Д/з №1 Нечаевой Анны R3238

№1

$y' = \sqrt{x^2 - y} + 2x \quad | \quad x^2 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq x^2$

• замена: $p(x) = x^2 - y$;

$p' = 2x - y' \Rightarrow y' = 2x - p'$

$-\frac{x}{2} + C \geq 0$

$\underline{x \leq 2C}$

$2x - p' = \sqrt{p} + 2x$

$\frac{dp}{dx} = -\sqrt{p} \quad | : p \neq 0 \ (1)$

$\int \frac{dp}{\sqrt{p}} = -\int dx \ ; \quad 2\sqrt{p} = -x + C \Rightarrow \sqrt{p} = -\frac{x}{2} + C, \quad x \leq 2C$

$p = \left(C - \frac{x}{2}\right)^2, \quad x \leq 2C$

$x^2 - y = \left(C - \frac{x}{2}\right)^2, \quad x \leq 2C$

$x^2 - y = C^2 - Cx + \frac{x^2}{4} \Rightarrow y = \frac{3x^2}{4} + Cx - C^2, \quad x \leq 2C$

• 1 $p = 0 \Rightarrow x^2 - y = 0 \Rightarrow y' = 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow y = x^2$

$y = x^2$ – особое решение

• вернёмся к ОДЗ: $y \leq x^2$

$$\begin{cases} y = \frac{3x^2}{4} + Cx - C^2 \\ y \leq x^2 \\ x \leq 2C \end{cases}$$

• $\frac{3x^2}{4} + Cx - C^2 \leq x^2$

$-\frac{x^2}{4} + Cx - C^2 \leq 0 \quad | \cdot (-1)$

$\frac{x^2}{4} - 2 \cdot \frac{C}{2} x + C^2 \geq 0$

$\left(\frac{x}{2} - C\right)^2 \geq 0$ – верно для $\forall C \in \mathbb{R}$

Ответ: $y = \frac{3x^2}{4} + Cx - C^2, \quad C \in \mathbb{R}; \ y \leq x^2$

$y = x^2$ – особое решение

– в точках особого решения нарушается теорема о единственности решения задачи Коши.

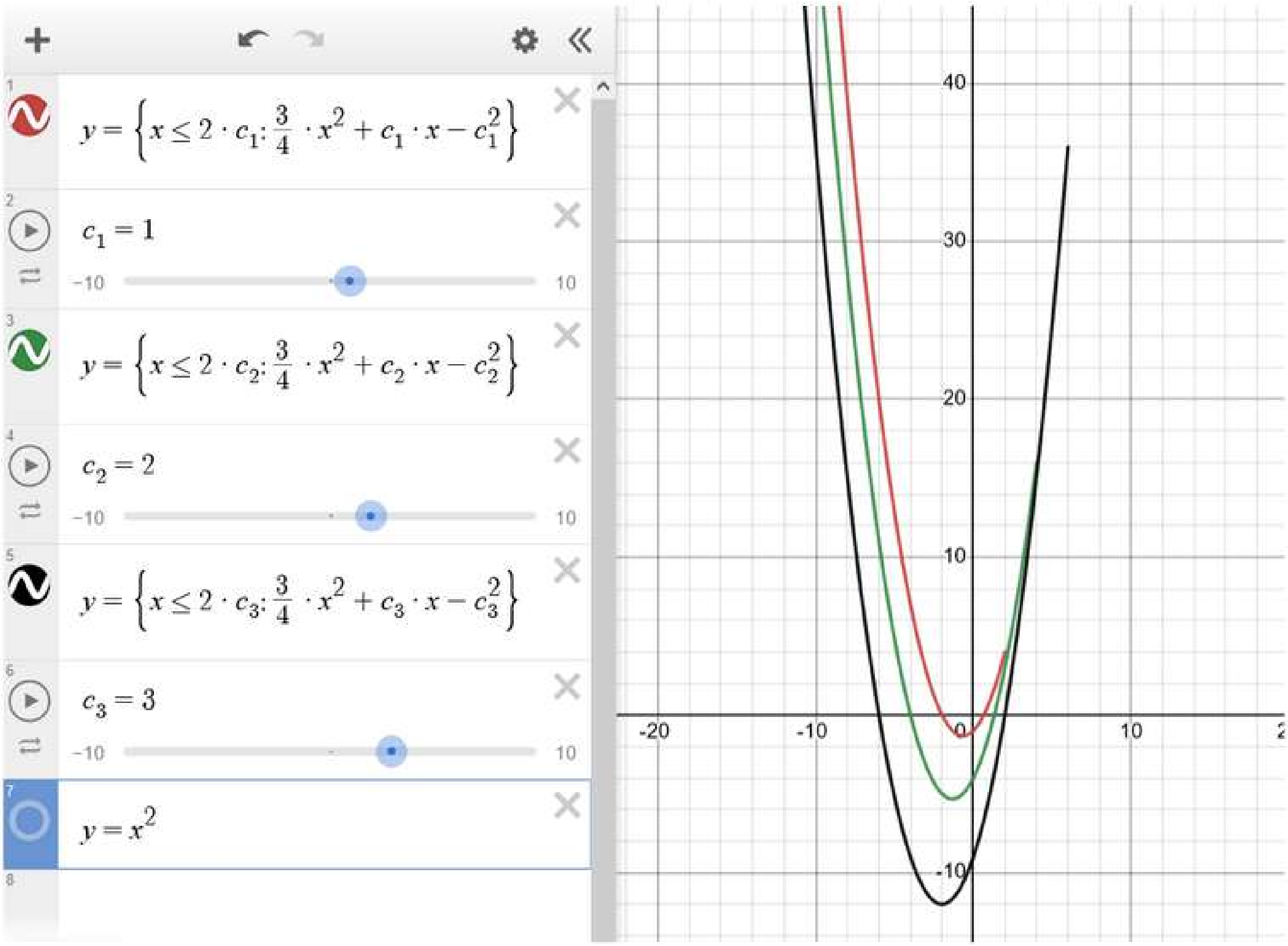

Рисунок 1 – Интегральные кривые общего решения при различных значениях константы

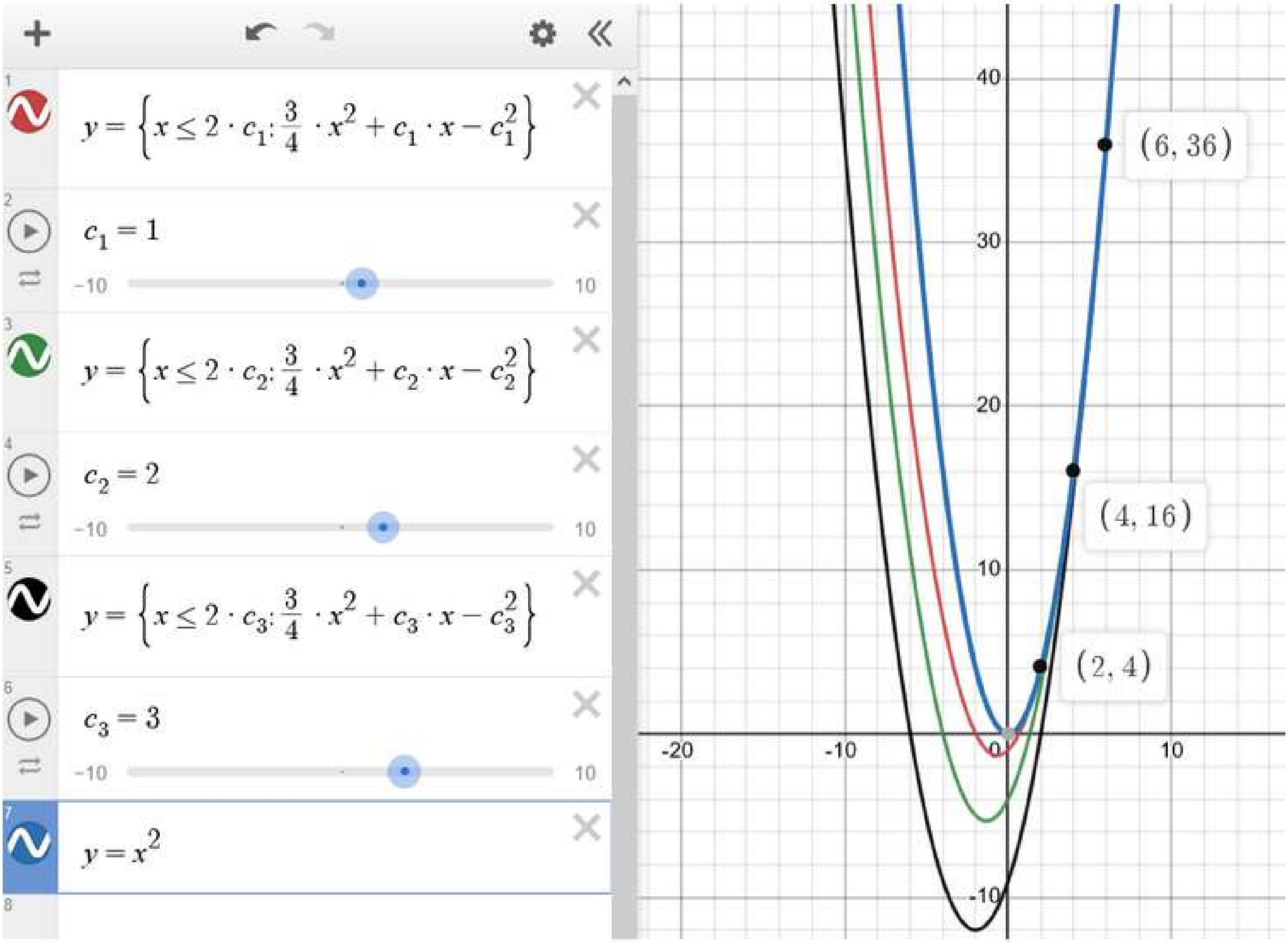

Рисунок 2 – Интегральные кривые и кривая особого решения (синий цвет)

На графике обозначены точки, в которых нарушается теорема о единственности решения задачи Коши

№2

Найти общий интеграл уравнения

$$(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$$

• замена: $u=y+2x$;

$y=u-2x$;

$dy=du-2dx$

$(u+1)dx-(2u-3)(du-2dx)=0$

$(u+1)dx-(2u-3)du+2(2u-3)dx=0$

$5(u-1)dx=(2u-3)du \quad \Big|: 5(u-1)\neq 0 \quad (1)$

$$\int\frac{2u-3}{5(u-1)}du=\int\frac{(3u-3)-u}{5u-5}du=\int\left(\frac{3}{5}-\frac{u}{5(u-1)}\right)du=$$

$$=\frac{3u}{5}-\frac{1}{5}\int\frac{(u-1)+1}{u-1}du=\frac{3u}{5}-\frac{u}{5}-\frac{\ln|u-1|}{5}+C$$

$$\int dx=\int\frac{2u-3}{5(u-1)}du$$

$$x=\frac{2}{5}u-\frac{\ln|u-1|}{5}+C$$

$$x=0{,}4(y+2x)-0{,}2\ln|y+2x-1|+C$$

$$x-0{,}8x=0{,}4y-0{,}2\ln|y+2x-1|+C$$

$$0{,}2x=0{,}4y-0{,}2\ln|y+2x-1|+C \quad \Big| : 0{,}2$$

$$x-2y+\ln|y+2x-1|+C=0$$

• (1) $y+2x-1=0 \quad y=1-2x \Rightarrow 2x=-y+1$

$(2x+1-2x+1)dx-(4x+2-4x-3)dy=0$

$2dx+dy=0 \Rightarrow 2\int dx=-\int dy \Rightarrow 2x=-y+C$

$\Rightarrow -y+1=-y+C \Rightarrow C=1$, $x=-\frac{y-1}{2}$ - тоже решение (особое)

Ответ: общий интеграл:

$$x-2y+\ln|y+2x-1|+C=0$$

№3

$2x^2y' = y^3 + xy, \quad x<0;\ y>0; \quad y(-1)=\frac{1}{2}$

$2x^2y' = y^3 + xy \quad |:2x^2\neq 0$

$y' = \frac{y^3}{2x^2} + \frac{y}{2x} \quad | : y^3 \neq 0$

$\frac{y'}{y^3} = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2xy^2}$ - уравнение Бернулли

• замена $p = \frac{1}{y^2}$, $p' = -\frac{2y'}{y^3} \Rightarrow \frac{y'}{y^3} = -\frac{p'}{2}$

$-\frac{p'}{2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{p}{2x} \quad | \cdot 2$

$-p' = \frac{1}{x^2} + \frac{p}{x}$

• решим ур-ние: $p' = -\frac{p}{x}$

$\frac{dp}{dx} = -\frac{p}{x} \Rightarrow \int\frac{dp}{p} = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln p = -\ln|x| + C$

$\ln p = \ln(-\frac{1}{x}) + C \Rightarrow \ln p = \ln(-\frac{\tilde{C}}{x}) \quad p = -\frac{\tilde{C}}{x}$

• $\exists\ C = C(x)$

$-p' = \frac{1}{x^2} + \frac{p}{x} = \frac{\tilde{C}'x - \tilde{C}x'}{x^2} = \frac{\tilde{C}'}{x} - \frac{\tilde{C}}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\tilde{C}}{x^2}$

$\frac{\tilde{C}'}{x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \tilde{C}' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d\tilde{C}}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int d\tilde{C} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \tilde{C} = \ln(-x) + C_1$

• $p = -\frac{\ln(-x)+C_1}{x} \Rightarrow \frac{1}{y^2} = -\frac{\ln(-x)+C_1}{x} \Rightarrow y = \sqrt{-\frac{x}{\ln(-x)+C_1}}$

• при $y(-1) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \sqrt{-\frac{-1}{\ln(1)+C_1}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{C_1}} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{C_1} \Rightarrow C_1 = 4$

$y = \sqrt{-\frac{x}{\ln(-x)+4}}$

Ответ: $y = \sqrt{-\frac{x}{\ln(-x)+4}}$