※本資料は課題の理解を助けるための資料であり，厳密な説明ではない部分がある．

第3回 音声処理実験 SP-1

音声データの基礎知識とその扱い方

Keyword: フーリエ級数，フーリエ変換，パワースペクトル
サンプリング定理，ナイキスト周波数

1

1

SP-1 目次

3-5, 3-6は，優先発展課題である．
基本課題相当が終わるまで，読む必要は無い．

2

2

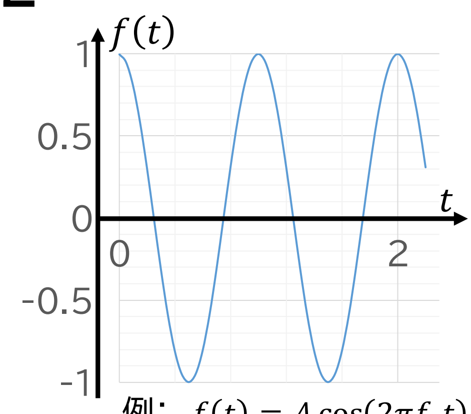
3-1
音の表現 ～連続値と離散値～

教科書「応用数学」pp. 73–92, 97–102

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5
3-6

音は波である … 1/2

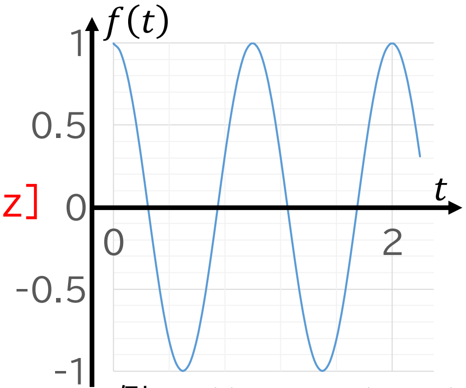
- 波を信号として表現
  - 時刻 t における振幅を関数 $f(t)$ で表す
- 時刻 t [sec]
- 信号 $f(t)$
  - ある時刻の信号の値を「信号の瞬時値」または「信号の値」と呼ぶことにする



例: $f(t) = A\cos(2\pi f_k t)$
where $A = 1, f_k = 1$

音は波である … 2/2

■ 正弦波のパラメータ
- 振幅 A
  - 波の大きさ
- 周波数(振動数*) f_k [Hz]
  - 1秒間の振動の回数で
    周期の逆数 $f_k = 1/T$



例: $f(t) = A\cos(2\pi f_k t)$
where $A = 1, f_k = 1$

■ その他
- 周期 T [sec]
  - 波と波の間隔
- 角周波数(角速度) $\omega = 2\pi f_k$ [rad/sec]
  - 位相の<u>回転速度</u>(角速度)の大きさ

※本講義では「振動数」も「周波数」と呼ぶことにする(参考:教科書pp.75–76)

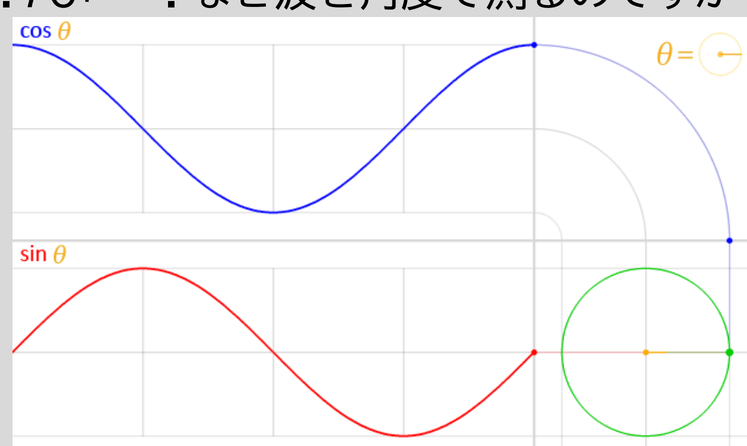
5

5

参考

Rotation on unit circle generate Sine- and Cosine-curves

p.76「・・・. なぜ波を角度で測るのですか？」



$e^{-i\theta}$

引用元:https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circle_cos_sin.gif

6

6

サンプリング(標本化)
Sampling

cf. 離散化

■ 一定周期で元の信号から値を取り出す
- 取り出す周期の逆数をサンプリング周波数(標本化周波数)と呼ぶ
- 標本化周波数は，1秒間に得られる標本点の数と等しい

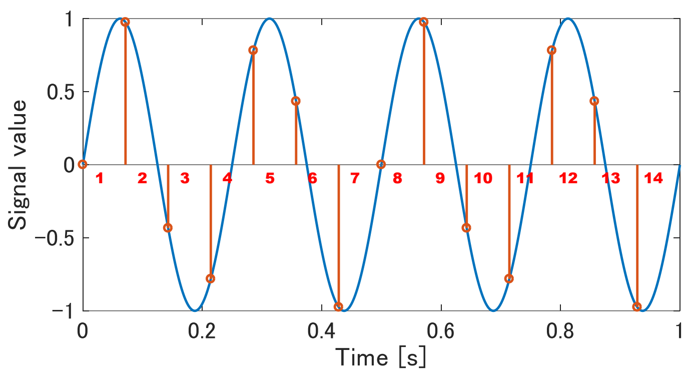


Figure
4 Hzの正弦波信号(青線)と，その信号をサンプリング周波数14 Hzで標本化した信号(赤点)．
赤点間は1/14[秒]である．

7

7

(周期関数の)サンプリング定理

教科書 4.2節 p. 118

■以下の性質を満たすとき，サンプリング周波数F_sで標本化した信号$x[n]$から，元の信号$f(t)$を復元することが可能である．

$$2W \leq F_s$$

- Wはナイキスト周波数である
- 一般には，A/D変換*の際に，ナイキスト周波数以上の周波数成分を取り除くような信号処理が施されている

＊A/D: analog-to-digital の略

例1
最大で8,000 Hzの周波数成分を含む信号をサンプリングしたい．この信号を正確に復元したいのであれば，16,000 Hz以上のサンプリング周波数で標本化する必要がある．

例2
一般的なディジタルCD(サンプリング周波数 44100 Hz)には，22050 Hz以上の周波数成分の音は存在しない．

8

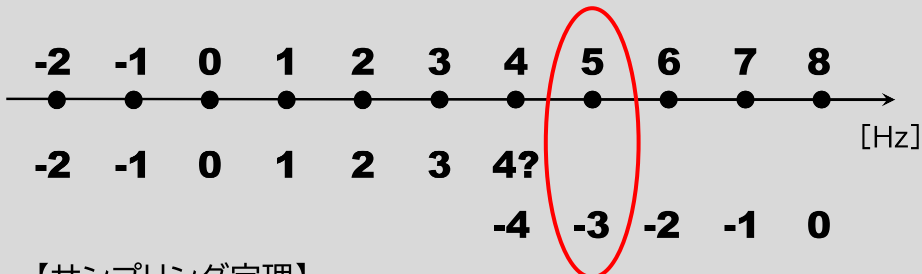
8

参考

信号復元とサンプリング定理 … 1/2

■折り返し歪み(エイリアシング)

- 例:5 Hzの信号を 8 Hzで(間隔1/8秒で)サンプリングすると何が起こるか？



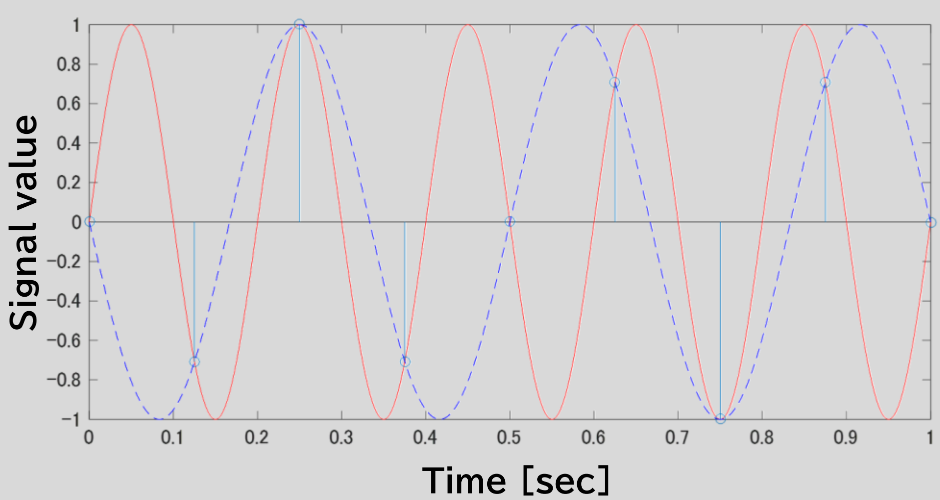
【サンプリング定理】
帯域幅 W に制限された信号 $f(t)$ は，間隔 τ でサンプリングされた信号 x から再現することが可能

9

9

参考

信号復元とサンプリング定理 … 2/2



5 Hz(赤実線)の正弦波と-3 Hz(青点線)の正弦波の例．8 Hzのサンプリング周波数を模して，1.25 sec刻みでstem線(縦線と丸)を描いた．このサンプリング周波数では位相が反転した同じ波形にしか見えないことがわかる．

10

10

本節は，赤字記載箇所の理解に努めること！

3-2 フーリエ級数とパワースペクトル

教科書「応用数学」pp. 73–92, 97–102

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5
3-6

11

11

フーリエ級数の基本式

■フーリエ級数

- 教科書 3.1式から3.3式, pp.73—74

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_o t + b_k \sin k\omega_o t)\,, \quad -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$$

□(実)フーリエ係数

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega_o t\mathrm{d}t, \quad b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin k\omega_o t\mathrm{d}t$$

□基本周波数

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T}$$

フーリエ級数とは，関数 $f(t)$ を正弦波の和で表現した式である
（ただし，区間 $-T/2 \le t \le T/2$において）

12

12

参考

例題3-1：波とフーリエ級数 … 1/2

- 教科書の例3.1は, 図3.1の関数が3.6式のように展開されることを示している
- 3.6式の計算と図示をおこなって確認しよう
  - $T = 400$とする.
  - 打ち切り次数を変えて変化を確認する.

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\omega_o t - \frac{2}{3\pi}\cos 3\omega_o t + \frac{2}{5\pi}\cos 5\omega_o t - \frac{2}{7\pi}\cos 7\omega_o t + \cdots \quad (3.6)$$

13

13

参考

例題3-1：波とフーリエ級数 … 2/2

教科書*の図3.1（p.74）

【例 3.1】 次の信号 $f(t)$ を区間 $[-T/2, T/2]$ 上でフーリエ級数に展開せよ（図3.1）.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -T/4 \le t \le T/4 \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (3.4)$$

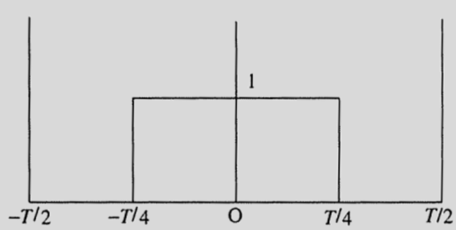


図 3.1

*金谷著, “これなら分かる応用数学教室,” p. 74, 共立出版, 2003.

14

14

参考

例題3-1:波とフーリエ級数(例) … 1/2

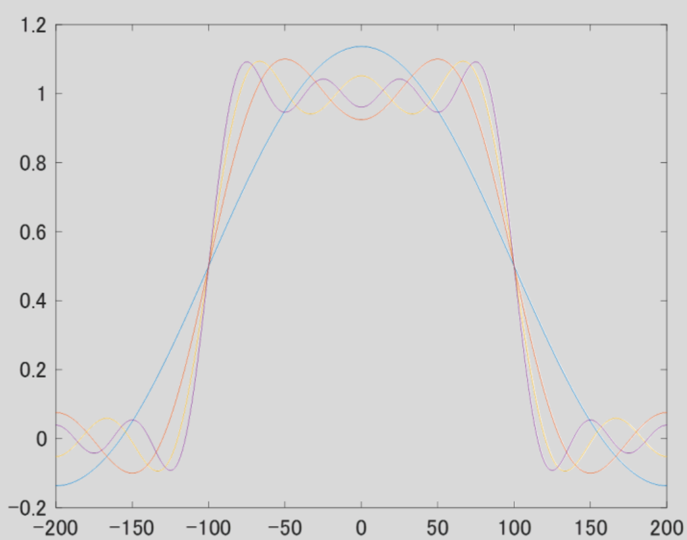
```
>> T = 400;
>> t = -T/2:T/2;
>> wo = 2 * pi / T;
>> f0 = 1/2 + 0 * t;
>> f1 = f0  + 2/(1*pi) * cos(1 * wo * t);
>> f3 = f1  - 2/(3*pi) * cos(3 * wo * t);
>> f5 = f3  + 2/(5*pi) * cos(5 * wo * t);
>> f7 = f5  - 2/(7*pi) * cos(7 * wo * t);
>> plot(t, f1, t, f3, t, f5, t, f7);
% または
>> plot(t, [f1; f3; f5; f7]);
```

15

15

参考

例題3-1:波とフーリエ級数(例) … 2/2



16

16

フーリエ級数の複素数表示

■フーリエ級数の cos や sin は, **複素平面上の単位円における回転成分**として表現できる

（参考：極座標表示 $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$ ）

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_o t} \qquad C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega_o t} \mathrm{d}t$$

複素フーリエ係数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_o t + b_k \sin k\omega_o t)\,, \quad -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega_o t \mathrm{d}t, \quad b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega_o t \mathrm{d}t$$

17

17

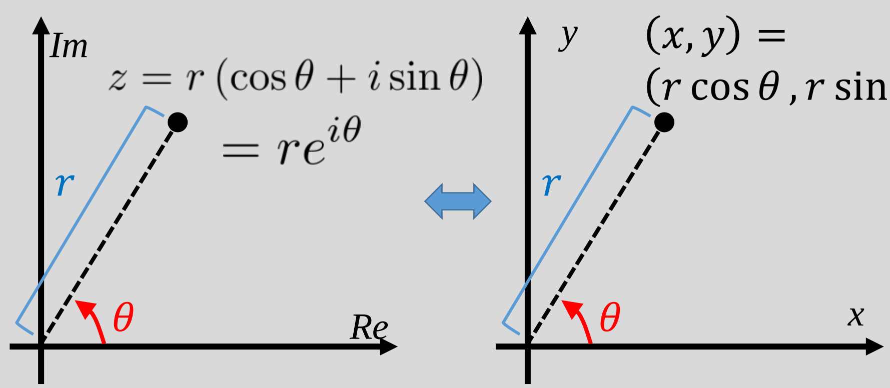
参考

複素平面と極座標表示

（媒介変数表示の一種）

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

$$(x, y) = (r\cos\theta\,, r\sin\theta)$$



距離 r が定数で θ は任意ならば, 円上に点を持つ
（$r = 1$の円を単位円と呼ぶ）

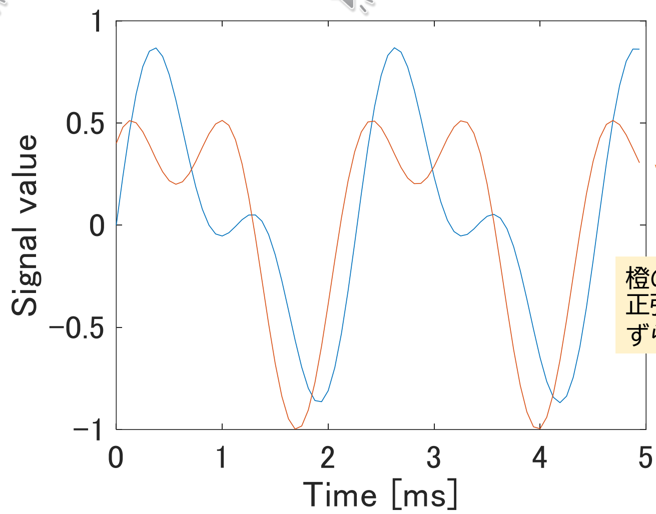
$$(Re[z], Im[z]) = (x, y)$$

18

18

例題3-2：パワースペクトル… 1/2

440Hzの正弦波(振幅0.6)と880Hzの正弦波(振幅0.4)の混合信号



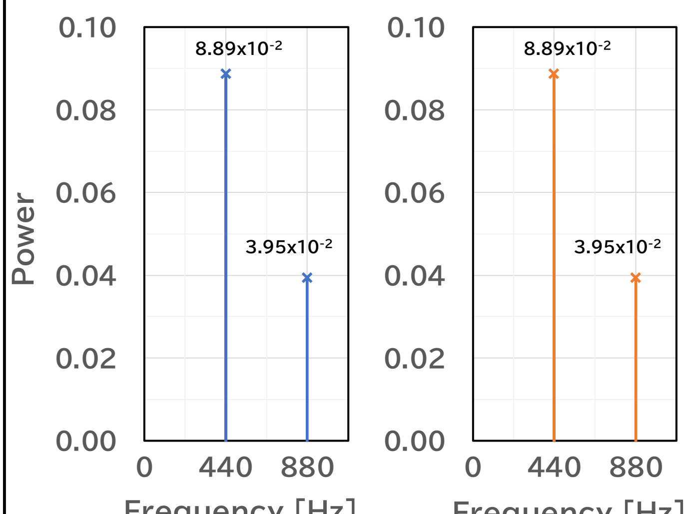
橙の線は880Hzの正弦波の位相を 0.5π ずらして足している.

※この図は横軸を5 msで打ち切り表示している

19

19

例題3-2：パワースペクトル… 2/2



(a) 青線のパワースペクトル　(b) 橙線のパワースペクトル

パワースペクトルは混合信号に含まれる**周波数成分を分解して表示**することができる.

また，位相の影響を無視できる. *

＊ 分析誤差が無視できるならば

※ 横軸は周波数. 縦軸はパワースペクトルの値.

※ 横軸は，0～1.1 kHzで，打ち切り表示(本来は，マイナス側も値が存在)

※ 縦軸の値は，パーセバルの等式から，推定することも可能

20

20

3-3 離散フーリエ変換とパワースペクトル

教科書「応用数学」pp. 106–120, 123–126

（自己相関関数, たたみこみ, フィルタ, DCTは省略）

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5
3-6

21

離散フーリエ変換
Discrete Fourier Transform (DFT)

フーリエ変換(式3.26, p.84; 式3.70, p.108)

$$F(\omega) \triangleq \mathcal{F}\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

離散時間フーリエ変換(式3.71, p. 108)

$$F(\omega) \triangleq \mathcal{F}\left[\boldsymbol{x}\right] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x_\ell e^{-i\omega\ell} \qquad , x_\ell \in \boldsymbol{x}$$

離散フーリエ変換(式4.3, p. 114)

$$F_k \triangleq \mathcal{F}\left[\boldsymbol{x}\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N} \quad , x_n \in \boldsymbol{x}$$

注:DFTは周期関数を仮定した演算

22

参考

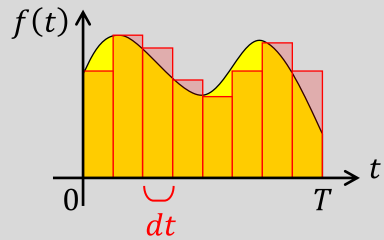
数値計算とフーリエ変換 … 1/2

■フーリエ変換(式3.26, p.84; 式3.70, p.108)

$$F(\omega) \triangleq \mathcal{F}\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

■計算機で積分は扱いづらい

- 数学的な積分は困難



■離散時間フーリエ変換
(式3.71, p. 108)

$$F(\omega) \triangleq \mathcal{F}\left[\boldsymbol{x}\right] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x_\ell e^{-i\omega\ell}$$

23

23

参考

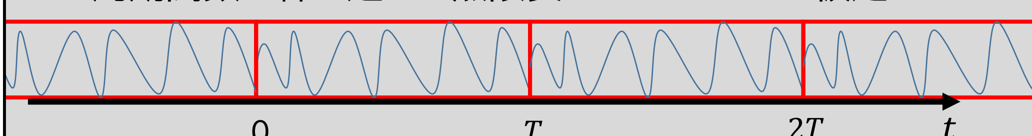
数値計算とフーリエ変換 … 2/2

■離散時間フーリエ変換でも未解決の問題点

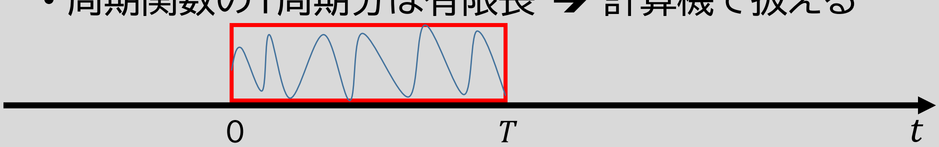
- 積分区間が無限長 ➔ 計算機で扱うことができない

■そこで・・・

- 周期関数を繰り返して無限長になっていると仮定*



- 周期関数の1周期分は有限長 ➔ 計算機で扱える



＊この仮定下ではサンプリング定理が重要となる

24

24

パワースペクトル
Power spectrum

教科書 4.4節
pp. 123–126

※英語の綴りと発音に注意

■長さ N で周期 N のデータ（例: 信号波形）

$$\boldsymbol{x} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots, x_{N-1}\}$$

■離散フーリエ変換（$K \geq N$）

$$\boldsymbol{X} = \{X_0, X_1, \cdots, X_k, \cdots, X_{K-1}\}$$

■**パワースペクトル（4.29式）**

$$\boldsymbol{P} = \{P_0, P_1, \cdots, P_k, \cdots, P_{K-1}\}$$

$$\text{, where} \quad P_k = |X_k|^2$$

なお,「**信号波形の平均エネルギー**」は,
その「**パワースペクトルの総和**」と等しい
（**パーセバルの等式; 4.30式**）

参考
1）X_k は複素数
2）複素数
$z = u + iv$
に対して
$|z|^2 = u^2 + v^2$
が成り立つ

25

25

参考

パワースペクトルの補足説明

■フーリエ変換の結果X_kは複素数を取り得るが,
パワースペクトルは常に実数である

■絶対値とは原点からの距離である
- 複素数においても, 絶対値 $|z|$ とは,
  複素平面上の点 z の原点からの距離である

■パーセバルの等式（4.30式）

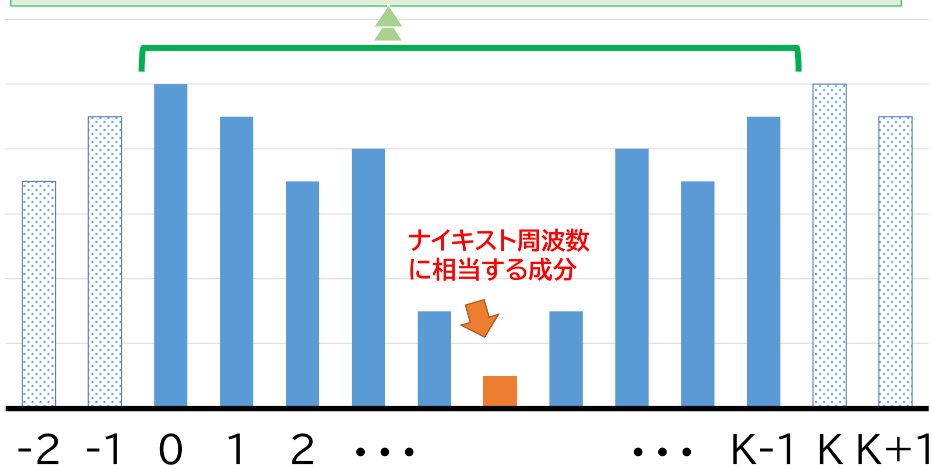
$$\bar{E} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x_n|^2 = \sum_{k=0}^{K-1} P_k$$

26

26

パワースペクトルP_kの例（教科書図4.1*）

（1）$k=0$と$k=K$が同じ値になるよう繰り返した形(mod K)
（2）**ナイキスト周波数**で折り返した形



※教科書の図4.1を参考に，***K*を偶数に修正**して作成した図である

27

27

パワースペクトルの解釈

$k\omega_o = 2\pi f_k$

■パワースペクトルの周波数番号k

- フーリエ級数を構成する正弦波の**周波数f_k**に相当

■パワースペクトルの値P_k

※正確には，その二乗値

- フーリエ級数を構成する正弦波の**振幅a_kやb_k**に相当

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\omega_o t+b_k\sin k\omega_o t\right),\quad -\frac{T}{2}\le t\le\frac{T}{2}$$

- （複素）フーリエ級数では C_k に相当

$$\omega_o=\frac{2\pi}{T}$$

※正確には，その絶対値の二乗値

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{ik\omega_o t}$$

＊この数式の $f(t)$ は信号そのものであり，
周波数の f_k を意味するわけではない．

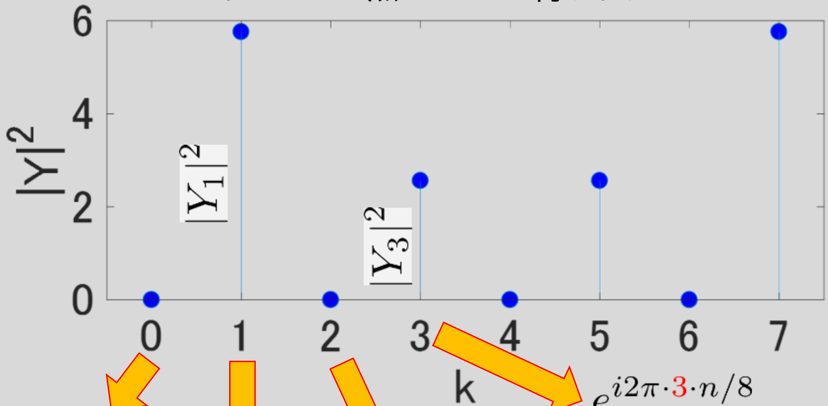
28

28

参考

パワースペクトルの解釈(補足) … 1/2

これはN = 8点のDFTで得られたパワースペクトルの例



$e^{i2\pi\cdot 0\cdot n/8}$ $e^{i2\pi\cdot 1\cdot n/8}$ $e^{i2\pi\cdot 2\cdot n/8}$ $e^{i2\pi\cdot 3\cdot n/8}$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

29

29

参考

パワースペクトルの解釈(補足) … 2/2

N = 8点のDFTで得られたパワースペクトルのk = 3番目を考えてみると？

$$e^{i2\pi\cdot 3\cdot n/8} = e^{i2\pi\cdot(3/8)\cdot n}$$
$$= e^{i2\pi\cdot(3/8)\cdot(t/T_s)}$$
$$= e^{i2\pi\cdot\underline{(3/8)\cdot F_s\cdot t}}$$

n は番号(点数)
F_s = 16000 Hzならば,
$n = 0, 1, \ldots, 15999$ が,
1秒間に相当する

正弦波の式やフーリエ級数の式を
並べて, それぞれを見比べてみよう！！

$$f(t) = \underline{A}\cos(2\pi \underline{f}t)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C_k} e^{ik\underline{\omega_o}t}$$

サンプリング周波数 F_s と
サンプリング周期 T_s の関係

$$T_s = 1/F_s$$

例えば F_s = 16000 [Hz]
ならば T_s = 1/16000 [s]

30

30

3-4 DFTによるパワースペクトルの描画

注:

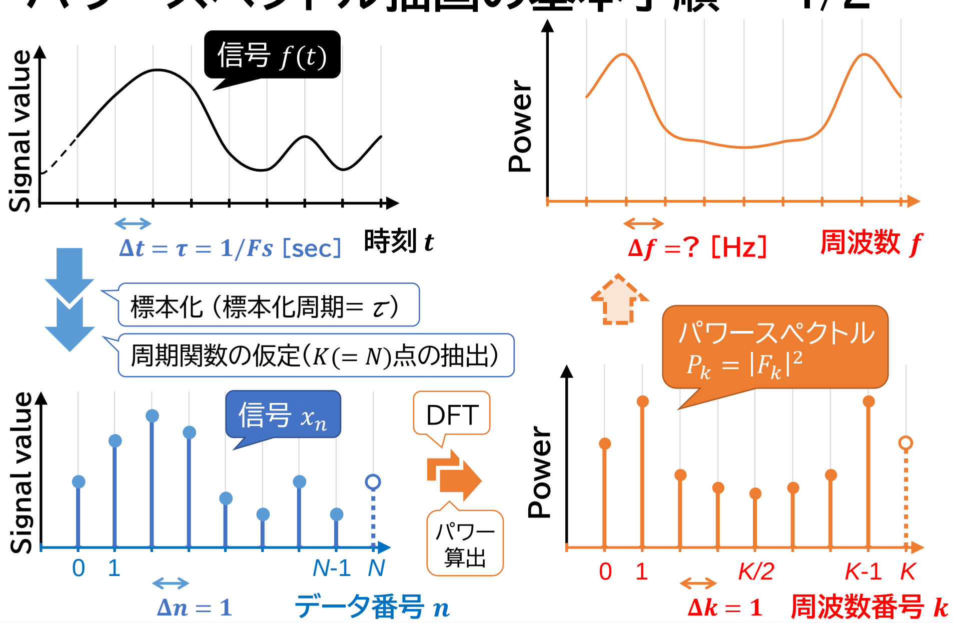
番号を0から始める一般的な場合で説明する.

MATLABで実装する際は, ベクトルのインデックスが1から始まることに注意して実装すること.

3-1 3-2 3-3 3-4 3-5 3-6

サンプリング周波数 F_s [Hz], DFT長 $K = N$ [sample]　※ K は偶数を仮定する

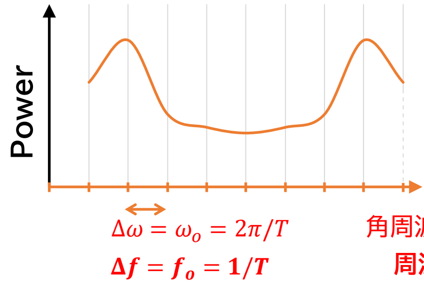
パワースペクトル描画の基本手順 … 1/2



注:これは番号が0から始まる場合の説明である

サンプリング周波数 F_s [Hz]，DFT長 $K=N$ [sample]　※ K は偶数を仮定する

パワースペクトル描画の基本手順 … 2/2



（導出）フーリエ級数の定義式より，

$$\Delta\omega = \omega_o = 2\pi/T \quad \text{[rad/sec]}$$

あるいは，周波数（振動数）として，

$$\Delta f = f_o = 1/T \quad \text{[Hz]}$$

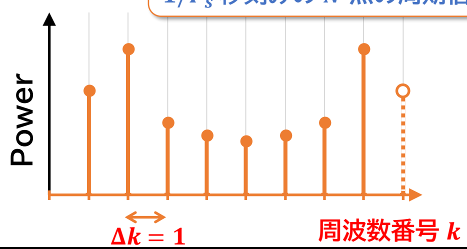
とも書ける．ここで，周期 T [sec] は，

$$T = N/F_s \quad \text{[sec]}$$

であるから，基本周波数 f_o [Hz] は，

$$f_o = 1/T = F_s/N \quad \text{[Hz]}$$

そもそも，関数の周期性を仮定して，**長さ T 秒の信号へのフーリエ変換**を **$1/F_s$ 秒刻みの N 点の周期信号に対する離散フーリエ変換**で表していた



以下の関係式が成り立つ

$$\Delta n = 1[\text{pt}] \Leftrightarrow \Delta t = \frac{1}{F_s}[\text{sec}]$$

$$\Delta k = 1[\text{pt}] \Leftrightarrow \Delta f = \frac{F_s}{N}[\text{Hz}]$$

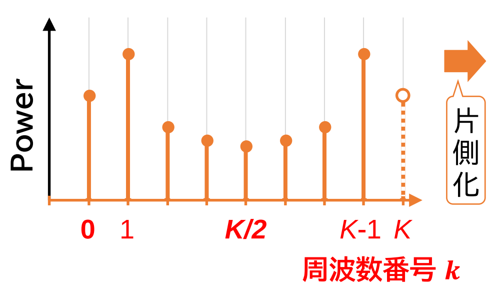
注：これは番号が0から始まる場合の説明である

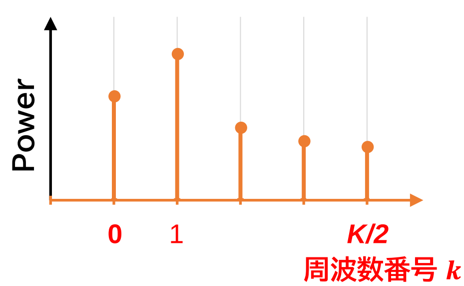
33

片側パワースペクトル
Single-sided power spectrum

- サンプリング定理に基づく離散信号であれば，ナイキスト周波数より高い周波数成分は，折り返した形でパワースペクトルが現れる

➔ **折り返し部分を削除（片側化）**した表示で十分





注：これは番号が0から始まる場合の説明である

34

34

例題3-3：周波数番号kと周波数f

k	0	1	2	3	4	5	6	7
f [Hz]	0	?	?	?	500	?	?	?

サンプリング周波数$F_s = 1{,}000$ Hzの信号を$N = 8$点のFFTで分析すると，上図のkとfの対応関係を持つ.

fの空き ? を埋めて図を完成させなさい.
ただし，片側化で不要になる箇所は「---」とせよ.
（ヒント：f も k と同様に等間隔で与えれば良い）

※ サンプリング定理に注意！！

注:これは番号が0から始まる場合の説明である

35

35

解答例)

例題3-3：周波数番号kと周波数f

k	0	1	2	3	4	5	6	7
f [Hz]	0	125	250	375	500	---	---	---

サンプリング周波数$F_s = 1{,}000$ Hzの信号を$N = 8$点のFFTで分析すると，上図のkとfの対応関係を持つ.

fの空き ? を埋めて図を完成させなさい.
ただし，片側化で不要になる箇所は「---」とせよ.
（ヒント：f も k と同様に等間隔で与えれば良い）

k=4（500Hz）で折り返すように複素共役の成分が現れる.

注:これは番号が0から始まる場合の説明である

36

36

高速フーリエ変換によるDFT
Fast Fourier Transform (FFT)

■ DFTの高速版：間引きとバタフライ演算
- 信号長は2の累乗(cf. ゼロパディング)
- 詳しくは教科書 4.7節, pp. 133–139 参照

【先生】・・・このように驚異的に高速になります.
【学生】どこが驚異的なのですか.
どうということはないようです.
【先生】君は情報系のくせに log の恐ろしさを
知らないのですね. （引用元 p.137）

■ 本講義ではDFT演算のために, MATLABで実装されている **fft** **関数**を利用する
- 計算方法の詳細は講義中には扱わない

37

37

※これは, ページ数合わせの白紙ページです.

基本課題の説明はここまでです.

次ページ以降は,
優先発展課題の説明です.

38

38

優先発展課題 ♫

3-5, 3-6は，優先発展課題である．
基本課題相当が終わるまで，読む必要は無い．

3-5 短時間フーリエ変換(STFT)とスペクトログラム

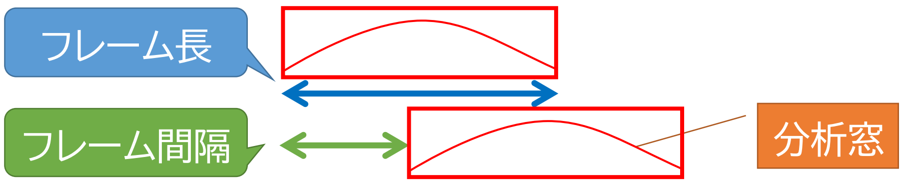
3-1
3-2
3-3
3-4
3-5
3-6

短時間フーリエ変換 … 1/2
Short-time Fourier Transform (STFT)

■ 長時間の信号に短時間の時間窓を掛けながら(高速)フーリエ変換をおこなう操作

短時間フーリエ変換 … 2/2
Short-time Fourier Transform (STFT)

■ **フレーム化処理**
- 短時間の分析窓をずらしながら掛けていく操作



一般には先頭と末端が
小さい値になるような
係数をかける

■ フレーム長(フレーム幅)
- 分析窓そのものの大きさ

■ フレーム間隔(フレームシフト)
- 分析窓をずらす大きさ

この2つのパラメータは
スペクトログラムの
時間軸の解釈に重要

41

41

ゼロ詰め:FFTの制約を充足

■ FFTによるスペクトル推定
- DFTはFFTによる高速演算が可能
- FFTには信号長の制約がある
  → 2の累乗

[3, 4, 2, 5, 2, 4]
↓
[3, 4, 2, 5, 2, 4, 0, 0]

■ **Zero-padding　ゼロ詰め**
- 信号末尾にゼロを加えて信号長を変える操作
- 音声信号の長さがFFTの最適な点数より少ない場合に適用

注:本講義では, この操作の妥当性は議論しない

42

42

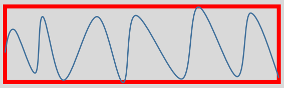
発展

♫

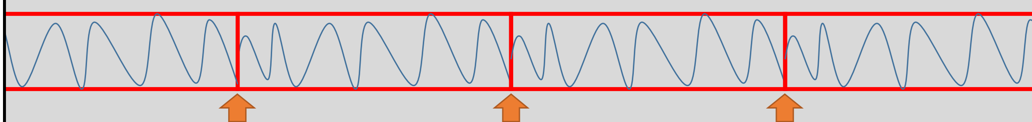
★窓関数：DFTの制約を緩和 … 1/2

参考：
教科書
p. 87

■離散フーリエ変換（DFT）は周期関数を仮定



適当に取り出したフレームに
DFTを適用すると，どうなる？



境界面（接合面）で急激な変化が発生する
➔「きわめて高速に振動する波の成分がある」
ようにに見えてしまう

43

43

発展

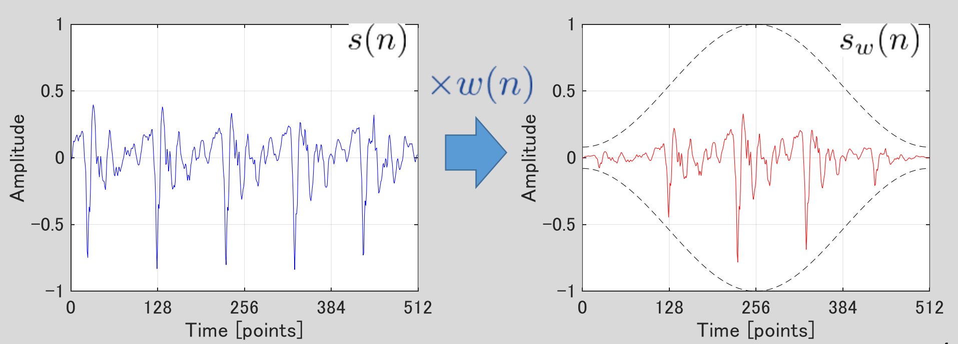
♫

★窓関数：DFTの制約を緩和 … 2/2

■ 対策：信号 s に窓関数 w を乗じた信号 s_w を作る

$$s_w(n) = w(n) \times s(n),$$

$$\text{where} \quad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

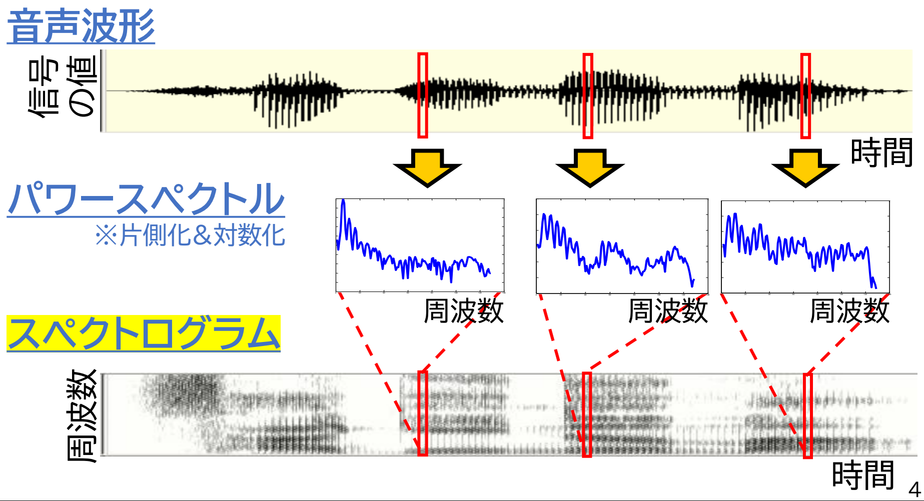


44

44

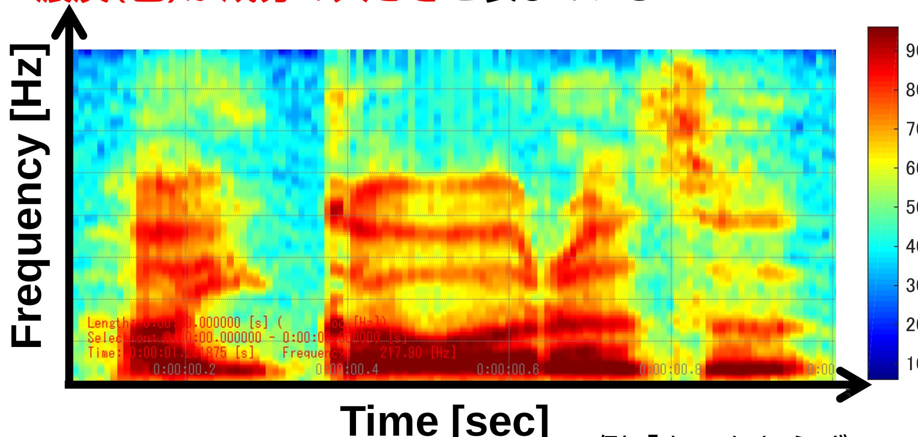
STFTで得られるものは何か？

■STFTにより，一定間隔の「**時間**」毎に，「**周波数**」成分毎の「**強さ**」の表現が可能になった



スペクトログラム … 1/2

■時間・周波数で表現した信号として可視化
- **濃淡（色）が成分の大きさ**を表している



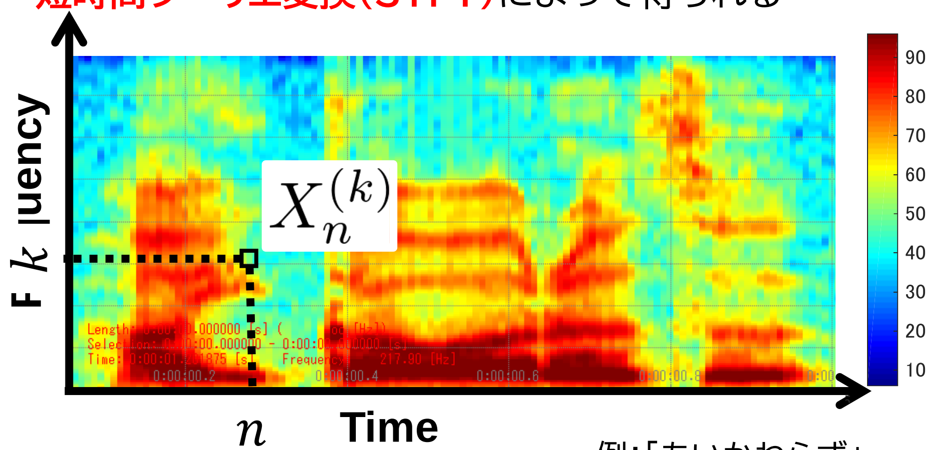
例：「あいかわらず」

スペクトログラム … 2/2

注：通常，n は秒単位ではない．
k もHz単位ではない．
いずれも換算が必要である．
cf. 例題3-3

■時間と周波数に対応する数値を持った**行列**

- **短時間フーリエ変換(STFT)**によって得られる



例:「あいかわらず」

※これは，ページ数合わせの白紙ページです．

優先発展課題 ♫

3-5, 3-6は, 優先発展課題である.
基本課題相当が終わるまで, 読む必要は無い.

3-6
音の表現とベクトル・行列の演算

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5
3-6

49

49

♫

音の表現 … 1/2

■音声処理でよく用いる表現をまとめる
- 以下, 信号長をNとし, FFT長をKとする

ここの「T」は
数学の転置記号

■時間信号としての表現
- $\boldsymbol{x} = \{x_n\} = [x_1, x_2, \cdots, x_N]^T$

■周波数信号としての表現
- $X = \{X^{(k)}\} = [X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(K)}]^T$

50

50

音の表現 … 2/2

■時間・周波数信号としての表現
- 短時間フーリエ変換(STFT)で得られる**行列**

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_N]^T$$

$$= \begin{bmatrix} X_1^{(1)} & X_2^{(1)} & \cdots & X_N^{(1)} \\ X_1^{(2)} & X_2^{(2)} & \cdots & X_N^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1^{(K)} & X_2^{(K)} & \cdots & X_N^{(K)} \end{bmatrix}$$

51

MATLABの行列演算

■四則演算(+ - * /)やべき乗(^)は行列の演算として扱われる

■前にドット(.)をつけた演算子は要素ごとの演算として扱われる
(例えば, アダマール積)

- 例1: MATLABでのアダマール積の例

```
A .* B
```

- 例2: あるベクトル x の全要素を二乗したいとき・・・

```
x ^ 2     % <- NG
x .^ 2    % <- OK
```

52

参考

行列・ベクトルの積 … 1/2

- ベクトルは行列の一種
- 行列の積

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3x1の行列
になる

$$X\boldsymbol{A} \to \mathrm{NG}$$

53

参考

行列・ベクトルの積 … 2/2

- アダマール積（要素ごとの積）
  - 本講義では記号⊗を使うことにする（TeXの¥otimes）

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \mathrm{NG}$$

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 & -3 \\ 2 & 3 & 8 & -3 \\ 16 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

54

参考

例題3-4：MATLAB演算の練習

■以下のx, yが与えられたときに偏差平方和S_{xx}，S_{yy}および積和S_{xy}をMATLABで求めよ

x	0.0	6.0	20.8	33.7	40.1	48.1	56.7	70.7	80.7	93.0
y	0.0	2.7	9.3	11.0	15.7	20.8	24.2	29.0	32.0	37.6

$$S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$S_{yy} = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$S_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

以下の関数を用いること
合計を求める関数 sum
平均を求める関数 mean

55

参考

解答例)

例題3-4：MATLAB演算の練習

```
x = [ 0.0  6.0 20.8 33.7 40.1 ...
     48.1 56.7 70.7 80.7 93.0 ];
y = [ 0.0  2.7  9.3 11.0 15.7 ...
     20.8 24.2 29.0 32.0 37.6 ];
Sxx = sum( ( x - mean(x) ).^2 )
Syy = sum( ( y - mean(y) ).^2 )
Sxy = sum( (x - mean(x)) .* (y - mean(y)) )

% 丁寧に書くなら
x0 = x - mean(x);
y0 = y - mean(y);
Sxx = sum( x0 .^ 2 )
Syy = sum( y0 .^ 2 )
Sxy = sum( x0 .* y0 )
```

ドット付きの演算子は,
全要素への演算
（一般的な行列演算ではない）

56