AU : 2022-2023		**Nom & Prénom :**	....
L2-S3 : Dép. GE (EI)		**CIN :**	....
DS | Modélisation des Systèmes		**Classe :**	**EI2** ....
05/01/23 (11:00→12:30)		**Salle :**	....
Enseignant : A. Mhamdi		**Durée :**	**$1\frac{1}{2}$ h**

✂- -

Ce document comporte **6** pages numérotées de **1/6** à **6/6**. Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Les **3** exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre qui vous convient.

Les règles suivantes s'appliquent :

❶ **L'usage** de tout matériel électronique, sauf calculatrice, est strictement interdit.

❷ **Toute trace** de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

❸ **Si l'espace** est insuffisant, veuillez continuer au verso ou annexer une feuille supplémentaire.

Ne rien écrire dans ce tableau.

Exercice	Barème	Note
1	4	
2	7	
3	9	
Total	20	

Exercice N°1

⌛ 20mn | (4 points)

Proposez une représentation d'état possible pour chacune des descriptions suivantes :

(a) (2 points)

$$y^{(2)}(t) = -u(t) \quad (1)$$

L'équation différentielle est de second ordre. On en déduit les variables d'état suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = y & \Longrightarrow & \dot{x}_1 = y^{(1)} = x_2 \\ x_2 = y^{(1)} & \Longrightarrow & \dot{x}_2 = y^{(2)} = -u \end{cases}$$

L'équation d'état sera donnée alors par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \quad (2)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

(b) (2 points)

$$y^{(2)}(t) + y(t) = u^{(1)}(t) - u(t) \quad (4)$$

L'équation différentielle est de second ordre. On propose les variables d'état suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = y & \Longrightarrow & \dot{x}_1 = y^{(1)} = x_2 + u \\ x_2 = y^{(1)} - u & \Longrightarrow & \dot{x}_2 = y^{(2)} - u^{(1)} = -x_1 - u \end{cases}$$

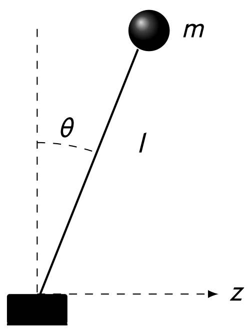
L'équation d'état sera donnée alors par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \quad (5)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Exercice N°2 ⌛ 35mn | (7 points)

Un pendule inversé de masse m est fixé au bout d'une tige rigide de longueur l (sans masse) *(masse m vers le haut, tige vers le bas)*. L'autre extrémité de la tige est fixée sur une table vibrante horizontalement. θ est l'angle fait avec la verticale.



On se propose de stabiliser cette structure (dans un plan) autour de son équilibre instable. La commande u est l'accélération horizontale z de la table inférieure, qui se déplace le long d'une droite et a pour abscisse z.

La dynamique est donnée par :

$$l\theta^{(2)} = g\sin(\theta) - \cos(\theta)u(t) \tag{7}$$

où g dénote l'accélération de la pesanteur. Nous prenons les variables d'état suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \theta^{(1)} \end{cases}$$

(a) (1 point) Donnez l'expression de $\dot{x}_1 = \mathcal{F}_1(x_1, x_2, u)$.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

(b) (1 point) Donnez l'expression de $\dot{x}_2 = \mathcal{F}_2(x_1, x_2, u)$.

$$\dot{x}_2 = \frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{1}{l}\cos(x_1)\,u(t)$$

(c) (1 point) Vérifiez que $\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\overline{u} = 0$ est un point d'équilibre.

Les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ s'annulent quand $x = \overline{x}$ et $u = \overline{u}$:

$$\mathcal{F}_1(\overline{x},\, \overline{u}) = 0, \qquad \mathcal{F}_2(\overline{x},\, \overline{u}) = 0.$$

(d) (3 points) Linéarisez ce système autour de ce point.

On cherche d'abord les dérivées partielles de $\mathcal{F}_2$ par rapport aux variables x_1, x_2 & u :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1} = \dfrac{g}{l}\cos(x_1) + \dfrac{1}{l}\sin(x_1)\, u(t) \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial u} = -\dfrac{1}{l}\cos(x_1) \end{cases}$$

Autour du point de fonctionnement, ces quantités se réduisent à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1}_{\,|\,(\overline{x},\overline{u})} = \dfrac{g}{l} \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2}_{\,|\,(\overline{x},\overline{u})} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial u}_{\,|\,(\overline{x},\overline{u})} = -\dfrac{1}{l} \end{cases}$$

La représentation d'état linéarisée est :

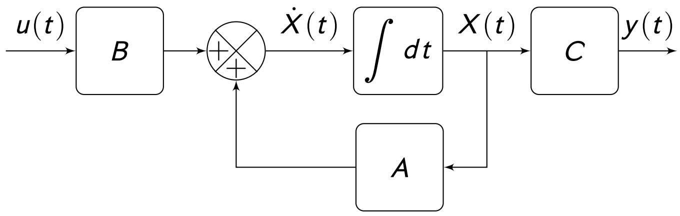
$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{l} \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t)$$

AU : 2022-2023 **Nom & Prénom :** ....
L2-S3 : Dép. GE (EI) **CIN :** ....
DS | Modélisation des Systèmes **Classe : EI2**..................
05/01/23 (11:00→12:30) **Salle :** ....
Enseignant : A. Mhamdi **Durée : $1^1/_2$ h**

✂- -

(e) (1 point) Rappelez le schéma bloc de la représentation d'état linéarisée.



Exercice N°3 ⌛ 35mn | (9 points)

Soit la représentation d'état suivante :

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned} \qquad (8)
$$

(a) (2 points) Étudiez la stabilité du système.

Le système est de 2^{nd} ordre. On dénote par s_1 et s_2 ses deux pôles. Nous avons alors : $\det(A) = 1 = s_1 s_2 > 0$ & $\mathrm{trace}(A) = -2 = s_1 + s_2 < 0$. Les deux racines sont à parties réelles négatives → Ce système est stable.

(b) (2 points) Étudiez la commandabilité du système.

La matrice de commandabilité est donnée par :

$$
\begin{aligned}
\xi(A,\ B) &= \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Rang de $\xi(A,\ B)$ est égal à 2 → Ce système est complètement commandable.

(c) Afin d'améliorer la dynamique de ce système, nous concevons une commande

NE RIEN ÉCRIRE DANS CETTE ZONE

par retour d'état de la forme :

$$u(t) = l y^c(t) - Lx(t) \tag{9}$$

y^c est la consigne de référence.

i. (3 points) Calculez L afin de garantir une dynamique en boucle fermée caractérisée par la valeur propre double suivante : $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

$$A - BL = A - B\underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}}_{L}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 - l_1 & 1 - l_2 \\ -l_1 & -1 - l_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{trace}(A - BL) = -2 - l_1 - l_2 = -4 \\ \det(A - BL) = 1 + 2l_1 + l_2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l_1 = 1 \\ l_2 = 1 \end{cases}$$

CORRECTION

ii. (2 points) Calculez la valeur du gain l qui annule l'erreur statique de position.

Le précompensateur est défini par :

$$l = \frac{-1}{C(A-BL)^{-1}B} = \frac{-1}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = 3/4 = 0.75$$