

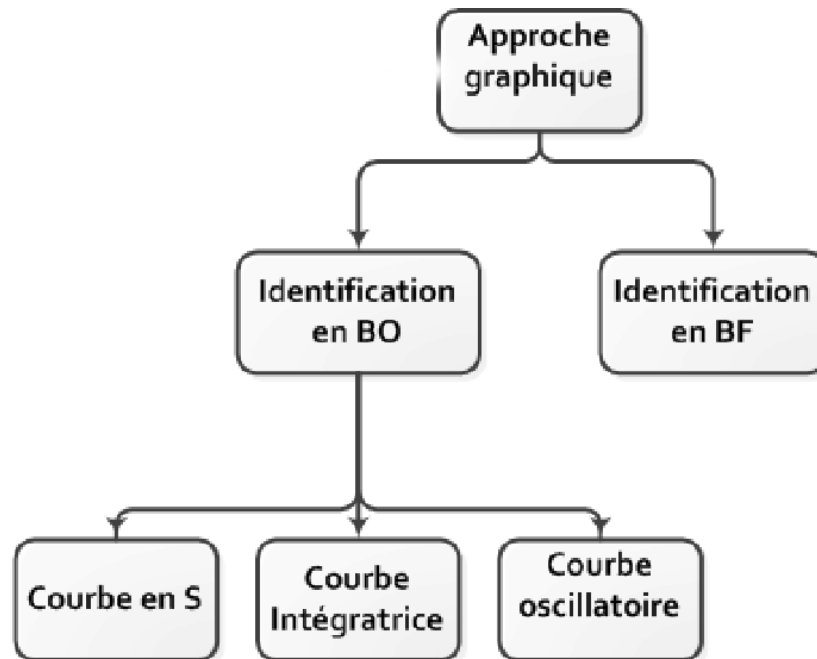
Modélisation des Systèmes

Notes de cours avec exercices corrigés^a

2020-2021

a. <https://github.com/a-mhamdi/isetbz/>

Abdelbacet Mhamdi
Dr.-Ing. en GE – Technologue en GE



- Strejc
- Strejc-Davoust
- Broïda
- De La Fuente
- Strejc-Davoust
- Rapide

Dépt. GE - Institut Supérieur des Études Technologiques de Bizerte

Σ

\int

$\frac{d}{dt}$

ω

J

À propos

Nous nous intéressons, dans ce module, au problème d'identification. Nous supposons que le modèle à identifier est connu et que ses paramètres sont identifiables. Il s'agit de présenter quelques algorithmes d'identification des systèmes linéaires continus.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Identification graphique	1
2.1	Analyse de courbe en S	1
2.1.1	Méthode de Strejc	1
2.1.2	Méthode de Strejc-Davoust	2
2.1.3	Méthode de Broïda	4
2.1.4	Méthode de De La Fuente	4
2.2	Analyse de courbe intégratrice	5
2.2.1	Méthode de Strejc-Davoust	5
2.2.2	Méthode rapide	7
2.3	Analyse de courbe avec oscillations	8
2.4	Identification en boucle fermée	9
2.5	Applications	11
2.6	Avantages et limitations	17
3	Conclusion	18

1 Introduction

L'identification d'un système dynamique réel (appelé objet) consiste à proposer une structure entre son entrée et sa sortie (appelé modèle), à partir de la connaissance expérimentale du couple entrée-sortie. Le modèle ainsi trouvé doit, dans son domaine de validité, reproduire un comportement identique à celui du système réel. Le modèle peut être un système physique (système physique équivalent ou modèle réduit) ou bien un système abstrait (modèle mathématique) [HA07].

Nous nous intéressons au modèle mathématique. Dans ce modèle, les coefficients caractérisant la structure de l'objet sont explicités, ceci en se basant sur un ensemble des méthodes graphiques (On en cite principalement les approches d'analyse de courbe en S, courbe intégratrice et oscillatoire).

2 Identification graphique

L'identification graphique consiste à proposer un modèle mathématique équivalent à un système physique, et cela, à travers des essais expérimentaux menés sur le processus en cours de fonctionnement [Pro97]. La méthode considérée convient alors si l'allure de la réponse présente une forme particulière, courbe en S, intégratrice ou oscillatoire. L'identification peut se faire soit en boucle ouverte soit en boucle fermée.

2.1 Analyse de courbe en S

L'ensemble des méthodes, explicitées dans ce paragraphe, peuvent s'appliquer à un système dont la réponse indicielle, représentée par la figure 1, ne présente pas de dépassement.

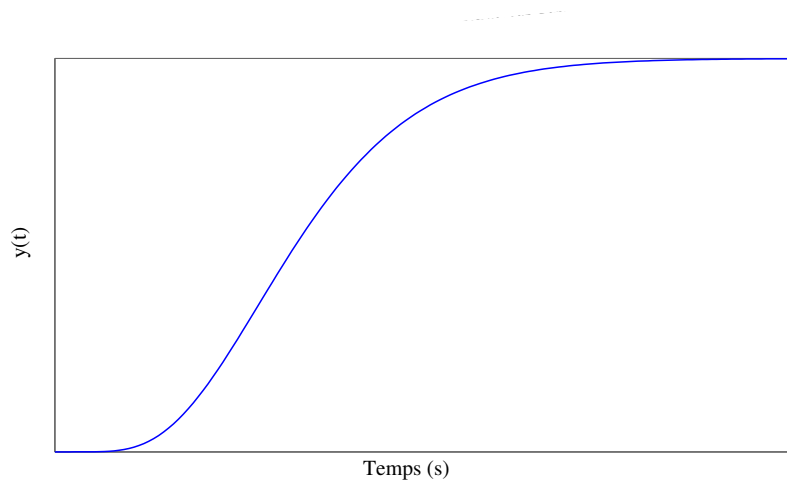


FIGURE 1 – Courbe en S

On se propose dans la suite de décrire de façon exhaustive le principe de chaque méthode.

2.1.1 Méthode de Strejc

Cette méthode décrit le système qui présente un retard par une fonction de transfert de dimension finie.

La fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{1}{(1 + Ts)^n}. \quad (1)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

K Gain statique,

T Constante de temps,

n Ordre du système.

Pour identifier le système, la méthode consiste à :

1. Tracer la tangente au point d'inflexion pour déterminer les deux valeurs T_a et T_b . Voir figure 2 pour la détermination de deux constantes.

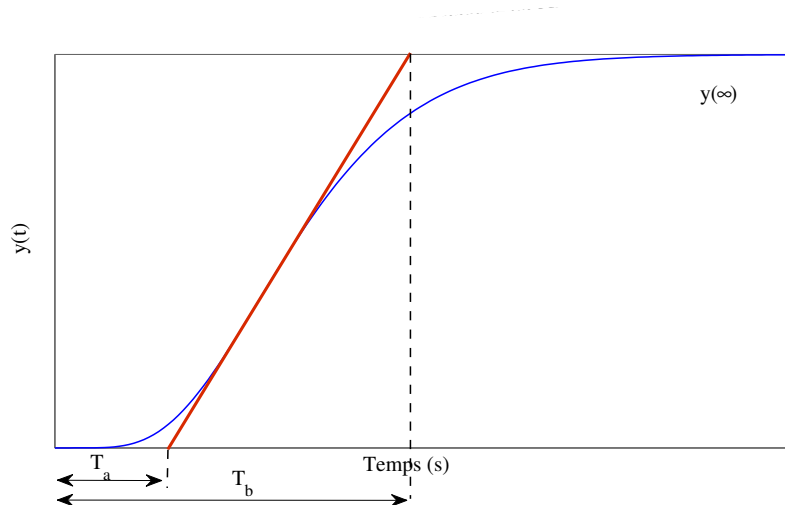


FIGURE 2 – Réponse temporelle d'un système linéaire

2. En se référant au nomogramme de la figure 3, le calcul de $\frac{T_a}{T_b}$ permet de déterminer l'ordre n et en joignant le point correspondant au point caractérisant T_b on en déduit la valeur de T .

2.1.2 Méthode de Strejc-Davoust

Le système étudié sera identifié à la fonction de transfert de la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{e^{-\tau s}}{(1 + Ts)^n} \quad (2)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

K Gain statique,

T Constante de temps,

τ Retard,

n Ordre du système.

On procède d'abord par le tracé de la tangente au point d'inflexion pour déterminer les deux valeurs T_a et T_b , indiquées sur la figure 4.

En se basant sur les mesures de T_a et de T_b , indiquées sur la table 1, on suit les étapes suivantes pour déterminer les paramètres identifiés :

Étape I déterminer n de la table à partir de la valeur de $\frac{T_a}{T_b}$,

Étape II déterminer T de la table à partir de la valeur de $\frac{T_b}{T}$,

Étape III déterminer $\tau = T_a - \frac{T_a}{T} \Big|_{Table} T$.

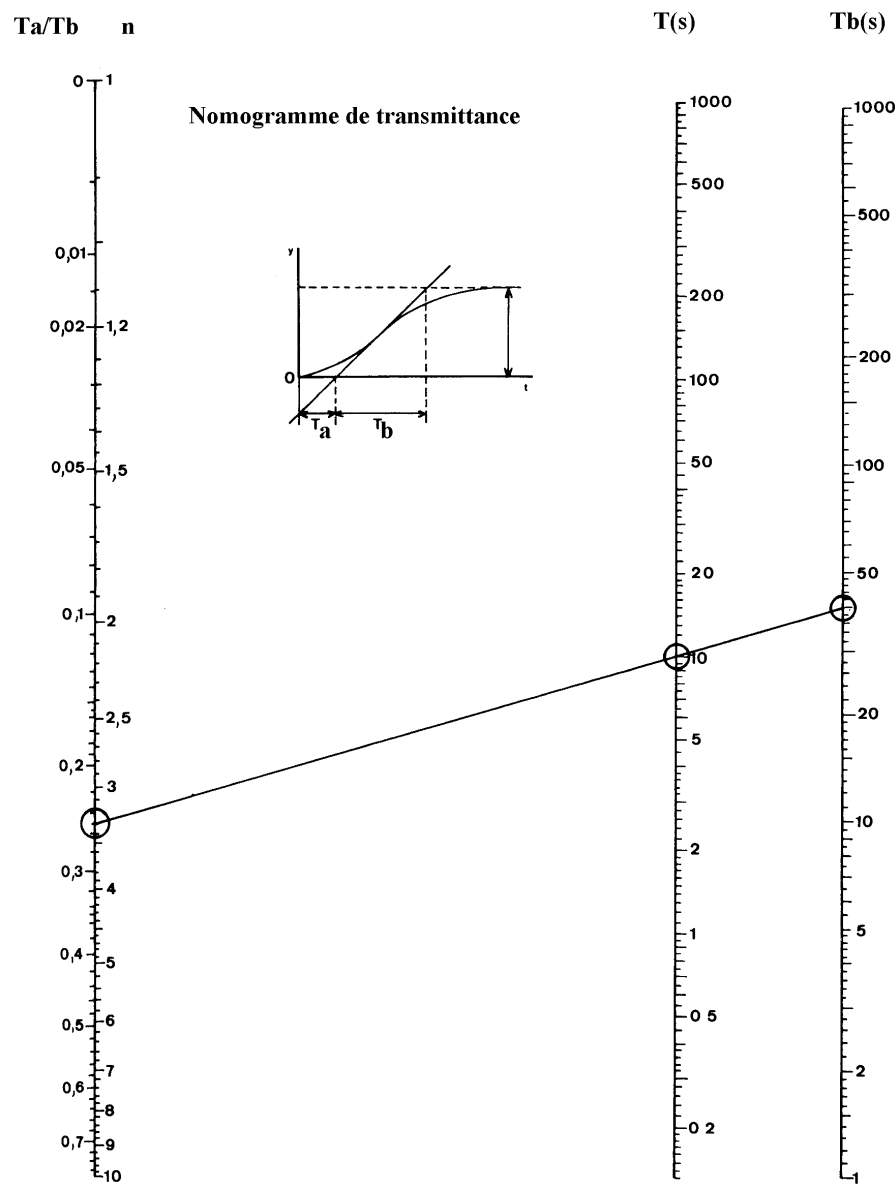


FIGURE 3 – Nomogramme pour modèle de Strejc

TABLE 1 – Tableau pour déterminer le modèle de Strejc-Davoust

n	$\frac{T_a}{T}$	$\frac{T_b}{T}$	$\frac{T_a}{T_b}$
1	0	1	0
2	0.28	2.72	0.10
3	0.80	3.70	0.22
4	1.42	4.46	0.32
5	2.10	5.12	0.41
6	2.81	5.70	0.49

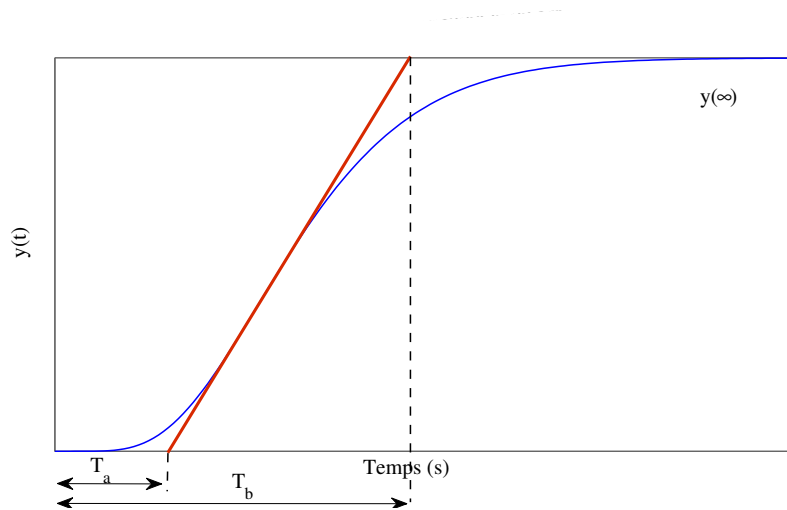


FIGURE 4 – Analyse d'une courbe en S par la méthode de Strejc-Davoust

2.1.3 Méthode de Broïda

Le modèle de Broïda consiste à approcher le comportement du système réel par un premier ordre avec un retard.

La fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{e^{-\tau s}}{(1 + Ts)} \quad (3)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

K Gain statique,

T Constante de temps,

τ Retard,

n Ordre du système.

Le principe diffère par rapport à la méthode de Strejc-Davoust dans le sens où on ne cherche pas à faire coïncider la tangente au point d'inflexion mais plutôt d'ajuster les paramètres T et τ pour que les courbes relatives à la réponse du système et du processus aient deux points communs. Ces points, comme l'indique la figure 5, correspondent à 28% et à 40%.

La résolution mathématique donne alors :

Constante de temps $T = 5.5(T_b - T_a)$,

Retard $\tau = 2.8T_a - 1.8T_b$.

2.1.4 Méthode de De La Fuente

La fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{e^{-\tau s}}{(1 + Ts)} \quad (4)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

K Gain statique,

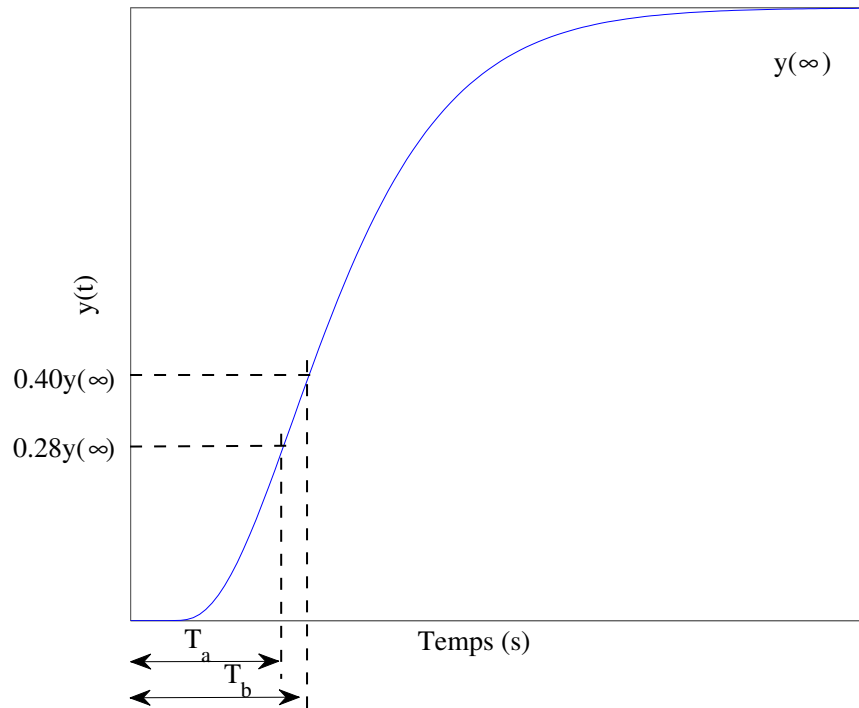


FIGURE 5 – Analyse d'une courbe en S par la méthode de Broïda

T Constante de temps,

τ Retard.

Le principe est identique à celui de la méthode de Broïda, voir figure 6, mais elle diffère dans le choix des deux points communs.

La résolution donne donc :

Constante de temps $T = T_b - T_a$

Retard $\tau = 1.31T_a - 0.31T_b$.

2.2 Analyse de courbe intégratrice

Deux méthodes seront explicitées dans ce paragraphe, qui peuvent s'appliquer à un système dont la réponse est variable à une entrée constante, représentée par la figure 7. Elle est dite alors évolutive.

2.2.1 Méthode de Strejc-Davoust

La fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{e^{-\tau s}}{s(1 + Ts)^n}. \quad (5)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

K Gain statique,

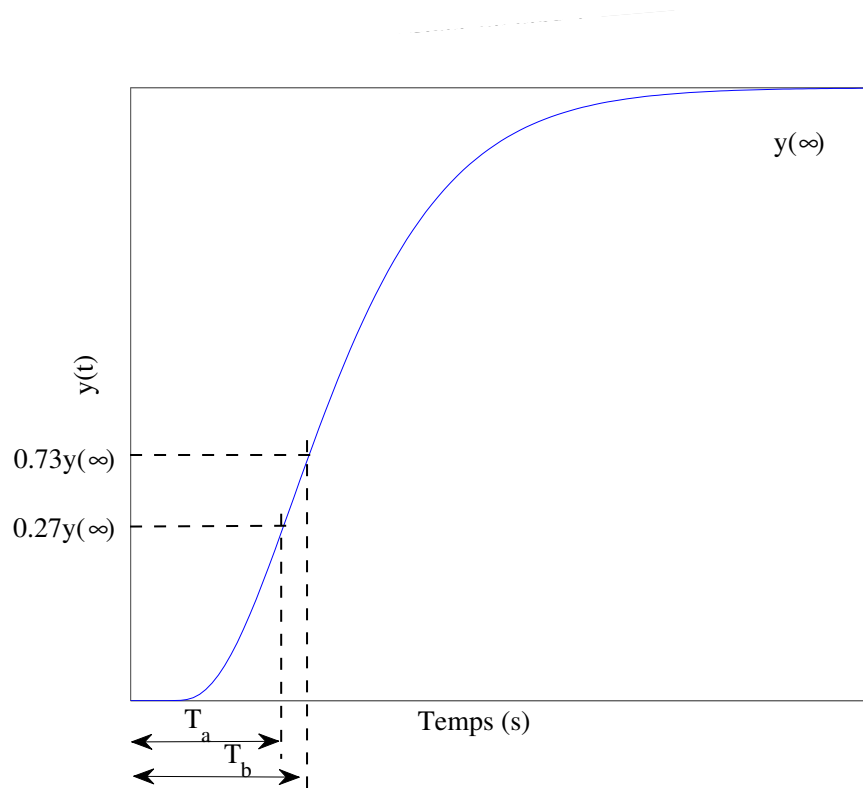


FIGURE 6 – Analyse d'une courbe en S par la méthode de De La Fuente

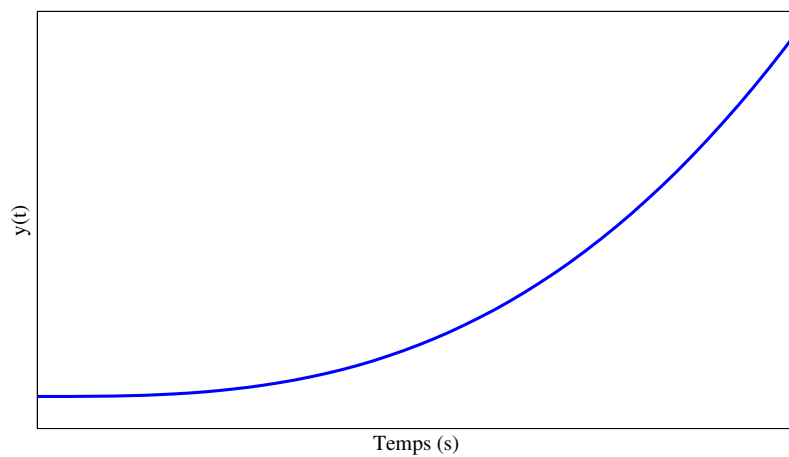


FIGURE 7 – Courbe Intégratrice

T Constante de temps,

τ Retard,

n Ordre du système.

Pour les déterminer, on procède comme suit :

On trace l'asymptote Δ_1 à la courbe $y(t)$ de la figure 8, Δ_2 est sa parallèle passant par le point A' . La droite $A'A$ est parallèle

à l'axe du temps. La droite AC , perpendiculaire à $A'A$ coupe la courbe $y(t)$ en un point B .

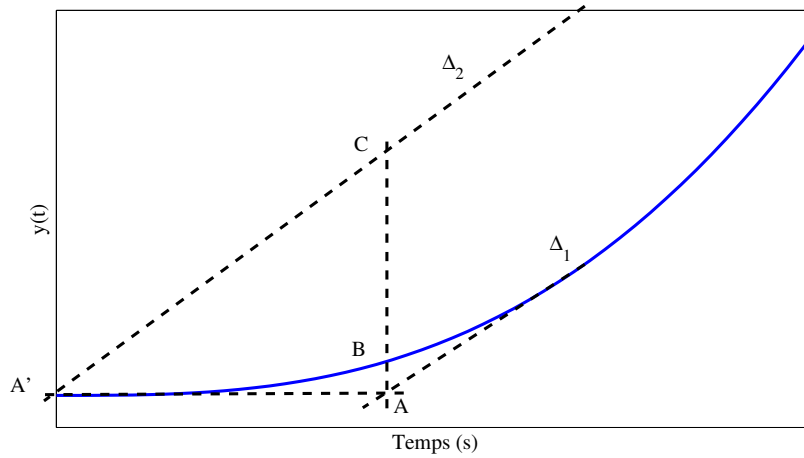


FIGURE 8 – Analyse d'une courbe intégratrice par la méthode de Strejc-Davoust

On calcule d'abord le rapport $\frac{AB}{AC}$. Ce rapport permet de déterminer la valeur de l'indice n à partir de la figure 9 [Pro97].

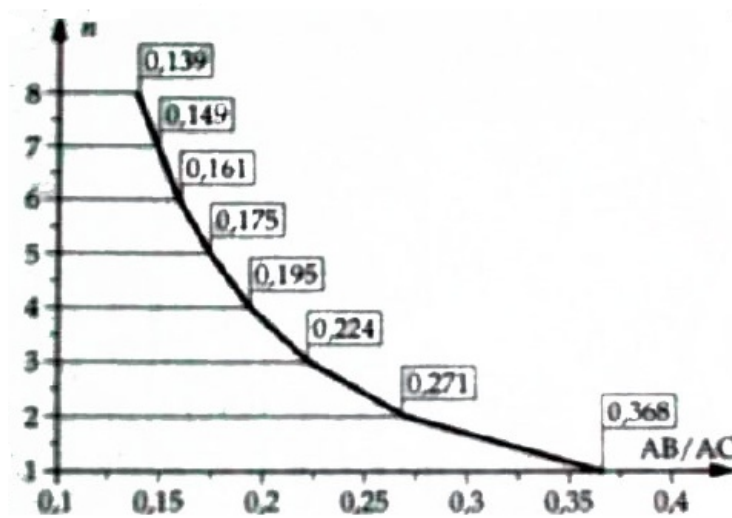


FIGURE 9 – Courbe donnant la valeur de n en fonction du rapport $\frac{AB}{AC}$

Selon la nature de n (entier ou non), on calcule les valeurs de T et de τ :

- Si n est entier, la constante de temps est $T = \frac{A'A}{n}$ et le retard τ est nul.
- Si n n'est pas entier, on détermine le nouveau rapport $\frac{AB}{AC}$ qui correspond à la partie entière de n . Puis, on déplace Δ_2 parallèlement à Δ_1 vers Δ_1 afin de garantir ce rapport. La valeur du retard τ correspond à cette translation. Le calcul de T est $A'A = \tau + nT$.

Tandis que le gain dynamique K est donnée par la relation suivante : $K = \frac{AC}{A'A}$.

2.2.2 Méthode rapide

La fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{e^{-\tau s}}{s}. \quad (6)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

K Gain dynamique,

τ Retard

Le principe d'identification consiste à rapprocher la courbe initiale à une rampe de pente k retardée de τ .

Pour déterminer le temps mort τ , on trace l'asymptote Δ_1 à la courbe $y(t)$ indiquée sur la figure 10. Le retard τ est représenté par $A'A$. Le gain K correspond au coefficient directeur de la droite Δ_1 [Pro97].

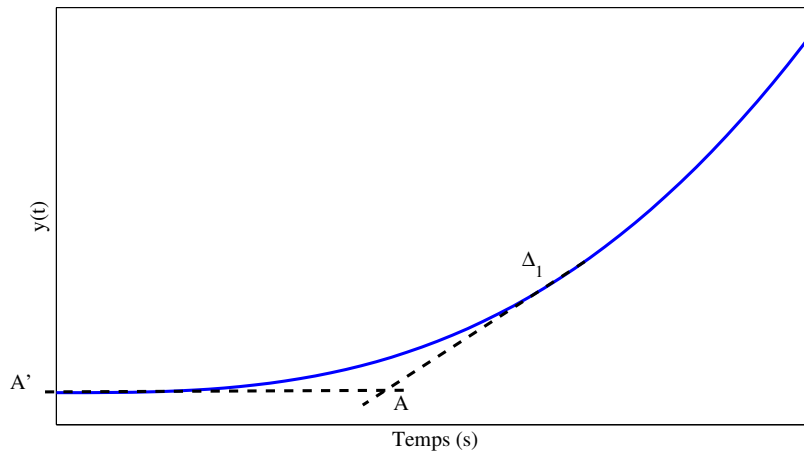


FIGURE 10 – Analyse d'une courbe intégratrice par une méthode rapide

2.3 Analyse de courbe avec oscillations

Lorsque la réponse indicielle d'un système présente des oscillations amorties (Figure 11), il est possible d'envisager une modélisation mathématique par une fonction de transfert de deuxième ordre.

La fonction de transfert s'écrit alors sous la forme suivante :

$$H(s) = \frac{K\omega_0^2 e^{-\tau s}}{(\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 s + s^2)}. \quad (7)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

K Gain statique,

ξ Coefficient d'amortissement,

ω_0 Pulsation propre,

τ Retard.

Afin de déterminer ces paramètres, on mesure d'abord sur la courbe indiquée sur la figure 12, le premier dépassement D_1 , la pseudo-pulsation T et le temps t_1 qui correspond à D_1 .

On rappelle ci-dessous les relations théoriques du second ordre donnant D_1 et T :

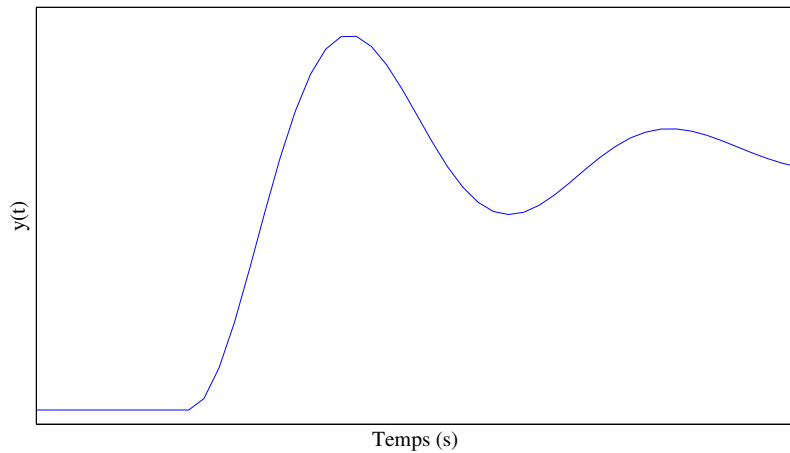


FIGURE 11 – Courbe avec oscillations

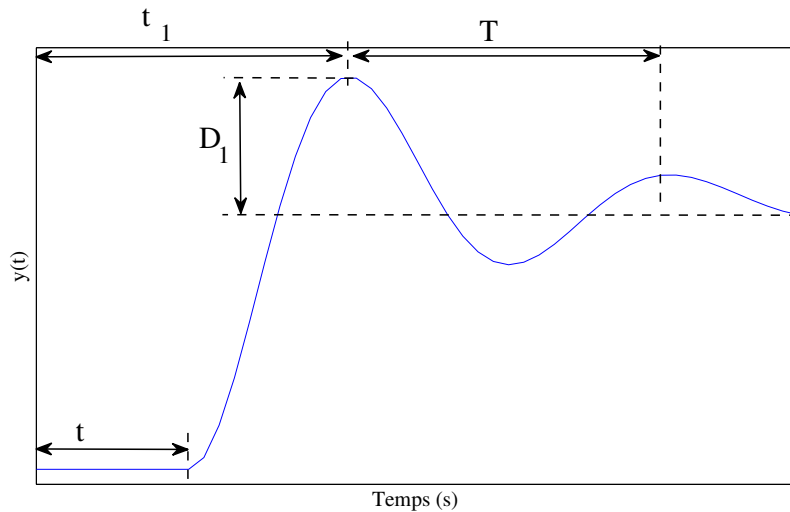


FIGURE 12 – Analyse d'une courbe avec oscillations

1^{er} Dépassement $D_1 = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$,

Pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$.

À partir de ces deux équations, on peut calculer le coefficient ξ et ω_0 . La mesure de t_1 donne la valeur du retard τ qui vaut $t_1 - \frac{T}{2}$. Le gain K est donné par : $K = \frac{y(\infty)}{E_0}$.

2.4 Identification en boucle fermée

Il est possible dans certains cas d'avoir le procédé bouclé avec un régulateur installé dans sa chaîne d'action, il est préférable dans ce cas de procéder par faire l'identification en chaîne fermée. Cette méthode présente également un avantage majeur c'est qu'on n'a pas besoin de mettre le régulateur hors service. L'idée de cette méthode repose sur deux essais : le premier convient pour savoir si le procédé est naturellement stable et le second essai consiste à ramener le système vers sa limite de stabilité en faisant augmenter le gain du système bouclé jusqu'à l'apparition des oscillations sinusoïdales juste entretenues.

Soit le système bouclé de la figure 13 :

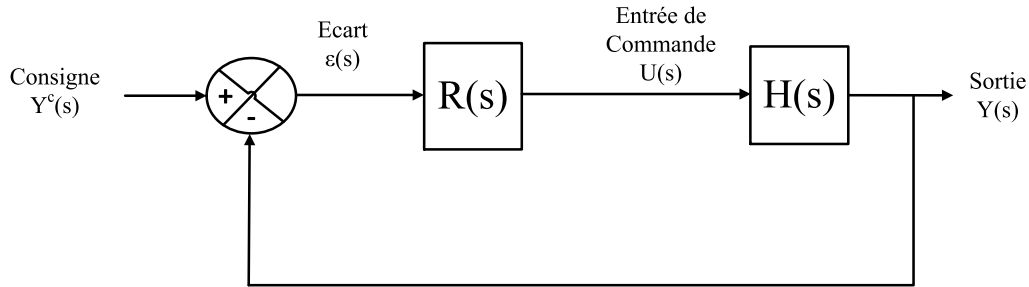


FIGURE 13 – Système en Boucle fermée

Le régulateur est à action proportionnelle avec un gain G_r faible (1 ou 0.5) [Pro97].

► 1^{er} essai

On définit la classe d'un système par le nombre d'intégrations que présente sa fonction de transfert.

Le tableau 2 indique l'écart entre l'entrée et la sortie en régime permanent pour deux types d'excitation : échelon et rampe.

TABLE 2 – Précision d'un système asservi linéaire continu

Entrée	Classe du système		
	Classe 0	Classe 1	Classe > 2
Échelon	$\varepsilon_p = \frac{E_0}{1+K}$	$\varepsilon_p = 0$	$\varepsilon_p = 0$
Rampe	$\varepsilon_v = +\infty$	$\varepsilon_v = \frac{a}{K} \%$	$\varepsilon_v = 0 \%$

$K = G_r G_p$ où G_r est gain de $R(s)$ et G_p est celui du procédé.

L'amplitude d'un échelon est E_0 et la pente d'une rampe est a .

Pour cela, on part du principe suivant : On excite le système par un échelon d'amplitude E_0 :

- Si la mesure ne rejoint pas la consigne, il reste alors en régime permanent un écart de position qui vaut $\varepsilon_p = \frac{E_0}{1+K}$.
Le procédé étudié est de classe 0 et de gain statique $G_p = \frac{K}{G_r}$.
- Si la mesure rejoint la consigne, le procédé étudié présente des intégrations. Pour savoir le nombre d'intégrations, on peut introduire une rampe de pente a .
 - Si la mesure ne rejoint pas la consigne, il reste alors en régime permanent un écart de traînage qui vaut $\varepsilon_v = \frac{a}{K}$, le procédé étudié est de classe 1 et de gain $G_p = \frac{a}{\varepsilon G_r}$.
 - Il y'a plus qu'une intégration si l'écart ε est nul.

► 2^{ème} essai

On augmente progressivement la valeur du gain G_r du régulateur et on impose à chaque fois une perturbation qu'on maintient pour courte durée. Puis, on l'annule, c'est à dire, qu'on remet de nouveau la consigne à sa valeur initiale. On continue l'expérience jusqu'à la mise du procédé en oscillation juste entretenue. Le signal de sortie est représenté sur la figure 14.

La valeur du gain qui permet d'avoir une sortie harmonique est appelée gain critique, on la note G_{rc} .

Soit T_{osc} la période d'oscillation.

Pour avoir le phénomène de pompage, il faut que le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte coïncide avec le point $(-1, 0)$, c'est à dire que les deux conditions suivantes sont alors vérifiées :

$$|G_{rc}H(j\omega_{osc})| = 1 \text{ et } \text{Arg}[G_{rc}H(j\omega_{osc})] = -\pi.$$

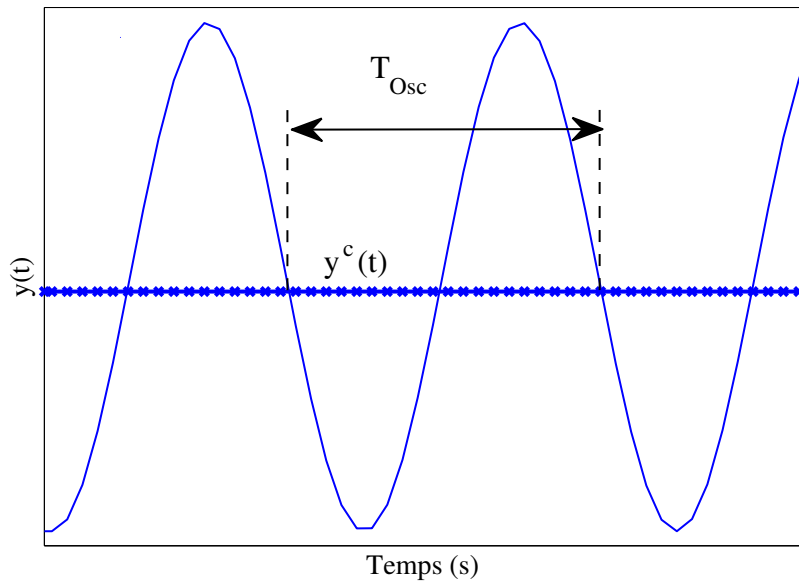


FIGURE 14 – Sortie en oscillation juste entretenue

À partir de deux conditions citées précédemment, Broïda proposa un modèle, s'appliquant à un système naturellement stable de gain statique G_p , dont la fonction de transfert est la suivante :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + \tau s}, \quad (8)$$

avec :

K Gain statique.

T Constante de temps,

τ Retard.

La résolution donne les paramètres estimés suivants :

$$K = G_p,$$

$$T = \frac{T_{osc}}{2\pi} \sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1},$$

$$\tau = \frac{T_{osc}}{2\pi} [\pi - \arctan(\sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1})].$$

2.5 Applications

Courbe en S L'objectif de cette partie est de tester les méthodes citées précédemment. Pour cela, on part d'un système initial représenté par la fonction de transfert suivante :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{S(s)}{E(s)} \\ &= \frac{100}{(s+4)(s+5)(s+1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

La réponse de ce système suite à une excitation indicielle unitaire est donnée par la figure 15 :

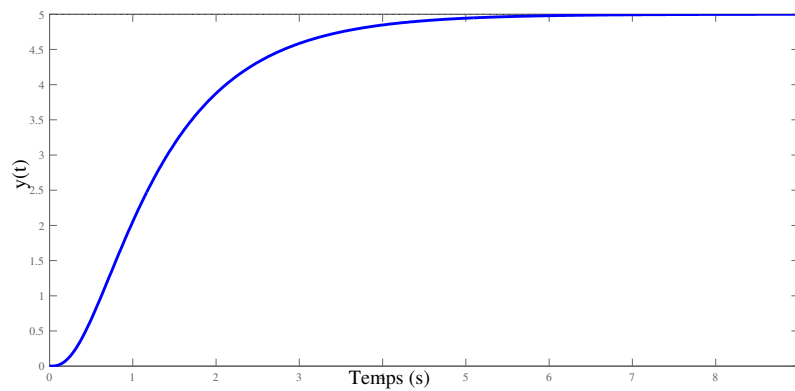


FIGURE 15 – Réponse indicielle du système de départ

Le gain statique est mesuré directement sur la courbe de sortie : $K = 5$.

On cherche par la suite à établir les modèles équivalents selon les différentes méthodes qu'on a déjà cité.

Modèle de Strejc

On rappelle ici le modèle équivalent de Strejc :

$$H(s) = \frac{K}{(1 + Ts)^n} \quad (10)$$

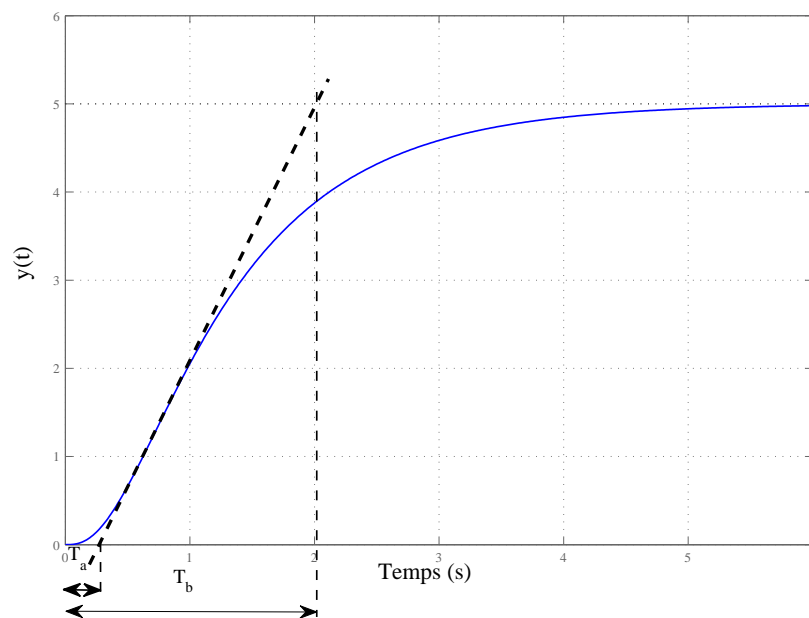


FIGURE 16 – Analyse de la réponse initiale par méthode de Strejc

On trouve :

$$T_a = 0.27 \text{ s et } T_b = 2.01 \text{ s.}$$

En se référant à la sous-section 2.1.1, on détermine les valeurs des paramètres de l'équation 10. Il s'agit d'un système de second ordre avec une constante de temps T égale à 0.7 s. La réponse du système identifié est représentée sur la figure 17.

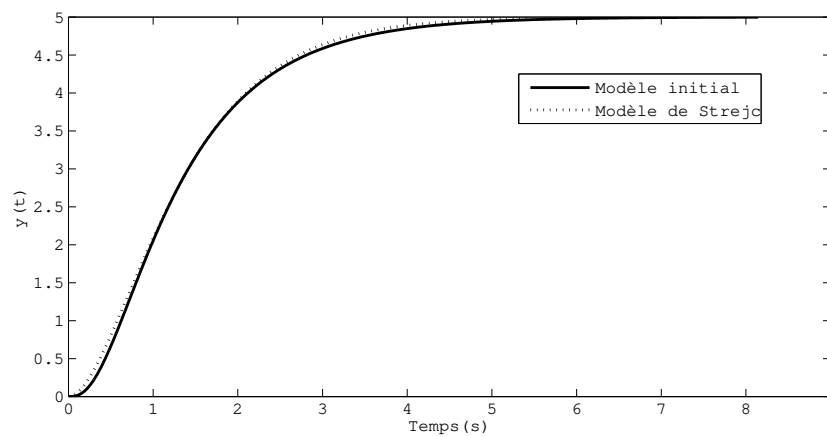


FIGURE 17 – Réponse du système initial et du système identifié

Modèle de Strejc-Davoust

On rappelle ici le modèle équivalent de Strejc-Davoust :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(1 + Ts)^n} \quad (11)$$

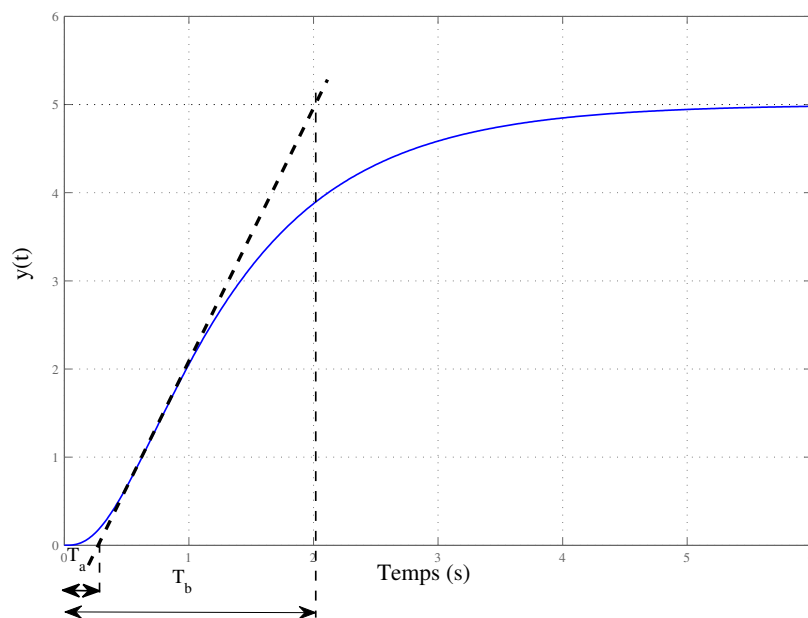


FIGURE 18 – Analyse de la réponse initiale par méthode de Strejc-Davoust

$$T_a = 0.27 \text{ s}$$

$$T_b = 2.01 \text{ s}$$

En se référant à la sous-sous section 2.1.2, on détermine les valeurs des paramètres de l'équation 11. Il s'agit d'un système de second ordre avec une constante de temps T égale à 0.73 s et un retard $\tau = 0.0665 \text{ s}$. La réponse du système identifié est représentée sur la figure 19.

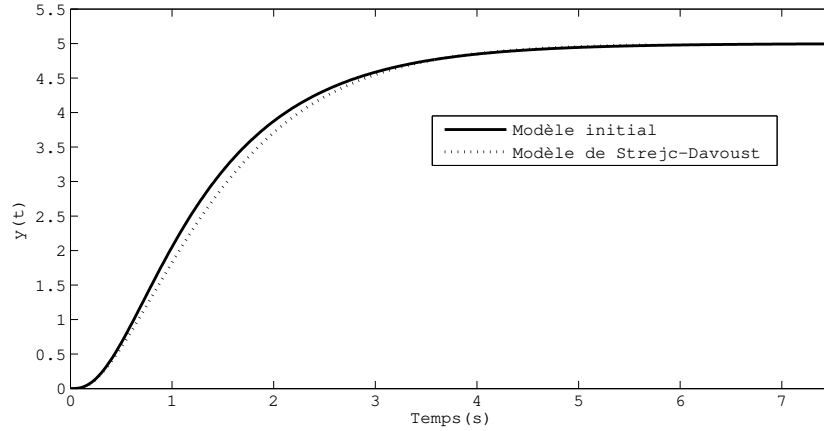


FIGURE 19 – Réponse du système initial et du système identifié

Modèle de Broïda

On rappelle ici le modèle équivalent de Broïda :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts}. \quad (12)$$

On trouve :

$$T_a = 0.78 \text{ s et } T_b = 0.98 \text{ s.}$$

En se référant à la sous-sous section 2.1.3, on détermine les valeurs des paramètres de l'équation 12. Il s'agit d'un système de premier ordre avec une constante de temps $T = 5.5 \times (T_b - T_a) = 1.1 \text{ s}$ et un retard $\tau = 2.8 \times T_a - 1.8 \times T_b = 0.42 \text{ s}$. La figure 21 donne les courbes de réponse du système réel et du modèle de Broïda.

La concordance des deux points qui correspondent à 28% et à 40% est bien vérifiée.

Modèle de De La Fuente

On rappelle ici le modèle équivalent de La Fuente :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts}. \quad (13)$$

On trouve :

$$T_a = 0.75 \text{ s et } T_b = 1.75 \text{ s.}$$

En se référant à la sous-sous section 2.1.4, on détermine les valeurs des paramètres de l'équation 13 :

$$T = T_b - T_a = 1 \text{ s,}$$

$$\tau = 1.31 \times T_a - 0.31 \times T_b = 0.44 \text{ s.}$$

La figure 23 donne les courbes de réponse du système réel et du modèle de De La Fuente. La concordance des deux points qui correspondent à 27% et à 73% est bien vérifiée.

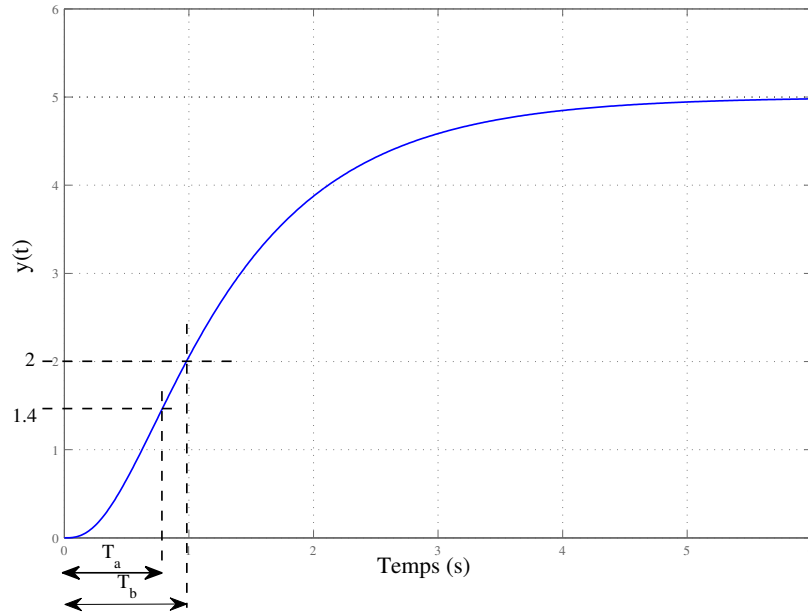


FIGURE 20 – Analyse de la réponse initiale par méthode de Broïda

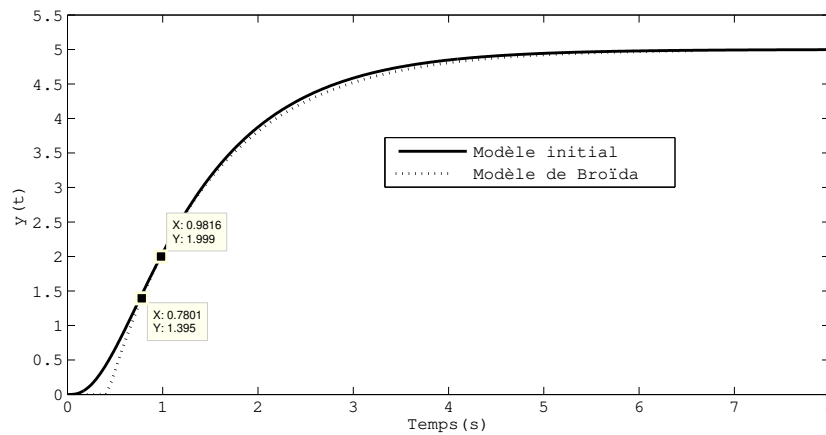


FIGURE 21 – Réponse réelle approchée par modèle de Broïda

Identification en boucle fermée On considère un système de deuxième ordre à numérateur non constant, décrit par la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{-0.1(s-1)}{(1+0.5s)^2}. \quad (14)$$

Ce système est mis en boucle fermée à retour unitaire, comme l'indique la figure 24, avec un correcteur où on supprime les actions dérivées ou intégrales du correcteur.

On procède par appliquer une entrée indicielle d'amplitude $E_0 = 10$, et on choisit un gain du régulateur $G_r = 1$. La figure 25 représente la réponse du système.

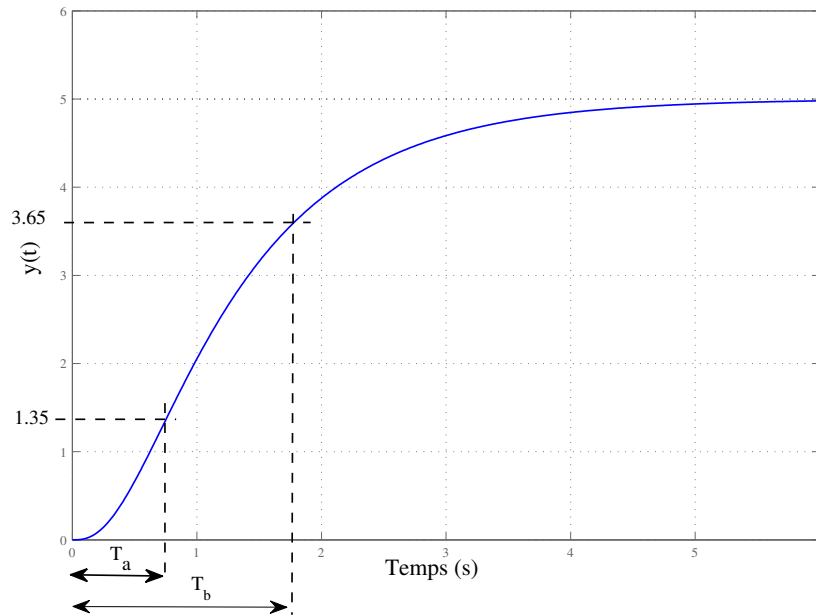


FIGURE 22 – Analyse de la réponse initiale par méthode de De La Fuente

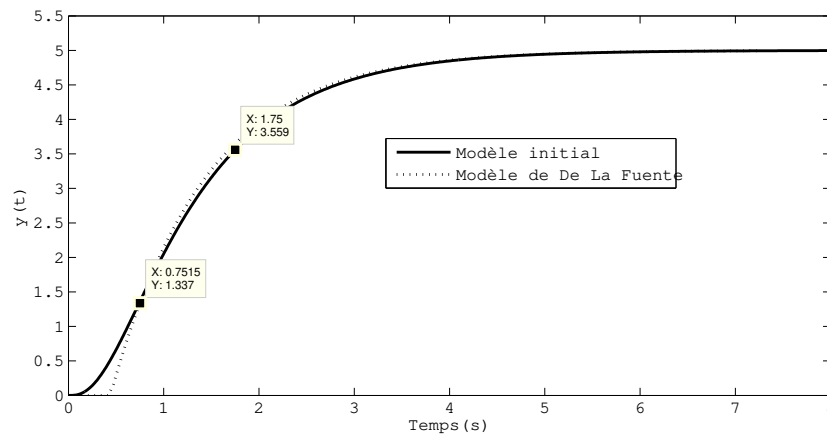


FIGURE 23 – Réponse réelle approchée par modèle de De La Fuente

FIGURE 24 – Système en BF

On remarque que la sortie ne rejoint pas la consigne, il reste un écart en régime permanent qui vaut $\varepsilon_s = 9.07$. Le système est donc de classe 0, il ne présente pas d'intégration. Ce procédé possède donc un gain statique $G_p = \frac{\frac{E_0}{\varepsilon_s} - 1}{G_r} = 0.102$.

On change par la suite le gain du régulateur G_r de façon à avoir des oscillations juste entretenues, on note alors la valeur du gain critique : $G_{rc} = 10$. Les oscillations de la sortie sont indiquées sur la figure 26 avec une période $T_{osc} = 2.228$ s.

L'objectif est d'identifier le système par un modèle de Broïda qui satisfait l'équation 15 :

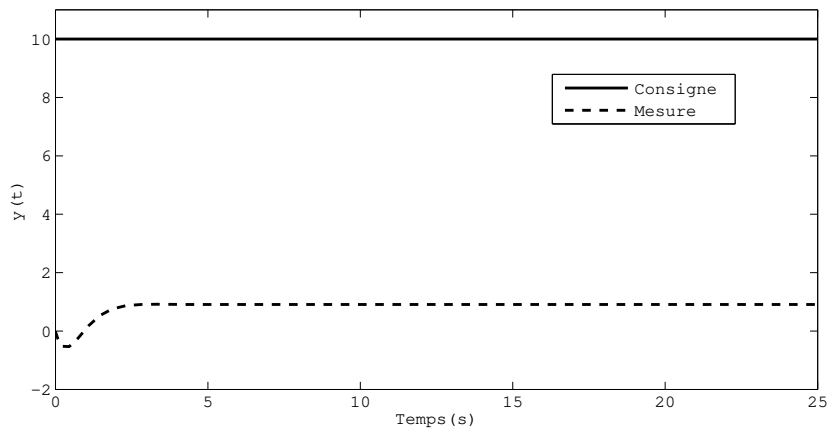


FIGURE 25 – Réponse du système suite à une excitation indicielle

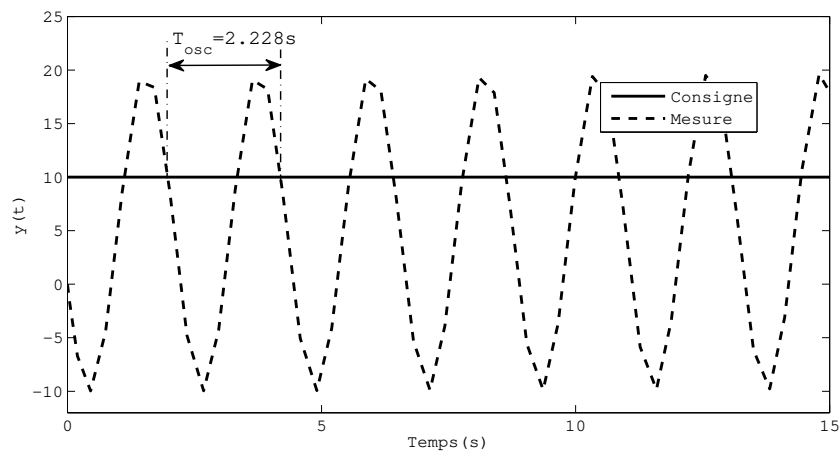


FIGURE 26 – Sortie en oscillations juste entretenues

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(1 + Ts)}$$

Les paramètres à déterminer sont donc :

- $K = G_p = 0.102$
- $\tau = \frac{T_{osc}}{2\pi} \sqrt{(G_r G_p)^2 - 1}$
- $T = \frac{T_{osc}}{2} (1 - \frac{1}{\pi} \arctan(2\pi \frac{\tau}{T_{osc}}))$

La 27 donne les courbes de réponse du système réel et du modèle de Broïda.

2.6 Avantages et limitations

Il résulte d'après ce qui précède qu'il n'y'a pas un modèle unique pour modéliser un système linéaire invariant dans le temps. L'ensemble des méthodes proposées ne permet pas de déterminer les valeurs des paramètres mais il permet de proposer une structure entre la sortie et une entrée indicielle.

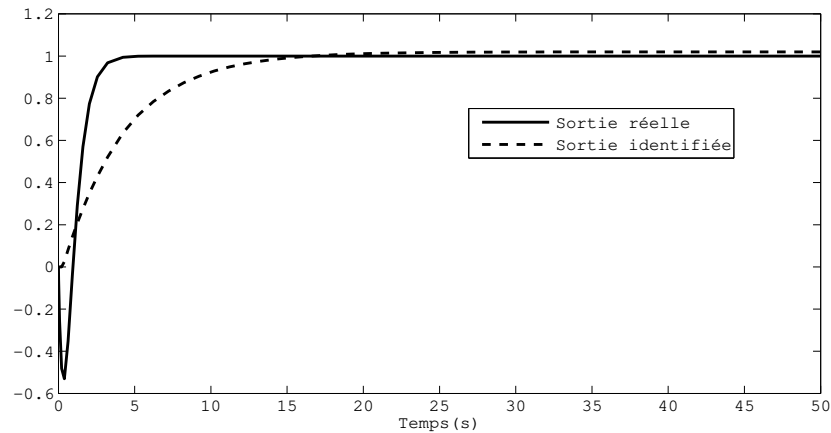


FIGURE 27 – Tracés des courbes indicielles du système et du modèle de Broïda

Ces méthodes graphiques sont sensibles aux bruits, et nécessitent des signaux d'excitation de grande amplitude.

La détermination des paramètres s'opère hors ligne, c'est à dire qu'on doit à priori disposer de la totalité de la réponse du système pour pouvoir appliquer l'une des méthodes citées dans les sections précédentes, ceci exclut toute perspective d'exploitation en ligne de ces approches graphiques.

3 Conclusion

Nous venons de voir tout un petit aperçu des méthodes d'identification des systèmes à retards qui existent. Nous avons présenté tout au long de ce chapitre des méthodes d'identification paramétrique des systèmes à retards. Nous avons cherché dans un premier temps par une approche graphique temporelle. Dans un deuxième temps, une étude portant sur la rationalisation de la fonction exponentielle a été effectuée. Ensuite, nous avons présenté une approche des moindres carrés modifiés qui consiste à étendre l'application des moindres carrés ordinaires au cas des systèmes linéaires continus à retards. Néanmoins, cela nous donne quelques outils pour pouvoir identifier les paramètres d'un modèle décrivant un processus réel et cela nous montre également le problème de convergence.

Références

- [HA07] A. HADJ ABDELKADER. *Identification des systèmes linéaires*. Université ABOU BEKR BELKAID-Tlemcen, Faculté de Technologie, 2007 (cf. p. 1).
- [Pro97] P. PROUVOST. *Contrôle régulation*. 9 rue Méchain, 75014 Paris : NATHAN Technique, 1997 (cf. p. 1, 7, 8, 10).