle ne permet pas de prendre en considération l'évolution des grandeurs intrinsèques au système, nommées états. La représentation d'état s'avère ainsi très intéressante pour modéliser la réalité physique.



Nombre de variables d'état = Nombre d'intégrations = Nombre de CI

Dans le suite de cours on ne traitera que le cas d'un système linéaire stationnaire, c.-à-d. les paramètres du système sont indépendants du temps.

### EXEMPLE

Soit l'équation différentielle suivante :

$$3 \frac{dx}{dt} + 12x = 6u$$

$$y = x$$

Soit encore

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{-4}_A x + \underbrace{2}_B u$$

$$y = \underbrace{1}_C x + \underbrace{0}_D u$$

```
[1]: import numpy as np

from scipy.signal import step
from scipy.signal import lsim
from scipy.signal import StateSpace as ss

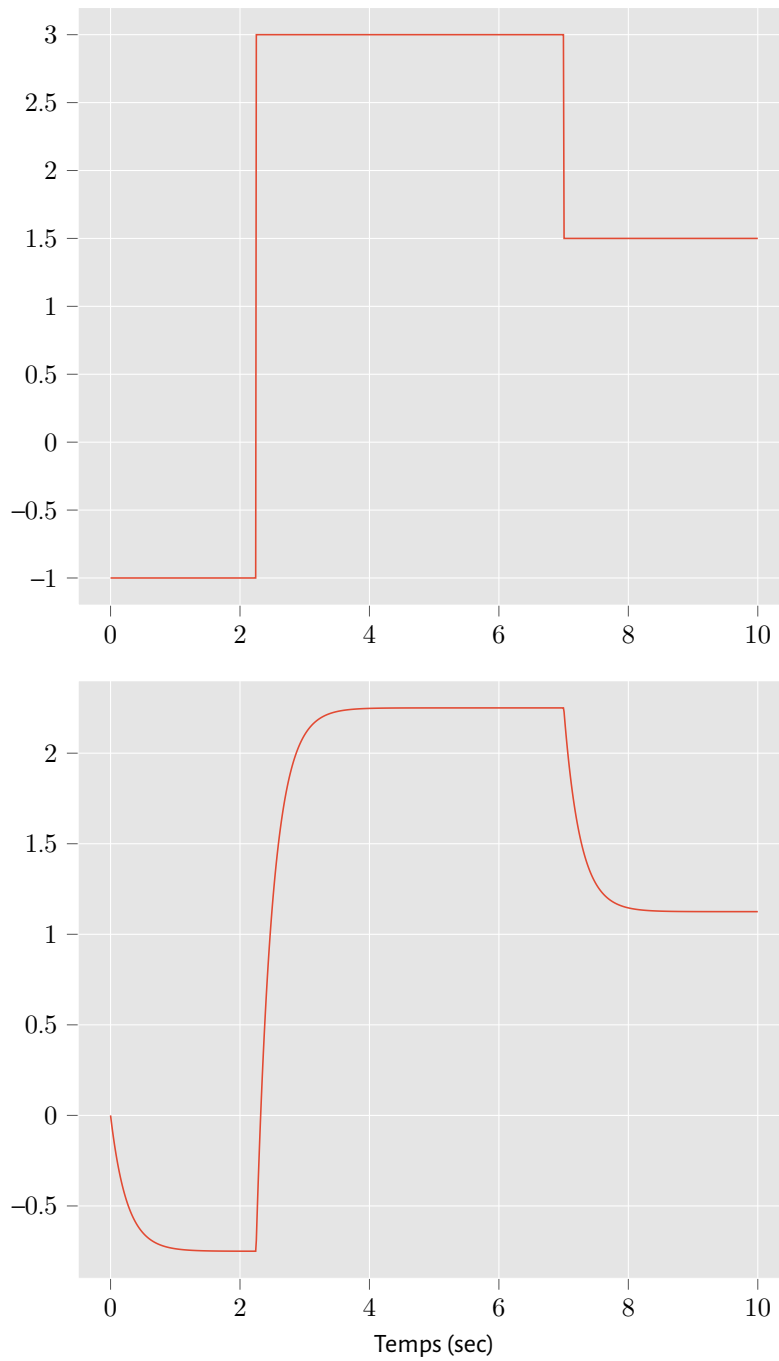
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("ggplot")
```

```
[2]: A, B, C, D = -4.0, 2.0, 1.0, 0.0
sys1 = ss(A, B, C, D)
t1, y1 = step(sys1)
plt.plot(t1, y1)
plt.grid(True)
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.title('Exemple #1')
plt.show()
```



### Signal d'entrée constant par morceaux

```
[3]: A, B, C, D = -4.0, 3.0, 1.0, 0.0
sys1 = ss(A, B, C, D)
t = np.linspace(0, 10, 1000)
u = np.zeros(len(t))
u[0:225] = -1; u[225:700] = 3; u[700:] = 1.5;
_, y, _ = lsim(sys1, u, t)
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(t, u)
plt.grid(True)
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(t, y)
plt.grid(True)
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.show()
```



**EXEMPLE**

Soit l'exemple suivant d'une équation différentielle de second ordre :

$$2 \frac{dx_1}{dt} + 6x_1 = 8u \rightarrow \frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = -3x_1 + 0x_2 + 4u$$

$$3 \frac{dx_2}{dt} + 6x_1 + 9x_2 = 0 \rightarrow \frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2$$

$$y = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow y = 0.5x_1 + 0.5x_2 + 0u$$

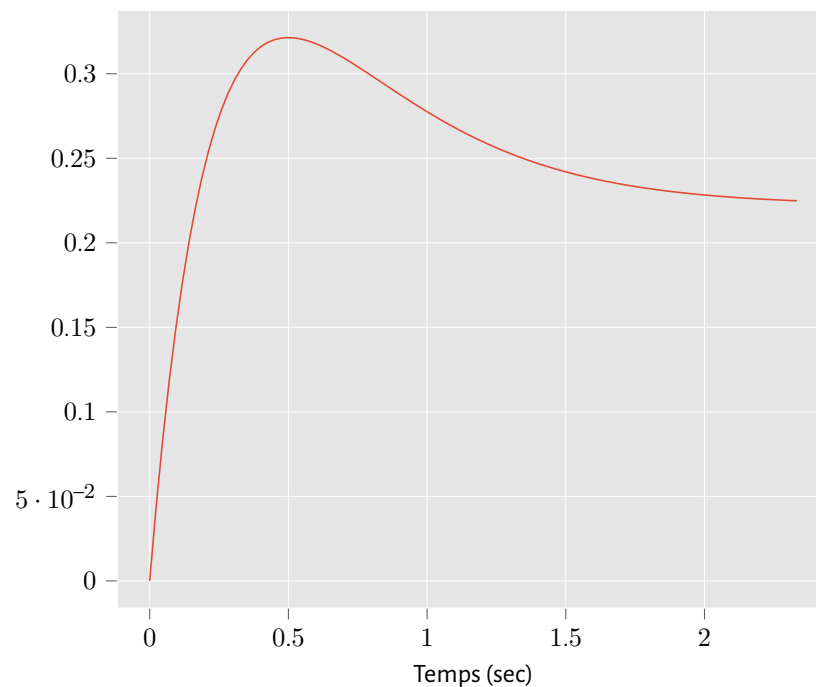
La représentation d'état est :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X + 0$$

```
[4]: A = [[-3.0, 0.0], [-2.0, -3.0]] # Matlab: A = [-3, 0; -2, -3 ]
B = [[4.0], [0.0]]
C = [0.5, 0.5]
D = 0.0
sys2 = ss(A, B, C, D)
t2, y2 = step(sys2)
plt.plot(t2, y2)
plt.grid(True)
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.title('Exemple #2')
plt.show()
```

Exemple #2



**EXEMPLE**

Désormais, les états ne figurent pas explicitement dans l'équation du système.

$$4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = 3u \quad (11)$$

On procède ainsi par intercaler de nouvelles variables.

Soit  $x_1 = y$  et  $x_2 = \frac{dy}{dt}$

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = x_2 = 0x_1 + x_2 + 0u$$

$$4 \overbrace{\frac{d^2 y}{dt^2}}^{x_2} + 2 \overbrace{\frac{dy}{dt}}^{x_2} + \overbrace{y}^{x_1} = 3u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{2}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}u$$

Soit encore

$$\dot{x}_2 = -0.25x_1 - 0.5x_2 + 0.75u$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_B u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma & \sigma \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.25 & -0.5 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0.75 \end{bmatrix}}_B u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X$$

```
[5]: A = [[0.0, 1.0], [-0.25, -0.5]]
import numpy as np
valp = np.linalg.eig(A)[0]
print(valp)
B = [[0.0], [0.75]]
```

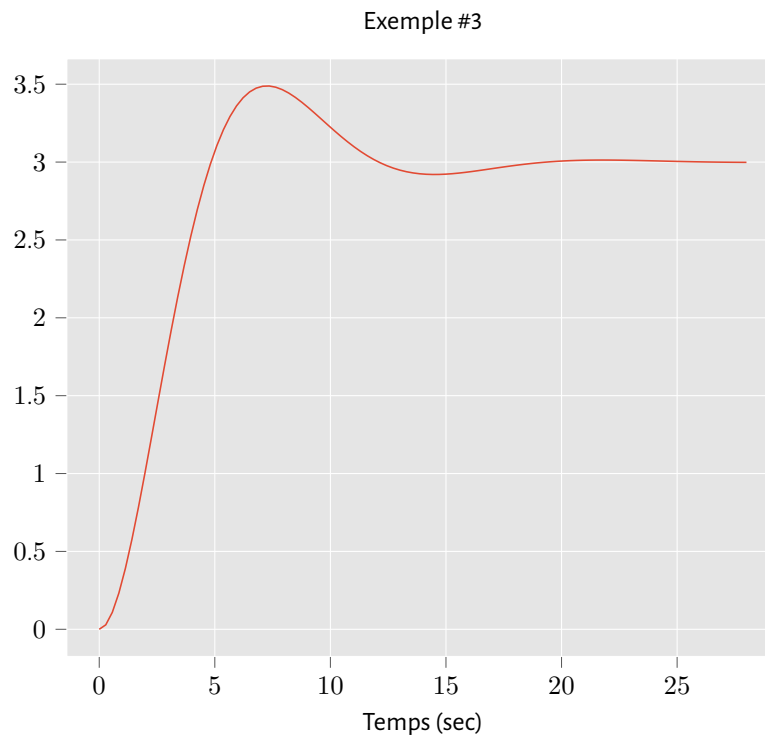


```

C = [1.0, 0.0]
D = 0.0
sys3 = ss(A, B, C, D)
t3, y3 = step(sys3)
plt.plot(t3, y3)
plt.grid(True)
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.title('Exemple #3')
plt.show()

```

```
[-0.25+0.4330127j -0.25-0.4330127j]
```

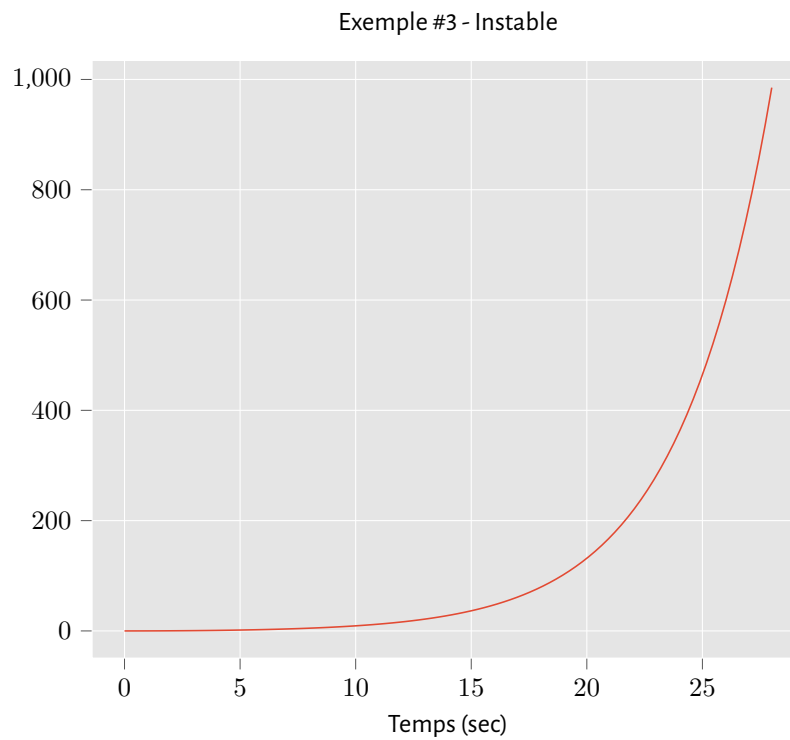


```

[6]: A = [[-0.25, 0.15], [0.0, 0.25]]
import numpy as np
valp = np.linalg.eig(A)[0]
print(valp)
B = [[0.0], [0.75]]
C = [1.0, 0.0]
D = 0.0
sys3 = ss(A, B, C, D)
t3, y3 = step(sys3)
plt.plot(t3, y3)
plt.grid(True)
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.title('Exemple #3')
plt.show()

```

[-0.25 0.25]



La sortie du modèle est non finie à cause de la valeur propre réelle positive 0.25.

**Exercice N°1 :**

Proposer une représentation d'état possible pour chacune des équations différentielles suivantes :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 3u(t) \quad (12)$$

$$2 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} - y(t) = 2u(t) \quad (13)$$

$$2 \frac{dx_1}{dt} + 6x_1 = 8u \quad (14)$$

$$3 \frac{dx_2}{dt} + 6x_1 + 9x_2 = 0 \quad (15)$$

$$y = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (16)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 3u(t) \quad (17)$$

On prend :

$$\begin{cases} x_1 = y & \longrightarrow & \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = \frac{dy}{dt} & \longrightarrow & \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + 3u \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$


---

$$2\frac{d^3 y(t)}{dt^3} - y(t) = 2u(t) \quad (18)$$

On prend :

$$\begin{cases} x_1 = y & \longrightarrow & \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = \frac{dy}{dt} & \longrightarrow & \dot{x}_2 = x_3 \\ x_3 = \frac{d^2 y}{dt^2} & \longrightarrow & \dot{x}_3 = 0.5x_1 + u \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$


---

$$2\frac{dx_1}{dt} + 6x_1 = 8u \quad (19)$$

$$3\frac{dx_2}{dt} + 6x_1 + 9x_2 = 0 \quad (20)$$

$$y = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (21)$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0.5 \quad 0.5]$$

## LINÉARISATION D'UNE ÉQUATION D'ÉTAT NON LINÉAIRE

### Exercice N° 2 :

On se propose de linéariser le système ci-dessous autour du point de fonctionnement défini par  $\bar{u} = 1$  et  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$2 \frac{dx_1}{dt} + x_1^2 + 3x_2^2 = 16u \quad (22)$$

$$3 \frac{dx_2}{dt} + 6x_1^2 + 6x_2^2 = 0 \quad (23)$$

$$y = x_1 + x_2 \quad (24)$$

- a) Écrire  $\dot{x}_1 = \mathcal{F}_1(x_1, x_2, u)$   
b) Écrire  $\dot{x}_2 = \mathcal{F}_2(x_1, x_2, u)$   
c) Écrire  $y = \mathcal{G}(x_1, x_2, u)$   
d) Proposer une équation d'état qui permet de linéariser le système précédent autour de son point de fonctionnement.

$$2 \frac{dx_1}{dt} + x_1^2 + 3x_2^2 = 16u \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = \mathcal{F}_1(x_1, x_2, u) = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{16}{2}u$$

$$3 \frac{dx_2}{dt} + 6x_1^2 + 6x_2^2 = 0 \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = \mathcal{F}_2(x_1, x_2, u) = -2x_1^2 - 2x_2^2 + 0 \times u$$

$$y = x_1 + x_2 \Rightarrow y(t) = \mathcal{G}(x_1, x_2, u) = x_1 + x_2$$

Calcul de  $\frac{dx_1}{dt}$

$$\frac{dx_1}{dt} = \mathcal{F}_1(x_1, x_2, u) = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 8u$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_1} = -x_1 \quad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_1} \Big|_{\bar{u}, \bar{x}} = -2$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_2} = -3x_2 \quad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_2} \Big|_{\bar{u}, \bar{x}} = -6$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial u} = 8 \quad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial u} \Big|_{\bar{u}, \bar{x}} = 8$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial u} u$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 8u$$

Calcul de  $\frac{dx_2}{dt}$

$$\frac{dx_2}{dt} = \mathcal{F}_2(x_1, x_2, u) = -2x_1^2 - 2x_2^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1} = -4x_1 \quad \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1 |_{\bar{u}, \bar{x}}} = -8$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2} = -4x_2 \quad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_2 |_{\bar{u}, \bar{x}}} = -8$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial u |_{\bar{u}, \bar{x}}} = 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1 |_{\bar{u}, \bar{x}}} & \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2 |_{\bar{u}, \bar{x}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial u |_{\bar{u}, \bar{x}}} u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \begin{bmatrix} -8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0u$$

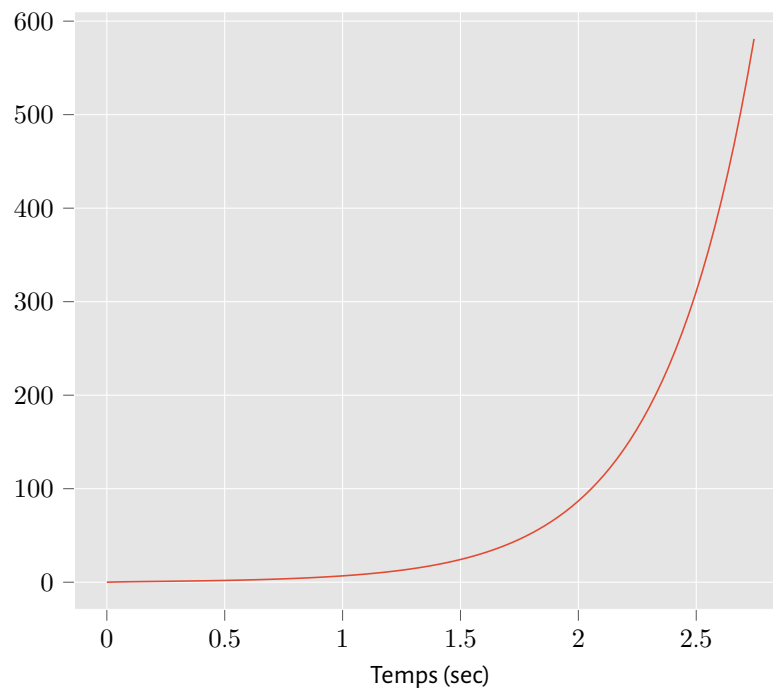
$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

```
[7]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("ggplot")
from scipy.signal import StateSpace as ss
from scipy.signal import step

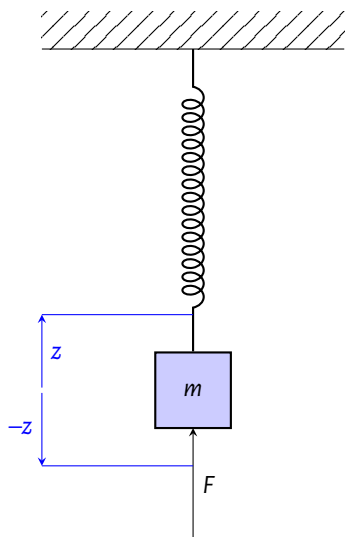
A = np.array([[ -2.0, -6.0], [-8, -8]])
B = np.array([[8.0], [0.0]])
C = np.array([1,1])
D = np.array([0])
sys4 = ss(A, B, C, D)
t4, y4 = step(sys4)
plt.plot(t4, y4)
plt.grid(True)
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.title('Exemple #4')
plt.show()
```

Exemple #4

**Exercice N° 3 :**

On considère l'exemple d'un ressort à comportement non-linéaire. Il est régi par l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{z} = F + k_1 z + k_2 z^3 \quad (25)$$



- Entrée  $u(t) = F$
- Sortie  $y(t) = z(t)$
- États  $\begin{cases} x_1(t) = z(t) \\ x_2(t) = \dot{z}(t) \end{cases}$

a) Écrire  $\dot{x}_1 = \mathcal{F}_1(x_1, x_2, u)$

b) Écrire  $\dot{x}_2 = \mathcal{F}_2(x_1, x_2, u)$

c) Proposer une équation d'état qui permet de linéariser l'éq. (25) autour du point de fonctionnement défini par  $\bar{x} = 0$  &  $\bar{u} = 0$

$$x_1 = z \implies \dot{x}_1 = \dot{z} = x_2$$

$$x_2 = \dot{z} \implies \dot{x}_2 = \ddot{z} = \frac{k_1}{m}x_1 + \frac{k_2}{m}x_1^3 + \frac{1}{m}u$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{|\bar{x}, \bar{u}} x + \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{|\bar{x}, \bar{u}} u \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

## 2.1 Formes canoniques

Nous considérons, ci-après, le scénario d'un système linéaire mono-entrée, mono-sortie (sauf indication). Un système pareil est décrit par l'équation différentielle suivante, avec  $m < n$  :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j}. \quad (26)$$

En appliquant la transformée de Laplace, on trouve :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}. \quad (27)$$

### Forme Campagne - Commandable

Nous partons d'une fonction de transfert comme indiquée par [eq. \(28\)](#) :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (28)$$

Nous allons faire apparaître les formes intégrales  $\frac{1}{s}$  à la place de la forme différentielle  $s$  dans la fonction de transfert. En conséquence, nous multiplions les deux cotés de l'équation précédente par la quantité  $\frac{1}{s^n}$  afin d'éviter toute forme dérivée

dans la réalisation du schéma bloc du système.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j}}{\sum_{i=0}^n a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i}} \quad (29)$$

Soit  $a_n = 1$ .

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j}}{1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i}} \quad (30)$$

Soit encore :

$$Y(s) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i} Y(s) = \sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j} U(s) \quad (31)$$

La sortie  $Y(s)$  est accessible à travers l'éq. (32).

$$Y(s) = \sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j} U(s) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i} Y(s) \quad (32)$$

$$= \sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j} \underbrace{\left[ \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i}}{\sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j}} Y(s) \right]}_{W(s)} \quad (33)$$

Soit la nouvelle variable  $W(s)$  telle que :

$$\begin{aligned} W(s) &= U(s) - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i}}{\sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j}} Y(s) \\ &= U(s) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i} \frac{Y(s)}{\sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j}} \\ &= U(s) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i} W(s) \\ &= U(s) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i} W(s) \end{aligned} \quad (34)$$



Nous présentons également une autre méthode plus simple pour la détermination de  $W(s)$ . On considère de nouveau l'éq. (30) :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (35)$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j}}{1 + \sum_{i=0}^n a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i}} \quad (36)$$

On peut intercaler la variable  $W(s)$  comme suit :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{W(s)} \frac{W(s)}{U(s)} \quad (37)$$

On choisit

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j} \quad \text{et} \quad \frac{W(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i}}$$

La sortie  $Y(s)$  est finalement donnée par éq. (39).

$$Y(s) = \sum_{j=0}^m b_j \underbrace{\left(\frac{1}{s}\right)^{n-j} W(s)}_{x_k(s)} \quad (38)$$

$$= \sum_{k=0}^m b_k x_k(s) \quad (39)$$

Les matrices d'état  $A_c$ , d'entrée  $B_c$  et de sortie  $C_c$  sont :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$C_c = [b_0 \quad \cdots \quad b_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0]. \quad (41)$$

$$(42)$$

#### Exercice N° 4 :

Proposer une représentation d'état possible pour chacune des fonctions de transfert suivantes :

$$\mathcal{G}_1(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + s + 0.5} \quad (43)$$

$$\mathcal{G}_2(s) = \frac{2s^2 - 1}{0.5s^3 - 1.5} \quad (44)$$

$$\mathcal{G}_3(s) = \frac{s^2}{3s^2 + 0.5} \quad (45)$$

$$\mathcal{G}_1(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + s + 0.5} \quad (46)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 2]$$

$$\mathcal{G}_2(s) = \frac{2s^2 - 1}{0.5s^3 - 1.5} \quad (47)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [-2 \quad 0 \quad 4]$$

$$\mathcal{G}_3(s) = \frac{s^2}{3s^2 + 0.5} \quad (48)$$

On procède d'abord par une division euclidienne :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5/3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [-0.5/9 \quad 0] \quad D = 1/3$$

Considérons l'exemple d'un système décrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Pour pouvoir écrire la description suivante de façon semblable à la forme donnée par éq. (40), c.-à-d. la forme canonique, il est possible, moyennant un changement de base, d'écrire  $z_c(t) = Px(t)$  où  $z_c(t)$  dénote le nouveau vecteur d'état relatif à la nouvelle base.

$$\begin{cases} \dot{z}_c(t) = A_c z_c(t) + B_c u(t) \\ y(t) = C_c z_c(t) \end{cases}$$

avec :

$$A_c = PAP^{-1}, \quad B_c = PB, \quad C_c = CP^{-1},$$

et la matrice de passage  $P$  sera calculée comme suit :

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 A \\ \vdots \\ P_1 A^{n-1} \end{bmatrix}, \quad P_1 = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]^{-1}.$$



Cette forme est nommée la forme canonique de commandabilité.

### Forme Campagne - Observable

En appliquant la transformée de Laplace, on trouve :

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (49)$$

Étant donné que  $H$  est scalaire, alors  $H^T = H$ . Il en découle, puisque  $((sI - A)^{-1})^T = (sI - A^T)^{-1}$  :

$$H(s) = B^T (sI - A^T)^{-1} C^T \quad (50)$$

$$\boxed{A_o = A_c^T} \quad \boxed{B_o = C_c^T} \quad \boxed{C_o = B_c^T}$$

Les matrices d'état, d'entrée et de sortie sont données par éq. (51) et éq. (52).

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -a_0 \\ 1 & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (51)$$

$$C_o = [0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad 0 \quad 1]. \quad (52)$$



Cette forme est appelée la forme canonique d'observabilité ou aussi la forme de Frobenius.

## 2.2 Forme modale

### Pôles simples

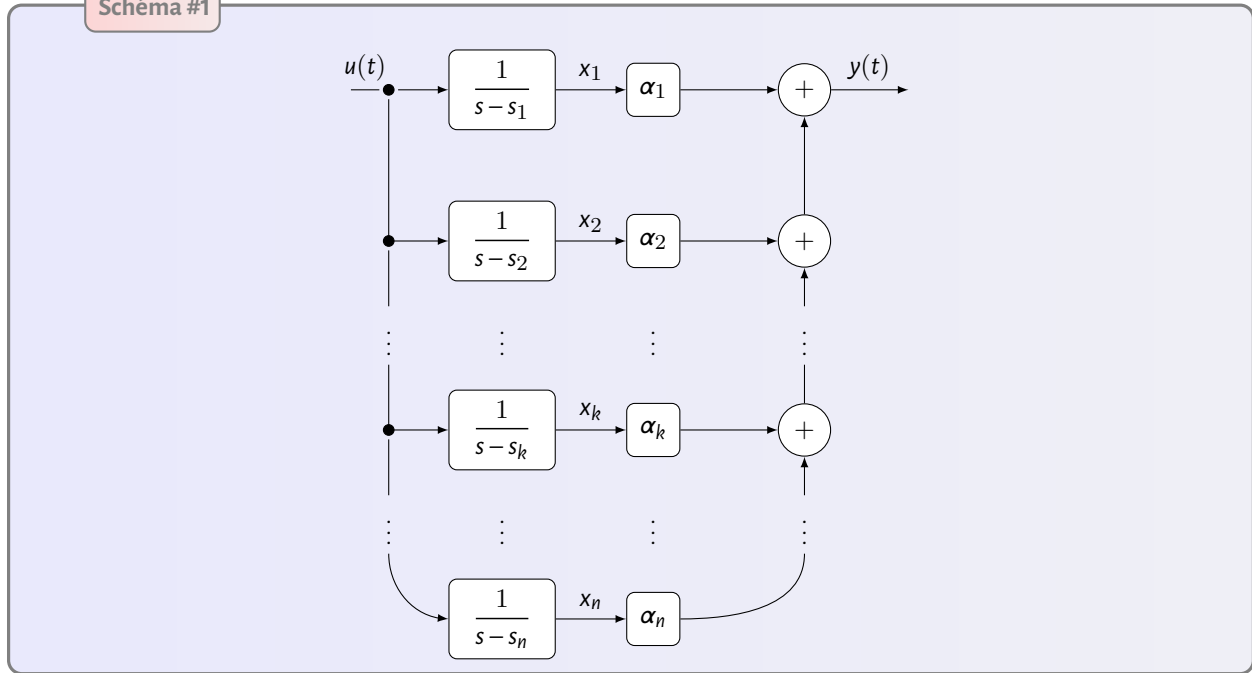
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (53)$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, \quad \text{où } m \leq n \quad (54)$$

La fonction  $H \in \mathbb{C}(s)$ , elle possède alors  $n$  racines complexes. On suppose qu'elles sont distinctes deux à deux.

$$H(s) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{s - s_k} \quad (55)$$

Schéma #1



$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & s_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]. \quad (56)$$

Soit l'exemple de l'éq. (57) :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \quad 0.1 \quad -1 \quad 2]. \quad (57)$$

La fonction de transfert correspondante est :

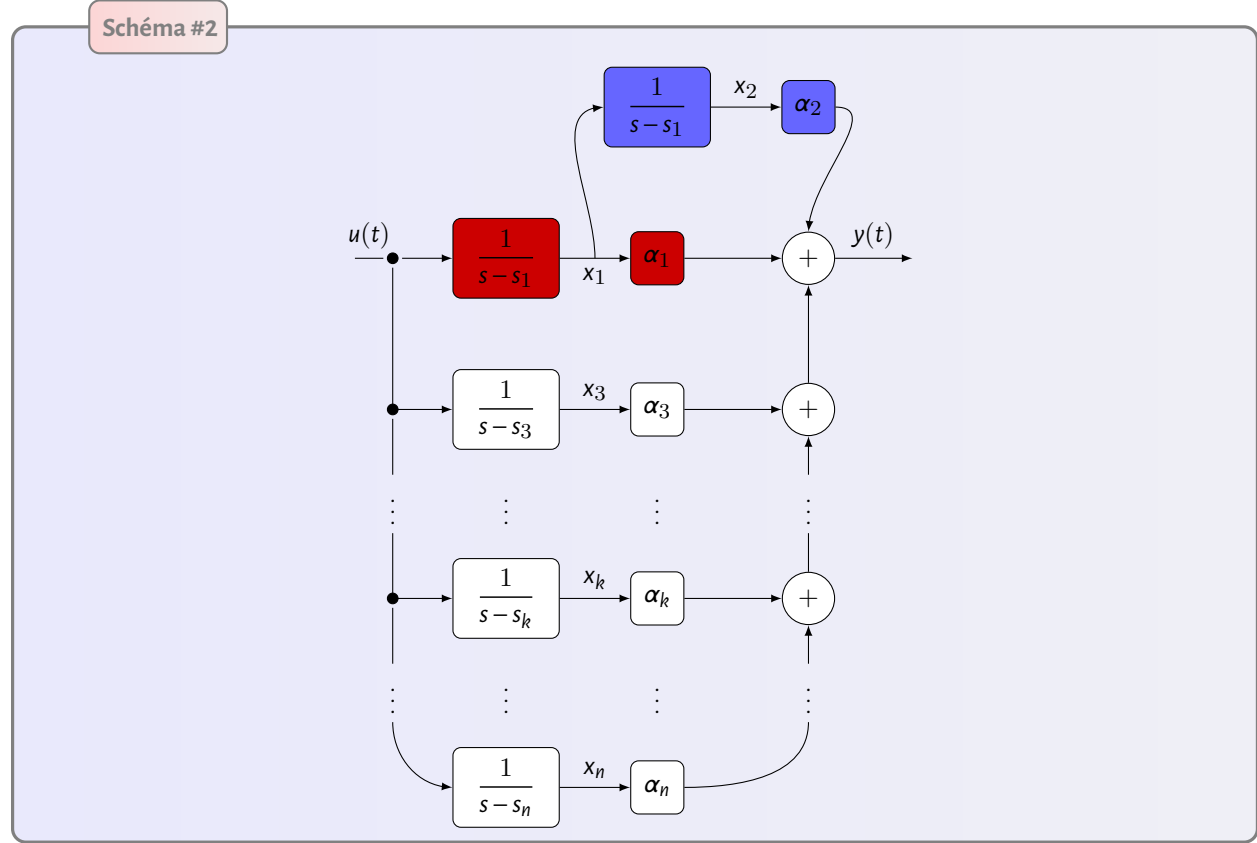
$$H(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{0.1}{s+2} + \frac{-1}{s-1} + \frac{2}{s-3.5} \quad (58)$$

### Pôles multiples

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, \quad \text{où } m \leq n \end{aligned} \quad (59)$$

Soit  $s_1$  un pôle double.

$$H(s) = \frac{\alpha_1}{s-s_1} + \frac{\alpha_2}{(s-s_1)^2} + \sum_{k=3}^n \frac{\alpha_k}{s-s_k} \quad (60)$$



La représentation d'état correspondante devient comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & s_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & s_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]. \quad (61)$$

### EXEMPLE

On considère la représentation d'état comme indiquée par éq. (62) :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \quad 0.1 \quad -3.5 \quad 5 \quad 1]. \quad (62)$$

La fonction de transfert correspondante est :

$$H(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{0.1}{(s+1)^2} + \frac{-3.5}{(s+1)^3} + \frac{5}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2} \quad (63)$$

#### Exercice N° 5 :

Donner une représentation d'état de la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{0.25}{(s+3)^3} + \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{0.5}{s^3} \quad (64)$$

Une représentation d'état sous la forme modale est :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = [1 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 2 \mid 0 \mid 0.25 \mid -0.5]$$



Pour un système d'ordre  $n$ , il existe au moins  $n^2$  descriptions d'état possible.

### 2.3 Passage d'une $\mathcal{EE}$ vers matrice de transfert

Soit un système décrit dans l'espace d'état par l'éq. (65).

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases} \quad (65)$$

Si on applique la transformée de Laplace, on trouve :

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \quad (66)$$

La matrice de transfert est indiquée par l'éq. (67), où  $Y(s)$  et  $U(s)$  dénotent respectivement les images des signaux  $y(t)$  et  $u(t)$  par application de la transformée de Laplace :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI_n - A)^{-1}B + D, \quad (67)$$

La matrice de transfert est unique. Elle a autant de lignes que nombre de sorties. Elle a autant de colonnes que nombre d'entrées.

#### Exercice N° 6 :

On considère la représentation suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \\ y(t) = CX(t) + Du(t), \end{cases} \quad (68)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0.35 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3.2 \\ 4 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.15 & 1 \\ 2 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

Calculer la matrice de transfert.

Soit :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3.2 \\ 4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$b_1$   $b_2$   $c_1$   $c_2$   $c_3$

La dimension de la matrice  $D$  est  $(3, 2)$ , Le système décrit par l'éq. (68) a 3 sorties et 2 entrées.

$$\text{Soit } u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \text{ et } y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} & \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} \\ \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} & \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} \\ \frac{Y_3(s)}{U_1(s)} & \frac{Y_3(s)}{U_2(s)} \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} c_1(sl_2 - A)^{-1}b_1 + D(1,1) & c_1(sl_2 - A)^{-1}b_2 + D(1,2) \\ c_2(sl_2 - A)^{-1}b_1 + D(2,1) & c_2(sl_2 - A)^{-1}b_2 + D(2,2) \\ c_3(sl_2 - A)^{-1}b_1 + D(3,1) & c_3(sl_2 - A)^{-1}b_2 + D(3,3) \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de Transfert : } M} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

### 3 Résolution d'une équation différentielle linéaire

Une équation différentielle linéaire est souvent mise sous la forme suivante :

$$\dot{X}(t) = \mathcal{F}(t, X), \quad (69)$$

où  $t$  n'est pas nécessairement un paramètre temporel. La dérivée de  $X$  par rapport à  $t$  est désignée par  $\dot{X}$ . Les conditions initiales sont données par le biais du vecteur  $X(t_0) = X_0$ .

#### 3.1 Particularité

Par la suite, on considère un système linéaire de premier ordre qui se met souvent sous la forme suivante :

$$\tau \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \quad (70)$$

La solution générale de l'équation précédente est la superposition de deux solutions. Une due au régime libre (i.e., sous l'effet de la condition initiale). L'autre est le résultat du régime forcé.

### Régime libre

La sortie  $y_h$  dans ce cas agit sous l'effet de la condition initiale seule.

$$\tau \dot{y}_h(t) + y_h(t) = 0 \quad (71)$$

Après intégration de l'éq. (71), on obtient :

$$\ln(|y_h(t)|) = -\frac{t}{\tau} + v, \quad (72)$$

où  $\ln$  dénote le logarithme naturel. Soit encore, après application de la fonction  $\exp$  aux deux membres de l'éq. (72) :

$$y_h(t) = V e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (73)$$

$v$  et  $V$  sont deux constantes et  $V = e^v$ . On se donne la condition initiale  $y(t = t_0) = y_0$ , la constante  $V$  est égale à  $y_0 e^{\frac{t_0}{\tau}}$ .

On en déduit alors l'expression de la solution homogène par l'expression de l'éq. (74).

$$y_h(t) = y_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}, \quad \forall t \geq 0 \quad (74)$$

### Régime forcé

On considère de nouveau l'éq. (70). Par application de la méthode de variation de constante, on obtient :

$$y_p(t) = V(t) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (75)$$

Après dérivation de  $y_p(t)$  par rapport à  $t$ , on trouve :

$$\dot{y}_p(t) = \dot{V}(t) e^{-\frac{t}{\tau}} + V(t) \frac{d}{dt} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (76)$$

Après développement,  $\dot{y}_p(t)$  devient comme suit :

$$\dot{y}_p(t) = \dot{V}(t) e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau} V(t) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (77)$$

On remplace  $y_p(t)$  de l'éq. (70) par son terme équivalent de l'éq. (77) :

$$\tau \left( \dot{V}(t) - \frac{1}{\tau} V(t) \right) e^{-\frac{t}{\tau}} + V(t) e^{-\frac{t}{\tau}} = Ku(t) \quad (78)$$

Soit encore, après simplification :

$$\tau \dot{V}(t) e^{-\frac{t}{\tau}} = Ku(t) \quad (79)$$

On déduit l'expression de  $\dot{V}(t)$  :

$$\dot{V}(t) = \frac{K}{\tau} e^{\frac{t}{\tau}} u(t) \quad (80)$$



Après intégration sur l'intervalle  $[t_0, t]$ ,

$$V(t) = \int_{t_0}^t \frac{K}{\tau} e^{-\frac{\zeta}{\tau}} u(\zeta) d\zeta \quad (81)$$

La mise à jour de l'éq. (81) dans  $y_p$  donne :

$$y_p(t) = \int_{t_0}^t \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}} u(\zeta) d\zeta \quad (82)$$

Il en résulte que la solution la plus générale est  $y = y_p + y_h$  :

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \int_{t_0}^t \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}} u(\zeta) d\zeta \quad (83)$$

### 3.2 Généralité

On considère désormais un système linéaire d'ordre  $n$  supérieur à 1. L'équation représentative du système peut s'écrire de la façon suivante :

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t), \quad m \leq n. \quad (84)$$

Soit  $a_n = 1$ . Eq. (84) s'actualise comme suit :

$$y^{(n)}(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t) \quad (85)$$

Soit le vecteur  $X(t)$  qui regroupe les variables d'état du système. C'est donc un vecteur à  $n$  éléments. Il représente la capacité mémoire minimale que le système peut sauvegarder afin de pouvoir déterminer son évolution ultérieure. Nous rappelons qu'on peut transformer l'éq. (85) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases} \quad (86)$$

avec

$$(A, B, C, D) \in \mathbb{M}_{(n,n)}(\mathbb{C}) \times \mathbb{M}_{(n,1)}(\mathbb{C}) \times \mathbb{M}_{(1,n)}(\mathbb{C}) \times \mathbb{M}_{(1,1)}(\mathbb{C})$$

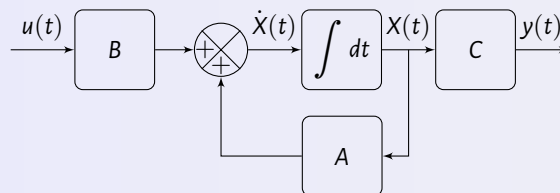
$A$  est la matrice d'état;

$B$  est la matrice d'entrée;

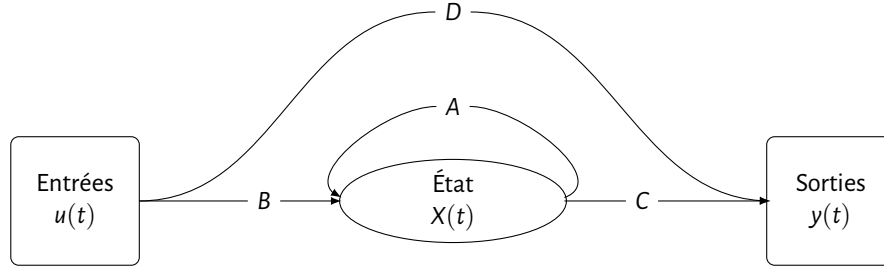
$C$  est la matrice de sortie;

$D$  caractérise le transfert direct entrée-sortie. Elle existe ssi  $m = n$ .

Schéma #3



Un schéma explicatif des interactions mutuelles entre ces grandeurs est donné dans [PM82].



Étant donné la solution de l'éq. (83), le vecteur d'état  $X(t)$  peut être déduit par la relation suivante :

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\zeta)}Bu(\zeta)d\zeta \quad (87)$$

## 4 Commande par retour d'état

Avant de se pencher sur la synthèse d'une loi de commande pour un système linéaire, la question d'existence d'une commande doit être posée.

Nous rappelons d'abord la description du vecteur d'état  $X$  à un instant  $t$  donné :

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\mu)}Bu(\mu)d\mu \quad (88)$$

Mettons  $X(t) = 0$ , alors pour  $t > t_0$ , nous déduisons :

$$X_0 = - \int_{t_0}^t e^{-A\mu}Bu(\mu)d\mu \quad (89)$$

Eq. (89) peut être résolue pour une entrée  $u(\mu)$  et un état initial  $X_0$  si, et seulement si, les lignes (resp. colonnes) de la matrice  $e^{-A\mu}B$  sont linéairement indépendantes.

Étant donnée l'approximation de Taylor, la quantité en exponentielles peut être décomposée en termes de  $I_n, A, A^2, \dots, A^k, \dots, A^\infty$ . Chaque matrice vérifie son polynôme caractéristique, la matrice  $e^A$  peut être décrite entièrement en fonction de  $I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ .

Une condition nécessaire et suffisante de commandabilité est que la matrice  $\xi$  soit de rang plein, avec  $\xi$  donnée par :

$$\xi = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (90)$$

### Exercice n°7 :

Un facteur déterminant la durée de vie utile d'une structure flexible, telle qu'un navire, un grand bâtiment ou un gros avion, est la possibilité de défaillances par fatigue dues aux vibrations structurelles. Chaque mode de vibration est décrit par une équation de la forme

$$m\ddot{x} + kx = u(t),$$

où  $u(t)$  est la force d'entrée.



Est-il possible de trouver une entrée qui conduira à la fois la déflexion  $x(t)$  et sa vitesse  $\dot{x}(t)$  à zéro en un temps fini à partir des conditions initiales arbitraires ?

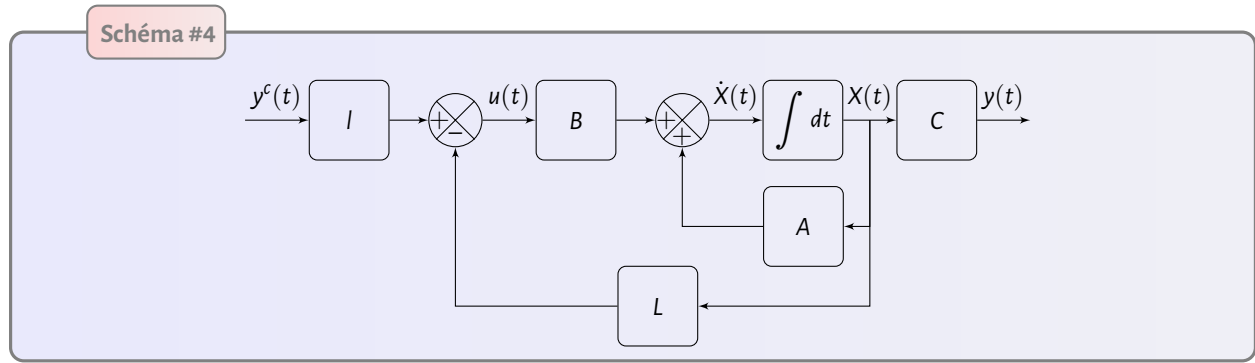
Soient  $y_1(t) = x(t)$  et  $y_2(t) = \dot{x}(t)$ . La description du système se transforme ainsi en la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_B u(t)$$

Il reste maintenant à calculer le rang de la matrice  $[B, AB]$ .

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix} \quad (91)$$

La matrice précédente, calculée dans l'éq. (91) n'est pas singulière, par conséquent, le système décrit par l'équation  $m\ddot{x} + kx = u(t)$  est entièrement commandable. Ceci signifie qu'il existe une commande  $u(t)$  capable de conduire à la fois la déflexion  $x(t)$  et sa vitesse  $\dot{x}(t)$  à zéro en un temps fini à partir de conditions initiales arbitraires.



#### Exercice N° 8 :

Soit la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u(t) \quad (92)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_C x(t) \quad (93)$$

- Étudier la stabilité du système;
- Étudier la commandabilité du système;
- Écrire l'équation d'état de la boucle fermée entre la consigne  $y^c$  et la sortie  $y$ , avec une loi de commande par retour d'état de type :

$$u(t) = ly^c(t) - Lx(t)$$

- Calculer  $L$  de sorte que les valeurs propres du système bouclé soient placées aux valeurs suivantes :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -2$ ;
- Calculer la valeur du gain de pré-compensateur  $l$  tel que le gain de transfert entre la consigne  $y^c$  et la sortie  $y$  soit égal à 1.

**Stabilité**

$\det(A) = -2$  &  $\text{trace}(A) = 3 \rightarrow$  Système instable.

**Commandabilité**

$$\begin{aligned}\xi &= \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Rang de  $\xi$  est égal à 2, le système est alors complètement commandable.

**Commande par retour d'état**

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ &= Ax + B(l y^c - Lx) \\ &= (A - BL)x + Bly^c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A - BL &= A - B \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}}_L \\ &= \begin{bmatrix} -2 + l_1 & -4 + l_2 \\ 2 - l_1 & 5 - l_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{trace}(A - BL) = 3 + l_1 - l_2 = -3 \\ \det(A - BL) = (-2 + l_1)(5 - l_2) + (4 - l_2)(2 - l_1) = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l_1 = 4 \\ l_2 = 10 \end{cases}$$

**Gain du pré-compensateur**

$$\begin{aligned}l &= -\frac{1}{C(A - BL)^{-1}B} \\ &= -\frac{1}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \\ &= 2\end{aligned}$$

## 5 Observateur de Luenberger

Une commande par retour d'état est défini par la connaissance du vecteur d'état  $X$ . Nous avons supposé qu'il est connu exactement pour tout  $t \geq 0$  et qu'il est accessible. Néanmoins, cette hypothèse se heurte à deux limitations. Une première réside dans le fait que  $X$  peut ne pas avoir un sens physique. Il peut également être non accessible. À ce stade, il n'y aura pas des capteurs qui délivrent en temps réel les valeurs prises par les composantes définissant l'état du système.

Si le système est observable, alors il existe un observateur (estimateur d'état) qui délivre une estimation asymptotiquement convergente de l'état, à partir des mesures de la sortie observée.

Ce type particulier d'observateur que nous construirons est appelé observateur de Luenberger d'après David G. Luenberger, qui a développé cette idée dans sa thèse de doctorat en 1963. David G. Luenberger est professeur à l'Université de Stanford : <https://profiles.stanford.edu/david-luenberger>.

Nous présentons par la suite une description brève de l'estimateur de Luenberger. Il consiste à installer des capteurs logiciels qui estiment le vecteur  $X$ .

On dénote par  $\hat{X}$  la valeur estimée de  $X$ . Sa vélocité est alors une fonction d'elle même, de l'entrée  $u$  et de la sortie  $y$ .

$$\dot{\hat{X}}(t) = F\hat{X}(t) + Gu(t) + Ky(t) \quad (94)$$

Calculons maintenant l'erreur  $\tilde{X}$  entre la valeur réelle de  $X$  et sa valeur approchée  $\hat{X}$ .

$$\tilde{X}(t) = \hat{X}(t) - X(t) \quad (95)$$

La vitesse d'évolution de  $\tilde{X}$  sera donnée par éq. (96).

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \dot{\hat{X}}(t) - \dot{X}(t) \quad (96)$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{X}}(t) &= F\hat{X}(t) + Gu(t) + Ky(t) - AX(t) - Bu(t) \\ &= F\hat{X}(t) - (A - KC)X(t) + (G - B)u(t) \end{aligned} \quad (97)$$

L'expression de  $\dot{\tilde{X}}(t)$  ne doit pas faire apparaître l'entrée  $u$  dans sa définition. Pour cette raison, on peut imposer  $G = B$ . Eq. (97) se simplifie alors en :

$$\dot{\tilde{X}}(t) = F\hat{X}(t) - (A - KC)X(t) \quad (98)$$

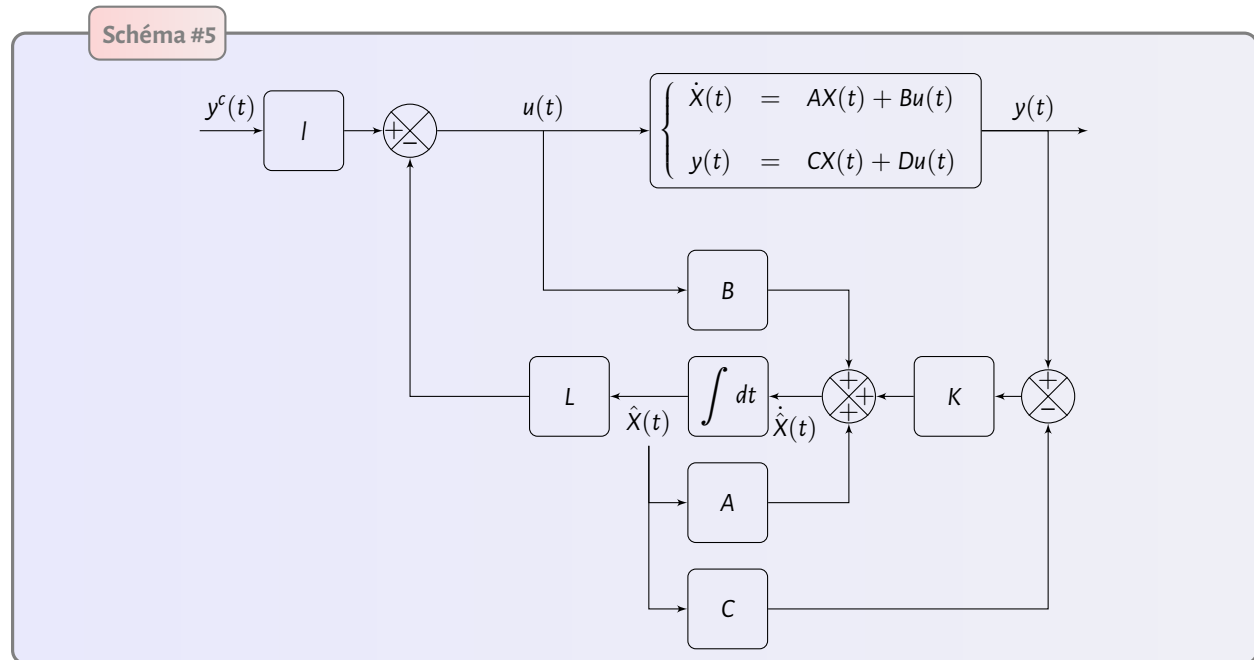
Sachant que  $\dot{\tilde{X}}(t)$  doit s'écrire entièrement en fonction de  $\tilde{X}(t)$ . La matrice  $F$  sera choisie alors égale à  $A - KC$ .

$$\dot{\tilde{X}}(t) = (A - KC)\tilde{X}(t) \quad (99)$$

L'observateur de Luenberger peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$\dot{\hat{X}}(t) = \underbrace{A\hat{X}(t) + Bu(t) + K \left( \overbrace{y(t) - C\hat{X}(t)}^{\text{Erreur d'estimation}} \right)}_{\text{Terme de correction}} \quad (100)$$

La description de l'observateur de Luenberger donnée par éq. (100) est aussi valide pour le cas des systèmes discrets.

**Exercice N° 9 :**

On considère le système suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (101)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (102)$$

- Étudier l'observabilité du système ;
- L'état  $x$  n'est pas mesurable. Synthétiser un observateur de type Luenberger qui permet de délivrer une valeur approchée  $\hat{x}$  de  $x$ , caractérisé par une dynamique double placée en  $-2$  ;
- Dessiner le schéma bloc de cet observateur.

**Observabilité**

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rang de  $O$  est égal à 2  $\rightarrow$  Système observable.

**Synthèse de l'observateur par placement de pôles**

L'observateur de Luenberger est décrit par

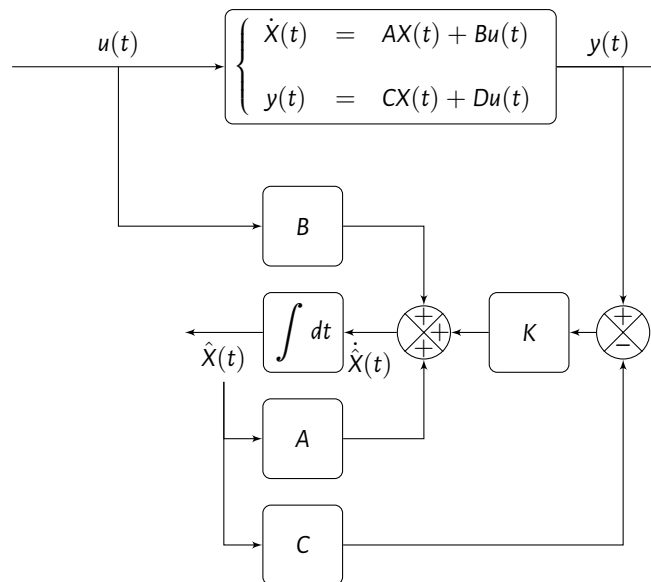
$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ &= (A - KC)\hat{x} + Bu(t) + Ky(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A - KC &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Pour pouvoir déterminer les coefficients  $k_1$  et  $k_2$ , il suffit de résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \text{trace}(A - KC) = -k_1 = -4 \\ \det(A - KC) = k_2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = 4 \end{cases}$$

### Schéma bloc de l'observateur



## 6 Exercices corrigés

### Exercice N°10 :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} X(t) \end{cases}$$

- Sans faire du calcul, donner la fonction de transfert du système;
- Calculer la réponse indicielle du système pour des conditions initiales nulles;
- Calculer l'état  $X(t)$  en régime libre. On donne

$$X(0^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Le système est décrit sous la forme canonique, la fonction de transfert est donnée par éq. (103) :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ &= \frac{3s + 4}{s^2 + 4s + 5} \end{aligned} \quad (103)$$

La sortie  $Y(s)$  est :

$$Y(s) = H(s)U(s) \quad (104)$$

$$= \frac{3s + 4}{s(s^2 + 4s + 5)} \quad (105)$$

$$= \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s - s_1} + \frac{\delta}{s - s_2} \quad (106)$$

où :

$$s_1 = -2 + j \quad s_2 = -2 - j = s_1^*$$

Nous avons

$$s_1 + s_2 = -4 \quad s_1 - s_2 = 2j \quad s_1 s_2 = 5$$

$$\alpha = s \frac{3s + 4}{s(s^2 + 4s + 5)} \Big|_{s=0} = \frac{3}{5}$$

$$\beta = (s - s_1) \frac{3s + 4}{s(s^2 + 4s + 5)} \Big|_{s=s_1} = \frac{3 + 4s_1}{s_1(s_1 - s_2)}$$

$$\delta = (s - s_2) \frac{3s + 4}{s(s^2 + 4s + 5)} \Big|_{s=s_2} = \frac{3 + 4s_2}{s_2(s_2 - s_1)}$$

$$y(t) = \underbrace{(\alpha + \beta e^{s_1 t} + \delta e^{s_2 t})}_{r(t)} \Gamma(t) \quad (107)$$

$$r(t) = \frac{1}{s_1 s_2 (s_1 - s_2)} (s_2 (3 + 4s_1) e^{s_1 t} - s_1 (3 + 4s_2) e^{s_2 t}) \quad (108)$$

$$= \frac{e^{-2t}}{10j} ((-2 - j)(-5 + 4j)e^{jt} - (-2 + j)(-5 + 4j)e^{-jt}) \quad (109)$$

$$= \frac{e^{-2t}}{10j} (14(e^{jt} - e^{-jt}) - 3j(e^{jt} + e^{-jt})) \quad (110)$$

$$= \frac{e^{-2t}}{5} (14 \sin(t) - 3 \cos(t)) \quad (111)$$

$$y(t) = \frac{3}{5} \Gamma(t) + \frac{e^{-2t}}{5} (14 \sin(t) - 3 \cos(t)) \Gamma(t) \quad (112)$$

Puisque  $X(0^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , la description du système se transforme en :

$$\dot{X}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}}_A X(t) \quad (113)$$



$$X(t) = e^{At}X(0^+) \quad (114)$$

Calculons maintenant la quantité  $e^{At}$ . La matrice  $A$  peut être décrite par  $PDP^{-1}$ , où  $D$  est sa forme diagonale. Alors

$$D = \begin{bmatrix} -2+j & 0 \\ 0 & -2-j \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} -0.3651 - 0.1826j & -0.3651 + 0.1826j \\ 0.9129 & 0.9129 \end{bmatrix}$$

L'inverse de la matrice  $P$  est donnée par

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2.7386j & 0.5477 + 1.0954j \\ -2.7386j & 0.5477 - 1.0954j \end{bmatrix}$$

Le terme  $e^{At}$  est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} X(t) &= P e^{Dt} P^{-1} X(0^+) \\ &= \begin{bmatrix} e^{t(-2+j)} \left( \frac{1}{2} + 2j \right) + e^{t(-2-j)} \left( \frac{1}{2} - 2j \right) \\ e^{t(-2+j)} \left( 1 - \frac{9}{2}j \right) + e^{t(-2-j)} \left( 1 + \frac{9}{2}j \right) \end{bmatrix} \Gamma(t) \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} (\cos(t) + 4 \sin(t)) \\ e^{-2t} (2 \cos(t) - 9 \sin(t)) \end{bmatrix} \Gamma(t) \end{aligned}$$

#### Exercice N° 11 :

Trouver une description d'état possible du système décrit par l'équation suivante :

$$m\ddot{x}(t) = k(x(t) - u(t)) + f(\dot{x}(t) - \dot{u}(t)), \quad (115)$$

où  $x$  et  $u$  dénotent respectivement le déplacement et la force appliquée au système. Le triplet  $(M, k, f)$  désigne la masse, la raideur et le frottement.

Le système est de second ordre. Soit un vecteur d'état  $X$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

Ceci donne :

$$\dot{x}_2(t) = \frac{k}{m}x(t) + \frac{f}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}u(t) - \underbrace{\frac{f}{m}\dot{u}(t)}_{\text{Problème}}.$$

Le terme  $\frac{f}{m}\dot{u}(t)$  ne peut pas figurer explicitement dans l'équation d'état. Nous devons alors changer l'expression de la deuxième composante du vecteur  $X$ . Soit  $x_2(t) = \dot{x}(t) + \gamma u(t)$ .

$$\dot{x}_2(t) = \frac{k}{m}x(t) + \frac{f}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}u(t) - \frac{f}{m}\dot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t).$$

Afin de supprimer  $\dot{u}(t)$ , on peut fixer  $\gamma = \frac{f}{m}$ . La description d'état sera donnée alors par éq. (116).

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & 1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} \frac{f}{m} \\ -\frac{k-f}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) \end{cases} \quad (116)$$

**Exercice N°12 :**

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X(t) \end{cases} \quad (117)$$

où  $\alpha$  est constant.

- Déterminer le nombre d'entrées, de sorties et du vecteur d'état;
- Calculer les pôles du système si  $\alpha = 1$ ;
- Pour quelle valeur de  $\alpha$  ce système est-il commandable?

```

1 syms alpha ;
2 A = [-1, 1; 0, -1]; B = [1, 0; 0, alpha]; C = [1, 0; 1, 1];
3
4 N1 = size(A); N2 = size(B); N3 = size(C);
5 N2(2); % Nombre d'entrées
6 N3(1); % Nombre de sorties
7 N1(2); % Nombre d'état
8
9 alpha = 1;
10 eig(A) % Poles du système
11
12 clear alpha
13 rank([B A*B]) % Système est commandable pour tout alpha /= 0

```

**Exercice N°13 :**

Donner une représentation d'état possible de la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{s^3 + 25s^2 + 2.45s + 3.4}{4s^3 + 6s^2 + 10s - 2} \quad (118)$$

Le numérateur et le dénominateur de  $H$  sont de même degré. La fonction de transfert peut se mettre encore sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^3 + 25s^2 + 2.45s + 3.4}{4s^3 + 6s^2 + 10s - 2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{23.5s^2 - 0.05s + 3.9}{4s^3 + 6s^2 + 10s - 2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{23.5/4 s^2 - 0.05/4 s + 3.9/4}{4/4 s^3 + 6/4 s^2 + 10/4 s - 2/4} \end{aligned}$$

Les matrices d'état, d'entrée, de sortie et le transfert direct sont donnés ainsi par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{4} & -\frac{10}{4} & -\frac{6}{4} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{3.9}{4} & \frac{-0.05}{4} & \frac{23.5}{4} \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{4}.$$

#### Exercice N° 14 :

Un système d'entrée  $u$  et de sorties  $y_1, y_2$  est donné par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) + y_1(t) + 2y_2(t) = \dot{u}(t) + 3u(t) \\ \dot{y}_2(t) + 4y_1(t) = u(t) \end{cases} \quad (119)$$

- Calculer la matrice fonction de transfert;
- Donner une représentation d'état possible de ce système.

#### Exercice N° 15 :

Soit la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (120)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (121)$$

- Étudier la stabilité du système;
- Étudier la commandabilité du système;
- On désire réaliser une boucle fermée entre la consigne  $y^c$  et la sortie  $y$ , avec une loi de commande par retour d'état de type :

$$u(t) = |y^c(t) - Lx(t)$$

Calculer  $L$  de sorte que les valeurs propres du système bouclé soient placées aux valeurs suivantes :  $-2$  &  $-3$ ;

- Calculer la valeur du gain de pré-compensateur  $I$  tel que le gain de transfert entre la consigne  $y^c$  et la sortie  $y$  soit égal à 1.
- Étudier l'observabilité du système;
- L'état  $x$  n'est pas mesurable. Synthétiser un observateur de Luenberger qui permet de délivrer une valeur approchée  $\hat{x}$  de  $x$ , caractérisé par une dynamique placée en  $-3$  &  $-5$ .

$\det(A) = -15$  &  $\text{trace}(A) = 2 \rightarrow$  Système instable.

$$\begin{aligned} \xi &= \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rang de  $\xi$  est égal à 2  $\rightarrow$  Système commandable.

$$\begin{aligned}
 A - BL &= A - B \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}}_L \\
 &= \begin{bmatrix} -l_1 & 15 - l_2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 \begin{cases} \text{trace}(A - BL) &= 2 - l_1 &= -5 \\ \det(A - BL) &= -2l_1 - 15 + l_2 &= 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l_1 &= 7 \\ l_2 &= 35 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l &= -\frac{1}{C(A - BL)^{-1}B} \\
 &= -\frac{1}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -20 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Rang de  $O$  est égal à 2  $\rightarrow$  Système observable.

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \\
 &= (A - KC)\hat{x} + Bu(t) + Ky(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A - KC &= \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 15 - k_1 \\ 1 & 2 - k_2 \end{bmatrix} \\
 \begin{cases} \text{trace}(A - KC) &= k_1 - 15 &= 15 \\ \det(A - KC) &= 2 - k_2 &= -8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 &= 30 \\ k_2 &= 10 \end{cases}
 \end{aligned}$$

#### Exercice N°16 :

Soit un système décrit par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0.1 & -3 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} X(t) \end{cases} \quad (122)$$

a) Est-ce qu'il est commandable et/ou observable?

- b) Calculer sa réponse indicielle;
- c) Concevoir une commande par retour d'état qui permet de placer les valeurs propres du système en boucle fermée en  $(-4, -5)$  et annule l'erreur statique de position;

```

1 A = [-1, 2; 0.1, -3]; B = [1; 1]; C = [1; 1];
2 rank([B A*B]) % vérifier la commandabilité
3 rank([C; C*A]) % vérifier l'observabilité
4
5 H = tf2ss(A, B, C, 0);
6 step(H);
7
8 L = place(A, B, [-4, -5]); % Gain L
9 l=1/(C*inv(-A+B*L)*B); % Gain du précompensateur

```

```

[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.style.use("ggplot")
plt.rcParams['figure.figsize'] = [15, 10]
plt.rc({'keymap.grid': "g", "font.serif": "Charter", "font.size": 10})
import tikzplotlib as mikz

```

```

[2]: #!pip install slycot
#!pip install control

```

```

[3]: import control

```

```

[4]: A = np.array([[ -1.0, 2.0], [0.1, -3.0]])
B = np.array([[1.0], [1.0]])
C = np.array([[1.0, 1.0]])
D = 0.0

```

```

[5]: print("La dimension de A est {}".format(A.shape))
print("La dimension de B est {}".format(B.shape))
print("La dimension de C est {}".format(C.shape))

```

La dimension de A est (2, 2).  
 La dimension de B est (2, 1).  
 La dimension de C est (1, 2).

#### Commandabilité

```

[6]: AB = np.matmul(A, B)
cde = np.concatenate((B, AB), axis=1)
np.linalg.matrix_rank(cde)

```

[6]: 2

#### Observabilité

```

[7]: CA = np.matmul(C, A)
obs = np.concatenate((C, CA), axis=0)
np.linalg.matrix_rank(obs)

```

[7]: 2

#### Mise du système sous la forme d'une représentation d'état

```
[8]: sys = control.ss(A,B,C,D)
      print(sys)
```

```
A = [[-1.  2. ]
      [ 0.1 -3. ]]
```

```
B = [[1.]
      [1.]]
```

```
C = [[1. 1.]]
```

```
D = [[0.]]
```

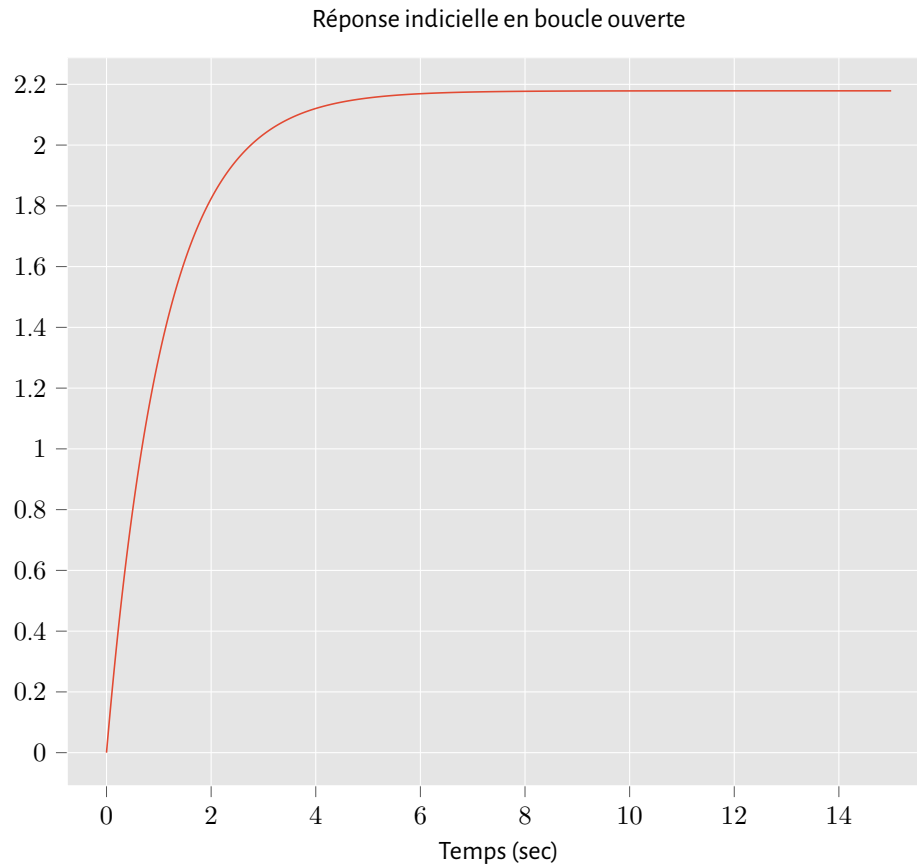
#### Calcul de la fonction de transfert

```
[9]: H = control.ss2tf(sys)
```

#### Détermination de la réponse indicielle du système

```
[10]: T = np.linspace(0, 15, 1500)
      t, y = control.step_response(sys, T=T)
```

```
[11]: plt.plot(t, y)
      plt.title("Réponse indicielle en boucle ouverte")
      plt.xlabel('Temps (sec)')
      plt.grid()
```



### Synthèse d'une commande par retour d'état

#### Gain de retour L

```
[12]: L = control.place(A,B,[-4,-5])
```

#### Précompensateur l

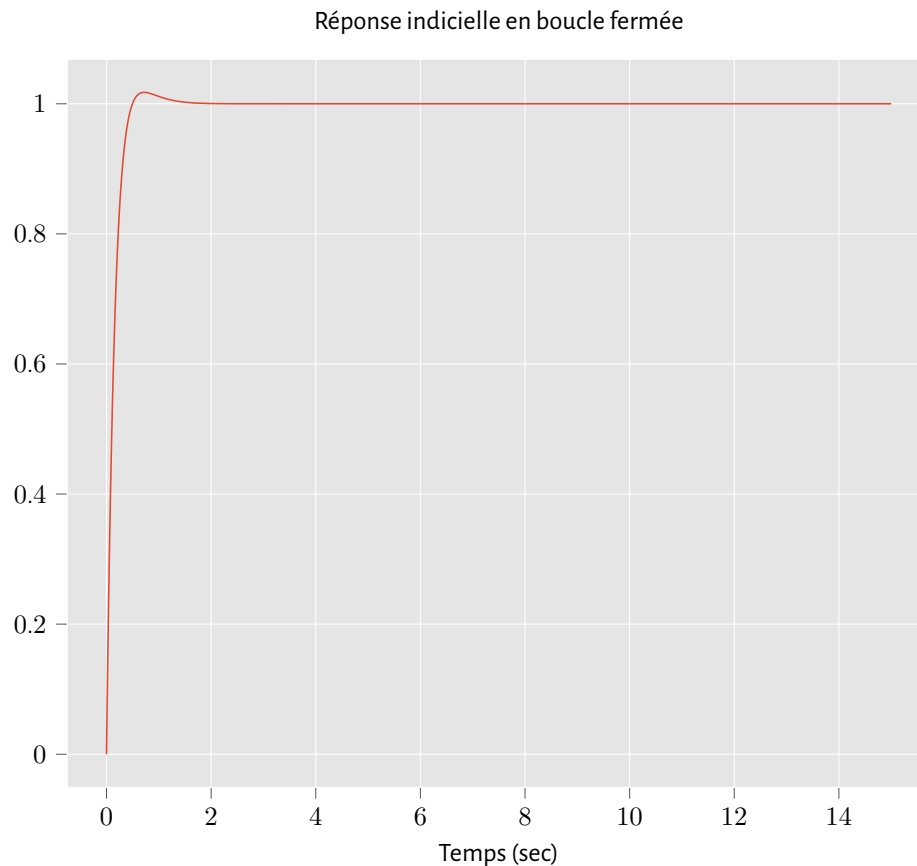
```
[13]: A_BL = A-np.matmul(B, L)
l = -1/(
    np.matmul(C,
        np.matmul(np.linalg.inv(A_BL), B))
    )
```

```
[14]: A_cl = A_BL
B_cl = B*l
C_cl = C
D_cl = 0

sys_cl = control.ss(A_cl, B_cl, C_cl, D_cl)
```

```
[15]: T = np.linspace(0, 15, 1500)
t, y_cl = control.step_response(sys_cl, T=T)
```

```
[16]: plt.plot(t, y_cl)
plt.title("Réponse indicielle en boucle fermée")
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.grid()
```


**Exercice N°17:**

Soit la représentation suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} X(t) \end{cases} \quad (123)$$

- a) Déterminer la fonction de transfert  $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$
- b) Calculer  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  si  $u(t) = 0$  et  $X(0^+) = \begin{bmatrix} x_1(0^+) \\ x_2(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ 0 \end{bmatrix}$ .
- c) Tester la commandabilité et l'observabilité du système (123);
- d) Concevoir une commande par retour d'état qui place les valeurs propres de la boucle fermée en  $(-2, -3)$  et qui annule l'erreur statique de position.



```

1 A = [-1, 0; 1, -0.5]; B = [-2; 1]; C = [0, 1];
2 H = ss2tf(A, B, C, 0); % FT

```

En appliquant la transformée de Laplace pour les deux côtés de l'éq. (123) sans considérer l'entrée  $u(t)$ , nous obtenons :

$$sX(s) - X(0^+) = AX(s) \quad (124)$$

Le vecteur  $X(s)$  est accessible à travers l'éq. (125).

$$X(s) = (sI_2 - A)^{-1}X(0^+) \quad (125)$$

```

1 syms s x10
2 X = ilaplace(inv(s*eye(2)-A)*[x10; 0])

```

Le vecteur d'état donné dans le domaine temporel est

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{10}e^{-t} \\ 2x_{10}\left(e^{\frac{-t}{2}} - e^{-t}\right) \end{bmatrix} \Gamma(t),$$

où  $\Gamma(t)$  dénote la fonction échelon.

```

1 rank([B, A*B]) % Commandabilité
2 rank([C; C*A]) % Observabilité
3
4 L = acker(A, B, [-2; -3]); % Gain L
5 l = 1/(C*inv(-A+B*L)*B); % Précompensateur

```

### Exercice N°18 :

On considère la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases} \quad (126)$$

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^t \left[ e^{A(t-\mu)}B + D\delta(t-\mu) \right] u(\mu)d\mu \quad (127)$$

Démontrer que le modèle discret qui correspond au système (126) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} X_{k+1} = FX_k + Gu_k \\ y_k = HX_k + Du_k \end{cases} \quad (128)$$

$$F = e^{AT_e} \quad G = \int_0^{T_e} e^{A(T_e-\mu)}Bd\mu \quad H = C \quad (129)$$

où  $T_e$  dénote la période d'échantillonnage.

## Références

- [Aok13] M. AOKI. *State Space Modeling of Time Series*. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [Del12] D. DELCHAMPS. *State Space and Input-Output Linear Systems*. Springer New York, 2012.
- [Fri05] B. FRIEDLAND. *Control System Design : An Introduction to State-Space Methods*. Dover Books on Electrical Engineering. Dover Publications, 2005.
- [Han+01] K. HANGOS et al. *Intelligent Control Systems : An Introduction with Examples*. Applied Optimization. Springer, 2001.
- [PM82] R. V. PATEL et N. MUNRO. *Multivariable system theory and design*. Oxford, Eng. New York : Pergamon Press, 1982 (cf. p. 30).
- [ZW13] Y. ZENG et S. WU. *State-Space Models : Applications in Economics and Finance*. Statistics and Econometrics for Finance. Springer New York, 2013.

# Annexes

ÉPREUVES CORRIGÉES

-----

Ce document comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7. Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Le sujet est constitué de 3 exercices qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Les règles suivantes s'appliquent :



Ne rien écrire dans ce tableau.

- ① **Une feuille A4** recto-verso manuscrite est autorisée.
- ② **L'usage** de tout matériel électronique, sauf calculatrice, est strictement interdit.
- ③ **La rigueur** de la rédaction entrera pour une part importante dans la notation.

Exercice	Barème	Note
1	8	
2	7	
3	5	
Total	20	

**Exercice N°1**

(8 points)

Déterminez la fonction de transfert pour chacune des représentations d'état suivantes :

(a) (2 points)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (2)$$

C'est la forme observable. La fonction de transfert est donc :

$$\mathcal{G}_1(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$



(b) (2 points)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (3)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + 0.5 u(t) \quad (4)$$

C'est la forme commandable. La fonction de transfert s'écrit :

$$\mathcal{G}_2(s) = 0.5 - \frac{s^2}{s^3 - s^2 + 1}$$

(c) (2 points)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (5)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0.25 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (6)$$

C'est la forme modale. La fonction de transfert est alors :

$$\mathcal{G}_3(s) = \frac{-1}{s-1} + \frac{0.25}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$

(d) (2 points)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (7)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (8)$$

La fonction de transfert se calcule comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_4(s) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_C \left( s\mathbb{I}_2 - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}_A \right)^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_B \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^2} \\ \mathcal{G}_4(s) &= \frac{2s-3}{s^2-3} \end{aligned}$$

**Exercice N°2**

(7 points)

Soit la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (9)$$

(a) (1 point) Étudiez la stabilité du système.

Le système est de 2<sup>nd</sup> ordre. On dénote par  $s_1$  et  $s_2$  ses deux pôles. Nous avons alors :  $\det(A) = 1 = s_1 s_2 > 0$  &  $\text{trace}(A) = -2 = s_1 + s_2 < 0$ . Les deux racines sont à parties réelles négatives → Ce système est stable.

(b) (1 point) Étudiez la commandabilité du système.



La matrice de commandabilité est donnée par :

$$\begin{aligned}\xi(A, B) &= \begin{bmatrix} B & AB \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Rang de  $\xi(A, B)$  est égal à 2  $\rightarrow$  Ce système est complètement commandable.

- (c) (2 points) Afin d'améliorer la dynamique de ce système, nous concevons une commande par retour d'état, en régime libre, de la forme :

$$u(t) = -Lx(t) \quad (10)$$

Calculez  $L$  afin de garantir une dynamique en boucle fermée caractérisée par la valeur propre double suivante :  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ .

$$\begin{aligned}A - BL &= A - B \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}}_L \\ &= \begin{bmatrix} -1 - l_1 & 1 - l_2 \\ -l_1 & -1 - l_2 \end{bmatrix} \\ \begin{cases} \text{trace}(A - BL) &= -2 - l_1 - l_2 &= -4 \\ \det(A - BL) &= 1 + 2l_1 + l_2 &= 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l_1 &= 1 \\ l_2 &= 1 \end{cases}\end{aligned}$$

- (d) (1 point) Étudiez l'observabilité du système.

La matrice d'observabilité est donnée par :

$$O(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$



Rang de  $O(A, C)$  est égal à 2  $\rightarrow$  Système observable

- (e) (2 points) L'état  $x$  n'est pas mesurable. Synthétisez un observateur de Luenberger qui permet de délivrer une valeur approchée  $\hat{x}$  de  $x$ , caractérisé par une dynamique double placée en  $-4$ .

Rappelons la définition de l'estimateur de Luenberger :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ &= (A - KC)\hat{x} + Bu(t) + Ky(t)\end{aligned}$$

La matrice d'état de cet observateur est :

$$\begin{aligned}A - KC &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 - k_1 & 1 - k_1 \\ -k_2 & -1 - k_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons :

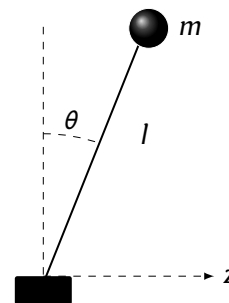
$$\begin{cases} \text{trace}(A - KC) = -2 - k_1 - k_2 = -8 \\ \det(A - KC) = 1 + k_1 + 2k_2 = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 = -3 \\ k_2 = 9 \end{cases}$$

### Exercice N°3

(5 points)

Un pendule inversé de masse  $m$  est fixé au bout d'une tige rigide de longueur  $l$  (sans masse) (*masse  $m$  vers le haut, tige vers le bas*). L'autre extrémité de la tige est fixée sur une table vibrante horizontalement.  $\theta$  est l'angle fait avec la verticale.

On se propose de stabiliser cette structure (dans un plan) autour de son équilibre instable. La commande  $u$  est l'accélération horizontale  $z$  de la table inférieure, qui se déplace le long d'une droite et a pour abscisse  $z$ .







La dynamique est donnée par :

$$ml\theta^{(2)} = mg \sin(\theta) - m \cos(\theta)u(t) \quad (11)$$

avec  $g$  dénote l'accélération de la pesanteur. On prend les variables d'état suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \theta^{(1)} \end{cases}$$

(a) (1 point) Donnez l'expression de  $\dot{x}_1 = \mathcal{F}_1(x_1, x_2, u)$ .

$$\dot{x}_1 = x_2$$

(b) (1 point) Donnez l'expression de  $\dot{x}_2 = \mathcal{F}_2(x_1, x_2, u)$ .

$$\dot{x}_2 = \frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{1}{l} \cos(x_1) u(t)$$

(c) (2 points) Linéarisez ce système autour de l'équilibre  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $\bar{u} = 0$ .

On cherche d'abord les dérivées partielles de  $\mathcal{F}_2$  par rapport aux variables  $x_1, x_2$  &  $u$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1} = \frac{g}{l} \cos(x_1) + \frac{1}{l} \sin(x_1) u(t) \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial u} = -\frac{1}{l} \cos(x_1) \end{cases}$$



Autour du point de fonctionnement, ces quantités se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1} \big|_{(\bar{x}, \bar{u})} = \frac{g}{l} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2} \big|_{(\bar{x}, \bar{u})} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial u} \big|_{(\bar{x}, \bar{u})} = -\frac{1}{l} \end{cases}$$

La représentation d'état linéarisée est :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{l} \end{bmatrix}}_B u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C x(t) \end{aligned}$$

- (d) (1 point) Peut-on ramener à zéro tout état non nul du système linéarisé? Justifiez votre réponse.

La matrice de commandabilité du système linéarisé est donnée par :

$$\begin{aligned} \xi(A, B) &= \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rang de  $\xi(A, B)$  est égal à 2  $\rightarrow$  Ce système est complètement commandable.  
On peut ramener à zéro et en temps fini tout état initial de ce système linéarisé.

-----

Ce document comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7. Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Le sujet est constitué de 4 exercices qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Les règles suivantes s'appliquent :



Ne rien écrire dans ce tableau.

- ① **Une feuille A4** recto-verso manuscrite est autorisée.
- ② **L'usage** de tout matériel électronique, sauf calculatrice, est strictement interdit.
- ③ **La rigueur** de la rédaction entrera pour une part importante dans la notation.

Exercice	Barème	Note
1	6	
2	4	
3	4	
4	6	
Total	20	

**Exercice N°1**

(6 points)

Proposez une représentation d'état possible pour chacune des fonctions de transfert suivantes :

(a) (2 points)

$$\mathcal{G}_1(s) = \frac{3s + 1}{0.5s^2 + 0.5} \quad (1)$$

La fonction de transfert  $\mathcal{G}_1$  peut s'écrire sous cette forme :

$$\mathcal{G}_1(s) = \frac{6s + 2}{s^2 + 1}$$

Il en résulte la forme commandable suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix} \quad D = 0$$



(b) (2 points)

$$\mathcal{G}_2(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{0.3}{(s+1)^3} + \frac{1.45}{s} - \frac{0.5}{(s-1)^2} \quad (2)$$

L'ordre de la fonction de transfert  $\mathcal{G}_2$  est :  $6 = 3 + 1 + 2$ . Ses pôles sont :

Pôle	Ordre de multiplicité
-1	3
0	1
1	2

Il en résulte la forme modale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.3 & 1.45 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

(c) (2 points)

$$\mathcal{G}_3(s) = \frac{s^2 + s + 1}{0.25s^2 + s + 0.5} \quad (3)$$

La fonction de transfert  $\mathcal{G}_3$  peut s'écrire sous cette forme :

$$\mathcal{G}_3(s) = 4 - \frac{12s + 4}{s^2 + 4s + 2}$$

Il en résulte la forme commandable suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -4 & -12 \end{bmatrix} \quad D = 4$$

### Exercice N°2

(4 points)

Soit la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4)$$

(a) (1 point) Étudiez la stabilité du système.

$$\det(A) = -1 \quad \& \quad \text{trace}(A) = -3 \rightarrow \text{Système instable.}$$

(b) (1 point) Étudiez la commandabilité du système.

$$\begin{aligned} \xi(A, B) &= \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rang de  $\xi(A, B)$  est égal à 2  $\rightarrow$  Système commandable

(c) (2 points) Afin de stabiliser le système et améliorer sa dynamique, nous concevons une commande par retour d'état en régime libre de la forme :

$$u(t) = -Lx(t). \quad (5)$$

Calculez  $L$  de sorte que les valeurs propres du système bouclé soient placées aux valeurs suivantes :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -2$ .



$$A - BL = A - B \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}}_L$$

$$= \begin{bmatrix} -3 - l_1 & 1 - l_2 \\ 1 - l_1 & -l_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{trace}(A - BL) = -3 - l_1 - l_2 = -3 \\ \det(A - BL) = 4l_2 + l_1 - 1 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l_1 = -1 \\ l_2 = 1 \end{cases}$$

### Exercice N°3

(4 points)

On considère le système suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (6)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (7)$$

(a) (1 point) Ce système est-il stable? Justifiez.

$$\begin{cases} \text{trace}(A) = -5 \\ \det(A) = 6 \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique de  $A$  est :

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 \underbrace{+5}_{-\text{trace}(A)} \lambda \underbrace{+6}_{+\det(A)} = (\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

Les deux pôles de  $A$  sont alors  $-2$  et  $-3$ . Le système est donc stable puisque les deux racines sont à parties réelles négatives.

(b) (1 point) Étudiez l'observabilité du système.



$$O(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Rang de  $O(A, C)$  est égal à  $-1 \neq 0 \rightarrow$  Système observable



Un système dans sa forme d'état observable est toujours observable.

- (c) (2 points) L'état  $x$  n'est pas mesurable. Synthétisez un observateur de type Luenberger qui permet de délivrer une valeur approchée  $\hat{x}$  de  $x$ , caractérisé par une dynamique double placée en  $-5$ .

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ &= (A - KC)\hat{x} + Bu(t) + Ky(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - KC &= \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -6 - k_1 \\ 1 & -5 - k_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{trace}(A - KC) = -5 - k_2 = -10 \\ \det(A - KC) = 6 + k_1 = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 19 \\ k_2 = 5 \end{cases}$$

#### Exercice N°4

(6 points)

On considère le système décrit par la fonction de transfert suivante :

$$\mathcal{H}(s) = \frac{s + 10}{s(s + \alpha)(s + \beta)}, \quad (8)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux paramètres réels non nuls ( $\alpha \neq 0$  et  $\beta \neq 0$ ).

- (a) (1 point) Déterminez les pôles de  $\mathcal{H}$ . Que dire de la stabilité du système? Justifiez.



Les pôles de la fonction  $\mathcal{H}$  sont 0,  $-\alpha$  et  $-\beta$ .

$$\begin{cases} \alpha < 0 \text{ ou } \beta < 0 & \text{Le système est instable.} \\ \alpha \geq 0 \text{ et } \beta \geq 0 & \text{Le système est à la limite de stabilité.} \end{cases}$$

- (b) (2 points) Retrouvez la représentation d'état sous la forme canonique de commandabilité.

Il faut développer la fonction  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}(s) = \frac{s + 10}{s^3 + (\alpha + \beta)s^2 + \alpha\beta s}$$

Il en résulte la forme commandable suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha\beta & -\alpha - \beta \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

- (c) ( $1\frac{1}{2}$  points) Le système mis en équation d'état est-il commandable? Justifiez.

La forme canonique de commandabilité est toujours commandable. Pour vérifier, il suffit de calculer le rang de la matrice de commandabilité. Elle est donnée par  $\xi(A, B) = [B \mid AB \mid A^2B]$  :

$$\xi(A, B) = \left[ \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha - \beta \\ 1 & -\alpha - \beta & -\alpha\beta + (\alpha + \beta)^2 \end{array} \right]$$



$A^2B = A(AB)$ . Pas besoin de calculer  $A^2$ .

$$\det(\xi(A, B)) = -1 \neq 0.$$

Le système, tel que représenté par la forme canonique de commandabilité, est commandable car  $\xi(A, B)$  est de rang plein.





(d) ( $1\frac{1}{2}$  points) Pour quelles valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  le système est-il observable?

La matrice d'observabilité est donnée par  $O(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$  :

$$O(A, C) = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & -\alpha\beta & 10 - \alpha - \beta \end{bmatrix}$$



$CA^2 = (CA)A$ . Pas besoin de calculer  $A^2$ .

$$\det(O(A, C)) = 10(100 - 10\alpha - 10\beta + \alpha\beta).$$

Ce système est observable ssi  $O(A, C)$  est de rang plein.

$$\det(O(A, C)) = 0 \quad \text{ssi} \quad \left( \underbrace{100 - 10\alpha - 10\beta + \alpha\beta}_{= (10-\alpha)(10-\beta)} \right) = 0$$

$\det(O(A, C))$  est nul ssi  $\alpha = 10$  ou  $\beta = 10$ . Le système est complètement commandable ssi  $\alpha \neq 0$  et  $\beta \neq 10$ .



Le système décrit par la fonction de transfert  $\mathcal{H}$  est complètement commandable ou observable ssi la fonction  $\mathcal{H}$  est minimale (irréductible, i.e., pas de simplification zéro/pôle). Cette condition n'est vérifiée que pour  $\alpha \neq 10$  et  $\beta \neq 10$ .