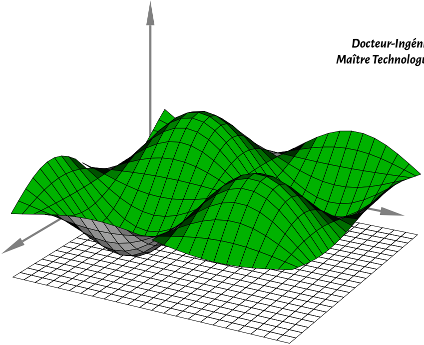
République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique - MESRS
Direction Générale des Études Technologiques - DGET
Institut Supérieur des Études Technologiques de Bizerte - ISETB

Traitement de signal

Notes de cours avec exercices corrigés[1]

Abdelbacet Mhamdi
abdelbacet.mhamdi@bizerte.r-iset.tn

Docteur-Ingénieur en Génie Électrique
Maître Technologue en GE à l'ISET de Bizerte



Notes de cours	Réf. : GE-082
Travaux pratiques	Réf. : GE-083

"If you torture the data long enough, it will confess."

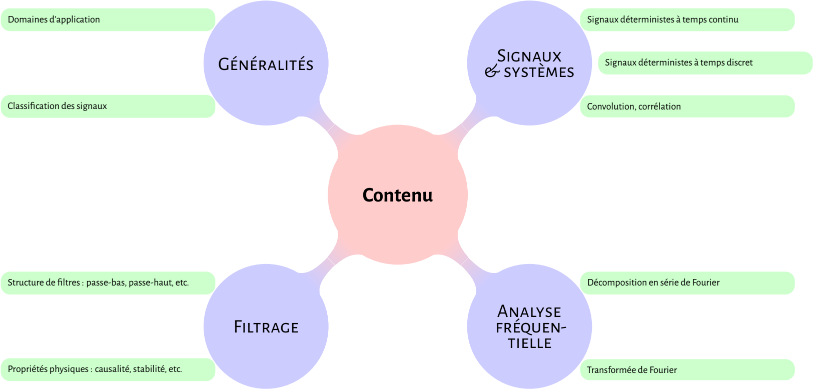
Ronald H. Coase, *Essays on Economics and Economists*

[1]Disponible à l'adresse suivante : https://github.com/a-mhamdi/isetbz/

À propos du module

Domaine de formation	Sciences, Technologies & Études Technologiques
Spécialité	Licence en Génie Électrique : L2-S3
Parcours	Automatismes et Informatique Industrielle - AII
Unité d'enseignement	Électronique & Traitement du Signal

Semestre : 3	Charge : 21h	Crédits : 1.5	Code : 332	Évaluation : 0.4DC+0.6DS



Les grandes lignes

En cours...

1. Mise en situation
2. Signaux & systèmes
3. Analyse fréquentielle
4. Filtrage des signaux

Généralités (1/2)

Signal

- Représentation physique d'une information à communiquer ;
- Support pour véhiculer des données.

Exemples

1. Signaux biologiques : EEG, ECG ;
2. Géophysiques : vibrations sismiques ;
3. Finances : cours de la bourse ;
4. Images/ Vidéos ;
5. ...

Bruit

Phénomène gênant la perception ou l'interprétation d'un signal.

$\Rightarrow$ Extraire le maximum d'information utile d'un signal perturbé.

Généralités (2/2)

Traitement de signal

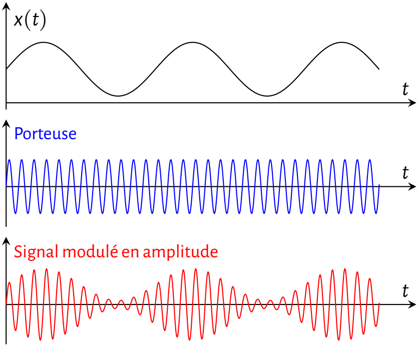
Ensemble de techniques pour générer, analyser et transformer les signaux en vue de leur exploitation.

Généralités (2/2)

Traitement de signal

Ensemble de techniques pour générer, analyser et transformer les signaux en vue de leur exploitation.

- Synthétiser des signaux par superposition de signaux élémentaires
- Adapter le signal au canal de transmission (Modulation AM, FM, PM)



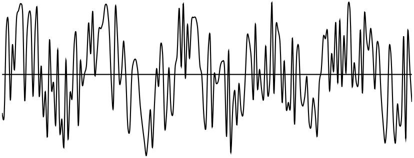
Généralités (2/2)

Traitement de signal

Ensemble de techniques pour générer, analyser et transformer les signaux en vue de leur exploitation.

- Détecter les composantes utiles d'un signal complexe

- Classifier les signaux (Identification d'une pathologie sur un ECG, reconnaissance vocale)

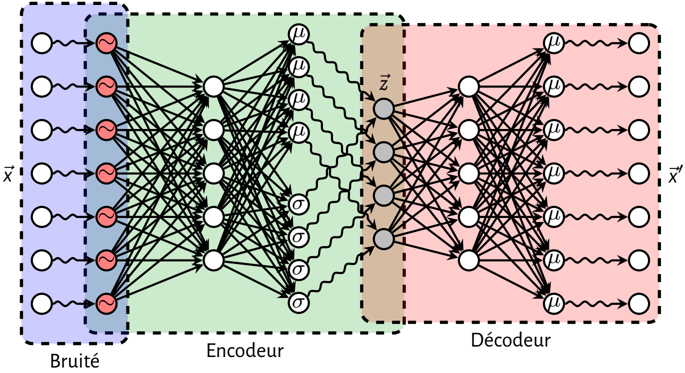


Généralités (2/2)

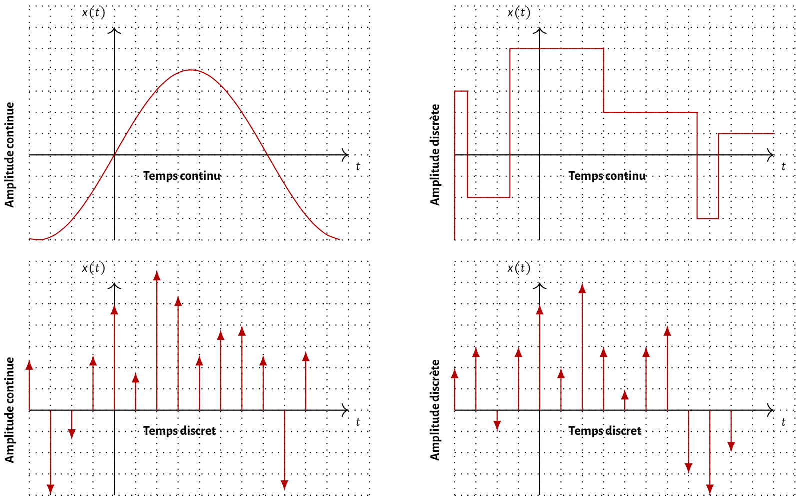
Traitement de signal

Ensemble de techniques pour générer, analyser et transformer les signaux en vue de leur exploitation.

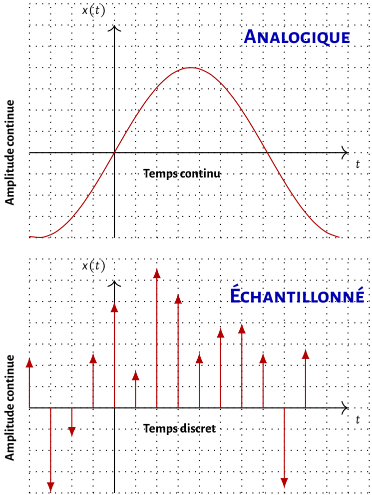
- Filtrer le signal contre les impuretés
- Coder/ Compresser



Classification morphologique des signaux



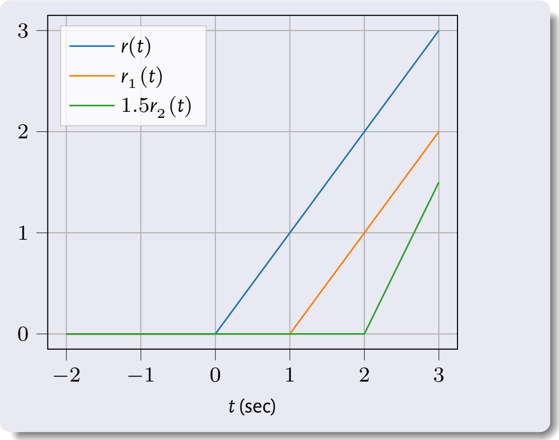
Classification morphologique des signaux



En cours...

Signaux usuels (1/3)

La rampe $r(t)$



$$\boxed{r(t) \;=\; t \quad \text{ssi} \quad t \geq 0}$$

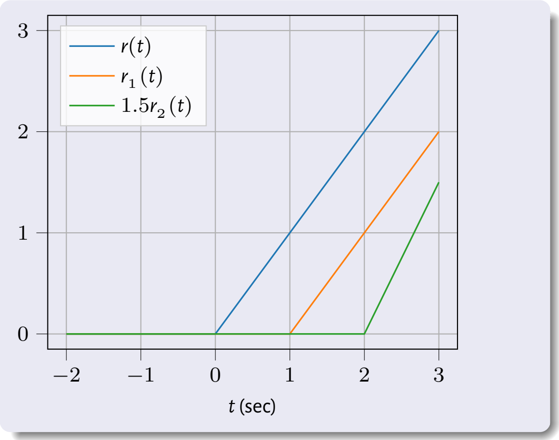
$$\boxed{r_1(t) \;=\; t-1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 1}$$

$$\boxed{1.5r_2(t) \;=\; 1.5(t-2) \quad \text{ssi} \quad t \geq 2}$$

$$\star \quad f_\tau(t) \;=\; f(t-\tau)$$

Signaux usuels (1/3)

La rampe $r(t)$



$$\boxed{r(t) \;=\; t \quad \text{ssi} \quad t \geq 0}$$

$$\boxed{r_1(t) \;=\; t-1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 1}$$

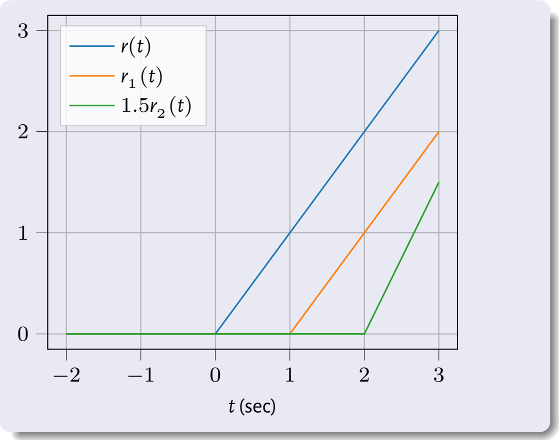
$$\boxed{1.5r_2(t) \;=\; 1.5(t-2) \quad \text{ssi} \quad t \geq 2}$$

$$\boxed{\alpha r_\tau(t) \;=\; \alpha(t-\tau) \quad \text{ssi} \quad t \geq \tau}$$

$$\star \quad f_\tau(t) \;=\; f(t-\tau)$$

Signaux usuels (1/3)

La rampe $r(t)$



$$\boxed{r(t) \;=\; t \quad \text{ssi} \quad t \geq 0}$$

$$\boxed{r_1(t) \;=\; t-1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 1}$$

$$\boxed{1.5r_2(t) \;=\; 1.5(t-2) \quad \text{ssi} \quad t \geq 2}$$

$$\boxed{\alpha r_\tau(t) \;=\; \alpha(t-\tau) \quad \text{ssi} \quad t \geq \tau}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}r(t) \;=\; \Gamma(t) \rightleftarrows \int \Gamma(t) \;=\; r(t)}$$

$\star \quad f_\tau(t) \;=\; f(t-\tau)$

Signaux usuels (1/3)

La rampe $r(t)$

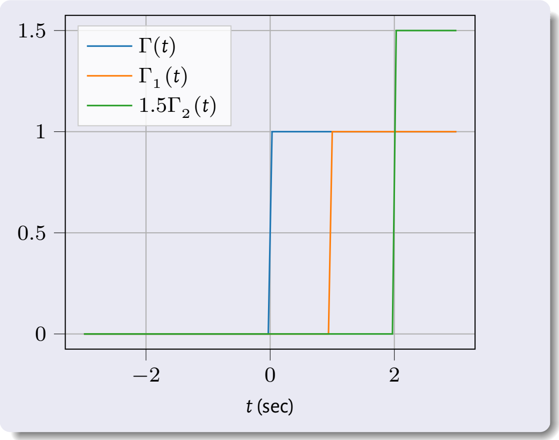
[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

[2]:
```
t = np.linspace(-2, 3, 1000)

# Rampe
x = ( t>=0 ).astype(int) * t
y = ( t>=1 ).astype(int) * (t-1)
z = 1.5 * ( t>=2 ).astype(int) * (t-2)
```

[3]:
```
plt.plot(t, x, t, y, t, z)
plt.legend( ('$r(t)$', r'$r_{_1}(t)$', r'$1.5r_{_2}(t)$') )

plt.xlabel('$t$ (sec)')
plt.grid()
plt.show()
```

Signaux usuels (2/3)

L'échelon $\Gamma(t)$



$$\boxed{\Gamma(t) \;=\; 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 0}$$

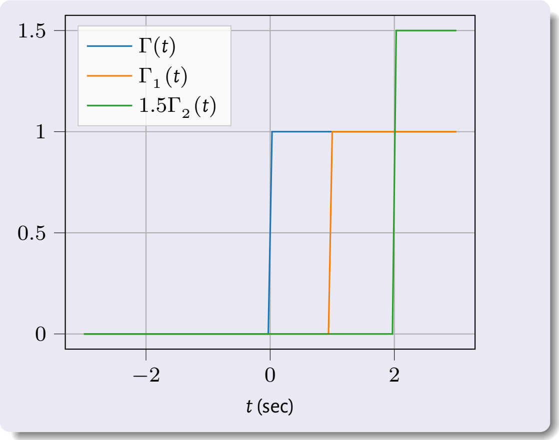
$$\boxed{\Gamma_1(t) \;=\; 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 1}$$

$$\boxed{1.5\Gamma_2(t) \;=\; 1.5 \quad \text{ssi} \quad t \geq 2}$$

$\star \quad f_\tau(t) \;=\; f(t-\tau)$

Signaux usuels (2/3)

L'échelon $\Gamma(t)$



$$\boxed{\Gamma(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 0}$$

$$\boxed{\Gamma_1(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 1}$$

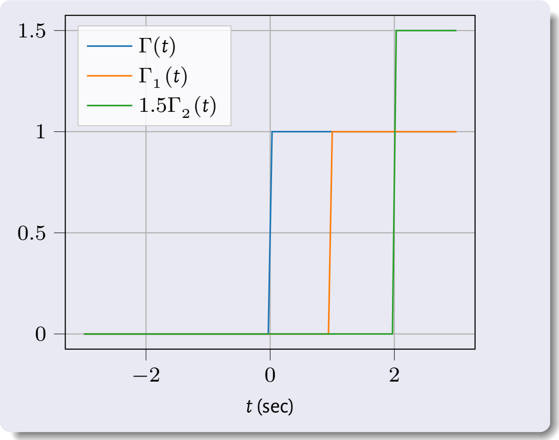
$$\boxed{1.5\Gamma_2(t) = 1.5 \quad \text{ssi} \quad t \geq 2}$$

$$\boxed{\alpha\Gamma_\tau(t) = \alpha \quad \text{ssi} \quad t \geq \tau}$$

$\star \quad f_\tau(t) = f(t - \tau)$

Signaux usuels (2/3)

L'échelon $\Gamma(t)$



$$\boxed{\Gamma(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 0}$$

$$\boxed{\Gamma_1(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t \geq 1}$$

$$\boxed{1.5\Gamma_2(t) = 1.5 \quad \text{ssi} \quad t \geq 2}$$

$$\boxed{\alpha\Gamma_\tau(t) = \alpha \quad \text{ssi} \quad t \geq \tau}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\Gamma(t) = \delta(t) \rightleftarrows \int \delta(t) = \Gamma(t)}$$

$$\star \quad f_\tau(t) = f(t-\tau)$$

Signaux usuels $(2/3)$

L'échelon $\Gamma(t)$

CODE SNIPPETS

[2]:

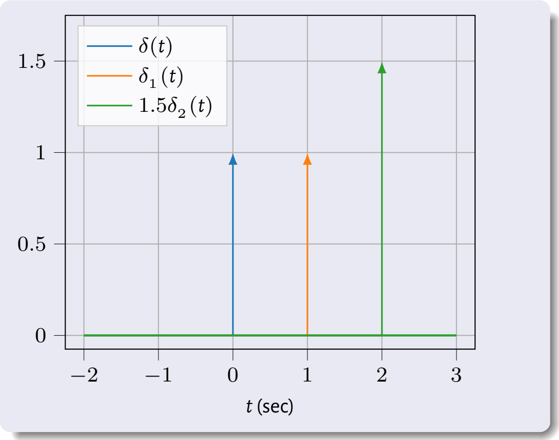
```
t = np.linspace(-2, 3, 1000)

# \'Echelon
x = ( t>=0 ).astype(int)
y = ( t>=1 ).astype(int)
z = 1.5 * ( t>=2 ).astype(int)
```

[3]:

```
plt.plot(t, x, t, y, t, z)
plt.legend( ('$\Gamma(t)$', r'$\Gamma_{_1}(t)$', r'$1.
↪5\Gamma_{_2}(t)$') )

plt.xlabel('$t$ (sec)')
plt.grid()
plt.show()
```

Signaux usuels (3/3)

La distribution de Dirac $\delta(t)$



$$\boxed{\delta(t) \;=\; 1 \quad \text{ssi} \quad t = 0}$$

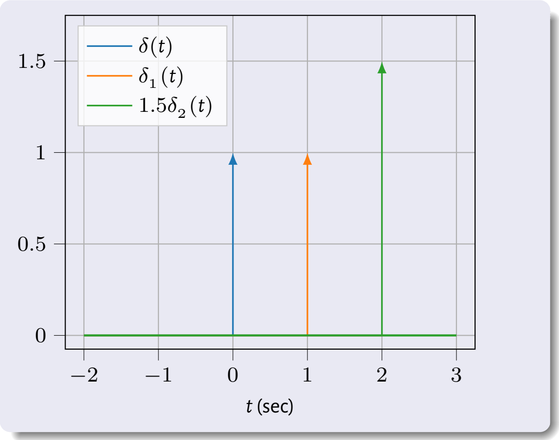
$$\boxed{\delta_1(t) \;=\; 1 \quad \text{ssi} \quad t = 1}$$

$$\boxed{1.5\delta_2(t) \;=\; 1.5 \quad \text{ssi} \quad t = 2}$$

$\star \quad f_\tau(t) \;=\; f(t-\tau)$

Signaux usuels (3/3)

La distribution de Dirac $\delta(t)$



$$\boxed{\delta(t) \quad = \quad 1 \quad \text{ssi} \quad t = 0}$$

$$\boxed{\delta_1(t) \quad = \quad 1 \quad \text{ssi} \quad t = 1}$$

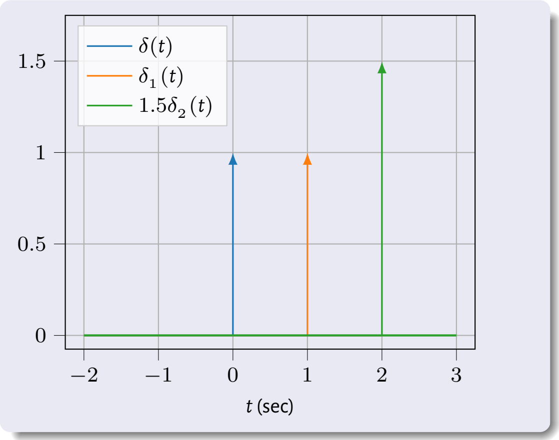
$$\boxed{1.5\delta_2(t) \quad = \quad 1.5 \quad \text{ssi} \quad t = 2}$$

$$\boxed{\alpha\delta_\tau(t) \quad = \quad \alpha \quad \text{ssi} \quad t = \tau}$$

$$\star \quad f_\tau(t) \quad = \quad f(t-\tau)$$

Signaux usuels (3/3)

La distribution de Dirac $\delta(t)$



$$\boxed{\delta(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t = 0}$$

$$\boxed{\delta_1(t) = 1 \quad \text{ssi} \quad t = 1}$$

$$\boxed{1.5\delta_2(t) = 1.5 \quad \text{ssi} \quad t = 2}$$

$$\boxed{\alpha\delta_\tau(t) = \alpha \quad \text{ssi} \quad t = \tau}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\lim_{(\mu,\sigma)\to(0,0)} f(t) \longrightarrow \delta(t)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1.}$$

$\star \quad f_\tau(t) = f(t-\tau)$

Signaux usuels (3/3)

La distribution de Dirac $\delta(t)$

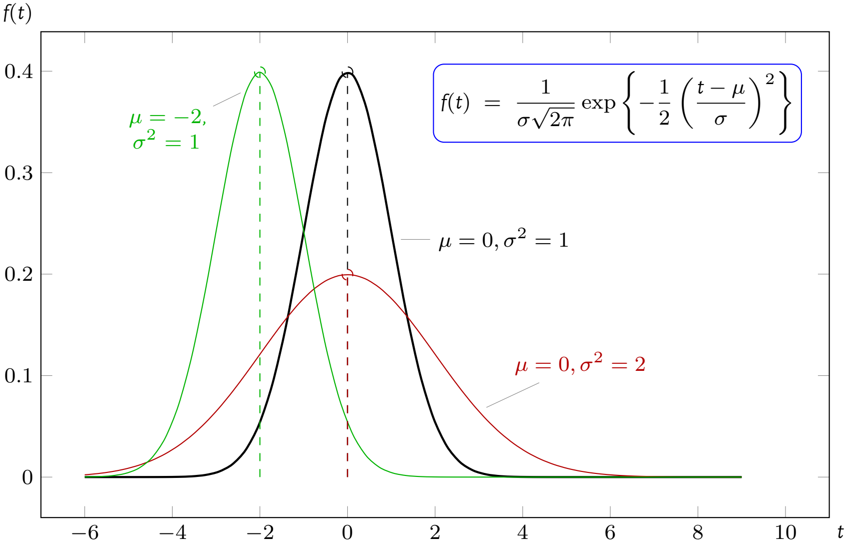
CODE SNIPPETS

[2]:
```
t = np.linspace(-2, 3, 6); nt = len(t)
x = np.zeros(len(t)); x[ t==0.0 ] = 1;
y = np.zeros(len(t)); y[ t==1.0 ] = 1;
z = np.zeros(len(t)); z[ t==2.0 ] = 1.5;
```

[3]:
```
plt.stem(t,x,'C0',markerfmt='C0^',basefmt="␣
↪",label=r'$\delta(t)$',use_line_collection=True)
plt.stem(t,y,'C1',markerfmt='C1^',basefmt="␣
↪",label=r'$\delta_1(t)$',use_line_collection=True)
plt.stem(t,z,'C2',markerfmt='C2^',basefmt=" ",label=r'$1.
↪5\delta_2(t)$',use_line_collection=True)

plt.xlabel('$t$ (sec)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

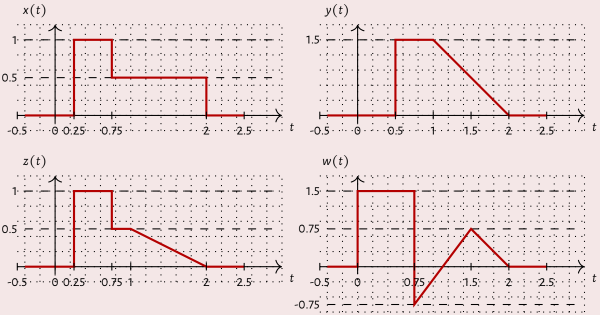
Lecture complémentaire

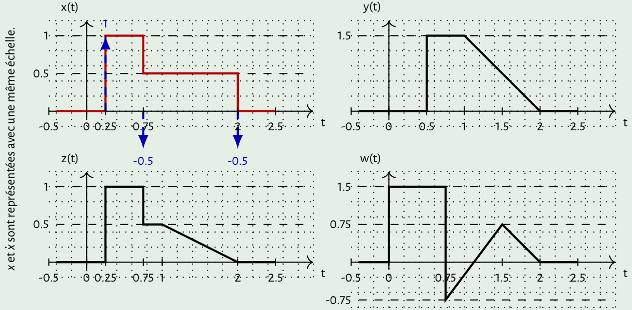
Densité de probabilité de la loi normale



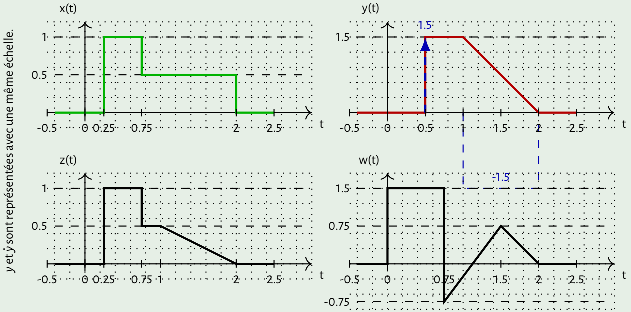
Exercice #1

Déterminer les expressions des signaux donnés par les courbes ci-dessous :

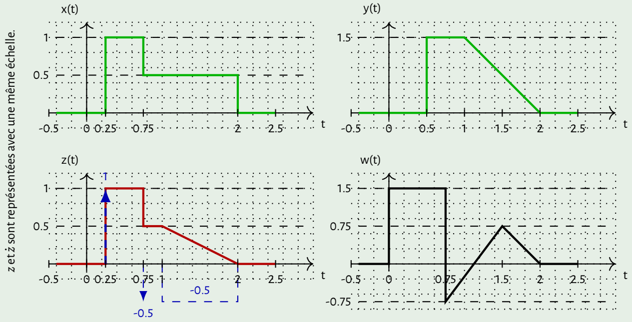




$$\boxed{\dot{x}(t) \;=\; \delta_{0.25} - 0.5\delta_{0.75} - 0.5\delta_2} \quad \xrightarrow{\int dt} \quad \boxed{x(t) \;=\; \Gamma_{0.25} - 0.5\Gamma_{0.75} - 0.5\Gamma_2}$$

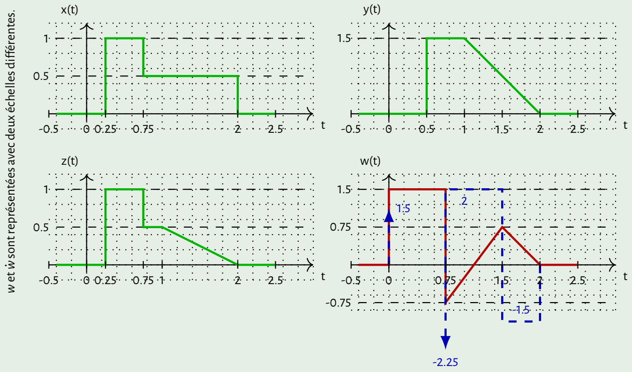


$$\boxed{\dot{y}(t) \;=\; 1.5\delta_{0.5} - 1.5\left(\Gamma_1 - \Gamma_2\right)} \xrightarrow{\int dt} \boxed{y(t) \;=\; 1.5\Gamma_{0.5} - 1.5\left(r_1 - r_2\right)}$$



$$\boxed{\dot{z}(t) \;=\; \delta_{0.25} - 0.5\delta_{0.75} - 0.5\left(\Gamma_1 - \Gamma_2\right)}$$

$$\xrightarrow{\int dt} \quad \boxed{z(t) \;=\; \Gamma_{0.25} - 0.5\Gamma_{0.75} - 0.5\left(r_1 - r_2\right)}$$



$$\boxed{\dot{w}(t) = 1.5\delta - 2.25\delta_{0.75} + 2\left(\Gamma_{0.75} - \Gamma_{1.5}\right) - 1.5\left(\Gamma_{1.5} - \Gamma_2\right)}$$

$$\xrightarrow{\int dt} \quad \boxed{w(t) = 1.5\Gamma - 2.25\Gamma_{0.75} + 2\left(r_{0.75} - r_{1.5}\right) - 1.5\left(r_{1.5} - r_2\right)}$$

[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

[2]:
```
t = np.linspace(-0.5, 2.5, 1000)
```

Echelon retardé de τ

[3]:
```
def G_tau(t, tau=0):
     return ( t>=tau ).astype(int)
```

Rampe retardée de τ

[4]:
```
def r_tau(t, tau=0):
     return  ( t>=tau ).astype(int) * (t-tau)
```

$$\boxed{x(t) \;=\; \Gamma_{0.25} - 0.5\Gamma_{0.75} - 0.5\Gamma_2}$$

[5]:
```
x = G_tau(t,0.25)-0.5*G_tau(t,0.75)-0.5*G_tau(t,2)
```

Code snippets II

$$y(t) = 1.5\Gamma_{0.5} - 1.5\left(r_1 - r_2\right)$$

[6]:
```
y = 1.5*G_tau(t,0.5)-1.5*(r_tau(t,1)-r_tau(t,2))
```

$$z(t) = \Gamma_{0.25} - 0.5\Gamma_{0.75} - 0.5\left(r_1 - r_2\right)$$

[7]:
```
z = G_tau(t,0.25)-0.5*G_tau(t,0.75)-0.5*(r_tau(t,1)-r_tau(t,2))
```

$$w(t) = 1.5\Gamma - 2.25\Gamma_{0.75} + 2\left(r_{0.75} - r_{1.5}\right) - 1.5\left(r_{1.5} - r_2\right)$$

[8]:
```
w = 1.5*G_tau(t)-2.25*G_tau(t,0.75)+2*(r_tau(t,0.75)-r_tau(t,1.5))-1.
↪5*(r_tau(t,1.5)-r_tau(t,2))
```

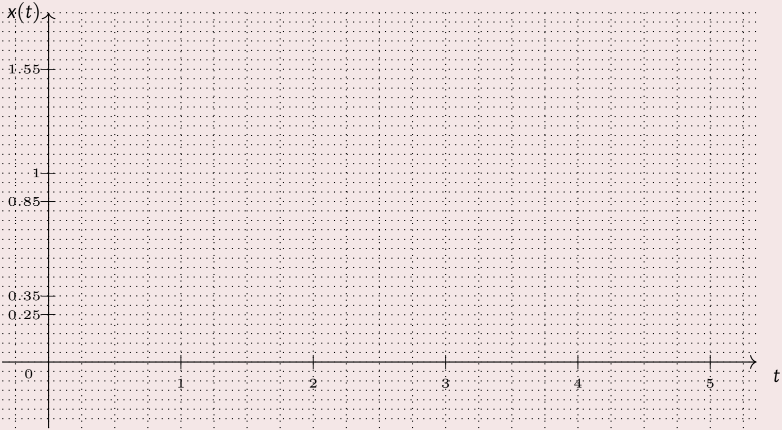
Code snippets III

[9]:
```
plt.subplot(2,2,1); plt.plot(t, x);plt.grid()
plt.xlabel('$t$ (sec)');plt.ylabel('$x(t)$')
plt.xticks([-0.5,.25,0.75,2,2.5],[-0.5,.25,0.75,2,2.5])
plt.subplot(2,2,2); plt.plot(t, y);plt.grid()
plt.xlabel('$t$ (sec)');plt.ylabel('$y(t)$')
plt.xticks([-0.5,.5,1,2,2.5],[-0.5,.5,1,2,2.5])
plt.subplot(2,2,3); plt.plot(t, z);plt.grid()
plt.xlabel('$t$ (sec)');plt.ylabel('$w(t)$')
plt.xticks([-0.5,.25,.75,1,2,2.5],[-0.5,.25,.75,1,2,2.5])
plt.subplot(2,2,4); plt.plot(t, w);plt.grid()
plt.xlabel('$t$ (sec)');plt.ylabel('$z(t)$')
plt.xticks([-.5,0,.75,1.5,2,2.5],[-.5,0,.75,1.5,2,2.5])
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Exercice #2

Tracer la fonction

$$x(t) \quad = \quad \Gamma(t) - 0.75r_1(t) + 1.35r_2(t) - 0.5\Gamma_3(t).$$



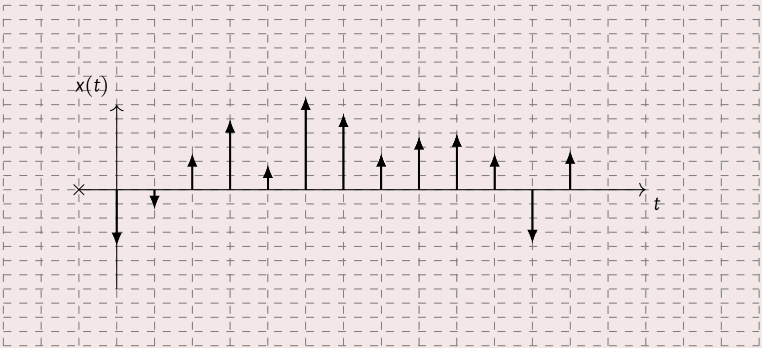
$$x(t) = \Gamma(t) - 0.75r_1(t) + 1.35r_2(t) - 0.5\Gamma_3(t)$$

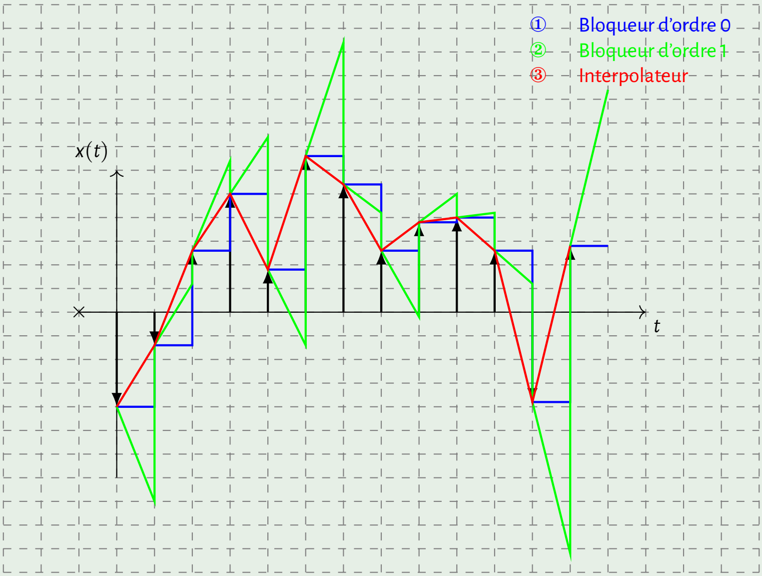
Reconstitution des signaux

Exercice #3

Sur le même graphe, reconstruire le signal par :

1. un bloqueur d'ordre zéro ;
2. un bloqueur d'ordre un ;
3. un filtre interpolateur.




① Bloqueur d'ordre 0
② Bloqueur d'ordre 1
③ Interpolateur
x(t)
t

Produit de convolution

$$\boxed{(f * g)(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} f(t-\varsigma)g(\varsigma)\,d\varsigma \;=\; \int_{-\infty}^{t} f(\varsigma)g(t-\varsigma)\,d\varsigma}$$

Le produit de convolution est

bilinéaire $\boxed{f * (g + \gamma h) \;=\; (f * g) + \gamma(f * h)}$

associatif $\boxed{(f * g) * h \;=\; f * (g * h)}$

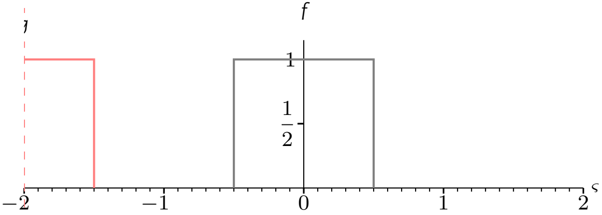
commutatif $\boxed{f * g \;=\; g * f}$

Quelques propriétés

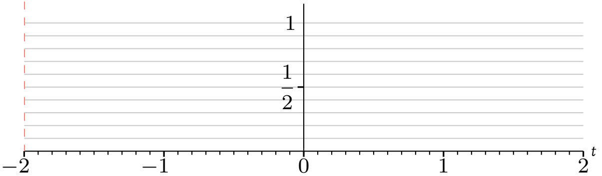
- ⋆ *Identité* $\boxed{f(t) * \delta(t) \;=\; f(t)}$
- ⋆ *Retard* $\boxed{f(t) * \delta_{\tau}(t) \;=\; f_{\tau}(t)}$
- ⋆ *Intégration* $\boxed{\int_{0}^{t} f(\varsigma)d\varsigma \;=\; \Gamma(t) * f(t)}$

Produit de convolution

Illustration graphique



$$[f * g](t) = \int_{-\infty}^{t} f(\varsigma)g(t-\varsigma)\,d\varsigma$$



Exercice #4

Soient les commandes MATLAB suivantes:

```
>> x = [-0.5 0 1 0.75 2 1 2.1 -0.5];
>> y = [0 1 0 0 1 -1];
>> z = conv(x, y);
>> disp(z)
```

1. Pour une période d'échantillonnage de 0.2 sec, donner l'expression de x ;
2. Pour une même période d'échantillonnage de 0.2 sec, donner l'expression de y ;
3. Déterminer la sortie z ;
4. Donner alors le résultat retourné après exécution du code.

①
$$x(t) = -0.5\delta + \delta_{0.4} + 0.75\delta_{0.6} + 2\delta_{0.8} + \delta_1$$
$$+2.1\delta 1.2 - 0.5\delta_{1.4}$$

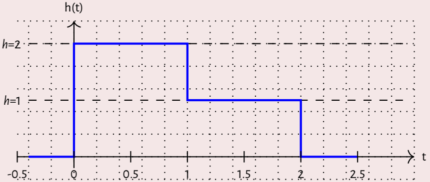
②
$$y(t) = \delta_{0.2} + \delta_{0.8} - \delta_1$$

③
$$z(t) = -0.5\delta_{0.2} + \delta_{0.6} + 0.25\delta_{0.8} + 2.5\delta_1$$
$$+2\delta_{1.2} + 1.85\delta_{1.4} + 0.75\delta_{1.6} - \delta_{1.8} + 1.1\delta_2$$
$$-2.6\delta_{2.2} + 0.5\delta_{2.4}$$

④
$$z(t) = [0,\ -0.5,\ 0,\ 1,\ 0.25,\ 2.5,\ 2,\ 1.85,\ 0.75,\ -1,\ 1.1,\ -2.6,\ 0.5]$$

Exercice #5

Soit un système linéaire invariant dans le temps caractérisé par sa réponse impulsionnelle h suivante :



1. Déterminer l'expression mathématique de h ;
2. Calculer la réponse y de ce système suite à une excitation u donnée par :

$$u(t) = v(t) + v_2(t), \quad \text{avec} \quad v(t) = 2\Gamma_1 - \Gamma_3(t).$$

① À partir du graphe, la fonction h est

$$h(t) = 2\Gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2$$

② La réponse y est

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * u(t) \\ &= h * (v + v_2) \\ &= \underbrace{h * v}_{z(t)} + h * v_2 \end{aligned}$$

On pose $z(t) = h(t) * v(t)$, alors

$$h * v_2 = \underbrace{\underbrace{h * v}_{z} * \delta_2}_{z_2}$$

Ainsi :

$$y = z + z_2$$

Calculons l'expression de la fonction $z(t)$:

$$z = h * v$$

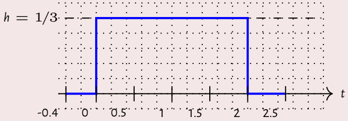
$$
\begin{aligned}
z(t) &= (2\Gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2) * (2\Gamma_1 - \Gamma_3) \\
&= 4\Gamma * \Gamma_1 - 2\Gamma * \Gamma_3 - 2\Gamma_1 * \Gamma_1 + \Gamma_1 * \Gamma_3 - 2\Gamma_1 * \Gamma_2 + \Gamma_2 * \Gamma_3 \\
&= 4r_1 - 2r_3 - 2r_2 + r_4 - 2r_3 + r_5 \\
&= 4r_1 - 2r_2 - 4r_3 + r_4 + r_5.
\end{aligned}
$$

La sortie y se calcule comme suit :

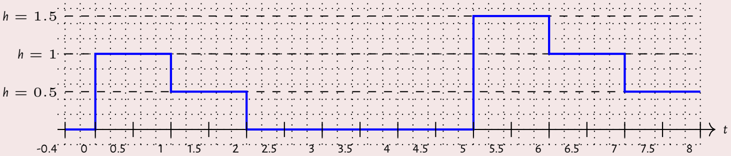
$$
\begin{aligned}
y(t) &= z(t) + z_2(t) \\
&= 4r_1 - 2r_2 - 4r_3 + r_4 + r_5 + 4r_3 - 2r_4 - 4r_5 + r_6 + r_7 \\
&= 4r_1 - 2r_2 - r_4 - 3r_5 + r_6 + r_7.
\end{aligned}
$$

Exercice #6

Soit un système linéaire invariant dans le temps caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ suivante :



1. Déterminer l'expression mathématique de $h(t)$;
2. Calculer la réponse $y(t)$ de ce système suite à une excitation $u(t)$ donné par le graphique ci–dessous :



① La réponse impulsionnelle $h(t)$ s'écrit comme suit :

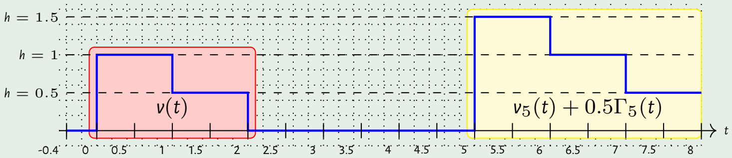
$$h(t) = 1/3\Gamma(t) - 1/3\Gamma_2(t).$$

② Le signal u peut être décomposé de la façon suivante :

$$u(t) = v(t) + v_5(t) + 0.5\Gamma_5(t),$$

avec

$$v(t) = \Gamma(t) - 0.5\Gamma_1(t) - 0.5\Gamma_2(t).$$



La réponse y à l'excitation u est :

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * u(t) \\ &= h(t) * \left(\quad v(t) + v_5(t) + 0.5\Gamma_5(t) \quad \right) \\ &= h(t) * v(t) + h(t) * v_5(t) + 0.5h(t) * \Gamma_5(t) \end{aligned}$$

On examine d'abord $h(t) * v(t)$:

$$\begin{aligned} h(t) * v(t) &= 1/3 \left(\quad \Gamma(t) - \Gamma_2(t) \quad \right) * \left(\quad \Gamma(t) - 0.5\Gamma_1(t) - 0.5\Gamma_2(t) \quad \right) \\ &= 1/3 \left(\quad r(t) - 0.5r_1(t) - 1.5r_2(t) + 0.5r_3(t) + 0.5r_4(t) \quad \right), \end{aligned}$$

où $r(t) = t\Gamma(t)$. La quantité $h(t) * v_5(t)$ est donc :

$$\begin{aligned} h(t) * \underbrace{v_5(t)}_{v(t)*\delta_5(t)} &= h(t) * v(t) * \delta_5(t) \\ &= 1/3 \left(\quad r_5(t) - 0.5r_6(t) - 1.5r_7(t) + 0.5r_8(t) + 0.5r_9(t) \quad \right). \end{aligned}$$

Le terme $0.5h(t) * \Gamma_5(t)$ se calcule de la façon suivante :

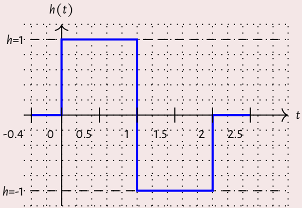
$$\begin{aligned}
0.5h(t) * \Gamma_5(t) &= 0.5 \underbrace{h(t) * \Gamma(t)}_{\int_0^t h(\mu)d\mu} * \delta_5(t) \\
&= {}^{0.5}/_3 \int_0^t \left(\Gamma(\mu) - \Gamma_2(\mu) \right) * \delta_5(t) \\
&= {}^{0.5}/_3 \left(r(t) - r_2(t) \right) * \delta_5(t) \\
&= {}^{0.5}/_3 \left(r_5(t) - r_7(t) \right).
\end{aligned}$$

La réponse finale est donnée par :

$$\begin{aligned}
y(t) = {}^1/_3 \Big(& r(t) - 0.5r_1(t) - 1.5r_2(t) + 0.5r_3(t) + 0.5r_4(t) \\
& +1.5r_5(t) - 0.5r_6(t) - 2r_7(t) + 0.5r_8(t) + 0.5r_9(t) \Big).
\end{aligned}$$

Exercice #7

Soit la réponse impulsionnelle h, donnée par le graphique ci-dessous, d'un système linéaire et invariant dans le temps :



1. Trouver l'expression analytique de la fonction h ;
2. Exprimer la réponse y de ce système suite à l'application d'un échelon en entrée, d'amplitude 2 ;
3. Tracer le graphique d'évolution temporelle de y ;
4. Calculer l'énergie $\mathcal{E}^a$ du signal $y(t)$.

$$^a\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 \, dt$$

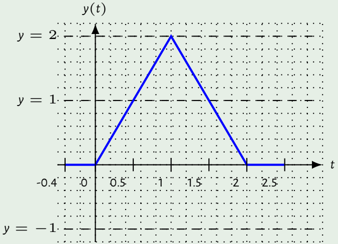
① La fonction h s'écrit :

$$h(t) \quad = \quad \Gamma(t) - 2\Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)$$

② La réponse y du système est :

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\Gamma(t) * h(t) \\ &= 2\Gamma(t) * [\Gamma(t) - 2\Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)] \\ &= 2r(t) - 4r_1(t) + 2r_2(t), \quad \text{avec} \quad r(t) = t\Gamma(t) \end{aligned}$$

③ Le graphique d'évolution de y est donné par :



④ L'énergie peut se calculer comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)dt \\
&= \int_0^2 y^2(t)dt \\
&= 2\int_0^1 (2t)^2\, dt \\
&= 8\frac{\left[t^3\right]_0^1}{3} \\
&= {}^8/_3
\end{aligned}$$

Convolution 2D

Exercice #8

Calculer le résultat de la convolution 2D suivante :

Entrée

1	0	1	0	2
1	1	3	2	1
1	1	0	1	1
2	3	2	1	3
0	2	0	1	0

$*$

Filtre

0	1	0
0	0	2
0	1	0

$=$

Sortie

...	...	...
...	...	...
...	...	...

Convolution 2D

Exercice #8

Calculer le résultat de la convolution 2D suivante :

1	0	1	0	2
1	1	3	2	1
1	1	0	1	1
2	3	2	1	3
0	2	0	1	0

ENTRÉE

$*$

0	1	0
0	0	2
0	1	0

FILTRE

$=$

...	...	...
...	...	...
...	...	...

SORTIE

Le résultat de la convolution 2D est :

1	0	1	0	2
1	1	3	2	1
1	1	0	1	1
2	3	2	1	3
0	2	0	1	0

ENTRÉE

$*$

0	1	0
0	0	2
0	1	0

FILTRE

$=$

7	5	3
4	7	5
7	2	8

SORTIE

En cours...

Signal sinusoïdal (1/4)

$$\boxed{x(t) = x_{\max} \sin\left(\underbrace{\omega t + \varphi}_{\Phi(t)}\right)}$$

$$\boxed{\varphi = \Phi(t=0)}$$

$x_{\max}$ Valeur maximale

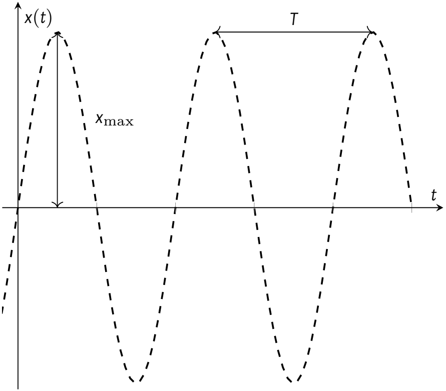
T Période (sec)

$f = \frac{1}{T}$ Fréquence (Hz)

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ Pulsation (rad/sec)

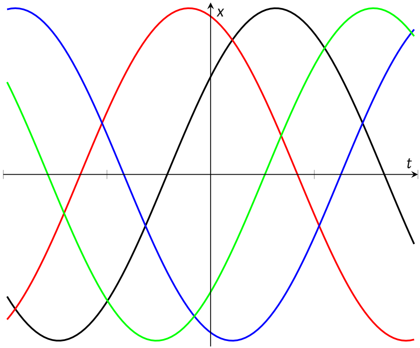
φ Phase à l'origine (rad)

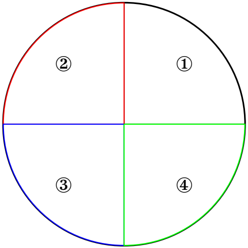
Φ Phase instantanée.



Signal sinusoïdal (2/4)

Phase à l'origine!





Signal sinusoïdal (3/4)

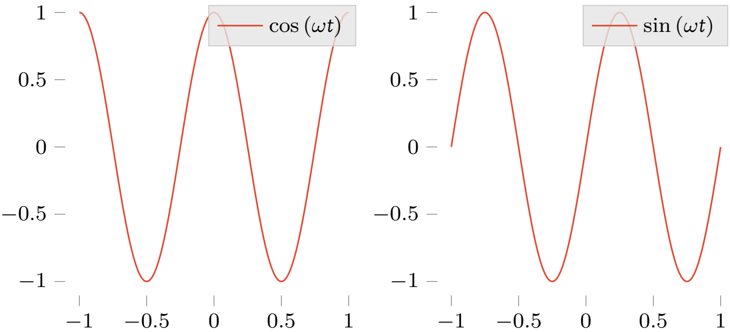
CODE SNIPPETS

[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

[2]:
```
nt = 1000
t = np.linspace(-1,1,nt)
wt = 2*np.pi*t/1
c = np.cos(wt)
s = np.sin(wt)
```

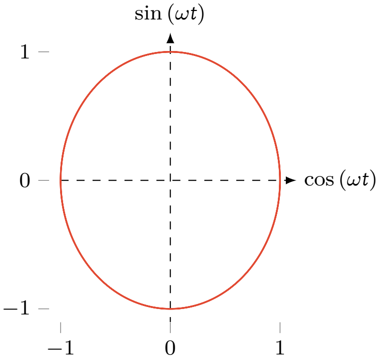
[3]:
```
plt.subplot(1,2,1)
plt.plot(t,c,label='COS')
plt.legend(); plt.grid()
plt.subplot(1,2,2)
plt.plot(t,s,label='SIN')
plt.legend(); plt.grid()
```

Signal sinusoïdal (4/4)



Cercle trigonométrique

[4]:
```
plt.plot(c, s)
plt.grid()
```



$$\boxed{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) \; = \; 1}$$

$$\boxed{e^{\jmath\omega t} \; = \; \cos(\omega t) + \jmath \sin(\omega t)}$$

Principe (1/2)

Soit x une fonction déterministe. Elle peut être entièrement définie comme une somme pondérée de fonctions sinusoïdales :

$$x(t) = f_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + f_1 sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \cdots + f_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) + \cdots + f_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

Si x est périodique de période T (i.e. de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$), elle admet alors une décomposition dite en **série de Fourier** avec $\omega_k = k\omega \ \forall k \in \mathbb{N}$:

$$x(t) = f_0 \underbrace{\sin(0\omega t + \varphi_0)}_{\sin(\varphi_0)} + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \cdots + f_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + \cdots + f_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

L'expression de x se réduit à

$$x(t) = \underbrace{f_0 \sin(\varphi_0)}_{a_0} + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \cdots + f_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + \cdots + f_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

Rappelons que :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta), \qquad \forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

Principe (2/2)

Il en résulte que

$$\boxed{\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t)\sin(\varphi) + \sin(\omega t)\cos(\varphi)}$$
$$\boxed{\sin(k\omega t + \varphi_k) = \cos(k\omega t)\sin(\varphi_k) + \sin(k\omega t)\cos(\varphi_k)}$$
$$\boxed{\sin(n\omega t + \varphi_n) = \cos(n\omega t)\sin(\varphi_n) + \sin(n\omega t)\cos(\varphi_n)}$$

On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$f_k \sin(k\omega t + \varphi_k) = \underbrace{f_k \sin(\varphi_k)}_{a_k} \cos(k\omega t) + \underbrace{f_k \cos(\varphi_k)}_{b_k} \sin(k\omega t) = a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

On peut alors décomposer x comme suit :

$$x(t) = a_0 + a_1 cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + \cdots + a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) + \cdots + a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Soit encore

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

On pose $\Phi = \omega t$, une mise à jour de x donne

$$x(\Phi) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\Phi) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\Phi)$$

Résolution

$$\boxed{x(\Phi) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\Phi) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\Phi)}$$

Soit $i,\ j \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi)\, d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi)\, d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi)\sin(j\Phi)\, d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi)\cos(j\Phi)\, d\Phi = \pi \text{ ssi } i = j}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi)\sin(j\Phi) = \pi \text{ ssi } i = j}$$

Résolution

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi)d\Phi = a_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\Phi}_{=2\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(k\Phi)\, d\Phi}_{=0} + b_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(k\Phi)\, d\Phi}_{=0}\right]}$$

Soit $i,\ j \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi)\, d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi)\, d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi)\sin(j\Phi)\, d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi)\cos(j\Phi)\, d\Phi = \pi \text{ ssi } i = j}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi)\sin(j\Phi) = \pi \text{ ssi } i = j}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi)d\Phi = 2\pi a_0}$$

Résolution

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi)\cos(i\Phi)d\Phi = a_0 \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(i\Phi)d\Phi}_{=0} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(k\Phi)\cos(i\Phi)d\Phi}_{=\pi \text{ ssi } (i=k)} + b_k \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(k\Phi)\cos(i\Phi)d\Phi}_{=0}\right]}$$

Soit $i,\ j \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\cos(i\Phi)\,d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\sin(i\Phi)\,d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\cos(i\Phi)\sin(j\Phi)\,d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\cos(i\Phi)\cos(j\Phi)\,d\Phi = \pi \text{ ssi } i = j}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\sin(i\Phi)\sin(j\Phi) = \pi \text{ ssi } i = j}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi)d\Phi = 2\pi a_0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi)\cos(k\Phi)\,d\Phi = \pi a_k}$$

Résolution

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi)\sin(i\Phi)d\Phi = a_0\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(i\Phi)d\Phi}_{=0} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(k\Phi)\sin(i\Phi)d\Phi}_{=0} + b_k\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(k\Phi)\sin(i\Phi)d\Phi}_{=\pi \text{ ssi } (i=k)}\right]}$$

Soit $i,\ j \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\cos(i\Phi)\,d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\sin(i\Phi)\,d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\cos(i\Phi)\sin(j\Phi)\,d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\cos(i\Phi)\cos(j\Phi)\,d\Phi = \pi \text{ ssi } i = j}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\sin(i\Phi)\sin(j\Phi) = \pi \text{ ssi } i = j}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi)d\Phi = 2\pi a_0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi)\cos(k\Phi)\,d\Phi = \pi a_k}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi)\sin(k\Phi)\,d\Phi = \pi b_k}$$

Résolution

$$\boxed{x(\Phi) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\Phi) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\Phi)}$$

Soit $i,\ j \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi)\, d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi)\, d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) \sin(j\Phi)\, d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi) \cos(j\Phi)\, d\Phi = \pi \text{ ssi } i = j}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi) \sin(j\Phi) = \pi \text{ ssi } i = j}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi) d\Phi = 2\pi a_0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi) \cos(k\Phi)\, d\Phi = \pi a_k}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi) \sin(k\Phi)\, d\Phi = \pi b_k}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\Phi) d\Phi} \quad \boxed{a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(\Phi) \cos(k\Phi)\, d\Phi} \quad \boxed{b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(\Phi) \sin(k\Phi)\, d\Phi}$$

Résolution

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\omega t)}$$

Soit $i,\ j \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi)\, d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi)\, d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi)\sin(j\Phi)\, d\Phi = 0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(i\Phi)\cos(j\Phi)\, d\Phi = \pi \text{ ssi } i = j}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sin(i\Phi)\sin(j\Phi) = \pi \text{ ssi } i = j}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi) d\Phi = 2\pi a_0}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi)\cos(k\Phi)\, d\Phi = \pi a_k}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} x(\Phi)\sin(k\Phi)\, d\Phi = \pi b_k}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt} \quad \boxed{a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega t)\, dt} \quad \boxed{b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega t)\, dt}$$

Illustration graphique

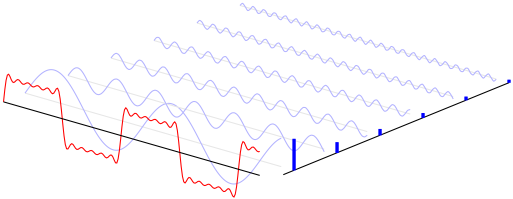
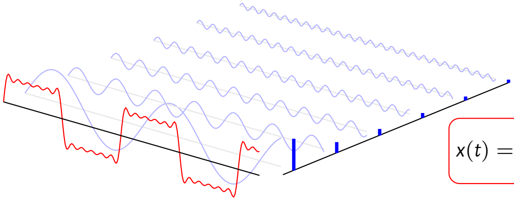
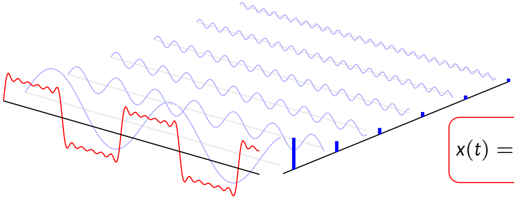


Illustration graphique



$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \cdots\right)$$

Illustration graphique

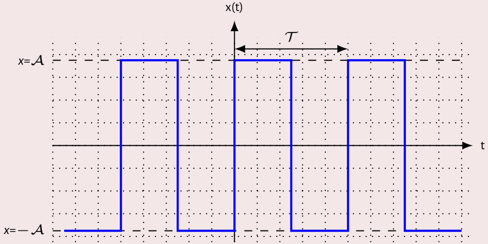


$$\boxed{x(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \cdots\right)}$$

Temps continu	Temps discret
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp^{\jmath k\omega t}$	$x[n] = \sum_{k=\langle \mathrm{N}\rangle} c_k \exp^{\jmath k \frac{2\pi}{\mathrm{N}} n}$
$c_k = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{\mathrm{T}} x(t)\exp^{-\jmath k\omega t}\,dt$	$c_k = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{n=\langle \mathrm{N}\rangle} x[n]\exp^{-\jmath k \frac{2\pi}{\mathrm{N}} n}$

Exercice #9

Calculer la décomposition en série de Fourier d'un signal carré d'amplitude $\mathcal{A}$ et de période $\mathcal{T}$:



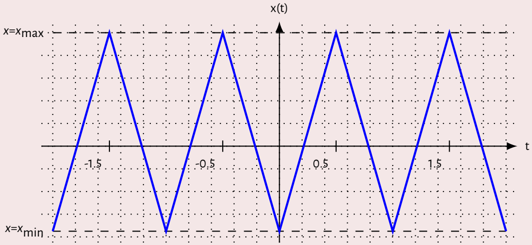
$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{x} + x_{\sim}(t) \\ &= \bar{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) + b_k \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) \right) \end{aligned}$$

- Signal centré p/r à zéro $\longrightarrow \bar{x} = 0$
- Signal impair $\longrightarrow a_k = 0$.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(b_k \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) \right), \quad \text{où} \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^{T} \left\{ 2\mathcal{A}\Gamma_0 - 2\mathcal{A}\Gamma_{\frac{T}{2}} \right\} \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) dt \\ &= \frac{4\mathcal{A}}{k\pi}, \quad \text{pour tout } k \text{ impair.} \end{aligned}$$

Exercice #10

Déterminer la décomposition en série de Fourier de la fonction représentée par le graphique suivant :



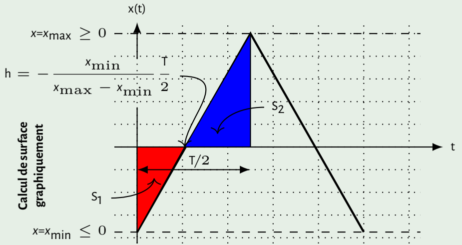
$$
\begin{aligned}
x(t) &= \bar{x} + x_{\sim}(t) \\
&= \bar{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) + b_k \sin\left(2k\pi \frac{t}{T}\right) \right)
\end{aligned}
$$

- Signal **n'est pas** centré p/r à zéro $\longrightarrow \bar{x} \neq 0$
- Signal pair $\longrightarrow b_k = 0$.

Sur une période, le signal x s'écrit comme suit :

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_{\min}\Gamma_0 + 2\frac{x_{\max} - x_{\min}}{\mathsf{T}} \left\{ r_0 - 2r_{\frac{\mathsf{T}}{2}} \right\} \\
&= x_{\min}\Gamma_0 + 2\frac{x_{\max} - x_{\min}}{\mathsf{T}} \left\{ t\Gamma_0 - 2(t - \frac{\mathsf{T}}{2})\Gamma_{\frac{\mathsf{T}}{2}} \right\}
\end{aligned}
$$

La valeur moyenne $\overline{x}$ peut être déterminée par :



$$S = S_1 + S_2$$

$$\boxed{S_1 = x_{min} \frac{h}{2}}$$

$$\boxed{S_2 = x_{max} \left(\frac{\frac{T}{2} - h}{2} \right)}$$

$$S = (x_{max} + x_{min}) \frac{T}{4}$$

Ou encore $\overline{x}$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \\
&= x_{\min} + 2\frac{x_{\max} - x_{\min}}{T^2}\int_0^T \left\{t\Gamma_0 - 2(t-\frac{T}{2})\Gamma_{\frac{T}{2}}\right\} dt \\
&= x_{\min} + 2\frac{x_{\max} - x_{\min}}{T^2}\left\{\int_0^T tdt - 2\int_{T/2}^T tdt + \frac{T^2}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(x_{\max} + x_{\min}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{\sim}(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right)\right), \quad \text{où} \\
a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \left(x_{\min}\Gamma_0 + 2\frac{x_{\max} - x_{\min}}{T}\left\{t\Gamma_0 - 2(t-\frac{T}{2})\Gamma_{\frac{T}{2}}\right\}\right)\cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \frac{2}{\mathsf{T}} x_{\min} \int_0^{\mathsf{T}} \cos\left(2k\pi\frac{t}{\mathsf{T}}\right) dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_2 &= \frac{4}{\mathsf{T}^2}\left(x_{\max} - x_{\min}\right) \int_0^{\mathsf{T}} t\cos\left(2k\pi\frac{t}{\mathsf{T}}\right) dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_3 &= -\frac{8}{\mathsf{T}^2}\left(x_{\max} - x_{\min}\right) \int_{\frac{\mathsf{T}}{2}}^{\mathsf{T}} t\cos\left(2k\pi\frac{t}{\mathsf{T}}\right) dt \\
&= 2\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}\left(x_{\max} - x_{\min}\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_4 &= \frac{4}{T}\left(x_{\max} - x_{\min}\right)\int_{\frac{T}{2}}^{T} \cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) dt \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_1 = 0$$

$$\mathcal{I}_2 = 0$$

$$\mathcal{I}_3 = 2\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}\left(x_{\max} - x_{\min}\right)$$

$$\mathcal{I}_4 = 0$$

$$a_k = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 + \mathcal{I}_4$$

$$a_k = 2\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}\left(x_{\max} - x_{\min}\right)$$

Retour sur la décomposition en SF (1/3)

Repérage dans l'espace & produit scalaire

$$\boxed{\langle \vec{i},\, \vec{j} \rangle \;=\; \langle \vec{i},\, \vec{k} \rangle \;=\; \langle \vec{j},\, \vec{k} \rangle \;=\; 0}$$

$\left(\vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k}\right)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$

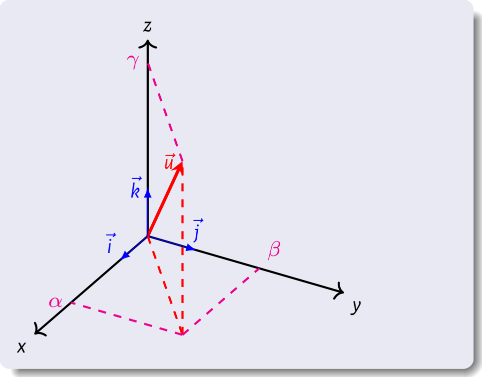
Soit $\vec{u}$ un vecteur dans l'espace

$$\boxed{\vec{u} \;=\; \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}}$$

Abscisse $\boxed{\alpha \;=\; \langle \vec{u},\, \vec{i} \rangle}$

Ordonnée $\boxed{\beta \;=\; \langle \vec{u},\, \vec{j} \rangle}$

Cote $\boxed{\gamma \;=\; \langle \vec{u},\, \vec{k} \rangle}$



$$\vec{u}_1 \;=\; \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 \;=\; \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boxed{\langle \vec{u}_1,\, \vec{u}_2 \rangle \;=\; \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}$$

Retour sur la décomposition en SF $(2/3)$

Cas des fonctions

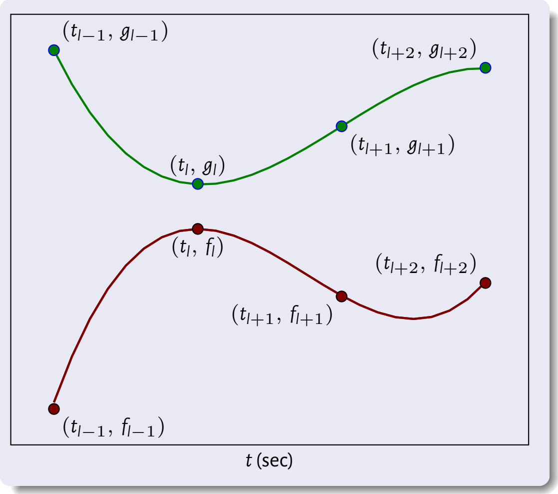
$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle \approx \left(f_{l_0} g_{l_0} + \cdots + f_{l-1} g_{l-1} + f_l g_l + f_{l+1} g_{l+1} + \cdots + f_{l_n} g_{l_n} \right) \Delta t \text{ avec } \Delta t = \frac{t_n - t_0}{n+1}$$

$$\boxed{t_0 = l_0 \Delta t} \qquad \boxed{t_n = l_n \Delta t}$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_{l_0} \\ \vdots \\ f_{l-1} \\ f_l \\ f_{l+1} \\ \vdots \\ f_{l_n} \end{bmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} g_{l_0} \\ \vdots \\ g_{l-1} \\ g_l \\ g_{l+1} \\ \vdots \\ g_{l_n} \end{bmatrix}$$

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle \approx \sum_{l=l_0}^{l_n} f_l g_l \Delta t$$

$$\boxed{\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \int_{t_0}^{t_n} f(t) g(t) dt}$$



La transformée de Fourier

Transformée directe

$$\mathcal{X}(f) = \mathfrak{F}\{x(t)\}$$
$$\mathcal{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp^{-2\jmath\pi f t}\,dt$$

Transformée inverse

$$x(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{\mathcal{X}(f)\}$$
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{X}(f)\exp^{2\jmath\pi f t}\,df$$

Linéarité

$$\boxed{h(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)} \underset{\mathfrak{F}^{-1}}{\overset{\mathfrak{F}}{\Longleftrightarrow}} \boxed{\mathcal{H}(f) = \alpha\mathcal{X}(f) + \beta\mathcal{Y}(f)}$$

Translation

$$\boxed{y(t) = x(t-\tau)} \underset{\mathfrak{F}^{-1}}{\overset{\mathfrak{F}}{\Longleftrightarrow}} \boxed{\mathcal{Y}(f) = \exp^{-2\jmath\pi f\tau}\mathcal{X}(f)}$$

Modulation

$$\boxed{y(t) = \exp^{2\jmath\pi\frac{t}{\tau}} x(t)} \underset{\mathfrak{F}^{-1}}{\overset{\mathfrak{F}}{\Longleftrightarrow}} \boxed{\mathcal{Y}(f) = \mathcal{X}(f-\frac{1}{\tau})}$$

Similitude (Changement d'échelle)

$$\boxed{y(t) = x(\alpha t)} \underset{\mathfrak{F}^{-1}}{\overset{\mathfrak{F}}{\Longleftrightarrow}} \boxed{\mathcal{Y}(f) = \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{X}(\frac{f}{\alpha})} \text{ pour } \alpha > 0$$

Énergie finie

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Puissance

$$\mathcal{P} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{-T/2} |x(t)|^2 dt$$

Théorème de Parseval Plancherel

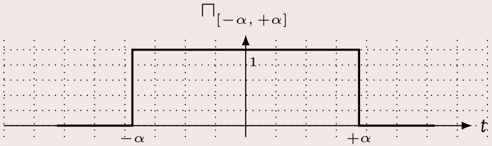
Soit x un signal tel que

$$\mathcal{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp^{-2\jmath\pi f t} dt \Longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{X}(f)|^2 df.$$

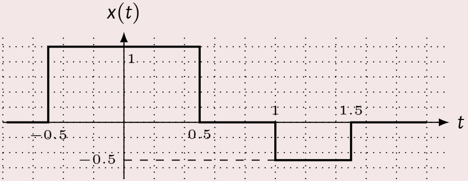
- L'énergie peut se calculer indifféremment dans l'espace du temps ou des fréquences ;
- La quantité $|\mathcal{X}(f)|^2$ dénote la densité spectrale d'énergie. Dans le cas où le signal x est limité dans le temps, on parle de densité spectrale de puissance.

Exercice #11

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $\sqcap_{[-\alpha,\,+\alpha]}$, avec $\alpha > 0$, indiquée par la courbe suivante :



2. En déduire l'expression de la transformée de Fourier de la fonction $x(t)$ donnée par le graphique suivant :



① La transformée de Fourier de $\sqcap_{[-\alpha,\,+\alpha]}(t)$ est :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\left\{\sqcap_{[-\alpha,\,+\alpha]}(t)\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqcap_{[-\alpha,\,+\alpha]}(t)\mathrm{e}^{-2\jmath\pi f\times t}dt \\
&= \int_{-\alpha}^{+\alpha} \mathrm{e}^{-2\jmath\pi f\times t}dt \\
&= -\frac{1}{2\jmath\pi f}\left[\mathrm{e}^{-2\jmath\pi f\times t}\right]_{-\alpha}^{+\alpha} \\
&= -\frac{\mathrm{e}^{-2\jmath\pi\alpha f}-\mathrm{e}^{2\jmath\pi\alpha f}}{2\jmath\pi f} \\
&= \frac{\cancel{2\jmath}\sin(2\pi\alpha f)}{\cancel{2\jmath}\pi f} \\
&= 2\alpha\,\frac{\sin(2\pi\alpha f)}{2\pi\alpha f}.
\end{aligned}$$

Soit encore :

$$\mathfrak{F}\left\{\sqcap_{[-\alpha,\,+\alpha]}(t)\right\} = 2\alpha\,\mathrm{sinc}(2\pi\alpha f).$$

② La fonction $x(t)$ peut s'écrire comme suit :

$$x(t) = \sqcap_{[-0.5,\,+0.5]}(t) - 0.5\,\sqcap_{[-0.25,\,+0.25]}(t-1.25).$$

Sa transformée de Fourier est alors :

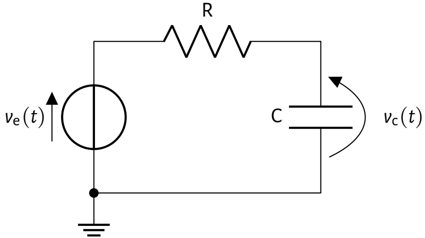
$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\{x(t)\} &= \mathfrak{F}\left\{\sqcap_{[-0.5,\,+0.5]}(t) - 0.5\,\sqcap_{[-0.25,\,+0.25]}(t-1.25)\right\} \\
&= \mathfrak{F}\left\{\sqcap_{[-0.5,\,+0.5]}(t)\right\} - 0.5\,\mathfrak{F}\left\{\sqcap_{[-0.25,\,+0.25]}(t-1.25)\right\} \\
&= \mathfrak{F}\left\{\sqcap_{[-0.5,\,+0.5]}(t)\right\} - 0.5\,\mathrm{e}^{-2\jmath\pi f\times 1.25}\,\mathfrak{F}\left\{\sqcap_{[-0.25,\,+0.25]}(t)\right\} \\
&= 2\times 0.5\,\mathrm{sinc}\,(2\pi f\times 0.5) - 0.5\times 2\times 0.25\,\mathrm{sinc}\,(2\pi f\times 0.25)\,\mathrm{e}^{-2.5\jmath\pi f}.
\end{aligned}$$

Soit encore :

$$\mathfrak{F}\{x(t)\} = \mathrm{sinc}\,(\pi f) - 0.25\,\mathrm{sinc}\,(0.5\pi f)\,\mathrm{e}^{-2.5\jmath\pi f}.$$

En cours...

On se propose d'étudier la mise en cascade d'une résistance R et d'un condensateur C, soumis à une entrée sinusoïdale $v_e(t)$. On s'intéresse à la tension capacitive $v_c(t)$:



On démontre qu'un tel circuit pour un condensateur initialement déchargé, c.-à-d. $v_c(t=0) = 0$, est régi par l'équation différentielle suivante :

$$\tau \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_e(t), \quad \text{avec} \quad v_c(t=0) = 0,$$

où $\tau = 1$ sec désigne la constante de temps du montage.
Sa réponse impulsionnelle est :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \Gamma(t).$$

La transformée de Fourier de h est :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{e}^{-2\jmath\pi ft}dt \\
&= \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\dfrac{t}{\tau}}\Gamma(t)\mathrm{e}^{-2\jmath\pi ft}dt \\
&= \frac{1}{\tau}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\dfrac{t}{\tau}}\mathrm{e}^{-2\jmath\pi ft}dt \\
&= \frac{1}{\tau}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+2\jmath\pi\tau f)\dfrac{t}{\tau}}dt \\
&= \frac{-1}{(1+2\jmath\pi\tau f)}\left[\mathrm{e}^{-(1+2\jmath\pi\tau f)\dfrac{t}{\tau}}\right]_{0}^{+\infty}
\end{aligned}
$$

La transformée de Fourier de h est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{e}^{-2\jmath\pi f t}dt \\
&= \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\dfrac{t}{\tau}}\Gamma(t)\mathrm{e}^{-2\jmath\pi f t}dt \\
&= \frac{1}{\tau}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\dfrac{t}{\tau}}\mathrm{e}^{-2\jmath\pi f t}dt \\
&= \frac{1}{\tau}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+2\jmath\pi\tau f)\dfrac{t}{\tau}}dt \\
&= \frac{-1}{(1+2\jmath\pi\tau f)}\left[\mathrm{e}^{-(1+2\jmath\pi\tau f)\dfrac{t}{\tau}}\right]_{0}^{+\infty}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{H}(f) = \frac{1}{1+2\jmath\pi\tau f}}$$

La transformée de Fourier de h est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{e}^{-2\jmath\pi ft}dt \\
&= \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\dfrac{t}{\tau}}\Gamma(t)\mathrm{e}^{-2\jmath\pi ft}dt \\
&= \frac{1}{\tau}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\dfrac{t}{\tau}}\mathrm{e}^{-2\jmath\pi ft}dt \\
&= \frac{1}{\tau}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+2\jmath\pi\tau f)\dfrac{t}{\tau}}dt \\
&= \frac{-1}{(1+2\jmath\pi\tau f)}\left[\mathrm{e}^{-(1+2\jmath\pi\tau f)\dfrac{t}{\tau}}\right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{H}(f) = \frac{1}{1+2\jmath\pi\tau f}} \qquad \boxed{|\mathcal{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2\tau^2 f^2}}} \qquad \boxed{\angle\mathcal{H}(f) = -\arctan(2\pi\tau f)}$$

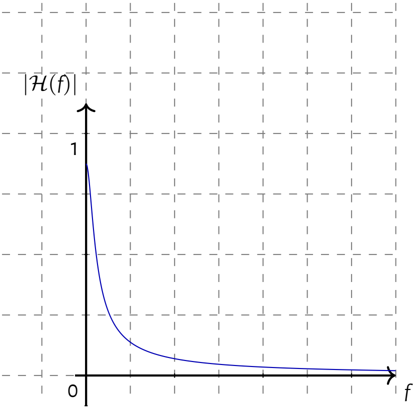
$$\lim_{f\to 0} |\mathcal{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2\tau^2 0^2}} = 1$$

$$\left|\mathcal{H}(f=\frac{1}{2\pi\tau})\right| = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2\tau^2\left(\frac{1}{2\pi\tau}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{f\to\infty} |\mathcal{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2\tau^2 f^2}}_{|f\to\infty} = 0$$

Lorsque la fréquence augmente, une plus grande partie de la puissance est transférée vers la masse et la tension de sortie diminue progressivement.

$$|\mathcal{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2\tau^2 f^2}}$$



Le circuit proposé laisse passer les fréquences basses et atténue les fréquences hautes.

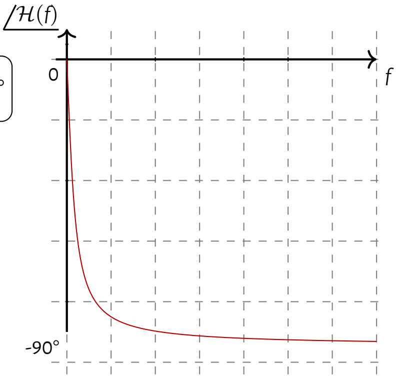
$$\boxed{\lim_{f\to 0} \underline{/\mathcal{H}(f)} = -\arctan(2\pi\tau 0) = 0}$$

$$\boxed{\underline{/\mathcal{H}\left(f = \frac{1}{2\pi\tau}\right)} = -\arctan\left(2\pi\tau\frac{1}{2\pi\tau}\right) = -45°}$$

$$\boxed{\lim_{f\to\infty} |\mathcal{H}(f)| = -\arctan(2\pi\tau f)_{|f\to\infty} = -90°}$$

L'impédance complexe du condensateur $\dfrac{1}{2\jmath\pi fC}$ présente un argument nul aux fréquences les plus basses. La tension v_c à ses bornes est alors en phase avec la tension d'entrée v_e.

$$\boxed{\underline{/\mathcal{H}(f)} = -\arctan(2\pi\tau f)}$$



Soit le gain $\mathcal{G}$ (dB) qui se définit par :

$$\mathcal{G}\ (\text{dB}) \;=\; 20\log_{10}\left(|\mathcal{H}(f)|\right)$$

Rappelons l'expression de $|\mathcal{H}(f)|$:

$$|\mathcal{H}(f)| \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2\tau^2 f^2}}$$

Nous pouvons simplifier davantage l'expression de $\mathcal{G}$ (dB) :

$$\mathcal{G}\ (\text{dB}) \;=\; -10\log_{10}\left(1+4\pi^2\tau^2 f^2\right)$$

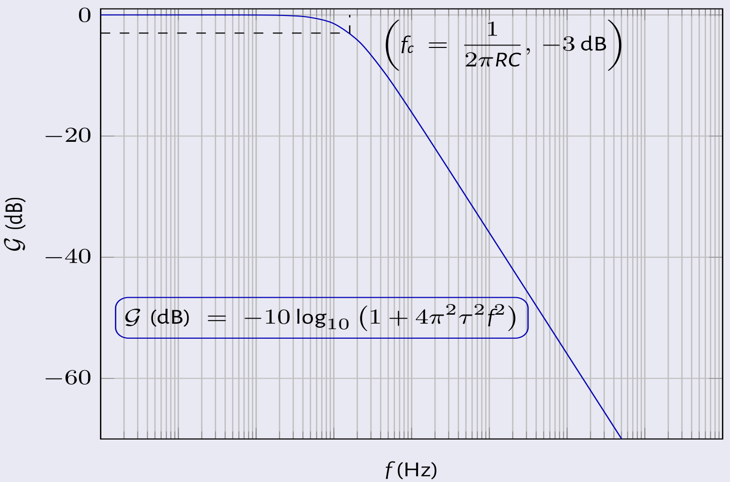
Considérations asymptotiques

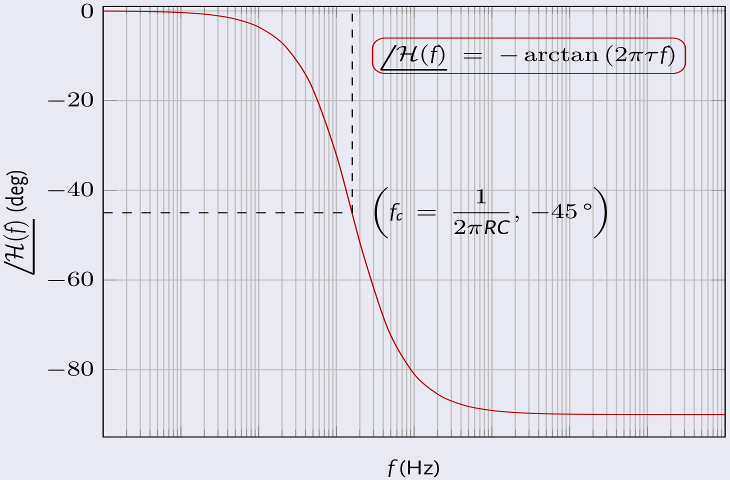
$$\boxed{\mathcal{G}\ (\text{dB})_{|f=0} \;=\; 0}$$

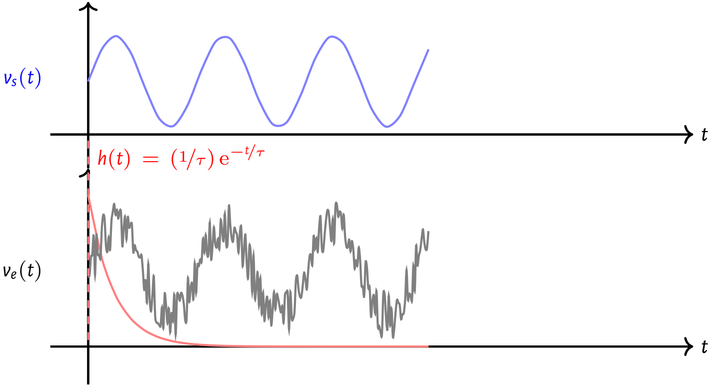
$$\boxed{\mathcal{G}\ (\text{dB})_{|f=\frac{1}{2\pi\tau}} \;=\; -10\log_{10}(2) \;=\; -3}$$

$$\boxed{\lim_{f\to\infty} \mathcal{G}\ (\text{dB}) \;\sim\; -20\log_{10}(2\pi\tau f)}$$

On désigne par f_c la fréquence de coupure du circuit, soit encore $f_c = \dfrac{1}{2\pi RC}$.




0
−20
−40
−60
−80
$\underline{/\mathcal{H}(f)}$ (deg)
$\underline{/\mathcal{H}(f)} = -\arctan(2\pi\tau f)$
$\left(f_c = \frac{1}{2\pi RC}, -45\,°\right)$
f (Hz)



$$v_s(t) = \int_0^t v_e(\varsigma) h(t-\varsigma) d\varsigma$$

Exercice #12

La réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un filtre passe-bas est donnée par :

$$h(t) = \mathrm{e}^{-t}\,\Gamma(t).$$

Sa transformée de Fourier est :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f) &= \mathfrak{F}\{h(t)\},\\ &= \frac{1}{1+2\jmath\pi f}.\end{aligned}$$

Le module et l'argument de $\mathcal{H}(f)$ sont donnés respectivement par :

$$|\mathcal{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2 f^2}}, \qquad \angle\mathcal{H}(f) = -\arctan(2\pi f).$$

Calculer la réponse $y(t)$ du système $h(t)$ suite à l'application de l'entrée

$$u(t) = \cos(4\pi t) - 0.5\sin(0.5t).$$

L'entrée $u(t)$ est :

$$u(t) = \cos(2\pi f_1 t) - 0.5\sin(2\pi f_2 t),$$

avec $f_1 = 2$ Hz et $f_2 \approx 80$ mHz. La sortie $y(t)$ sera calculée comme suit :

$$y(t) = |\mathcal{H}(f_1)|\cos\left(2\pi f_1 t + \angle\mathcal{H}(f_1)\right) - 0.5\,|\mathcal{H}(f_2)|\sin\left(2\pi f_2 t + \angle\mathcal{H}(f_2)\right),$$

avec :

$\lvert\mathcal{H}(f_1)\rvert \approx 0.08$	$\lvert\mathcal{H}(f_2)\rvert \approx 0.89$
$\angle\mathcal{H}(f_1) \approx -1.491$ rad	$\angle\mathcal{H}(f_2) \approx -0.465$ rad.

$$y(t) = 0.08\cos(4\pi t - 1.491\text{ rad}) - 0.445\sin(0.5t - 0.465\text{ rad}).$$

Exercice #13

Considérons un système linéaire et invariant dans le temps décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 4y = 5\frac{du}{dt} - 3u.$$

1. Identifier l'entrée et la sortie ;
2. Calculer la réponse en fréquence de ce système qu'on dénote par $\mathcal{H}(f)$:

$$\mathcal{H}(f) = \frac{\mathcal{Y}(f)}{\mathcal{U}(f)},$$

$$\text{où} \quad \mathcal{Y}(f) = \mathfrak{F}\{y(t)\} \qquad \& \qquad \mathcal{U}(f) = \mathfrak{F}\{u(t)\}$$

3. Calculer son module et sa phase ;
4. Calculer la réponse de ce système soumis à une entrée $u(t) = \cos(3t)$;
5. Calculer la transformée de Fourier de la sortie de ce système soumis à une entrée échelon d'amplitude 2 [a].

[a] $\mathfrak{F}\{\Gamma(t)\} = (1/2)\left(\delta(f) - \frac{\jmath}{\pi f}\right)$

① L'entrée et la sortie sont respectivement u et y ;

② L'opérateur $\jmath\omega = 2\jmath\pi f$ permet de représenter l'action dérivée dans le domaine fréquentiel. L'équation différentielle devient alors :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 4y\right\} &= \mathfrak{F}\left\{5\frac{du}{dt} - 3u\right\} \\
(\jmath\omega)^2\mathcal{Y}(f) + 5\jmath\omega\mathcal{Y}(f) + 4\mathcal{Y}(f) &= 5\jmath\omega\mathcal{U}(f) - 3\mathcal{U}(f) \\
\left\{5\jmath\omega + 4 - \omega^2\right\}\mathcal{Y}(f) &= \left\{5\jmath\omega - 3\right\}\mathcal{U}(f) \\
\left\{10\jmath\pi f + 4 - 4\pi^2 f^2\right\}\mathcal{Y}(f) &= \left\{10\jmath\pi f - 3\right\}\mathcal{U}(f)
\end{aligned}$$

La fonction $\mathcal{H}$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(f) &= \frac{\mathcal{Y}(f)}{\mathcal{U}(f)} \\
&= \frac{10\jmath\pi f - 3}{10\jmath\pi f + 4\left(1 - \pi^2 f^2\right)}
\end{aligned}$$

③ Module & argument

$$|\mathcal{H}(f)| = \sqrt{\frac{100\pi^2 f^2 + 9}{100\pi^2 f^2 + 16\left(1 - \pi^2 f^2\right)^2}}$$

$$\underline{/\mathcal{H}(f)} = -\arctan\left(\frac{10}{3}\pi f\right) - \arctan\left(\frac{10}{4}\frac{\pi f}{1 - \pi^2 f^2}\right)$$

④ $2\pi f = 3$ rad/sec $\Rightarrow$ $\pi f = 3/2$ rad/sec

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}(f)| &= \sqrt{\frac{100\frac{9}{4} + 9}{100\frac{9}{4} + 16\left(1 - \frac{9}{4}\right)^2}} \\ &= 0.967 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{/\mathcal{H}(f)} &= -\arctan\left(\frac{10}{3}\frac{3}{2}\right) - \arctan\left(\frac{10}{4}\frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{4}}\right) \\ &= -0.12 \text{ rad} \end{aligned}$$

La sortie y est alors:

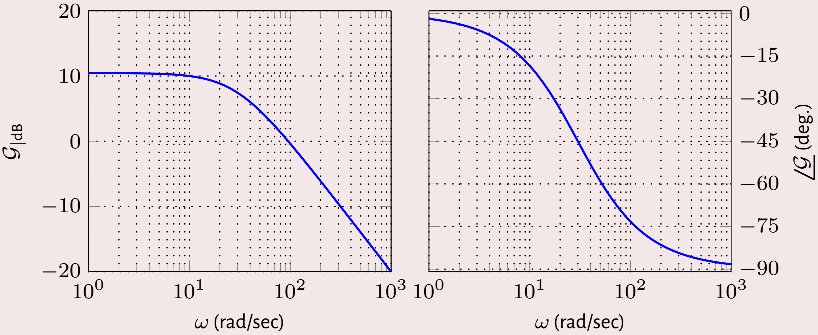
$$y(t) \quad = \quad 0.967\cos\left(3t - 0.12\right).$$

⑤ La transformée de Fourier de la sortie y est

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}(f) &= \mathfrak{F}\left\{y(t)\right\} \\
&= \mathfrak{F}\left\{h(t) * u(t)\right\} \\
&= \mathfrak{F}\left\{h(t)\right\} \times \mathfrak{F}\left\{u(t)\right\} \\
&= \mathcal{H}(f) \times \mathcal{U}(f) \\
&= \frac{10\jmath\pi f - 3}{10\jmath\pi f + 4\left(1 - \pi^2 f^2\right)}\left(\delta(f) - \frac{\jmath}{\pi f}\right) \\
&= -\frac{3}{4}\delta(f) - \frac{10\jmath\pi f - 3}{10\jmath\pi f + 4\left(1 - \pi^2 f^2\right)}\frac{\jmath}{\pi f}
\end{aligned}$$

Exercice #14

Le diagramme de Bode d'un système de fonction de transfert $\mathcal{G}$, d'entrée u et de sortie y est indiqué sur la figure suivante :



1. Soit une entrée $u(t) = 1.5\cos(8t - 30°)$, déterminez l'expression de la sortie y ;
2. Pour une sortie $y(t) = 0.5\sin(100t + 15°)$, déterminez l'expression de l'entrée u.

Soit une entrée $u(t) = 1.5\cos(8t - 30°)$, déterminez l'expression de la sortie y.

$$\omega = 8\text{rad/sec} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{G}_{|\text{dB}} = 20\log\left(\dfrac{A_y}{A_u}\right) = 10 \\ \underline{/\mathcal{G}} = \varphi_y - \varphi_u = -15° \end{cases}$$

soit encore :

$$\begin{cases} A_y = A_u \times 10^{\left(\dfrac{\mathcal{G}_{|\text{dB}}}{20}\right)} = 1.5 \times 10^{\left(\dfrac{10}{20}\right)} \approx 4.744 \\ \varphi_y = \varphi_u + \underline{/\mathcal{G}} = -30 - 15 = -45° \end{cases}$$

Finalement :

$$y(t) \approx 4.744\cos(8t - 45°)$$

Pour une sortie $y(t) = 0.5\sin(100t + 15°)$, déterminez l'expression de l'entrée u.

$$\omega = 100\text{rad/sec} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{G}_{|\text{dB}} = 20\log\left(\dfrac{A_y}{A_u}\right) = 0 \\ \underline{/\mathcal{G}} = \varphi_y - \varphi_u = -75° \end{cases}$$

Un gain en dB nul est équivalent à un rapport d'amplification unitaire. Sans faire du calcul, on peut dire directement $A_u = A_y = 0.5$.

Ou encore :

$$\begin{cases} A_u = \dfrac{A_y}{10^{\left(\frac{\mathcal{G}_{|\text{dB}}}{20}\right)}} = \dfrac{0.5}{10^{\left(\frac{0}{20}\right)}} = 0.5 \\ \varphi_u = \varphi_y - \underline{/\mathcal{G}} = 15 - (-75) = 90° \end{cases}$$

Finalement :

$$u(t) = 0.5\sin(100t + 90°)$$

Lectures complémentaires

R. N. Bracewell. *The Fourier Transform & Its Applications*. McGraw-Hill Science/Engineerin, 1999.

J. F. James. *A Student's Guide to Fourier Transforms: With Applications in Physics and Engineering (Student's Guides)*. Cambridge University Press, 2011.

S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume III: Practical Algorithm Development (Prentice-Hall Signal Processing Series)*. Prentice Hall, 2013.

H. L. V. Trees. *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I (Pt. 1)*. Wiley-Interscience, 2001.

J. Unpingco. *Python for Signal Processing: Featuring IPython Notebooks*. Springer, 2013.

R. Yamashita et al. "Convolutional neural networks: an overview and application in radiology". In: *Insights into Imaging* 9.4 (Aug. 2018), pp. 611–629. DOI: 10.1007/s13244-018-0639-9.