Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Индивидуальное домашнее задание №1

Вариант 3

по дисциплине Дифференциальные уравнения

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Бойцев Антон Александрович*

Санкт-Петербург, 2023-2024

> Трудность решения в какой-то мере входит в само понятие задачи: там, где нет трудности, нет и задачи.
>
> Д. Пойа

1

Привести заменой $x = z^m$ уравнение

$$(xy^2 + 1)yx' + 2x = 0,\ x > 0,\ y > 0$$

к однородному и решить его. Записать ответ в виде $F(x, y) = C$.

Решение:
Пусть $x = z^m$, $y = z$, тогда $x' = mz'z^{m-1}$, запишем получившееся уравнение:

$$(z^m z^2 + 1)zmz'z^{m-1} + 2z^m = 0,\ z^m > 0,\ z > 0$$

$$mz'z^{2m+2} + mz'z^m + 2z^m = 0$$

$$mz'z^{2m+2} = -(mz' + 2)z^m$$

$$2m + 2 = m \to m = -2$$

Таким образом, $x = z^{-2}$, $x' = -2z'z^{-3}$, подставим в исходное уравнение, получим:

$$-2z'z^{-3}(z^{-2}y^2 + 1)y + 2z^{-2} = 0 \mid : -2z^{-2} \neq 0$$

$$z'z^{-1}(z^{-2}y^2 + 1)y - 1 = 0$$

$$z'z^{-3}y^3 + z'z^{-1}y - 1 = 0$$

Полученное уравнение является однородным, убедимся, подставив $z = \lambda z$, $y = \lambda y$:

$$F(\lambda z,\, \lambda y) = z'\lambda^{-3}z^{-3}\lambda^3 y^3 + z'\lambda^{-1}z^{-1}\lambda y - 1 = \lambda^0 F(z,\, y)$$

Решаем уравнение:

$$z'z^{-1}y(z^{-2}y^2 + 1) - 1 = 0$$

Подстановка: $z = ty$, $z' = t'y + t$

$$(t'y + t)(ty)^{-1}y((ty)^{-2}y^2 + 1) - 1 = 0$$

$$(t'y + t)t^{-1}(t^{-2} + 1) - 1 = 0$$

$$t'y + t = \frac{t}{t^{-2} + 1},\ t^{-2} + 1 \neq 0\,(\textit{из условия всегда выполнено})$$

$$t'y = \frac{t}{t^{-2} + 1} - t$$

$$\frac{dt}{dy}y = \frac{t}{t^{-2} + 1} - t$$

$$\frac{dt}{dy}y = \frac{t - t^{-1} - t}{t^{-2} + 1}$$

$$\frac{dt}{dy}y = \frac{-t^{-1}}{t^{-2} + 1}$$

$$-t(t^{-2} + 1)\,dt = \frac{dy}{y}$$

$$-\int (t^{-1} + t)\,dt = \int \frac{dy}{y}$$

$$-\ln t - \frac{t^2}{2} = \ln y + C$$

$$-\ln \frac{z}{y} - \frac{z^2}{2y^2} = \ln y + C$$

$$-\ln z + \ln y - \frac{z^2}{2y^2} = \ln y + C$$

$$-\ln z - \frac{z^2}{2y^2} = C$$

Обратная замена: $x = z^{-2} \to z = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$-\ln \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2xy^2} = C$$

$$\ln \sqrt{x} - \frac{1}{2xy^2} = C$$

Ответ: $\ln \sqrt{x} - \frac{1}{2xy^2} = C$

2

Решить линейное уравнение методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа). Пользуясь формулой общего решения линейного уравнения, проверьте полученный ответ.
Записать ответ в виде $y = f(x, C)$.

$$y' = \frac{2y}{x\ln x} + \frac{1}{x},\ x > 1$$

Решение:
Решим уравнение:

$$y' = \frac{2y}{x\ln x},\ x > 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x\ln x},\ x > 1$$

$$\frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x\ln x},\ \ y \neq 0$$

Заметим, что $y = 0$ также является решение уравнения $y' = \frac{2y}{x\ln x}$.

$$\int \frac{dy}{2y} = \int \frac{dx}{x\ln x}$$

$$\frac{1}{2}\ln|y| = \int \frac{d\ln x}{\ln x}$$

$$\frac{1}{2}\ln|y| = \ln\ln x + \ln C$$

$$\ln|y| = 2\ln C\ln x$$

$$y = Ce^{\ln^2 x}$$

$$y = C\ln^2 x$$

Метод вариации произвольной постоянной – примим $C = C(x)$ и подставим в исходное уравнение:

$$C'\ln^2 x + 2C\ln x\frac{1}{x} = \frac{2C\ln^2 x}{x\ln x} + \frac{1}{x}$$

$$C'\ln^2 x = \frac{1}{x}$$

$$\int dC = \int \ln^{-2} x \, \frac{dx}{x}$$

$$\int dC = \int \ln^{-2} x \, d \ln x$$

$$C = -\ln^{-1} x + A, \; A = const$$

В итоге получим:

$$y = (A - \ln^{-1} x) \ln^2 x, \; A = const$$

$$y = A \ln^2 x - \ln x, \; A = const$$

Ответ: $y = A \ln^2 x - \ln x, \; A = const$

3

Привести уравнение Риккати к линейному. решить полученное линейное уравнение, используя метод интегрирующего множителя.
Записать ответ в виде $F(x, y) = C$.

$$xy' = x^3 + (1 - 2x^2)y + xy^2$$

Решение:

Ответ:

4

Решить уравнение в дифференциалах, подобрав интегрирующий множитель в виде $\mu(x, y) = (x + y^2)^\alpha$.
Записать ответ в виде $F(x, y) = C$.

$$2y(x + y^2 - 1)dy + (x^2y^2 + x^3 - 1)dx = 0$$

Решение:

Ответ:

5

Решить уравнение методом введения параметра.
Записать ответ в виде $x = f(y, C)$.
Исследовать на наличие особых решений. Построить на одной координатной плоскости графики нескольких интегральных кривых и, при наличии, особых решений.

$$2x = \frac{y}{y'} + \ln(yy'),\ y > 0$$

Решение:

Ответ:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - \frac{1}{x^2 y}$$