Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

# Домашняя работа №3

## Интегрирующий множитель и замены в ДУ 1-го порядка

**по дисциплине Дифференциальные уравнения**

Выполнила: студентка гр. **R3238**

**Нечаева А. А.**

Преподаватель: *Бойцев Антон Александрович*

Санкт-Петербург, 2023-2024

> Трудность решения в какой-то мере входит в само понятие задачи: там, где нет трудности, нет и задачи.
>
> Д. Пойа

# 1 Решить уравнение, подобрав интегрирующий множитель

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + \left(x^2 + y^2\right)dy = 0$$

Записать общий интеграл уравнения в виде $F(x, y) = C$.

***Решение:***
Запишем уравнение для нахождения интегрирующего множителя

$$\mu'_y \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + \mu \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)'_y = \mu'_x \left(x^2 + y^2\right) + \mu \left(x^2 + y^2\right)'_x$$

$$\mu'_y \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + \mu \left(\cancel{2x} + x^2 + y^2\right) = \mu'_x \left(x^2 + y^2\right) + \cancel{2x\mu}$$

$$\mu'_y \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + \mu \left(x^2 + y^2\right) = \mu'_x \left(x^2 + y^2\right)$$

Будем искать частное решение в виде $\mu = \mu(x)$, тогда $\mu'_y = 0$.

$$\mu \left(x^2 + y^2\right) = \mu'_x \left(x^2 + y^2\right) \Big|: (x^2 + y^2) \neq 0$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int dx$$

$$\ln|\mu| = x + C$$

Интегрирующий множитель:

$$\mu = e^x$$

Домножим исходное уравнение на найденный интегрирующий множитель, получим:

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + e^x\left(x^2 + y^2\right)dy = 0$$

Покажем, что полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

$$P(x, y) = e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)$$

$$Q(x, y) = e^x\left(x^2 + y^2\right)$$

$$P'_y = e^x\left(2x + x^2 + y^2\right)$$

$$Q'_x = e^x\left(x^2 + y^2\right) + e^x\left(2x\right) = e^x\left(2x + x^2 + y^2\right)$$

$$P'_y = Q'_x$$

Значит, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.