AU : 2020-2021 **Nom & Prénom :** ____________

Session de rattrapage **CIN :** ____________

Systèmes Multivariables **Classe :** 3CEM-MÉCA____________

08/04/21 **Salle :** ____________

Enseignant : A. Mhamdi **Durée :** 1½ h

✂- -

Ce document comporte **7** pages numérotées de **1/7** à **7/7**. Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Le sujet est constitué de **3** exercices qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Les règles suivantes s'appliquent :

❶ **Une feuille A4** recto-verso manuscrite est autorisée.

❷ **L'usage** de tout matériel électronique, sauf calculatrice, est strictement interdit.

❸ **La rigueur** de la rédaction entrera pour une part importante dans la notation.

Ne rien écrire dans ce tableau.

Exercice	Barème	Note
1	8	
2	7	
3	5	
Total	20	

CORRECTION

Exercice N°1 (8 points)

Déterminez la fonction de transfert pour chacune des représentations d'état suivantes :

(a) (2 points)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (2)$$

C'est la forme observable. La fonction de transfert est donc :

$$G_1(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

(b) (2 points)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{3}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + 0.5\, u(t) \tag{4}$$

C'est la forme commandable. La fonction de transfert s'écrit :

$$G_2(s) = 0.5 - \frac{s^2}{s^3 - s^2 + 1}$$

(c) (2 points)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{5}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0.25 & 1 \end{bmatrix} x(t) \tag{6}$$

C'est la forme modale. La fonction de transfert est alors :

$$G_3(s) = \frac{-1}{s-1} + \frac{0.25}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$

(d) (2 points)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{7}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \tag{8}$$

La fonction de transfert se calcule comme suit :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_4(s) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \left(s\mathbb{I}_2 - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \right)^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^2} \\
\mathcal{G}_4(s) &= \frac{2s-3}{s^2-3}
\end{aligned}
$$

Exercice N$^{\underline{o}}$2 (7 points)

Soit la représentation d'état suivante :

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

(a) (1 point) Étudiez la stabilité du système.

Le système est de 2^{nd} ordre. On dénote par s_1 et s_2 ses deux pôles. Nous avons alors : $\det(A) = 1 = s_1 s_2 > 0$ & $\text{trace}(A) = -2 = s_1 + s_2 < 0$. Les deux racines sont à parties réelles négatives $\longrightarrow$ Ce système est stable.

(b) (1 point) Étudiez la commandabilité du système.

La matrice de commandabilité est donnée par :

$$\begin{aligned}\xi(A,\ B) &= \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Rang de $\xi(A,\ B)$ est égal à 2 $\longrightarrow$ Ce système est complètement commandable.

(c) (2 points) Afin d'améliorer la dynamique de ce système, nous concevons une commande par retour d'état, en régime libre, de la forme :

$$u(t) = -Lx(t) \tag{10}$$

Calculez L afin de garantir une dynamique en boucle fermée caractérisée par la valeur propre double suivante : $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

$$\begin{aligned}A - BL &= A - B\underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}}_{L} \\ &= \begin{bmatrix} -1 - l_1 & 1 - l_2 \\ -l_1 & -1 - l_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mathrm{trace}(A - BL) = -2 - l_1 - l_2 = -4 \\ \det(A - BL) = 1 + 2l_1 + l_2 = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} l_1 = 1 \\ l_2 = 1 \end{cases}$$

(d) (1 point) Étudiez l'observabilité du système.

La matrice d'observabilité est donnée par :

$$\mathcal{O}(A,\ C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

École Supérieure PRivée d'Ingénierie & de Technologies

AU : 2020-2021		**Nom & Prénom :**	______________
Session de rattrapage		**CIN :**	______________
Systèmes Multivariables		**Classe :**	3CEM-MÉCA______
08/04/21		**Salle :**	______________
Enseignant : A. Mhamdi		**Durée :**	**1½ h**

✂- -

Rang de $O(A,\ C)$ est égal à $2 \longrightarrow$ Système observable

(e) (2 points) L'état x n'est pas mesurable. Synthétisez un observateur de `Luenberger` qui permet de délivrer une valeur approchée $\hat{x}$ de x, caractérisé par une dynamique double placée en -4.

Rappelons la définition de l'estimateur de `Luenberger` :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu(t) + K\left(y(t) - C\hat{x}(t)\right)\\ &= (A - KC)\,\hat{x} + Bu(t) + Ky(t)\end{aligned}$$

La matrice d'état de cet observateur est :

$$\begin{aligned}A - KC &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} -1-k_1 & 1-k_1 \\ -k_2 & -1-k_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

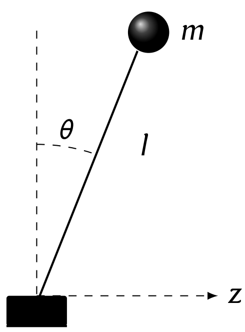
Finalement, nous obtenons :

$$\begin{cases} \mathrm{trace}(A-KC) = -2-k_1-k_2 = -8 \\ \det(A-KC) = 1+k_1+2k_2 = 16 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_1 = -3 \\ k_2 = 9 \end{cases}$$

Exercice N°3 (5 points)

Un pendule inversé de masse m est fixé au bout d'une tige rigide de longueur l (sans masse) *(masse m vers le haut, tige vers le bas)*. L'autre extrémité de la tige est fixée sur une table vibrante horizontalement. θ est l'angle fait avec la verticale.

On se propose de stabiliser cette structure (dans un plan) autour de son équilibre instable. La commande u est l'accélération horizontale z de la table inférieure, qui se déplace le long d'une droite et a pour abscisse z.



La dynamique est donnée par :

$$ml\theta^{(2)} = mg\sin(\theta) - m\cos(\theta)u(t) \tag{11}$$

avec g dénote l'accélération de la pesanteur. On prend les variables d'état suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \theta^{(1)} \end{cases}$$

(a) (1 point) Donnez l'expression de $\dot{x}_1 = \mathcal{F}_1(x_1, x_2, u)$.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

(b) (1 point) Donnez l'expression de $\dot{x}_2 = \mathcal{F}_2(x_1, x_2, u)$.

$$\dot{x}_2 = \frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{1}{l}\cos(x_1)\,u(t)$$

(c) (2 points) Linéarisez ce système autour de l'équilibre $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\bar{u} = 0$.

On cherche d'abord les dérivées partielles de $\mathcal{F}_2$ par rapport aux variables x_1, x_2 & u :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1} = \dfrac{g}{l}\cos(x_1) + \dfrac{1}{l}\sin(x_1)\,u(t) \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial u} = -\dfrac{1}{l}\cos(x_1) \end{cases}$$

Autour du point de fonctionnement, ces quantités se réduisent à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1}_{|(\bar{x},\bar{u})} & = \dfrac{g}{l} \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2}_{|(\bar{x},\bar{u})} & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial u}_{|(\bar{x},\bar{u})} & = -\dfrac{1}{l} \end{cases}$$

La représentation d'état linéarisée est :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{l} \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t) \end{aligned}$$

(d) (1 point) Peut-on ramener à zéro tout état non nul du système linéarisé ? Justifiez votre réponse.

La matrice de commandabilité du système linéarisé est donnée par :

$$\begin{aligned} \xi(A,\ B) &= \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{l} \\ -\dfrac{1}{l} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rang de $\xi(A,\ B)$ est égal à $2 \longrightarrow$ Ce système est complètement commandable. On peut ramener à zéro et en temps fini tout état initial de ce système linéarisé.