Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Индивидуальное домашнее задание №1

Вариант 3

по дисциплине Дифференциальные уравнения

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Бойцев Антон Александрович*

Санкт-Петербург, 2023-2024

> Трудность решения в какой-то мере входит в само понятие задачи: там, где нет трудности, нет и задачи.
>
> Д. Пойа

1

Привести заменой $x = z^m$ уравнение

$$(xy^2 + 1)yx' + 2x = 0,\ x > 0,\ y > 0$$

к однородному и решить его. Записать ответ в виде $F(x, y) = C$.

Решение:
Пусть $x = z^m$, $y = z$, тогда $x' = mz'z^{m-1}$, запишем получившееся уравнение:

$$(z^m z^2 + 1)zmz'z^{m-1} + 2z^m = 0,\ z^m > 0,\ z > 0$$

$$mz'z^{2m+2} + mz'z^m + 2z^m = 0$$

$$mz'z^{2m+2} = -(mz' + 2)z^m$$

$$2m + 2 = m \to m = -2$$

Таким образом, $x = z^{-2}$, $x' = -2z'z^{-3}$, подставим в исходное уравнение, получим:

$$-2z'z^{-3}(z^{-2}y^2 + 1)y + 2z^{-2} = 0 \mid : -2z^{-2} \neq 0$$

$$z'z^{-1}(z^{-2}y^2 + 1)y - 1 = 0$$

$$z'z^{-3}y^3 + z'z^{-1}y - 1 = 0$$

Полученное уравнение является однородным, убедимся, подставив $z = \lambda z$, $y = \lambda y$:

$$F(\lambda z,\, \lambda y) = z'\lambda^{-3}z^{-3}\lambda^3 y^3 + z'\lambda^{-1}z^{-1}\lambda y - 1 = \lambda^0 F(z,\, y)$$

Решаем уравнение:

$$z'z^{-1}y(z^{-2}y^2 + 1) - 1 = 0$$

Подстановка: $z = ty$, $z' = t'y + t$

$$(t'y + t)(ty)^{-1}y((ty)^{-2}y^2 + 1) - 1 = 0$$

$$(t'y+t)t^{-1}(t^{-2}+1)-1=0$$

$$t'y+t=\frac{t}{t^{-2}+1},\ t^{-2}+1\neq 0\,(\textit{из условия всегда выполнено})$$

$$t'y=\frac{t}{t^{-2}+1}-t$$

$$\frac{dt}{dy}y=\frac{t}{t^{-2}+1}-t$$

$$\frac{dt}{dy}y=\frac{t-t^{-1}-t}{t^{-2}+1}$$

$$\frac{dt}{dy}y=\frac{-t^{-1}}{t^{-2}+1}$$

$$-t(t^{-2}+1)\,dt=\frac{dy}{y}$$

$$-\int(t^{-1}+t)\,dt=\int\frac{dy}{y}$$

$$-\ln t-\frac{t^2}{2}=\ln y+C$$

$$-\ln\frac{z}{y}-\frac{z^2}{2y^2}=\ln y+C$$

$$-\ln z+\ln y-\frac{z^2}{2y^2}=\ln y+C$$

$$-\ln z-\frac{z^2}{2y^2}=C$$

Обратная замена: $x=z^{-2}\rightarrow z=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$-\ln\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2xy^2}=C$$

$$\ln\sqrt{x}-\frac{1}{2xy^2}=C$$

Ответ: $\ln\sqrt{x}-\frac{1}{2xy^2}=C$

2

Решить линейное уравнение методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа). Пользуясь формулой общего решения линейного уравнения, проверьте полученный ответ.
Записать ответ в виде $y = f(x, C)$.

$$y' = \frac{2y}{x \ln x} + \frac{1}{x},\ x > 1$$

Решение:
Решим уравнение:

$$y' = \frac{2y}{x \ln x},\ x > 1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x \ln x},\ x > 1$$
$$\frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x \ln x},\ \ y \neq 0$$

Заметим, что $y = 0$ также является решение уравнения $y' = \frac{2y}{x \ln x}$.

$$\int \frac{dy}{2y} = \int \frac{dx}{x \ln x}$$
$$\frac{1}{2} \ln |y| = \int \frac{d \ln x}{\ln x}$$
$$\frac{1}{2} \ln |y| = \ln \ln x + \ln C$$
$$\ln |y| = 2 \ln C \ln x$$
$$y = Ce^{\ln^2 x}$$
$$y = C \ln^2 x$$

Метод вариации произвольной постоянной – примим $C = C(x)$ и подставим в исходное уравнение:

$$C' \ln^2 x + 2C \ln x \frac{1}{x} = \frac{2C \ln^2 x}{x \ln x} + \frac{1}{x}$$
$$C' \ln^2 x = \frac{1}{x}$$

$$\int dC = \int \ln^{-2} x \, \frac{dx}{x}$$

$$\int dC = \int \ln^{-2} x \, d\ln x$$

$$C = -\ln^{-1} x + A, \; A = const$$

В итоге получим:

$$y = (A - \ln^{-1} x) \ln^2 x, \; A = const$$

$$y = A \ln^2 x - \ln x, \; A = const$$

Проверим полученный результат, воспользовавшись формулой общего решения линейного уравнения:

$$y = \left(A + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right) e^{-\int p(x) dx}$$

$$y = \left(A + \int \frac{1}{x} e^{-\int \frac{2}{x \ln x} dx} dx \right) e^{\int \frac{2}{x \ln x} dx}$$

$$y = \left(A + \int \frac{1}{x} e^{-2 \ln \ln x + B} dx \right) e^{2 \ln \ln x + B}, \; B = const$$

$$y = \left(A + \int \frac{1}{x B \ln^2 x} dx \right) B \ln^2 x$$

$$y = \left(A - \frac{1}{B \ln x} \right) B \ln^2 x$$

$$y = AB \ln^2 x - \ln x$$

Ответ: $y = A \ln^2 x - \ln x, \; A = const$

3

Привести уравнение Риккати к линейному. Решить полученное линейное уравнение, используя метод интегрирующего множителя.
Записать ответ в виде $F(x, y) = C$.

$$xy' = x^3 + (1 - 2x^2)y + xy^2$$

Решение:
Найдем частное решение вида $y = Cx$:

$$x\,(Cx)' = x^3 + (1 - 2x^2)Cx + x\,(Cx)^2$$

$$xC = x^3 + (1 - 2x^2)Cx + x^3C^2$$

$$xC = x^3 + Cx - 2Cx^3 + x^3C^2$$

$$x^3 - 2Cx^3 + x^3C^2 = 0$$

$$1 - 2C + C^2 = 0,\ x \neq 0$$

$$(1 - C)^2 = 0 \to C = 1$$

Частное решение $y = x$, замена $y = x + z$:

$$x(z' + 1) = x^3 + (1 - 2x^2)(x + z) + x(x + z)^2$$

$$xz' + x = x^3 + x - 2x^3 + z - 2zx^2 + x^3 + 2zx^2 + xz^2$$

$$xz' = z + xz^2 \mid : x \neq 0$$

Заметим, что $x = 0$ не является решением уравнения, т.к. не обращает его в тождество.

$$z' = \frac{z}{x} + z^2$$

Получено уравнение Бернулли вида $y' = q(x)y + p(x)y^n$.

$$z' = \frac{z}{x} + z^2 \mid : z^2 \neq 0$$

Заметим, что $z = 0$ – тоже решение.

$$\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{zx} + 1$$

Замена: $t = \frac{1}{z}$ и $t' = -\frac{z'}{z^2}$:

$$-t' = \frac{t}{x} + 1$$

Получено линейное уравнение. Решим его методом интегрирующего множителя:

$$\left(\frac{t}{x}+1\right)dx+dt=0$$

$$P=\frac{t}{x}+1$$

$$Q=1$$

$$(\mu P)'_t=(\mu Q)'_x$$

$$\mu'_t P+\mu P'_t=\mu'_x Q+\mu Q'_x$$

$$\mu'_t\left(\frac{t}{x}+1\right)+\frac{\mu}{x}=\mu'_x$$

Пусть $\mu=\mu(x)$, тогда $\mu'_t=0$:

$$\frac{\mu}{x}=\mu'_x \mid :\mu\neq 0$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{d\mu}{\mu}$$

$$\ln|x|=\ln|\mu|+C$$

Интегрирующий множитель: $\mu=x$:

$$x\left(\frac{t}{x}+1\right)dx+xdt=0$$

$$(t+x)\,dx+xdt=0$$

Получено уравнение в полных дифференциалах вида:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial t}dt=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=x$$

$$\int\partial F=\int x\partial t \;\rightarrow\; F=xt+C(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=t+C'=t+x \;\rightarrow\; C=\frac{x^2}{2}+A,\; A=const$$

В итоге получаем:

$$F = xt + \frac{x^2}{2} + A$$

Обратная замена $t = \frac{1}{z}$:

$$F = \frac{x}{z} + \frac{x^2}{2} + A$$

И $z = y - x$:

$$F = \frac{x}{y-x} + \frac{x^2}{2} + A$$

Ответ: $\frac{x}{y-x} + \frac{x^2}{2} = -A$, $A = const$, $y = 0$ и $y = x$ – тоже решения.

4

Решить уравнение в дифференциалах, подобрав интегрирующий множитель в виде $\mu(x,y) = (x+y^2)^\alpha$.
Записать ответ в виде $F(x,y) = C$.

$$2y(x+y^2-1)dy + (x^2y^2+x^3-1)dx = 0$$

Решение:

$$P = 2y(x+y^2-1)$$
$$Q = x^2y^2+x^3-1$$
$$(\mu P)'_x = (\mu Q)'_y$$
$$\mu'_x P + \mu P'_x = \mu'_y Q + \mu Q'_y$$
$$\mu'_y = \left((x+y^2)^\alpha\right)'_y = 2y\alpha(x+y^2)^{\alpha-1}$$
$$\mu'_x = \left((x+y^2)^\alpha\right)'_x = \alpha(x+y^2)^{\alpha-1}$$
$$P'_x = \left(2y(x+y^2-1)\right)'_x = 2y$$
$$Q'_y = \left(x^2y^2+x^3-1\right)'_y = 2yx^2$$
$$\alpha(x+y^2)^{\alpha-1}2y(x+y^2-1)+2y(x+y^2)^\alpha = 2y\alpha(x+y^2)^{\alpha-1}(x^2y^2+x^3-1)+(x+y^2)^\alpha 2yx^2$$
$$\cancel{2y(x+y^2)^{\alpha-1}}(\alpha(x+y^2-1)+(x+y^2)) = \cancel{2y(x+y^2)^{\alpha-1}}(\alpha(x^2y^2+x^3-1)+(x+y^2)x^2)$$
$$\alpha(x+y^2-1)+x+y^2 = \alpha(x^2y^2+x^3-1)+x^3+y^2x^2$$
$$\alpha(x+y^2-1-x^2y^2-x^3+1) = x^3+y^2x^2-x-y^2$$
$$\alpha(x+y^2-x^2y^2-x^3) = x^3+y^2x^2-x-y^2$$
$$\alpha = -1$$

Полученный интегральный множитель: $\mu = \frac{1}{x+y^2}$:

$$2y\frac{x+y^2-1}{x+y^2}dy + \frac{x^2y^2+x^3-1}{x+y^2}dx = 0$$

Получено уравнение в полных дифференциалах вида:

$$\frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial x}dx = 0$$

$$F = \int \frac{x^2y^2 + x^3 - 1}{x + y^2}dx = \int \frac{x^2(y^2 + x) - 1}{x + y^2}dx = \int x^2 dx - \int \frac{1}{x + y^2}dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} - \ln|x + y^2| + C$$

Пусть $C = C(y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2y}{x + y^2} + C'_y$$

$$2y\frac{x + y^2 - 1}{x + y^2} = -\frac{2y}{x + y^2} + C'_y$$

$$2y - \frac{2y}{x + y^2} = -\frac{2y}{x + y^2} + C'_y$$

$$C'_y = 2y$$

$$\int dC = \int 2y dy$$

$$C = y^2 + A,\ A = const$$

$$F = \frac{x^3}{3} - \ln|x + y^2| + y^2 + A,\ A = const$$

Ответ: $F = \frac{x^3}{3} - \ln|x + y^2| + y^2 + A,\ A = const$

5

Решить уравнение методом введения параметра.
Записать ответ в виде $x = f(y, C)$.
Исследовать на наличие особых решений. Построить на одной координатной плоскости графики нескольких интегральных кривых и, при наличии, особых решений.

$$2x = \frac{y}{y'} + \ln(yy'),\ y > 0$$

Решение:
Введем параметр $p = y'$, сразу запишем $p = \frac{dy}{dx},\ dy = pdx,\ dx = \frac{dy}{p}$:

$$2x = \frac{y}{p} + \ln(yp)$$

Продифференцируем полученное выражение:

$$2dx = d\frac{y}{p} + d\ln(yp)$$

$$2dx = \frac{pdy - ydp}{p^2} + \frac{pdy + ydp}{yp}$$

$$2\frac{dy}{p} = \frac{pdy - ydp}{p^2} + \frac{pdy + ydp}{yp}$$

$$2dy = \frac{pdy - ydp}{p} + \frac{pdy + ydp}{y}$$

$$2dy = dy - \frac{ydp}{p} + dp + \frac{pdy}{y}$$

Сгруппируем по дифференциалам:

$$\left(1 - \frac{p}{y}\right) dy = \left(1 - \frac{y}{p}\right) dp$$

Замена: $t = \frac{y}{p},\ y = tp,\ dy = pdt + tdp$

$$\left(1 - \frac{1}{t}\right)(pdt + tdp) = (1 - t)\, dp$$

$$pdt + tdp - \frac{pdt}{t} - dp = dp - tdp$$

Сгруппируем по дифференциалам:

$$p\left(1-\frac{1}{t}\right)dt = 2(1-t)dp$$

Получено уравнение с разделяющимися переменными

$$p\left(1-\frac{1}{t}\right)dt = 2(1-t)dp \; |: p(1-t) \neq 0$$

Заметим, что $p = 0$ не является решением.
Проверим $t = 1$:

$$t = 1 \;\rightarrow\; \frac{y}{y'} = 1 \;\rightarrow y = y' \;\rightarrow y = Be^x,\, B = const$$

Подставим в исходное дифференциальное уравнение:

$$2x = \frac{Be^x}{Be^x} + \ln(B^2e^x)$$

$$2x = 1 + \ln B^2 + x$$

$$x = 1 + \ln B^2$$

– тоже решение.

$$\left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{(1-t)}dt = \frac{2}{p}dp$$

$$-\frac{1}{t}dt = \frac{2}{p}dp$$

$$-\int\frac{1}{t}dt = \int\frac{2}{p}dp$$

$$-\ln|t| + C = 2\ln|p|$$

$$\ln\frac{C}{t} = \ln p^2$$

$$\frac{C}{t} = p^2$$

$$\frac{Cp}{y} = p^2$$

$$\frac{C}{y} = p$$

$$y = \frac{C}{p}$$

Теперь найдем $x(p)$:

$$2x = \frac{y}{p} + \ln(yp)$$

$$2x = \frac{y}{\frac{C}{y}} + \ln(y\frac{C}{y})$$

$$2x = \frac{y^2}{C} + \ln C$$

$$x = \frac{y^2}{2C} + \frac{\ln C}{2}$$

Проверка на наличие особых решений.
Найдем $p-$дискриминантную кривую:

$$F(x, y, y') = \frac{y}{y'} + \ln(yy') - 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = -\frac{y}{y'^2} + \frac{1}{y'} = 0 \ \rightarrow 1 = \frac{y}{y'} \ \rightarrow y' = y$$

Подставим полученное выражение для y' в исходное уравнение:

$$2x = \frac{y}{y} + \ln(y^2) \ \rightarrow 2x = 1 + 2\ln(y) \ \rightarrow y = e^{x-0.5}$$

Полученная кривая – $p-$дискриминантную кривая.
Проверим, является ли она решением:

$$2x = \frac{e^{x-0.5}}{e^{x-0.5}} + \ln(e^{2x-1}) \ \rightarrow 2x = 1 + 2x - 1$$

$p-$дискриминантную кривая является решением исходного дифференциального уравнения.
Выразим дискриминантную кривую через x:

$$y = e^{x-0.5} \ \rightarrow \ x = \ln y + 0.5$$

$$\frac{y_0^2}{2C} + \frac{\ln C}{2} = \ln y_0 + 0.5 \ \rightarrow y_0 = \sqrt{C}$$

$$\frac{y_0}{C} = \frac{1}{y_0} \to y_0^2 = C$$

В каждой точке дискриминантной кривой её касается другая кривая семейства: $x = \frac{y^2}{2C} + \frac{\ln C}{2}$, для которой $C = y^2$, значит, $x = \ln y + 0.5$ является особым решением.

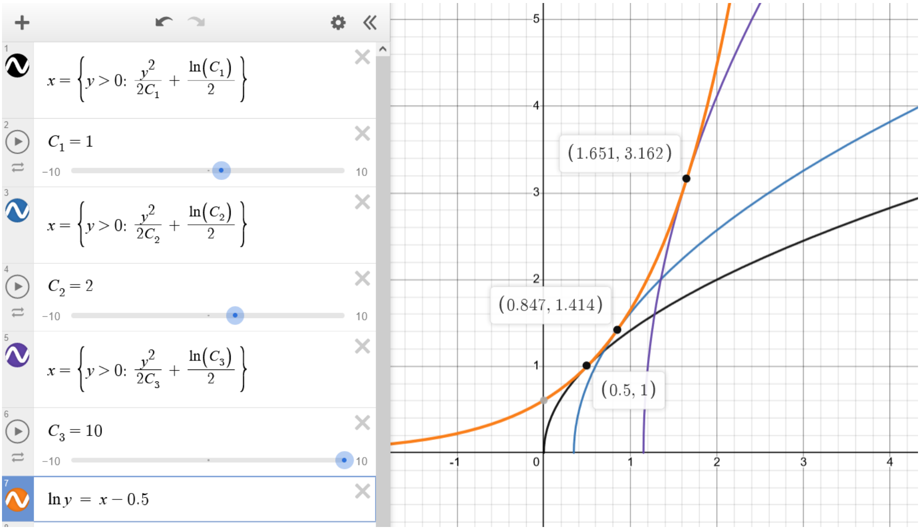

Рис. 1. Интегральные кривые и кривая особого решения (оранжевая)

Ответ: $x = \frac{y^2}{2C} + \frac{\ln C}{2}$, $x = \ln y + 0.5$ – особое решение.