

# Modélisation des Systèmes

## Notes de cours avec exercices corrigés <sup>a</sup>

Parcours : L2-S4 (All)

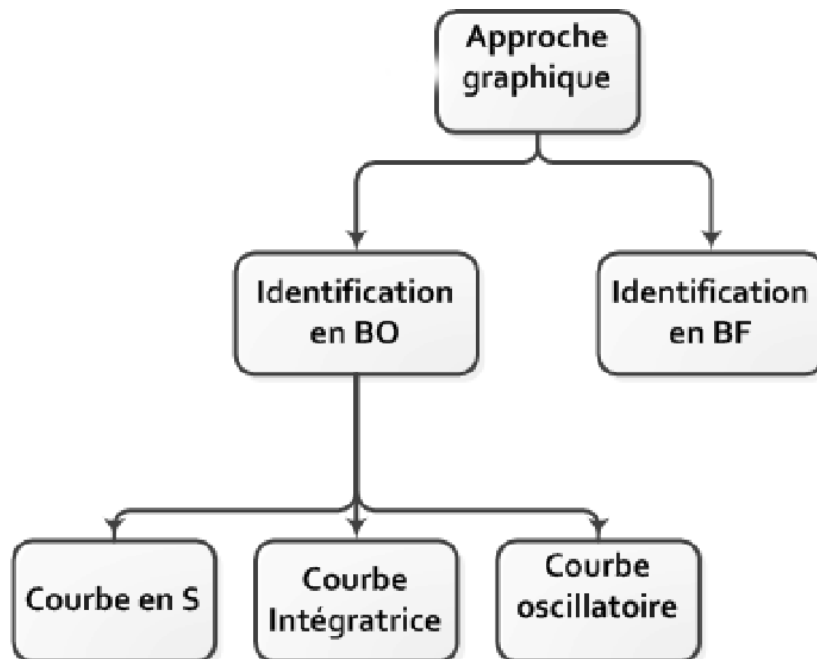
2020-2021

Réf. : GE-077

a. <https://github.com/a-mhamdi/isetbz/>

**Abdelbacet Mhamdi**

Dr.-Ing. en GE – Technologue en GE



- Strejc
- Strejc-Davoust
- Broïda
- De La Fuente

- Strejc-Davoust
- Rapide

Dépt. GE - Institut Supérieur des Études Technologiques de Bizerte

$\Sigma$

$\int$

$\frac{d}{dt}$

$\omega$

$J$



## À propos

Ce cours s'adresse plus particulièrement aux étudiants de la licence en génie électrique (**L2-S4**), parcours AUTOMATISMES ET INFORMATIQUE INDUSTRIELLE (**AII**).

Dans ce cours, nous traiterons essentiellement la modélisation d'un processus qui permet d'exposer les outils nécessaires pour conditionner l'analyse de ses propriétés. Un modèle peut être de type physique (*e.g.* simulateur), ou de type mathématique (*i.e.* un ensemble d'équations algébriques ou différentielles).

L'utilité de disposer d'un modèle réside essentiellement dans :

- la connaissance du comportement interne du système physique (modèle de connaissance). Ce dernier est nécessaire avant toute phase de dimensionnement et/ ou construction d'un système industriel ;
- la représentation externe ou globale (modèle de représentation). La nécessité d'une telle représentation apparaît surtout pour les raisons de commande d'un système dynamique et de sa surveillance afin de déceler les éventuelles anomalies par rapport à un comportement de référence.

Nous nous intéressons, dans ce module, au problème d'identification. Nous supposons que le modèle à identifier est connu et que ses paramètres sont identifiables. Il s'agit de présenter quelques méthodes graphiques d'identification des systèmes linéaires continus.

## FICHE DE L'UNITE D'ENSEIGNEMENT (UE)

CODE DE L'UE : UEF410		INTITULE DE L'UE : <b>Automatique 2</b>								
DOMAINE : SCIENCES, TECHNOLOGIES ET ÉTUDES TECHNOLOGIQUES										
Diplôme : Licence					MENTION : GÉNIE ELECTRIQUE					
PARCOURS : <b>Automatismes et Informatique Industrielle</b>							SEMESTRE : <b>S4</b>			
CODE ECUE	ELEMENTS CONSTITUTIFS DE L'UE (ECUE)	Vol. Horaire (en h) sur 14 semaines			Crédits	Coeff.	Evaluations			
		Cours	TD	TP			DC 40%	DS 60%	EC 60%	ES 40%
ECUEF411	Systèmes Echantillonnés	14	7		1.5	0.75	X	X		
ECUEF412	Modélisation des Systèmes	14	7		1.5	0.75	X	X		
ECUEF413	Atelier Automatique 2			21	1,5	0.75			X	X
Total		42	21		4,5	2,25				

Code : ECUEF412	Modélisation des systèmes
<b>OBJECTIFS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Comprendre les principales techniques de modélisation des systèmes.</li> </ul>
<b>CONTENU</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modélisation : Modèles de connaissance : équations de bilan, lois de la physique, modèles de comportement (fonctions de transfert continues et discrètes).</li> <li>Identification d'un système : objectif de l'identification, méthodes graphiques (par analyse indiciaire, essais du lâcher et essais de pompage).</li> <li>Représentation d'état continu.</li> <li>Représentation d'état discret.</li> </ul>
Extension : Bond Graph.	

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Identification graphique</b>	<b>1</b>
2.1	Analyse de courbe en S . . . . .	1
2.1.1	Méthode de Strejc . . . . .	1
2.1.2	Méthode de Strejc-Davoust . . . . .	3
2.1.3	Méthode de Broïda . . . . .	4
2.1.4	Méthode de De La Fuente . . . . .	5
2.1.5	Calcul d'aire . . . . .	6
2.2	Analyse de courbe intégratrice . . . . .	7
2.2.1	Méthode de Strejc-Davoust . . . . .	7
2.2.2	Méthode rapide . . . . .	8
2.3	Analyse de courbe avec oscillations . . . . .	9
2.4	Identification en boucle fermée . . . . .	10
2.5	Applications . . . . .	12
2.5.1	Courbe en S . . . . .	12
2.5.2	Identification en boucle fermée . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>18</b>
	<b>Références</b>	<b>18</b>
	<b>Annexes</b>	<b>20</b>

## 1 Introduction

L'identification d'un système dynamique réel (appelé objet) consiste à proposer une structure entre son entrée et sa sortie (appelé modèle), à partir de la connaissance expérimentale du couple entrée-sortie. Le modèle ainsi trouvé doit, dans son domaine de validité, reproduire un comportement identique à celui du système réel. Le modèle peut être un système physique (système physique équivalent ou modèle réduit) ou bien un système abstrait (modèle mathématique) [HA07]. Dans les applications industrielles, la majorité des lois de commande repose sur l'utilisation des modèles paramétriques décrits par des équations différentielles [Mar95].

Nous nous intéressons au modèle mathématique. Dans ce modèle, les coefficients caractérisant la structure de l'objet sont explicités, ceci en se basant sur un ensemble des méthodes graphiques (On en cite principalement les approches d'analyse de courbe en S, courbe intégratrice et oscillatoire).

## 2 Identification graphique

L'identification graphique consiste à proposer un modèle mathématique équivalent à un système physique, et cela, à travers des essais expérimentaux menés sur le processus en cours de fonctionnement [Pro97]. La méthode considérée convient alors si l'allure de la réponse présente une forme particulière, courbe en S, intégratrice ou oscillatoire. L'identification peut se faire soit en boucle ouverte soit en boucle fermée.

Les approches basées sur l'analyse des réponses temporelles après injection d'une entrée échelon ont fait l'objet de plusieurs références antérieures telles que [ÅH95; HLC01; Luy90; RK96; Shi96; SPK78]. Les procédures proposées se basent sur l'analyse des points spécifiques caractérisant la réponse indicielle d'un système.



Dans la suite, nous supposons que le système était initialement au repos, i.e.  $y(t = 0) = 0$ . Le signal d'entrée  $u(t)$  est un échelon unitaire, appliqué à l'origine du temps.

### 2.1 Analyse de courbe en S

L'ensemble des méthodes, explicitées dans ce paragraphe, peuvent s'appliquer à un système dont la réponse indicielle, représentée par fig. 1, ne présente pas de dépassement.

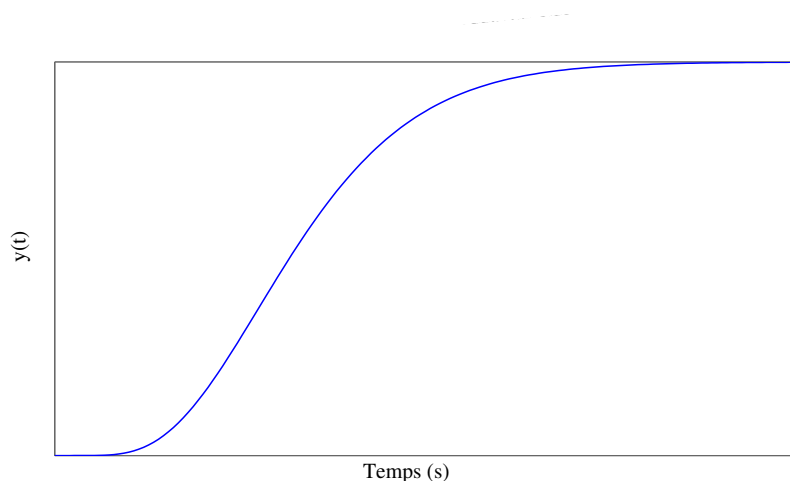


FIG. 1. Courbe en S

On se propose dans la suite de décrire de façon exhaustive le principe de chaque méthode.

#### 2.1.1 Méthode de Strejc

Cette méthode décrit le système qui présente un retard par une fonction de transfert de dimension finie.

La fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{1}{(1 + Ts)^n} \quad (1)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

$K$  Gain statique,

$T$  Constante de temps,

$n$  Ordre du système.

Pour identifier le système, la méthode consiste à :

1. Tracer la tangente au point d'inflexion pour déterminer les deux valeurs  $T_a$  et  $T_b$ . Voir fig. 2 pour la détermination de deux constantes.

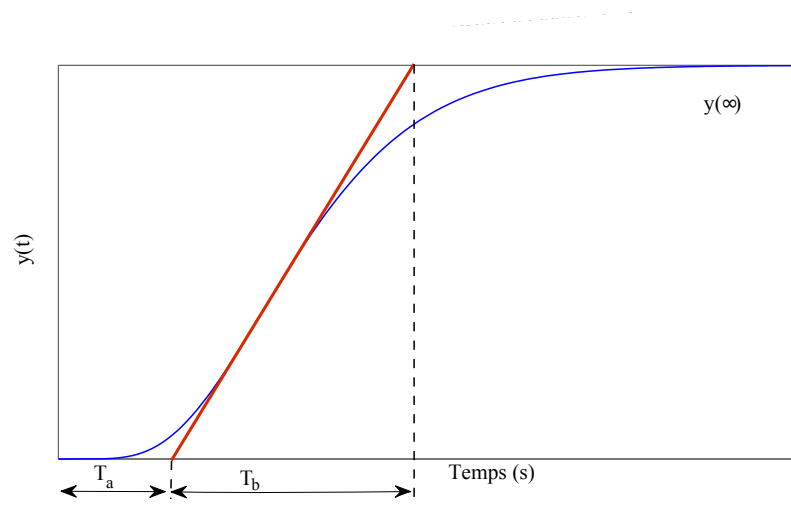


FIG. 2. Réponse temporelle d'un système linéaire

2. En se référant au nomogramme de fig. 3, le calcul de  $\frac{T_a}{T_b}$  permet de déterminer l'ordre  $n$  et en joignant le point correspondant au point caractérisant  $T_b$  on en déduit la valeur de  $T$ .

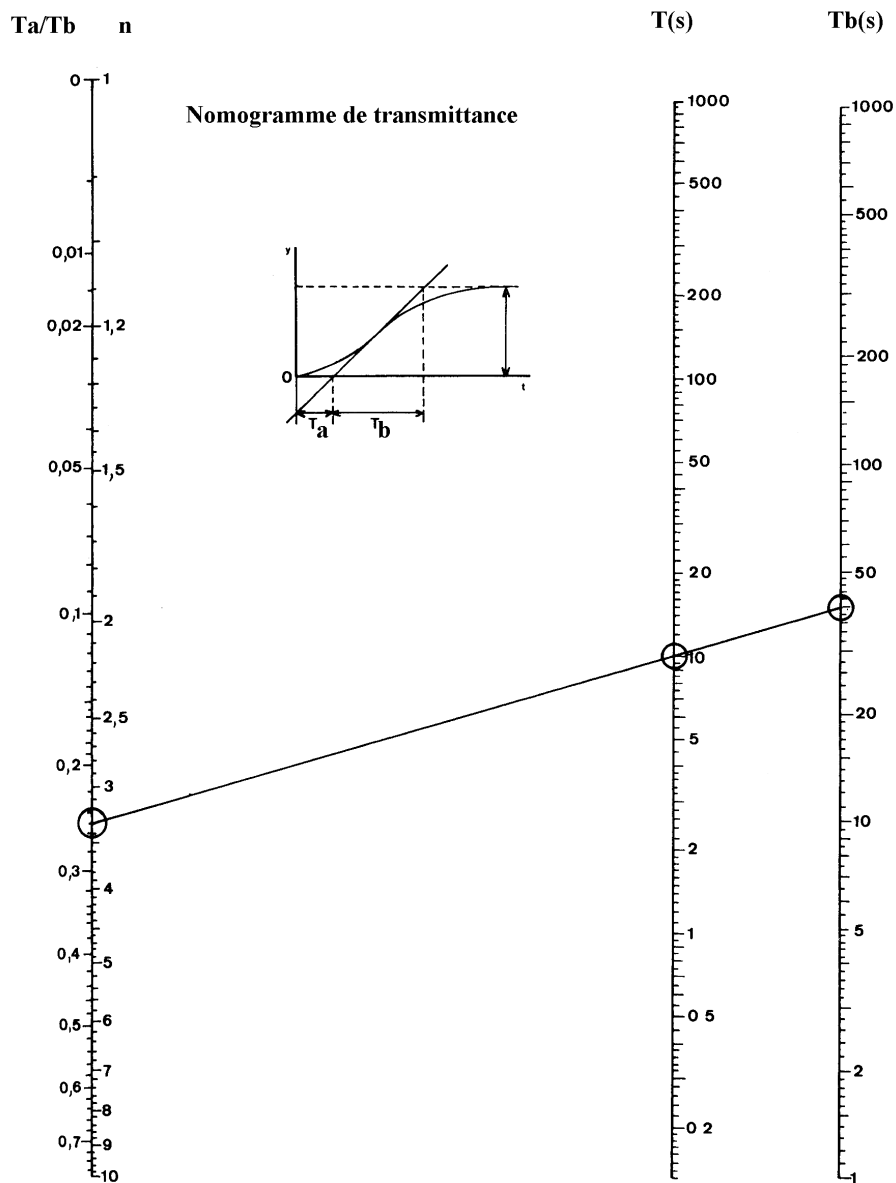


FIG. 3. Nomogramme pour modèle de Strejc

### 2.1.2 Méthode de Strejc-Davoust

Le système étudié sera identifié à la fonction de transfert de la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{e^{-\tau s}}{(1 + Ts)^n} \quad (2)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

$K$  Gain statique,

$T$  Constante de temps,

$\tau$  Retard,

$n$  Ordre du système.

On procède d'abord par le tracé de la tangente au point d'inflexion pour déterminer les deux valeurs  $T_a$  et  $T_b$ , indiquées sur fig. 4.

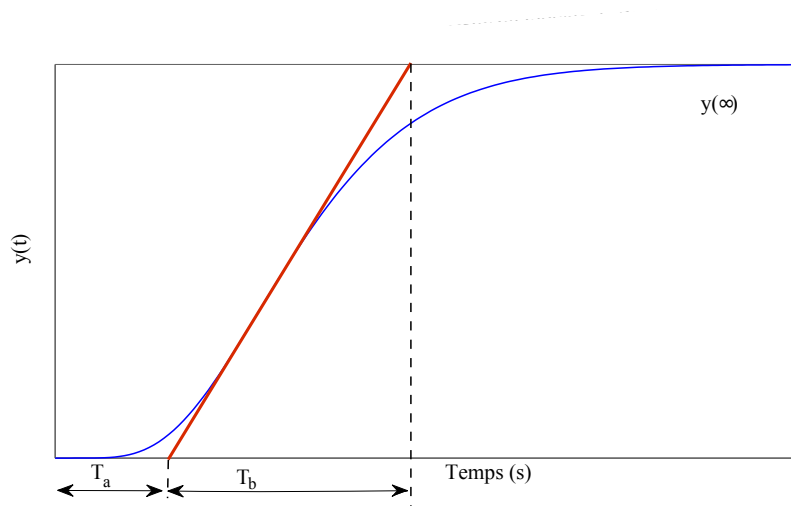


FIG. 4. Analyse d'une courbe en S par la méthode de Strejc-Davoust

En se basant sur les mesures de  $T_a$  et de  $T_b$ , indiquées par tab. 1, on suit les étapes suivantes pour déterminer les paramètres identifiés :

**Étape I** déterminer  $n$  de la table à partir de la valeur de  $\frac{T_a}{T_b}$ ,

**Étape II** déterminer  $T$  de la table à partir de la valeur de  $\frac{T_b}{T}$ ,

**Étape III** déterminer  $\tau = T_a - \frac{T_a}{T} T$ .

TAB. 1. Tableau pour déterminer le modèle de Strejc-Davoust

$n$	$\frac{T_a}{T}$	$\frac{T_b}{T}$	$\frac{T_a}{T_b}$
1	0	1	0
2	0.28	2.72	0.10
3	0.80	3.70	0.22
4	1.42	4.46	0.32
5	2.10	5.12	0.41
6	2.81	5.70	0.49

### 2.1.3 Méthode de Broïda

Le modèle de Broïda consiste à approcher le comportement du système réel par un premier ordre avec un retard.

La fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{e^{-\tau s}}{1 + Ts}. \quad (3)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

$K$  Gain statique,

$T$  Constante de temps,

$\tau$  Retard.

Le principe diffère par rapport à la méthode de Strejc-Davoust dans le sens où on ne cherche pas à faire coïncider la tangente au point d'inflexion mais plutôt d'ajuster les paramètres  $T$  et  $\tau$  pour que les courbes relatives à la réponse du système et du processus aient deux points communs. Ces points, comme l'indique fig. 5, correspondent à 28% et à 40% de  $y_\infty$ .



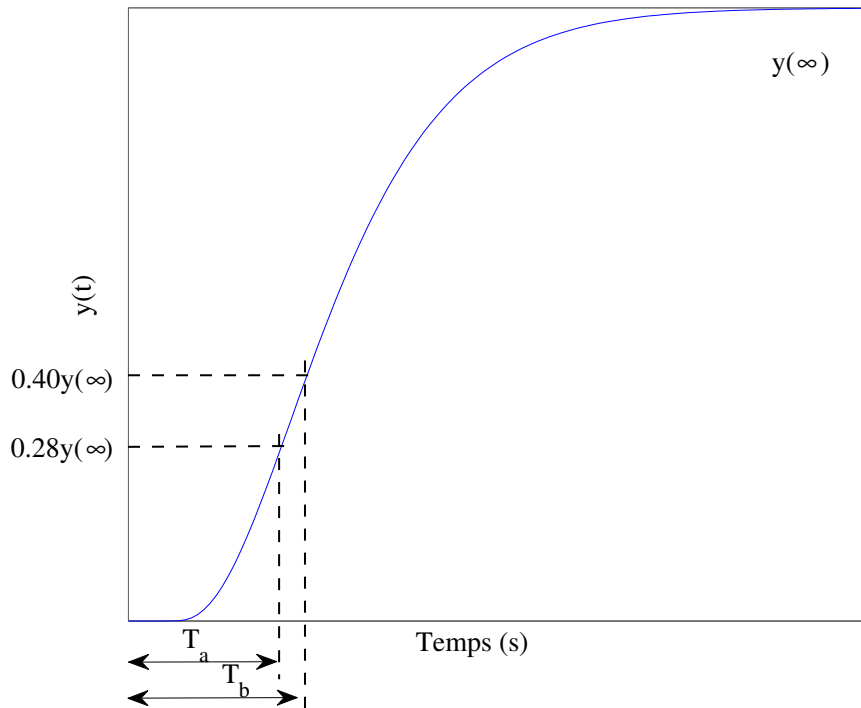


FIG. 5. Analyse d'une courbe en S par la méthode de Broïda

La résolution mathématique donne alors :

**Constante de temps**  $T = 5.5(T_b - T_a)$ ,

**Retard**  $\tau = 2.8T_a - 1.8T_b$ .

#### 2.1.4 Méthode de De La Fuente

La fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{e^{-\tau s}}{(1 + Ts)} \quad (4)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

$K$  Gain statique,

$T$  Constante de temps,

$\tau$  Retard.

Le principe est identique à celui de la méthode de Broïda, voir fig. 6, mais elle diffère dans le choix des deux points communs.

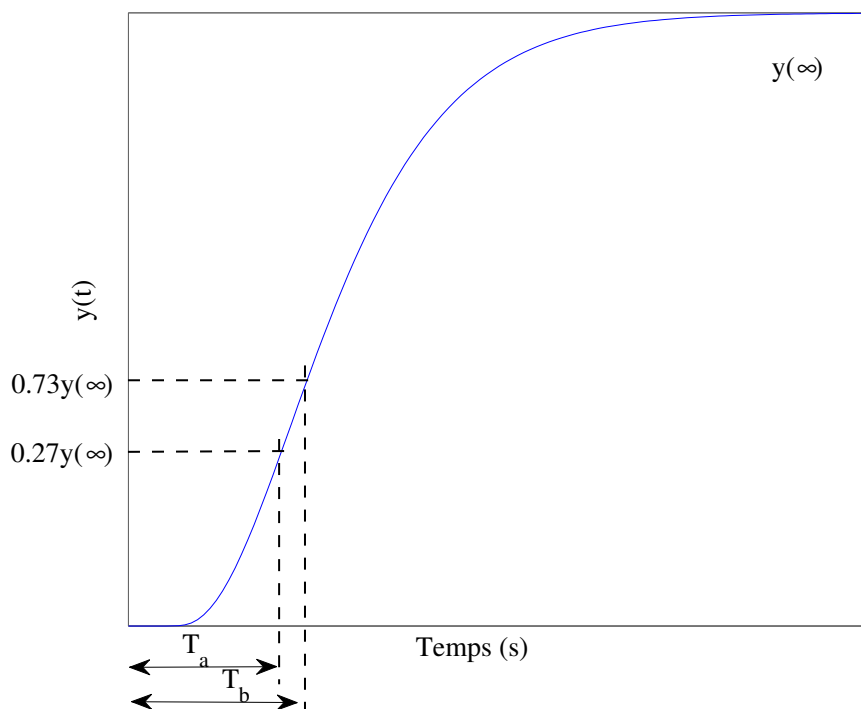


FIG. 6. Analyse d'une courbe en S par la méthode de De La Fuente

La résolution donne donc :

**Constante de temps**  $T = T_b - T_a$

**Retard**  $\tau = 1.31T_a - 0.31T_b$ .

### 2.1.5 Calcul d'aire

Un ensemble de techniques basées sur l'estimation de l'aire située sous la courbe de la réponse indicielle ont attiré l'attention de recherches extensives [ÅH95; Mar95; Shi96]. Une méthode moins sensible aux bruits est la méthode de calcul d'aire, qui a été proposée par [ÅH95]. Elle permet d'estimer simultanément le retard et les paramètres d'un système de premier ordre d'entrée  $u$  et de sortie  $y$ , décrit par une fonction de transfert de la forme suivante :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts} \quad (5)$$

où  $K$ ,  $T$  et  $\tau$  représentent respectivement le gain statique, la constante de temps et le retard.

Comme l'indique fig. 7, le gain  $K$  est déterminé à partir du régime permanent et est donné par  $\hat{K} = y_\infty/u_0$ . Pour pouvoir calculer la constante de temps  $\hat{T}$ , il est nécessaire de calculer l'aire  $A_1$  comprise entre la réponse du système, l'axe horizontal et la ligne verticale située à  $t = T_{ar}$ . Le point défini par  $t = T_{ar}$  correspond au temps de résidence moyen, il est donné par le ratio de la surface  $A_0$  par la quantité  $\hat{K}u_0$ . La surface  $A_0$  est délimitée par la sortie  $y(t)$ , l'axe des ordonnées et la tangente à la réponse  $y(t)$  au régime permanent. Le paramètre  $\hat{T}$  est donné par :  $\hat{T} = \frac{e^{A_1}}{\hat{K}u_0}$  et le retard  $\hat{\tau}$  est déduit à partir de la relation :  $\hat{\tau} = T_{ar} - \hat{T}$ .

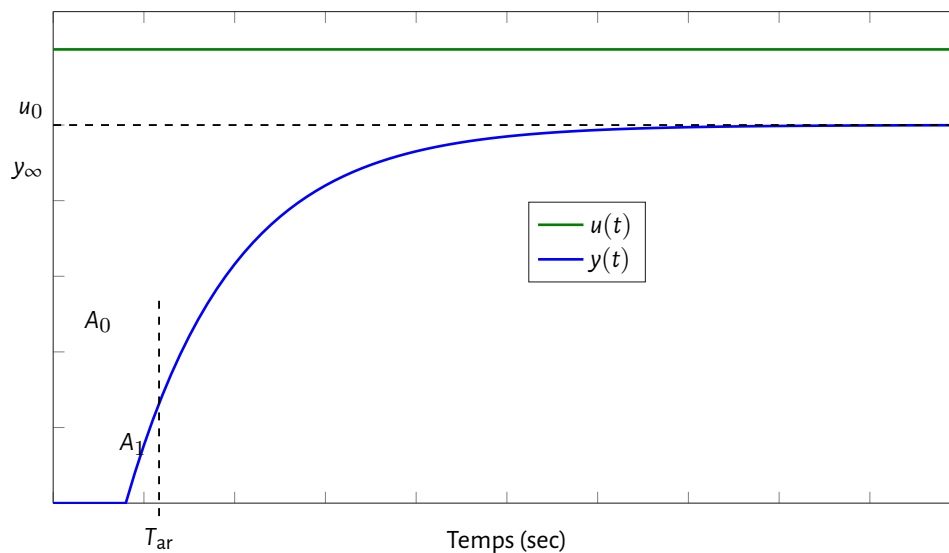


FIG. 7. Méthode de calcul d'aire pour une réponse indicielle monotone

Cette méthode est moins-sensible aux bruits hautes fréquences comparée aux autres méthodes graphiques. Néanmoins, la précision des résultats d'identification dépendent principalement du calcul des surfaces  $A_0$  et  $A_1$ . Il est utile alors d'avoir un essai d'expérimentation de durée large qui couvre la partie transitoire et le régime permanent du système. Ainsi, l'identification ne peut avoir lieu que lorsque le système atteint le régime permanent.

## 2.2 Analyse de courbe intégratrice

Deux méthodes seront explicitées dans ce paragraphe, qui peuvent s'appliquer à un système dont la réponse est variable à une entrée constante, représentée par fig. 8. Elle est dite alors évolutive.

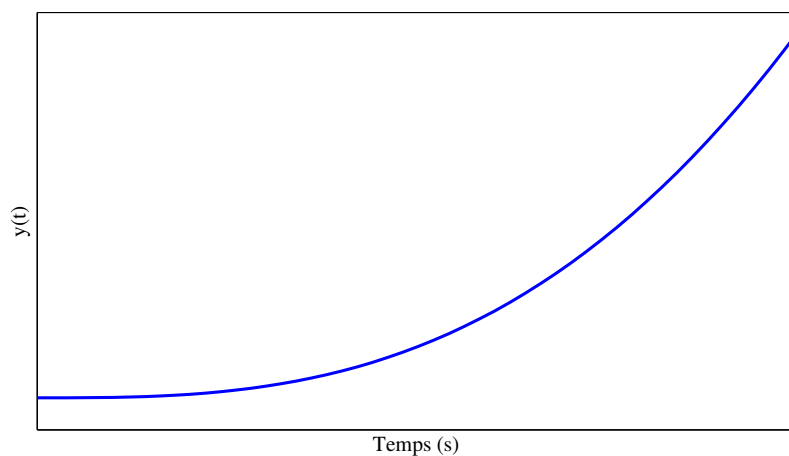


FIG. 8. Courbe Intégratrice

### 2.2.1 Méthode de Strejc-Davoust

La fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{e^{-\tau s}}{s(1 + Ts)^n}. \quad (6)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

$K$  Gain dynamique,

$T$  Constante de temps,

$\tau$  Retard,

$n$  Ordre du système.

Pour les déterminer, on procède comme suit :

On trace l'asymptote  $\Delta_1$  à la courbe  $y(t)$  de fig. 9,  $\Delta_2$  est sa parallèle passant par le point  $A'$ . La droite  $A'A$  est parallèle à l'axe du temps. La droite  $AC$ , perpendiculaire à  $A'A$  coupe la courbe  $y(t)$  en un point  $B$ .

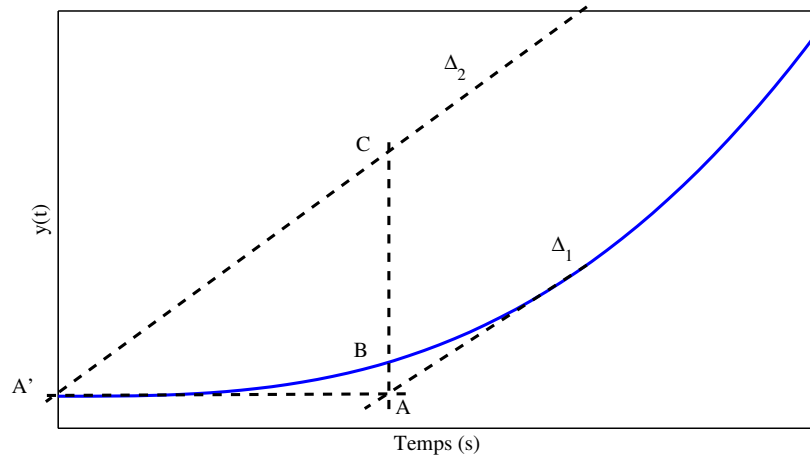


FIG. 9. Analyse d'une courbe intégratrice par la méthode de Strejc-Davoust

On calcule d'abord le rapport  $\frac{AB}{AC}$ . Ce rapport permet de déterminer la valeur de l'indice  $n$  à partir de fig. 10 [Pro97].

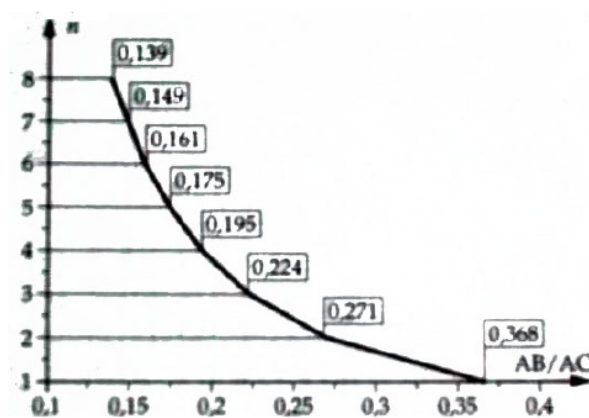


FIG. 10. Courbe donnant la valeur de  $n$  en fonction du rapport  $\frac{AB}{AC}$

Selon la nature de  $n$  (entier ou non), on calcule les valeurs de  $T$  et de  $\tau$  :

- Si  $n$  est entier, la constante de temps est  $T = \frac{A'A}{n}$  et le retard  $\tau$  est nul.
- Si  $n$  n'est pas entier, on détermine le nouveau rapport  $\frac{AB}{AC}$  qui correspond à la partie entière de  $n$ . Puis, on déplace  $\Delta_2$  parallèlement à  $\Delta_1$  vers  $\Delta_1$  afin de garantir ce rapport. La valeur du retard  $\tau$  correspond à cette translation. Le calcul de  $T$  est  $A'A = \tau + nT$ .

Tandis que le gain dynamique  $K$  est donnée par la relation suivante :  $K = \frac{AC}{A'A}$ .

### 2.2.2 Méthode rapide

La fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{e^{-\tau s}}{s}. \quad (7)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

$K$  Gain dynamique,

$\tau$  Retard

Le principe d'identification consiste à rapprocher la courbe initiale à une rampe de pente  $k$  retardée de  $\tau$ .

Pour déterminer le temps mort  $\tau$ , on trace l'asymptote  $\Delta_1$  à la courbe  $y(t)$  indiquée sur fig. 11. Le retard  $\tau$  est représenté par  $A'A$ . Le gain  $K$  correspond au coefficient directeur de la droite  $\Delta_1$  [Pro97].

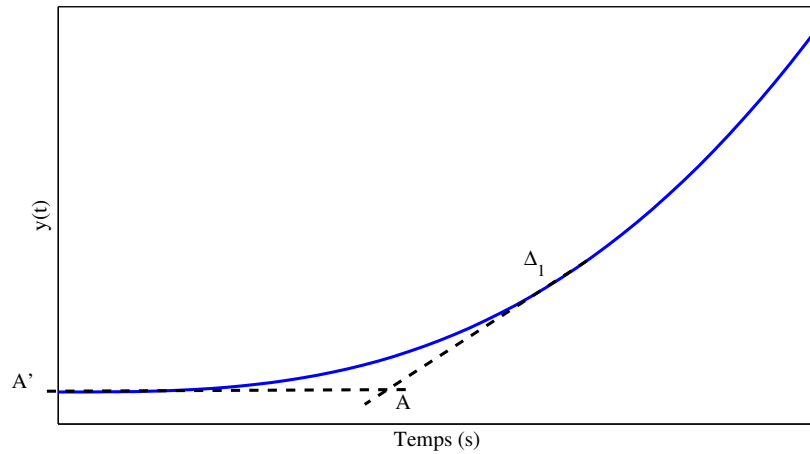


FIG. 11. Analyse d'une courbe intégratrice par une méthode rapide

### 2.3 Analyse de courbe avec oscillations

Lorsque la réponse indicielle d'un système présente des oscillations amorties (Fig. 12), il est possible d'envisager une modélisation mathématique par une fonction de transfert de deuxième ordre.

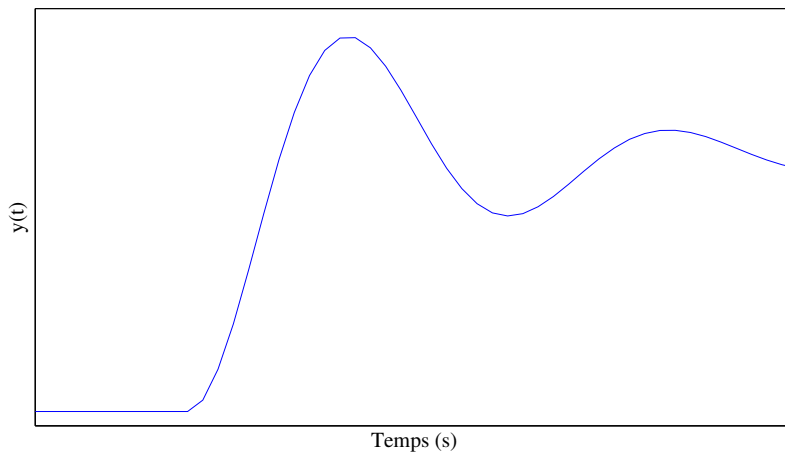


FIG. 12. Courbe avec oscillations

La fonction de transfert s'écrit alors sous la forme suivante :

$$H(s) = \frac{K\omega_0^2 e^{-\tau s}}{\omega_0^2 + 2\zeta\omega_0 s + s^2}. \quad (8)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

$K$  Gain statique,

$\zeta$  Coefficient d'amortissement,

$\omega_0$  Pulsation propre,

$\tau$  Retard.

Afin de déterminer ces paramètres, on mesure d'abord sur la courbe indiquée sur fig. 13, le premier dépassement  $D_1$ , la pseudo-période  $T$  et le temps  $t_1$  qui correspond à  $D_1$ .

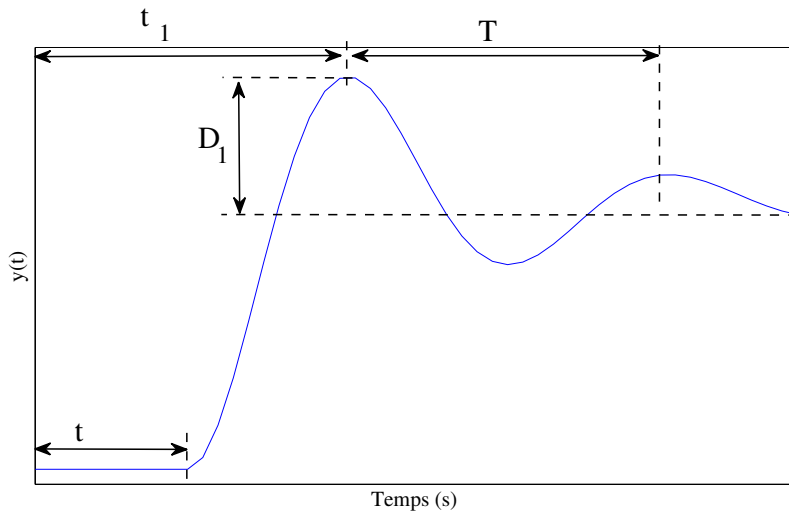


FIG. 13. Analyse d'une courbe avec oscillations

On rappelle ci-dessous les relations théoriques du second ordre donnant  $D_1$  et  $T$  :

**1<sup>er</sup> Dépassement**  $D_1 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$ ,

**Pseudo-période**  $T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$ .

À partir de ces deux équations, on peut calculer le coefficient  $\zeta$  et  $\omega_0$ . La mesure de  $t_1$  donne la valeur du retard  $\tau$  qui vaut  $t_1 - \frac{T}{2}$ . Le gain  $K$  est donné par :  $K = \frac{y(\infty)}{E_0}$ .

## 2.4 Identification en boucle fermée

Il est possible dans certains cas d'avoir le procédé bouclé avec un régulateur installé dans sa chaîne d'action, il est préférable dans ce cas de procéder par faire l'identification en chaîne fermée. Cette méthode présente également un avantage majeur c'est qu'on n'a pas besoin de mettre le régulateur hors service. L'idée de cette méthode repose sur deux essais : le premier convient pour savoir si le procédé est naturellement stable et le second essai consiste à ramener le système vers sa limite de stabilité en faisant augmenter le gain du système bouclé jusqu'à l'apparition des oscillations sinusoïdales justes entretenues.

Soit le système bouclé de fig. 14 :

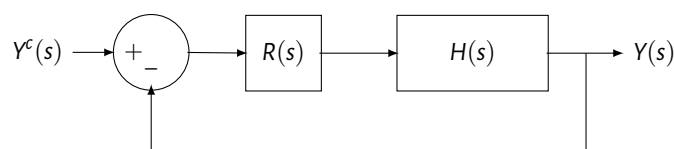


FIG. 14. Système en Boucle fermée

Le régulateur est à action proportionnelle avec un gain  $G_r$  faible (1 ou 0.5) [Pro97].

► 1<sup>er</sup>essai

On définit la classe d'un système par le nombre d'intégrations que présente sa fonction de transfert.

Tab. 2 indique l'écart entre l'entrée et la sortie en régime permanent pour deux types d'excitation : échelon et rampe.

TAB. 2. Précision d'un système asservi linéaire continu

Entrée	Classe du système		
	Classe 0	Classe 1	Classe > 2
<b>Échelon</b>	$\varepsilon_p = \frac{E_0}{1 + G_r G_p}$	$\varepsilon_p = 0$	$\varepsilon_p = 0$
<b>Rampe</b>	$\varepsilon_v = +\infty$	$\varepsilon_v = \frac{a}{G_r G_p}$	$\varepsilon_v = 0$

où  $G_r$  est gain de  $R(s)$  et  $G_p$  est celui du procédé.

L'amplitude d'un échelon est  $E_0$  et la pente d'une rampe est  $a$ .

Pour cela, on part du principe suivant : On excite le système par un échelon d'amplitude  $E_0$  :

- Si la mesure ne rejoint pas la consigne, il reste alors en régime permanent un écart de position qui vaut  $\varepsilon_p = \frac{E_0}{1 + G_r G_p}$ . Le procédé étudié est de classe 0.
- Si la mesure rejoint la consigne, le procédé étudié présente des intégrations. Pour savoir le nombre d'intégrations, on peut introduire une rampe de pente  $a$ .
  - Si la mesure ne rejoint pas la consigne, il reste alors en régime permanent un écart de traînage qui vaut  $\varepsilon_v = \frac{a}{G_r G_p}$ , le procédé étudié est de classe 1 et de gain  $G_p = \frac{a}{\varepsilon G_r}$ .
  - Il y'a plus qu'une intégration si l'écart  $\varepsilon$  est nul.

► 2<sup>ème</sup> essai

On augmente progressivement la valeur du gain  $G_r$  du régulateur et on impose à chaque fois une perturbation qu'on maintient pour courte durée. Puis, on l'annule, c'est à dire, qu'on remet de nouveau la consigne à sa valeur initiale. On continue l'expérience jusqu'à la mise du procédé en oscillation juste entretenue. Le signal de sortie est représenté sur fig. 15.

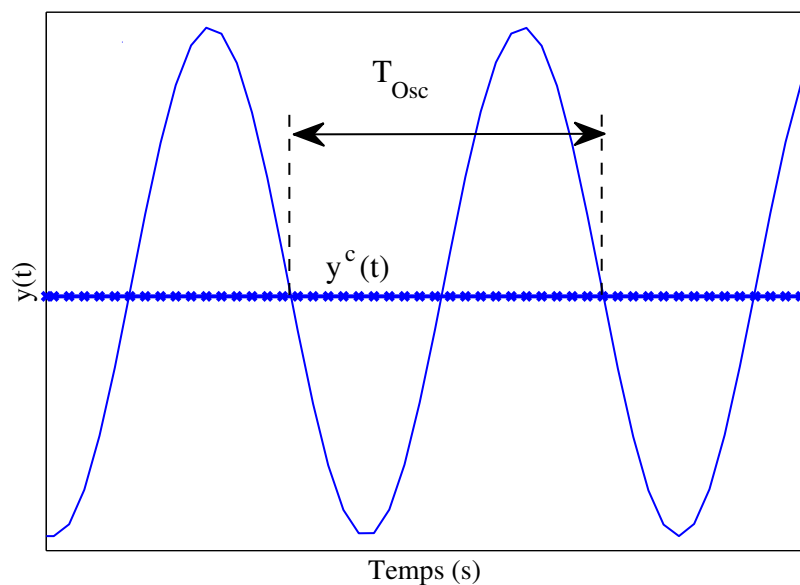


FIG. 15. Sortie en oscillation juste entretenue

La valeur du gain qui permet d'avoir une sortie harmonique est appelée gain critique, on la note  $G_{rc}$ .

Soit  $T_{osc}$  la période d'oscillation.

Pour avoir le phénomène de pompage, il faut que le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte coïncide avec le point  $(-1, 0)$ , c'est à dire que les deux conditions suivantes sont alors vérifiées :

$$|G_{rc}H(j\omega_{osc})| = 1 \quad \text{et} \quad \angle G_{rc}H(j\omega_{osc}) = -\pi$$

À partir de deux conditions citées précédemment, Broïda proposa un modèle, s'appliquant à un système naturellement stable de gain statique  $G_p$ , dont la fonction de transfert est la suivante :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts}, \quad (9)$$

avec :

$K$  Gain statique.

$T$  Constante de temps,

$\tau$  Retard.

La résolution donne les paramètres estimés suivants :

$$K = G_p,$$

$$T = \frac{T_{osc}}{2\pi} \sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1},$$

$$\tau = \frac{T_{osc}}{2\pi} \left( \pi - \arctan(\sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1}) \right).$$

## 2.5 Applications

### 2.5.1 Courbe en S

L'objectif de cette partie est de tester les méthodes citées précédemment. Pour cela, on part d'un système initial représenté par la fonction de transfert suivante :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Y(s)}{E(s)} \\ &= \frac{100}{(s+4)(s+5)(s+1)}. \end{aligned} \quad (10)$$

La réponse de ce système suite à une excitation indicielle unitaire est donnée par fig. 16 :

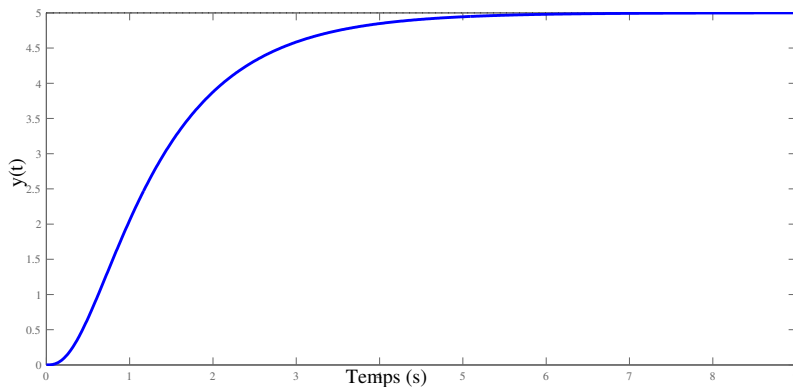


FIG. 16. Réponse indicielle du système de départ

Le gain statique est mesuré directement sur la courbe de sortie :  $K = 5$ .

On cherche par la suite à établir les modèles équivalents selon les différentes méthodes qu'on a déjà citées.



**Modèle de Strejc** On rappelle ici le modèle équivalent de Strejc :

$$H(s) = \frac{K}{(1 + Ts)^n}. \quad (11)$$

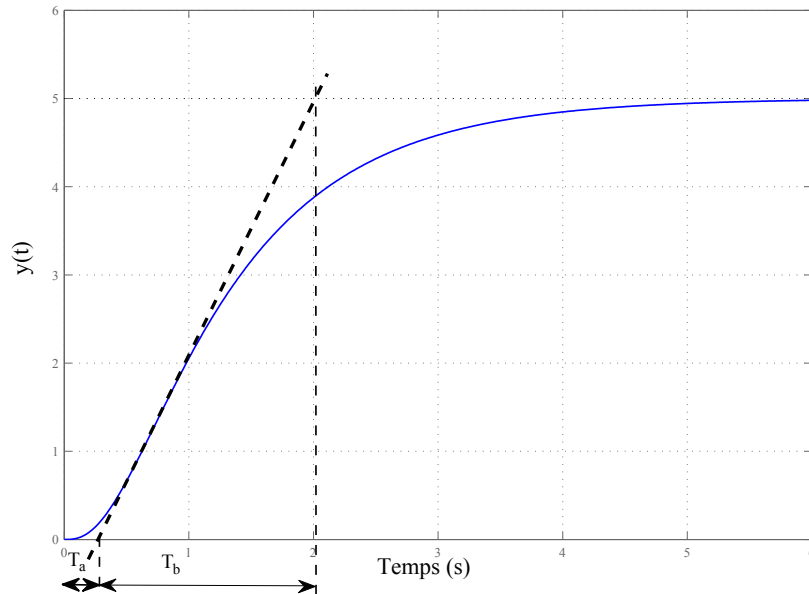


FIG. 17. Analyse de la réponse initiale par méthode de Strejc

On trouve :

$$T_a = 0.27 \text{ sec et } T_b = 1.73 \text{ sec.}$$

En se référant à la sous-sous section 2.1.1, on détermine les valeurs des paramètres de l'équation 11. Il s'agit d'un système de second ordre avec une constante de temps  $T$  égale à 0.7 sec. La réponse du système identifié est représentée sur fig. 18.

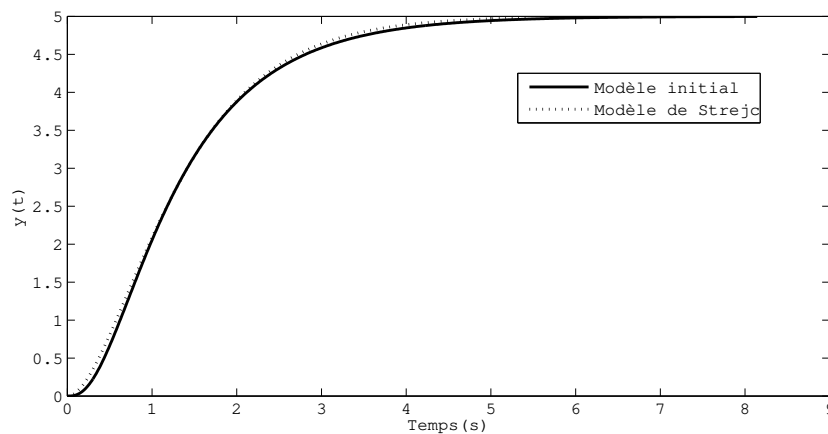


FIG. 18. Réponse du système initial et du système identifié

**Modèle de Strejc-Davoust** On rappelle ici le modèle équivalent de Strejc-Davoust :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(1 + Ts)^n}. \quad (12)$$

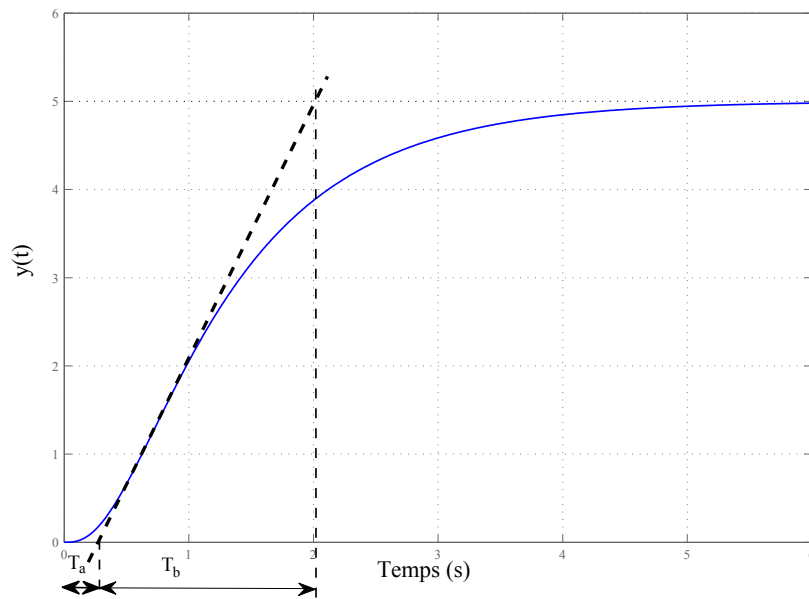


FIG. 19. Analyse de la réponse initiale par méthode de Strejc-Davoust

D'après le graphe de fig. 19, nous relevons les deux caractéristiques  $T_a = 0.27$  sec et  $T_b = 1.73$  sec.

En se référant à la sous-sous section 2.1.2, on détermine les valeurs des paramètres de l'équation 12. Il s'agit d'un système de second ordre avec une constante de temps  $T$  égale à 0.73 sec et un retard  $\tau = 0.0665$  sec. La réponse du système identifié est représentée sur fig. 20.

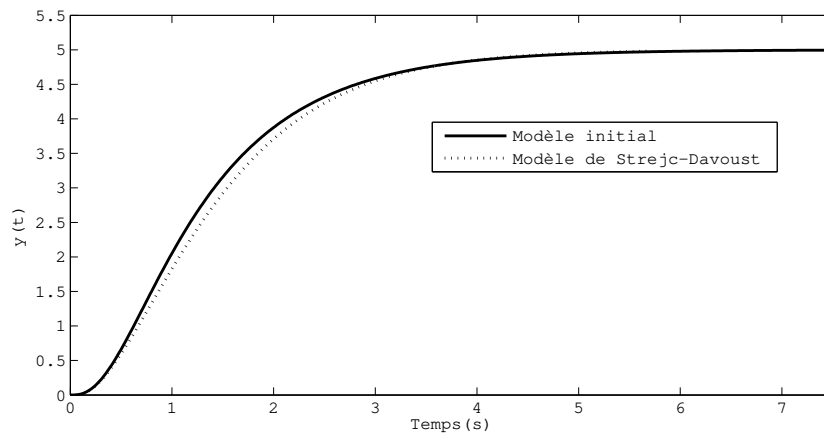


FIG. 20. Réponse du système initial et du système identifié

**Modèle de Broïda** On rappelle ici le modèle équivalent de Broïda :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts} \quad (13)$$

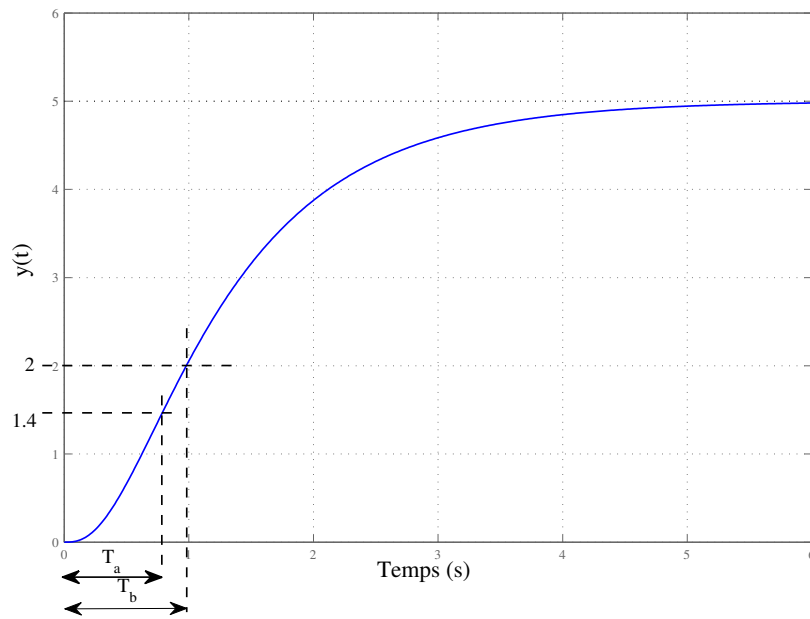


FIG. 21. Analyse de la réponse initiale par méthode de Broïda

On trouve :

$$T_a = 0.78 \text{ sec et } T_b = 0.98 \text{ sec.}$$

En se référant à la sous-sous section 2.1.3, on détermine les valeurs des paramètres de l'équation 13. Il s'agit d'un système de premier ordre avec une constante de temps  $T = 5.5 \times (T_b - T_a) = 1.1 \text{ sec}$  et un retard  $\tau = 2.8 \times T_a - 1.8 \times T_b = 0.42 \text{ sec}$ . Fig. 22 donne les courbes de réponse du système réel et du modèle de Broïda.

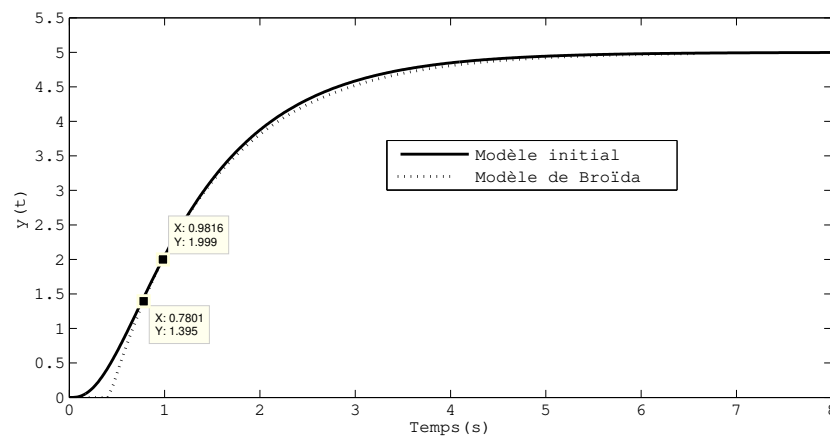


FIG. 22. Réponse réelle approchée par modèle de Broïda

La concordance des deux points qui correspondent à 28% et à 40% est bien vérifiée.

**Modèle de De La Fuente** On rappelle ici le modèle équivalent de De La Fuente :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts} \quad (14)$$

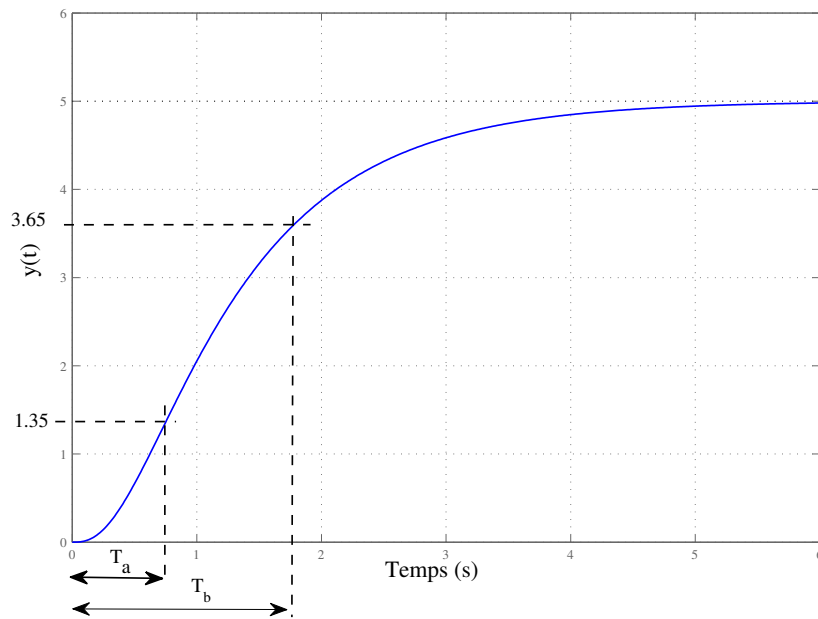


FIG. 23. Analyse de la réponse initiale par méthode de De La Fuente

On trouve :  $T_a = 0.75$  sec et  $T_b = 1.75$  sec.

En se référant à la sous-sous section 2.1.4, on détermine les valeurs des paramètres de l'équation 14 :

$$T = T_b - T_a = 1 \text{ sec},$$

$$\tau = 1.31 \times T_a - 0.31 \times T_b = 0.44 \text{ sec}.$$

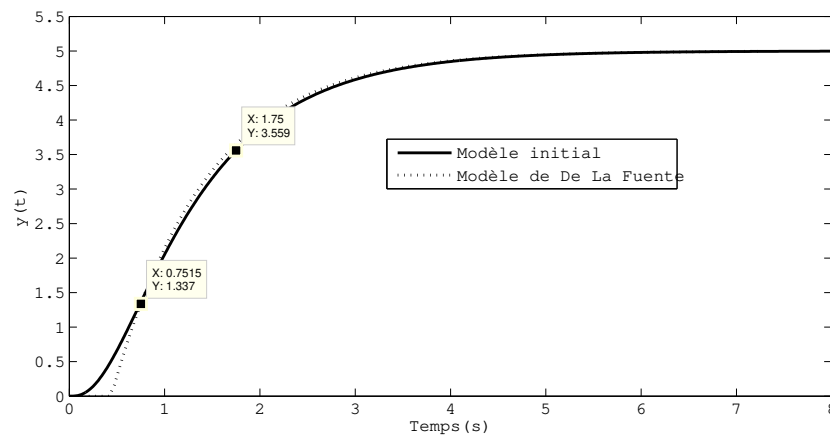


FIG. 24. Réponse réelle approchée par modèle de De La Fuente

Fig. 24 donne les courbes de réponse du système réel et du modèle de De La Fuente. La concordance des deux points qui correspondent à 27% et à 73% est bien vérifiée.

### 2.5.2 Identification en boucle fermée

On considère un système de deuxième ordre à numérateur non constant, décrit par la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{-0.1(s-1)}{(1+0.5s)^2}. \quad (15)$$

Ce système est mis en boucle fermée à retour unitaire, comme l'indique fig 25, avec un correcteur où on supprime les actions dérivées ou intégrales du correcteur.

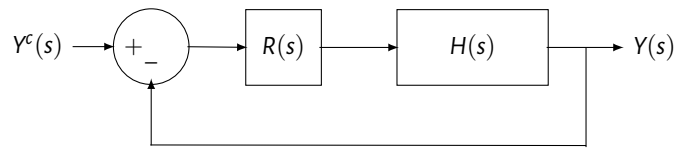


FIG. 25. Système en BF

On procède par appliquer une entrée indicielle d'amplitude  $E_0 = 10$ , et on choisit un gain du régulateur  $G_r = 1$ . Fig. 26 représente la réponse du système.

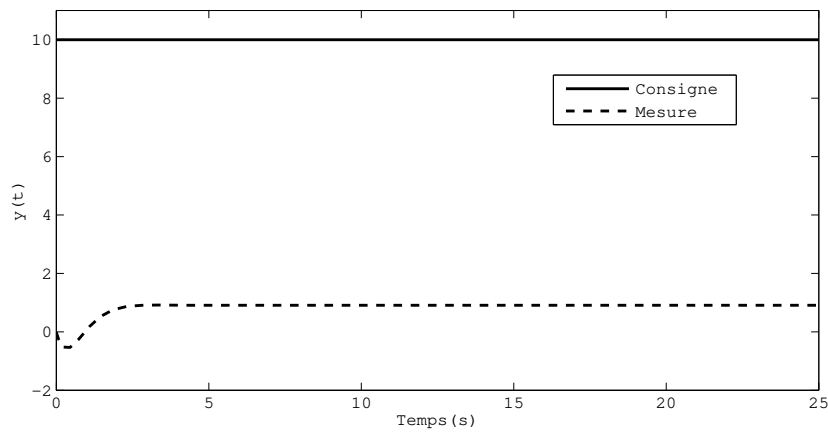


FIG. 26. Réponse du système suite à une excitation indicielle

On remarque que la sortie ne rejoint pas la consigne, il reste un écart en régime permanent qui vaut  $\varepsilon_s = 9.07$ . Le système est donc de classe 0, il ne présente pas d'intégration. Ce procédé possède donc un gain statique  $G_p = \frac{\frac{E_0}{\varepsilon_s} - 1}{G_r} = 0.102$ .

On change par la suite le gain du régulateur  $G_r$  de façon à avoir des oscillations juste entretenues, on note alors la valeur du gain critique :  $G_{rc} = 10$ . Les oscillations de la sortie sont indiquées sur fig. 27 avec une période  $T_{osc} = 2.228$  sec.

L'objectif est d'identifier le système par un modèle de Broïda qui satisfait l'équation 16 :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(1 + Ts)}. \quad (16)$$

Les paramètres à déterminer sont donc :

- $K = G_p = 0.102$
- $T = \frac{T_{osc}}{2\pi} \sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1} = 0.071 \text{ sec}$
- $\tau = \frac{T_{osc}}{2\pi} \left( \pi - \arctan \left( \sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1} \right) \right) = 1.044 \text{ sec}$

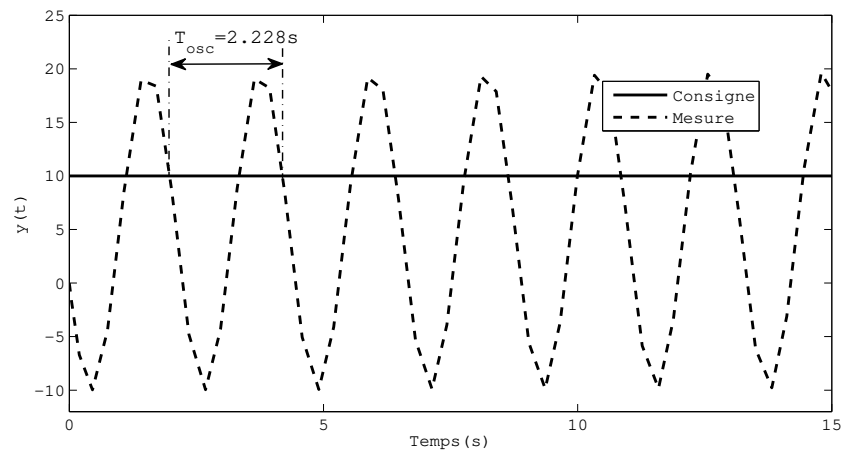


FIG. 27. Sortie en oscillations justes entretenues

### 3 Conclusion

Il résulte d'après ce qui précède qu'il n'y'a pas un modèle unique pour modéliser un système linéaire invariant dans le temps. L'ensemble des méthodes proposées ne permet pas de déterminer les valeurs des paramètres mais il permet de proposer une structure entre la sortie et une entrée indicielle.

Ces approches graphiques opèrent hors-ligne et nécessitent des signaux de grandes amplitudes. Certes, une grande amplitude du signal d'entrée peut mener à une bonne analyse de la réponse transitoire. Ceci cependant est soumis à des contraintes d'exploitation pratique du processus. En outre, cette contrainte peut paraître gênante pour les systèmes de dynamique faible ou présentant de longs temps morts. Parallèlement, les méthodes précédemment mentionnées échouent en présence du bruit ou des charges externes inattendues, puisqu'il est difficile de déterminer avec précision si le processus a atteint son régime permanent.

### Références

- [ÅH06] K. J. ÅSTRÖM et T. HÄGGLUND. *Advanced PID control*. International Society of Automation, 2006.
- [ÅH84] K. J. ÅSTRÖM et T. HÄGGLUND. "Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins". Dans : *Automatica* 20.5 (sept. 1984), pp. 645-651. DOI : [10.1016/0005-1098\(84\)90014-1](https://doi.org/10.1016/0005-1098(84)90014-1).
- [ÅH95] K. J. ÅSTRÖM et T. HÄGGLUND. *PID controllers : Theory, design, and tuning*. ISA : The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 1995 (cf. p. 1, 6).
- [Ari09] Y. ARIBA. *Sur la stabilité des systèmes à retards variant dans le temps : théorie et application au contrôle de congestion d'un routeur*. Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier) : Thèse, 2009.
- [ÅW89] K. J. ÅSTRÖM et B. WITTENMARK. *Adaptive control*. New York : Addison Wesley, 1989.
- [BC93] F. BENHAMOU et A. COLMERAUER, éd. *Constraint Logic programming, Selected Research*. MIT Press, 1993.
- [Bel06] L. BELKOURA. *Systèmes à retards : Identifiabilité et Identification*. Douz, Tunisie : École d'Automne d'Automatique de Douz, EAA'06, 2006.
- [Bel07a] L. BELKOURA. *Introduction aux distributions*. Djerba, Tunisie : L'Ecole d'Hiver : Maths pour la recherche et le développement, 2007.
- [Bel07b] L. BELKOURA. *Une introduction aux distributions*. Djerba, Tunisie : École d'hiver Maths pour la Recherche et le Développement, 2007.
- [BL02] E. BOUKAS et Z. LIU. *Deterministic and Stochastic Time Delay Systems*. Control Engineering. Birkhäuser, 2002.
- [BR06] L. BELKOURA et J.-P. RICHARD. "A distribution framework for the fast identification of linear systems with delays". Dans : *In 6th IFAC Workshop on Time Delay System* (2006).
- [BRF08] L. BELKOURA, J.-P. RICHARD et M. FLIESS. "A convolution approach for delay systems identification". Dans : *17th IFAC World Congress, Séoul, Corée* (2008).
- [BRF09] L. BELKOURA, J.-P. RICHARD et M. FLIESS. "Parameters estimation of systems with delayed and structured entries". Dans : *Automatica* 45 : 1117-1125 (2009).
- [C.80] B. C. *The long history of continued fractions and Padé approximants*. Springer-Verlag, 1980.

- [Dam94] M. DAMBRINE. *Contribution à l'étude de la stabilité des systèmes à retards*. Université des Sciences et Technologies de Lille : Thèse, 1994.
- [DL05] M. DI LORETO. *Analyse des systèmes à retards : Application du calcul par intervalles*. École Centrale de Nantes, Université de Nantes, France : Conférence : GDR Méthodes Ensemblistes pour l'Automatique, 2005.
- [FF96] J. M. FERNANDES et A. R. FERREIRA. "An all-pass approximation to time delay". Dans : *UKACC International Conference on CONTROL'96* : 1208-1213 (1996).
- [FSR03] M. FLIESS et H. SIRA-RAMIREZ. "An algebraic framework for linear identification". Dans : *ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations*, 9 (2003).
- [HA07] A. HADJ ABDELKADER. *Identification des systèmes linéaires*. Université ABOU BEKR BELKAID-Tlemcen, Faculté de Technologie, 2007 (cf. p. 1).
- [HLC01] H.-P. HUANG, M.-W. LEE et C.-L. CHEN. "A system of procedures for identification of simple models using transient step response". Dans : *Industrial & Engineering Chemistry Research* 40.8 (avr. 2001), pp. 1903-1915. DOI : [10.1021/ie0005001](https://doi.org/10.1021/ie0005001) (cf. p. 1).
- [Luy90] W. L. M. LUYBEN. *Process modeling, simulation and control for chemical engineers*. McGraw-Hill, juin 1990 (cf. p. 1).
- [Mar95] T. E. MARLIN. *Process control. Designing processes and control system for dynamic performance*. New York : McGraw-Hill, 1995. DOI : [10.1016/s0959-1524\(96\)90017-7](https://doi.org/10.1016/s0959-1524(96)90017-7) (cf. p. 1, 6).
- [Mor11] F. MORGAN. *Time Delay*. Xlibris Corporation, 2011.
- [Mun05] T. MUNTEAN. *Puces très performantes*. Terres du futur, Les Editions UNESCO. Paris : Hatier, 2005.
- [NG04] S. NICULESCU et K. GU. *Advances In Time-delay Systems*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer-Verlag, 2004.
- [Par03] S. A. R. PAREDES. *Stabilité des systèmes à retard de type neutre*. Institut National Polytechnique de Grenoble : Thèse, 2003.
- [Pro97] P. PROUVOST. *Contrôle régulation*. 9 rue Méchain, 75014 Paris : NATHAN Technique, 1997 (cf. p. 1, 8-10).
- [Ren+05] X. REN et al. "On line identification of continuous time systems with unknown time delay". Dans : *IEEE Tac*, 50(9) : 1418-1422 (2005).
- [Ric03] J.-P. RICHARD. "Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems". Dans : *Automatica* 39 : 1667 - 1694 (2003).
- [Ric06] J.-P. RICHARD. *Une introduction aux particularités et généralités des systèmes à retards*. Douz, Tunisie : Ecole d'Automatisme d'Automatique : La commande numérique des procédés industriels, 2006.
- [Ric07] J.-P. RICHARD. *Equations différentielles à retards*. Djerba, Tunisie : L'Ecole d'Hiver : Maths pour la recherche et le développement, 2007.
- [Ric98] J.-P. RICHARD. *Delay Systems*. Mathematics and computers in simulation. Elsevier, 1998.
- [RK96] G. P. RANGIAH et P. R. KRISHNASWAMY. "Estimating second-order dead time parameters from underdamped process transients". Dans : *Chemical Engineering Science* 51.7 (avr. 1996), pp. 1149-1155. DOI : [10.1016/s0009-2509\(96\)80013-3](https://doi.org/10.1016/s0009-2509(96)80013-3) (cf. p. 1).
- [Rod78] F. RODDIER. *Distributions et transformation de Fourier*. 28, rue Beaunier, 75014 Paris : Ediscience International, 1978.
- [Sch66] L. SCHWARTZ. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris : 2nd ed, 1966.
- [Seu06] A. SEURET. *Commande et observation des systèmes à retards variables : théorie et applications*. Université des Sciences et Technologies de Lille et École Centrale de Lille : Thèse, 2006.
- [Shi96] F. G. SHINSKEY. *Process control systems : Application, design, and tuning*. McGraw-Hill Professional, 1996 (cf. p. 1, 6).
- [Smy98] G. SMYTH. *Polynomial approximation*. Encyclopedia of Biostatistics, 1998.
- [SPK78] K. R. SUNDARESAN, C. C. PRASAD et P. R. KRISHNASWAMY. "Evaluating parameters from process transients". Dans : *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development* 17.3 (juil. 1978), pp. 237-241. DOI : [10.1021/i260067a004](https://doi.org/10.1021/i260067a004) (cf. p. 1).
- [Via09] G. VIAL. *Etude d'un système chimique à retard*. ENS Cachan Bretagne : Agrégation externe de mathématiques, 2009.
- [Yam84] Y. YAMAMOTO. "A note on linear input/ output maps of bounded type". Dans : *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29 : 733-734 (1984).
- [Yeg06] N. YEGANEFAR. *Définitions et analyse de stabilités pour les systèmes à retard non linéaires*. Université des Sciences et Technologies de Lille et l'École Centrale de Lille : Thèse, 2006.
- [Zho06] Q.-C. ZHONG. *Robust Control of Time-delay Systems*. London : Springer Verlag, 2006.

# Annexes

RÉSUMÉ



DOCUMENT ANNEXE

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(1 + Ts)^n}$$

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts}$$

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{s(1 + Ts)^n}$$

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2 e^{-\tau s}}{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n s + s^2}$$

K où  $G_p$  : Gain statique/dynamique

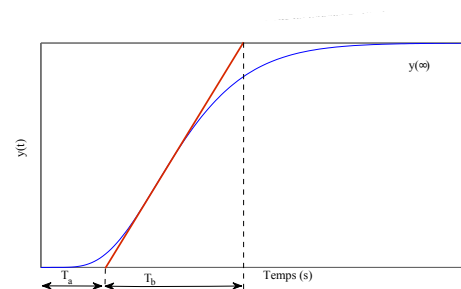
$G_r$  : Gain du régulateur

$T$  : Constante de temps

$\tau$  : Retard du procédé

$n$  : Ordre du système

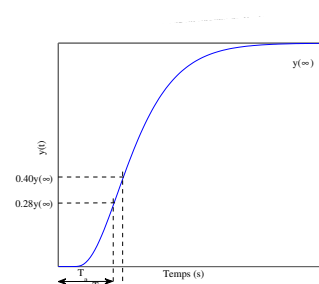
STREJC-DAVOUST



- ①  $\frac{T_a}{T_b} \rightarrow n$
- ②  $\frac{T_b}{T} \rightarrow T$
- ③  $\tau = T_a - \frac{T_a}{T} T$

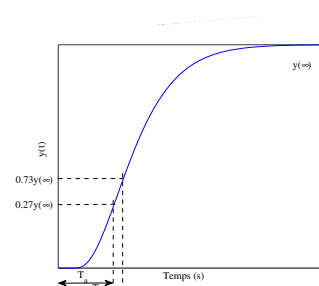
n	$\frac{T_a}{T}$	$\frac{T_b}{T}$	$\frac{T_a}{T_b}$
1	0	1	0
2	0.28	2.72	0.10
3	0.80	3.70	0.22
4	1.42	4.46	0.32
5	2.10	5.12	0.41
6	2.81	5.70	0.49

BROÏDA



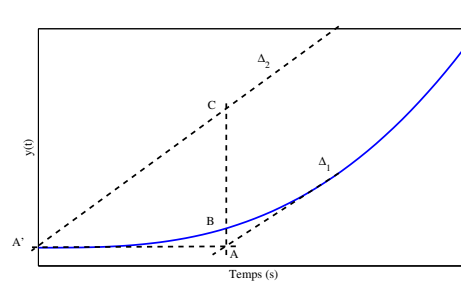
- ①  $T = 5.5(T_b - T_a)$
- ②  $\tau = 2.8T_a - 1.8T_b$

DE LA FUENTE

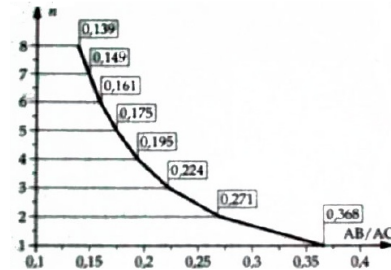


- ①  $T = T_b - T_a$
- ②  $\tau = 1.31T_a - 0.31T_b$

STREJC-DAVOUST



- ①  $K = \frac{AC}{A'A}$



Si n est entier

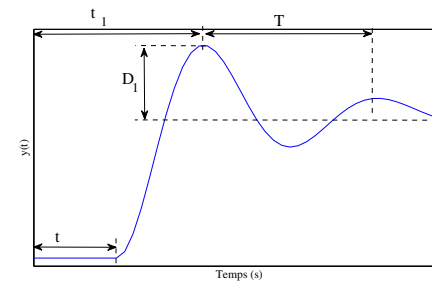
- ②  $T = \frac{A'A}{n}$
- ③  $\tau = 0$

Si n n'est pas entier

On détermine le nouveau rapport  $\frac{AB}{AC}$  qui correspond à la partie entière de  $n$ . Puis, on déplace  $\Delta_2/\Delta_1$  vers  $\Delta_1$  afin de garantir ce rapport.

- ②  $\tau$  correspond au déplacement.
- ③  $T = \frac{A'A - \tau}{n}$

OSCILLATOIRE



- ①  $D_1 = e^{-\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$
- ②  $T = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$
- ③  $\tau = t_1 - \frac{T}{2}$

BOUCLE FERMÉE

u(t)	Classe du système		
	Classe 0	Classe 1	Classe > 2
$\Gamma(t)$	$\varepsilon_p = \frac{E_0}{1 + G_r G_p}$	$\varepsilon_p = 0$	$\varepsilon_p = 0$
$r(t)$	$\varepsilon_v = +\infty$	$\varepsilon_v = \frac{a}{G_r G_p}$	$\varepsilon_v = 0$

$$|G_{rc}H(j\omega_{osc})| = 1 \text{ et } \angle G_{rc}H(j\omega_{osc}) = -\pi$$

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts}$$

- ①  $K = G_p$
- ②  $T = \frac{T_{osc}}{2\pi} \sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1}$
- ③  $\tau = \frac{T_{osc}}{2\pi} \left( \pi - \arctan(\sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1}) \right)$

# Annexes

ÉPREUVES CORRIGÉES



Ce document comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Le sujet est constitué de 2 exercices qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Les règles suivantes s'appliquent :



Ne rien écrire dans ce tableau.

- ❶ Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée.
- ❷ L'usage de tout matériel électronique, sauf calculatrice, est strictement interdit.
- ❸ La rigueur de la rédaction entrera pour une part importante dans la notation.

Exercice	Barème	Note
1	10	
2	10	
Total	20	

**Exercice N°1**

⌚ 30mn | (10 points)

La fonction de transfert d'un processus peut être exprimée par :

$$\mathcal{H}_1(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts} \quad (1)$$

Afin de déterminer les paramètres du modèle, on a appliqué à l'entrée du système un échelon. Sa réponse indicielle est illustrée par le graphique de fig. 1.

- (a) (5 points) Déterminez les paramètres de la fonction  $\mathcal{H}_1$  en utilisant la méthode de **Broïda**.

Les paramètres exacts de la simulation sont :

**Gain statique  $K$  : 3;**

**Constante de temps  $T$  : 4 sec;**

**Retard  $\tau$  : 2 sec.**

- (b) (5 points) Déterminez les paramètres de la fonction  $\mathcal{H}_1$  en utilisant la méthode de **De La fuente**.

Les paramètres exacts de la simulation sont :

**Gain statique  $K$  : 3;**

**Constante de temps  $T$  : 4 sec;**

**Retard  $\tau$  : 2 sec.**

NE RIEN ÉCRIRE DANS CETTE ZONE

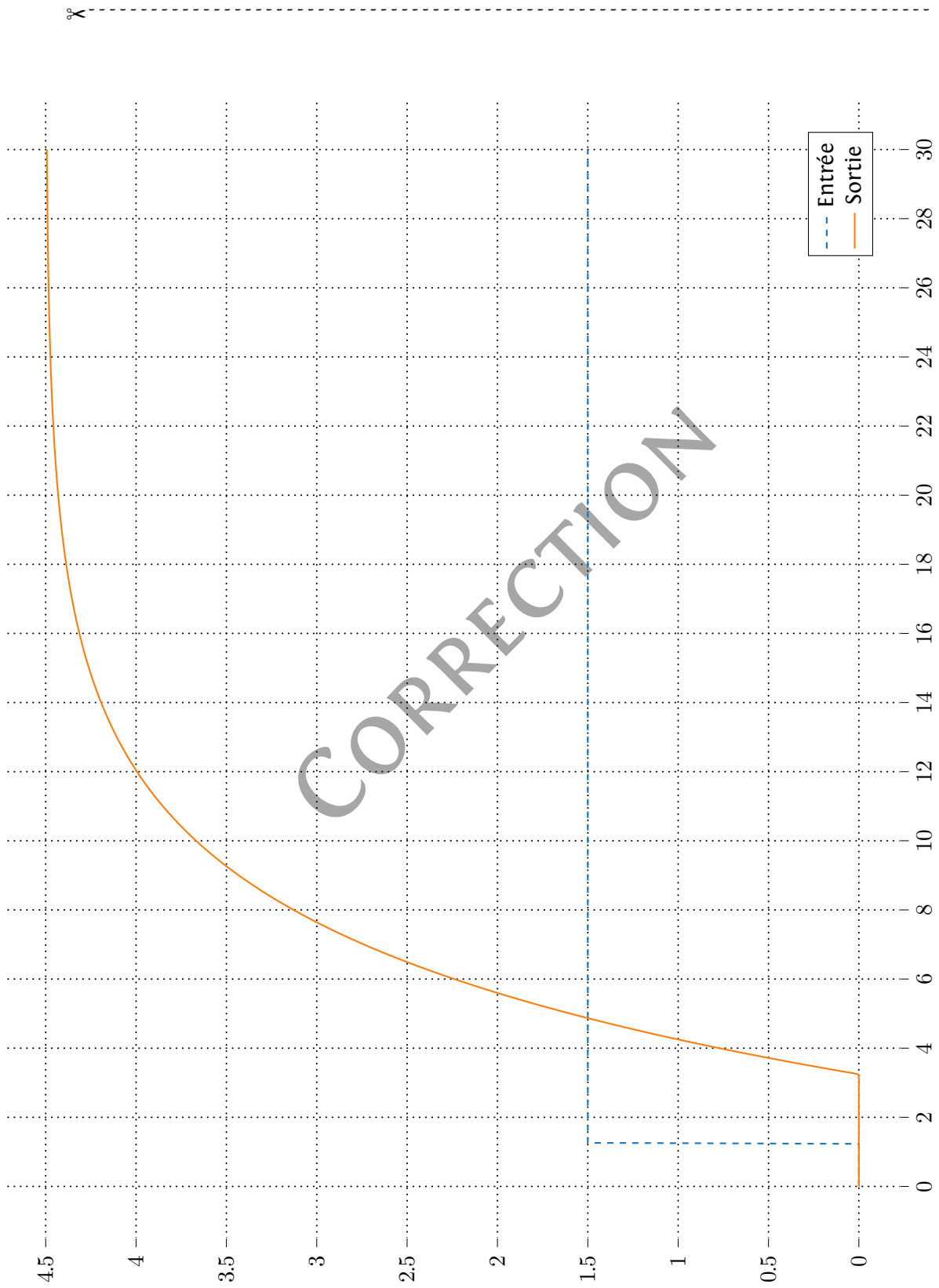


FIG. 1. Réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}_1(s)$

**Exercice N°2**

⌚ 30mn | (10 points)

Suite à l'application d'un échelon à l'entrée d'un système de fonction de transfert  $\mathcal{H}_2(s)$ , on prélève l'enregistrement de la sortie comme indiqué par fig. 2.

- (a) (4 points) Parmi les expressions suivantes, quelle fonction peut-on choisir pour modéliser le processus :

(Choisissez la bonne proposition en justifiant votre réponse.)

- ☐  $\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$   
☐  $\frac{Ke^{-\tau s}}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$   
☒  $\frac{K\omega_n^2 e^{-\tau s}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$   
☐  $\frac{K(1 - \tau s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

La réponse est pseudo-périodique avec un retard. Le système ainsi modélisé est à minimum de phase. Elle s'agit d'une fonction de transfert de second ordre ayant un facteur d'amortissement inférieure à l'unité. Les deux pôles de la fonction  $\mathcal{H}_2$  sont complexes conjugués, à partie réelle négative.

- (b) (6 points) À l'aide du graphe de fig. 2, déterminez tous les paramètres de la fonction  $\mathcal{H}_2(s)$ .

Les paramètres exacts de la simulation sont :

**Gain statique  $K$  :** 1.5;

**Pulsation naturelle  $\omega_n$  :** 0.5 rad/sec;

**Coefficient d'amortissement  $\zeta$  :** 0.35;

**Retard  $\tau$  :** 2 sec.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CETTE ZONE

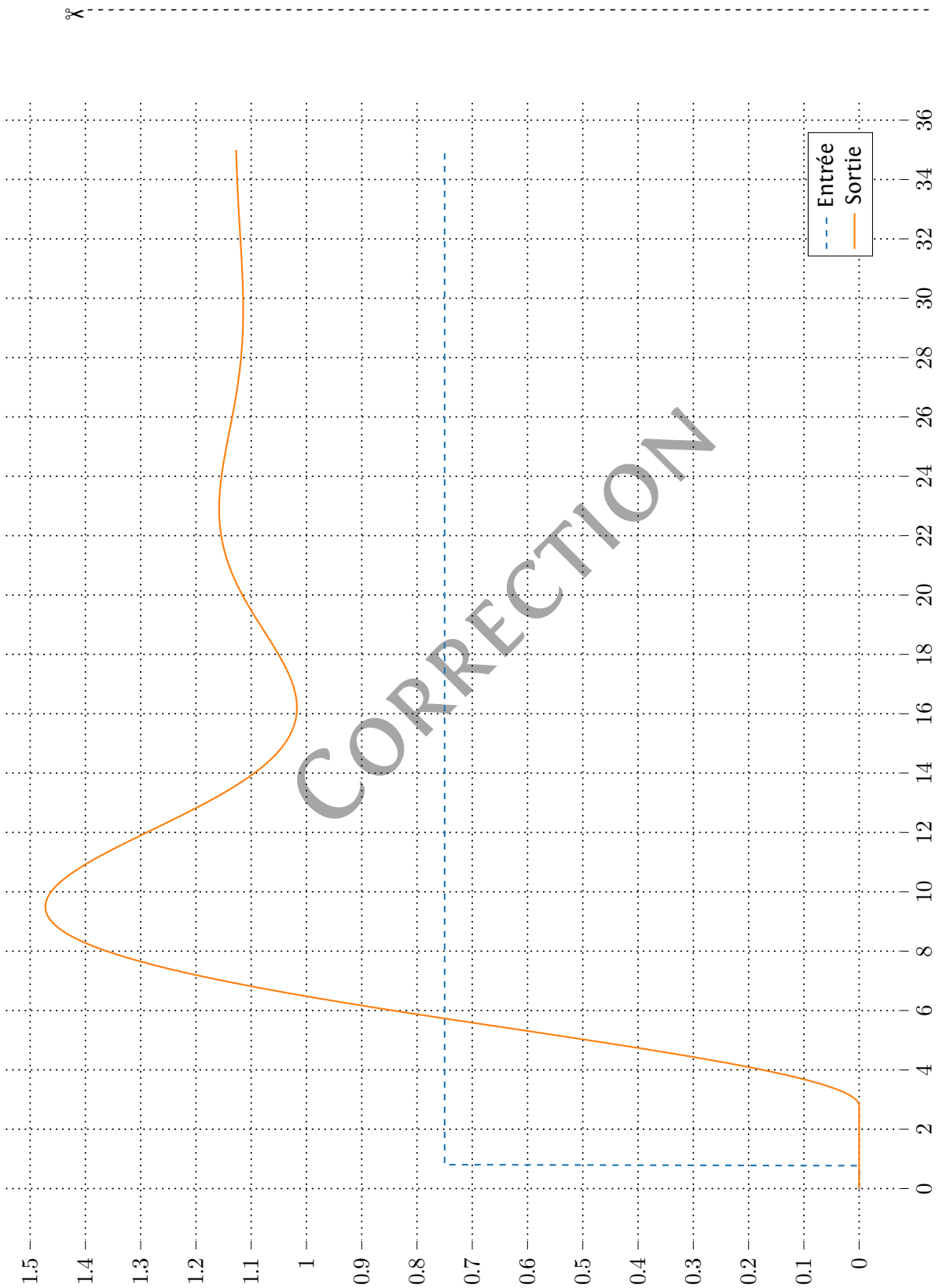


FIG. 2. Réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}_2(s)$



Ce document comporte **6** pages numérotées de **1/6** à **6/6**. Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Le sujet est constitué de **3** exercices qui peuvent être traités indépendamment les uns des autres.

Les règles suivantes s'appliquent :



Ne rien écrire dans ce tableau.

- ❶ **L'usage** de tout matériel électronique, sauf calculatrice, est strictement interdit.
- ❷ **La rigueur** de la rédaction entrera pour une part importante dans la notation.
- ❸ **Si l'espace** est insuffisant, veuillez continuer au verso ou annexer une feuille supplémentaire.

Exercice	Barème	Note
1	8	
2	8	
3	4	
Total	20	

**Exercice N°1**

⌚ 30mn | (8 points)

Le résultat d'un essai en boucle ouverte d'un système est illustrée par FIG. 1. Ce comportement est identique à celui d'un système de premier ordre avec retard.

- (a) (4 points) Déterminez les paramètres de la fonction  $\mathcal{H}_1$  en utilisant la méthode de **Broïda**.

**Les paramètres exacts de la simulation sont :**

**Gain statique  $K$  : 0.75;**

**Constante de temps  $T$  : 4 sec;**

**Retard  $\tau$  : 3 sec.**

- (b) (4 points) Déterminez les paramètres de la fonction  $\mathcal{H}_1$  en utilisant la méthode de **De La Fuente**.

**Les paramètres exacts de la simulation sont :**

**Gain statique  $K$  : 0.75;**

**Constante de temps  $T$  : 4 sec;**

**Retard  $\tau$  : 3 sec.**

NE RIEN ÉCRIRE DANS CETTE ZONE

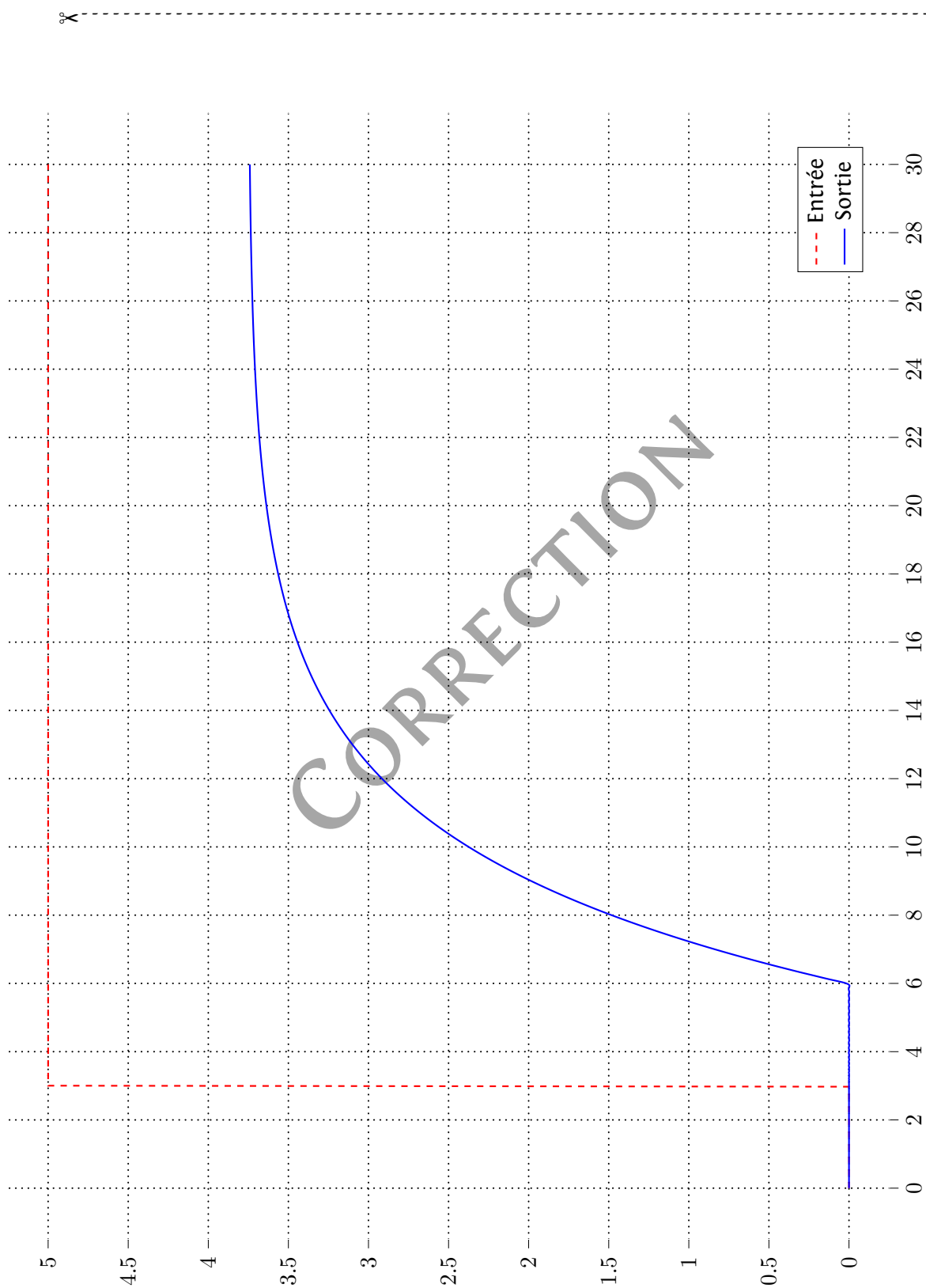


FIG. 1. Réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}_1(s)$



**Exercice N°2**

⌚ 30mn | (8 points)

En utilisant la méthode de **Strejc-Davoust**, on se propose d'identifier la fonction  $\mathcal{H}_2$ , d'entrée  $u$  et de sortie  $y$  dont la réponse indicielle est donnée par FIG. 2.

- (a) (1 point) Déterminez le gain statique  $K$ .

Le Gain statique est mesuré directement par la valeur finale de la sortie :

$$K = \frac{y_{\infty}}{u_{\infty}} = 5$$

- (b) (2 points) À partir du graphe, déterminez les deux constantes  $T_a$  et  $T_b$ .

On trace la tangente au point d'inflexion I et on mesure :

$$T_a = 0.27 \text{ sec et } T_b = 1.76 \text{ sec}$$

- (c) (1 point) En déduire l'ordre du système..

Le ratio  $\frac{T_a}{T_b} = 0.15$ . D'après le tableau, un ordre  $n = 2$  semble convenir.

- (d) ( $1\frac{1}{2}$  points) Évaluez la valeur de la constante de temps.

La constante de temps  $T$  est évaluée à partir de  $\frac{T_b}{T}_{\text{Table}} = 2.72$  du tableau.  
Cela donne  $T = 0.65 \text{ sec}$ .

- (e) ( $1\frac{1}{2}$  points) En déduire la valeur du retard  $\tau$ .

Nous avons  $T_a = 0.27 \text{ sec}$  et  $\frac{T_a}{T}_{\text{Table}} = 0.28$ . La constante  $T = 0.65 \text{ sec}$ , nous pouvons en déduire le retard  $\tau = 0.27 - 0.18 = 0.09 \text{ sec}$ .

- (f) (1 point) Donnez l'expression du modèle identifié.

$$\mathcal{H}_1(s) = \frac{5e^{-0.09s}}{1 + 0.65s}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CETTE ZONE

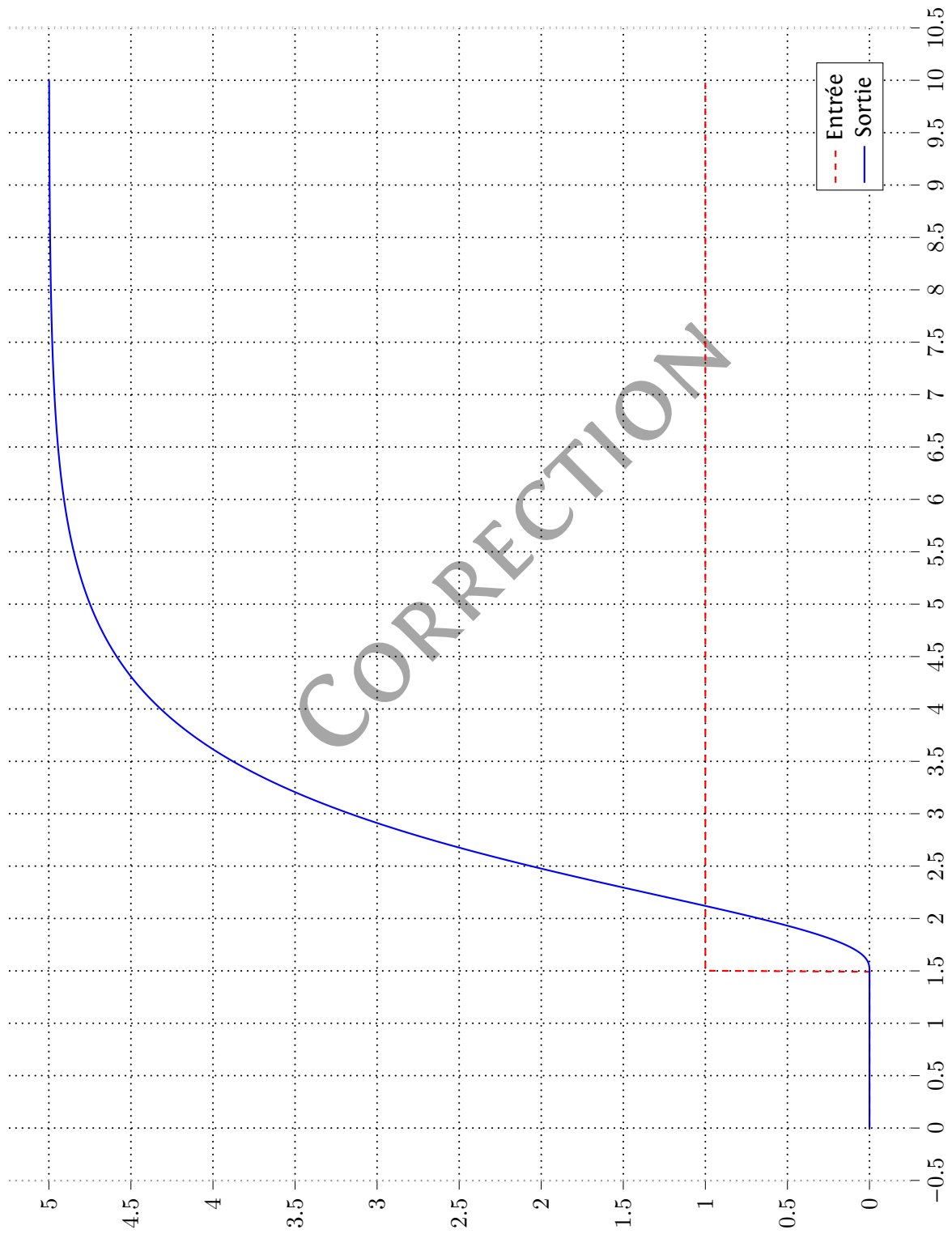


FIG. 2. Réponse indicielle de  $\mathcal{H}_2(s)$



**Exercice N°3**

⌚ 30mn | (4 points)

La fonction de transfert réglante de niveau d'eau d'un dégazeur thermique a été identifiée en boucle fermée selon la méthode de pompage. Si on fixe le gain du régulateur à 5, le procédé manifeste des oscillations juste entretenues. La période de ces oscillations est  $T_{osc} = 23.88$  min.

Calculez la fonction du dégazeur en l'exprimant par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3(s) &= \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{U}(s)} \\ &= \frac{K e^{-\tau s}}{1 + T s} \end{aligned} \quad (1)$$

On donne  $G_p = 0.7$ .

(a) (1½ points) Calculez la constante de temps  $T$ .

$$T = \frac{T_{osc}}{2\pi} \sqrt{(G_{rc} G_p)^2 - 1} = 12.748 \text{ min}$$

(b) (1½ points) Calculez le retard  $\tau$ .

$$\tau = \frac{T_{osc}}{2\pi} \left( \pi - \arctan(\sqrt{(G_{rc} G_p)^2 - 1}) \right) = 7.071 \text{ min}$$

(c) (1 point) En déduire  $\mathcal{H}_3$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3(s) &= \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{U}(s)} \\ &= \frac{0.7 e^{-7.071 s}}{1 + 12.748 s} \end{aligned}$$