AU : 2022-2023	**Nom & Prénom :** ....
L2-S3 : Dép. GE (EI)	**CIN :** ....
DC | Modélisation des Systèmes	**Classe :** EI2..................
17/11/22 (14:00→15:00)	**Salle :** ....
Enseignant : A. Mhamdi	**Durée :** 1h

Ce document comporte **8** pages numérotées de **1/8** à **8/8**. Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Les **3** exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre qui vous convient.

Les règles suivantes s'appliquent :

❶ **L'usage** de tout matériel électronique, sauf calculatrice, est strictement interdit.

❷ **Toute trace** de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

❸ **Si l'espace** est insuffisant, veuillez continuer au verso ou annexer une feuille supplémentaire.

Ne rien écrire dans ce tableau.

Exercice	Barème	Note
1	6	
2	7	
3	7	
Total	20	

Exercice N°1

⌛ 25mn | (6 points)

Proposez une représentation d'état possible pour chacune des descriptions suivantes :

(a) (2 points)

$$y^{(3)}(t) + 2y^{(1)}(t) + y(t) = -2u(t) \tag{1}$$

L'équation différentielle est d'ordre 3. Il en résulte les trois variables d'état suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = y & \Longrightarrow & \dot{x}_1 = y^{(1)} = x_2 \\ x_2 = y^{(1)} & \Longrightarrow & \dot{x}_2 = y^{(2)} = x_3 \\ x_3 = y^{(2)} & \Longrightarrow & \dot{x}_3 = y^{(3)} = -x_1 - 2x_2 - 2u \end{cases}$$

L'équation d'état est donnée alors par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u(t) \quad (2)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

(b) (2 points)

$$3y^{(2)}(t) = -3u(t) \quad (4)$$

L'équation différentielle est de second ordre. On en déduit les variables d'état suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = y & \Longrightarrow & \dot{x}_1 = y^{(1)} = x_2 \\ x_2 = y^{(1)} & \Longrightarrow & \dot{x}_2 = y^{(2)} = -u \end{cases}$$

L'équation d'état sera donnée alors par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \quad (5)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

(c) (2 points)

$$y^{(2)}(t) + y(t) = u^{(1)}(t) - u(t) \quad (7)$$

L'équation différentielle est de second ordre. On propose les variables d'état suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = y & \Longrightarrow \quad \dot{x}_1 = y^{(1)} = x_2 + u \\ x_2 = y^{(1)} - u & \Longrightarrow \quad \dot{x}_2 = y^{(2)} - u^{(1)} = -x_1 - u \end{cases}$$

L'équation d'état sera donnée alors par :

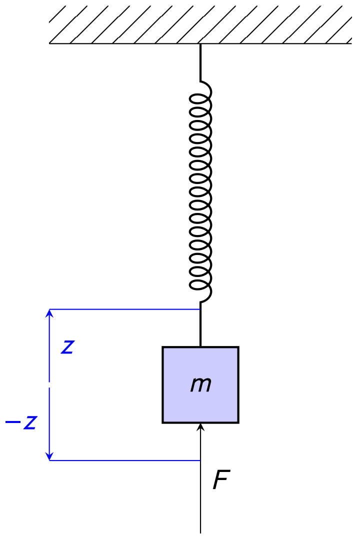
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \tag{8}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Exercice N°2 ⌛ 20mn | (7 points)

On considère l'exemple d'un ressort à comportement non-linéaire. Il est régi par l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{z} = F + k_1 z + k_2 z^3 \tag{10}$$



- Entrée $u(t) = F$
- Sortie $y(t) = z(t)$
- États $\begin{cases} x_1(t) = z(t) \\ x_2(t) = \dot{z}(t) \end{cases}$

(a) (2 points) Ecrire $\dot{x}_1 = \mathcal{F}_1(x_1, x_2, u)$

. . . .

. . . .

(b) (2 points) Écrire $\dot{x}_2 = \mathcal{F}_2(x_1, x_2, u)$

. . . .

. . . .

(c) (3 points) Proposer une équation d'état qui permet de linéariser Eq. (10) autour

AU : 2022-2023		**Nom & Prénom :**	....
L2-S3 : Dép. GE (EI)		**CIN :**	....
DC | Modélisation des Systèmes		**Classe :**	**EI2**..................
17/11/22 (14:00→15:00)		**Salle :**	....
Enseignant : A. Mhamdi		**Durée :**	**1h**

✂- -

du point de fonctionnement défini par $\overline{x} = 0$ & $\overline{u} = 0$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice N°3 ⌛ 15mn | (7 points)

En utilisant la méthode de **Strejc-Davoust**, on se propose d'identifier la fonction $\mathcal{H}_2$, d'entrée u et de sortie y dont la réponse indicielle est donnée par FIG. 1.

(a) (1 point) Déterminez le gain statique K.

> Le Gain statique est mesuré directement par la valeur finale de la sortie :
>
> $$K = \frac{y_\infty}{u_\infty} = 5$$

(b) (2 points) À partir du graphe, déterminez les deux constantes T_a et T_b.

> On trace la tangente au point d'inflexion I et on mesure :
>
> $$T_a = 0.27 \text{ sec et } T_b = 1.76 \text{ sec}$$

(c) (1 point) En déduire l'ordre du système..

Le ratio $\frac{T_a}{T_b} = 0.15$. D'après le tableau, un ordre $n = 2$ semble convenir.

(d) (1 point) Évaluez la valeur de la constante de temps.

La constante de temps T est évaluée à partir de $\left.\frac{T_b}{T}\right|_{\text{Table}} = 2.72$ du tableau. Cela donne $T = 0.65$ sec.

(e) (1 point) En déduire la valeur du retard τ.

Nous avons $T_a = 0.27$ sec et $\left.\frac{T_a}{T}\right|_{\text{Table}} = 0.28$. La constante $T = 0.65$ sec, nous pouvons en déduire le retard $\tau = 0.27 - 0.18 = 0.09$ sec.

(f) (1 point) Donnez l'expression du modèle identifié.

$$\mathcal{H}_1(s) = \frac{5e^{-0.09s}}{(1 + 0.65s)^2}$$

Ne rien écrire dans cette zone

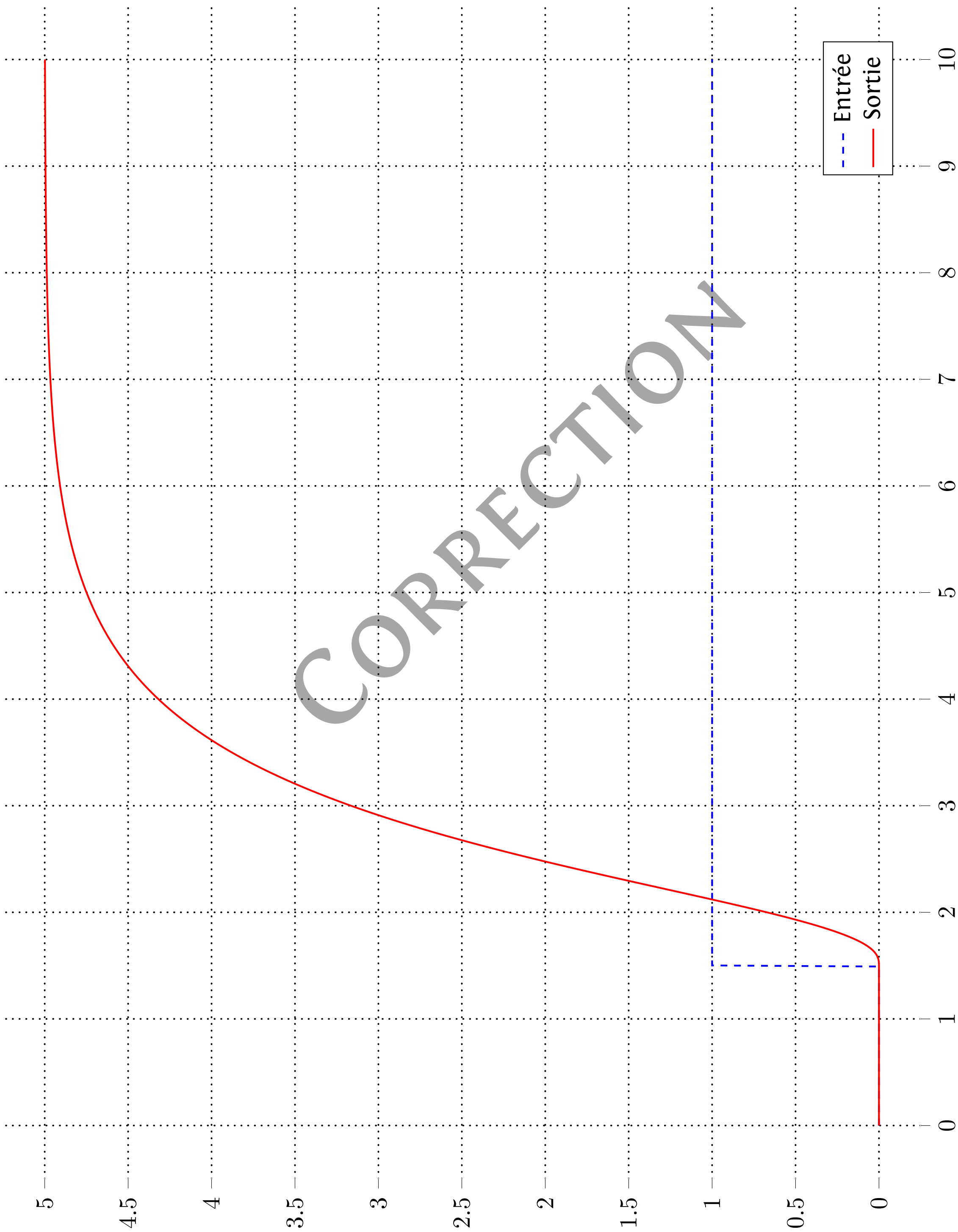


Fig. 1. Réponse indicielle de $\mathcal{H}_2(s)$

Document annexe

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(1+Ts)^n}$$

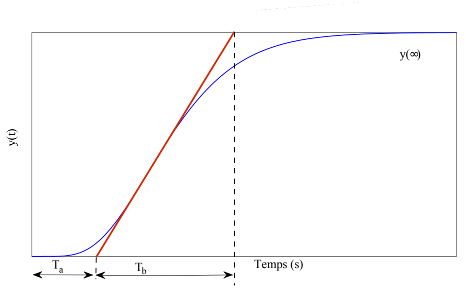
$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1+Ts}$$

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{s\,(1+Ts)^n}$$

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2 e^{-\tau s}}{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n s + s^2}$$

K où G_p :	Gain statique/dynamique
G_r :	Gain du régulateur
T :	Constante de temps
τ :	Retard du procédé
n :	Ordre du système

Strejc-Davoust



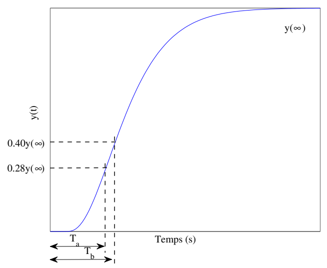
① $\left.\dfrac{T_a}{T_b}\right|_{\text{Table}} \rightarrow n$

② $\left.\dfrac{T_b}{T}\right|_{\text{Table}} \rightarrow T$

③ $\tau = T_a - \left.\dfrac{T_a}{T}\right|_{\text{Table}} T$

n	$\frac{T_a}{T}$	$\frac{T_b}{T}$	$\frac{T_a}{T_b}$
1	0	1	0
2	0.28	2.72	0.10
3	0.80	3.70	0.22
4	1.42	4.46	0.32
5	2.10	5.12	0.41
6	2.81	5.70	0.49

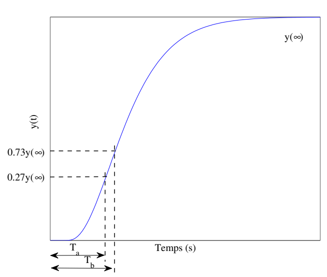
Broïda



① $T = 5.5(T_b - T_a)$

② $\tau = 2.8T_a - 1.8T_b$

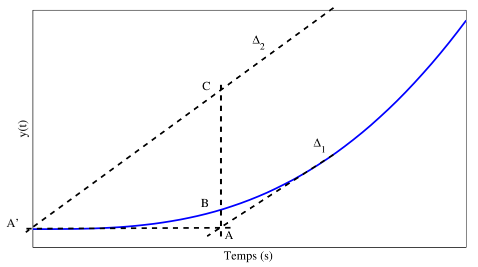
De La Fuente



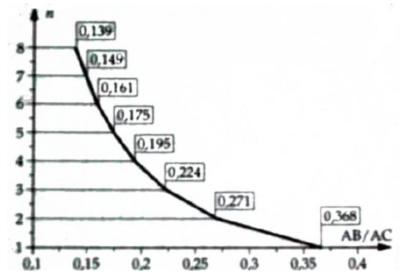
① $T = T_b - T_a$

② $\tau = 1.31T_a - 0.31T_b$

Strejc-Davoust



① $K = \dfrac{AC}{A'A}$



Si n est entier

② $T = \dfrac{A'A}{n}$

③ $\tau = 0$

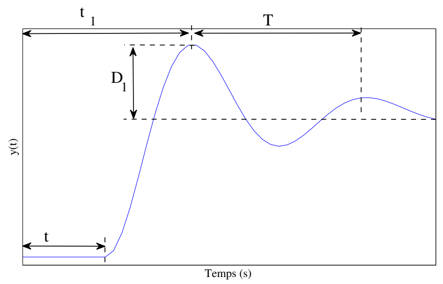
Si n n'est pas entier

On détermine le nouveau rapport $\dfrac{AB}{AC}$ qui correspond à la partie entière de n. Puis, on déplace $\Delta_2 // \Delta_1$ vers Δ_1 afin de garantir ce rapport.

② τ correspond au déplacement.

③ $T = \dfrac{A'A - \tau}{n}$

Oscillatoire



① $D_1 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$

② $T = \dfrac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

③ $\tau = t_1 - \dfrac{T}{2}$

Boucle fermée

u(t)	Classe du système		
	Classe 0	Classe 1	Classe ≥ 2
$\Gamma(t)$	$\varepsilon_p = \dfrac{E_0}{1+G_r G_p}$	$\varepsilon_p = 0$	$\varepsilon_p = 0$
$r(t)$	$\varepsilon_v = +\infty$	$\varepsilon_v = \dfrac{a}{G_r G_p}$	$\varepsilon_v = 0$

$$\left|G_{rc}H(\jmath\omega_{osc})\right| = 1 \text{ et } \underline{/G_{rc}H(\jmath\omega_{osc})} = -\pi$$

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1+Ts}$$

① $K = G_p$

② $T = \dfrac{T_{osc}}{2\pi}\sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1}$

③ $\tau = \dfrac{T_{osc}}{2\pi}\left(\pi - \arctan\left(\sqrt{(G_{rc}G_p)^2 - 1}\right)\right)$

- ⋆ $u(t)$: Entrée
- ⋆ $y(t)$: Sortie
- ⋆ $\Gamma(t)$: Échelon
- ⋆ $r(t)$: Rampe