

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

## Домашняя работа № 4

### "Уравнения высших порядков: понижение порядка, ЛОУ и ЛУ"

по дисциплине Дифференциальные уравнения

Выполнила: студентка гр. **R3238**

**Нечаева А. А.**

Преподаватель: *Магазенков Е. Н.*

Санкт-Петербург, 2023-2024

## 1

Решить уравнение, понизив порядок

$$(y' + 2y)y'' = y'^2 \quad (1)$$

1. Понижение порядка. Замена:  $y' = p$ ,  $y'' = p'p$ :

$$(p + 2y)p'p = p^2 \mid : p \neq 0 \quad (2)$$

Заметим, что  $p = 0$  – тоже решение.

$$(p + 2y)p' = p \quad (3)$$

$$(p + 2y) \frac{dp}{dy} = p \quad (4)$$

$$(p + 2y) dp = p dy \quad (5)$$

2. Получено однородное уравнение. Воспользуемся подстановкой:  $p = vy \rightarrow dp = vdy + ydv$

$$(vy + 2y)(vdy + ydv) = vydy \quad (6)$$

$$y(v + 2)(vdy + ydv) = vydy \mid : y \neq 0 \quad (7)$$

Заметим, что  $y = 0$  – тоже решение?????

$$(v + 2)(vdy + ydv) = vdy \quad (8)$$

$$v^2dy + 2vdy + vydv + 2ydv = vdy \quad (9)$$

$$v^2dy + vdy + vydv + 2ydv = 0 \quad (10)$$

$$(v^2 + v)dy = -y(v + 2)dv \mid : y(v^2 + v) \neq 0 \quad (11)$$

Заметим, что  $v^2 + v = 0$ ,  $v = -1$  – тоже решение?????

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{v + 2}{v^2 + v} dv \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{v + 2}{v^2 + v} dv &= \int \frac{dv}{v + 1} + 2 \int \frac{dv}{v^2 + v} = \int \frac{dv}{v + 1} + 2 \left( - \int \frac{dv}{v + 1} + \int \frac{dv}{v} \right) = \\ &= 2 \ln |v| - \ln |v + 1| + C = \ln C \frac{v^2}{v + 1} \quad (13) \end{aligned}$$

$$\ln y = -\ln C \frac{v^2}{v+1} \quad (14)$$

$$Cy = \frac{v+1}{v^2} \quad (15)$$

3. Вернемся к переменной  $p$ :  $v = \frac{p}{y}$

$$Cy = \frac{\frac{p}{y} + 1}{\left(\frac{p}{y}\right)^2} \quad (16)$$

$$Cy = \frac{\left(\frac{p}{y} + 1\right)y^2}{p^2} \quad (17)$$

$$Cy = \frac{y}{p} + \frac{y^2}{p^2} \quad (18)$$

$$Cy = \frac{y}{y'} + \frac{y^2}{(y')^2} \quad (19)$$

$$Cy(y')^2 = yy' + y^2 \quad (20)$$

$$C(y')^2 - y' - y = 0 \quad (21)$$

Решим, как квадратное уравнение относительно  $y'$

$$\sqrt{D} = \sqrt{1 + 4yC} \quad (22)$$

$$y'_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{1 + 4yC}}{2C} \quad (23)$$

$$y'_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4yC}}{2C} \quad (24)$$

В общем виде:

$$y' = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4yC}}{2C} \quad (25)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4yC}}{2C} \quad (26)$$

$$\frac{2C}{1 \pm \sqrt{1 + 4yC}} dy = dx \quad (27)$$

$$\int \frac{2C}{1 \pm \sqrt{1 + 4yC}} dy = \int dx \quad (28)$$

$$\int \frac{2C}{1 \pm \sqrt{1+4yC}} dy = \left| \begin{cases} u = 4yC + 1, \\ y = \frac{u-1}{4C}, \\ dy = \frac{du}{4C} \end{cases} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\pm \sqrt{u} + 1} = \left| \begin{cases} w = \pm \sqrt{u} + 1, \\ dw = \pm \frac{1}{2} \frac{du}{\sqrt{u}} \end{cases} \right| =$$

$$= \int dw - \int \frac{dw}{w} = \pm \sqrt{4yC + 1} + 1 - \ln \left( \pm \sqrt{4yC + 1} + 1 \right) + A \quad (29)$$

$$\pm \sqrt{4yC + 1} + 1 - \ln \left( \pm \sqrt{4yC + 1} + 1 \right) + A = x \quad (30)$$

Объединим 1 и  $A$  и оставим предыдущее обозначение константы  $A$ :

$$\pm \sqrt{4yC + 1} - \ln \left( \pm \sqrt{4yC + 1} + 1 \right) + A = x \quad (31)$$

**Ответ:**  $\pm \sqrt{4yC + 1} - \ln \left( \pm \sqrt{4yC + 1} + 1 \right) + A = x$

## 2

Решить ЛОДУ

$$y^{(4)} - 6y''' + 14y'' - 16y' + 8y = 0 \quad (32)$$

Соответствующий характеристический полином:

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 14\lambda^2 - 16\lambda + 8 = 0 \quad (33)$$

Первый корень  $\lambda = 2$  – кратности 2:

$$(\lambda - 2)^2 (\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0 \quad (34)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 1 - i \\ \lambda_4 = 1 + i \end{cases} \quad (35)$$

**Ответ:**  $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^x \cos x + C_4 e^x \sin x$

## 3

*Решить ЛНДУ методом вариации произвольной постоянной*

$$y''' - y' = \frac{e^x}{1 + e^x} \quad (36)$$

1. Решение соответствующего однородного дифференциального уравнения:

$$y''' - y' = 0 \quad (37)$$

Характеристический полином:

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \quad (38)$$

Его корни:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases} \quad (39)$$

Решение:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x \quad (40)$$

Решим уравнение методом вариации произвольной постоянной:

$$y' = C'_1 + C'_2 e^{-x} - C_2 e^{-x} + C'_3 e^x + C_3 e^x \quad (41)$$

При этом  $C'_1 + C'_2 e^{-x} + C'_3 e^x = 0$ .

$$y'' = -C'_2 e^{-x} + C_2 e^{-x} + C'_3 e^x + C_3 e^x \quad (42)$$

При этом  $-C'_2 e^{-x} + C'_3 e^x = 0$ .

$$y''' = C'_2 e^{-x} - C_2 e^{-x} + C'_3 e^x + C_3 e^x \quad (43)$$

$$\begin{aligned} y''' - y' &= C'_2 e^{-x} - C_2 e^{-x} + C'_3 e^x + C_3 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 e^x = \\ &= C'_2 e^{-x} + C'_3 e^x = \frac{e^x}{1 + e^x} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{cases} C'_1 + C'_2 e^{-x} + C'_3 e^x = 0 \\ -C'_2 e^{-x} + C'_3 e^x = 0 \\ C'_2 e^{-x} + C'_3 e^x = \frac{e^x}{1 + e^x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C'_1 + C'_2 e^{-x} + C'_3 e^x = 0 \\ C'_3 e^{2x} = C'_2 \\ C'_2 e^{-x} + C'_3 e^x = \frac{e^x}{1 + e^x} \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{cases} C_1' = -2C_3'e^x \\ C_2' = C_3'e^{2x} \\ C_3' = \frac{1}{2} \frac{1}{1+e^x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1' = -\frac{e^x}{1+e^x} \\ C_2' = \frac{1}{2} \frac{e^{2x}}{1+e^x} \\ C_3' = \frac{1}{2} \frac{1}{1+e^x} \end{cases} \quad (46)$$

$$C_1' = -\frac{e^x}{1+e^x} \rightarrow C_1 = -\ln(e^x + 1) + A \quad (47)$$

$$C_2' = \frac{1}{2} \frac{e^{2x}}{1+e^x} \rightarrow C_2 = \frac{e^x - \ln(e^x + 1)}{2} + B \quad (48)$$

$$C_3' = \frac{1}{2} \frac{1}{1+e^x} \rightarrow C_3 = \frac{x - \ln(e^x + 1)}{2} + C \quad (49)$$

**Ответ:**

$$y = -\ln(e^x + 1) + A + \left( \frac{e^x - \ln(e^x + 1)}{2} + B \right) e^{-x} + \left( \frac{x - \ln(e^x + 1)}{2} + C \right) e^x$$