Домашняя работа №2 Нечаевой Анны R3238

Задание №1

а) задача Коши $y' = p(x)y + q(x)$, $y(x_0) = y_0$

решение запишется в виде:

$$y(x) = \left(C - \int_{x_0}^{x} q(t) e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds} dt\right) e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}$$

· найдём значение C:

$$y_0(x_0) = \left(C - \int_{x_0}^{x_0} q(t) e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds} dt\right) e^{\int_{x_0}^{x_0} p(s)ds} = (C - 0)e^0 = C$$

$\Rightarrow C = y_0$

· Окончательное решение:

$$y(x) = \left(y_0 - \int_{x_0}^{x} q(t) e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds} dt\right) e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}$$

б) решить задачу Коши и выразить ч/з $S_i(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

$$x^2 y' + xy = \sin x, \quad y(1) = y_0$$

$$x^2 y' + xy = \sin x \quad \Big| : x^2 \neq 0 \quad (1)$$

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x^2}$$

$y' = -\frac{y}{x} + \frac{\sin x}{x^2}$ – вид $y' = p(x)y + q(x)$, где

$q(x) = \frac{\sin x}{x^2}$

$p(x) = -\frac{1}{x}$

· тогда можем записать решение задачи Коши в виде:

$$y(x) = \left(C - \int_{x_0}^{x} q(t) e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds} dt\right) e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}$$

· аналогично пункту а) найдём C, $C = y_0$

$$y(x) = \left(y_0 - \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} e^{-\int_1^t -\frac{1}{s}ds} dt\right) e^{\int_1^x -\frac{1}{s}ds}$$

$$\bullet \int_1^t \frac{1}{s} ds = \ln t - \ln 1 = \ln t$$

$$y(x) = \left(y_0 - \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} e^{\ln t} dt\right) e^{-\ln|x|}$$

$$y(x) = \left(y_0 - \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} \cdot t\, dt\right) \frac{1}{|x|}$$

$$y(x) = \left(y_0 - \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt\right) \frac{1}{|x|}$$

$$y(x) = \left(y_0 - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt + \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt\right) \frac{1}{|x|}$$

$$y(x) = \left(y_0 - Si(x) + Si(1)\right) \frac{1}{|x|}$$

Ответ: $y(x) = \left(y_0 - Si(x) + Si(1)\right) \frac{1}{|x|}$, $x \neq 0$