Systèmes Multivariables

Notes de cours [a]

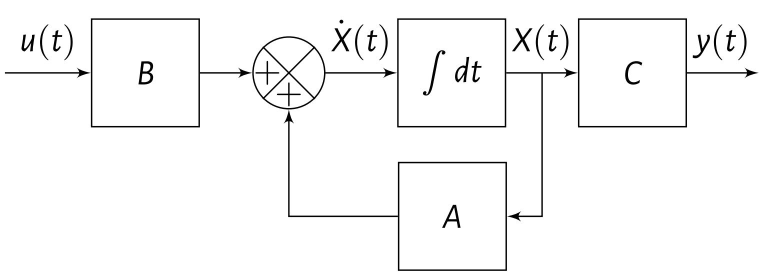
2020-2021

a. https ://github.com/a-mhamdi/isetbz/

Abdelbacet Mhamdi

Dr.-Ing. en GE – Technologue en GE

$$
\begin{cases}
\dot{X}(t) & = & AX(t) + Bu(t) \\
y(t) & = & CX(t)
\end{cases}
$$



Dépt. GE - Institut Supérieur des Études Technologiques de Bizerte

À propos

Dans ce cours, nous traiterons essentiellement les points suivants :

- ★ Représentation d'état ;
- ★ Analyse dynamique des systèmes MIMO ;
- ★ Commandabilité et commande d'état ;
- ★ Observabilité et observation d'état.

Table des matières

1 Résolution d'une équation différentielle linéaire

Une équation différentielle linéaire est souvent mise sous la forme suivante :

$$\dot{X}(t) = \mathcal{F}(t, X), \tag{1}$$

où t n'est pas necessairement un paramètre temporel. La derivée de X par rapport à t est designée par $\dot{X}$. Les conditions initiales sont données par le biais du vecteur $X(t_0) = X_0$.

Par la suite, on considère un système linéaire de premier ordre suivant :

$$\tau\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \tag{2}$$

La solution générale de l'équation précedente est la superosition de deux solutions. Une due au régime libre (i.e., sous l'effet de la condition initiale). L'autre est le résultat du régime forcé.

Régime libre

La sortie y_h dans ce cas agit sous l'effet de la condition initiale seule.

$$\tau\dot{y}_h(t) + y_h(t) = 0 \tag{3}$$

Après intégration de l'Eq. (3), on obtient :

$$\ln(|y_h(t)|) = -\frac{t}{\tau} + ci, \tag{4}$$

où ln dénote le logarithme naturel. Soit encore, après application de la fonction exp aux deux membre de l'Eq. (4) :

$$y_h(t) = CI\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{5}$$

ci and CI sont deux constantes et $CI = \mathrm{e}^{ci}$. On se donne la condition initiale $y(t = t_0) = y_0$, la constante CI est égale à $y_0\mathrm{e}^{\frac{t_0}{\tau}}$.

On en déduit alors l'expression de la solution homogène par l'expression de l'Eq. (6).

$$y_h(t) = y_0\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \tag{6}$$

Régime forcé

On considère de nouveau Eq. (2). Par application de la méthode de variation de constante, on obtient :

$$y_p(t) = A(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7}$$

Après dérivation de $y_p(t)$ par rapport à t, on trouve :

$$\dot{y}_p(t) = \dot{CI}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + CI(t)\frac{d\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}{dt} \tag{8}$$

Après developpement, $\dot{y}_p(t)$ devient come suit :

$$\dot{y}_p(t) = \dot{CI}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau}CI(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{9}$$

On remplace $y_p(t)$ de l'éq. (2) par son terme équiavlent de l'éq. (9) :

$$\tau\left(\dot{CI}(t) - \frac{1}{\tau}CI(t)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + CI(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = Ku(t) \tag{10}$$

Soit encore, après simplification :

$$\tau \dot{CI}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \quad = \quad Ku(t) \tag{11}$$

On déduit l'expression de $\dot{CI}(t)$:

$$\dot{CI}(t) = \frac{K}{\tau}\mathrm{e}^{\frac{t}{\tau}}u(t) \tag{12}$$

Après intégration sur l'intervalle $[t_0,\ t]$,

$$CI(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{K}{\tau}\mathrm{e}^{\frac{\varsigma}{\tau}}u(\varsigma)d\varsigma \tag{13}$$

La mise à jour de l'eq. (13) dans y_p donne :

$$y_p(t) \quad = \quad \int_{t_0}^{t} \frac{K}{\tau}\mathrm{e}^{-\dfrac{t-\varsigma}{\tau}}u(\varsigma)d\varsigma \tag{14}$$

Il en résulte que la solution la plus générale est $y \ = \ y_p + y_h$:

$$y(t) \quad = \quad y_0\mathrm{e}^{-\dfrac{t-t_0}{\tau}} + \int_{t_0}^{t} \frac{K}{\tau}\mathrm{e}^{-\dfrac{t-\varsigma}{\tau}}u(\varsigma)d\varsigma \tag{15}$$

Généralisation

On considère désormais un système linéaire d'ordre n supérieur à 1. L'équation représentative du système peut s'écrire de la façon suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) \quad = \quad \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}(t), \qquad m \leq n. \tag{16}$$

Soit $a_n = 1$. Eq. (16) s'actualise comme suit :

$$y^{(n)}(t) \quad = \quad -\sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}(t) \tag{17}$$

Soit le vecteur $X(t)$ qui regroupe les variables d'état du système. C'est donc un vecteur à n élements. Il présente la capacité mémoire minimale que le système peut sauvegarder afin de pouvoir déterminer son évolution ultérieure. Nous rappelons qu'on peut transformer l'éq. (17) sous la forme matricielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X}(t) & = & AX(t) + Bu(t) \\ \\ y(t) & = & CX(t) + Du(t) \end{array} \right. \tag{18}$$

avec

$$(A,\ B,\ C,\ D) \in \mathbb{M}_{(n,\,n)}(\mathbb{C})\mathrm{x}\mathbb{M}_{(n,\,1)}(\mathbb{C})\mathrm{x}\mathbb{M}_{(1,\,n)}(\mathbb{C})\mathrm{x}\mathbb{M}_{(1,\,1)}(\mathbb{C})$$

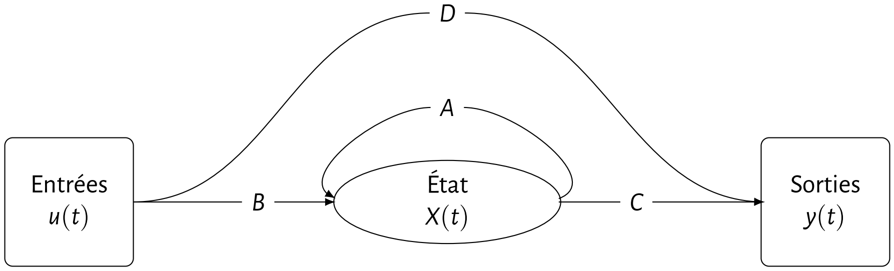
A est la matrice d'état.

B est la matrice d'entrée ;

C est la matrice de sortie ;

D caractérise le transfert direct entrée-sortie. Elle existe ssi $m = n$.

Un schéma explicatif des interactions mutuelles entre ces grandeurs est donné dans [**Patel1982**].



Étant donné la solution de l'éq. (15), le vecteur d'état $X(t)$ peut être déduit par la relation suivante :

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\varsigma)}Bu(\varsigma)d\varsigma \tag{19}$$

2 Représentation d'état

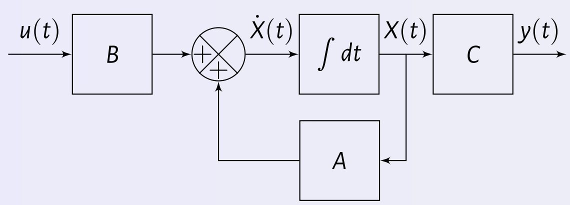
Nous considérons, ci-après,le scénario d'un système linéaire mono-entrée, mono-sortie (sauf indication). Un système pareil est décrit par l'équation différentielle suivante, avec $m \leq n$:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j}. \tag{20}$$

En appliquant la transformée de Laplace, on trouve :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}. \tag{21}$$

Schéma #1



2.1 Formes canoniques

Forme Campagne

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \tag{22}$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j (\frac{1}{s})^{n-j}}{\sum_{i=0}^{n} a_i (\frac{1}{s})^{n-i}}, \tag{23}$$

Soit $a_n = 1$. Nous multiplions les deux cotés de l'équation précédente par la quantité $\frac{1}{s^n}$ afin d'éviter toute forme derivée dans la réalisation du schéma bloc du système. Le résultat est donné ainsi par Eq. (24).

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j(\frac{1}{s})^{n-j}}{1+\sum_{i=0}^{n-1} a_i(\frac{1}{s})^{n-i}} \tag{24}$$

Soit encore :

$$Y(s) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\frac{1}{s})^{n-i} Y(s) = \sum_{j=0}^{m} b_j(\frac{1}{s})^{n-j} U(s) \tag{25}$$

La sortie $Y(s)$ est accessible à travers Eq. (26).

$$Y(s) = \sum_{j=0}^{m} b_j(\frac{1}{s})^{n-j} U(s) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\frac{1}{s})^{n-i} Y(s) \tag{26}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} b_j(\frac{1}{s})^{n-j} \underbrace{[U(s) - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(\frac{1}{s})^{n-i}}{\sum_{j=0}^{m} b_j(\frac{1}{s})^{n-j}} Y(s)]}_{W(s)} \tag{27}$$

Soit la nouvelle variable $W(s)$ telle que :

$$\begin{aligned} W(s) &= U(s) - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(\frac{1}{s})^{n-i}}{\sum_{j=0}^{m} b_j(\frac{1}{s})^{n-j}} Y(s) \\ &= U(s) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\frac{1}{s})^{n-i} \frac{Y(s)}{\sum_{j=0}^{m} b_j(\frac{1}{s})^{n-j}} \\ &= U(s) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\frac{1}{s})^{n-i} W(s) \\ &= U(s) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\frac{1}{s})^{n-i} W(s) \end{aligned} \tag{28}$$

La sortie $Y(s)$ est finalement donnée par Eq. (30).

$$Y(s) = \sum_{j=0}^{m} b_j \underbrace{(\frac{1}{s})^{n-j} W(s)}_{x_k(s)} \tag{29}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} b_k x_k(s) \tag{30}$$

Les matrices d'état A_c, d'entrée B_c et de sortie C_c sont :

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

$$\tag{32}$$

$$C_c = \begin{pmatrix} b_0 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

2.2 Passage d'une $\mathcal{RE}$ vers matrice $\mathcal{FT}$

Soit un système décrit dans l'espace d'état par Eq. (34).

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases} \tag{34}$$

La matrice $\mathcal{FT}$ est indiquée par Eq. (35), où $Y(s)$ et $U(s)$ dénotent respectivement les images des signaux $y(t)$ et $u(t)$ par application de la transformée de Laplace :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI_n - A)^{-1}B + D, \tag{35}$$

La matrice $\mathcal{FT}$ est unique. Elle a autant de lignes que nombre de sorties. Elle a autant de colonnes que nombre d'entrées.

Exercice

On considère la représentation suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \\ y(t) = CX(t) + Du(t), \end{cases} \tag{36}$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0.35 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3.2 \\ 4 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.15 & 1 \\ 2 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice $\mathcal{FT}$.

Soit :

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} b_1 & b_2 \end{array} \end{array} \qquad C = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3.2 \\ 4 & 0.5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \end{array}$$

La dimension de la matrice D est $(3, 2)$, Le système décrit par Eq. (36) a 3 sorties et 2 entrées.

Soit $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ et $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{Y_1(s)}{U_1(s)} & \dfrac{Y_1(s)}{U_2(s)} \\[2ex] \dfrac{Y_2(s)}{U_1(s)} & \dfrac{Y_2(s)}{U_2(s)} \\[2ex] \dfrac{Y_3(s)}{U_1(s)} & \dfrac{Y_3(s)}{U_2(s)} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} c_1(sI_2 - A)^{-1}b_1 + D(1,1) & c_1(sI_2 - A)^{-1}b_2 + D(1,2) \\ c_2(sI_2 - A)^{-1}b_1 + D(2,1) & c_2(sI_2 - A)^{-1}b_2 + D(2,2) \\ c_3(sI_2 - A)^{-1}b_1 + D(3,1) & c_3(sI_2 - A)^{-1}b_2 + D(3,3) \end{pmatrix}}_{\text{Matrix Transfer Function : } M} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix}$$

3 Commande par retour d'état

Avant de se pencer sur la synthèse d'une loi de commande pour un système linéaire, la question d'existance doit être posée.

Nous rappelons d'abord la description du vecteur d'état X à un instant t donné :

$$X(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(t-\mu)}Bu(\mu)d\mu \tag{37}$$

Setting $X(t) = 0$, then for some $t > t_0$, we obtain :

$$X_0 = -\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-A\mu}Bu(\mu)d\mu \tag{38}$$

L'équation (38) peut être résolue pour une entrée $u(\mu)$ et un état intial X_0 si, et seulement si, les lignes (res. colonnes) de la matrice $\mathrm{e}^{-A\mu}B$ sont linéairement indépendant.

Étant donnée l'approximation de Taylor, la quantité en exponentielles peut être decomposée en termes de $I_n, A, A^2, \cdots, A^k, \cdots, A^\infty$. Chaque matrice vérifie son polynôme caractéristique, la matrice e^A can be written in terms of $I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$.

A necessary and sufficient condition for point- wise state controllability is that the matrix ξ has a full rank, where ξ is the matrix :

$$\xi = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{39}$$

Schéma #2

A factor in determining useful life of a flexible structure, such as ship, a tall building, or a large airplane, is the possibility of fatigue failures due to structural vibrations. Each vibration mode is described by an equation of the form $m\ddot{x} + kx = u(t)$, where $u(t)$ is the input force. Is it possible to find an input which will drive both the deflection $x(t)$ and the velocity $\dot{x}(t)$ to zero in finite time for arbitrary initial conditions ?

We assume that $y_1(t) = x(t)$ and $y_2(t) = \dot{x}(t)$. Hence, the system description becomes as follows :

$$\left\{ \begin{bmatrix} \dot{y_1}(t) \\ \dot{y_2}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{A}} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}}_{\text{B}} u(t) \right.$$

What you have to do now, is to compute the rank of the matrix $[B,\ AB]$.

$$[B,\ AB] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

The previous matrix, computed in equation 40 is not singular, hence, the system described by the equation $m\ddot{x} + kx = u(t)$ is fully controllable, which means it exists a command $u(t)$ that drives both the deflection $x(t)$ and the velocity $\dot{x}(t)$ to zero in finite time from arbitrary initial conditions.

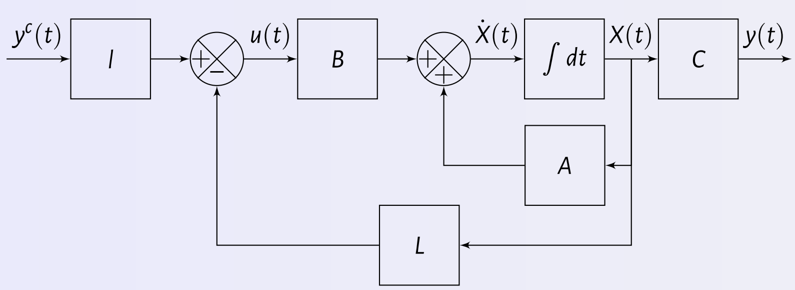
3.0.1 Functional controllability (f)

A system with l outputs and m inputs is functional controllable, or controllable (f), if there exists a sequence of inputs defined for $t > t_0$, wich generates a suitable vector of outputs from the initial conditions X_0.

a. If $l > m$ then the system is not functionally controllable
b. If $l = m$ then a necessary and sufficient condition for functional controllabilty is that its transfer-function matrix is not singular.
c. If $l < m$ then the system is functionally controllable if, and only if there exists at least one non-zero $l \times l$ minor of its transfer-function matrix is not singular.

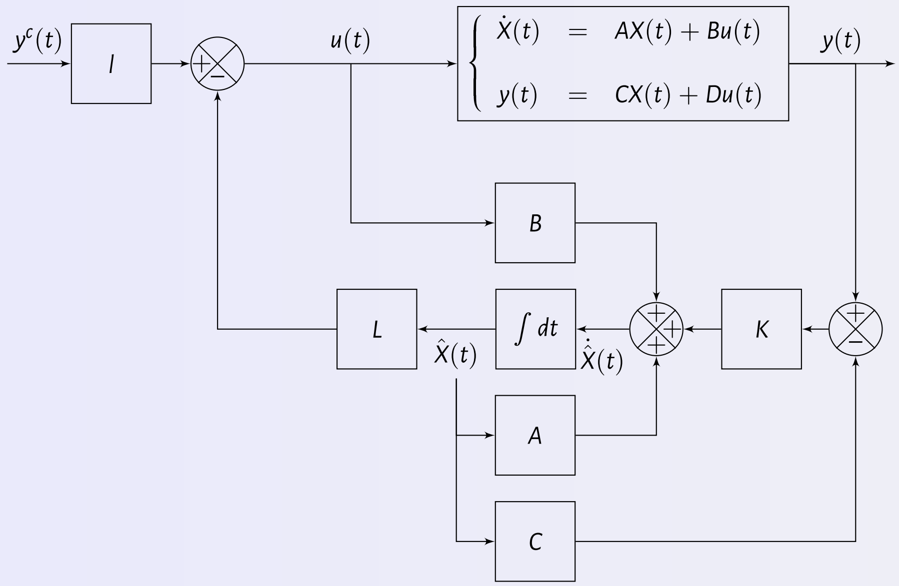
Functional controllability does not imply pointwise-state controllability and vice versa.

Schéma #3



4 Observateur de Luenberger

Schéma #4


$y^c(t)$
I
$u(t)$
$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$
$y(t) = CX(t) + Du(t)$
$y(t)$
B
L
$\int dt$
K
$\hat{X}(t)$
$\dot{\hat{X}}(t)$
A
C