

**PARCOURS : LAGE-ELNI**

**SEMESTRE : 4**

**AU : 2019-2020**

**Abdelbacet Mhamdi**

Docteur-Ingénieur en Génie Électrique

Technologue en GE à l'ISSET de Bizerte

**TRAITEMENT DE SIGNAL**

FASCICULE DE TRAVAUX PRATIQUES



**Institut Supérieur des Études Technologiques de Bizerte**

---

Disponible à l'adresse : <https://github.com/a-mhamdi/issetbz/>



## CODE D'HONNEUR

THE UNIVERSITY OF NORTH CAROLINA AT CHAPEL HILL

Department of Physics and Astronomy

<http://physics.unc.edu/undergraduate-program/labs/general-info/>

“During this course, you will be working with one or more partners with whom you may discuss any points concerning laboratory work. However, you must write your lab report, in your own words.

Lab reports that contain identical language are not acceptable, so do not copy your lab partner’s writing.

If there is a problem with your data, include an explanation in your report. Recognition of a mistake and a well-reasoned explanation is more important than having high-quality data, and will be rewarded accordingly by your instructor. A lab report containing data that is inconsistent with the original data sheet will be considered a violation of the Honor Code.

Falsification of data or plagiarism of a report will result in prosecution of the offender(s) under the University Honor Code.

On your first lab report you must write out the entire honor pledge :

---

**The work presented in this report is my own, and the data was obtained by my lab partner and me during the lab period.**

---

On future reports, you may simply write “Laboratory Honor Pledge” and sign your name.”

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Prise en main de Python</b>	<b>1</b>
1.1	Variables numériques & Types	1
1.2	Les chaînes de caractères	1
1.3	Binaire, octal & hexadécimal	2
1.4	Listes, tuples & dictionnaires	3
1.4.1	Opérations sur les listes	4
1.4.2	Opérations sur les tuples	5
1.4.3	Opérations sur les dictionnaires	6
1.5	NumPy	7
1.6	Matplotlib	10
<b>2</b>	<b>Convolution des signaux</b>	<b>13</b>
2.1	Convolution 1D	13
2.2	Convolution 2D	17
<b>3</b>	<b>Décomposition en série de Fourier</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>Transformée de Fourier</b>	<b>23</b>

# 1 | Prise en main de Python



Le code est disponible via <https://github.com/a-mhamdi/cosnip/> → Python → sig-proc  
→ init-jupyter.ipynb

## Objectifs

1. Apprendre à programmer en **Python**;
2. Se servir de l'environnement **Jupyter Notebook**;
3. Utiliser les bibliothèques du calcul scientifique.

## 1.1 Variables numériques & Types

```
[1]: a = 1 # Un entier
      print('La variable a = {} est de type {}'.format(a, type(a)))
```

La variable a = 1 est de type <class 'int'>

```
[2]: b = -1.25 # Un nombre réel
      print('La variable b = {} est de type {}'.format(b, type(b)))
```

La variable b = -1.25 est de type <class 'float'>

```
[3]: c = 1+0.5j # Un nombre complexe
      print('La variable c = {} est de type {}'.format(c, type(c)))
```

La variable c = (1+0.5j) est de type <class 'complex'>

## 1.2 Les chaînes de caractères

```
[4]: msg = "Mon Premier TP !"
      print(msg, type(msg), sep = '\n***\n') # \n : retour à la ligne
      print(msg + 3* '\nPython est simple')
```

```
Mon Premier TP !
***
<class 'str'>
Mon Premier TP !
Python est simple
Python est simple
Python est simple
```

```
[5]: longMsg = """Ceci est un message,
sur plusieurs lignes"""
print(longMsg)
```

Ceci est un message,  
sur plusieurs lignes

*Indexation*

```
[6]: # Indexation positive
print(msg, msg[1:5], sep = ' -----> ')
# Indexation négative
print(msg, msg[-5:-1], sep = ' -----> ')
```

Mon Premier TP ! -----> on P  
Mon Premier TP ! -----> TP

*Opérations sur les chaînes*

```
[7]: msg = 'Un message'
print(len(msg))
print(msg.lower())
print(msg.upper())
print(msg.split(' '))
print(msg.replace('mes', 'MES'))
print('a' in msg) # Vérifier si msg contient la lettre 'a'
```

10  
un message  
UN MESSAGE  
['Un', 'message']  
Un MESsage  
True

```
[8]: prix, nombre, perso = 100, 3, 'Un client'
print('{} demande {} pièces pour un prix de {} MDT !'.format(perso, nombre,
    ↳prix))
print('{1} demande {2} pièces pour un prix de {0} MDT !'.format(prix, perso,
    ↳nombre))
```

Un client demande 3 pièces pour un prix de 100 MDT !  
Un client demande 3 pièces pour un prix de 100 MDT !

### 1.3 Binaire, octal & hexadécimal

```
[9]: x = 0b0101 # 0b : binaire
print(x, type(x), sep = '\t----\t') # \t : tabulation
y = 0xAF # 0x : hexadécimal
print(y, type(y), sep = '\t' + '----'*5 + '\t')
z = 0o010 # 0o : octal
print(z, type(z), sep = ', ')
```

```
5      ----      <class 'int'>
175    -----    <class 'int'>
8, <class 'int'>
```

*Boolean*

```
[10]: a = True
      b = False
      print(a)
      print(b)
```

```
True
False
```

```
[11]: print("50 > 20 ? : {} \n50 < 20 ? : {} \n50 = 20 ? : {} \n50 /= 20 ? : {}"
        .format(50 > 20, 50 < 20, 50 == 20, 50 != 20)
      )
```

```
50 > 20 ? : True
50 < 20 ? : False
50 = 20 ? : False
50 /= 20 ? : True
```

```
[12]: print(bool(123), bool(0), bool('TP'), bool())
```

```
True False True False
```

```
[13]: var1 = 100
      print(isinstance(var1, int))
      var2 = -100.35
      print(isinstance(var2, int))
      print(isinstance(var2, float))
```

```
True
False
True
```

## 1.4 Listes, tuples & dictionnaires

Nous étudierons ici trois types de groupement de données, indexés et non ordonnés, dans le langage de programmation **Python** :

1. *Liste* est une collection modifiable. Elle autorise les termes redondants;
2. *Tuple* est une collection immuable. Il autorise aussi la redondance;
3. *Dictionnaire* est une collection modifiable. Un terme en double est interdit.

Lors du choix d'un type, il est utile de comprendre ses caractéristiques et de savoir comment **Python** gère ses définitions.

### 1.4.1 Opérations sur les listes

```
[14]: maListe = ['a', 'b', 'c', 1, True] # Une liste mixte
      print(maListe)
```

```
['a', 'b', 'c', 1, True]
```

```
[15]: print(len(maListe)) # Taille de maListe
      print(maListe[1:3]) # Accès aux éléments de maListe
      maListe[0] = ['1', 0] # Liste combinée
      print(maListe)
      print(maListe[3:])
      print(maListe[:3])
```

```
5
['b', 'c']
[['1', 0], 'b', 'c', 1, True]
[1, True]
[['1', 0], 'b', 'c']
```

```
[16]: maListe.append('etc') # Insertion de 'etc' à la fin de maListe
      print(maListe)
```

```
[['1', 0], 'b', 'c', 1, True, 'etc']
```

```
[17]: maListe.insert(1, 'xyz') # Insertion de 'xyz'
      print(maListe)
```

```
[['1', 0], 'xyz', 'b', 'c', 1, True, 'etc']
```

```
[18]: maListe.pop(1)
      print(maListe)
```

```
[['1', 0], 'b', 'c', 1, True, 'etc']
```

```
[19]: maListe.pop()
      print(maListe)
```

```
[['1', 0], 'b', 'c', 1, True]
```

```
[20]: del maListe[0]
      print(maListe)
```

```
['b', 'c', 1, True]
```

```
[21]: maListe.append('b')
      print(maListe)
      maListe.remove('b')
      print(maListe)
```

```
['b', 'c', 1, True, 'b']
['c', 1, True, 'b']
```



```
[22]: # Loop
      for k in maListe:
          print(k)
```

```
c
1
True
b
```

```
[23]: maListe.clear()
      print(maListe)
```

```
[]
```

Méthode	Description
<code>copy()</code>	Renvoyer une copie de la liste
<code>list()</code>	Transformer en une liste
<code>extend()</code>	Ajouter les éléments d'une liste (ou tout autre itérable), à la fin de la liste actuelle
<code>count()</code>	Renvoyer le nombre d'occurrences de la valeur spécifiée
<code>index()</code>	Retourner l'index de la première occurrence de la valeur spécifiée
<code>reverse()</code>	Inverser l'ordre la liste
<code>sort()</code>	Trier la liste

#### 1.4.2 Opérations sur les tuples

```
[24]: ce_tuple = (1, 2, 3)
      print(ce_tuple)
```

```
(1, 2, 3)
```

```
[25]: ce_tuple = (1, '1', 2, 'texte')
      print(ce_tuple)
```

```
(1, '1', 2, 'texte')
```

```
[26]: print(len(ce_tuple))
```

```
4
```

```
[27]: print(ce_tuple[1:])
```

```
('1', 2, 'texte')
```

```
[28]: try:
      ce_tuple.append('xyz') # Déclencher une erreur
      except Exception as err:
          print(err)
```

```
'tuple' object has no attribute 'append'
```

```
[29]: ma_liste = list(ce_tuple)
      ma_liste.append('xyz')
      print(ma_liste, type(ma_liste), sep = ', ')
```

```
[1, '1', 2, 'texte', 'xyz'], <class 'list'>
```

```
[30]: nv_tuple = tuple(ma_liste) # Convertir 'ma_liste' en tuple 'new_tuple'
      print(nv_tuple, type(nv_tuple), sep = ', ')
```

```
(1, '1', 2, 'texte', 'xyz'), <class 'tuple'>
```

```
[31]: try:
      ce_tuple.insert(1, 'xyz') # Déclencher une erreur
      except Exception as err:
          print(err)
```

```
'tuple' object has no attribute 'insert'
```

```
[32]: # Loop
      for k in ce_tuple:
          print(k)
```

```
1
1
2
texte
```

```
[33]: res_tuple = ce_tuple + nv_tuple
      print(res_tuple)
```

```
(1, '1', 2, 'texte', 1, '1', 2, 'texte', 'xyz')
```

### 1.4.3 Opérations sur les dictionnaires

```
[34]: # monDict = {"key": "value"}
      monDict = {
          "Parcours" : "GM",
          "Spécialité" : "ElnI",
          "Sem" : "4"
      }
      print(monDict, type(monDict), sep = ', ')
```

```
{'Parcours': 'GM', 'Spécialité': 'ElnI', 'Sem': '4'}, <class 'dict'>
```

```
[35]: print(monDict["Sem"])
      sem = monDict.get("Sem")
      print(sem)
```

```
4
4
```

```
[36]: monDict["Parcours"] = "GE"
      print(monDict)
```

```
{'Parcours': 'GE', 'Spécialité': 'ElnI', 'Sem': '4'}
```

```
[37]: # Boucle
      for d in monDict:
          print(d, monDict[d], sep = '\t|\t')
```

```
Parcours      |      GE
Spécialité    |      ElnI
Sem           |      4
```

```
[38]: for k in monDict.keys():
      print(k)
```

```
Parcours
Spécialité
Sem
```

```
[39]: for v in monDict.values():
      print(v)
```

```
GE
ElnI
4
```

## 1.5 NumPy

La documentation officielle est disponible via ce lien : <https://numpy.org/>

Commençons d'abord par importer le module de calcul numérique **NumPy**. Nous le référençons désormais par l'acronyme *np*

```
[40]: import numpy as np
```

*NumPy vs Liste*

```
[41]: a_np = np.arange(6) # NumPy
      print("a_np = ", a_np)
      print(type(a_np))
      a_lst = list(range(0,6)) # Liste
      print("a_lst = ", a_lst)
      print(type(a_lst))
      # Comparaison
      print("2 * a_np = ", a_np * 2)
      print("2 * a_lst = ", a_lst * 2)
```

```
a_np = [0 1 2 3 4 5]
<class 'numpy.ndarray'>
a_lst = [0, 1, 2, 3, 4, 5]
<class 'list'>
```

```
2 * a_np = [ 0  2  4  6  8 10]
2 * a_lst = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, 2, 3, 4, 5]
```

```
[42]: v_np = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6]) # NB : parenthèses puis crochets, i.e., ↪ ([])
      print(v_np)
```

```
[1 2 3 4 5 6]
```

```
[43]: v_np = np.array([[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12]])
      print(v_np)
```

```
[[ 1  2  3  4]
 [ 5  6  7  8]
 [ 9 10 11 12]]
```

```
[44]: print(type(v_np))
```

```
<class 'numpy.ndarray'>
```

```
[45]: print(v_np[0])
```

```
[1 2 3 4]
```

```
[46]: v_np.ndim # Dimensions de v_np
```

```
[46]: 2
```

```
[47]: v_np.shape # Nombre de lignes et de colonnes
```

```
[47]: (3, 4)
```

```
[48]: v_np.size # Nombre d'éléments dans v_np = 3 * 4
```

```
[48]: 12
```

Une autre démarche pour créer une matrice de taille (3,3) par exemple est :

```
[49]: u = np.arange(9).reshape(3,3)
      print(u)
```

```
[[0 1 2]
 [3 4 5]
 [6 7 8]]
```

Nous passons maintenant à présenter quelques opérations de base sur les matrices

```
[50]: M = np.array([[1, 2], [1, 2]])
      print(M)
```

```
[[1 2]
 [1 2]]
```

```
[51]: N = np.array([[0, 3], [4, 5]])
      print(N)
```

```
[[0 3]
 [4 5]]
```

*Addition*

```
[52]: print(M + N)
      print(np.add(M, N))
```

```
[[1 5]
 [5 7]]
[[1 5]
 [5 7]]
```

*Soustraction*

```
[53]: print(M-N)
      print(np.subtract(M, N))
```

```
[[ 1 -1]
 [-3 -3]]
[[ 1 -1]
 [-3 -3]]
```

*Multiplication élément par élément (en : Elementwise Product)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \times \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

```
[54]: print(M * N)
      print(np.multiply(M, N))
```

```
[[ 0  6]
 [ 4 10]]
[[ 0  6]
 [ 4 10]]
```

*Produit matriciel*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$$

```
[55]: print(M.dot(N))
      print(np.dot(M, N))
```

```
[[ 8 13]
 [ 8 13]]
[[ 8 13]
 [ 8 13]]
```

Division élément par élément (en : *Elementwise Division*)

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} ./ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0:1 & 3:2 \\ 4:1 & 5:2 \end{bmatrix}$$

```
[56]: print(N / M)
      print(np.divide(N, M))
```

```
[[0.  1.5]
 [4.  2.5]]
[[0.  1.5]
 [4.  2.5]]
```

Calcul du déterminant

```
[57]: print("Déterminant de M :")
      print(np.linalg.det(M))
      print("Déterminant de N :")
      print(np.linalg.det(N))
```

```
Déterminant de M :
0.0
Déterminant de N :
-12.0
```

## 1.6 Matplotlib

De plus amples informations peuvent être trouvées à ce site : <https://matplotlib.org/>

```
[58]: import numpy as np
      import matplotlib.pyplot as plt
      plt.style.use('ggplot')
```

Nous créons une fonction sinusoïdale qu'on dénote par  $x$  de période 1 sec, rehaussée d'une valeur constante de 1.

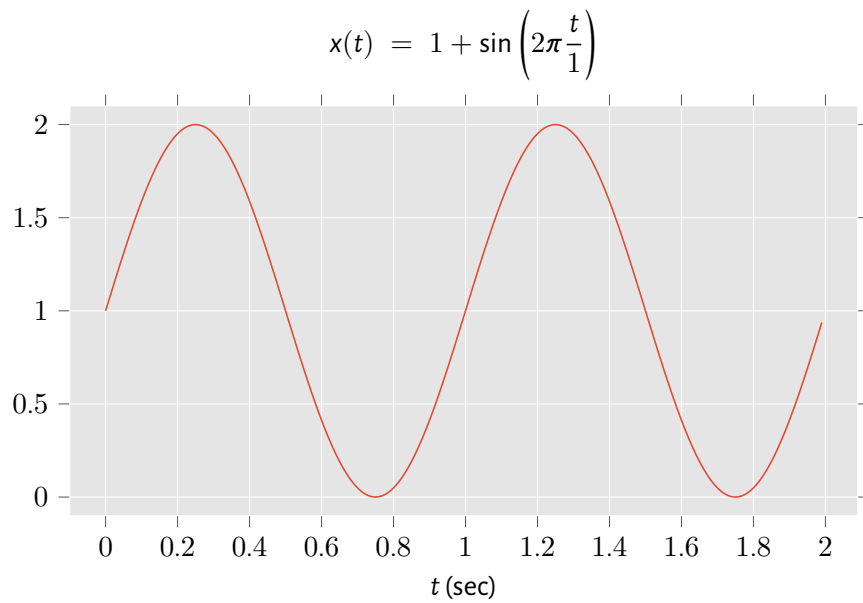
```
[59]: # Fonction continue
      t = np.arange(0.0, 2.0, 0.01)
      x = 1 + np.sin(2 * np.pi * t) # Fréquence = 1Hz
```

Les commandes qui permettent de tracer le graphique de  $x$  sont :

```
[60]: plt.plot(t, x)

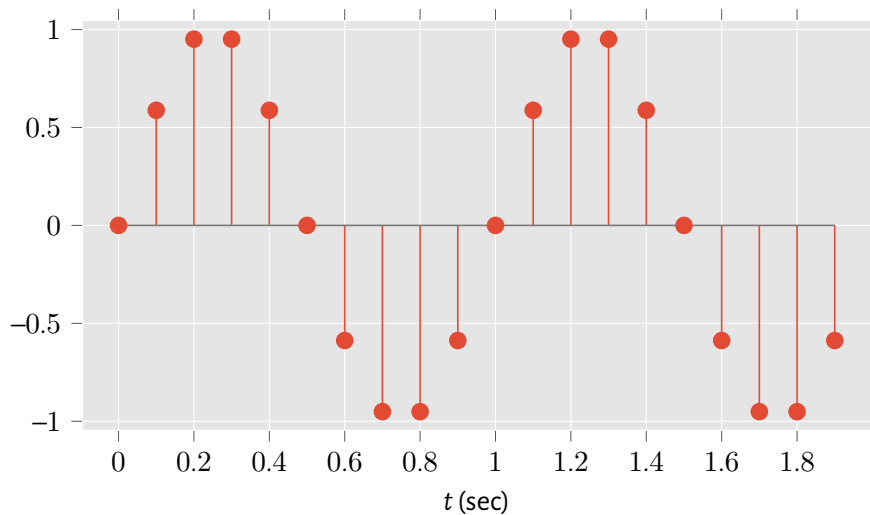
      # Donner un titre au graphique
      plt.title(r"$x(t) = 1 + \sin\left(2\pi\frac{t}{1}\right)$")
      plt.xlabel("$t$ (sec)") # Nommer l'axe des abscisses

      plt.show()
```



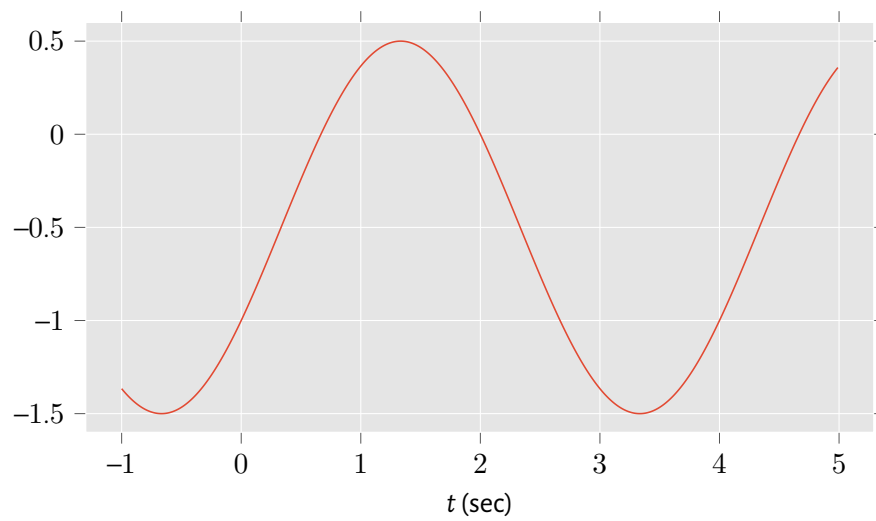
```
[61]: # Fonction échantillonnée
t = np.arange(0.0, 2.0, 0.1)
y = np.sin(2*np.pi*t) # Pareil ! Signal sinusoïdal de fréquence 1Hz
```

```
[62]: plt.stem(t, y)
plt.xlabel("$t$ (sec)")
plt.show()
```



### Manipulation N° 1 :

La courbe ci-dessous décrit l'évolution d'une fonction  $h$  au cours du temps  $t$  :



**a)** Déterminer les mesures de  $h$  :

- valeur moyenne;
- période;
- amplitude;
- phase à l'origine.

**b)** Donner l'expression mathématique de  $h$ ;

**c)** Écrire un code **Python** qui permet de générer exactement le même graphique.



## 2 | Convolution des signaux

### 2.1 Convolution 1D



Le code est disponible via <https://github.com/a-mhamdi/cosnip/> → Python → sig-proc  
→ conv-1d.ipynb

La convolution est une intégrale qui exprime le degré de chevauchement d'une fonction  $h$  lorsqu'elle est décalée sur une autre fonction  $x$ .

Par définition, une convolution  $x * h$  se mesure par l'équation suivante :

$$x * h = \int_0^t h(t-\zeta)x(\zeta)d\zeta.$$

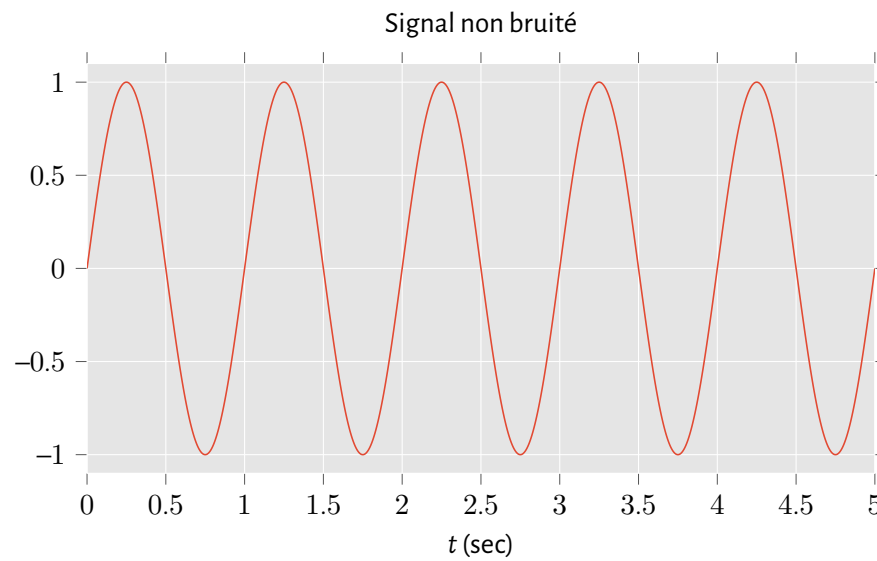
Ce produit est utilisé fréquemment pour le filtrage d'un signal contaminé par du bruit gênant ainsi la perception correcte de l'information. Un produit de convolution peut être vu comme une technique de calcul de moyenne à un instant  $t$  d'une fonction  $x$  pondérée par la fonction  $h$  et vice-versa.

On se propose de générer un signal sinusoïdal d'amplitude 1 et de fréquence 1 Hz que l'on note  $x(t)$ .

$$x(t) = \sin(2\pi ft), \quad \text{avec } f = 1 \text{ Hz.}$$

```
[1]: %matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use('ggplot')
```

```
[2]: t = np.linspace(0, 5.0, 1000)
x = np.sin(2 * np.pi * t)
plt.plot(t, x)
plt.title("Signal non bruité")
plt.xlabel("$t$ (sec)")
plt.grid()
plt.show()
```



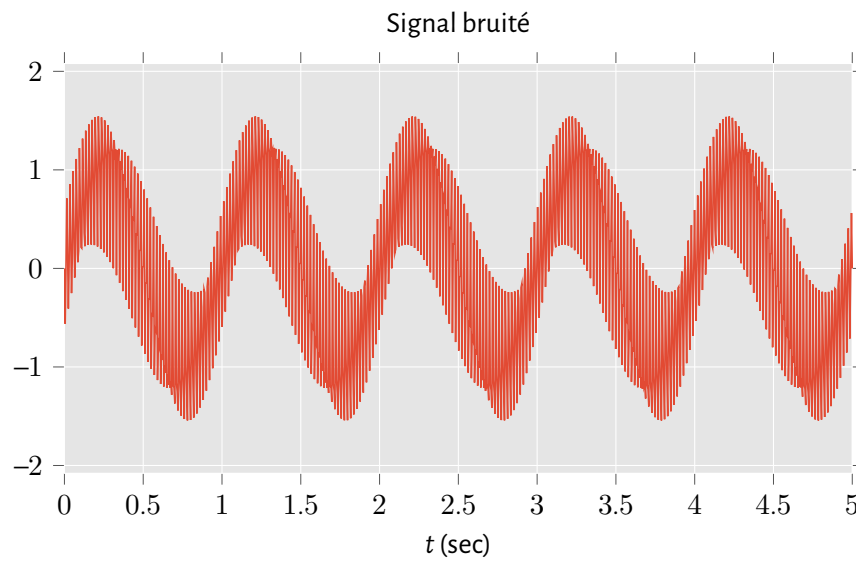
Nous synthétisons ici un exemple de bruit :

$$b(t) = -0.4 \sin(2\pi f_{b_1} t) + 0.6 \sin(2\pi f_{b_2} t), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_{b_1} = 500 \text{ Hz}, \\ f_{b_2} = 750 \text{ Hz}. \end{cases}$$

Nous le rajouterons par la suite au signal d'origine  $x(t)$  comme suit :

$$x_b = x(t) + b(t)$$

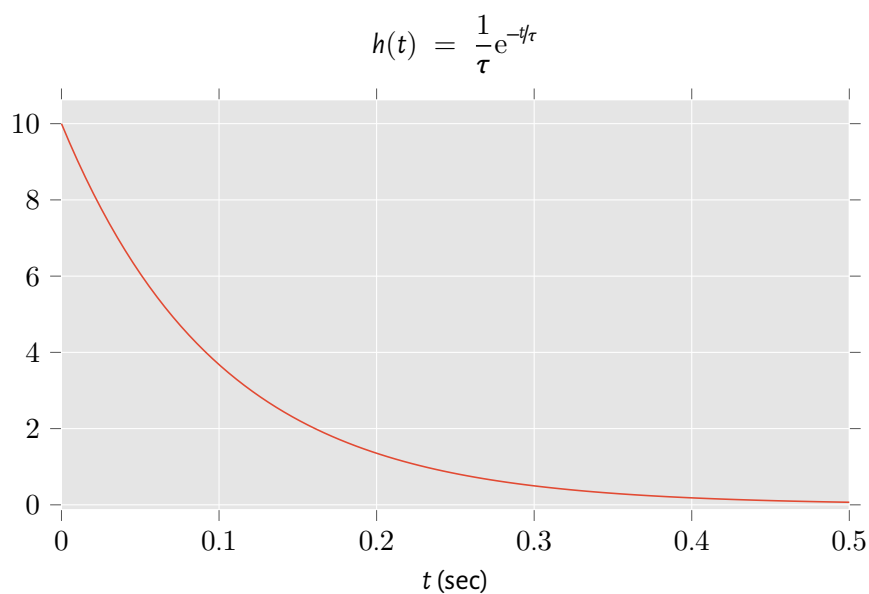
```
[3]: # Générer un bruit
b = -0.4 * np.sin(1000 * np.pi * t) + 0.6 * np.sin(1500 * np.pi * t)
x_b = x + b
plt.plot(t, x_b)
plt.title("Signal bruité")
plt.xlabel("$t$ (sec)")
plt.grid()
plt.show()
```



Le filtre à appliquer s'agit d'un passe-bas de réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{avec } \tau = 0.1 \text{ sec.}$$

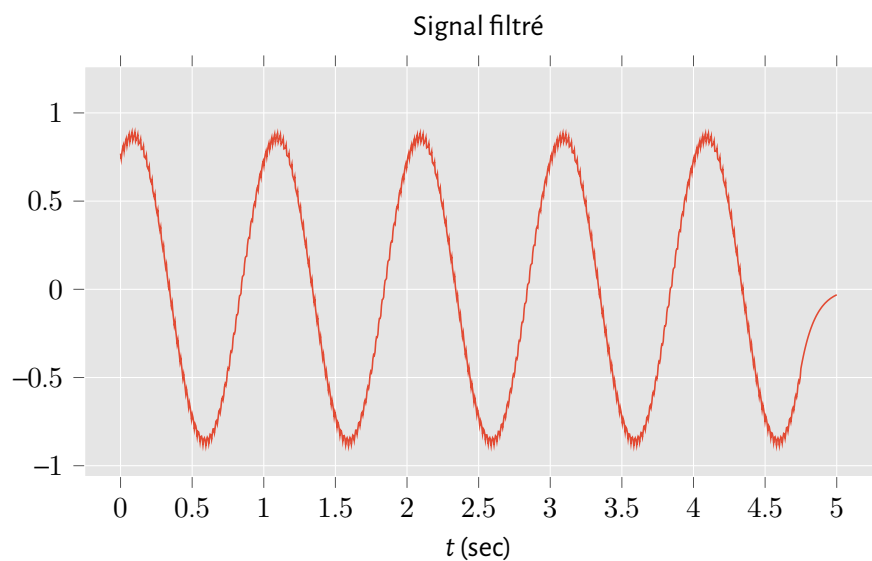
```
[4]: tau = 0.1; t_h = np.linspace(0, 5*tau, 100)
h = 1/tau * np.exp(-t_h/tau)
plt.plot(t_h, h)
plt.title(r"$h(t) \backslash;=\backslash; \backslash\mathrm{dfrac{1}{\tau}}\mathrm{e}^{\backslash-\backslash\mathrm{dfrac{t}{\tau}}}$")
plt.xlabel("$t$ (sec)")
plt.grid()
plt.show()
```



La sortie  $\tilde{x}$  du filtre est le résultat du produit de convolution suivant :

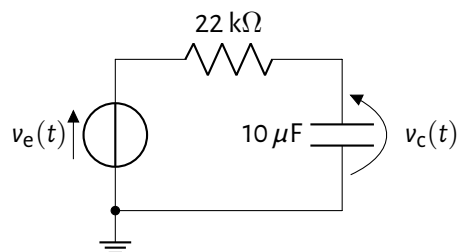
$$\tilde{x}(t) = \int_0^t h(t-\zeta)x(\zeta)d\zeta$$

```
[5]: ## Normaliser le filtre : filt = h/Sigma_h
filt = h/h.sum()
x_f = np.convolve(x_b, filt, 'same')
plt.plot(t, x_f)
plt.title("Signal filtré")
plt.xlabel("$t$ (sec)")
plt.grid()
plt.show()
```



### Manipulation N° 2:

On se propose d'étudier la charge et la décharge dans le condensateur du circuit suivant :



La fonction  $h$  désigne sa réponse impulsionnelle.

**a)** Montrer que  $h(t)$  s'écrit comme suit :

$$h(t) = 1/\tau e^{-t/\tau}, \quad \forall t \geq 0.$$

**b)** On applique en entrée de ce montage une entrée  $v_e$  décrite par :

$$v_e = \Gamma(t) - 2\Gamma_3(t) + \Gamma_5(t),$$

- où  $\Gamma_\alpha$  dénote la fonction d'Heaviside retardée, c.-à-d.  $\Gamma(t - \alpha)$ ;
- c) Pour  $0 \leq t \leq 15$ , représenter l'évolution de l'entrée  $v_e(t)$ ;
  - d) Calculer et tracer la sortie  $v_c(t)$ .

## 2.2 Convolution 2D



Le code est disponible via <https://github.com/a-mhamdi/cosnip/> → Python → sig-proc  
→ conv-2d.ipynb

Un noyau d'image ou masque est une petite matrice utilisée pour appliquer des effets comme ceux qu'on pourrait trouver dans les applications de traitement d'images, tels que la netteté et la détection de contours, etc.

Ceci est accompli en faisant une convolution entre l'image et le masque.

Commençons par importer l'image "wb\_IsetB.png" en niveau de gris

```
[1]: %matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import ndimage

[2]: img_np = plt.imread("wb-IsetB.png")
# Afficher l'image en niveau de gris
ma_fig = plt.imshow(img_np, cmap = 'gray')
plt.axis('off')
ma_fig.axes.get_xaxis().set_visible(False)
ma_fig.axes.get_yaxis().set_visible(False)
```



Fixons d'abord la structure du noyau à appliquer. Il s'agit par la suite du masque *emboss*. Ce dernier permet de mettre en relief un effet d'ombre 3D à l'image. L'image résultante donne l'illusion de profondeur.

La structure de ce masque est donnée par le code suivant :

```
[3]: # Structure du masque
emboss_ker = np.array([[ -2, -1, 0], [-1, 1, 1], [0, 1, 2]])
print(emboss_ker)
```

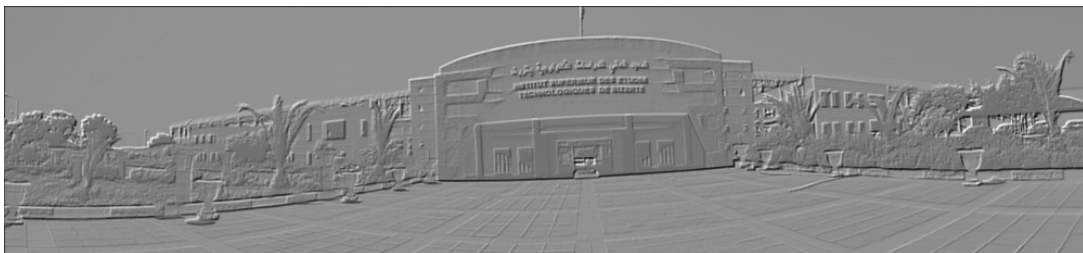
```
[[ -2 -1  0]
 [-1  1  1]
 [ 0  1  2]]
```

On peut se référer à la documentation disponible au lien : <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.ndimage.convolve.html#scipy.ndimage.convolve>

```
[4]: # Convolution 2D
mod_img = ndimage.convolve(img_np, emboss_ker, mode = 'constant', cval = 0.0)
```

Pour visualiser et sauvegarder l'image modifiée suite à l'application du noyau susmentionné, nous écrivons les instructions suivantes :

```
[5]: mod_fig = plt.imshow(mod_img, cmap = 'gray')
plt.axis('off')
mod_fig.axes.get_xaxis().set_visible(False)
mod_fig.axes.get_yaxis().set_visible(False)
matplotlib.image.imsave('mod-IsetB.png', mod_img, cmap = 'gray')
```



### Manipulation N° 3 :

Vous pouvez vous référer au site : <http://setosa.io/ev/image-kernels/>.

- Convertir l'image "logo-ISET-Bizerte.png" en niveau de gris et la charger par la suite dans votre notebook **Jupyter**;
- Appliquer deux masques de votre choix;
- Justifier à chaque fois la transformation engendrée par application du masque.

### 3 | Décomposition en série de Fourier



Le code est disponible via <https://github.com/a-mhamdi/cosnip/> → Python → sig-proc  
→ fourier-series.ipynb

Soit le code suivant :

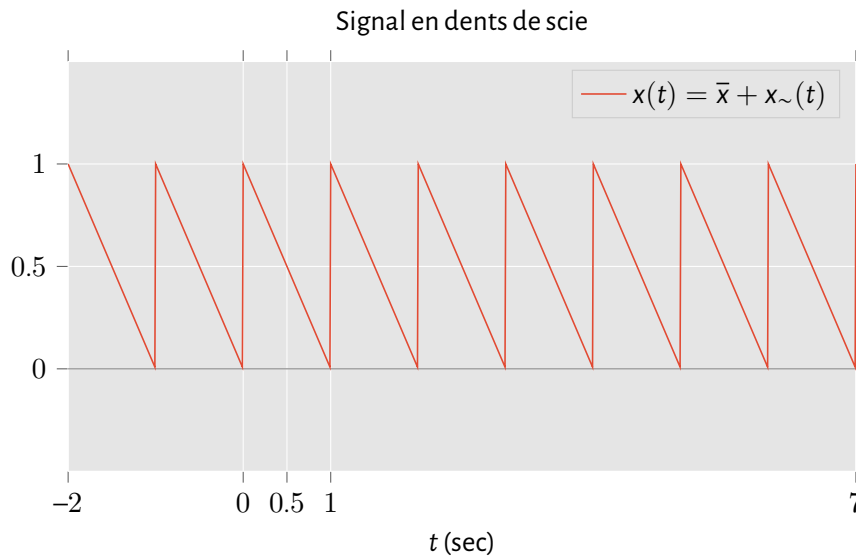
```
[1]: %matplotlib inline
import numpy as np
from scipy import signal
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use('ggplot')
plt.rc({"figure.figsize": (8, 4), "keymap.grid": "g", "font.serif":
↪ "Charter", "font.size": 10})

[2]: tot_pts = 1000
t = np.linspace(-2, 7, tot_pts) # Vecteur temps : t
wt = 2*np.pi*t # Fréquence : f = 1Hz

[3]: plt.axhline(0, color = 'gray', lw = 1)
plt.plot(t, 0.5 + 0.5 * signal.sawtooth(wt, 0), lw = 1.5, label = r'$x(t) = \overline{x} + x_{\sim}(t)$')

plt.yticks([-1, 0, 0.5, 1, 2], ['$-1$', '$0$', '$0.5$', '$1$', '$2$'])
plt.xticks([-2, 0, 0.5, 1, 7], ['$-2$', '$0$', '$0.5$', '$1$', '$7$'])
plt.xlim(-2, 7)
plt.ylim(-0.5, 1.5)

plt.legend(fontsize = 13, fancybox = True, framealpha = 0.3, loc = 'best')
plt.title('Signal en dents de scie')
plt.xlabel('$t$ (sec)')
plt.show()
```



Rappelons d'abord la définition du signal  $x$  :

$$x(t) = \bar{x} + x_{\sim}(t)$$

La valeur moyenne du signal est :

$$\bar{x} = 0.5$$

Il reste maintenant à calculer la partie alternative de  $x_{\sim}$ . Par définition, l'expression de  $x_{\sim}$  est donnée par :

$$x_{\sim}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right)$$

Le terme  $a_k$  est :

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt, \quad \text{avec } T = 1 \text{ sec.}$$

Le signal  $x$  est de période  $T = 1$  sec. Il est de nature impair. Il en résulte que :

$$a_k = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Chaque coefficient  $b_k$  se calcule de la façon suivante :

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt, \quad \text{avec } T = 1 \text{ sec.}$$

La troncature de  $x$  sur une période est :

$$x(t) = \Gamma(t) - r(t)$$

L'équation de  $b_k$  se transforme ainsi en

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T (\Gamma(t) - r(t)) \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt, \quad \text{avec } T = 1 \text{ sec.}$$

Soit encore

$$b_k = -\frac{2}{T} \int_0^T t \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt$$



Après intégration, on obtient :

$$b_k = \frac{1}{k\pi} \left[ t \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) \right]_0^T$$

Finalement :

$$b_k = \frac{1}{k\pi}$$

Compte tenu de ce qui précède, l'expression finale de  $x$  est

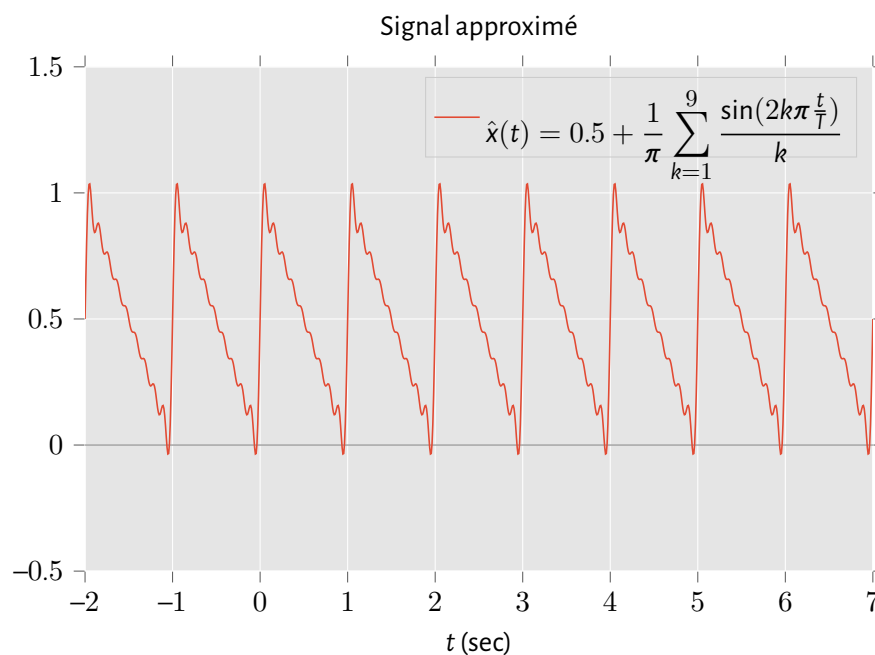
$$x(t) = 0.5 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right)}{k}$$

```
[4]: plt.axhline(0, color = 'gray', lw = 1)
# Itérer sur une liste
x_lst = [1/(k*np.pi) * np.sin(k * wt) for k in range(1, 10)]
# Convertir en np
x_np = np.asarray(x_lst, dtype=np.float32)
# Transformer le vecteur x_np en une matrice de 9 colonnes
x_np.reshape(tot_pts, 9)
# Valeur moyenne = 0.5
x_app = 0.5 + np.sum(x_np, axis = 0)

plt.plot(t, x_app, label = r'$\hat{x}(t) = 0.5 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^9 \frac{\sin(2k\pi \frac{t}{T})}{k}$')

plt.xlim(-2, 7)
plt.ylim(-0.5, 1.5)

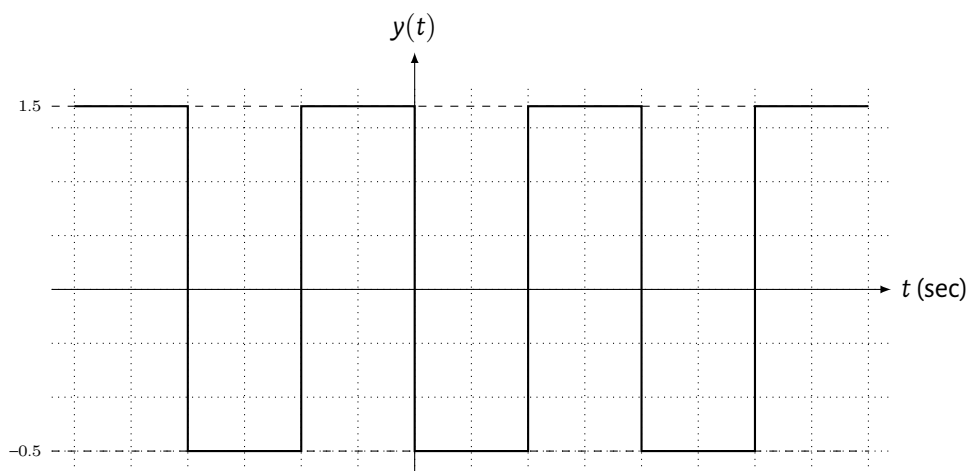
plt.legend(fontsize = 13, fancybox = True, framealpha = 0.3, loc = 'best')
plt.title("Signal approximé")
plt.xlabel('$t$ (sec)')
plt.show()
```



**Manipulation N° 4 :**

Il s'agit de faire les activités suivantes :

- Déterminer le code qui permet de créer la fonction  $x$ ;
- Quelles lignes permettent de représenter la courbe de  $x$ ;
- À partir du code de la cellule 4, expliquer comment construire le signal approché  $x_{\text{app}}$ ;
- Le graphe ci-dessous représente l'évolution d'un signal carré  $y$ , de période  $T = 2$  sec et de rapport cyclique égal à 50 %.



- Écrire un code **Python** qui permet de générer et d'afficher le signal  $y$ ;
- Décomposer  $y$  en sa série de Fourier;
- Implémenter vos résultats théoriques en **Python** (10 harmoniques!);
- Afficher le signal approché.

## 4 | Transformée de Fourier



Le code est disponible via <https://github.com/a-mhamdi/cosnip/> → Python → sig-proc  
→ fourier-transform.ipynb

Rappelons d'abord la définition de la transformée de Fourier d'un signal  $x$ , soit encore  $\mathfrak{F}\{x(t)\}$  qu'on dénote par  $\mathcal{X}(f)$  :

$$\mathcal{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi ft} dt$$

Par examen de cette transformation, nous observons qu'il est impossible d'implémenter cette intégrale en temps continu sur un ordinateur. Ce dernier ne travaille que sur des valeurs discrètes, nous ferons recours à la *Transformée de Fourier Discrète*. Elle consiste d'abord à discrétiser et à tronquer  $x$  en une série  $x_0, \dots, x_{n-1}$ . Les coefficients discrets de  $\mathcal{X}(f)$  sont calculés par la suite conformément à la formule suivante :

$$X_l = \sum_{p=0}^{n-1} x_p e^{-\frac{2j\pi pl}{n}}, \quad \text{avec } l = 0, \dots, n-1$$

Néanmoins, le calcul des coefficients  $X_l$ , pour  $l = 0, \dots, n-1$ , à partir de la définition est souvent gourmand en temps. Un autre algorithme très répandu dans les applications d'ingénierie est la *Transformée de Fourier Rapide*, souvent abrégée *FFT*. Cette approche de calcul permet de réduire énormément la complexité du calcul des termes susmentionnés.

Une explication détaillée avec une implémentation en **Python** est accessible via le lien suivant : <https://towardsdatascience.com/fast-fourier-transform-937926e591cb>

Commençons d'abord par importer les modules requis

```
[1]: %matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use('ggplot')
```

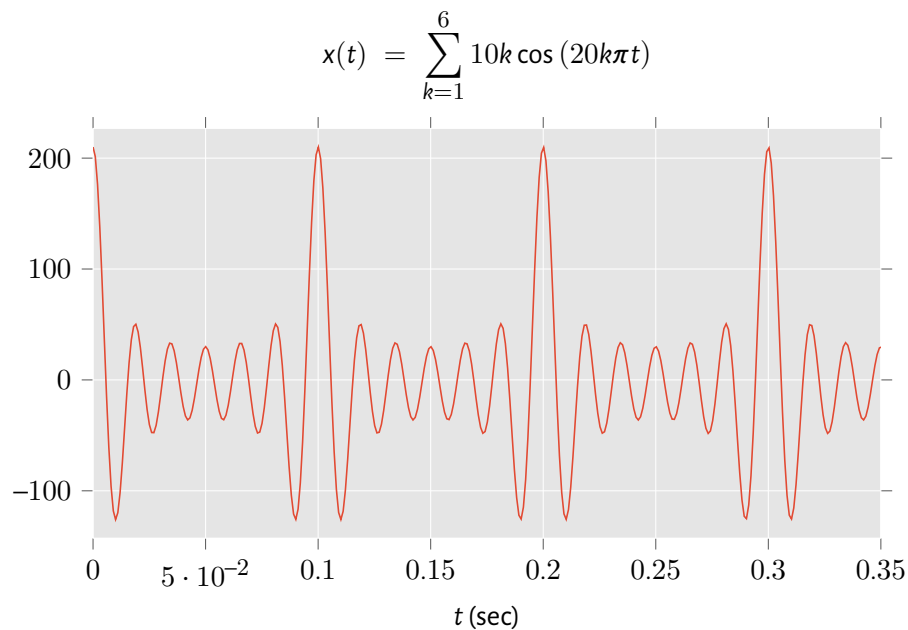
Nous générons maintenant un signal  $x$  défini par :

$$x(t) = \sum_{k=1}^6 \mathcal{A}k \cos(2\mathcal{A}k\pi t) \quad \text{avec } \mathcal{A} = 10 \text{ Hz.}$$

```
[2]: nb_pts = 1000 # Nombre de points
Delta_t = 0.001 # Période d'échantillonnage
t = np.linspace(0.0, nb_pts * Delta_t, nb_pts) # Vecteur temps
```

```
wt = 2.0 * np.pi * t
x_lst = [10 * k * np.cos(10 * k * wt) for k in range(1, 7)]
xmat_t = np.asarray(x_lst, dtype = np.float32)
x_t = np.sum(xmat_t, axis = 0)
```

```
[3]: plt.plot(t, x_t)
plt.title(r'$x(t) \;=\; \sum_{k=1}^6 10k \cos(20k\pi t)$')
plt.grid()
plt.xlim(0, 0.35)
plt.xlabel("$t$ (sec)")
plt.show()
```



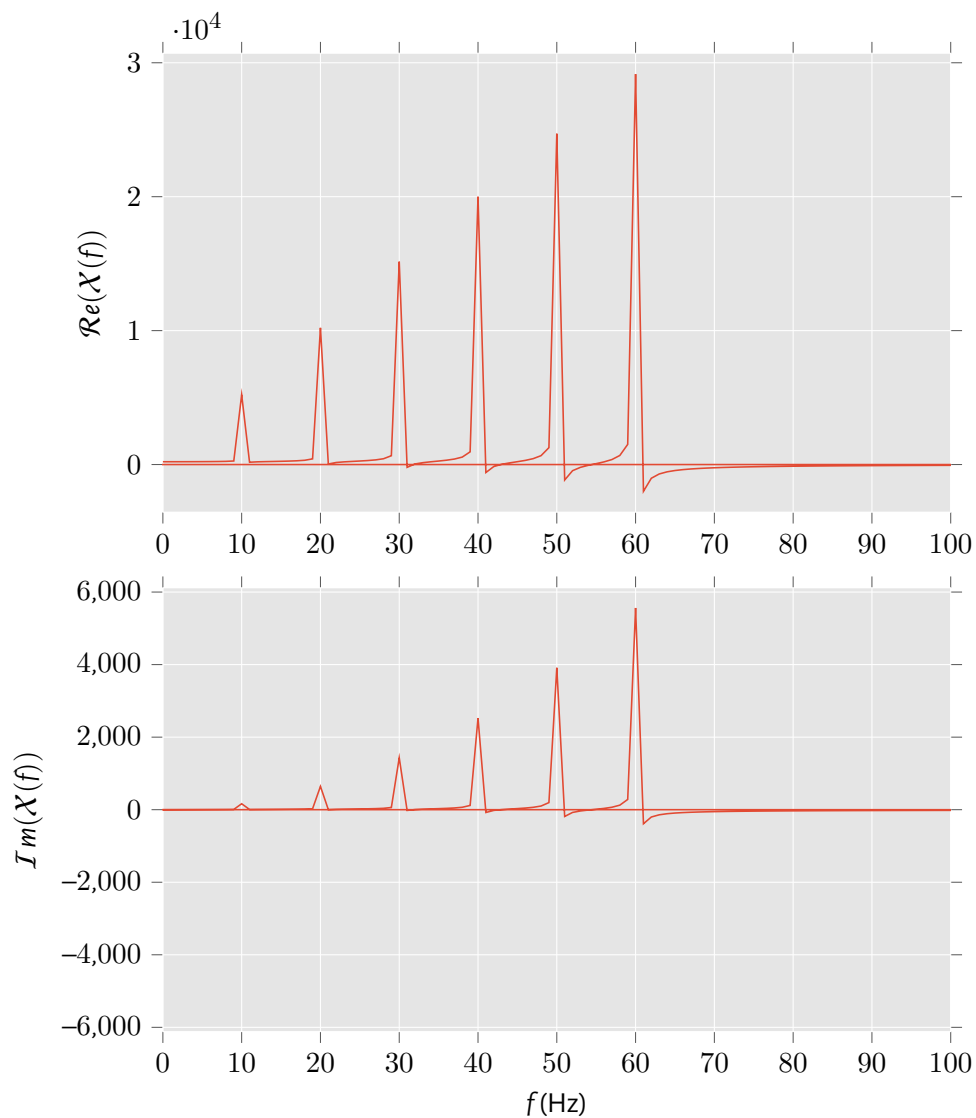
Appliquons la transformée Fourier rapide (*en* : *FFT* ou *Fast Fourier Transform*) de  $x(t)$ . La quantité  $\mathbf{x}_f$  dénote  $X(f)$ .

```
[4]: x_f = np.fft.fft(x_t)
freqs = np.fft.fftfreq(nb_pts, Delta_t)
```

Traçons par la suite les parties réelle et imaginaire de  $X(f)$

```
[5]: plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(freqs, x_f.real)
plt.xlabel("$f$ (Hz)")
plt.ylabel(r"$\mathcal{R}e(\mathcal{X}(f))$")
plt.xlim(0, 100)
plt.grid()
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(freqs, x_f.imag)
plt.xlabel("$f$ (Hz)")
plt.ylabel(r"$\mathcal{I}m(\mathcal{X}(f))$")
```

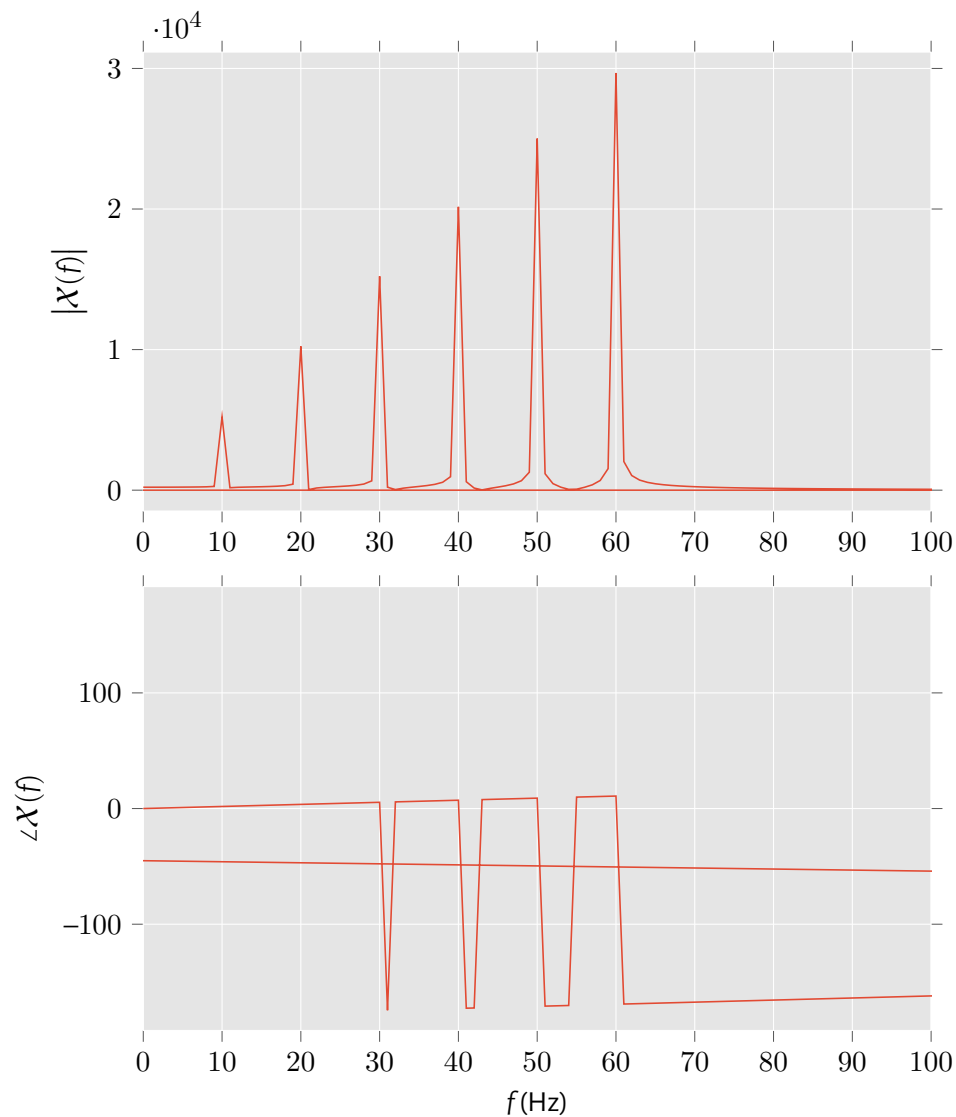
```
plt.xlim(0, 100)
plt.grid()
plt.show()
```



Une autre manière de présentation de  $X(f)$  est de tracer les graphes de  $|X(f)|$  et  $\angle X(f)$ .

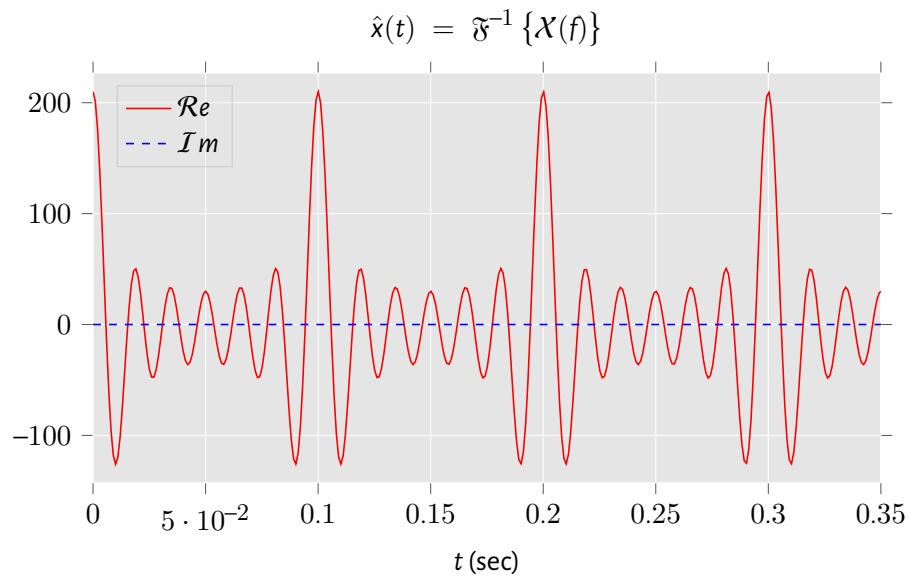
```
[6]: plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(freqs, np.abs(x_f))
plt.xlabel("$f$ (Hz)")
plt.ylabel(r"$\left|\mathcal{X}(f)\right|$")
plt.xlim(0, 100)
plt.grid()
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(freqs, np.angle(x_f, deg = True))
plt.xlabel("$f$ (Hz)")
plt.ylabel(r"$\angle\{\mathcal{X}(f)\}$")
plt.xlim(0, 100)
```

```
plt.grid()
plt.show()
```

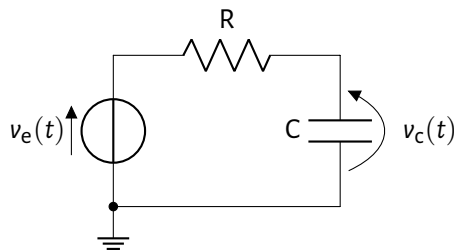


Essayons de reconstruire  $x(t)$  par application de la transformée de Fourier inverse **ifft** (en : *Inverse Fast Fourier Transform*).

```
[7]: x_t_app = np.fft.iff(x_f)
plt.plot(t, x_t_app.real, '-r', t, x_t_app.imag, '--b')
plt.title(r'$\hat{x}(t)$ \;=\; \frac{F}{f} \left\{ \mathcal{X}(f) \right\}$')
plt.legend(['$\mathcal{R}e$', '$\mathcal{I}m$'], fancybox = True, framealpha=0.3, loc = 'best')
plt.grid()
plt.xlim(0, 0.35)
plt.xlabel("$t$ (sec)")
plt.show()
```

**Manipulation N° 5 :**

On considère le circuit RC suivant :



On rappelle qu'un tel circuit pour un condensateur initialement déchargé, c.-à-d.  $v_c(t=0) = 0$ , est régi par l'équation différentielle suivante :

$$\tau \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_e(t), \quad \text{avec } v_c(t=0) = 0,$$

où  $\tau = 1$  sec désigne la constante de temps du montage.

**a)** On opère d'abord dans le domaine temporel :

- Calculer sa réponse impulsionnelle  $h(t)$ ;
- Tracer la courbe de  $h$  pour  $0 \leq t \leq 10$  sec;
- Écrire le code **Python** pour le calcul et le traçage du module et de l'argument de  $\hat{\mathcal{H}}(f)$  dans un repère semi-logarithmique :

$$\hat{\mathcal{H}}(f) = \mathcal{F}\{h(t)\};$$

**b)** On considère par la suite le domaine fréquentiel. L'opérateur de la dérivation dans l'espace temporel est équivalent à une multiplication par  $j\omega = 2j\pi f$  dans le domaine spectral :

$$\frac{dv_c}{dt} \longrightarrow 2j\pi f \mathcal{V}_c(f), \quad \text{où } \mathcal{V}_c(f) = \mathcal{F}\{v_c(t)\}.$$

- Partant de l'équation descriptive du système, écrire  $\mathcal{H}(f)$  :

$$\mathcal{H}(f) = \frac{\mathcal{V}_c(f)}{\mathcal{V}_e(f)}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathcal{V}_c(f) = \mathfrak{F}\{v_c(t)\}, \\ \mathcal{V}_e(f) = \mathfrak{F}\{v_e(t)\}. \end{cases}$$

- Proposer les instructions **Python** qui permettent de tracer le module et l'argument de  $\mathcal{H}(f)$  sur une échelle semi-logarithmique pour  $10^{-3} \text{ rad/sec} \leq 2\pi f \leq 10^3 \text{ rad/sec}$ ;
- Utiliser la fonction `ifft` pour trouver et représenter la fonction  $\hat{h}(t)$ ;
- Justifier la similitude entre les graphes de  $h(t)$  et  $\hat{h}(t)$ .





Le présent fascicule s'adresse aux étudiants de la spécialité **Génie Électrique**, parcours **Électronique Industrielle**.

Nous traitons essentiellement les parties suivantes :

① **Prise en main de Python**

S'initier avec la programmation d'un calcul scientifique sous Jupyter.

② **Convolution 1D & 2D**

Combiner deux fonctions pour en former une nouvelle, exprimant ainsi comment les variations d'une fonction sont modifiées par l'autre.

③ **Décomposition en série de Fourier**

Décomposer un signal périodique en ses composants sinus et cosinus.

④ **Transformée de Fourier**

Représenter un signal non périodique dans le domaine fréquentiel.

Python; Jupyter; NumPy; Matplotlib; calcul scientifique; convolution; série de Fourier; transformée de Fourier