

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Домашняя работа №3

Интегрирующий множитель и замены в ДУ 1-го
порядка

по дисциплине Дифференциальные уравнения

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Бойцев Антон Александрович*

Санкт-Петербург, 2023-2024

Трудность решения в какой-то мере входит в само понятие задачи: там, где нет трудности, нет и задачи.

Д. Пойа

1 Решить уравнение, подобрав интегрирующий множитель

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

Записать общий интеграл уравнения в виде $F(x, y) = C$.

Решение:

Запишем уравнение для нахождения интегрирующего множителя

$$\mu'_y \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + \mu \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)'_y = \mu'_x (x^2 + y^2) + \mu (x^2 + y^2)'_x$$

$$\mu'_y \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + \mu (2x + x^2 + y^2) = \mu'_x (x^2 + y^2) + 2xy\mu$$

$$\mu'_y \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + \mu (x^2 + y^2) = \mu'_x (x^2 + y^2)$$

Будем искать частное решение в виде $\mu = \mu(x)$, тогда $\mu'_y = 0$.

$$\mu (x^2 + y^2) = \mu'_x (x^2 + y^2) \mid : (x^2 + y^2) \neq 0$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int dx$$

$$\ln |\mu| = x + C$$

Интегрирующий множитель:

$$\mu = e^x$$

Домножим исходное уравнение на найденный интегрирующий множитель, получим:

$$e^x \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + e^x (x^2 + y^2) dy = 0$$

Покажем, что полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

$$P(x, y) = e^x \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right)$$

$$Q(x, y) = e^x (x^2 + y^2)$$

$$P'_y = e^x (2x + x^2 + y^2)$$

$$Q'_x = e^x (x^2 + y^2) + e^x (2x) = e^x (2x + x^2 + y^2)$$

$$P'_y = Q'_x$$

Значит, по признаку полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.