

# Modélisation des Systèmes

## Notes de cours avec exercices corrigés <sup>a</sup>

Parcours : L2-S4 (All)

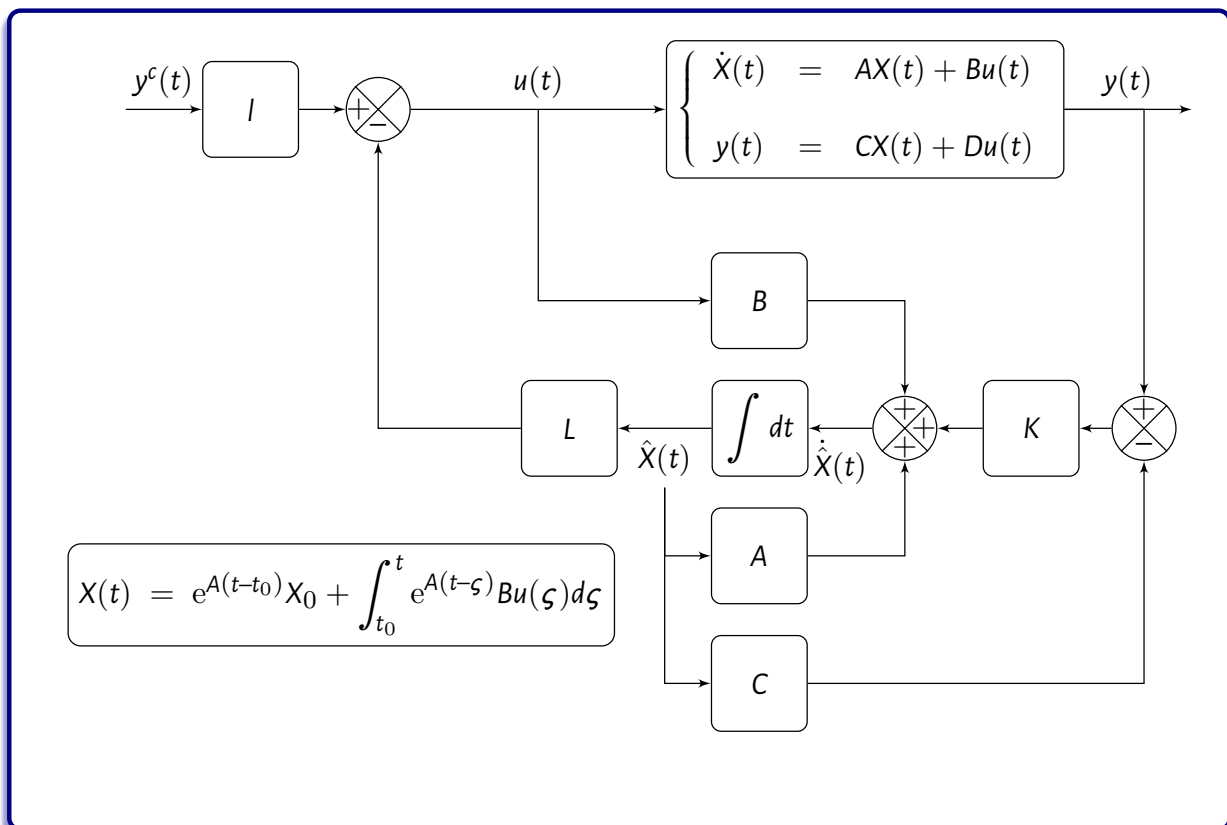
2021-2022

Réf. : GE-077

a. <https://github.com/a-mhamdi/isetbz/>

**Abdelbacet Mhamdi**

Dr.-Ing. en GE – Maître Technologue en GE



Dépt. GE - Institut Supérieur des Études Technologiques de Bizerte

$\Sigma$   
 $\int$   
 $\frac{d}{dt}$   
 $\omega$   
 $J$



## À propos

Ce cours s'adresse plus particulièrement aux étudiants de la licence en génie électrique (**L2-S4**), parcours AUTOMATISMES ET INFORMATIQUE INDUSTRIELLE (**AII**).

Dans ce cours, nous traiterons essentiellement la modélisation d'un processus qui permet d'exposer les outils nécessaires pour conditionner l'analyse de ses propriétés. Un modèle peut être de type physique (*e.g.* simulateur), ou de type mathématique (*i.e.* un ensemble d'équations algébriques ou différentielles).

L'utilité de disposer d'un modèle réside essentiellement dans :

- la connaissance du comportement interne du système physique (modèle de connaissance). Ce dernier est nécessaire avant toute phase de dimensionnement et/ ou construction d'un système industriel ;
- la représentation externe ou globale (modèle de représentation). La nécessité d'une telle représentation apparaît surtout pour les raisons de commande d'un système dynamique et de sa surveillance afin de déceler les éventuelles anomalies par rapport à un comportement de référence.

## FICHE DE L'UNITE D'ENSEIGNEMENT (UE)

CODE DE L'UE : UEF410		INTITULE DE L'UE : <b>Automatique 2</b>								
DOMAINE : SCIENCES, TECHNOLOGIES ET ÉTUDES TECHNOLOGIQUES										
Diplôme : Licence				MENTION : GÉNIE ELECTRIQUE						
PARCOURS : <b>Automatismes et Informatique Industrielle</b>							SEMESTRE : <b>S4</b>			
CODE ECUE	ELEMENTS CONSTITUTIFS DE L'UE (ECUE)	Vol. Horaire (en h) sur 14 semaines			Crédits	Coeff.	Evaluations			
		Cours	TD	TP			DC 40%	DS 60%	EC 60%	ES 40%
ECUEF411	Systèmes Echantillonnés	14	7		1.5	0.75	X	X		
ECUEF412	Modélisation des Systèmes	14	7		1.5	0.75	X	X		
ECUEF413	Atelier Automatique 2			21	1,5	0.75			X	X
Total		42	21		4,5	2,25				

Code : ECUEF412	Modélisation des systèmes
<b>OBJECTIFS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Comprendre les principales techniques de modélisation des systèmes.</li> </ul>
<b>CONTENU</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Modélisation : Modèles de connaissance : équations de bilan, lois de la physique, modèles de comportement (fonctions de transfert continues et discrètes).</li> <li>■ Identification d'un système : objectif de l'identification, méthodes graphiques (par analyse indicielle, essais du lâcher et essais de pompage).</li> <li>■ Représentation d'état continu.</li> <li>■ Représentation d'état discret.</li> </ul>
Extension : Bond Graph.	

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Approches graphiques</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction . . . . .	1
1.2	Méthodes d'identification . . . . .	1
1.2.1	Analyse de courbe en S . . . . .	1
1.2.2	Analyse de courbe intégratrice . . . . .	7
1.2.3	Analyse de courbe avec oscillations . . . . .	9
1.2.4	Identification en boucle fermée . . . . .	10
1.3	Exercices corrigés . . . . .	18
1.4	Conclusion . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Représentation d'état</b>	<b>23</b>
2.1	Calcul algébrique . . . . .	23
2.1.1	Matrices particulières . . . . .	24
2.1.2	Opérations sur les matrices . . . . .	24
2.2	Équation d'état . . . . .	29
2.2.1	Formes canoniques . . . . .	40
2.2.2	Forme modale . . . . .	44
2.2.3	Passage d'une $\mathcal{EE}$ vers matrice de transfert . . . . .	47
2.3	Résolution d'une équation différentielle linéaire . . . . .	48
2.3.1	Particularité . . . . .	48
2.3.2	Généralité . . . . .	50
2.4	Commande par retour d'état . . . . .	51
2.5	Observateur de Luenberger . . . . .	53
2.6	Exercices corrigés . . . . .	55
	<b>Références</b>	<b>64</b>
	<b>Annexes</b>	<b>67</b>

# 1 Approches graphiques

## 1.1 Introduction

L'identification d'un système dynamique réel (appelé objet) consiste à proposer une structure entre son entrée et sa sortie (appelé modèle), à partir de la connaissance expérimentale du couple entrée-sortie. Le modèle ainsi trouvé doit, dans son domaine de validité, reproduire un comportement identique à celui du système réel. Le modèle peut être un système physique (système physique équivalent ou modèle réduit) ou bien un système abstrait (modèle mathématique) [HA07]. Dans les applications industrielles, la majorité des lois de commande repose sur l'utilisation des modèles paramétriques décrits par des équations différentielles [Mar95].

Nous nous intéressons au modèle mathématique. Dans ce modèle, les coefficients caractérisant la structure de l'objet sont explicités, ceci en se basant sur un ensemble des méthodes graphiques (On cite principalement les approches d'analyse de courbe en S, courbe intégratrice et oscillatoire).

## 1.2 Méthodes d'identification

L'identification graphique consiste à proposer un modèle mathématique équivalent à un système physique, et cela, à travers des essais expérimentaux menés sur le processus en cours de fonctionnement [Pro97]. La méthode considérée convient alors si l'allure de la réponse présente une forme particulière, courbe en S, intégratrice ou oscillatoire. L'identification peut se faire soit en boucle ouverte soit en boucle fermée.

Les approches basées sur l'analyse des réponses temporelles après injection d'une entrée échelon ont fait l'objet de plusieurs références antérieures telles que [ÅH95; HLC01; Luy90; RK96; Shi96; SPK78]. Les procédures proposées se basent sur l'analyse des points spécifiques caractérisant la réponse indicielle d'un système.

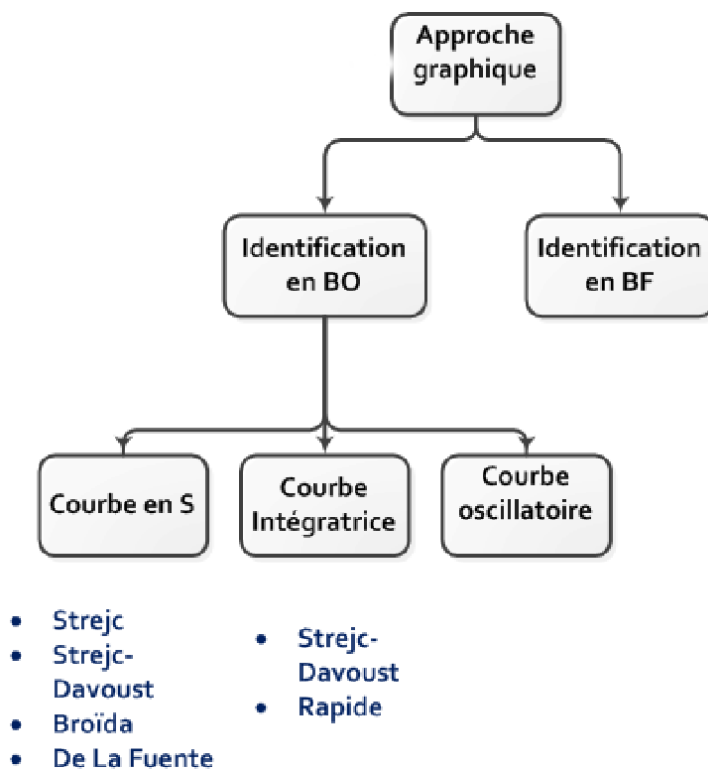


FIG. 1. Approches d'identification graphique



Dans la suite, nous supposons que le système était initialement au repos, i.e.  $y(t = 0) = 0$ . Le signal d'entrée  $u(t)$  est un échelon unitaire, appliqué à l'origine du temps.

### 1.2.1 Analyse de courbe en S

L'ensemble des méthodes, explicitées dans ce paragraphe, peuvent s'appliquer à un système dont la réponse indicielle, représentée par fig. 2, ne présente pas de dépassement.

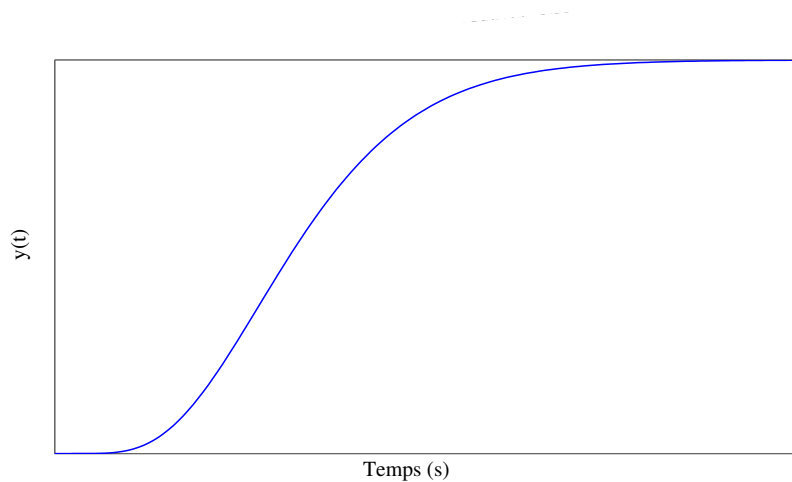


FIG. 2. Courbe en S

On se propose dans la suite de décrire de façon exhaustive le principe de chaque méthode.

**Méthode de Strejc :** Cette méthode décrit le système qui présente un retard par une fonction de transfert de dimension finie.

La fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{1}{(1 + Ts)^n}. \quad (1)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

$K$  Gain statique,

$T$  Constante de temps,

$n$  Ordre du système.

Pour identifier le système, la méthode consiste à :

1. Tracer la tangente au point d'inflexion pour déterminer les deux valeurs  $T_a$  et  $T_b$ . Voir fig. 3 pour la détermination de deux constantes.

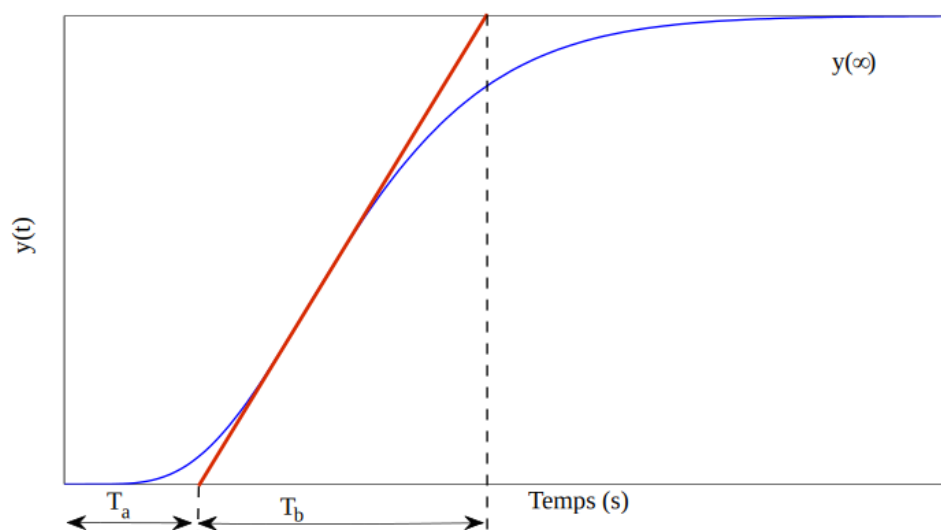


FIG. 3. Réponse temporelle d'un système linéaire

2. En se référant au nomogramme de fig. 4, le calcul de  $\frac{T_a}{T_b}$  permet de déterminer l'ordre  $n$  et en joignant le point correspondant au point caractérisant  $T_b$  on en déduit la valeur de  $T$ .

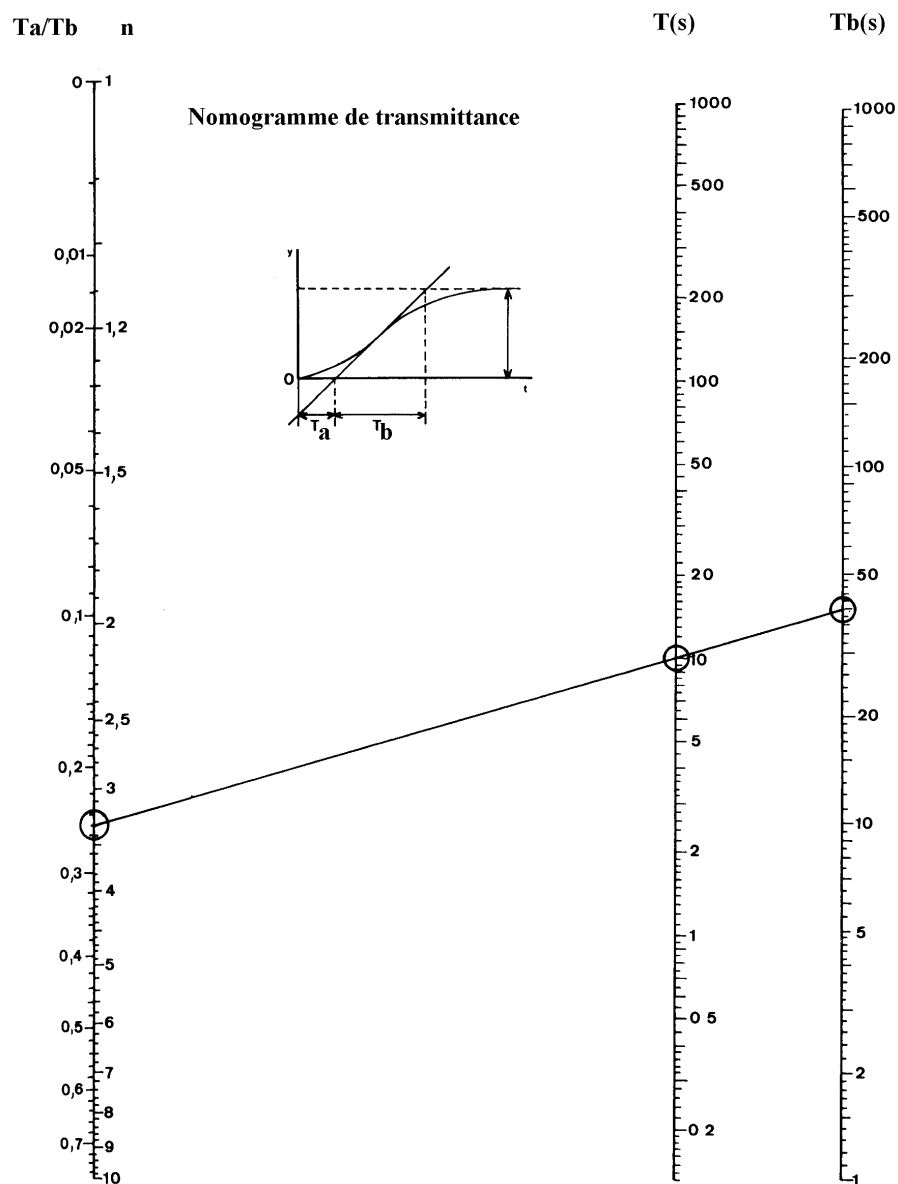


FIG. 4. Nomogramme pour modèle de Strejc

**Méthode de Strejc-Davoust :** Le système étudié sera identifié à la fonction de transfert de la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{e^{-\tau s}}{(1 + Ts)^n} \quad (2)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

$K$  Gain statique,

$T$  Constante de temps,

$\tau$  Retard,

$n$  Ordre du système.

On procède d'abord par le tracé de la tangente au point d'inflexion pour déterminer les deux valeurs  $T_a$  et  $T_b$ , indiquées sur fig. 5.

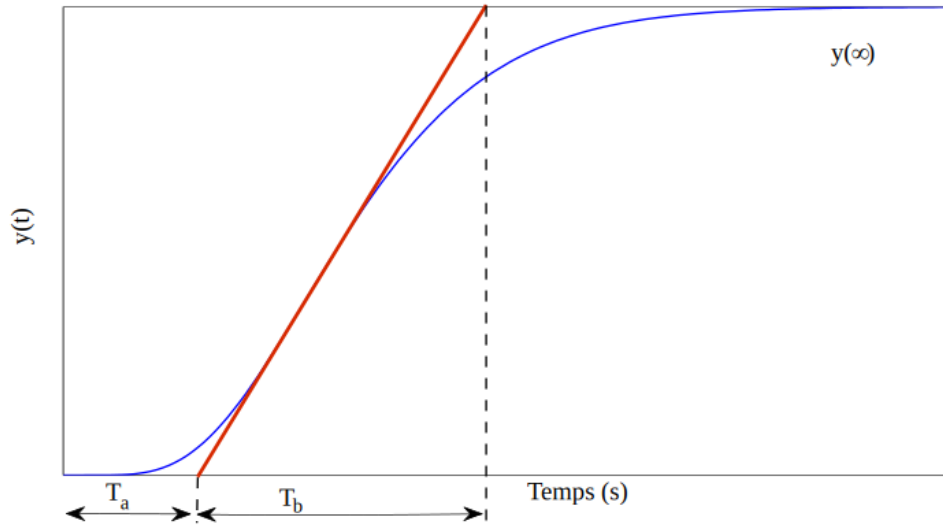


FIG. 5. Analyse d'une courbe en S par la méthode de Strejc-Davoust

En se basant sur les mesures de  $T_a$  et de  $T_b$ , indiquées par tab. 1, on suit les étapes suivantes pour déterminer les paramètres identifiés :

**Étape I** déterminer  $n$  de la table à partir de la valeur de  $\frac{T_a}{T_b}$ ,

**Étape II** déterminer  $T$  de la table à partir de la valeur de  $\frac{T_b}{T}$ ,

**Étape III** déterminer  $\tau = T_a - \frac{T_a}{T} \big|_{\text{Table}} T$ .

TAB. 1. Tableau pour déterminer le modèle de Strejc-Davoust

$n$	$\frac{T_a}{T}$	$\frac{T_b}{T}$	$\frac{T_a}{T_b}$
1	0	1	0
2	0.28	2.72	0.10
3	0.80	3.70	0.22
4	1.42	4.46	0.32
5	2.10	5.12	0.41
6	2.81	5.70	0.49

**Méthode de Broïda :** Le modèle de Broïda consiste à approcher le comportement du système réel par un premier ordre avec un retard.

La fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{e^{-\tau s}}{1 + Ts}. \quad (3)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

$K$  Gain statique,

$T$  Constante de temps,

$\tau$  Retard.

Le principe diffère par rapport à la méthode de Strejc-Davoust dans le sens où on ne cherche pas à faire coïncider la tangente au point d'inflexion mais plutôt d'ajuster les paramètres  $T$  et  $\tau$  pour que les courbes relatives à la réponse du système et du processus aient deux points communs. Ces points, comme l'indique fig. 6, correspondent à 28% et à 40% de  $y_\infty$ .



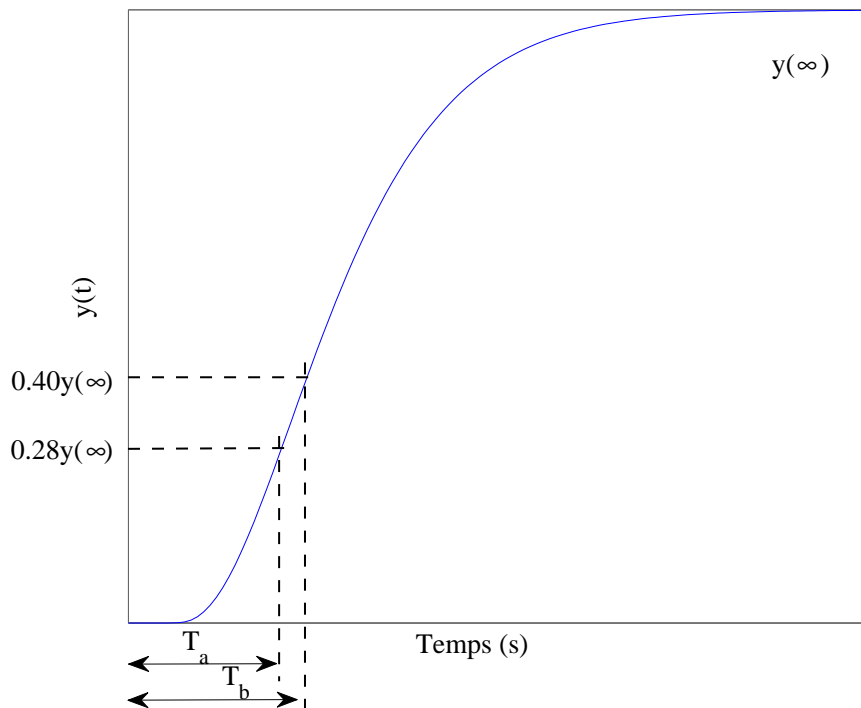


FIG. 6. Analyse d'une courbe en S par la méthode de Broïda

La résolution mathématique donne alors :

**Constante de temps**  $T = 5.5(T_b - T_a)$ ,

**Retard**  $\tau = 2.8T_a - 1.8T_b$ .

**Méthode de De La Fuente :** La fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{e^{-\tau s}}{(1 + Ts)} \quad (4)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

$K$  Gain statique,

$T$  Constante de temps,

$\tau$  Retard.

Le principe est identique à celui de la méthode de Broïda, voir fig. 7, mais elle diffère dans le choix des deux points communs.

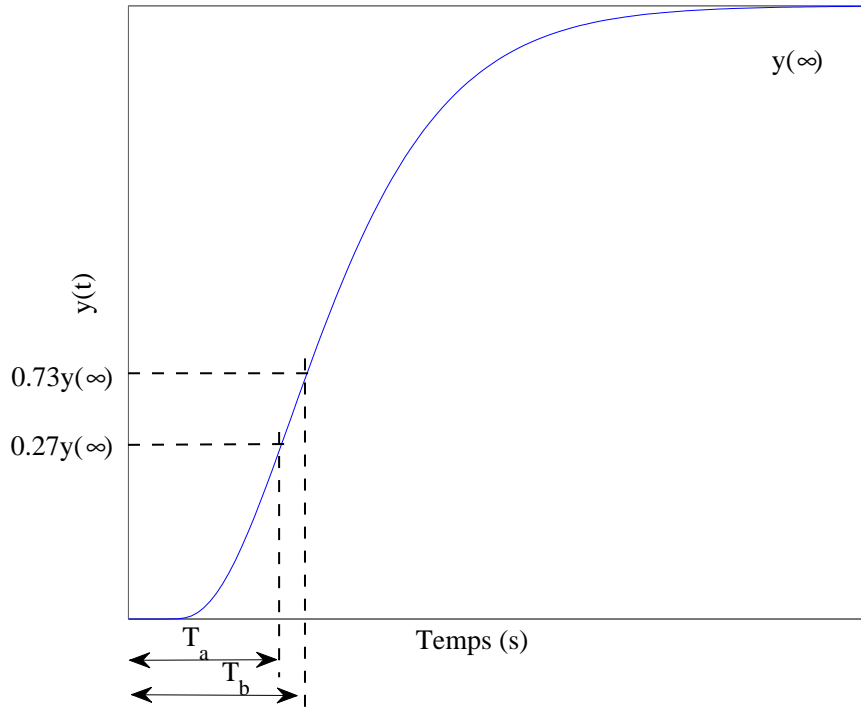


FIG. 7. Analyse d'une courbe en S par la méthode de De La Fuente

La résolution donne donc :

**Constante de temps**  $T = T_b - T_a$

**Retard**  $\tau = 1.31T_a - 0.31T_b$ .

**Calcul d'aire :** Un ensemble de techniques basées sur l'estimation de l'aire située sous la courbe de la réponse indicielle ont attiré l'attention de recherches extensives [ÅH95; Mar95; Shi96]. Une méthode moins sensible aux bruits est la méthode de calcul d'aire, qui a été proposée par [ÅH95]. Elle permet d'estimer simultanément le retard et les paramètres d'un système de premier ordre d'entrée  $u$  et de sortie  $y$ , décrit par une fonction de transfert de la forme suivante :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts} \quad (5)$$

où  $K$ ,  $T$  et  $\tau$  représentent respectivement le gain statique, la constante de temps et le retard.

Comme l'indique fig. 8, le gain  $K$  est déterminé à partir du régime permanent et est donné par  $\hat{K} = y_\infty/u_0$ . Pour pouvoir calculer la constante de temps  $\hat{T}$ , il est nécessaire de calculer l'aire  $A_1$  comprise entre la réponse du système, l'axe horizontal et la ligne verticale située à  $t = T_{ar}$ . Le point défini par  $t = T_{ar}$  correspond au temps de résidence moyen, il est donné par le ratio de la surface  $A_0$  par la quantité  $y_\infty$ . La surface  $A_0$  est délimitée par la sortie  $y(t)$ , l'axe des ordonnées et la tangente à la réponse  $y(t)$  au régime permanent. Le paramètre  $\hat{T}$  est donné par :  $\hat{T} = \frac{e^{A_1}}{y_\infty}$  et le retard  $\hat{\tau}$  est déduit à partir de la relation :  $\hat{\tau} = T_{ar} - \hat{T}$ .

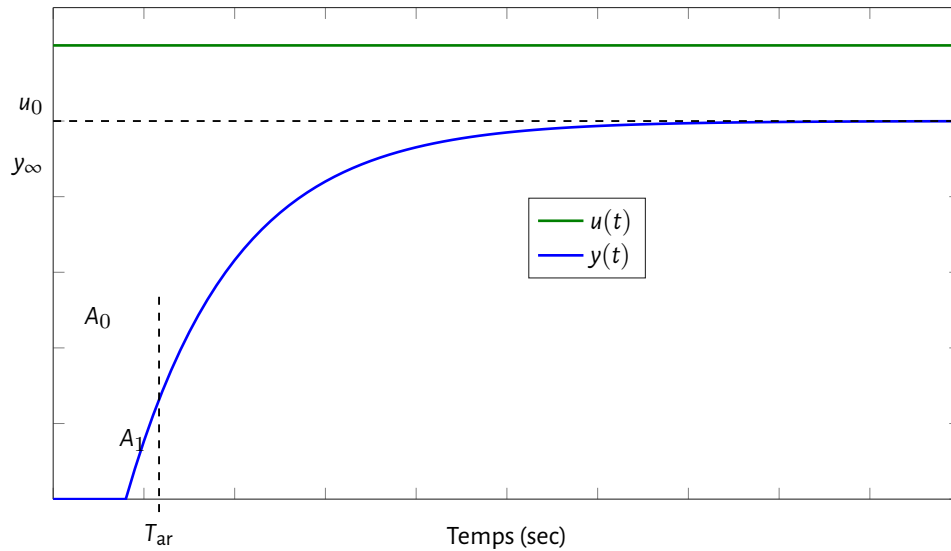


FIG. 8. Méthode de calcul d'aire pour une réponse indicielle monotone

Cette méthode est moins-sensible aux bruits hautes fréquences comparée aux autres méthodes graphiques. Néanmoins, la précision des résultats d'identification dépendent principalement du calcul des surfaces  $A_0$  et  $A_1$ . Il est utile alors d'avoir un essai d'expérimentation de durée large qui couvre la partie transitoire et le régime permanent du système. Ainsi, l'identification ne peut avoir lieu que lorsque le système atteint le régime permanent.

### 1.2.2 Analyse de courbe intégratrice

Deux méthodes seront explicitées dans ce paragraphe, qui peuvent s'appliquer à un système dont la réponse est variable à une entrée constante, représentée par fig. 9. Elle est dite alors évolutive.

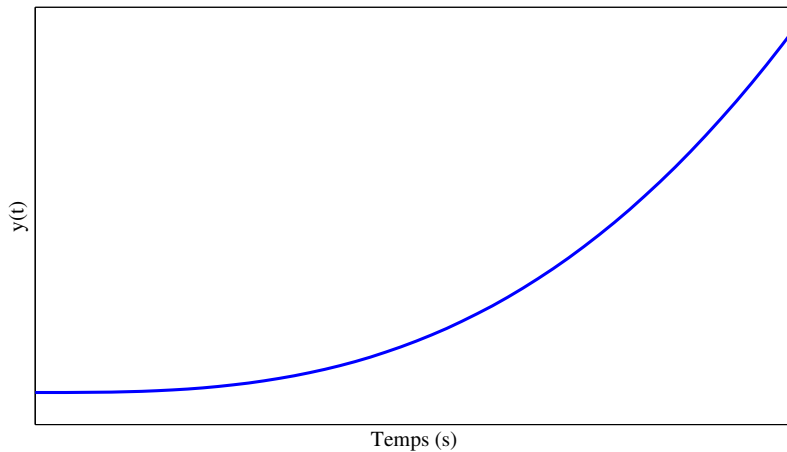


FIG. 9. Courbe Intégratrice

**Méthode de Strejc-Davoust :** La fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{e^{-\tau s}}{s(1 + Ts)^n} \quad (6)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

$K$  Gain dynamique,

$T$  Constante de temps,

$\tau$  Retard,

$n$  Ordre du système.

Pour les déterminer, on procède comme suit :

On trace l'asymptote  $\Delta_1$  à la courbe  $y(t)$  de fig. 10,  $\Delta_2$  est sa parallèle passant par le point  $A'$ . La droite  $A'A$  est parallèle à l'axe du temps. La droite  $AC$ , perpendiculaire à  $A'A$  coupe la courbe  $y(t)$  en un point  $B$ .

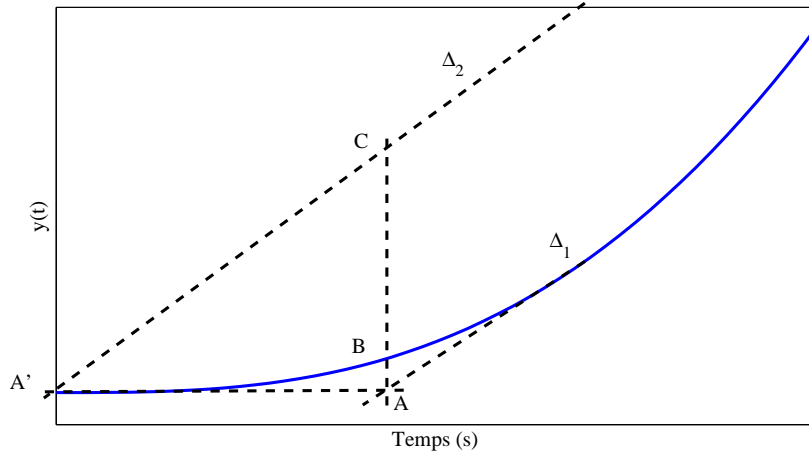


FIG. 10. Analyse d'une courbe intégratrice par la méthode de Strejc-Davoust

On calcule d'abord le rapport  $\frac{AB}{AC}$ . Ce rapport permet de déterminer la valeur de l'indice  $n$  à partir de fig. 11 [Pro97].

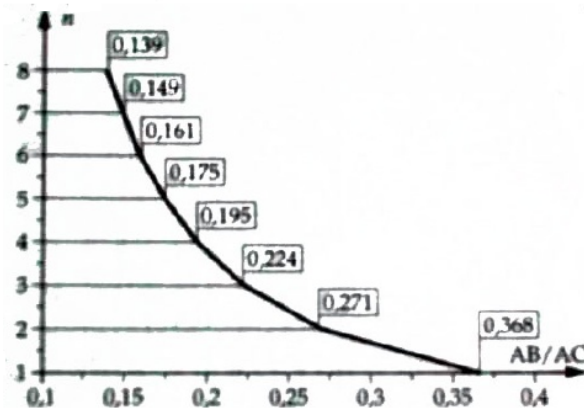


FIG. 11. Courbe donnant la valeur de  $n$  en fonction du rapport  $\frac{AB}{AC}$

Selon la nature de  $n$  (entier ou non), on calcule les valeurs de  $T$  et de  $\tau$  :

- Si  $n$  est entier, la constante de temps est  $T = \frac{A'A}{n}$  et le retard  $\tau$  est nul.
- Si  $n$  n'est pas entier, on détermine le nouveau rapport  $\frac{AB}{AC}$  qui correspond à la partie entière de  $n$ . Puis, on déplace  $\Delta_2$  parallèlement à  $\Delta_1$  vers  $\Delta_1$  afin de garantir ce rapport. La valeur du retard  $\tau$  correspond à cette translation. Le calcul de  $T$  est  $A'A = \tau + nT$ .

Tandis que le gain dynamique  $K$  est donnée par la relation suivante :  $K = \frac{AC}{A'A}$ .

**Méthode rapide :** La fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = K \frac{e^{-\tau s}}{s^n} \quad (7)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

$K$  Gain dynamique,

$\tau$  Retard

Le principe d'identification consiste à rapprocher la courbe initiale à une rampe de pente  $k$  retardée de  $\tau$ .

Pour déterminer le temps mort  $\tau$ , on trace l'asymptote  $\Delta_1$  à la courbe  $y(t)$  indiquée sur fig. 12. Le retard  $\tau$  est représenté par  $A'A$ . Le gain  $K$  correspond au coefficient directeur de la droite  $\Delta_1$  [Pro97].

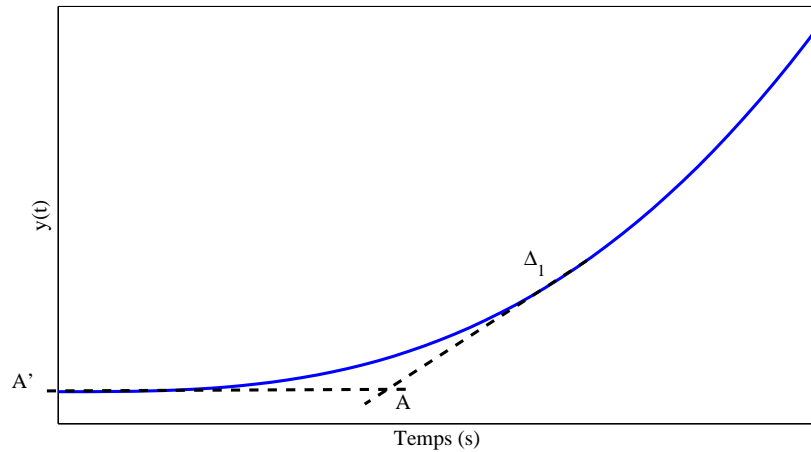


FIG. 12. Analyse d'une courbe intégratrice par une méthode rapide

### 1.2.3 Analyse de courbe avec oscillations

Lorsque la réponse indicielle d'un système présente des oscillations amorties (Fig. 13), il est possible d'envisager une modélisation mathématique par une fonction de transfert de deuxième ordre.

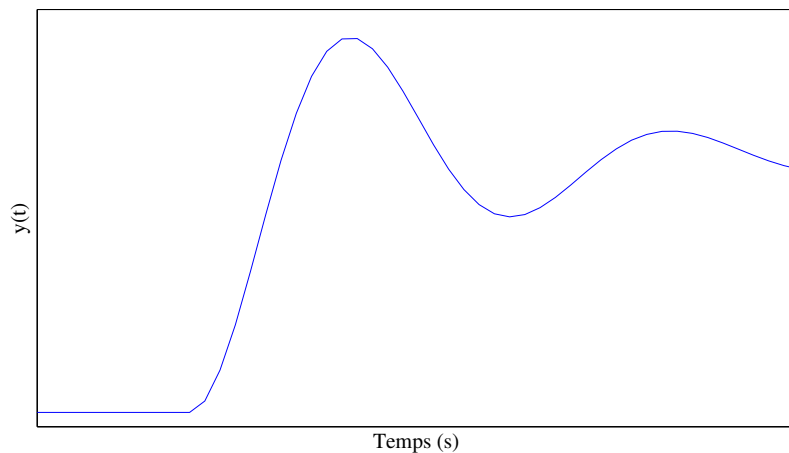


FIG. 13. Courbe avec oscillations

La fonction de transfert s'écrit alors sous la forme suivante :

$$H(s) = \frac{K\omega_0^2 e^{-\tau s}}{\omega_0^2 + 2\zeta\omega_0 s + s^2}. \quad (8)$$

Les paramètres à identifier sont donc :

$K$  Gain statique,

$\zeta$  Coefficient d'amortissement,

$\omega_0$  Pulsation propre,

$\tau$  Retard.

Afin de déterminer ces paramètres, on mesure d'abord sur la courbe indiquée sur fig. 14, le premier dépassement  $D_1$ , la pseudo-période  $T$  et le temps  $t_1$  qui correspond à  $D_1$ .

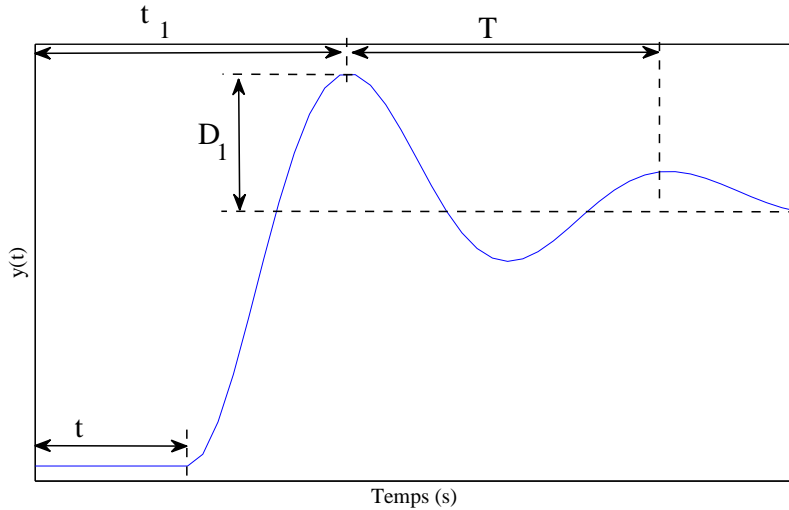


FIG. 14. Analyse d'une courbe avec oscillations

On rappelle ci-dessous les relations théoriques du second ordre donnant  $D_1$  et  $T$  :

**1<sup>er</sup> Dépassement**  $D_1 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$ ,

**Pseudo-période**  $T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$ .

À partir de ces deux équations, on peut calculer le coefficient  $\zeta$  et  $\omega_0$ . La mesure de  $t_1$  donne la valeur du retard  $\tau$  qui vaut  $t_1 - \frac{T}{2}$ . Le gain  $K$  est donné par :  $K = \frac{y(\infty)}{E_0}$ .

#### 1.2.4 Identification en boucle fermée

Il est possible dans certains cas d'avoir le procédé bouclé avec un régulateur installé dans sa chaîne d'action, il est préférable dans ce cas de procéder par faire l'identification en chaîne fermée. Cette méthode présente également un avantage majeur c'est qu'on n'a pas besoin de mettre le régulateur hors service. L'idée de cette méthode repose sur deux essais : le premier convient pour savoir si le procédé est naturellement stable et le second essai consiste à ramener le système vers sa limite de stabilité en faisant augmenter le gain du système bouclé jusqu'à l'apparition des oscillations sinusoïdales juste entretenues.

Soit le système bouclé de fig. 15 :

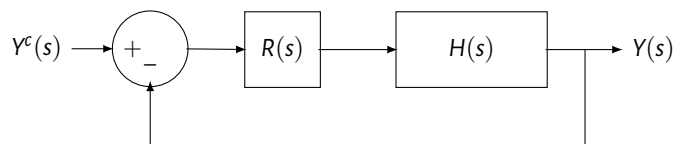


FIG. 15. Système en Boucle fermée

Le régulateur est à action proportionnelle avec un gain  $G_r$  faible (1 ou 0.5) [Pro97].

► 1<sup>er</sup>essai

On définit la classe d'un système par le nombre d'intégrations que présente sa fonction de transfert.

Tab. 2 indique l'écart entre l'entrée et la sortie en régime permanent pour deux types d'excitation : échelon et rampe.

TAB. 2. Précision d'un système asservi linéaire continu

Entrée	Classe du système		
	Classe 0	Classe 1	Classe > 2
<b>Échelon</b>	$\varepsilon_p = \frac{E_0}{1 + G_r G_p}$	$\varepsilon_p = 0$	$\varepsilon_p = 0$
<b>Rampe</b>	$\varepsilon_v = +\infty$	$\varepsilon_v = \frac{a}{G_r G_p}$	$\varepsilon_v = 0$

où  $G_r$  est gain de  $R(s)$  et  $G_p$  est celui du procédé.

L'amplitude d'un échelon est  $E_0$  et la pente d'une rampe est  $a$ .

Pour cela, on part du principe suivant : On excite le système par un échelon d'amplitude  $E_0$  :

- Si la mesure ne rejoint pas la consigne, il reste alors en régime permanent un écart de position qui vaut  $\varepsilon_p = \frac{E_0}{1 + G_r G_p}$ . Le procédé étudié est de classe 0.
- Si la mesure rejoint la consigne, le procédé étudié présente des intégrations. Pour savoir le nombre d'intégrations, on peut introduire une rampe de pente  $a$ .
  - Si la mesure ne rejoint pas la consigne, il reste alors en régime permanent un écart de traînage qui vaut  $\varepsilon_v = \frac{a}{G_r G_p}$ , le procédé étudié est de classe 1 et de gain  $G_p = \frac{a}{\varepsilon G_r}$ .
  - Il y'a plus qu'une intégration si l'écart  $\varepsilon$  est nul.

▷ 2<sup>ème</sup> essai

On augmente progressivement la valeur du gain  $G_r$  du régulateur et on impose à chaque fois une perturbation qu'on maintient pour courte durée. Puis, on l'annule, c'est à dire, qu'on remet de nouveau la consigne à sa valeur initiale. On continue l'expérience jusqu'à la mise du procédé en oscillation juste entretenue. Le signal de sortie est représenté sur fig. 16.

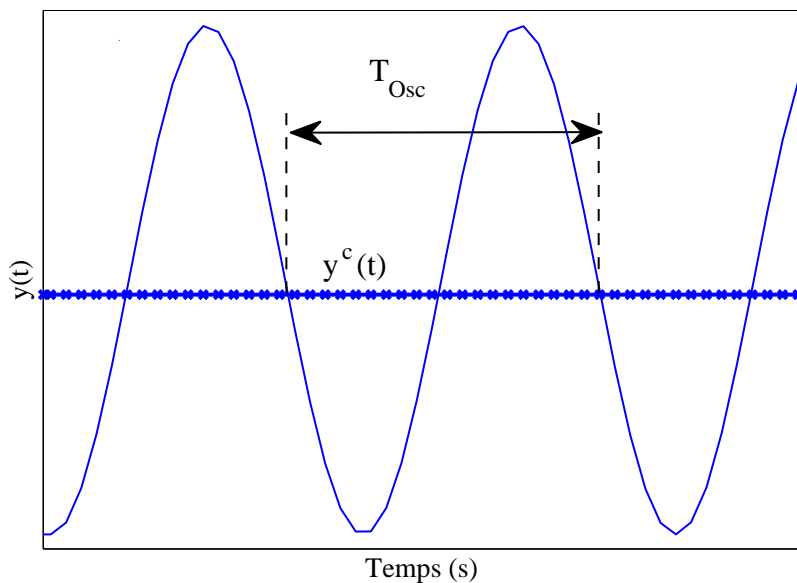


FIG. 16. Sortie en oscillation juste entretenue

La valeur du gain qui permet d'avoir une sortie harmonique est appelée gain critique, on la note  $G_{rc}$ .

Soit  $T_{osc}$  la période d'oscillation.

Pour avoir le phénomène de pompage, il faut que le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte coïncide avec le point  $(-1, 0)$ , c'est à dire que les deux conditions suivantes sont alors vérifiées :

$$|G_{rc}H(j\omega_{osc})| = 1 \quad \text{et} \quad \angle G_{rc}H(j\omega_{osc}) = -\pi$$

À partir de deux conditions citées précédemment, Broïda proposa un modèle, s'appliquant à un système naturellement stable de gain statique  $G_p$ , dont la fonction de transfert est la suivante :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts}, \quad (9)$$

avec :

$K$  Gain statique.

$T$  Constante de temps,

$\tau$  Retard.

La résolution donne les paramètres estimés suivants :

$$K = G_p,$$

$$T = \frac{T_{osc}}{2\pi} \sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1},$$

$$\tau = \frac{T_{osc}}{2\pi} \left( \pi - \arctan(\sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1}) \right).$$

Calcul des actions du régulateur (Procédé auto-régulant)								
Action ▼	Régulateur ►	P	PI série	PI parallèle	PID série	PID parallèle	PID mixte (1)	PID mixte (2)
$G_r$		$\frac{0.8 T}{K \tau}$	$\frac{0.8 T}{K \tau}$	$\frac{0.8 T}{K \tau}$	$\frac{0.85 T}{K \tau}$	$\frac{0.4 + \frac{T}{\tau}}{1.2 \times K}$	$\frac{0.4 + \frac{T}{\tau}}{1.2 \times K}$	$\frac{0.4 + \frac{T}{\tau}}{1.2 \times K}$
$T_i$		max	$T$	$\frac{K \times \tau}{0.8}$	$T$	$\frac{K \times \tau}{0.8}$	$T + 0.4\tau$	$T + 0.4\tau$
$T_d$		0	0	0	$0.4\tau$	$\frac{0.35T}{K}$	$\frac{T\tau}{\tau + 2.5T}$	$\frac{0.35T}{K}$

Source : BHALY-Boucles de régulation, Étude et mise au point-2005, 4<sup>ème</sup> édition.

### Exercice

L'objectif de cette partie est de tester les méthodes citées précédemment. Pour cela, on part d'un système initial représenté par la fonction de transfert suivante :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Y(s)}{E(s)} \\ &= \frac{100}{(s+4)(s+5)(s+1)}. \end{aligned} \quad (10)$$

La réponse de ce système suite à une excitation indicielle unitaire est donnée par fig. 17 :

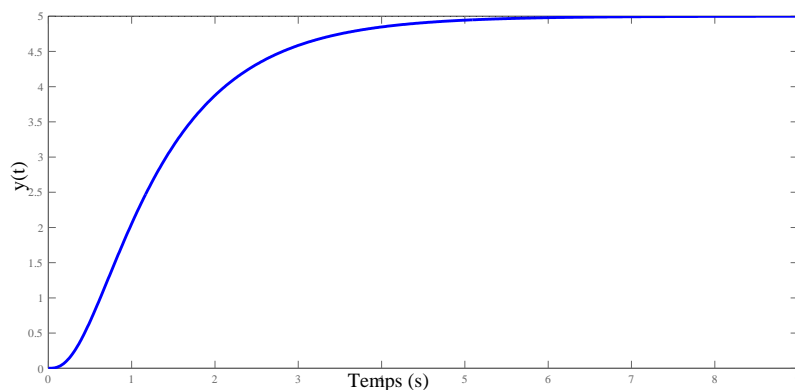


FIG. 17. Réponse indicielle du système de départ



On cherche par la suite à établir les modèles équivalents selon les différentes méthodes qu'on a déjà cité.

Le gain statique est mesuré directement sur la courbe de sortie :  $K = 5$ .

**Modèle de Strejc :** On rappelle ici le modèle équivalent de Strejc :

$$H(s) = \frac{K}{(1 + Ts)^n} \quad (11)$$

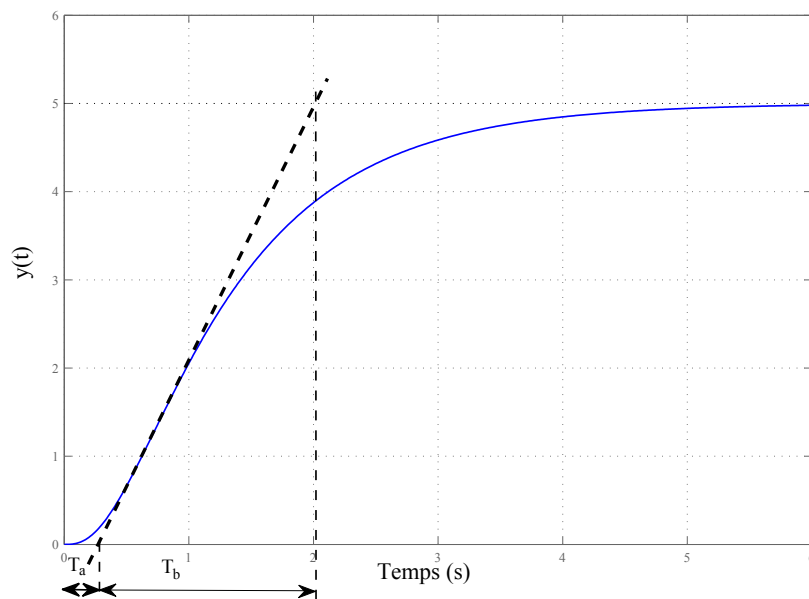


FIG. 18. Analyse de la réponse initiale par méthode de Strejc

On trouve :

$T_a = 0.27$  sec et  $T_b = 1.73$  sec.

En se référant au paragraphe 1.2.1, on détermine les valeurs des paramètres de l'équation 11. Il s'agit d'un système de second ordre avec une constante de temps  $T$  égale à 0.7 sec. La réponse du système identifié est représentée sur fig. 19.

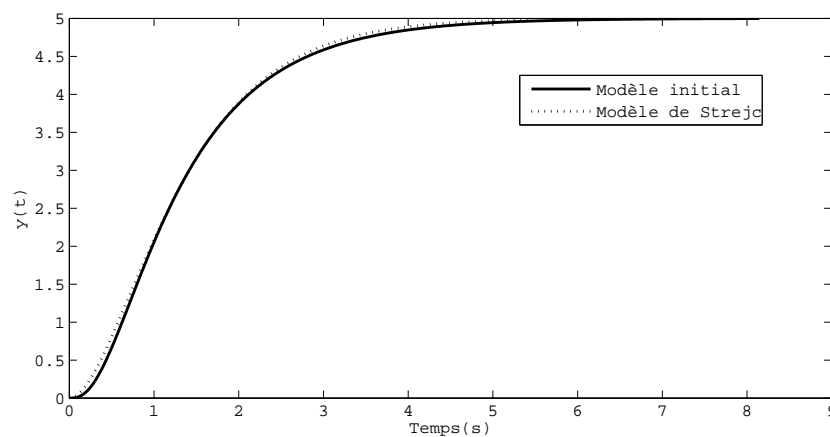


FIG. 19. Réponse du système initial et du système identifié

**Modèle de Strejc-Davoust :** On rappelle ici le modèle équivalent de Strejc-Davoust :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(1 + Ts)^n}. \quad (12)$$

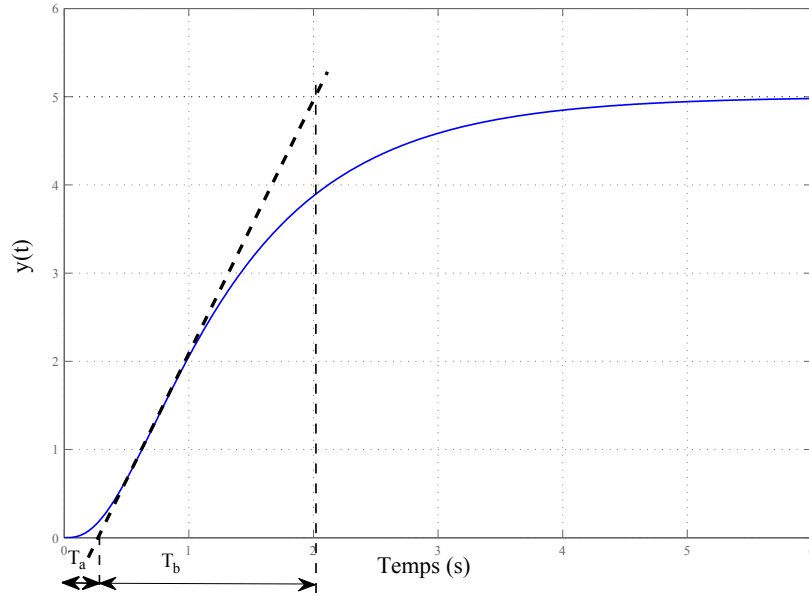


FIG. 20. Analyse de la réponse initiale par méthode de Strejc-Davoust

D'après le graphe de fig. 20, nous relevons les deux caractéristiques  $T_a = 0.27$  sec et  $T_b = 1.73$  sec.

En se référant au paragraphe 1.2.1, on détermine les valeurs des paramètres de l'équation 12. Il s'agit d'un système de second ordre avec une constante de temps  $T$  égale à 0.73 sec et un retard  $\tau = 0.0665$  sec. La réponse du système identifié est représentée sur fig. 21.

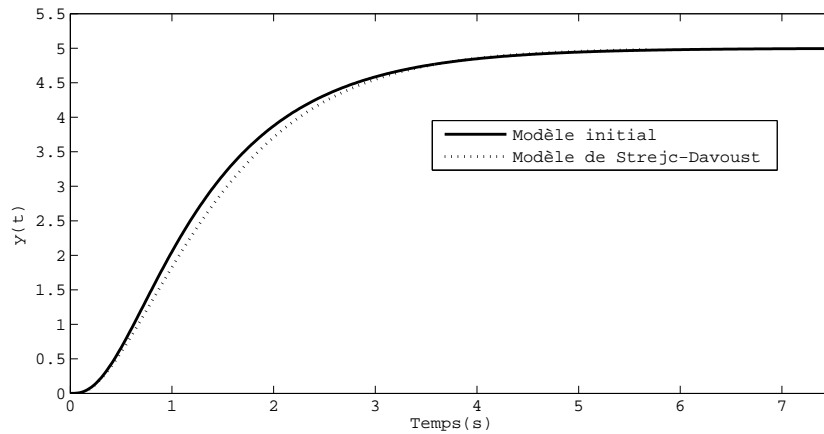


FIG. 21. Réponse du système initial et du système identifié

**Modèle de Broïda :** On rappelle ici le modèle équivalent de Broïda :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts}. \quad (13)$$

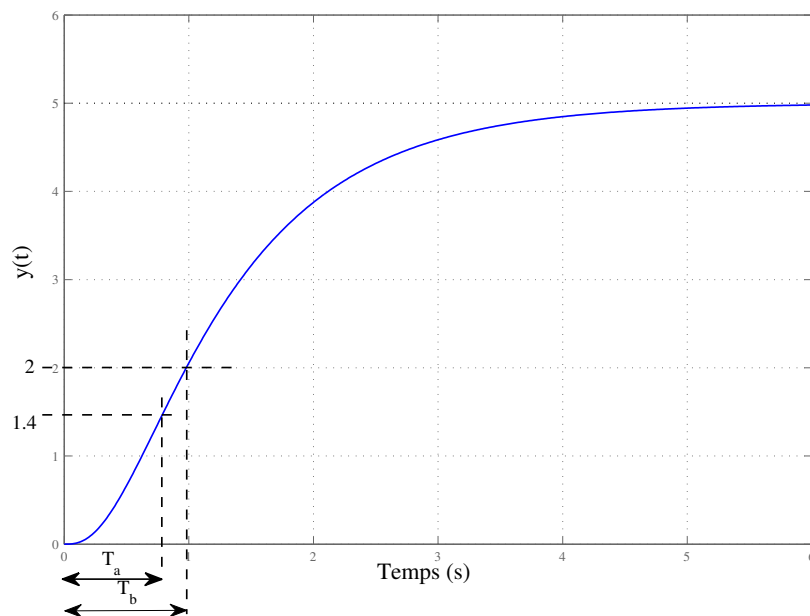


FIG. 22. Analyse de la réponse initiale par méthode de Broïda

On trouve :

$$T_a = 0.78 \text{ sec et } T_b = 0.98 \text{ sec.}$$

En se référant au paragraphe 1.2.1, on détermine les valeurs des paramètres de l'équation 13. Il s'agit d'un système de premier ordre avec une constante de temps  $T = 5.5 \times (T_b - T_a) = 1.1 \text{ sec}$  et un retard  $\tau = 2.8 \times T_a - 1.8 \times T_b = 0.42 \text{ sec}$ . Fig. 23 donne les courbes de réponse du système réel et du modèle de Broïda.

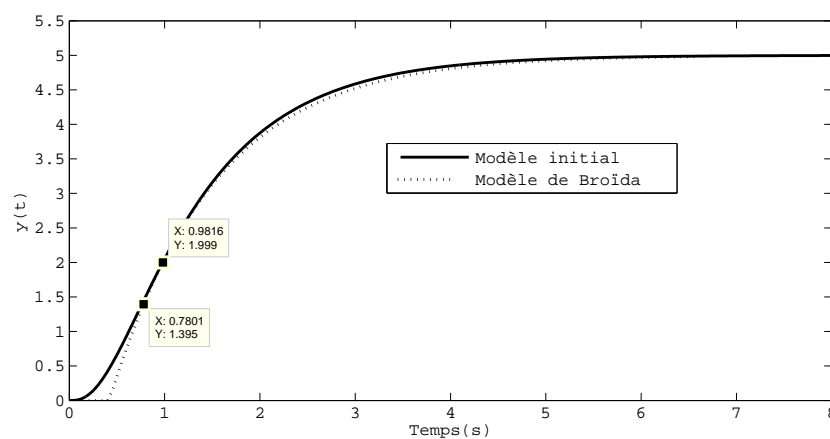


FIG. 23. Réponse réelle approchée par modèle de Broïda

La concordance des deux points qui correspondent à 28% et à 40% est bien vérifiée.

**Modèle de De La Fuente :** On rappelle ici le modèle équivalent de De La Fuente :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts} \quad (14)$$

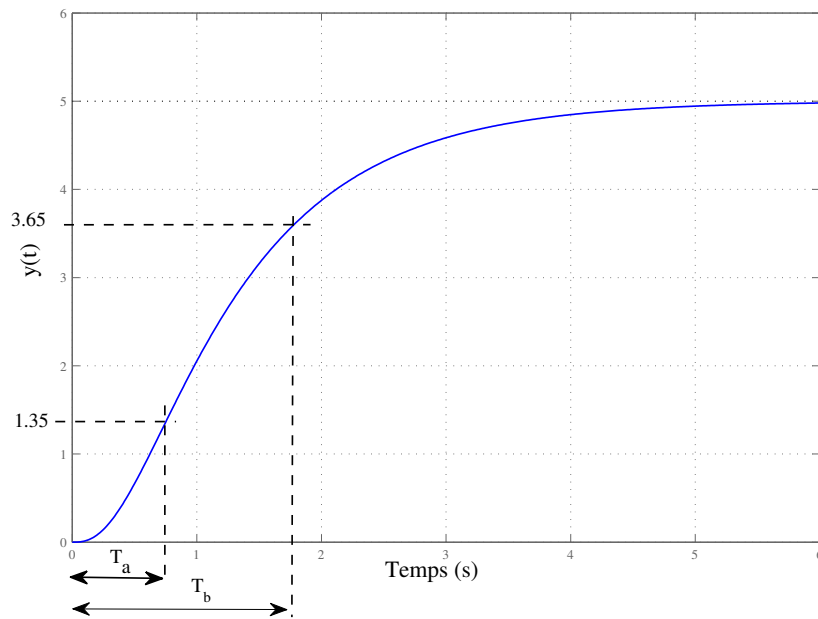


FIG. 24. Analyse de la réponse initiale par méthode de De La Fuente

On trouve :  $T_a = 0.75$  sec et  $T_b = 1.75$  sec.

En se référant au paragraphe 1.2.1, on détermine les valeurs des paramètres de l'équation 14 :

$$T = T_b - T_a = 1 \text{ sec},$$

$$\tau = 1.31 \times T_a - 0.31 \times T_b = 0.44 \text{ sec}.$$

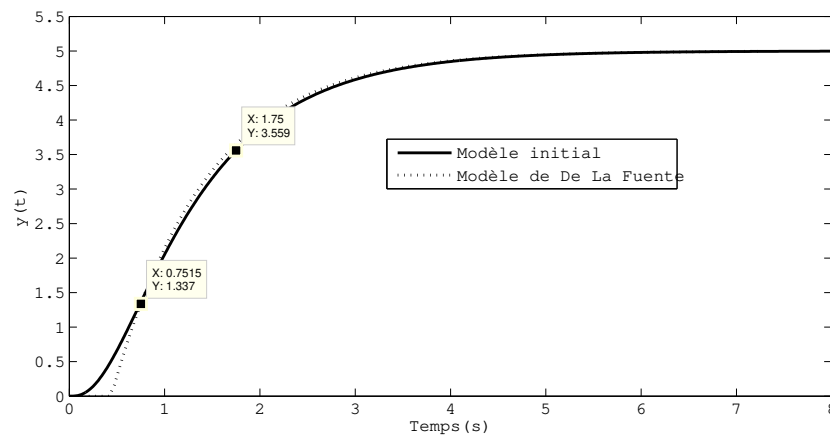


FIG. 25. Réponse réelle approchée par modèle de De La Fuente

Fig. 25 donne les courbes de réponse du système réel et du modèle de De La Fuente. La concordance des deux points qui correspondent à 27% et à 73% est bien vérifiée.

### Exercice

On considère un système de deuxième ordre à numérateur non constant, décrit par la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{-0.1(s-1)}{(1+0.5s)^2}. \quad (15)$$

Ce système est mis en boucle fermée à retour unitaire, comme l'indique fig 26, avec un correcteur où on supprime les actions dérivées ou intégrales.

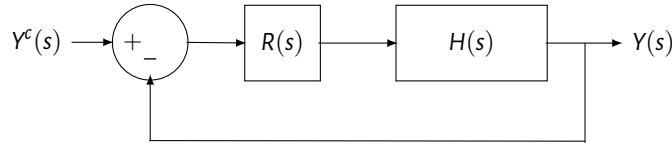


FIG. 26. Système en BF

On procède par appliquer une entrée indicielle d'amplitude  $E_0 = 10$ , et on choisit un gain du régulateur  $G_r = 1$ . Fig. 27 représente la réponse du système.

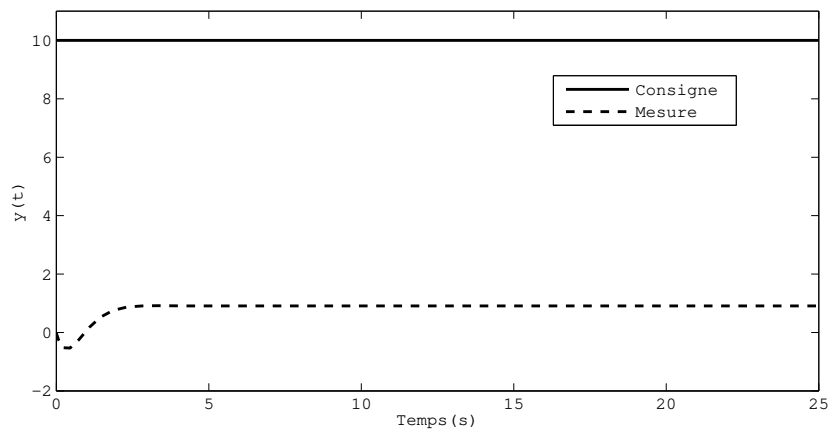


FIG. 27. Réponse du système suite à une excitation indicielle

On remarque que la sortie ne rejoint pas la consigne, il reste un écart en régime permanent qui vaut  $\varepsilon_s = 9.07$ . Le système est donc de classe 0, il ne présente pas d'intégration. Ce procédé possède donc un gain statique  $G_p = \frac{\frac{E_0}{\varepsilon_s} - 1}{G_r} = 0.102$ .

On change par la suite le gain du régulateur  $G_r$  de façon à avoir des oscillations juste entretenues, on note alors la valeur du gain critique :  $G_{rc} = 10$ . Les oscillations de la sortie sont indiquées sur fig. 28 avec une période  $T_{osc} = 2.228$  sec.

L'objectif est d'identifier le système par un modèle de Broïda qui satisfait éq. 16 :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts} \quad (16)$$

Les paramètres à déterminer sont donc :

- $K = G_p = 0.102$
- $T = \frac{T_{osc}}{2\pi} \sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1} = 0.071 \text{ sec}$
- $\tau = \frac{T_{osc}}{2\pi} \left( \pi - \arctan \left( \sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1} \right) \right) = 1.044 \text{ sec}$

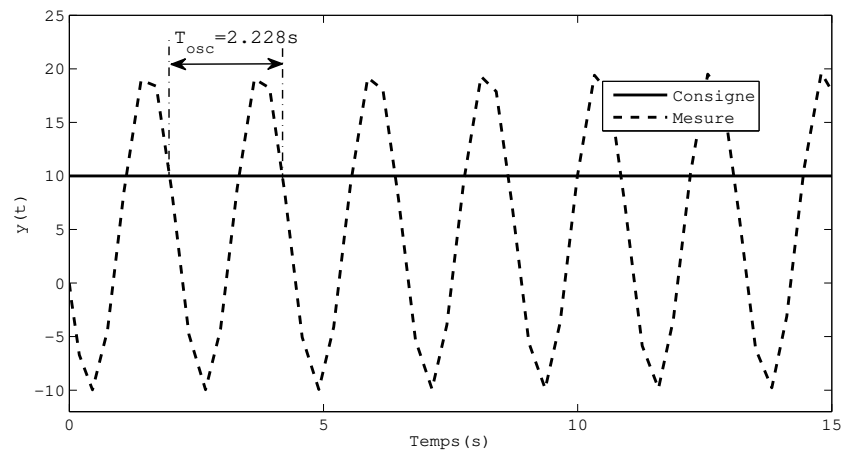


FIG. 28. Sortie en oscillations justes entretenues

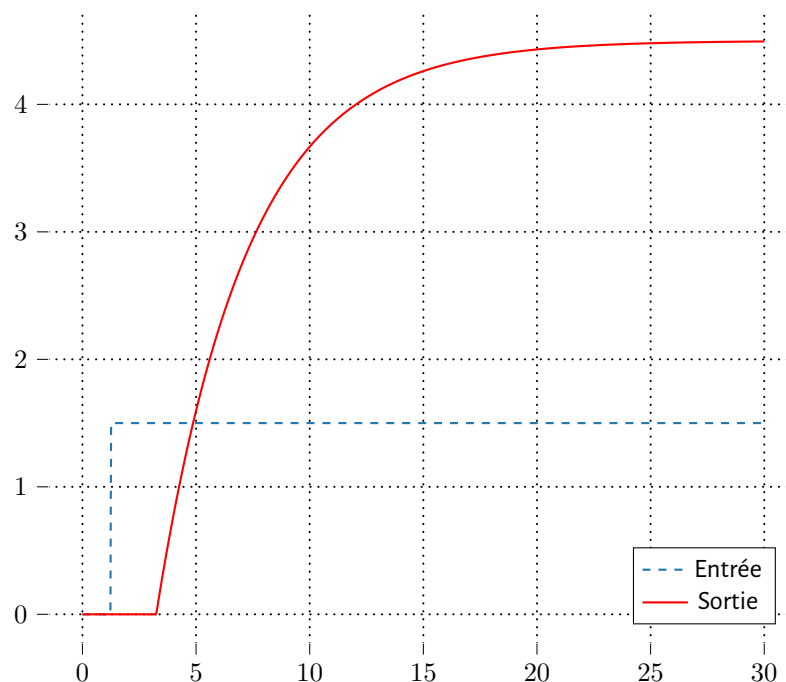
### 1.3 Exercices corrigés

#### Exercice N° 1 :

La fonction de transfert d'un processus peut être exprimée par :

$$\mathcal{H}_1(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts} \quad (17)$$

Afin de déterminer les paramètres du modèle, on a appliqué à l'entrée du système un échelon. Sa réponse indicielle est illustrée par le graphique de fig. 29.

FIG. 29. Réponse indicielle de  $\mathcal{H}_1(s)$ 

- Déterminez les paramètres de la fonction  $\mathcal{H}_1$  en utilisant la méthode de **Broïda**.
- Déterminez les paramètres de la fonction  $\mathcal{H}_1$  en utilisant la méthode de **De La fuente**.

Les paramètres exacts de la simulation sont :

**Gain statique K :** 3;

**Constante de temps  $T$  :** 4 sec;

**Retard  $\tau$  :** 2 sec.

**Exercice N° 2 :**

Suite à l'application d'un échelon à l'entrée d'un système de fonction de transfert  $\mathcal{H}_2(s)$ , on prélève l'enregistrement de la sortie comme indiqué par fig. 30.

a) Parmi les expressions suivantes, quelle fonction peut-on choisir pour modéliser le processus :  
(Choisissez la bonne proposition en justifiant votre réponse.)

- $\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
- $\frac{Ke^{-\tau s}}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$
- $\frac{K\omega_n^2 e^{-\tau s}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
- $\frac{K(1 - \tau s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

b) À l'aide du graphe de fig. 30, déterminez tous les paramètres de la fonction  $\mathcal{H}_2(s)$ .

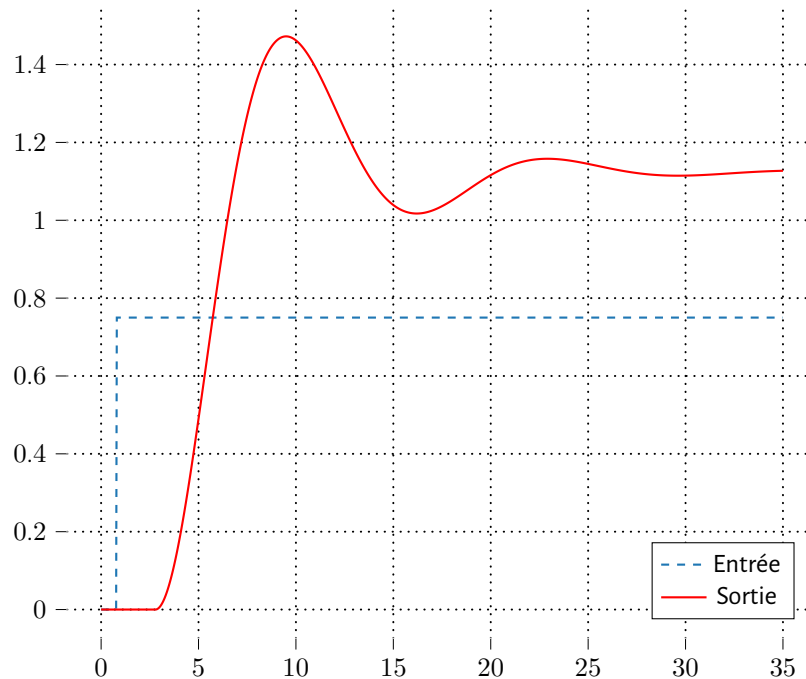


FIG. 30. Réponse indicielle de  $\mathcal{H}_2(s)$

La réponse est pseudo-périodique avec un retard. Le système ainsi modélisé est à minimum de phase. Elle s'agit d'une fonction de transfert de second ordre ayant un facteur d'amortissement inférieure à l'unité. Les deux pôles de la fonction  $\mathcal{H}_2$  sont complexes conjugués, à partie réelle négative.

Les paramètres exacts de la simulation sont :

**Gain statique  $K$  :** 1.5;

**Pulsation naturelle  $\omega_n$  :** 0.5 rad/sec;

**Coefficient d'amortissement  $\zeta$  :** 0.35;

**Retard  $\tau$  :** 2 sec.

**Exercice N° 3 :**

Le résultat d'un essai en boucle ouverte d'un système est illustrée par FIG. 31. Ce comportement est identique à celui d'un système de premier ordre avec retard.

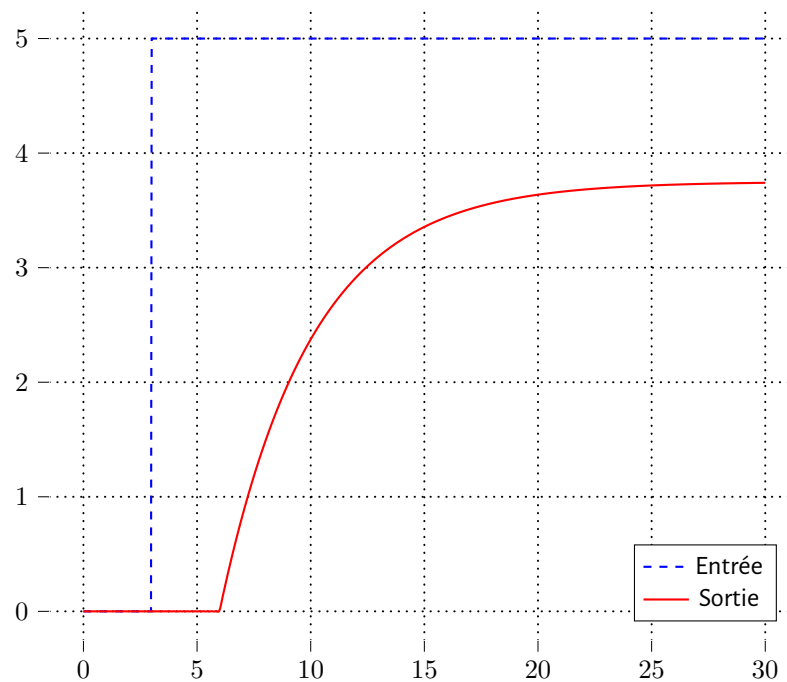


FIG. 31. Réponse indicielle de  $\mathcal{H}_1(s)$

- Déterminez les paramètres de la fonction  $\mathcal{H}_1$  en utilisant la méthode de **Broïda**.
- Déterminez les paramètres de la fonction  $\mathcal{H}_1$  en utilisant la méthode de **De La Fuente**.

Les paramètres exacts de la simulation sont :

**Gain statique  $K$  :** 0.75;

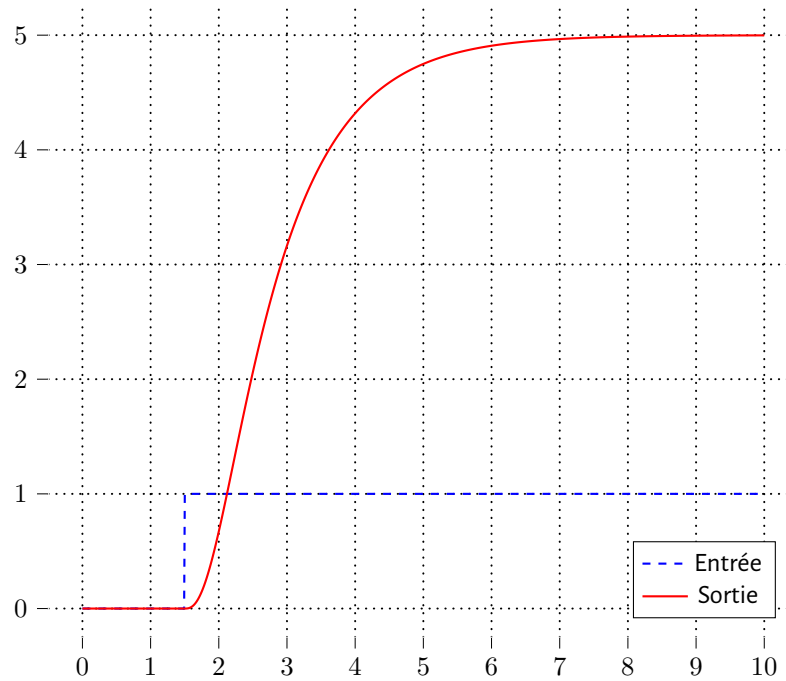
**Constante de temps  $T$  :** 4 sec;

**Retard  $\tau$  :** 3 sec.

#### Exercice N° 4 :

En utilisant la méthode de **Strejc-Davoust**, on se propose d'identifier la fonction  $\mathcal{H}_2$ , d'entrée  $u$  et de sortie  $y$  dont la réponse indicielle est donnée par FIG. 32.



FIG. 32. Réponse indicielle de  $\mathcal{H}_2(s)$ 

- Déterminez le gain statique  $K$ .
- À partir du graphe, déterminez les deux constantes  $T_a$  et  $T_b$ .
- En déduire l'ordre du système.
- Évaluez la valeur de la constante de temps.
- En déduire la valeur du retard  $\tau$ .
- Donnez l'expression du modèle identifié.

Le Gain statique est mesuré directement par la valeur finale de la sortie :

$$K = \frac{y_\infty}{u_\infty} = 5$$

On trace la tangente au point d'inflexion I et on mesure :

$$T_a = 0.27 \text{ sec et } T_b = 1.76 \text{ sec}$$

Le ratio  $\frac{T_a}{T_b} = 0.15$ . D'après le tableau, un ordre  $n = 2$  semble convenir.

La constante de temps  $T$  est évaluée à partir de  $\frac{T_b}{T}|_{\text{Table}} = 2.72$  du tableau. Cela donne  $T = 0.65 \text{ sec}$ .

Nous avons  $T_a = 0.27 \text{ sec}$  et  $\frac{T_a}{T}|_{\text{Table}} = 0.28$ . La constante  $T = 0.65 \text{ sec}$ , nous pouvons en déduire le retard  $\tau = 0.27 - 0.18 = 0.09 \text{ sec}$ .

$$\mathcal{H}_1(s) = \frac{5e^{-0.09s}}{(1 + 0.65s)^2}$$

#### Exercice n° 5:

La fonction de transfert réglante de niveau d'eau d'un dégazeur thermique a été identifiée en boucle fermée selon la méthode de pompage. Si on fixe le gain du régulateur à 5, le procédé manifeste des oscillations juste entretenues. La période de ces oscillations est  $T_{osc} = 23.88$  min. La fonction du dégazeur peut s'exprimer par :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_3(s) &= \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{U}(s)} \\ &= \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts}\end{aligned}\quad (18)$$

On donne  $G_p = 0.7$ .

- a) Calculez la constante de temps  $T$ .
- b) Calculez le retard  $\tau$ .
- c) En déduire  $\mathcal{H}_3$ .

$$T = \frac{T_{osc}}{2\pi} \sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1} = 12.748 \text{ min}$$

$$\tau = \frac{T_{osc}}{2\pi} \left( \pi - \arctan(\sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1}) \right) = 7.071 \text{ min}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_3(s) &= \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{U}(s)} \\ &= \frac{0.7e^{-7.071 s}}{1 + 12.748 s}\end{aligned}$$

## 1.4 Conclusion

Il résulte d'après ce qui précède qu'il n'y'a pas un modèle unique pour modéliser un système linéaire invariant dans le temps. L'ensemble des méthodes proposées ne permet pas de déterminer les valeurs des paramètres mais il permet de proposer une structure entre la sortie et une entrée indicielle.

Ces approches graphiques opèrent hors-ligne et nécessitent des signaux de grandes amplitudes. Certes, une grande amplitude du signal d'entrée peut mener à une bonne analyse de la réponse transitoire. Ceci cependant est soumis à des contraintes d'exploitation pratique du processus. En outre, cette contrainte peut paraître gênante pour les systèmes de dynamique faible ou présentant de longs temps morts. Parallèlement, les méthodes précédemment mentionnées échouent en présence du bruit ou des charges externes inattendues, puisqu'il est difficile de déterminer avec précision si le processus a atteint son régime permanent.

## 2 Représentation d'état



### 2.1 Calcul algébrique

**Définition d'une matrice :** Une matrice à  $n$  lignes et  $m$  colonnes est un tableau rectangulaire de  $(n \times m)$  éléments rangés. Il y a  $n$  lignes, et dans chaque ligne  $m$  éléments.

#### EXEMPLE

Une matrice  $M$ , à coefficients complexes, et de dimension  $(4, 6)$  :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 2i & 56 & 26 \\ 2 & 4 & 3 & 65 & -14 & 0 \\ 1 & 12 & 4.44 & 7 & -3.5i & 0 \\ 6 & 0 & 9 & 9 & 3.15 & 67 \end{bmatrix}$$

Dans cette représentation, le premier coefficient de la dimension est le nombre de lignes, et le deuxième représente le nombre de colonnes du tableau. Pour repérer un élément d'une matrice, on indique son indice de ligne puis son indice de colonne, les lignes se comptant du haut vers le bas et les colonnes de la gauche vers la droite.

On notera  $m_{ij}$ , les coefficients de la matrice  $M$ ,  $i$  compris entre 1 et 4 désignant le numéro de la ligne sur laquelle figure le coefficient envisagé, et  $j$  compris entre 1 et 6 désignant son numéro de colonne. Par exemple :  $m_{35} = -3.5i$ .

**Matrice carrée**  $n = m$  (nombre de lignes est égal au nombre de colonnes)

**Vecteur ligne**  $m = 1$  (nombre de colonnes est égal à 1)

**Vecteur colonne**  $n = 1$  (nombre de lignes est égal à 1)

De façon générale, la disposition des éléments dans une matrice  $M$  de dimension  $(n, m)$  est :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{1m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & m_{ij} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{nm} \end{bmatrix}$$

On notera par la suite  $m_{ij}$  l'élément d'indice  $(i, j)$  de la matrice  $M$ , c'est-à-dire le coefficient qui apparaît au niveau de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne. Donc :  $m_{ij} = M(i, j)$

### 2.1.1 Matrices particulières

**Matrice diagonale :** Soit  $M$  une matrice carrée de taille  $n$ .  $M$  est dite diagonale si et seulement si :

$$m_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j, \quad (i, j) \in \{1..n\}^2 \quad (19)$$

**Matrices triangulaire (inférieure ou supérieure) :** Soit  $M$  une matrice carrée.  $M$  est dite triangulaire inférieure (respectivement supérieure) ssi :

$$m_{ij} = 0 \quad \forall i > j \quad (\text{resp. } i < j) \quad (20)$$

**Matrice à diagonale (strictement) dominante :** Pour une matrice carrée  $M$  de taille  $n$ , le module de tout terme diagonal est supérieur (strict) à la somme des modules des autres termes de sa ligne :

$$\forall i \in \{1 \cdots n\} \quad \sum_{j=1, j \neq i}^n |m_{ij}| \leq (\leq) |m_{ii}| \quad (21)$$

**Matrice symétrique :** Soit  $M$  une matrice carrée.  $M$  est dite symétrique ssi  $M^T = M$

### 2.1.2 Opérations sur les matrices

**La transposée :** Soit  $M_1$  une matrice de taille  $(n, m)$ , on appelle matrice transposée de  $M_1$ , la matrice  $M_2$  qui a pour coefficients :  $m_{2ij} = m_{1ji}$  avec  $(i, j) \in \{1 \cdots m\} \times \{1 \cdots n\}$ . On note  $M_2 = M_1^T$

**Somme :** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de taille  $(n, m)$ .  $C = A + B$ ;  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  avec  $(i, j) \in \{1 \cdots n\} \times \{1 \cdots m\}$

**Produit :** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de tailles respectives  $(n_A, m_A)$  et  $(n_B, m_B)$

Condition nécessaire :  $m_A = n_B = p$ , (c.-à-d. : Le nombre de lignes de  $B$  est égal au nombre de colonnes de  $A$ )  $C = A \times B$

La matrice  $C$  est de taille  $(n_A, m_B)$  avec :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \times b_{kj}$$

$C$  a autant de lignes que  $A$  et autant de colonnes que  $B$ .

**Changement de base :** La matrice peut référencer une application linéaire.

Soit :

$$f : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^l \quad (22)$$

$$u \mapsto v = f(u) \quad (23)$$

L'espace de départ est muni d'une base  $B_1$ , qui contient  $p$  éléments linéairement indépendants et non nuls, avec laquelle on peut écrire un vecteur  $u$ , antécédent d'un vecteur  $v$  par la fonction  $f$ , appartenant à cet espace.

L'espace d'arrivée est muni d'une base  $B_2$ , qui contient  $l$  éléments linéairement indépendants et non nuls, avec laquelle on peut écrire un vecteur  $v$ , image d'un vecteur  $u$  par la fonction  $f$ , appartenant à cet espace.

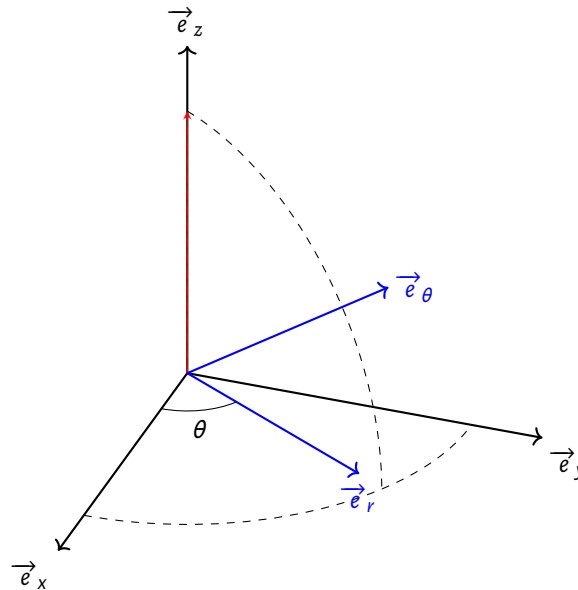
La matrice  $M$  est donc peut être vu comme un regroupement de relations entre les deux bases selon une fonction  $f$ . Elle est de taille  $(l, p)$ .

$$v = f(u) = M \times u$$

Le vecteur  $v$  est l'image du vecteur  $u$  dans la nouvelle base par la fonction  $f$ . L'expression d'un tel vecteur est relative à une base. Si on change cette base, l'expression de ce vecteur change. Ce passage d'une base à une autre peut être traduit également par une matrice dite de passage.

### EXEMPLE

On considère les deux référentiels suivants : Cartésien & Cylindrique.



Soit  $B_1 = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  la base orthonormée directe du repère cartésien.

Soit  $B_2 = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  la base orthonormée directe du repère cylindrique.

Soit  $\vec{u}$  un vecteur de l'espace.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{B_1} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix}_{B_2}$$

Soit  $P$  la matrice de passage de la base  $B_2$  vers la base  $B_1$ , on écrit donc les éléments de la base  $B_2$  en fonction des éléments de la base  $B_1$  :

$$P = P_{B_2 \rightarrow B_1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, tout vecteur écrit dans le référentiel cylindrique peut être écrit dans le repère cartésien par multiplication par la matrice  $P$ .

$$\vec{u}_{B_2} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

$$\vec{u}_{B_1} = P \times \vec{u}_{B_2}$$

$$\vec{u}_{B_1} = P \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix}_{B_1}$$

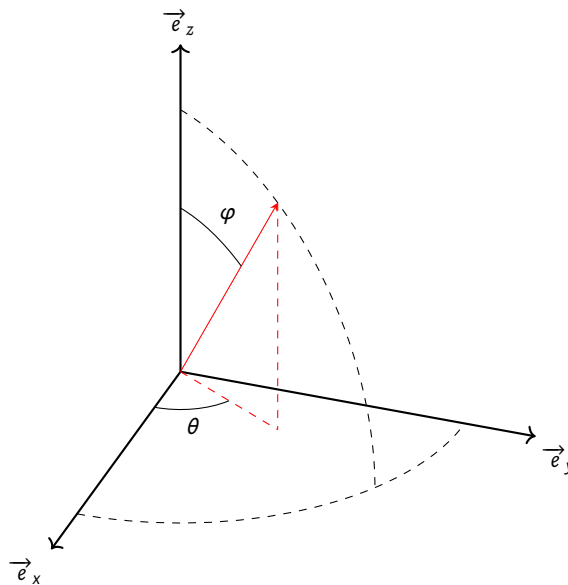
$$\vec{u}_{B_1} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{bmatrix}_{B_1}$$

On aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$



Considérer le passage de la base sphérique vers la base cartésienne.



Un vecteur écrit dans une base  $B_1$ , peut être écrit dans une base  $B_2$ . Il suffit de le multiplier par la matrice de passage de la base  $B_1$  vers la base  $B_2$ . Cette matrice traduit l'expression des éléments de la base  $B_1$  en fonction des éléments de la base  $B_2$ .

**Valeur propre et vecteur propre :** On appelle valeur propre de la matrice  $M$ , le coefficient  $\lambda$  qui vérifie cette propriété :

$$\exists \text{ un vecteur } \vec{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\}, \text{ telle que : } M \times u = \lambda \times u \quad (24)$$

Le vecteur  $\vec{u}$  qui vérifie cette propriété s'appelle le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Il peut exister plus qu'un vecteur vérifiant cette égalité. Le nombre de ces vecteurs (linéairement indépendants) s'appelle ordre de multiplicité de  $\lambda$ .

```
[8]: A = np.array([[2.0, 0.0], [1.0, 1.0]])
      print(np.linalg.eig(A)[0])
```

```
[1. 2.]
```

```
[9]: import numpy as np
      A = np.array([[1.0, 1.0], [0.0, 1.0]])
      print(np.linalg.eig(A)[0])
      print(np.linalg.eig(A)[1])
```

```
[1. 1.]
```

```
[[ 1.00000000e+00 -1.00000000e+00]
```

```
[ 0.00000000e+00  2.22044605e-16]]
```

**Spectre d'une matrice :** On appelle spectre d'une matrice carrée l'ensemble de ses valeurs propres munis de leurs ordres de multiplicité. Si la dimension du spectre d'une matrice carrée est égale à sa taille, on peut alors diagonaliser cette matrice.

Comment calculer le spectre d'une matrice carrée ?

$$Sp(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \chi(M) = 0\} \quad (25)$$

$\chi(M)$  s'appelle le polynôme caractéristique de la matrice  $M$ . Il est donné par :

$$\chi(M) = \det(\lambda \times I_n - M)$$



Chercher les valeurs propres de la matrice identité  $I_5$ .

**Déterminant d'une matrice :** On fait le développement selon une ligne ou une colonne mais non pas avec les deux à la fois. Souvent, on choisit la ligne ou colonne qui présente le maximum de zéros

$$\det(M) = \sum_{i(\text{resp. } j)=1}^n (-1)^{i+j} \times m_{ij} \times \Delta_{ij} \quad (26)$$

$\Delta_{ij}$  est le déterminant de la matrice  $M$  après avoir soustraire la ligne  $n^\circ i$  et la colonne  $n^\circ j$ .

### EXEMPLE

Soit la fonction suivante :

$$\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{F} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice est le produit des valeurs propres :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\text{trace}(A) = 3 = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\det\{A\} = 2 = \lambda_1 \times \lambda_2$$

Pour déterminer les valeurs propres, on se trouve finalement avec le trinôme suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 3 = \Sigma \\ \lambda_1 \lambda_2 = 2 = \Pi \end{cases}$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x x_2 - x x_1 + x_1 x_2 = x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\Sigma} x + \underbrace{x_1 x_2}_{\Pi}$$

$$\lambda^2 - \Sigma \lambda + \Pi = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \& \quad \lambda_2 = 2$$



Déterminer le déterminant d'une matrice diagonale.

**Trace d'une matrice :** Soit  $M$  une matrice carrée à coefficients complexes de taille  $n$ . On appelle Trace de  $M$  la somme des éléments qui se situent sur la diagonale de  $M$  c'est-à-dire les éléments ayant des indices identiques (i.e.  $i = j$ ) avec  $i, j \in \{1..n\}$

$$\text{trace}(M) = \sum_{k=1}^n m_{kk} \quad (27)$$

### EXEMPLE

Soit  $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$

$$A = \begin{bmatrix} \overbrace{1}^{a_{11}} & 2 \\ -1 & \underbrace{1}_{a_{22}} \end{bmatrix}$$

La trace de  $A$  est  $a_{11} + a_{22} = 1 + 1 = 2$ . De façon générale, la trace d'une matrice est la somme des valeurs propres :

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$



**Rang d'une matrice :** On appelle rang d'une matrice le nombre de colonnes linéairement indépendantes.

**Inversion d'une matrice :** Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n$ .  $A$  est inversible ssi son déterminant est différent de zéro. On appelle  $B$  la matrice inverse de  $A$ , la matrice qui vérifie l'égalité suivante :

$$A \times B = B \times A = I_n \quad (28)$$

$I_n$  s'appelle la matrice identité. On note la matrice inverse  $A^{-1}$ .

**Méthode de calcul :**

**Méthode directe :**

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}_A^T$$

$\text{com}_A$  s'appelle la comatrice de  $A$ . On pose  $B = \text{com}_A$ ;  $b_{ij} = (-1)^{i+j} \times \Delta_{ij}$

$\Delta_{ij}$  est le déterminant de la matrice  $M$  après avoir soustraire la ligne  $n^\circ i$  et la colonne  $n^\circ j$ .

### EXEMPLE

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - M) &= \begin{vmatrix} \lambda - m_{11} & -m_{12} \\ -m_{21} & \lambda - m_{22} \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - m_{11})(\lambda - m_{22}) - m_{12}m_{21} \\ &= \lambda^2 - \lambda \underbrace{(m_{11} + m_{22})}_{\text{trace}(M)} + \underbrace{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}}_{\det(M)} \end{aligned}$$



Inverser une matrice diagonale.

**Méthode de pivot de Gauss :** Elle consiste en fait à effectuer des opérations sur les lignes et les colonnes jusqu'à aboutir à la matrice identité puis on refait le processus inverse sur la matrice identité.

## 2.2 Équation d'état

Pour pouvoir prédire correctement le comportement futur de la réponse d'un système linéaire d'ordre  $n$  connaissant déjà l'entrée, on aura besoin de  $n$  conditions initiales. Ces valeurs de démarrage présentent ainsi la capacité minimale de mémoire que le système peut stocker pour pouvoir déterminer son évolution ultérieure.

La fonction de transfert représente uniquement le transfert extrinsèque entre l'entrée et la sortie d'un système donné. Elle ne permet pas de prendre en considération l'évolution des grandeurs intrinsèques au système, nommées états. La représentation d'état s'avère ainsi très intéressante pour modéliser la réalité physique.



Nombre de variables d'état = Nombre d'intégrations = Nombre de CI

Dans la suite de cours on ne traitera que le cas d'un système linéaire stationnaire, c.-à-d. les paramètres du système sont indépendants du temps.

### EXEMPLE

Soit l'équation différentielle suivante :

$$3 \frac{dx}{dt} + 12x = 6u$$

$$y = x$$

Soit encore

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{-4}_A x + \underbrace{2}_B u$$

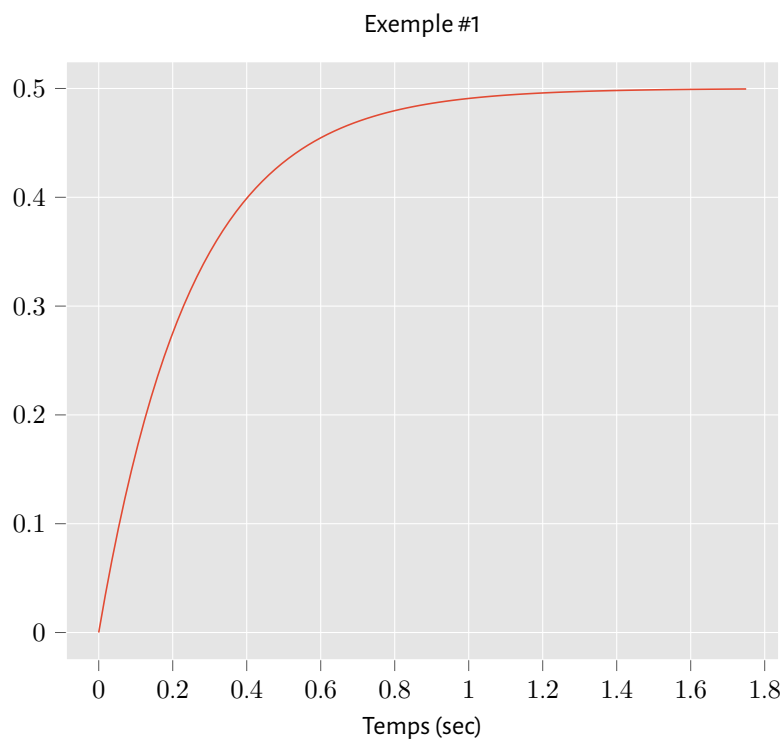
$$y = \underbrace{1}_C x + \underbrace{0}_D u$$

```
[1]: import numpy as np

from scipy.signal import step
from scipy.signal import lsim
from scipy.signal import StateSpace as ss

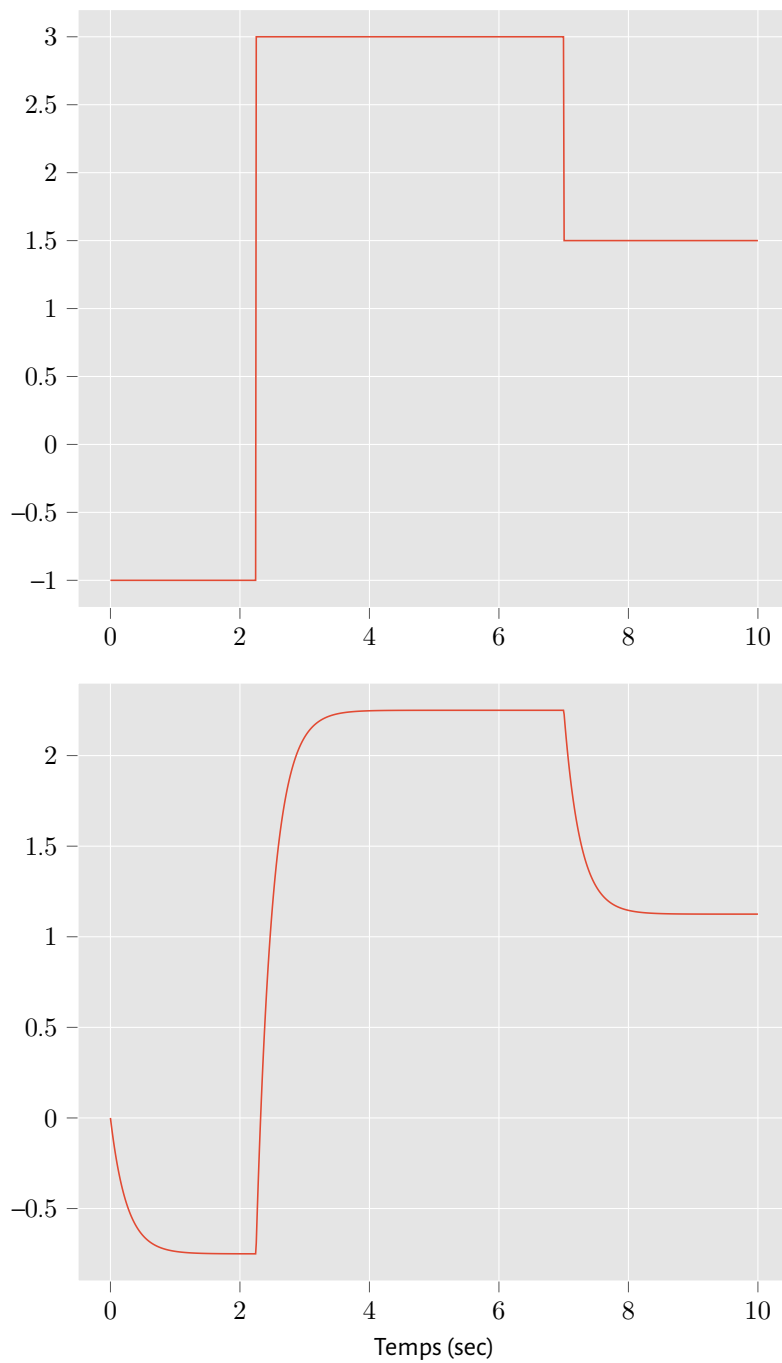
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("ggplot")
```

```
[2]: A, B, C, D = -4.0, 2.0, 1.0, 0.0
sys1 = ss(A, B, C, D)
t1, y1 = step(sys1)
plt.plot(t1, y1)
plt.grid(True)
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.title('Exemple #1')
plt.show()
```



**Signal d'entrée constant par morceaux**

```
[3]: A, B, C, D = -4.0, 3.0, 1.0, 0.0
     sys1 = ss(A, B, C, D)
     t = np.linspace(0, 10, 1000)
     u = np.zeros(len(t))
     u[0:225] = -1; u[225:700] = 3; u[700:] = 1.5;
     _, y, _ = lsim(sys1, u, t)
     plt.subplot(2, 1, 1)
     plt.plot(t, u)
     plt.grid(True)
     plt.subplot(2, 1, 2)
     plt.plot(t, y)
     plt.grid(True)
     plt.xlabel('Temps (sec)')
     plt.show()
```



**EXEMPLE**

Soit l'exemple suivant d'une équation différentielle de second ordre :

$$2 \frac{dx_1}{dt} + 6x_1 = 8u \rightarrow \frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = -3x_1 + 0x_2 + 4u$$

$$3 \frac{dx_2}{dt} + 6x_1 + 9x_2 = 0 \rightarrow \frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2$$

$$y = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow y = 0.5x_1 + 0.5x_2 + 0u$$

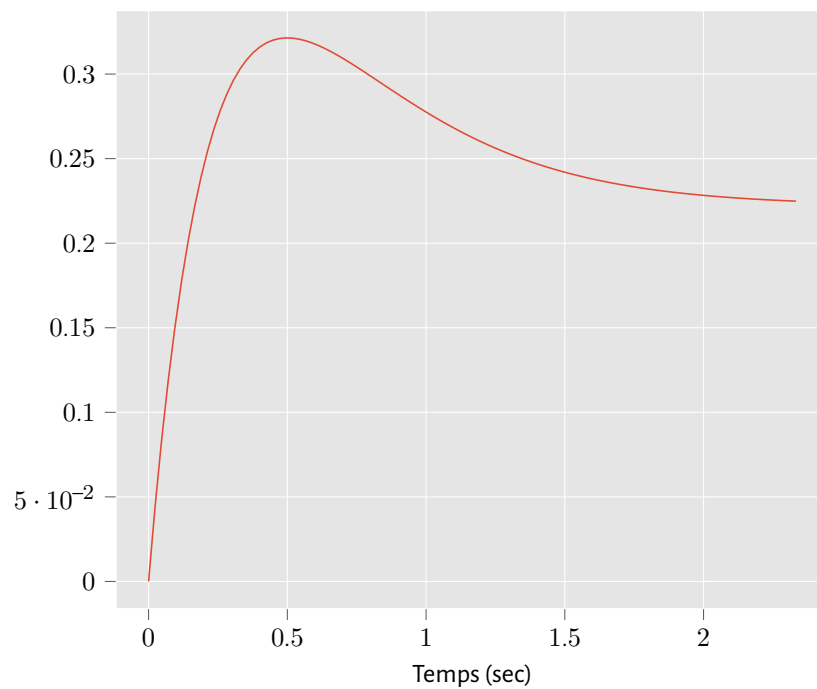
La représentation d'état est :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X + 0$$

```
[4]: A = [[-3.0, 0.0], [-2.0, -3.0]] # Matlab: A = [-3, 0; -2, -3 ]
B = [[4.0], [0.0]]
C = [0.5, 0.5]
D = 0.0
sys2 = ss(A, B, C, D)
t2, y2 = step(sys2)
plt.plot(t2, y2)
plt.grid(True)
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.title('Exemple #2')
plt.show()
```

Exemple #2



### EXEMPLE

Désormais, les états ne figurent pas explicitement dans l'équation du système.

$$4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = 3u \quad (29)$$

On procède ainsi par intercaler de nouvelles variables.

Soit  $x_1 = y$  et  $x_2 = \frac{dy}{dt}$

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = x_2 = 0x_1 + x_2 + 0u$$

$$4 \underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}}_{\dot{x}_2} + 2 \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{x_2} + \underbrace{y}_{x_1} = 3u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}u$$

Soit encore

$$\dot{x}_2 = -0.25x_1 - 0.5x_2 + 0.75u$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_B u$$

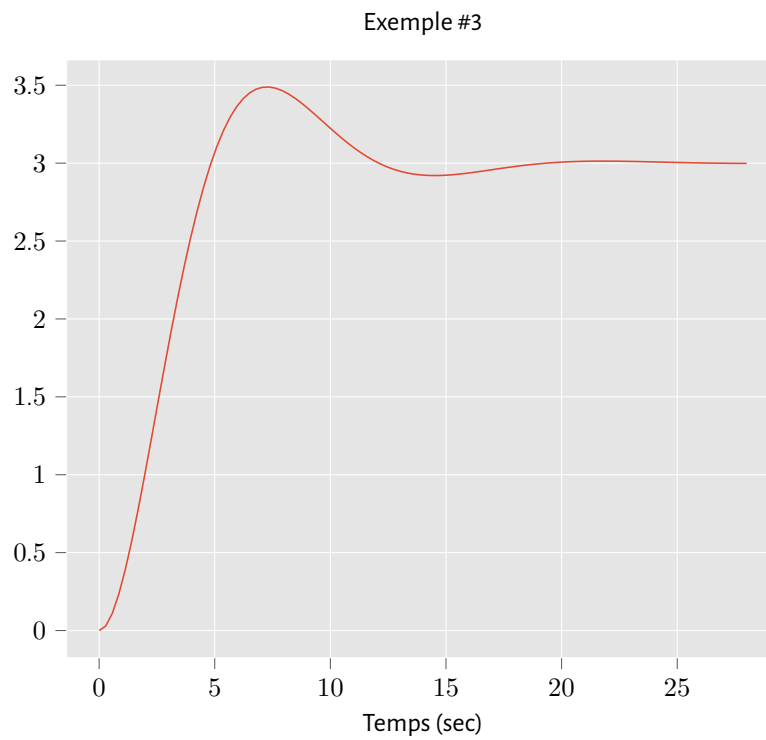
$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma & \sigma \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.25 & -0.5 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0.75 \end{bmatrix}}_B u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X$$

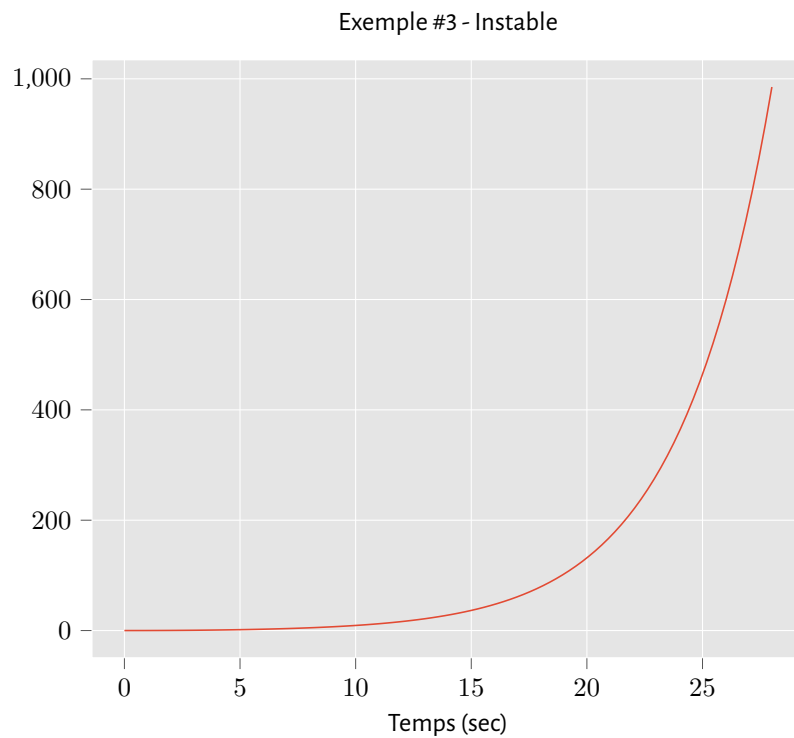
```
[5]: A = [[0.0, 1.0], [-0.25, -0.5]]
import numpy as np
valp = np.linalg.eig(A)[0]
print(valp)
B = [[0.0], [0.75]]
C = [1.0, 0.0]
D = 0.0
sys3 = ss(A, B, C, D)
t3, y3 = step(sys3)
plt.plot(t3, y3)
plt.grid(True)
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.title('Exemple #3')
plt.show()
```

$[-0.25+0.4330127j \ -0.25-0.4330127j]$



```
[6]: A = [[-0.25, 0.15], [0.0, 0.25]]
import numpy as np
valp = np.linalg.eig(A)[0]
print(valp)
B = [[0.0], [0.75]]
C = [1.0, 0.0]
D = 0.0
sys3 = ss(A, B, C, D)
t3, y3 = step(sys3)
plt.plot(t3, y3)
plt.grid(True)
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.title('Exemple #3')
plt.show()
```

```
[-0.25  0.25]
```



La sortie du modèle est non finie à cause de la valeur propre réelle positive 0.25.

**Exercice N° 6 :**

Proposer une représentation d'état possible pour chacune des équations différentielles suivantes :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 3u(t) \quad (30)$$

$$2 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} - y(t) = 2u(t) \quad (31)$$

$$2 \frac{dx_1}{dt} + 6x_1 = 8u \quad (32)$$

$$3 \frac{dx_2}{dt} + 6x_1 + 9x_2 = 0 \quad (33)$$

$$y = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (34)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 3u(t) \quad (35)$$



On prend :

$$\begin{cases} x_1 = y & \longrightarrow & \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = \frac{dy}{dt} & \longrightarrow & \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + 3u \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$


---


$$2 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} - y(t) = 2u(t) \quad (36)$$

On prend :

$$\begin{cases} x_1 = y & \longrightarrow & \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = \frac{dy}{dt} & \longrightarrow & \dot{x}_2 = x_3 \\ x_3 = \frac{d^2 y}{dt^2} & \longrightarrow & \dot{x}_3 = 0.5x_1 + u \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$


---


$$2 \frac{dx_1}{dt} + 6x_1 = 8u \quad (37)$$

$$3 \frac{dx_2}{dt} + 6x_1 + 9x_2 = 0 \quad (38)$$

$$y = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (39)$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0.5 \quad 0.5]$$

### LINÉARISATION D'UNE ÉQUATION D'ÉTAT NON LINÉAIRE

#### Exercice N° 7 :

On se propose de linéariser le système ci-dessous autour du point de fonctionnement défini par  $\bar{u} = 1$  et  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$2 \frac{dx_1}{dt} + x_1^2 + 3x_2^2 = 16u \quad (40)$$

$$3 \frac{dx_2}{dt} + 6x_1^2 - 6x_2^2 = 0 \quad (41)$$

$$y = x_1 + x_2 \quad (42)$$

- Écrire  $\dot{x}_1 = \mathcal{F}_1(x_1, x_2, u)$
- Écrire  $\dot{x}_2 = \mathcal{F}_2(x_1, x_2, u)$
- Écrire  $y = \mathcal{G}(x_1, x_2, u)$
- Proposer une équation d'état qui permet de linéariser le système précédent autour de son point de fonctionnement.

$$2\frac{dx_1}{dt} + x_1^2 + 3x_2^2 = 16u \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = \mathcal{F}_1(x_1, x_2, u) = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{16}{2}u$$

$$3\frac{dx_2}{dt} + 6x_1^2 - 6x_2^2 = 0 \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = \mathcal{F}_2(x_1, x_2, u) = -2x_1^2 + 2x_2^2 + 0 \times u$$

$$y = x_1 + x_2 \Rightarrow y(t) = \mathcal{G}(x_1, x_2, u) = x_1 + x_2$$

**Calcul de  $\frac{dx_1}{dt}$**

$$\frac{dx_1}{dt} = \mathcal{F}_1(x_1, x_2, u) = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 8u$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_1} = -x_1 \quad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_1} \Big|_{\bar{u}, \bar{x}} = -2$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_2} = -3x_2 \quad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_2} \Big|_{\bar{u}, \bar{x}} = -6$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial u} = 8 \quad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial u} \Big|_{\bar{u}, \bar{x}} = 8$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_1} \Big|_{\bar{u}, \bar{x}} & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_2} \Big|_{\bar{u}, \bar{x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial u} \Big|_{\bar{u}, \bar{x}} u$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 8u$$

**Calcul de  $\frac{dx_2}{dt}$**

$$\frac{dx_2}{dt} = \mathcal{F}_2(x_1, x_2, u) = -2x_1^2 + 2x_2^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1} = -4x_1 \quad \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1} \Big|_{\bar{u}, \bar{x}} = -8$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2} = 4x_2 \quad \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2} \Big|_{\bar{u}, \bar{x}} = 8$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial u} \Big|_{\bar{u}, \bar{x}} = 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1} \Big|_{\bar{u}, \bar{x}} & \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2} \Big|_{\bar{u}, \bar{x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial u} \Big|_{\bar{u}, \bar{x}} u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \begin{bmatrix} -8 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0u$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

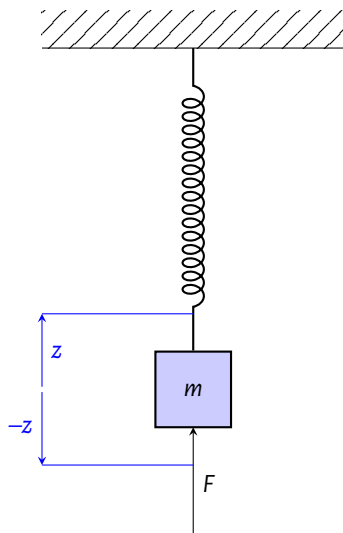
```
[7]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("ggplot")
from scipy.signal import StateSpace as ss
from scipy.signal import step

A = np.array([[ -2.0, -6.0], [-8, 8]])
B = np.array([[8.0], [0.0]])
C = np.array([1,1])
D = np.array([0])
sys4 = ss(A, B, C, D)
t4, y4 = step(sys4)
plt.plot(t4, y4)
plt.grid(True)
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.title('Exemple #4')
plt.show()
```

**Exercice N° 8 :**

On considère l'exemple d'un ressort à comportement non-linéaire. Il est régi par l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{z} = F + k_1z + k_2z^3 \quad (43)$$



- Entrée  $u(t) = F$
- Sortie  $y(t) = z(t)$
- États  $\begin{cases} x_1(t) = z(t) \\ x_2(t) = \dot{z}(t) \end{cases}$

a) Écrire  $\dot{x}_1 = \mathcal{F}_1(x_1, x_2, u)$

b) Écrire  $\dot{x}_2 = \mathcal{F}_2(x_1, x_2, u)$

c) Proposer une équation d'état qui permet de linéariser l'éq. (43) autour du point de fonctionnement défini par  $\bar{x} = 0$  &  $\bar{u} = 0$

$$x_1 = z \implies \dot{x}_1 = \dot{z} = x_2$$

$$x_2 = \dot{z} \implies \dot{x}_2 = \ddot{z} = \frac{k_1}{m}x_1 + \frac{k_2}{m}x_1^3 + \frac{1}{m}u$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{|\bar{x}, \bar{u}} x + \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{|\bar{x}, \bar{u}} u \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

### 2.2.1 Formes canoniques

Nous considérons, ci-après, le scénario d'un système linéaire mono-entrée, mono-sortie (sauf indication). Un système pareil est décrit par l'équation différentielle suivante, avec  $m < n$  :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j}. \quad (44)$$

En appliquant la transformée de Laplace, on trouve :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}. \quad (45)$$

### Forme Campagne - Commandable

Nous partons d'une fonction de transfert comme indiquée par éq. (46) :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (46)$$

Nous allons faire apparaître les formes intégrales  $\frac{1}{s}$  à la place de la forme différentielle  $s$  dans la fonction de transfert.

En conséquence, nous multiplions les deux cotés de l'équation précédente par la quantité  $\frac{1}{s^n}$  afin d'éviter toute forme dérivée dans la réalisation du schéma bloc du système.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j}}{\sum_{i=0}^n a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i}} \quad (47)$$

Soit  $a_n = 1$ .

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j}}{1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i}} \quad (48)$$

Soit encore :

$$Y(s) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i} Y(s) = \sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j} U(s) \quad (49)$$

La sortie  $Y(s)$  est accessible à travers l'éq. (50).

$$Y(s) = \sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j} U(s) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i} Y(s) \quad (50)$$

$$= \sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j} \underbrace{\left[ U(s) - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i} Y(s)}{\sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j}} \right]}_{W(s)} \quad (51)$$

Soit la nouvelle variable  $W(s)$  telle que :

$$\begin{aligned} W(s) &= U(s) - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i}}{\sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j}} Y(s) \\ &= U(s) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i} \frac{Y(s)}{\sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j}} \\ &= U(s) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i} W(s) \\ &= U(s) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i} W(s) \end{aligned} \quad (52)$$

Nous présentons également une autre méthode plus simple pour la détermination de  $W(s)$ . On considère de nouveau l'éq. (48) :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (53)$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j}}{1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i}} \quad (54)$$

On peut intercaler la variable  $W(s)$  comme suit :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{W(s)} \frac{W(s)}{U(s)} \quad (55)$$

On choisit

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \sum_{j=0}^m b_j \left(\frac{1}{s}\right)^{n-j} \quad \text{et} \quad \frac{W(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{1}{s}\right)^{n-i}}$$

La sortie  $Y(s)$  est finalement donnée par éq. (57).

$$Y(s) = \sum_{j=0}^m b_j \underbrace{\left(\frac{1}{s}\right)^{n-j} W(s)}_{x_k(s)} \quad (56)$$

$$= \sum_{k=0}^m b_k x_k(s) \quad (57)$$

Les matrices d'état  $A_c$ , d'entrée  $B_c$  et de sortie  $C_c$  sont :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (58)$$

(59)

$$C_c = [b_0 \quad \cdots \quad b_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0]. \quad (60)$$

#### Exercice N° 9 :

Proposer une représentation d'état possible pour chacune des fonctions de transfert suivantes :

$$\mathcal{G}_1(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + s + 0.5} \quad (61)$$

$$\mathcal{G}_2(s) = \frac{2s^2 - 1}{0.5s^3 - 1.5} \quad (62)$$

$$\mathcal{G}_3(s) = \frac{s^2}{3s^2 + 0.5} \quad (63)$$

$$\mathcal{G}_1(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + s + 0.5} \quad (64)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 2]$$

$$\mathcal{G}_2(s) = \frac{2s^2 - 1}{0.5s^3 - 1.5} \quad (65)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{G}_3(s) = \frac{s^2}{3s^2 + 0.5} \quad (66)$$

On procède d'abord par une division euclidienne :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5/3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -0.5/9 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 1/3$$

Considérons l'exemple d'un système décrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Pour pouvoir écrire la description suivante de façon semblable à la forme donnée par éq. (58), c.-à-d. la forme canonique, il est possible, moyennant un changement de base, d'écrire  $z_c(t) = Px(t)$  où  $z_c(t)$  dénote le nouveau vecteur d'état relatif à la nouvelle base.

$$\begin{cases} \dot{z}_c(t) = A_c z_c(t) + B_c u(t) \\ y(t) = C_c z_c(t) \end{cases}$$

avec :

$$A_c = PAP^{-1}, \quad B_c = PB, \quad C_c = CP^{-1},$$

et la matrice de passage  $P$  sera calculée comme suit :

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 A \\ \vdots \\ P_1 A^{n-1} \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1}.$$



Cette forme est nommée la forme canonique de commandabilité.

### Forme Commandable - Observable

En appliquant la transformée de Laplace, on trouve :

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (67)$$

Étant donné que  $H$  est scalaire, alors  $H^T = H$ . Il en découle, puisque  $((sI - A)^{-1})^T = (sI - A^T)^{-1}$  :

$$H(s) = B^T (sI - A^T)^{-1} C^T \quad (68)$$

$$\boxed{A_o = A_c^T} \quad \boxed{B_o = C_c^T} \quad \boxed{C_o = B_c^T}$$

Les matrices d'état, d'entrée et de sortie sont données par éq. (69) et éq. (70).

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -a_0 \\ 1 & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (69)$$

$$C_o = [0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad 0 \quad 1]. \quad (70)$$



Cette forme est appelée la forme canonique d'observabilité ou aussi la forme de Frobenius.

### 2.2.2 Forme modale

#### Pôles simples

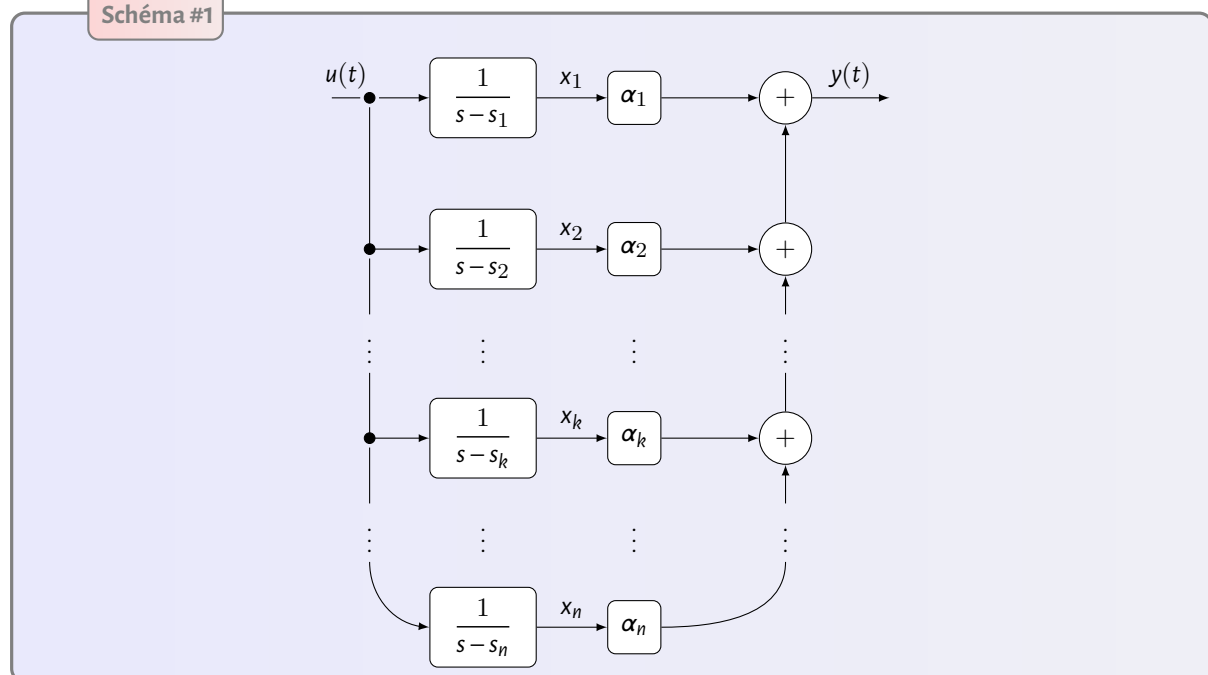
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (71)$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, \quad \text{où } m \leq n \quad (72)$$

La fonction  $H \in \mathbb{C}(s)$ , elle possède alors  $n$  racines complexes. On suppose qu'elles sont distinctes deux à deux.

$$H(s) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{s - s_k} \quad (73)$$

Schéma #1





$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & s_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]. \quad (74)$$

Soit l'exemple de l'éq. (75) :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \quad 0.1 \quad -1 \quad 2]. \quad (75)$$

La fonction de transfert correspondante est :

$$H(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{0.1}{s+2} + \frac{-1}{s-1} + \frac{2}{s-3.5} \quad (76)$$

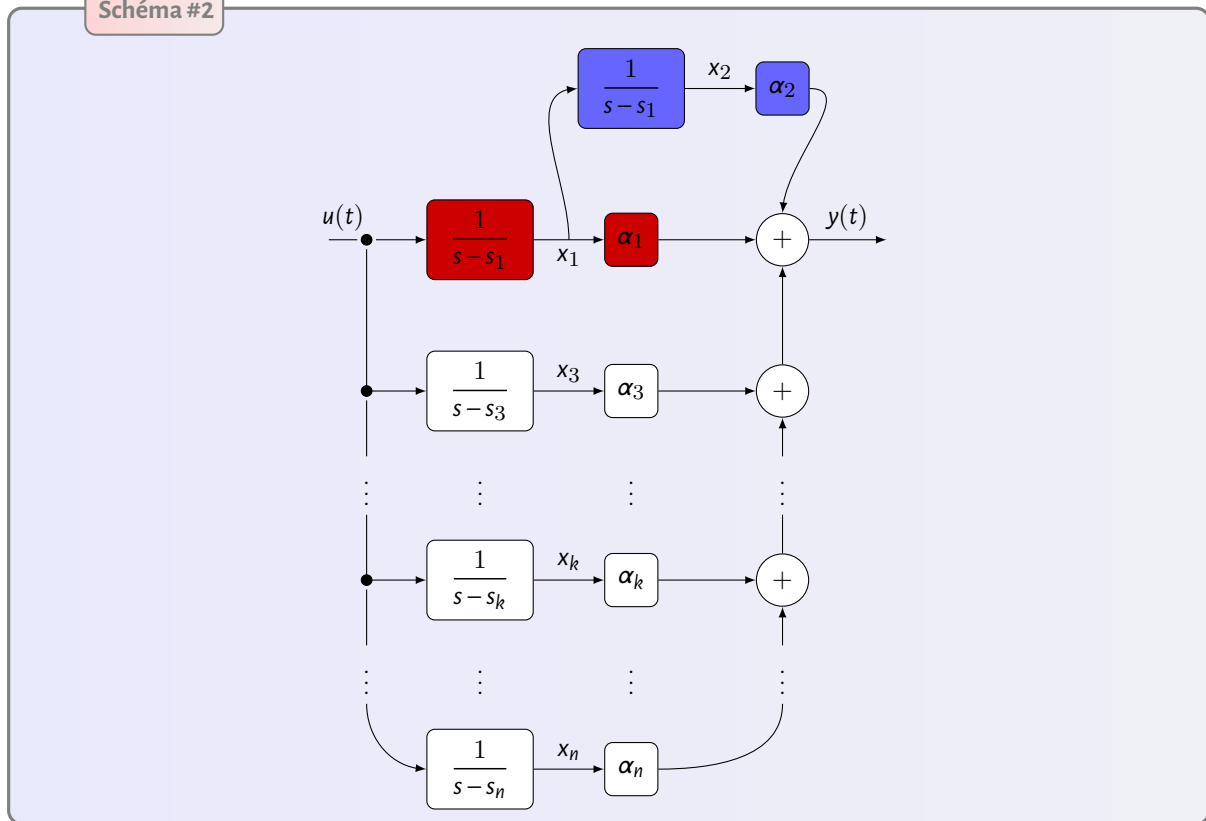
### Pôles multiples

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, \quad \text{où } m \leq n \end{aligned} \quad (77)$$

Soit  $s_1$  un pôle double.

$$H(s) = \frac{\alpha_1}{s-s_1} + \frac{\alpha_2}{(s-s_1)^2} + \sum_{k=3}^n \frac{\alpha_k}{s-s_k} \quad (78)$$

Schéma #2



La représentation d'état correspondante devient comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & s_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & s_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]. \quad (79)$$

### EXEMPLE

On considère la représentation d'état comme indiquée par éq. (80) :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \quad 0.1 \quad -3.5 \quad 5 \quad 1]. \quad (80)$$

La fonction de transfert correspondante est :

$$H(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{0.1}{(s+1)^2} + \frac{-3.5}{(s+1)^3} + \frac{5}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2} \quad (81)$$

### Exercice N°10 :

Donner une représentation d'état de la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{0.25}{(s+3)^3} + \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{0.5}{s^3} \quad (82)$$

Une représentation d'état sous la forme modale est :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0.25 \quad -0.5]$$



Pour un système d'ordre  $n$ , il existe au moins  $n^2$  descriptions d'état possible.

### 2.2.3 Passage d'une $\mathcal{EE}$ vers matrice de transfert

Soit un système décrit dans l'espace d'état par l'éq. (83).

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases} \quad (83)$$

Si on applique la transformée de Laplace, on trouve :

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \quad (84)$$

La matrice de transfert est indiquée par l'éq. (85), où  $Y(s)$  et  $U(s)$  dénotent respectivement les images des signaux  $y(t)$  et  $u(t)$  par application de la transformée de Laplace :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI_n - A)^{-1}B + D, \quad (85)$$

La matrice de transfert est unique. Elle a autant de lignes que nombre de sorties. Elle a autant de colonnes que nombre d'entrées.

#### Exercice N° 11 :

On considère la représentation suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \\ y(t) = CX(t) + Du(t), \end{cases} \quad (86)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0.35 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.15 & 1 \\ 2 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

Calculer la matrice de transfert.

Soit :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow b_1 \\ \uparrow b_2 \end{matrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3.2 \\ 4 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow c_1 \\ \leftarrow c_2 \\ \leftarrow c_3 \end{matrix}$$

La dimension de la matrice  $D$  est  $(3, 2)$ , Le système décrit par l'éq. (86) a 3 sorties et 2 entrées.

$$\begin{aligned} \text{Soit } u(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \text{ et } y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}. \\ \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} & \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} \\ \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} & \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} \\ \frac{Y_3(s)}{U_1(s)} & \frac{Y_3(s)}{U_2(s)} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} c_1(sl_2 - A)^{-1}b_1 + D(1,1) & c_1(sl_2 - A)^{-1}b_2 + D(1,2) \\ c_2(sl_2 - A)^{-1}b_1 + D(2,1) & c_2(sl_2 - A)^{-1}b_2 + D(2,2) \\ c_3(sl_2 - A)^{-1}b_1 + D(3,1) & c_3(sl_2 - A)^{-1}b_2 + D(3,3) \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de Transfert : } M} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 2.3 Résolution d'une équation différentielle linéaire

Une équation différentielle linéaire est souvent mise sous la forme suivante :

$$\dot{X}(t) = \mathcal{F}(t, X), \quad (87)$$

où  $t$  n'est pas nécessairement un paramètre temporel. La dérivée de  $X$  par rapport à  $t$  est désignée par  $\dot{X}$ . Les conditions initiales sont données par le biais du vecteur  $X(t_0) = X_0$ .

### 2.3.1 Particularité

Par la suite, on considère un système linéaire de premier ordre qui se met souvent sous la forme suivante :

$$\tau \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \quad (88)$$

La solution générale de l'équation précédente est la superposition de deux solutions. Une due au régime libre (i.e., sous l'effet de la condition initiale). L'autre est le résultat du régime forcé.

#### Régime libre

La sortie  $y_h$  dans ce cas agit sous l'effet de la condition initiale seule.

$$\tau \dot{y}_h(t) + y_h(t) = 0 \quad (89)$$

Après intégration de l'éq. (89), on obtient :

$$\ln(|y_h(t)|) = -\frac{t}{\tau} + \nu, \quad (90)$$

où  $\ln$  dénote le logarithme naturel. Soit encore, après application de la fonction  $\exp$  aux deux membres de l'éq. (90) :

$$y_h(t) = V e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (91)$$

$v$  et  $V$  sont deux constantes et  $V = e^v$ . On se donne la condition initiale  $y(t = t_0) = y_0$ , la constante  $V$  est égale à  $y_0 e^{\frac{t_0}{\tau}}$ .

On en déduit alors l'expression de la solution homogène par l'expression de l'éq. (92).

$$y_h(t) = y_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}, \quad \forall t \geq 0 \quad (92)$$

### Régime forcé

On considère de nouveau l'éq. (88). Par application de la méthode de variation de constante, on obtient :

$$y_p(t) = V(t) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (93)$$

Après dérivation de  $y_p(t)$  par rapport à  $t$ , on trouve :

$$\dot{y}_p(t) = \dot{V}(t) e^{-\frac{t}{\tau}} + V(t) \frac{d}{dt} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (94)$$

Après développement,  $\dot{y}_p(t)$  devient comme suit :

$$\dot{y}_p(t) = \dot{V}(t) e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau} V(t) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (95)$$

On remplace  $y_p(t)$  de l'éq. (88) par son terme équivalent de l'éq. (95) :

$$\tau \left( \dot{V}(t) - \frac{1}{\tau} V(t) \right) e^{-\frac{t}{\tau}} + V(t) e^{-\frac{t}{\tau}} = Ku(t) \quad (96)$$

Soit encore, après simplification :

$$\tau \dot{V}(t) e^{-\frac{t}{\tau}} = Ku(t) \quad (97)$$

On déduit l'expression de  $\dot{V}(t)$  :

$$\dot{V}(t) = \frac{K}{\tau} e^{\frac{t}{\tau}} u(t) \quad (98)$$

Après intégration sur l'intervalle  $[t_0, t]$ ,

$$V(t) = \int_{t_0}^t \frac{K}{\tau} e^{\frac{\zeta}{\tau}} u(\zeta) d\zeta \quad (99)$$

La mise à jour de l'éq. (99) dans  $y_p$  donne :

$$y_p(t) = \int_{t_0}^t \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}} u(\zeta) d\zeta \quad (100)$$

Il en résulte que la solution la plus générale est  $y = y_p + y_h$  :

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \int_{t_0}^t \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}} u(\zeta) d\zeta \quad (101)$$

### 2.3.2 Généralité

On considère désormais un système linéaire d'ordre  $n$  supérieur à 1. L'équation représentative du système peut s'écrire de la façon suivante :

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t), \quad m \leq n. \quad (102)$$

Soit  $a_n = 1$ . Eq. (102) s'actualise comme suit :

$$y^{(n)}(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t) \quad (103)$$

Soit le vecteur  $X(t)$  qui regroupe les variables d'état du système. C'est donc un vecteur à  $n$  éléments. Il représente la capacité mémoire minimale que le système peut sauvegarder afin de pouvoir déterminer son évolution ultérieure. Nous rappelons qu'on peut transformer l'éq. (103) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases} \quad (104)$$

avec

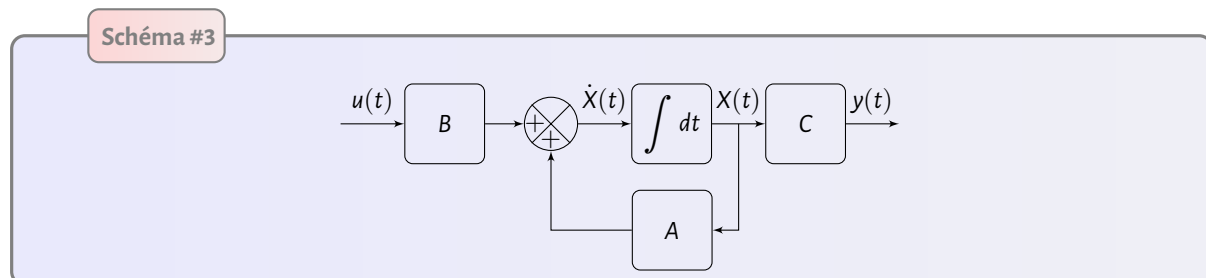
$$(A, B, C, D) \in \mathbb{M}_{(n,n)}(\mathbb{C}) \times \mathbb{M}_{(n,1)}(\mathbb{C}) \times \mathbb{M}_{(1,n)}(\mathbb{C}) \times \mathbb{M}_{(1,1)}(\mathbb{C})$$

$A$  est la matrice d'état;

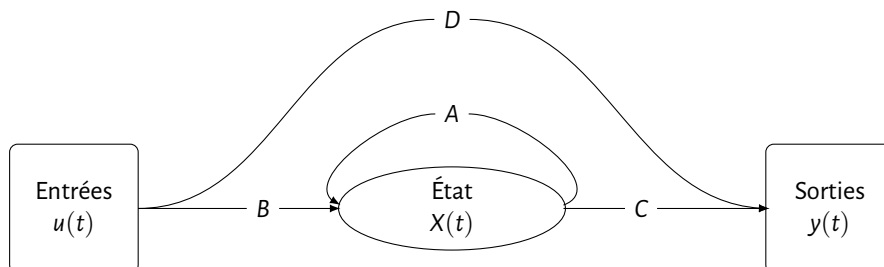
$B$  est la matrice d'entrée;

$C$  est la matrice de sortie;

$D$  caractérise le transfert direct entrée-sortie. Elle existe ssi  $m = n$ .



Un schéma explicatif des interactions mutuelles entre ces grandeurs est donné dans [PM82].



Étant donné la solution de l'éq. (101), le vecteur d'état  $X(t)$  peut être déduit par la relation suivante :

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\zeta)} B u(\zeta) d\zeta \quad (105)$$

## 2.4 Commande par retour d'état

Avant de se pencher sur la synthèse d'une loi de commande pour un système linéaire, la question d'existence d'une commande doit être posée.

Nous rappelons d'abord la description du vecteur d'état  $X$  à un instant  $t$  donné :

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\mu)}Bu(\mu)d\mu \quad (106)$$

Mettons  $X(t) = 0$ , alors pour  $t > t_0$ , nous déduisons :

$$X_0 = - \int_{t_0}^t e^{-A\mu}Bu(\mu)d\mu \quad (107)$$

Eq. (107) peut être résolue pour une entrée  $u(\mu)$  et un état initial  $X_0$  si, et seulement si, les lignes (resp. colonnes) de la matrice  $e^{-A\mu}B$  sont linéairement indépendant.

Étant donnée l'approximation de Taylor, la quantité en exponentielles peut être décomposée en termes de  $I_n, A, A^2, \dots, A^k, \dots, A^\infty$ . Chaque matrice vérifie son polynôme caractéristique, la matrice  $e^A$  peut être décrite entièrement en fonction de  $I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ .

Une condition nécessaire et suffisante de commandabilité est que la matrice  $\xi$  soit de rang plein, avec  $\xi$  donnée par :

$$\xi = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (108)$$

### Exercice N° 12 :

Un facteur déterminant la durée de vie utile d'une structure flexible, telle qu'un navire, un grand bâtiment ou un gros avion, est la possibilité de défaillances par fatigue dues aux vibrations structurelles. Chaque mode de vibration est décrit par une équation de la forme

$$m\ddot{x} + kx = u(t),$$

où  $u(t)$  est la force d'entrée.



Est-il possible de trouver une entrée qui conduira à la fois la déflexion  $x(t)$  et sa vitesse  $\dot{x}(t)$  à zéro en un temps fini à partir des conditions initiales arbitraires?

Soient  $y_1(t) = x(t)$  et  $y_2(t) = \dot{x}(t)$ . La description du système se transforme ainsi en la forme suivante :

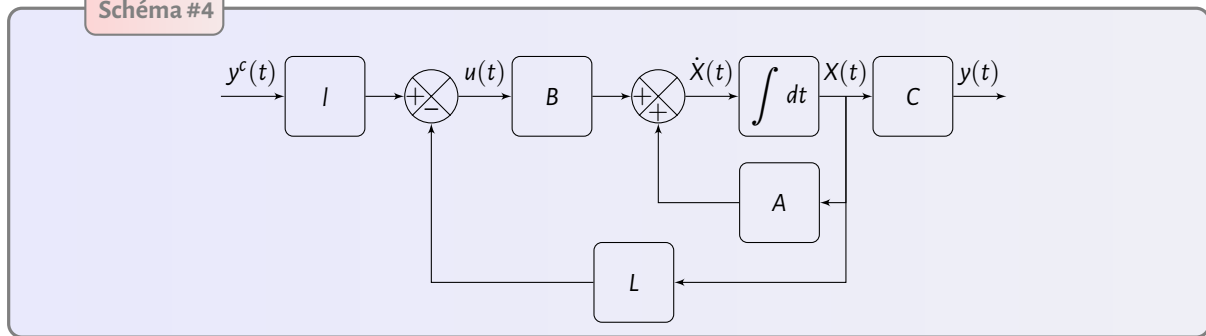
$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_B u(t)$$

Il reste maintenant à calculer le rang de la matrice  $[B, AB]$ .

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix} \quad (109)$$

La matrice précédente, calculée dans l'éq. (109) n'est pas singulière, par conséquent, le système décrit par l'équation  $m\ddot{x} + kx = u(t)$  est entièrement commandable. Ceci signifie qu'il existe une commande  $u(t)$  capable de conduire à la fois la déflexion  $x(t)$  et sa vitesse  $\dot{x}(t)$  à zéro en un temps fini à partir de conditions initiales arbitraires.

Schéma #4

**Exercice N° 13 :**

Soit la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u(t) \quad (110)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_C x(t) \quad (111)$$

- Étudier la stabilité du système;
- Étudier la commandabilité du système;
- Écrire l'équation d'état de la boucle fermée entre la consigne  $y^c$  et la sortie  $y$ , avec une loi de commande par retour d'état de type :

$$u(t) = ly^c(t) - Lx(t)$$

- Calculer  $L$  de sorte que les valeurs propres du système bouclé soient placées aux valeurs suivantes :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -2$ ;
- Calculer la valeur du gain de pré-compensateur  $l$  tel que le gain de transfert entre la consigne  $y^c$  et la sortie  $y$  soit égal à 1.

**Stabilité**

$\det(A) = -2$  &  $\text{trace}(A) = 3 \rightarrow$  Système instable.

**Commandabilité**

$$\begin{aligned} \xi &= \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rang de  $\xi$  est égal à 2, le système est alors complètement commandable.

**Commande par retour d'état**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ &= Ax + B(ly^c - Lx) \\ &= (A - BL)x + Bly^c \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
A - BL &= A - B \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}}_L \\
&= \begin{bmatrix} -2 + l_1 & -4 + l_2 \\ 2 - l_1 & 5 - l_2 \end{bmatrix} \\
\begin{cases} \text{trace}(A - BL) &= 3 + l_1 - l_2 &= -3 \\ \det(A - BL) &= (-2 + l_1)(5 - l_2) + (4 - l_2)(2 - l_1) &= 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l_1 &= 4 \\ l_2 &= 10 \end{cases}
\end{aligned}$$

### Gain du pré-compensateur

$$\begin{aligned}
l &= -\frac{1}{C(A - BL)^{-1}B} \\
&= -\frac{1}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

## 2.5 Observateur de Luenberger

Une commande par retour d'état est défini par la connaissance du vecteur d'état  $X$ . Nous avons supposé qu'il est connu exactement pour tout  $t \geq 0$  et qu'il est accessible. Néanmoins, cette hypothèse se heurte à deux limitations. Une première réside dans le fait que  $X$  peut ne pas avoir un sens physique. Il peut également être non accessible. À ce stade, il n'y aura pas des capteurs qui délivrent en temps réel les valeurs prises par les composantes définissant l'état du système.

Si le système est observable, alors il existe un observateur (estimateur d'état) qui délivre une estimation asymptotiquement convergente de l'état, à partir des mesures de la sortie observée.

Ce type particulier d'observateur que nous construirons est appelé observateur de Luenberger d'après David G. Luenberger, qui a développé cette idée dans sa thèse de doctorat en 1963. David G. Luenberger est professeur à l'Université de Stanford : <https://profiles.stanford.edu/david-luenberger>.

Nous présentons par la suite une description brève de l'estimateur de Luenberger. Il consiste à installer des capteurs logiciels qui estiment le vecteur  $X$ .

On dénote par  $\hat{X}$  la valeur estimée de  $X$ . Sa vélocité est alors une fonction d'elle même, de l'entrée  $u$  et de la sortie  $y$ .

$$\dot{\hat{X}}(t) = F\hat{X}(t) + Gu(t) + Ky(t) \quad (112)$$

Calculons maintenant l'erreur  $\tilde{X}$  entre la valeur réelle de  $X$  et sa valeur approchée  $\hat{X}$ .

$$\tilde{X}(t) = \hat{X}(t) - X(t) \quad (113)$$

La vitesse d'évolution de  $\tilde{X}$  sera donnée par éq. (114).

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \dot{\hat{X}}(t) - \dot{X}(t) \quad (114)$$

Soit encore :

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{X}}(t) &= F\hat{X}(t) + Gu(t) + Ky(t) - AX(t) - Bu(t) \\
&= F\hat{X}(t) - (A - KC)X(t) + (G - B)u(t)
\end{aligned} \quad (115)$$

L'expression de  $\dot{\tilde{X}}(t)$  ne doit pas faire apparaître l'entrée  $u$  dans sa définition. Pour cette raison, on peut imposer  $G = B$ . Eq. (115) se simplifie alors en :

$$\dot{\tilde{X}}(t) = F\hat{X}(t) - (A - KC)X(t) \quad (116)$$

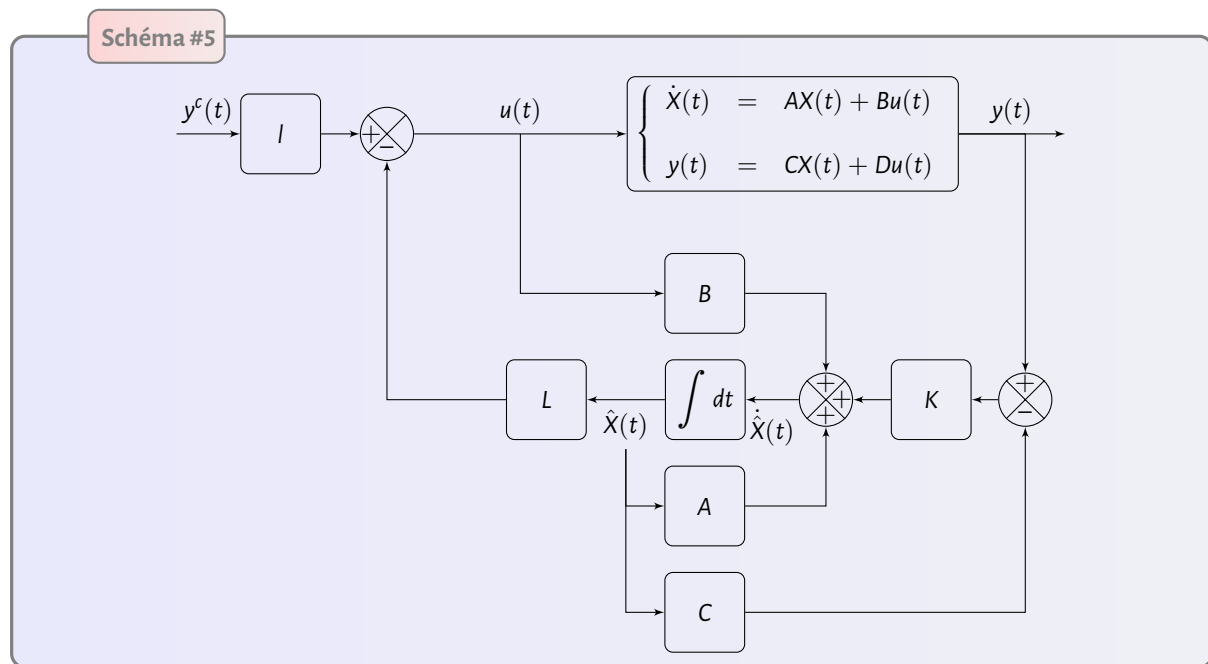
Sachant que  $\dot{\hat{X}}(t)$  doit s'écrire entièrement en fonction de  $\tilde{X}(t)$ . La matrice  $F$  sera choisie alors égale à  $A - KC$ .

$$\dot{\hat{X}}(t) = (A - KC)\tilde{X}(t) \quad (117)$$

L'observateur de Luenberger peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$\dot{\hat{X}}(t) = A\hat{X}(t) + Bu(t) + \underbrace{K \left( \overbrace{y(t) - C\hat{X}(t)}^{\text{Erreur d'estimation}} \right)}_{\text{Terme de correction}} \quad (118)$$

La description de l'observateur de Luenberger donnée par éq. (118) est aussi valide pour le cas des systèmes discrets.



#### Exercice N° 14 :

On considère le système suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (119)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (120)$$

- Étudier l'observabilité du système ;
- L'état  $x$  n'est pas mesurable. Synthétiser un observateur de type Luenberger qui permet de délivrer une valeur approchée  $\hat{x}$  de  $x$ , caractérisé par une dynamique double placée en  $-2$  ;
- Dessiner le schéma bloc de cet observateur.

#### Observabilité

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rang de  $O$  est égal à 2  $\rightarrow$  Système observable.

### Synthèse de l'observateur par placement de pôles

L'observateur de Luenberger est décrit par

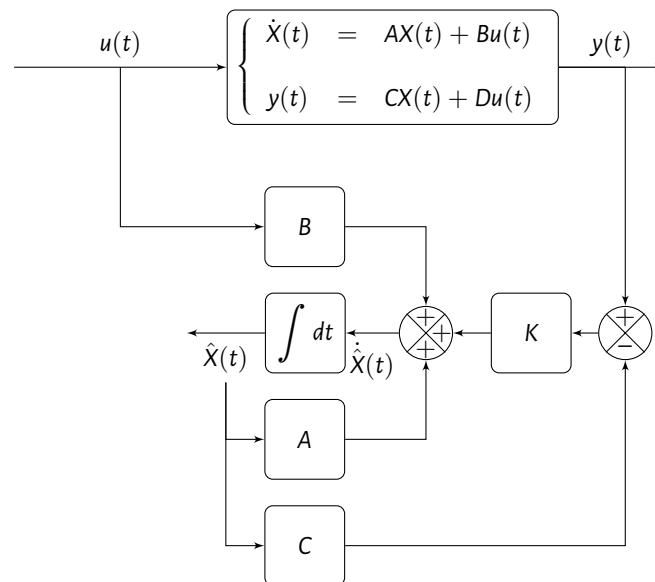
$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ &= (A - KC)\hat{x} + Bu(t) + Ky(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A - KC &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Pour pouvoir déterminer les coefficients  $k_1$  et  $k_2$ , il suffit de résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \text{trace}(A - KC) = -k_1 = -4 \\ \det(A - KC) = k_2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = 4 \end{cases}$$

### Schéma bloc de l'observateur



## 2.6 Exercices corrigés

### Exercice N° 15 :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} X(t) \end{cases}$$

- Sans faire du calcul, donner la fonction de transfert du système;
- Calculer la réponse indicielle du système pour des conditions initiales nulles;
- Calculer l'état  $X(t)$  en régime libre. On donne

$$X(0^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Le système est décrit sous la forme canonique, la fonction de transfert est donnée par éq. (121) :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ &= \frac{3s + 4}{s^2 + 4s + 5} \end{aligned} \quad (121)$$

La sortie  $Y(s)$  est :

$$Y(s) = H(s)U(s) \quad (122)$$

$$= \frac{3s + 4}{s(s^2 + 4s + 5)} \quad (123)$$

$$= \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s - s_1} + \frac{\delta}{s - s_2} \quad (124)$$

où :

$$s_1 = -2 + j \quad s_2 = -2 - j = s_1^*$$

Nous avons

$$s_1 + s_2 = -4 \quad s_1 - s_2 = 2j \quad s_1 s_2 = 5$$

$$\begin{aligned} \alpha &= s \frac{3s + 4}{s(s^2 + 4s + 5)} \Big|_{s=0} = \frac{3}{5} \\ \beta &= (s - s_1) \frac{3s + 4}{s(s^2 + 4s + 5)} \Big|_{s=s_1} = \frac{3 + 4s_1}{s_1(s_1 - s_2)} \\ \delta &= (s - s_2) \frac{3s + 4}{s(s^2 + 4s + 5)} \Big|_{s=s_2} = \frac{3 + 4s_2}{s_2(s_2 - s_1)} \end{aligned}$$

$$y(t) = (\alpha + \underbrace{\beta e^{s_1 t} + \delta e^{s_2 t}}_{r(t)}) \Gamma(t) \quad (125)$$

$$r(t) = \frac{1}{s_1 s_2 (s_1 - s_2)} (s_2 (3 + 4s_1) e^{s_1 t} - s_1 (3 + 4s_2) e^{s_2 t}) \quad (126)$$

$$= \frac{e^{-2t}}{10j} ((-2 - j)(-5 + 4j)e^{jt} - (-2 + j)(-5 + 4j)e^{-jt}) \quad (127)$$

$$= \frac{e^{-2t}}{10j} (14(e^{jt} - e^{-jt}) - 3j(e^{jt} + e^{-jt})) \quad (128)$$

$$= \frac{e^{-2t}}{5} (14 \sin(t) - 3 \cos(t)) \quad (129)$$

$$y(t) = \frac{3}{5} \Gamma(t) + \frac{e^{-2t}}{5} (14 \sin(t) - 3 \cos(t)) \Gamma(t) \quad (130)$$

Puisque  $X(0^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , la description du système se transforme en :

$$\dot{X}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}}_A X(t) \quad (131)$$

$$X(t) = e^{At}X(0^+) \quad (132)$$

Calculons maintenant la quantité  $e^{At}$ . La matrice  $A$  peut être décrite par  $PDP^{-1}$ , où  $D$  est sa forme diagonale. Alors

$$D = \begin{bmatrix} -2 + j & 0 \\ 0 & -2 - j \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} -0.3651 - 0.1826j & -0.3651 + 0.1826j \\ 0.9129 & 0.9129 \end{bmatrix}$$

L'inverse de la matrice  $P$  est donnée par

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2.7386j & 0.5477 + 1.0954j \\ -2.7386j & 0.5477 - 1.0954j \end{bmatrix}$$

Le terme  $e^{At}$  est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} X(t) &= P e^{Dt} P^{-1} X(0^+) \\ &= \begin{bmatrix} e^{t(-2+j)} \left( \frac{1}{2} + 2j \right) + e^{t(-2-j)} \left( \frac{1}{2} - 2j \right) \\ e^{t(-2+j)} \left( 1 - \frac{9}{2}j \right) + e^{t(-2-j)} \left( 1 + \frac{9}{2}j \right) \end{bmatrix} \Gamma(t) \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} (\cos(t) + 4 \sin(t)) \\ e^{-2t} (2 \cos(t) - 9 \sin(t)) \end{bmatrix} \Gamma(t) \end{aligned}$$

#### Exercice n° 16 :

Trouver une description d'état possible du système décrit par l'équation suivante :

$$m\ddot{x}(t) = k(x(t) - u(t)) + f(\dot{x}(t) - \dot{u}(t)), \quad (133)$$

où  $x$  et  $u$  dénotent respectivement le déplacement et la force appliquée au système. Le triplet  $(M, k, f)$  désigne la masse, la raideur et le frottement.

Le système est de second ordre. Soit un vecteur d'état  $X$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

Ceci donne :

$$\dot{x}_2(t) = \frac{k}{m}x(t) + \frac{f}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}u(t) - \underbrace{\frac{f}{m}\dot{u}(t)}_{\text{Problème}}.$$

Le terme  $\frac{f}{m}\dot{u}(t)$  ne peut pas figurer explicitement dans l'équation d'état. Nous devons alors changer l'expression de la deuxième composante du vecteur  $X$ . Soit  $x_2(t) = \dot{x}(t) + \gamma u(t)$ .

$$\dot{x}_2(t) = \frac{k}{m}x(t) + \frac{f}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}u(t) - \frac{f}{m}\dot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t).$$

Afin de supprimer  $\dot{u}(t)$ , on peut fixer  $\gamma = \frac{f}{m}$ . La description d'état sera donnée alors par éq. (134).

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & 1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} \frac{f}{m} \\ -\frac{k-f}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) \end{cases} \quad (134)$$

**Exercice N°17 :**

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X(t) \end{cases} \quad (135)$$

où  $\alpha$  est constant.

- Déterminer le nombre d'entrées, de sorties et du vecteur d'état;
- Calculer les pôles du système si  $\alpha = 1$ ;
- Pour quelle valeur de  $\alpha$  ce système est-il commandable?

```

1 syms alpha ;
2 A = [-1, 1; 0, -1]; B = [1, 0; 0, alpha]; C = [1, 0; 1, 1];
3
4 N1 = size(A); N2 = size(B); N3 = size(C);
5 N2(2); % Nombre d'entrées
6 N3(1); % Nombre de sorties
7 N1(2); % Nombre d'état
8
9 alpha = 1;
10 eig(A) % Poles du système
11
12 clear alpha
13 rank([B A*B]) % Système est commandable pour tout alpha /= 0

```

**Exercice N°18 :**

Donner une représentation d'état possible de la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{s^3 + 25s^2 + 2.45s + 3.4}{4s^3 + 6s^2 + 10s - 2} \quad (136)$$

Le numérateur et le dénominateur de  $H$  sont de même degré. La fonction de transfert peut se mettre encore sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^3 + 25s^2 + 2.45s + 3.4}{4s^3 + 6s^2 + 10s - 2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{23.5s^2 - 0.05s + 3.9}{4s^3 + 6s^2 + 10s - 2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{23.5/4 s^2 - 0.05/4 s + 3.9/4}{4/4 s^3 + 6/4 s^2 + 10/4 s - 2/4} \end{aligned}$$

Les matrices d'état, d'entrée, de sortie et le transfert direct sont donnés ainsi par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{4} & -\frac{10}{4} & -\frac{6}{4} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{3.9}{4} & \frac{-0.05}{4} & \frac{23.5}{4} \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{4}.$$

**Exercice N°19 :**

Un système d'entrée  $u$  et de sorties  $y_1, y_2$  est donné par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) + y_1(t) + 2y_2(t) &= \dot{u}(t) + 3u(t) \\ \dot{y}_2(t) + 4y_1(t) &= u(t) \end{cases} \quad (137)$$

- a) Calculer la matrice fonction de transfert;
- b) Donner une représentation d'état possible de ce système.

**Exercice N° 20 :**

Soit la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (138)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (139)$$

- a) Étudier la stabilité du système;
- b) Étudier la commandabilité du système;
- c) On désire réaliser une boucle fermée entre la consigne  $y^c$  et la sortie  $y$ , avec une loi de commande par retour d'état de type :

$$u(t) = l y^c(t) - L x(t)$$

Calculer  $L$  de sorte que les valeurs propres du système bouclé soient placées aux valeurs suivantes :  $-2$  &  $-3$ ;

- d) Calculer la valeur du gain de pré-compensateur  $l$  tel que le gain de transfert entre la consigne  $y^c$  et la sortie  $y$  soit égal à 1.
- e) Étudier l'observabilité du système;
- f) L'état  $x$  n'est pas mesurable. Synthétiser un observateur de Luenberger qui permet de délivrer une valeur approchée  $\hat{x}$  de  $x$ , caractérisé par une dynamique placée en  $-3$  &  $-5$ .

$\det(A) = -15$  &  $\text{trace}(A) = 2 \rightarrow$  Système instable.

$$\begin{aligned} \xi &= \begin{bmatrix} B & AB \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rang de  $\xi$  est égal à 2  $\rightarrow$  Système commandable.

$$\begin{aligned} A - BL &= A - B \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}}_L \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 & 15 - l_2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{cases} \text{trace}(A - BL) &= 2 - l_1 &= -5 \\ \det(A - BL) &= -2l_1 - 15 + l_2 &= 6 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} l_1 &= 7 \\ l_2 &= 35 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l &= -\frac{1}{C(A-BL)^{-1}B} \\
 &= -\frac{1}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -20 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Rang de  $O$  est égal à 2  $\rightarrow$  Système observable.

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \\
 &= (A - KC)\hat{x} + Bu(t) + Ky(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A - KC &= \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 15 - k_1 \\ 1 & 2 - k_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{trace}(A - KC) = k_1 - 15 = 15 \\ \det(A - KC) = 2 - k_2 = -8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 30 \\ k_2 = 10 \end{cases}$$

#### Exercice N° 21 :

Soit un système décrit par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0.1 & -3 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} X(t) \end{cases} \quad (140)$$

- Est-ce qu'il est commandable et/ou observable?
- Calculer sa réponse indicielle;
- Concevoir une commande par retour d'état qui permet de placer les valeurs propres du système en boucle fermée en  $(-4, -5)$  et annule l'erreur statique de position;

```

1 A = [-1, 2; 0.1, -3]; B = [1; 1]; C = [1; 1];
2 rank([B A*B]) % vérifier la commandabilité
3 rank([C; C*A]) % vérifier l'observabilité
4
5 H = tf2ss(A, B, C, 0);
6 step(H);
7
8 L = place(A, B, [-4, -5]); % Gain L
9 l=1/(C*inv(-A+B*L)*B); % Gain du précompensateur

```



```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.style.use("ggplot")
plt.rcParams['figure.figsize'] = [15, 10]
plt.rc({"keymap.grid": "g", "font.serif": "Charter", "font.size": 10})
import tikzplotlib as mikz
```

```
[2]: #!pip install slycot
#!pip install control
```

```
[3]: import control
```

```
[4]: A = np.array([[ -1.0, 2.0], [0.1, -3.0]])
B = np.array([[1.0], [1.0]])
C = np.array([[1.0, 1.0]])
D = 0.0
```

```
[5]: print("La dimension de A est {}".format(A.shape))
print("La dimension de B est {}".format(B.shape))
print("La dimension de C est {}".format(C.shape))
```

La dimension de A est (2, 2).

La dimension de B est (2, 1).

La dimension de C est (1, 2).

#### Commandabilité

```
[6]: AB = np.matmul(A, B)
cde = np.concatenate((B, AB), axis=1)
np.linalg.matrix_rank(cde)
```

```
[6]: 2
```

#### Observabilité

```
[7]: CA = np.matmul(C, A)
obs = np.concatenate((C, CA), axis=0)
np.linalg.matrix_rank(obs)
```

```
[7]: 2
```

#### Mise du système sous la forme d'une représentation d'état

```
[8]: sys = control.ss(A,B,C,D)
print(sys)
```

```
A = [[-1.  2. ]
      [ 0.1 -3. ]]
```

```
B = [[1.]
      [1.]]
```

```
C = [[1. 1.]]
```

```
D = [[0.]]
```

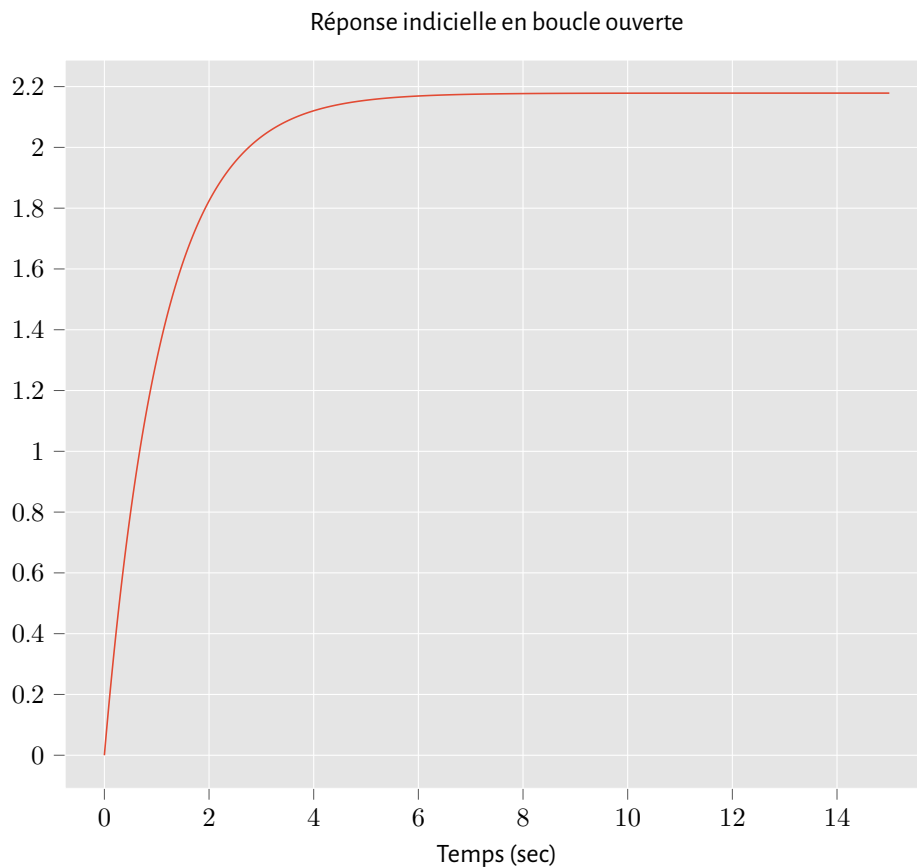
#### Calcul de la fonction de transfert

```
[9]: H = control.ss2tf(sys)
```

### Détermination de la réponse indicielle du système

```
[10]: T = np.linspace(0, 15, 1500)
      t, y = control.step_response(sys, T=T)
```

```
[11]: plt.plot(t, y)
      plt.title("Réponse indicielle en boucle ouverte")
      plt.xlabel('Temps (sec)')
      plt.grid()
```



### Synthèse d'une commande par retour d'état

#### Gain de retour L

```
[12]: L = control.place(A,B,[-4,-5])
```

#### Précompensateur l

```
[13]: A_BL = A-np.matmul(B, L)
      l = -1/(
          np.matmul(C,
                    np.matmul(np.linalg.inv(A_BL), B))
      )
```

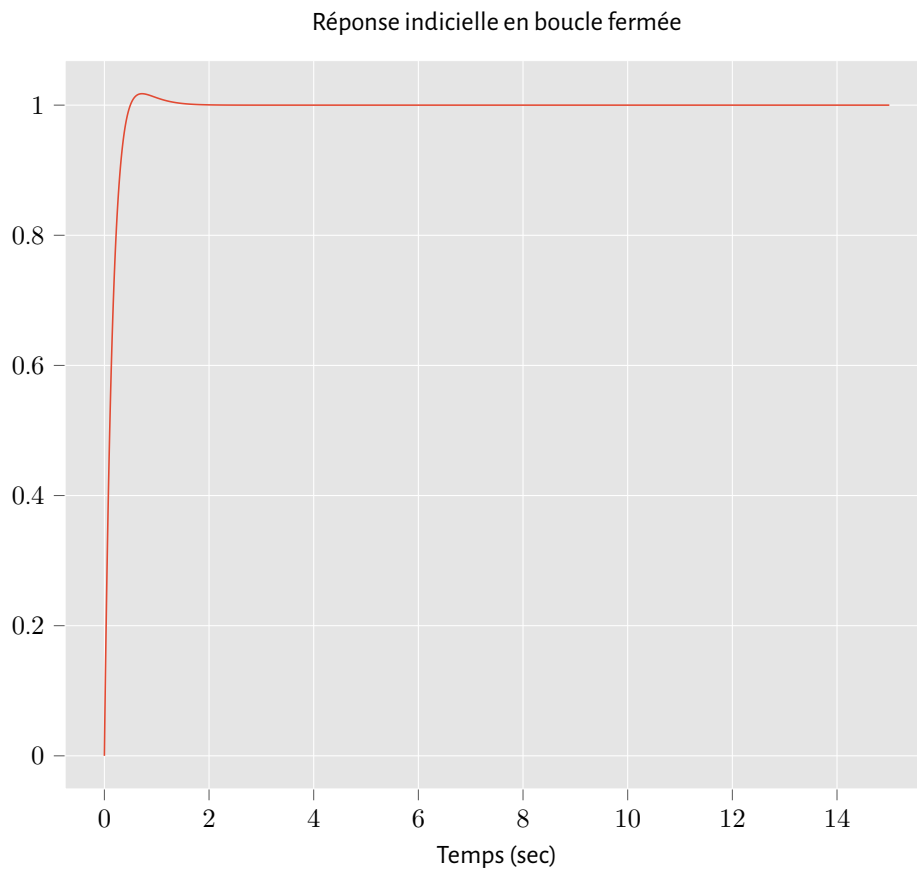
```
[14]: A_cl = A_BL
      B_cl = B*l
```

```
C_cl = C
D_cl = 0

sys_cl = control.ss(A_cl, B_cl, C_cl, D_cl)
```

```
[15]: T = np.linspace(0, 15, 1500)
t, y_cl = control.step_response(sys_cl, T=T)
```

```
[16]: plt.plot(t, y_cl)
plt.title("Réponse indicielle en boucle fermée")
plt.xlabel('Temps (sec)')
plt.grid()
```


**Exercice N° 22 :**

Soit la représentation suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} X(t) \end{cases} \quad (141)$$

a) Déterminer la fonction de transfert  $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

b) Calculer  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  si  $u(t) = 0$  et  $X(0^+) = \begin{bmatrix} x_1(0^+) \\ x_2(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ 0 \end{bmatrix}$ .

- c) Tester la commandabilité et l'observabilité du système (140);
- d) Concevoir une commande par retour d'état qui place les valeurs propres de la boucle fermée en  $(-2, -3)$  et qui annule l'erreur statique de position.

```

1 A = [-1, 0; 1, -0.5]; B = [-2; 1]; C = [0, 1];
2 H = ss2tf(A, B, C, 0); % FT

```

En appliquant la transformée de Laplace pour les deux côtés de l'éq. (140) sans considérer l'entrée  $u(t)$ , nous obtenons :

$$sX(s) - X(0^+) = AX(s) \quad (142)$$

Le vecteur  $X(s)$  est accessible à travers l'éq. (143).

$$X(s) = (sI_2 - A)^{-1}X(0^+) \quad (143)$$

```

1 syms s x10
2 X = ilaplace(inv(s*eye(2)-A)*[x10; 0])

```

Le vecteur d'état donné dans le domaine temporel est

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{10}e^{-t} \\ 2x_{10}\left(e^{\frac{-t}{2}} - e^{-t}\right) \end{bmatrix} \Gamma(t),$$

où  $\Gamma(t)$  dénote la fonction échelon.

```

1 rank([B, A*B]) % Commandabilité
2 rank([C; C*A]) % Observabilité
3
4 L = acker(A, B, [-2; -3]); % Gain L
5 l = 1/(C*inv(-A+B*L)*B); % Précompensateur

```

### Exercice N° 23 :

On considère la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases} \quad (144)$$

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^t \left[ e^{A(t-\mu)}B + D\delta(t-\mu) \right] u(\mu)d\mu \quad (145)$$

Démontrer que le modèle discret qui correspond au système (144) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} X_{k+1} = FX_k + Gu_k \\ y_k = HX_k + Du_k \end{cases} \quad (146)$$

$$F = e^{AT_e} \quad G = \int_0^{T_e} e^{A(T_e-\mu)}Bd\mu \quad H = C \quad (147)$$

où  $T_e$  dénote la période d'échantillonnage.

## Références

- [ÅH06] K. J. ÅSTRÖM et T. HÄGGLUND. *Advanced PID control*. International Society of Automation, 2006.
- [ÅH84] K. J. ÅSTRÖM et T. HÄGGLUND. "Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins". Dans : *Automatica* 20.5 (sept. 1984), pp. 645-651. DOI : [10.1016/0005-1098\(84\)90014-1](https://doi.org/10.1016/0005-1098(84)90014-1).
- [ÅH95] K. J. ÅSTRÖM et T. HÄGGLUND. *PID controllers : Theory, design, and tuning*. ISA : The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 1995 (cf. p. 1, 6).
- [Aok13] M. AOKI. *State Space Modeling of Time Series*. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [Ari09] Y. ARIBA. *Sur la stabilité des systèmes à retards variant dans le temps : théorie et application au contrôle de congestion d'un routeur*. Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier) : Thèse, 2009.
- [ÅW89] K. J. ÅSTRÖM et B. WITTENMARK. *Adaptive control*. New York : Addison Wesley, 1989.
- [BC93] F. BENHAMOU et A. COLMERAUER, éd. *Constraint Logic programming, Selected Research*. MIT Press, 1993.
- [Bel06] L. BELKOURA. *Systèmes à retards : Identifiabilité et Identification*. Douz, Tunisie : École d'Automne d'Automatique de Douz, EAA'06, 2006.
- [Bel07a] L. BELKOURA. *Introduction aux distributions*. Djerba, Tunisie : L'Ecole d'Hiver : Maths pour la recherche et le développement, 2007.
- [Bel07b] L. BELKOURA. *Une introduction aux distributions*. Djerba, Tunisie : École d'hiver Maths pour la Recherche et le Développement, 2007.
- [BL02] E. BOUKAS et Z. LIU. *Deterministic and Stochastic Time Delay Systems*. Control Engineering. Birkhäuser, 2002.
- [BR06] L. BELKOURA et J.-P. RICHARD. "A distribution framework for the fast identification of linear systems with delays". Dans : *In 6th IFAC Workshop on Time Delay System* (2006).
- [BRF08] L. BELKOURA, J.-P. RICHARD et M. FLIESS. "A convolution approach for delay systems identification". Dans : *17th IFAC World Congress, Séoul, Corée* (2008).
- [BRF09] L. BELKOURA, J.-P. RICHARD et M. FLIESS. "Parameters estimation of systems with delayed and structured entries". Dans : *Automatica* 45 : 1117-1125 (2009).
- [C.80] B. C. *The long history of continued fractions and Padé approximants*. Springer-Verlag, 1980.
- [Dam94] M. DAMBRINE. *Contribution à l'étude de la stabilité des systèmes à retards*. Université des Sciences et Technologies de Lille : Thèse, 1994.
- [Del12] D. DELCHAMPS. *State Space and Input-Output Linear Systems*. Springer New York, 2012.
- [DL05] M. DI LORETO. *Analyse des systèmes à retards : Application du calcul par intervalles*. École Centrale de Nantes, Université de Nantes, France : Conférence : GDR Méthodes Ensemblistes pour l'Automatique, 2005.
- [FF96] J. M. FERNANDES et A. R. FERREIRA. "An all-pass approximation to time delay". Dans : *UKACC International Conference on CONTROL'96 : 1208-1213* (1996).
- [Fri05] B. FRIEDLAND. *Control System Design : An Introduction to State-Space Methods*. Dover Books on Electrical Engineering. Dover Publications, 2005.
- [FSR03] M. FLIESS et H. SIRA-RAMIREZ. "An algebraic framework for linear identification". Dans : *ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations*, 9 (2003).
- [HA07] A. HADJ ABDELKADER. *Identification des systèmes linéaires*. Université ABOU BEKR BELKAID-Tlemcen, Faculté de Technologie, 2007 (cf. p. 1).
- [Han+01] K. HANGOS et al. *Intelligent Control Systems : An Introduction with Examples*. Applied Optimization. Springer, 2001.
- [HLC01] H.-P. HUANG, M.-W. LEE et C.-L. CHEN. "A system of procedures for identification of simple models using transient step response". Dans : *Industrial & Engineering Chemistry Research* 40.8 (avr. 2001), pp. 1903-1915. DOI : [10.1021/ie0005001](https://doi.org/10.1021/ie0005001) (cf. p. 1).
- [Luy90] W. L. M. LUYBEN. *Process modeling, simulation and control for chemical engineers*. McGraw-Hill, juin 1990 (cf. p. 1).
- [Mar95] T. E. MARLIN. *Process control. Designing processes and control system for dynamic performance*. New York : McGraw-Hill, 1995. DOI : [10.1016/s0959-1524\(96\)90017-7](https://doi.org/10.1016/s0959-1524(96)90017-7) (cf. p. 1, 6).
- [Mor11] F. MORGAN. *Time Delay*. Xlibris Corporation, 2011.
- [Mun05] T. MUNTEAN. *Puces très performantes*. Terres du futur, Les Editions UNESCO. Paris : Hatier, 2005.
- [NG04] S. NICULESCU et K. GU. *Advances In Time-delay Systems*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer-Verlag, 2004.
- [Par03] S. A. R. PAREDES. *Stabilité des systèmes à retard de type neutre*. Institut National Polytechnique de Grenoble : Thèse, 2003.
- [PM82] R. V. PATEL et N. MUNRO. *Multivariable system theory and design*. Oxford, Eng. New York : Pergamon Press, 1982 (cf. p. 50).
- [Pro97] P. PROUVOST. *Contrôle régulation*. 9 rue Méchain, 75014 Paris : NATHAN Technique, 1997 (cf. p. 1, 8-10).

- [Ren+05] X. REN et al. "On line identification of continuous time systems with unknown time delay". Dans : *IEEE Tac*, 50(9) : 1418-1422 (2005).
- [Ric03] J.-P. RICHARD. "Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems". Dans : *Automatica* 39 : 1667 - 1694 (2003).
- [Ric06] J.-P. RICHARD. *Une introduction aux particularités et généralités des systèmes à retards*. Douz, Tunisie : Ecole d'Automne d'Automatique : La commande numérique des procédés industriels, 2006.
- [Ric07] J.-P. RICHARD. *Equations différentielles à retards*. Djerba, Tunisie : L'Ecole d'Hiver : Maths pour la recherche et le développement, 2007.
- [Ric98] J.-P. RICHARD. *Delay Systems*. Mathematics and computers in simulation. Elsevier, 1998.
- [RK96] G. P. RANGAIAH et P. R. KRISHNASWAMY. "Estimating second-order dead time parameters from underdamped process transients". Dans : *Chemical Engineering Science* 51.7 (avr. 1996), pp. 1149-1155. DOI : [10.1016/S0009-2509\(96\)80013-3](https://doi.org/10.1016/S0009-2509(96)80013-3) (cf. p. 1).
- [Rod78] F. RODDIER. *Distributions et transformation de Fourier*. 28, rue Beaunier, 75014 Paris : Ediscience International, 1978.
- [Sch66] L. SCHWARTZ. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris : 2nd ed, 1966.
- [Seu06] A. SEURET. *Commande et observation des systèmes à retards variables : théorie et applications*. Université des Sciences et Technologies de Lille et École Centrale de Lille : Thèse, 2006.
- [Shi96] F. G. SHINSKEY. *Process control systems : Application, design, and tuning*. McGraw-Hill Professional, 1996 (cf. p. 1, 6).
- [Smy98] G. SMYTH. *Polynomial approximation*. Encyclopedia of Biostatistics, 1998.
- [SPK78] K. R. SUNDARESAN, C. C. PRASAD et P. R. KRISHNASWAMY. "Evaluating parameters from process transients". Dans : *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development* 17.3 (juil. 1978), pp. 237-241. DOI : [10.1021/i260067a004](https://doi.org/10.1021/i260067a004) (cf. p. 1).
- [Via09] G. VIAL. *Etude d'un système chimique à retard*. ENS Cachan Bretagne : Agrégation externe de mathématiques, 2009.
- [Yam84] Y. YAMAMOTO. "A note on linear input/ output maps of boundedtype". Dans : *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29 : 733-734 (1984).
- [Yeg06] N. YEGANEFAR. *Définitions et analyse de stabilités pour les systèmes à retard non linéaires*. Université des Sciences et Technologies de Lille et l'École Centrale de Lille : Thèse, 2006.
- [Zho06] Q.-C. ZHONG. *Robust Control of Time-delay Systems*. London : Springer Verlag, 2006.
- [ZW13] Y. ZENG et S. WU. *State-Space Models : Applications in Economics and Finance*. Statistics and Econometrics for Finance. Springer New York, 2013.

# Annexes

RÉSUMÉ

# DOCUMENT ANNEXE

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(1 + Ts)^n}$$

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts}$$

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{s(1 + Ts)^n}$$

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2 e^{-\tau s}}{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n s + s^2}$$

$K$  ou  $G_p$  : Gain statique/dynamique

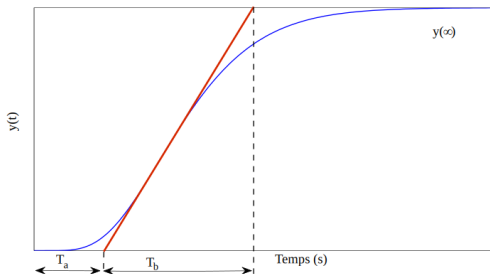
$G_r$  : Gain du régulateur

$T$  : Constante de temps

$\tau$  : Retard du procédé

$n$  : Ordre du système

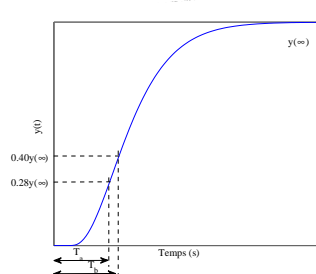
## STREJC-DAVOUST



- ①  $\frac{T_a}{T_b} \Big|_{Table} \rightarrow n$
- ②  $\frac{T_b}{T} \Big|_{Table} \rightarrow T$
- ③  $\tau = T_a - \frac{T_a}{T} \Big|_{Table} T$

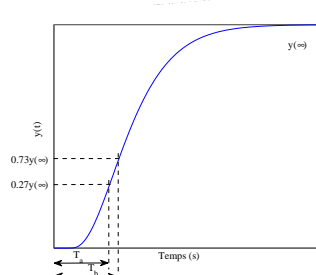
$n$	$\frac{T_a}{T}$	$\frac{T_b}{T}$	$\frac{T_a}{T_b}$
1	0	1	0
2	0.28	2.72	0.10
3	0.80	3.70	0.22
4	1.42	4.46	0.32
5	2.10	5.12	0.41
6	2.81	5.70	0.49

## BROÏDA



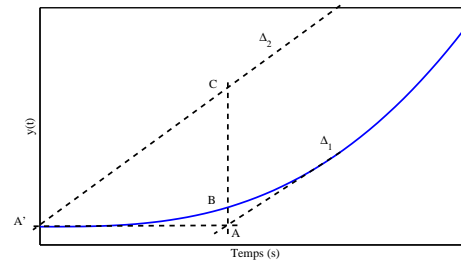
- ①  $T = 5.5(T_b - T_a)$
- ②  $\tau = 2.8T_a - 1.8T_b$

## DE LA FUENTE

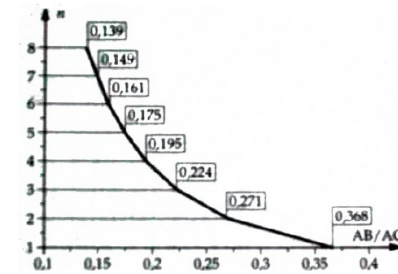


- ①  $T = T_b - T_a$
- ②  $\tau = 1.31T_a - 0.31T_b$

## STREJC-DAVOUST



- ①  $K = \frac{AC}{A'A}$



Si  $n$  est entier

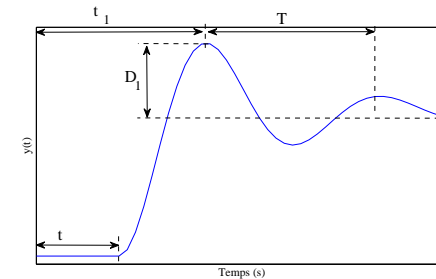
- ②  $T = \frac{A'A}{n}$
- ③  $\tau = 0$

Si  $n$  n'est pas entier

On détermine le nouveau rapport  $\frac{AB}{AC}$  qui correspond à la partie entière de  $n$ . Puis, on déplace  $\Delta_2 // \Delta_1$  vers  $\Delta_1$  afin de garantir ce rapport.

- ②  $\tau$  correspond au déplacement.
- ③  $T = \frac{A'A - \tau}{n}$

## OSCILLATOIRE



- ①  $D_1 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$
- ②  $T = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$
- ③  $\tau = t_1 - \frac{T}{2}$

## BOUCLE FERMÉE

$u(t)$	Classe du système		
	Classe 0	Classe 1	Classe > 2
$\Gamma(t)$	$\varepsilon_p = \frac{E_0}{1 + G_r G_p}$	$\varepsilon_p = 0$	$\varepsilon_p = 0$
$r(t)$	$\varepsilon_v = +\infty$	$\varepsilon_v = \frac{a}{G_r G_p}$	$\varepsilon_v = 0$

$$|G_{rc}H(j\omega_{osc})| = 1 \text{ et } \angle G_{rc}H(j\omega_{osc}) = -\pi$$

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts}$$

- ①  $K = G_p$
- ②  $T = \frac{T_{osc}}{2\pi} \sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1}$
- ③  $\tau = \frac{T_{osc}}{2\pi} \left( \pi - \arctan(\sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1}) \right)$



# Annexes

ÉPREUVES CORRIGÉES



Ce document comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6. Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Les 2 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre qui vous convient.

Les règles suivantes s'appliquent :



Ne rien écrire dans ce tableau.

- ❶ L'usage de tout matériel électronique, sauf calculatrice, est strictement interdit.
- ❷ La rigueur de la rédaction entrera pour une part importante dans la notation.
- ❸ Si l'espace est insuffisant, veuillez continuer au verso ou annexer une feuille supplémentaire.

Exercice	Barème	Note
1	8	
2	12	
Total	20	

### Exercice N°1

⌚ 20mn | (8 points)

#### ANALYSE D'UNE COURBE AVEC OSCILLATIONS

Soit un procédé de fonction de transfert  $\mathcal{H}_1(s)$ , d'entrée  $u$  et de sortie  $y$ . On prélève l'enregistrement de la sortie comme indiqué par FIG. 1. Déterminez un modèle équivalent à  $\mathcal{H}_1(s)$ .

Le gain statique est donné par :

$$K = \frac{y_{\infty}}{u_{\infty}} \Rightarrow \hat{K} \approx 0.58$$

On mesure le temps du premier pic  $t_1 \approx 18.214$  sec et la période de pseudo-oscillations  $T \approx 33.571$  sec. On en déduit le retard :

$$\hat{\tau} = t_1 - \frac{T}{2} \Rightarrow \hat{\tau} \approx 1.43 \text{ sec}$$

Le premier dépassement est  $D_1 = 69.6\%$ . Nous avons :

$$D_1 = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Leftrightarrow \zeta = \frac{|\ln(D_1)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln(D_1)^2}} \Rightarrow \hat{\zeta} \approx 0.11$$



La pulsation propre ou naturelle se calcule via la relation :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \hat{\omega}_0 \approx 0.19 \text{ rad/sec}$$

La fonction  $\mathcal{H}_1$  peut s'écrire comme suit :

$$\mathcal{H}_1(s) \approx \frac{0.021e^{-1.43s}}{s^2 + 0.042s + 0.036}$$

### Exercice N°2

⌚ 40mn | (12 points)

#### ANALYSE D'UNE COURBE EN S

Le résultat d'un essai en boucle ouverte d'un système de fonction de transfert  $\mathcal{H}_1(s)$ , d'entrée  $u$  et de sortie  $y$ , est illustré par FIG. 2.

- (a) (4 points) Déterminez un modèle équivalent en utilisant la méthode **Strejc**.  
(Les points caractéristiques et le tracé doivent être indiqués sur FIG. 3.)

Le gain statique est  $\hat{K} = 5$ . À partir du nomogramme de **Strejc**, on tire les valeurs suivantes :

$$T_a = 0.28 \text{ sec et } T_b = 2 \text{ sec} \Rightarrow \begin{cases} \hat{n} = 2.3 \\ \hat{\tau} = 0.6 \text{ sec} \end{cases}$$

Le modèle déduit est finalement :

$$\mathcal{H}_{2|\text{STREJC}}(s) = \frac{5}{(1 + 0.6s)^{2.3}}$$

- (b) (4 points) Déterminez un modèle équivalent en utilisant la méthode de **Strejc-Davoust**.



À partir de la table et des valeurs de  $T_a$  et  $T_b$ , on trouve :

$$\begin{cases} 2 < n < 3 & \longrightarrow & \hat{n} \approx 2 \\ \frac{T_a}{T} = 0.28 \text{ et } \frac{T_b}{T} = 2.72 & \longrightarrow & \hat{T} = \frac{2}{2.72} \approx 0.74 \text{ sec} \\ \hat{\tau} = 0.28 - 0.28 \times 0.74 & \longrightarrow & \hat{\tau} \approx 0.073 \text{ sec} \end{cases}$$

Le modèle proposé est :

$$\mathcal{H}_{2|\text{STREJC-DAVOUST}}(s) = \frac{5e^{-0.073s}}{(1 + 0.74s)^2}$$

(c) (4 points) Déterminez un modèle équivalent en utilisant la méthode de **Broïda**.

À partir du graphe, on détermine :

$$\begin{cases} T_a \approx 0.8 \text{ sec} & \text{et} & y_a = 1.12 \\ T_b \approx 1 \text{ sec} & \text{et} & y_b = 1.6 \end{cases}$$

La méthode **Broïda** donne alors le modèle suivant :

$$\mathcal{H}_{2|\text{BROIDA}}(s) = \frac{5e^{-0.44s}}{1 + 1.1s}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CETTE ZONE

✂

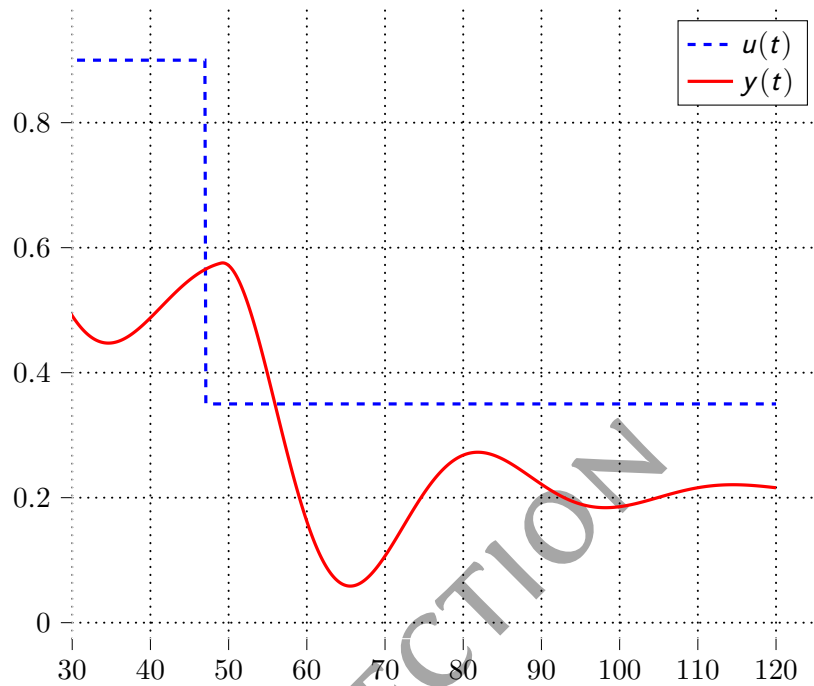


FIG. 1. Réponse indicielle de  $\mathcal{H}_1(s)$

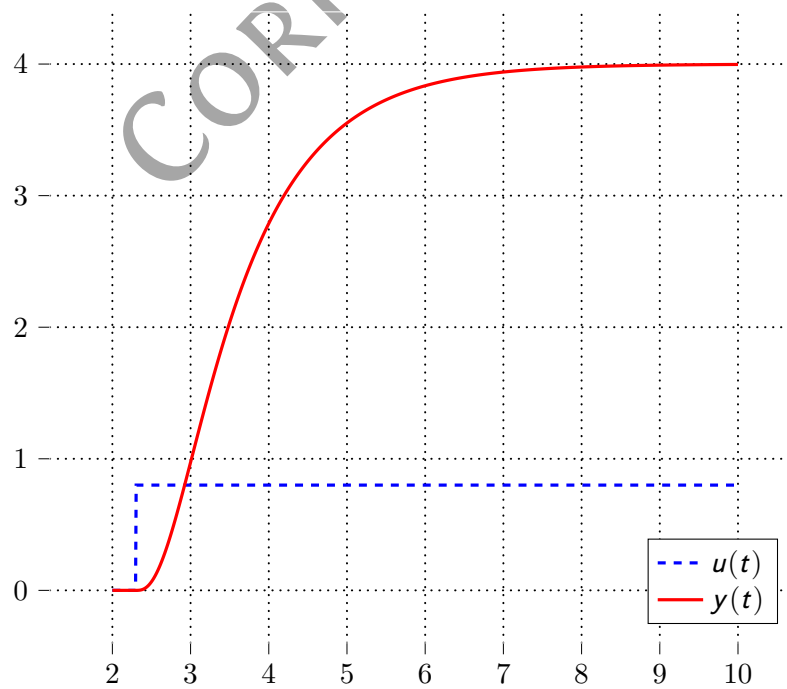
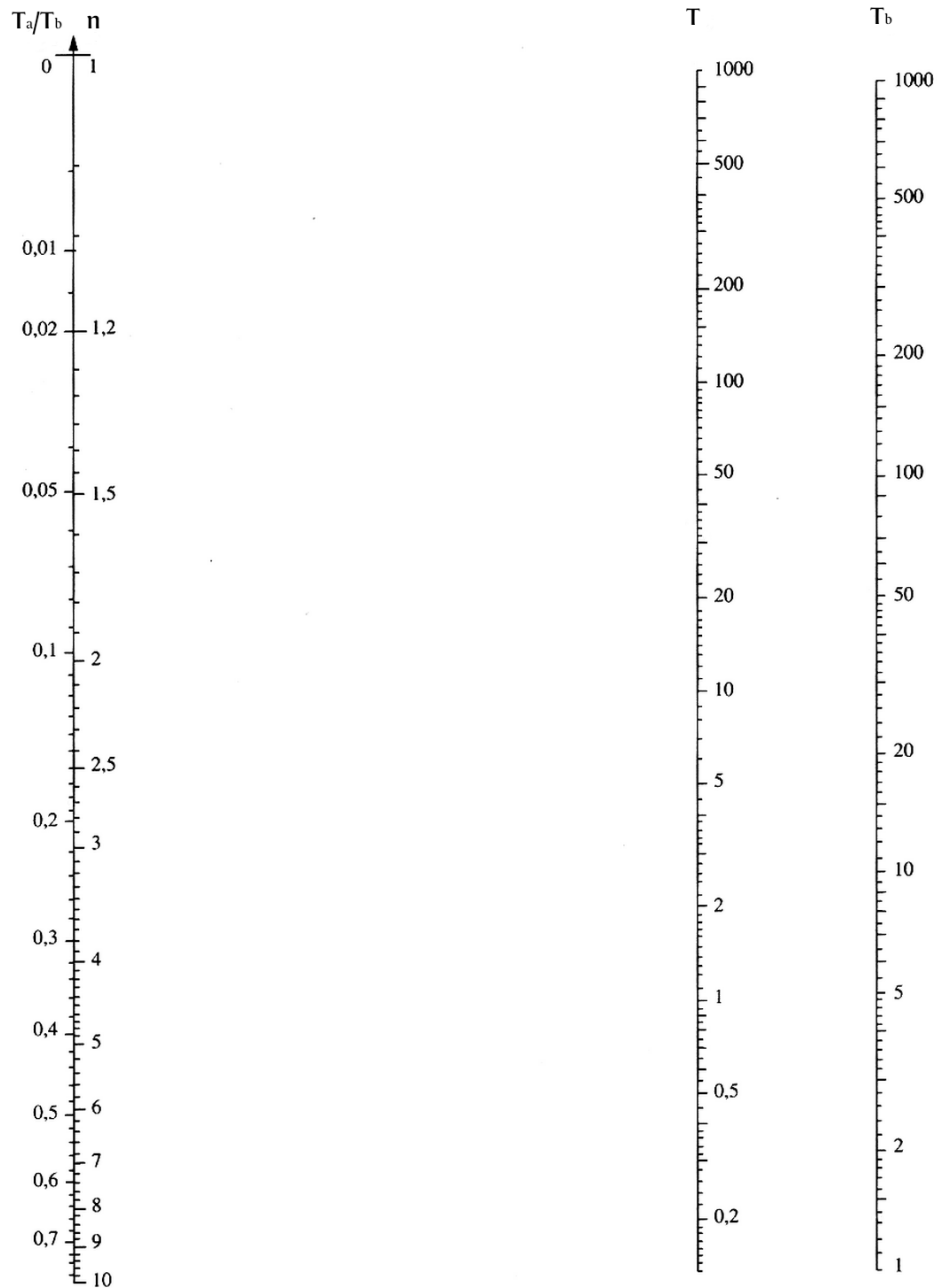


FIG. 2. Réponse indicielle de  $\mathcal{H}_2(s)$



**FIG. 3. Nomogramme de Strejc**



Ce document comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6. Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Les 3 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre qui vous convient. Les règles suivantes s'appliquent :

- ❶ **Aucun document** n'est autorisé.
- ❷ **L'usage** de tout matériel électronique, sauf calculatrice, est strictement interdit.
- ❸ **La rigueur** de la rédaction entrera pour une part importante dans la notation.

**Exercice N°1**

⌚ 40mn | (6 points)

Lors d'un premier démarrage, nous avons identifié le niveau d'eau d'un dégazeur thermique par la méthode de mise en oscillations entretenues appelée aussi méthode du « pompage ». Le gain critique  $G_{rc}$  du régulateur  $\mathcal{R}(s)$  était  $G_{rc} = 5$ . La fonction de transfert de ce procédé est notée  $\mathcal{H}(s)$  et la schéma de fig. 1 représente la boucle étudiée.

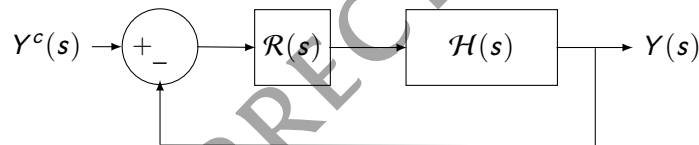


FIG. 1. Dégazeur thermique en Boucle fermée.

Sur l'enregistrement montrant l'oscillation limite de la sortie, on relève une période  $T_{osc}$  égale à 24 min.

Calculez la fonction de transfert  $\mathcal{H}(s)$  en l'exprimant par :

(a) (3 points)

$$\mathcal{H}(s) = \frac{G_s}{s(1 + T s)^2} \quad (1)$$

La pulsation des oscillations est  $\omega_{osc} = 0.26$  rad/min. L'apparition des oscillations entretenues conduit à :

$$|G_{rc}\mathcal{H}(j\omega_{osc})| = 1 \quad \text{et} \quad \angle G_{rc}\mathcal{H}(j\omega_{osc}) = -\pi$$

Soit encore :

$$\frac{G_{rc}G_s}{\omega_{osc}(1+T^2\omega_{osc}^2)} = 1 \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan(T\omega_{osc}) = -\pi$$

Il en résulte :

$$T = \frac{1}{\omega_{osc}} = 3.8 \text{ min} \quad \text{et} \quad G_s = \frac{2\omega_{osc}}{G_{rc}} = 0.1 \text{ min}^{-1}$$

La fonction de transfert est donc :

$$\mathcal{H}(s) = \frac{0.1}{s(1+3.8s)^2}$$

(b) (3 points)

$$\mathcal{H}(s) = \frac{0.1e^{-\tau s}}{s(1+Ts)} \quad (2)$$

L'apparition des oscillations entretenues conduit à :

$$|G_{rc}\mathcal{H}(j\omega_{osc})| = 1 \quad \text{et} \quad \angle G_{rc}\mathcal{H}(j\omega_{osc}) = -\pi$$

Soit encore :

$$\frac{G_{rc}G_s}{\omega_{osc}\sqrt{1+T^2\omega_{osc}^2}} = 1 \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} - \tau\omega_{osc} - \arctan(T\omega_{osc}) = -\pi$$

Il en résulte :

$$T = \frac{1}{\omega_{osc}} \sqrt{\left(\frac{G_{rc}G_s}{\omega_{osc}}\right)^2 - 1} = 6.3 \text{ min} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(T\omega_{osc})}{\omega_{osc}} = 2.1 \text{ min}$$

La fonction de transfert est donc :

$$\mathcal{H}(s) = \frac{G_s e^{-\tau s}}{s(1+Ts)},$$

où  $G_s = 0.1 \text{ min}^{-1}$ .

$$\mathcal{H}(s) = \frac{0.1e^{-2.1s}}{s(1+6.3s)}$$

### Exercice N°2

⌚ 30mn | (6 points)

(a) (2 points) Déterminez un modèle d'état à partir de la forme différentielle sui-



vante :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - y(t) = u(t) \quad (3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) (2 points) Déduisez la fonction de transfert correspondante à la forme modale ci-dessous :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0.25 & 0.1 \end{bmatrix} x(t) \quad (5)$$

C'est la forme modale. La fonction de transfert est alors :

$$\mathcal{G}_2(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} + \frac{0.25}{s-1} + \frac{0.1}{s-1.5}$$

(c) (2 points) Proposez une représentation d'état possible de la fonction de transfert  $\mathcal{G}_3(s)$  :

$$\mathcal{G}_3(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^3} + \frac{2}{s+2} \quad (6)$$

L'ordre de la fonction de transfert  $\mathcal{G}_3$  est :  $4 = 3 + 1$ . Ses pôles sont :

Pôle	Ordre de multiplicité
0	3
-2	1

Il en résulte la forme modale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

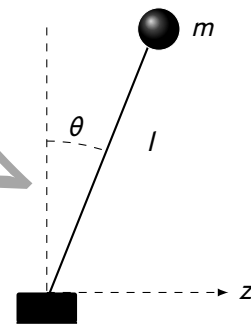
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

### Exercice N°3

⌚ 20mn | (8 points)

Un pendule inversé de masse  $m$  est fixé au bout d'une tige rigide de longueur  $l$  (sans masse) (*masse  $m$  vers le haut, tige vers le bas*). L'autre extrémité de la tige est fixée sur une table vibrante horizontalement.  $\theta$  est l'angle fait avec la verticale.

On se propose de stabiliser cette structure (dans un plan) autour de son équilibre instable. La commande  $u$  est l'accélération horizontale  $z$  de la table inférieure, qui se déplace le long d'une droite et a pour abscisse  $z$ .



La dynamique est donnée par :

$$l\theta^{(2)} = -g\sin(\theta) - \cos(\theta)u(t) \quad (7)$$

où  $g$  dénote l'accélération de la pesanteur. Nous prenons les variables d'état suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \theta^{(1)} \end{cases}$$

(a) (1 point) Donnez l'expression de  $\dot{x}_1 = \mathcal{F}_1(x_1, x_2, u)$ .

$$\dot{x}_1 = x_2$$

(b) (1 point) Donnez l'expression de  $\dot{x}_2 = \mathcal{F}_2(x_1, x_2, u)$ .

$$\dot{x}_2 = \frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{1}{l} \cos(x_1) u(t)$$

- (c) (2 points) Vérifiez que  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $\bar{u} = 0$  est un point d'équilibre.

Les fonctions  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  s'annulent quand  $x = \bar{x}$  et  $u = \bar{u}$  :

$$\mathcal{F}_1(\bar{x}, \bar{u}) = 0, \quad \mathcal{F}_2(\bar{x}, \bar{u}) = 0.$$

- (d) (3 points) Linéarisez ce système autour de ce point.

On cherche d'abord les dérivées partielles de  $\mathcal{F}_2$  par rapport aux variables  $x_1, x_2$  &  $u$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1} = \frac{g}{l} \cos(x_1) + \frac{1}{l} \sin(x_1) u(t) \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial u} = -\frac{1}{l} \cos(x_1) \end{cases}$$

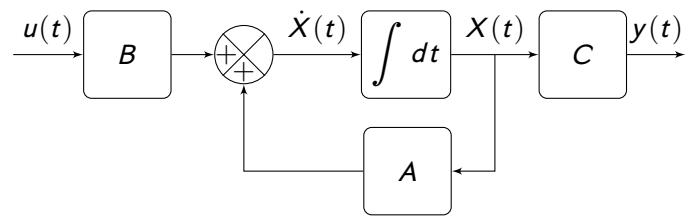
Autour du point de fonctionnement, ces quantités se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1} \big|_{(\bar{x}, \bar{u})} = \frac{g}{l} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2} \big|_{(\bar{x}, \bar{u})} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial u} \big|_{(\bar{x}, \bar{u})} = -\frac{1}{l} \end{cases}$$

La représentation d'état linéarisée est :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{l} \end{bmatrix}}_B u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C x(t) \end{aligned}$$

- (e) (1 point) Rappelez le schéma bloc de la représentation d'état linéarisée.



CORRECTION