Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Домашняя работа №3

Интегрирующий множитель и замены в ДУ 1-го порядка

по дисциплине Дифференциальные уравнения

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Бойцев Антон Александрович*

Санкт-Петербург, 2023-2024

> Трудность решения в какой-то мере входит в само понятие задачи: там, где нет трудности, нет и задачи.
>
> Д. Пойа

1 Решить уравнение, подобрав интегрирующий множитель

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + \left(x^2 + y^2\right)dy = 0$$

Записать общий интеграл уравнения в виде $F(x, y) = C$.

Решение:
Запишем уравнение для нахождения интегрирующего множителя

$$\mu'_y\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + \mu\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)'_y = \mu'_x\left(x^2 + y^2\right) + \mu\left(x^2 + y^2\right)'_x$$

$$\mu'_y\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + \mu\left(\cancel{2x} + x^2 + y^2\right) = \mu'_x\left(x^2 + y^2\right) + \cancel{2x\mu}$$

$$\mu'_y\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + \mu\left(x^2 + y^2\right) = \mu'_x\left(x^2 + y^2\right)$$

Будем искать частное решение в виде $\mu = \mu(x)$, тогда $\mu'_y = 0$.

$$\mu\left(x^2 + y^2\right) = \mu'_x\left(x^2 + y^2\right)\Big|: (x^2 + y^2) \neq 0$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int dx$$

$$\ln|\mu| = x + C$$

Интегрирующий множитель:

$$\mu = e^x$$

Домножим исходное уравнение на найденный интегрирующий множитель, получим:

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + e^x\left(x^2 + y^2\right)dy = 0$$

Покажем, что полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

$$P(x,y) = e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)$$

$$Q(x,y) = e^x\left(x^2 + y^2\right)$$

$$P'_y = e^x\left(2x + x^2 + y^2\right)$$

$$Q'_x = e^x\left(x^2 + y^2\right) + e^x\left(2x\right) = e^x\left(2x + x^2 + y^2\right)$$

$$P'_y = Q'_x$$

Значит, по признаку полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

Проведем частное интегрирование по y:

$$F = \int e^x\left(x^2 + y^2\right)dy = e^x\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + C = e^x\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + C(x)$$

Продифференцируем полученное выражение по x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(e^x\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + C(x)\right)'_x = e^x\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + 2xye^x + C'_x$$

Также:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)$$

Приравняем 2 выражения выше:

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) = e^x\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + 2xye^x + C'_x$$

$$2xye^x + x^2ye^x + \frac{y^3}{3}e^x = x^2ye^x + \frac{y^3}{3}e^x + 2xye^x + C'_x$$

$$C_x' = 0$$

$$C = const$$

При $x = 0, y = 0$ решение входит в общий интеграл.

Ответ: $e^x \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) = C$ – общий интеграл.

2 Решить уравнение, подобрав интегрирующий множитель

$$\left(2x^3y^2 - y\right)dx + \left(2x^2y^3 - x\right)dy = 0$$

Записать общий интеграл уравнения в виде $F(x, y) = C$.

Решение:
Попробуем преобразовать выражение так, чтобы получить уравнение в полных дифференциалах:

$$\left(2x^3y^2 - y\right)dx + \left(2x^2y^3 - x\right)dy = 0 \,|\, : x^2y^2 \neq 0$$

$$\left(2x - \frac{1}{x^2y}\right)dx + \left(2y - \frac{1}{xy^2}\right)dy = 0$$

$$P(x, y) = 2x - \frac{1}{x^2y}$$

$$Q(x, y) = 2y - \frac{1}{xy^2}$$

$$P'_y = \frac{1}{x^2y^2}$$

$$Q'_x = \frac{1}{x^2y^2}$$

$$P'_y = Q'_x$$

Значит, по признаку полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

Проведем частное интегрирование по y:

$$F = \int\left(2y - \frac{1}{xy^2}\right)dy = y^2 + \frac{1}{xy} + C(x)$$

Продифференцируем полученное выражение по x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(y^2 + \frac{1}{xy} + C(x)\right)'_x = -\frac{1}{x^2y} + C'_x$$

Также:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - \frac{1}{x^2 y}$$

Приравняем 2 выражения выше:

$$2x - \cancel{\frac{1}{x^2 y}} = -\cancel{\frac{1}{x^2 y}} + C'_x$$

$$C'_x = 2x$$

$$\frac{dC}{dx} = 2x$$

$$\int dC = \int 2x dx$$

$$C(x) = x^2 + C$$

Получим общий интеграл:

$$y^2 + \frac{1}{xy} + x^2 = C$$

Ответ: $y^2 + \frac{1}{xy} + x^2 = C$ – общий интеграл.

3 Решить уравнение, подобрав замену

$$y' = \frac{x}{y}\left(1 + e^{5x^2+3y^2}\right)$$

Записать ответ в виде $y^2 = f(x, c)$

Решение:

$$y'y = x\left(1 + e^{5x^2+3y^2}\right),\ y \neq 0$$

$$(3y^2)' = 6x\left(1 + e^{5x^2+3y^2}\right)$$

Замена: $3y^2 = p$

$$p' = 6x\left(1 + e^{5x^2+p}\right)$$

$$p' = 6x\left(1 + e^{5x^2}e^p\right)\ \mid :e^p$$

$$\frac{p'}{e^p} = 6x\left(\frac{1}{e^p} + e^{5x^2}\right)$$

Заметим: $\left(\frac{1}{e^p}\right)' = -\frac{p'}{e^p}$

$$-\left(\frac{1}{e^p}\right)' = 6x\left(\frac{1}{e^p} + e^{5x^2}\right)$$

Замена: $t = \frac{1}{e^p}$

$$-(t)' = 6x\left(t + e^{5x^2}\right)$$

$$(t)' + 6xt + 6xe^{5x^2} = 0$$

Получили линейное уравнение относительно t вида:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Решим уравнение *методом Бернулли*:
Подстановка $t = uv$, $t' = u'v + uv'$:

$$u'v + uv' + 6xuv + 6xe^{5x^2} = 0$$

$$u'v + u(v' + 6xv) + 6xe^{5x^2} = 0$$

$$\begin{cases} v' + 6xv = 0 \\ u'v = -6xe^{5x^2} \end{cases}$$

Сначала вычислим функцию v:

$$v' + 6xv = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -6xv$$

$$\int \frac{dv}{v} = -6\int xdx$$

$$\ln|v| = -3x^2 + C$$

В качестве функции v получим:

$$v = e^{-3x^2}$$

Подставляем найденную функцию во второе уравнение системы:

$$u'e^{-3x^2} = -6xe^{5x^2}$$

$$\int du = -6\int xe^{8x^2}dx$$

Отдельно вычислим интеграл $\int xe^{8x^2}dx$, замена $x^2 = z\,, dz = 2xdx$:

$$\int xe^{8x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{8z}dz = \frac{e^{8z}}{16} + C = \frac{e^{8x^2}}{16} + C$$

$$u = -6\frac{e^{8x^2}}{16} + C = -3\frac{e^{8x^2}}{8} + C$$

Выразим функцию t:

$$t = uv = e^{-3x^2}\left(-3\frac{e^{8x^2}}{8} + C\right)$$

Выразим функцию p:

$$p = \ln\frac{1}{t} = -\ln\left(e^{-3x^2}\left(-3\frac{e^{8x^2}}{8} + C\right)\right)$$

Выразим y^2:

$$y^2 = \frac{p}{3} = -\frac{1}{3}\ln\left(e^{-3x^2}\left(-3\frac{e^{8x^2}}{8}+C\right)\right) = x^2 - \frac{1}{3}\ln\left(-3\frac{e^{8x^2}}{8}+C\right)$$

Ответ: $y^2 = x^2 - \frac{1}{3}\ln\left(-3\frac{e^{8x^2}}{8}+C\right)$