École Supérieure PRivée d'Ingénierie & de Technologies

AU : 2020-2021		**Nom & Prénom :**	
Session principale		**CIN :**	
Systèmes Multivariables		**Classe :**	3CEM-MÉCA
22/03/21		**Salle :**	
Enseignant : A. Mhamdi		**Durée :**	**1½ h**

✂- -

Ce document comporte **7** pages numérotées de **1/7** à **7/7**. Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Le sujet est constitué de **4** exercices qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Les règles suivantes s'appliquent :

❶ **Une feuille A4** recto-verso manuscrite est autorisée.

❷ **L'usage** de tout matériel électronique, sauf calculatrice, est strictement interdit.

❸ **La rigueur** de la rédaction entrera pour une part importante dans la notation.

Ne rien écrire dans ce tableau.

Exercice	Barème	Note
1	6	
2	4	
3	4	
4	6	
Total	20	

Exercice N°1 (6 points)

Proposez une représentation d'état possible pour chacune des fonctions de transfert suivantes :

(a) (2 points)

$$G_1(s) = \frac{3s+1}{0.5s^2+0.5} \tag{1}$$

La fonction de transfert G_1 peut s'écrire sous cette forme :

$$G_1(s) = \frac{6s+2}{s^2+1}$$

Il en résulte la forme commandable suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

(b) (2 points)

$$\mathcal{G}_2(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{0.3}{(s+1)^3} + \frac{1.45}{s} - \frac{0.5}{(s-1)^2} \tag{2}$$

L'ordre de la fonction de transfert $\mathcal{G}_2$ est : $6 = 3+1+2$. Ses pôles sont :

Pôle	*Ordre de multiplicité*
-1	3
0	1
1	2

Il en résulte la forme modale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.3 & 1.45 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

(c) (2 points)

$$\mathcal{G}_3(s) = \frac{s^2+s+1}{0.25s^2+s+0.5} \tag{3}$$

La fonction de transfert $\mathcal{G}_3$ peut s'écrire sous cette forme :

$$\mathcal{G}_3(s) = 4 - \frac{12s+4}{s^2+4s+2}$$

Il en résulte la forme commandable suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -4 & -12 \end{bmatrix} \quad D = 4$$

Exercice N°2 (4 points)

Soit la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{4}$$

(a) (1 point) Étudiez la stabilité du système.

$\det(A) = -1$ & $\mathrm{trace}(A) = -3 \longrightarrow$ Système instable.

(b) (1 point) Étudiez la commandabilité du système.

$$\begin{aligned} \xi(A,\ B) &= \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rang de $\xi(A,\ B)$ est égal à $2 \longrightarrow$ Système commandable

(c) (2 points) Afin de stabiliser le système et améliorer sa dynamique, nous concevons une commande par retour d'état en régime libre de la forme :

$$u(t) = -Lx(t). \tag{5}$$

Calculez L de sorte que les valeurs propres du système bouclé soient placées aux valeurs suivantes : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -2$.

$$A - BL = A - B\underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}}_{L} = \begin{bmatrix} -3 - l_1 & 1 - l_2 \\ 1 - l_1 & -l_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathrm{trace}(A - BL) = -3 - l_1 - l_2 = -3 \\ \det(A - BL) = 4l_2 + l_1 - 1 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l_1 = -1 \\ l_2 = 1 \end{cases}$$

Exercice N°3 (4 points)

On considère le système suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{6}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \tag{7}$$

(a) (1 point) Ce système est-il stable ? Justifiez.

$$\begin{cases} \mathrm{trace}(A) = -5 \\ \det(A) = 6 \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 \underbrace{+5}_{-\mathrm{trace}(A)} \lambda \underbrace{+6}_{+\det(A)} = (\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

Les deux pôles de A sont alors -2 et -3. Le système est donc stable puisque les deux racines sont à parties réelles négatives.

(b) (1 point) Étudiez l'observabilité du système.

$$\mathcal{O}(A,\ C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Rang de $\mathcal{O}(A,\ C)$ est égal à $-1 \neq 0 \rightarrow$ Système observable

Un système dans sa forme d'état observable est toujours observable.

(c) (2 points) L'état x n'est pas mesurable. Synthétisez un observateur de type `Luenberger` qui permet de délivrer une valeur approchée $\hat{x}$ de x, caractérisé par une dynamique double placée en -5.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu(t) + K\left(y(t) - C\hat{x}(t)\right) \\ &= \left(A - KC\right)\hat{x} + Bu(t) + Ky(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - KC &= \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -6 - k_1 \\ 1 & -5 - k_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \mathrm{trace}(A - KC) & = & -5 - k_2 & = & -10 \\ \det(A - KC) & = & 6 + k_1 & = & 25 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} k_1 & = & 19 \\ k_2 & = & 5 \end{array} \right.$$

Exercice N°4 (6 points)

On considère le système décrit par la fonction de transfert suivante :

$$\mathcal{H}(s) = \frac{s + 10}{s(s+\alpha)(s+\beta)}, \tag{8}$$

où α et β sont deux paramètres réels non nuls ($\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$).

(a) (1 point) Déterminez les pôles de $\mathcal{H}$. Que dire de la stabilité du système ? Justifiez.

Les pôles de la fonction $\mathcal{H}$ sont 0, $-\alpha$ et $-\beta$.

$$\begin{cases} \alpha < 0 \text{ ou } \beta < 0 & \text{Le système est instable.} \\ \alpha \geq 0 \text{ et } \beta \geq 0 & \text{Le système est à la limite de stabilité.} \end{cases}$$

(b) (2 points) Retrouvez la représentation d'état sous la forme canonique de commandabilité.

Il faut développer la fonction $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}(s) = \frac{s + 10}{s^3 + (\alpha + \beta)s^2 + \alpha\beta s}$$

Il en résulte la forme commandable suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha\beta & -\alpha - \beta \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

(c) ($1\frac{1}{2}$ points) Le système mis en équation d'état est-il commandable ? Justifiez.

La forme canonique de commandabilité est toujours commandable. Pour vérifier, il suffit de calculer le rang de la matrice de commandabilité. Elle est donnée par $\xi(A, B) = \left[B \,|\, AB \,|\, A^2B\right]$:

$$\xi(A, B) = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha - \beta \\ 1 & -\alpha - \beta & -\alpha\beta + (\alpha + \beta)^2 \end{array}\right]$$

$A^2B = A\,(AB)$. Pas besoin de calculer A^2.

$$\det\left(\xi(A, B)\right) = -1 \neq 0.$$

Le système, tel que représenté par la forme canonique de commandabilité, est commandable car $\xi(A, B)$ est de rang plein.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CETTE ZONE

(d) ($1\frac{1}{2}$ points) Pour quelles valeurs de α et β le système est-il observable ?

La matrice d'observabilité est donnée par $\mathcal{O}(A,\ C) = \begin{bmatrix} C \\ \hline CA \\ \hline CA^2 \end{bmatrix}$:

$$\mathcal{O}(A,\ C) = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 10 & 1 \\ \hline 0 & -\alpha\beta & 10-\alpha-\beta \end{bmatrix}$$

$CA^2 = (CA)\,A$. Pas besoin de calculer A^2.

$$\det\left(\mathcal{O}(A,\ C)\right) = 10(100-10\alpha-10\beta+\alpha\beta).$$

Ce système est observable ssi $\mathcal{O}(A,\ B)$ est de rang plein.

$$\det\left(\mathcal{O}(A,\ C)\right) = 0 \quad \text{ssi} \quad \left(\underbrace{100-10\alpha-10\beta+\alpha\beta}_{=(10-\alpha)(10-\beta)}\right) = 0$$

$\det\left(\mathcal{O}(A,\ C)\right)$ est nul ssi $\alpha = 10$ ou $\beta = 10$. Le système est complètement commandable ssi $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 10$.

Le système décrit par la fonction de transfert $\mathcal{H}$ est complètement commandable ou observable ssi la fonction $\mathcal{H}$ est minimale (irréductible, i.e., pas de simplification zéro/pôle). Cette condition n'est vérifiée que pour $\alpha \neq 10$ et $\beta \neq 10$.