

Домашнее задание №2.

Линейные уравнения, уравнения Бернулли и Риккати, уравнения в полных дифференциалах

Скажи мне – и я забуду.
Научи меня – и я запомню.
Дай мне сделать – и я пойму.

Китайская мудрость

1. В реальной жизни довольно часто в процессе решения линейного дифференциального уравнения возникают интегралы, которые невозможно выразить в элементарных функциях (вспомните самый известный пример $\int e^{-x^2} dx$). Однако также в реальном мире не требуется иметь общие решения уравнения, а достаточно лишь решений конкретных задач Коши, которые получают, к примеру, численными методами.

Именно поэтому, рассматривая задачу Коши

$$y' = p(x)y + q(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad (1)$$

для записи решения используют уже не неопределенные интегралы (которые компьютер не может посчитать), а определенные с переменным верхним пределом (которые компьютер может вычислить для конкретного значения верхнего предела, пользуясь численными методами вычисления интегралов, некоторые из которых рассматривались в прошлом году в курсе Математического анализа).

Так, решение уравнения 1 можно записать в виде

$$y(x) = \left(C - \int_{x_0}^x q(t) e^{-\int_{x_0}^t p(s) ds} dt \right) e^{\int_{x_0}^x p(s) ds}. \quad (2)$$

- (a) Найдите значение C для данной задачи Коши и запишите окончательное решение (не зависящее от констант).
- (b) Решите задачу Коши

$$x^2 \frac{dy}{dx} + xy = \sin x, \quad y(1) = y_0, \quad (3)$$

выразив решение через интегральный синус $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

- (c) Постройте график¹ решения при нескольких значениях y_0 (помните, что многие программы умеют вычислять интегралы численно или знают функцию $\text{Si}(x)$).

Напоминание: не забудьте, что решения определены на интервалах, и приводите только график той части функции, которая попадает в интервал конкретного решения.

2. Решите уравнение Риккати

$$xy' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2.$$

Напоминание: не забудьте про решения, появляющиеся при делении на переменные.

3. Решите уравнение (неявного задания решения достаточно)

$$(e^x \sin y + \operatorname{tg} y) dx + (e^x \cos y + x \sec^2 y) dy = 0.$$

Вспомните, что это за такая функция $\sec x$ – секанс.

¹Воспользуйтесь такими программами, как Desmos, GeoGebra, или любым языком программирования