Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Домашняя работа № 4

"Уравнения высших порядков: понижение порядка, ЛОУ и ЛУ"

по дисциплине Дифференциальные уравнения

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Магазенков Егор Николаевич*

Санкт-Петербург, 2023-2024

1

Решить уравнение, понизив порядок

$$\left(y' + 2y\right) y'' = y'^2 \tag{1}$$

1. Понижение порядка. Замена: $y' = p,\ y'' = p'p$:

$$\left(p + 2y\right) p'p = p^2 \ \mid : p \neq 0 \tag{2}$$

Заметим, что $p = 0$ – тоже решение.

$$\left(p + 2y\right) p' = p \tag{3}$$

$$\left(p + 2y\right) \frac{dp}{dy} = p \tag{4}$$

$$\left(p + 2y\right) dp = pdy \tag{5}$$

2. Получено однородное уравнение. Воспользуемся подстановкой: $p = vy \rightarrow dp = vdy + ydv$

$$\left(vy + 2y\right) \left(vdy + ydv\right) = vydy \tag{6}$$

$$y \left(v + 2\right) \left(vdy + ydv\right) = vydy \ \mid : y \neq 0 \tag{7}$$

Заметим, что $y = 0$ – тоже решение??????

$$\left(v + 2\right) \left(vdy + ydv\right) = vdy \tag{8}$$

$$v^2dy + 2vdy + vydv + 2ydv = vdy \tag{9}$$

$$v^2dy + vdy + vydv + 2ydv = 0 \tag{10}$$

$$(v^2 + v)dy = -y(v + 2)dv \ \Big| : y(v^2 + v) \neq 0 \tag{11}$$

Заметим, что $v^2 + v = 0$, $v = -1$ – тоже решение??????

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{v+2}{v^2+v} dv \tag{12}$$

$$\int \frac{v+2}{v^2+v} dv = \int \frac{dv}{v+1} + 2\int \frac{dv}{v^2+v} = \int \frac{dv}{v+1} + 2\left(-\int \frac{dv}{v+1} + \int \frac{dv}{v}\right) =$$
$$= 2\ln|v| - \ln|v+1| + C = \ln C\frac{v^2}{v+1} \tag{13}$$

$$\ln y = -\ln C \frac{v^2}{v+1} \tag{14}$$

$$Cy = \frac{v+1}{v^2} \tag{15}$$

3. Вернемся к переменной p: $v = \frac{p}{y}$

$$Cy = \frac{\frac{p}{y}+1}{\left(\frac{p}{y}\right)^2} \tag{16}$$

$$Cy = \frac{\left(\frac{p}{y}+1\right)y^2}{p^2} \tag{17}$$

$$Cy = \frac{y}{p} + \frac{y^2}{p^2} \tag{18}$$

$$Cy = \frac{y}{y'} + \frac{y^2}{(y')^2} \tag{19}$$

$$Cy(y')^2 = yy' + y^2 \tag{20}$$

$$C(y')^2 - y' - y = 0 \tag{21}$$

Решим, как квадратное уравнение относительно y'

$$\sqrt{D} = \sqrt{1+4yC} \tag{22}$$

$$y_1' = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{1-\sqrt{1+4yC}}{2C} \tag{23}$$

$$y_2' = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{1+\sqrt{1+4yC}}{2C} \tag{24}$$

В общем виде:

$$y' = \frac{1\pm\sqrt{1+4yC}}{2C} \tag{25}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1\pm\sqrt{1+4yC}}{2C} \tag{26}$$

$$\frac{2C}{1\pm\sqrt{1+4yC}}dy = dx \tag{27}$$

$$\int \frac{2C}{1\pm\sqrt{1+4yC}}dy = \int dx \tag{28}$$

$$\int \frac{2C}{1 \pm \sqrt{1+4yC}} dy = \left| \begin{cases} u = 4yC + 1, \\ y = \frac{u-1}{4C}, \\ dy = \frac{du}{4C} \end{cases} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\pm\sqrt{u}+1} = \left| \begin{cases} w = \pm\sqrt{u} + 1, \\ dw = \pm\frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{u}} \end{cases} \right| =$$

$$= \int dw - \int \frac{dw}{w} = \pm\sqrt{4yC+1} + 1 - \ln\left(\pm\sqrt{4yC+1}+1\right) + A \quad (29)$$

$$\pm\sqrt{4yC+1} + 1 - \ln\left(\pm\sqrt{4yC+1}+1\right) + A = x \quad (30)$$

Объединим 1 и A и оставим предыдущее обозначение константы A:

$$\pm\sqrt{4yC+1} - \ln\left(\pm\sqrt{4yC+1}+1\right) + A = x \quad (31)$$

Ответ: $\pm\sqrt{4yC+1} - \ln\left(\pm\sqrt{4yC+1}+1\right) + A = x$

2

Решить ЛОДУ

$$y^{(4)} - 6y''' + 14y'' - 16y' + 8y = 0 \tag{32}$$

3

Решить ЛНДУ методом вариации произвольной постоянной

$$y''' - y' = \frac{e^x}{1 + e^x} \tag{33}$$