

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Индивидуальное домашнее задание №1

Вариант 3

по дисциплине Дифференциальные уравнения

Выполнила: студентка гр. R3238

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Бойцев Антон Александрович*

Санкт-Петербург, 2023-2024

Трудность решения в какой-то мере входит в само понятие задачи: там, где нет трудности, нет и задачи.

Д. Поля

1

Привести заменой $x = z^m$ уравнение

$$(xy^2 + 1)yx' + 2x = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$$

к однородному и решить его. Записать ответ в виде $F(x, y) = C$.

Решение:

Пусть $x = z^m$, $y = z$, тогда $x' = mz'z^{m-1}$, запишем получившееся уравнение:

$$(z^m z^2 + 1)zmz'z^{m-1} + 2z^m = 0, \quad z^m > 0, \quad z > 0$$

$$mz'z^{2m+2} + mz'z^m + 2z^m = 0$$

$$mz'z^{2m+2} = -(mz' + 2)z^m$$

$$2m + 2 = m \rightarrow m = -2$$

Таким образом, $x = z^{-2}$, $x' = -2z'z^{-3}$, подставим в исходное уравнение, получим:

$$-2z'z^{-3}(z^{-2}y^2 + 1)y + 2z^{-2} = 0 \quad | : -2z^{-2} \neq 0$$

$$z'z^{-1}(z^{-2}y^2 + 1)y - 1 = 0$$

$$z'z^{-3}y^3 + z'z^{-1}y - 1 = 0$$

Полученное уравнение является однородным, убедимся, подставив $z = \lambda z$, $y = \lambda y$:

$$F(\lambda z, \lambda y) = z'\lambda^{-3}z^{-3}\lambda^3y^3 + z'\lambda^{-1}z^{-1}\lambda y - 1 = \lambda^0 F(z, y)$$

Решаем уравнение:

$$z'z^{-1}y(z^{-2}y^2 + 1) - 1 = 0$$

Подстановка: $z = ty$, $z' = t'y + t$

$$(t'y + t)(ty)^{-1}y((ty)^{-2}y^2 + 1) - 1 = 0$$

$$(t'y + t)t^{-1}(t^{-2} + 1) - 1 = 0$$

$$t'y + t = \frac{t}{t^{-2} + 1}, \quad t^{-2} + 1 \neq 0 \text{ (из условия всегда выполнено)}$$

$$t'y = \frac{t}{t^{-2} + 1} - t$$

$$\frac{dt}{dy}y = \frac{t}{t^{-2} + 1} - t$$

$$\frac{dt}{dy}y = \frac{t - t^{-1} - t}{t^{-2} + 1}$$

$$\frac{dt}{dy}y = \frac{-t^{-1}}{t^{-2} + 1}$$

$$-t(t^{-2} + 1) dt = \frac{dy}{y}$$

$$- \int (t^{-1} + t) dt = \int \frac{dy}{y}$$

$$- \ln t - \frac{t^2}{2} = \ln y + C$$

$$- \ln \frac{z}{y} - \frac{z^2}{2y^2} = \ln y + C$$

$$- \ln z + \ln y - \frac{z^2}{2y^2} = \ln y + C$$

$$- \ln z - \frac{z^2}{2y^2} = C$$

Обратная замена: $x = z^{-2} \rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$- \ln \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2xy^2} = C$$

$$\ln \sqrt{x} - \frac{1}{2xy^2} = C$$

Ответ: $\ln \sqrt{x} - \frac{1}{2xy^2} = C$

2

Решить линейное уравнение методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа). Пользуясь формулой общего решения линейного уравнения, проверьте полученный ответ.

Записать ответ в виде $y = f(x, C)$.

$$y' = \frac{2y}{x \ln x} + \frac{1}{x}, x > 1$$

Решение:

Решим уравнение:

$$y' = \frac{2y}{x \ln x}, x > 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x \ln x}, x > 1$$

$$\frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x \ln x}, y \neq 0$$

Заметим, что $y = 0$ также является решение уравнения $y' = \frac{2y}{x \ln x}$.

$$\int \frac{dy}{2y} = \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\frac{1}{2} \ln |y| = \int \frac{d \ln x}{\ln x}$$

$$\frac{1}{2} \ln |y| = \ln \ln x + \ln C$$

$$\ln |y| = 2 \ln C \ln x$$

$$y = C e^{\ln^2 x}$$

$$y = C \ln^2 x$$

Метод вариации произвольной постоянной – примем $C = C(x)$ и подставим в исходное уравнение:

$$C' \ln^2 x + 2C \ln x \frac{1}{x} = \frac{2C \ln^2 x}{x \ln x} + \frac{1}{x}$$

$$C' \ln^2 x = \frac{1}{x}$$

$$\int dC = \int \ln^{-2} x \frac{dx}{x}$$

$$\int dC = \int \ln^{-2} x d \ln x$$

$$C = -\ln^{-1} x + A, A = \text{const}$$

В итоге получим:

$$y = (A - \ln^{-1} x) \ln^2 x, A = \text{const}$$

$$y = A \ln^2 x - \ln x, A = \text{const}$$

Ответ: $y = A \ln^2 x - \ln x, A = \text{const}$

3

Привести уравнение Риккати к линейному. Решить полученное линейное уравнение, используя метод интегрирующего множителя.

Записать ответ в виде $F(x, y) = C$.

$$xy' = x^3 + (1 - 2x^2)y + xy^2$$

Решение:

Найдем частное решение вида $y = Cx$:

$$x(Cx)' = x^3 + (1 - 2x^2)Cx + x(Cx)^2$$

$$xC' = x^3 + (1 - 2x^2)Cx + x^3C^2$$

$$xC' = x^3 + Cx - 2Cx^3 + x^3C^2$$

$$x^3 - 2Cx^3 + x^3C^2 = 0$$

$$1 - 2C + C^2 = 0, \quad x \neq 0$$

$$(1 - C)^2 = 0 \rightarrow C = 1$$

Частное решение $y = x$, замена $y = x + z$:

$$x(z' + 1) = x^3 + (1 - 2x^2)(x + z) + x(x + z)^2$$

$$xz' + x = x^3 + x - 2x^3 + z - 2zx^2 + x^3 + 2zx^2 + xz^2$$

$$xz' = z + xz^2 \mid : x \neq 0$$

Заметим, что $x = 0$ не является решением уравнения, т.к. не обращает его в тождество.

$$z' = \frac{z}{x} + z^2$$

Получено уравнение Бернулли вида $y' = q(x)y + p(x)y^n$.

$$z' = \frac{z}{x} + z^2 \mid : z^2 \neq 0$$

Заметим, что $z = 0$ – тоже решение.

$$\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{zx} + 1$$

Замена: $t = \frac{1}{z}$ и $t' = -\frac{z'}{z^2}$:

$$-t' = \frac{t}{x} + 1$$

Получено линейное уравнение. Решим его методом вариации произвольной постоянной:

$$t' = -\frac{t}{x}$$

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{t}{x} \mid : t \neq 0$$

$$\frac{dt}{t} = -\frac{dx}{x}$$

Заметим, что $t = 0$ – тоже решение.

$$\int \frac{dt}{t} = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |t| = -\ln |x| + \ln C$$

$$\ln |t| = -\ln Cx$$

$$\ln |t| = \ln \frac{C}{x}$$

$$t = \frac{C}{x}$$

Заметим, что $t = 0$ – решение при $C = 0$.

Пусть $C = C(x)$:

$$t' = -\frac{t}{x} - 1$$

$$\left(\frac{C}{x}\right)' = -\frac{C}{x^2} - 1$$

$$\frac{C'x - C}{x^2} = -\frac{C}{x^2} - 1$$

$$\frac{C'}{x} = -1$$

$$\int dC = - \int x dx$$

$$C = -\frac{x^2}{2} + A, \quad A = \text{const}$$

Запишем теперь:

$$t = \frac{A - \frac{x^2}{2}}{x} = \frac{A}{x} - \frac{x}{2}, \quad A = \text{const}$$

Обратная замена $z = \frac{1}{t}$:

$$z = \frac{2x}{2A - x^2}, \quad A = \text{const}$$

$$y = x + \frac{2x}{2A - x^2}, \quad A = \text{const}$$

и еще одно решение:

$$y = 0$$

Ответ: $y = x + \frac{2x}{2A - x^2}, A = \text{const}$ и $y = 0$.

4

Решить уравнение в дифференциалах, подобрав интегрирующий множитель в виде $\mu(x, y) = (x + y^2)^\alpha$.

Записать ответ в виде $F(x, y) = C$.

$$2y(x + y^2 - 1)dy + (x^2y^2 + x^3 - 1)dx = 0$$

Решение:

$$P = 2y(x + y^2 - 1)$$

$$Q = x^2y^2 + x^3 - 1$$

$$(\mu P)'_x = (\mu Q)'_y$$

$$\mu'_x P + \mu P'_x = \mu'_y Q + \mu Q'_y$$

$$\mu'_y = ((x + y^2)^\alpha)'_y = 2y\alpha(x + y^2)^{\alpha-1}$$

$$\mu'_x = ((x + y^2)^\alpha)'_x = \alpha(x + y^2)^{\alpha-1}$$

$$P'_x = (2y(x + y^2 - 1))'_x = 2y$$

$$Q'_y = (x^2y^2 + x^3 - 1)'_y = 2yx^2$$

$$\alpha(x + y^2)^{\alpha-1}2y(x + y^2 - 1) + 2y\alpha(x + y^2)^{\alpha-1}(x^2y^2 + x^3 - 1) = (x + y^2)^\alpha 2yx^2$$

$$\cancel{2y(x + y^2)^{\alpha-1}}(\alpha(x + y^2 - 1) + (x + y^2)) = \cancel{2y(x + y^2)^{\alpha-1}}(\alpha(x^2y^2 + x^3 - 1) + (x + y^2)x^2)$$

$$\alpha(x + y^2 - 1) + x + y^2 = \alpha(x^2y^2 + x^3 - 1) + x^3 + y^2x^2$$

$$\alpha(x + y^2 - 1 - x^2y^2 - x^3 + 1) = x^3 + y^2x^2 - x - y^2$$

$$\alpha(x + y^2 - x^2y^2 - x^3) = x^3 + y^2x^2 - x - y^2$$

$$\alpha = -1$$

Полученный интегральный множитель: $\mu = \frac{1}{x + y^2}$:

$$2y \frac{x + y^2 - 1}{x + y^2} dy + \frac{x^2y^2 + x^3 - 1}{x + y^2} dx = 0$$

Получено уравнение в полных дифференциалах вида:

$$\frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial x} dx = 0$$

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{x^2 y^2 + x^3 - 1}{x + y^2} dx = \int \frac{x^2(y^2 + x) - 1}{x + y^2} dx = \int x^2 dx - \int \frac{1}{x + y^2} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - \ln|x + y^2| + C \end{aligned}$$

Пусть $C = C(y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= -\frac{2y}{x + y^2} + C'_y \\ 2y \frac{x + y^2 - 1}{x + y^2} &= -\frac{2y}{x + y^2} + C'_y \\ 2y - \frac{2y}{x + y^2} &= -\frac{2y}{x + y^2} + C'_y \\ C'_y &= 2y \\ \int dC &= \int 2y dy \\ C &= y^2 + A, \quad A = \text{const} \end{aligned}$$

$$F = \frac{x^3}{3} - \ln|x + y^2| + y^2 + A, \quad A = \text{const}$$

Ответ: $F = \frac{x^3}{3} - \ln|x + y^2| + y^2 + A, \quad A = \text{const}$

5

Решить уравнение методом введения параметра.

Записать ответ в виде $x = f(y, C)$.

Исследовать на наличие особых решений. Построить на одной координатной плоскости графики нескольких интегральных кривых и, при наличии, особых решений.

$$2x = \frac{y}{y'} + \ln(yy'), \quad y > 0$$

Решение:

Введем параметр $p = y'$, сразу запишем $p = \frac{dy}{dx}$, $dy = p dx$, $dx = \frac{dy}{p}$:

$$2x = \frac{y}{p} + \ln(y p)$$

Продифференцируем полученное выражение:

$$2dx = d\frac{y}{p} + d\ln(y p)$$

$$2dx = \frac{pdy - ydp}{p^2} + \frac{pdy + ydp}{yp}$$

$$2\frac{dy}{p} = \frac{pdy - ydp}{p^2} + \frac{pdy + ydp}{yp}$$

$$2dy = \frac{pdy - ydp}{p} + \frac{pdy + ydp}{y}$$

$$2dy = dy - \frac{ydp}{p} + dp + \frac{pdy}{y}$$

Сгруппируем по дифференциалам:

$$\left(1 - \frac{p}{y}\right) dy = \left(1 - \frac{y}{p}\right) dp$$

Замена: $t = \frac{y}{p}$, $y = tp$, $dy = pdt + tdp$

$$\left(1 - \frac{1}{t}\right) (pdt + tdp) = (1 - t) dp$$

$$pdt + tdp - \frac{pdt}{t} - dp = dp - tdp$$

Сгруппируем по дифференциалам:

$$p \left(1 - \frac{1}{t} \right) dt = 2(1-t)dp$$

Получено уравнение с разделяющимися переменными

$$p \left(1 - \frac{1}{t} \right) dt = 2(1-t)dp \quad | : p(1-t) \neq 0$$

Заметим, что $p = 0$ не является решением ???А ТЭ??

$$\left(1 - \frac{1}{t} \right) \frac{1}{(1-t)} dt = \frac{2}{p} dp$$

$$-\frac{1}{t} dt = \frac{2}{p} dp$$

$$-\int \frac{1}{t} dt = \int \frac{2}{p} dp$$

$$-\ln |t| + C = 2 \ln |p|$$

$$\ln \frac{C}{t} = \ln p^2$$

$$\frac{C}{t} = p^2$$

$$\frac{Cp}{y} = p^2$$

$$\frac{C}{y} = p$$

$$y = \frac{C}{p}$$

Теперь найдем $x(p)$:

$$2x = \frac{y}{p} + \ln(y p)$$

$$2x = \frac{y}{\frac{C}{y}} + \ln\left(y \frac{C}{y}\right)$$

$$2x = \frac{y^2}{C} + \ln C$$

$$x = \frac{y^2}{2C} + \frac{\ln C}{2}$$

Ответ: $x = \frac{y^2}{2C} + \frac{\ln C}{2}$