Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Индивидуальное домашнее задание №1

Вариант 3

по дисциплине Дифференциальные уравнения

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Бойцев Антон Александрович*

Санкт-Петербург, 2023-2024

> Трудность решения в какой-то мере входит в само понятие задачи: там, где нет трудности, нет и задачи.
>
> Д. Пойа

1

Привести заменой $x = z^m$ уравнение

$$(xy^2+1)yx' + 2x = 0,\; x > 0,\; y > 0$$

к однородному и решить его. Записать ответ в виде $F(x, y) = C$.

Решение:
Пусть $x = z^m$, $y = z$, тогда $x' = mz'z^{m-1}$, запишем получившееся уравнение:

$$(z^m z^2 + 1)zmz'z^{m-1} + 2z^m = 0,\; z^m > 0,\; z > 0$$

$$mz'z^{2m+2} + mz'z^m + 2z^m = 0$$

$$mz'z^{2m+2} = -(mz'+2)z^m$$

$$2m + 2 = m \to m = -2$$

Таким образом, $x = z^{-2}$, $x' = -2z'z^{-3}$, подставим в исходное уравнение, получим:

$$-2z'z^{-3}(z^{-2}y^2+1)y + 2z^{-2} = 0 \mid : -2z^{-2} \neq 0$$

$$z'z^{-1}(z^{-2}y^2+1)y - 1 = 0$$

$$z'z^{-3}y^3 + z'z^{-1}y - 1 = 0$$

Полученное уравнение является однородным, убедимся, подставив $z = \lambda z$, $y = \lambda y$:

$$F(\lambda z,\, \lambda y) = z'\lambda^{-3}z^{-3}\lambda^3y^3 + z'\lambda^{-1}z^{-1}\lambda y - 1 = \lambda^0 F(z,\, y)$$

Решаем уравнение:

$$z'z^{-1}y(z^{-2}y^2+1) - 1 = 0$$

Подстановка: $z = ty$, $z' = t'y + t$

$$(t'y+t)(ty)^{-1}y((ty)^{-2}y^2+1) - 1 = 0$$

$$(t'y+t)t^{-1}(t^{-2}+1)-1=0$$

$$t'y+t=\frac{t}{t^{-2}+1},\ t^{-2}+1\neq 0\,(\textit{из условия всегда выполнено})$$

$$t'y=\frac{t}{t^{-2}+1}-t$$

$$\frac{dt}{dy}y=\frac{t}{t^{-2}+1}-t$$

$$\frac{dt}{dy}y=\frac{t-t^{-1}-t}{t^{-2}+1}$$

$$\frac{dt}{dy}y=\frac{-t^{-1}}{t^{-2}+1}$$

$$-t(t^{-2}+1)\,dt=\frac{dy}{y}$$

$$-\int(t^{-1}+t)\,dt=\int\frac{dy}{y}$$

$$-\ln t-\frac{t^2}{2}=\ln y+C$$

$$-\ln\frac{z}{y}-\frac{z^2}{2y^2}=\ln y+C$$

$$-\ln z+\ln y-\frac{z^2}{2y^2}=\ln y+C$$

$$-\ln z-\frac{z^2}{2y^2}=C$$

Обратная замена: $x=z^{-2}\rightarrow z=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$-\ln\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2xy^2}=C$$

$$\ln\sqrt{x}-\frac{1}{2xy^2}=C$$

Ответ: $\ln\sqrt{x}-\frac{1}{2xy^2}=C$

2

Решить линейное уравнение методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа). Пользуясь формулой общего решения линейного уравнения, проверьте полученный ответ.
Записать ответ в виде $y = f(x, C)$.

$$y' = \frac{2y}{x \ln x} + \frac{1}{x},\ x > 1$$

Решение:
Решим уравнение:

$$y' = \frac{2y}{x \ln x},\ x > 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x \ln x},\ x > 1$$

$$\frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x \ln x},\ \ y \neq 0$$

Заметим, что $y = 0$ также является решение уравнения $y' = \frac{2y}{x \ln x}$.

$$\int \frac{dy}{2y} = \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\frac{1}{2} \ln |y| = \int \frac{d \ln x}{\ln x}$$

$$\frac{1}{2} \ln |y| = \ln \ln x + \ln C$$

$$\ln |y| = 2 \ln C \ln x$$

$$y = Ce^{\ln^2 x}$$

$$y = C \ln^2 x$$

Метод вариации произвольной постоянной – примим $C = C(x)$ и подставим в исходное уравнение:

$$C' \ln^2 x + 2C \ln x \frac{1}{x} = \frac{2C \ln^2 x}{x \ln x} + \frac{1}{x}$$

$$C' \ln^2 x = \frac{1}{x}$$

$$\int dC = \int \ln^{-2} x \, \frac{dx}{x}$$

$$\int dC = \int \ln^{-2} x \, d \ln x$$

$$C = -\ln^{-1} x + A, \; A = const$$

В итоге получим:

$$y = (A - \ln^{-1} x) \ln^2 x, \; A = const$$

$$y = A \ln^2 x - \ln x, \; A = const$$

Ответ: $y = A \ln^2 x - \ln x, \; A = const$

3

Привести уравнение Риккати к линейному. Решить полученное линейное уравнение, используя метод интегрирующего множителя.
Записать ответ в виде $F(x, y) = C$.

$$xy' = x^3 + (1 - 2x^2)y + xy^2$$

Решение:
Найдем частное решение вида $y = Cx$:

$$x\left(Cx\right)' = x^3 + (1 - 2x^2)Cx + x\left(Cx\right)^2$$

$$xC = x^3 + (1 - 2x^2)Cx + x^3C^2$$

$$xC = x^3 + Cx - 2Cx^3 + x^3C^2$$

$$x^3 - 2Cx^3 + x^3C^2 = 0$$

$$1 - 2C + C^2 = 0,\ x \neq 0$$

$$\left(1 - C\right)^2 = 0 \to C = 1$$

Частное решение $y = x$, замена $y = x + z$:

$$x(z' + 1) = x^3 + (1 - 2x^2)(x + z) + x(x + z)^2$$

$$xz' + x = x^3 + x - 2x^3 + z - 2zx^2 + x^3 - 2zx^2 + xz^2$$

$$xz' = z - 4zx^2 + xz^2$$

$$xz' = z(1 - 4x^2) + xz^2 \mid : x \neq 0$$

Заметим, что $x = 0$ не является решением уравнения, т.к. не обращает его в тождество.

$$z' = \frac{z}{x}(1 - 4x^2) + z^2$$

Получено уравнение Бернулли вида $y' = q(x)y + p(x)y^n$.

$$z' = \frac{z}{x}(1 - 4x^2) + z^2 \mid : z^2 \neq 0$$

Заметим, что $z = 0$ – тоже решение.

$$\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{zx}(1 - 4x^2) + 1$$

Замена: $t = \frac{1}{z}$ и $t' = -\frac{z'}{z^2}$:

$$-t' = \frac{t}{x}(1 - 4x^2) + 1$$

Получено линейное уравнение. Решим его методом вариации произвольной постоянной:

$$t' = \frac{t}{x}(4x^2 - 1)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{t}{x}(4x^2 - 1)$$

$$\frac{dt}{t} = (4x^2 - 1)\frac{dx}{x} \;\mid\; : t \neq 0$$

Заметим, что $t = 0$ – тоже решение.

$$\int \frac{dt}{t} = 4\int x dx - \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|t| = 2x^2 - \ln|x| + \ln C$$

$$\ln|t| = 2x^2 - \ln Cx$$

$$\ln|t| = \ln e^{2x^2} - \ln Cx$$

$$\ln|t| = \ln \frac{Ce^{2x^2}}{x}$$

$$t = \frac{Ce^{2x^2}}{x}$$

Заметим, что $t = 0$ – решение при $C = 0$.
Пусть $C = C(x)$:

$$t' = t\frac{4x^2 - 1}{x} - 1$$

$$\left(\frac{Ce^{2x^2}}{x}\right)' = \frac{Ce^{2x^2}}{x}\frac{4x^2 - 1}{x} - 1$$

$$\frac{(Ce^{2x^2})'x - Ce^{2x^2}}{x^2} = \frac{Ce^{2x^2}}{x}\frac{4x^2 - 1}{x} - 1$$

$$\frac{(C'e^{2x^2} + 4xCe^{2x^2})x - Ce^{2x^2}}{x^2} = \frac{Ce^{2x^2}}{x}\frac{4x^2 - 1}{x} - 1$$

$$\frac{C'xe^{2x^2}+4x^2Ce^{2x^2}-Ce^{2x^2}}{x^2}=\frac{Ce^{2x^2}}{x}\frac{4x^2-1}{x}-1$$

$$\frac{C'xe^{2x^2}+4x^2Ce^{2x^2}-Ce^{2x^2}}{x^2}=\frac{4x^2Ce^{2x^2}-Ce^{2x^2}}{x^2}-1$$

$$\frac{C'e^{2x^2}}{x}=-1$$

$$C'e^{2x^2}=-x$$

$$\int dC=-\int\frac{xdx}{e^{2x^2}}$$

$$\int dC=-\frac{1}{4}\int\frac{d(2x^2)}{e^{2x^2}}$$

$$\int dC=\frac{1}{4}\int e^{-2x^2}d(-2x^2)$$

$$C=\frac{1}{4}e^{-2x^2}+A,\ A=const$$

Запишем теперь:

$$t=\frac{\left(\frac{1}{4}e^{-2x^2}+A\right)e^{2x^2}}{x}=\frac{1+Ae^{2x^2}}{4x},\ A=const$$

Обратная замена $z=\frac{1}{t}$:

$$z=\frac{4x}{1+Ae^{2x^2}},\ A=const$$

$$y=x+\frac{4x}{1+Ae^{2x^2}},\ A=const$$

и еще одно решение:

$$y=0$$

Ответ: $y=x+\frac{4x}{1+Ae^{2x^2}}$, $A=const$ и $y=0$.

4

Решить уравнение в дифференциалах, подобрав интегрирующий множитель в виде $\mu(x, y) = (x + y^2)^\alpha$.
Записать ответ в виде $F(x, y) = C$.

$$2y(x + y^2 - 1)dy + (x^2y^2 + x^3 - 1)dx = 0$$

Решение:

$$P = 2y(x + y^2 - 1)$$
$$Q = x^2y^2 + x^3 - 1$$
$$(\mu P)'_x = (\mu Q)'_y$$
$$\mu'_x P + \mu P'_x = \mu'_y Q + \mu Q'_y$$
$$\mu'_y = \left((x + y^2)^\alpha\right)'_y = 2y\alpha(x + y^2)^{\alpha-1}$$
$$\mu'_x = \left((x + y^2)^\alpha\right)'_x = \alpha(x + y^2)^{\alpha-1}$$
$$P'_x = \left(2y(x + y^2 - 1)\right)'_x = 2y$$
$$Q'_y = \left(x^2y^2 + x^3 - 1\right)'_y = 2yx^2$$
$$\alpha(x+y^2)^{\alpha-1}2y(x+y^2-1)+2y(x+y^2)^\alpha = 2y\alpha(x+y^2)^{\alpha-1}(x^2y^2+x^3-1)+(x+y^2)^\alpha 2yx^2$$
$$\cancel{2y(x+y^2)^{\alpha-1}}(\alpha(x+y^2-1)+(x+y^2)) = \cancel{2y(x+y^2)^{\alpha-1}}(\alpha(x^2y^2+x^3-1)+(x+y^2)x^2)$$
$$\alpha(x + y^2 - 1) + x + y^2 = \alpha(x^2y^2 + x^3 - 1) + x^3 + y^2x^2$$
$$\alpha(x + y^2 - 1 - x^2y^2 - x^3 + 1) = x^3 + y^2x^2 - x - y^2$$
$$\alpha(x + y^2 - x^2y^2 - x^3) = x^3 + y^2x^2 - x - y^2$$
$$\alpha = -1$$

Полученный интегральный множитель: $\mu = \frac{1}{x+y^2}$:

$$2y\frac{x + y^2 - 1}{x + y^2}dy + \frac{x^2y^2 + x^3 - 1}{x + y^2}dx = 0$$

Получено уравнение в полных дифференциалах вида:

$$\frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial x}dx = 0$$

$$F = \int \frac{x^2y^2 + x^3 - 1}{x + y^2} dx = \int \frac{x^2(y^2 + x) - 1}{x + y^2} dx = \int x^2 dx - \int \frac{1}{x + y^2} dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} - \ln|x + y^2| + C$$

Пусть $C = C(y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2y}{x + y^2} + C'_y$$

$$2y\frac{x + y^2 - 1}{x + y^2} = -\frac{2y}{x + y^2} + C'_y$$

$$2y - \frac{2y}{x + y^2} = -\frac{2y}{x + y^2} + C'_y$$

$$C'_y = 2y$$

$$\int dC = \int 2y dy$$

$$C = y^2 + A, \ A = const$$

$$F = \frac{x^3}{3} - \ln|x + y^2| + y^2 + A, \ A = const$$

Ответ: $F = \frac{x^3}{3} - \ln|x + y^2| + y^2 + A, \ A = const$

5

Решить уравнение методом введения параметра.
Записать ответ в виде $x = f(y, C)$.
Исследовать на наличие особых решений. Построить на одной координатной плоскости графики нескольких интегральных кривых и, при наличии, особых решений.

$$2x = \frac{y}{y'} + \ln(yy'),\ y > 0$$

Решение:
Введем параметр $p = y'$, сразу запишем $p = \frac{dy}{dx},\ dy = pdx,\ dx = \frac{dy}{p}$:

$$2x = \frac{y}{p} + \ln(yp)$$

Продифференцируем полученное выражение:

$$2dx = d\frac{y}{p} + d\ln(yp)$$

$$2dx = \frac{pdy - ydp}{p^2} + \frac{pdy + ydp}{yp}$$

$$2\frac{dy}{p} = \frac{pdy - ydp}{p^2} + \frac{pdy + ydp}{yp}$$

$$2dy = \frac{pdy - ydp}{p} + \frac{pdy + ydp}{y}$$

$$2dy = dy - \frac{ydp}{p} + dp + \frac{pdy}{y}$$

Сгруппируем по дифференциалам:

$$\left(1 - \frac{p}{y}\right) dy = \left(1 - \frac{y}{p}\right) dp$$

Замена: $t = \frac{y}{p},\ y = tp,\ dy = pdt + tdp$

$$\left(1 - \frac{1}{t}\right)(pdt + tdp) = (1 - t)\, dp$$

$$pdt + tdp - \frac{pdt}{t} - dp = dp - tdp$$

Сгруппируем по дифференциалам:

$$p\left(1-\frac{1}{t}\right)dt = 2(1-t)dp$$

Получено уравнение с разделяющимися переменными

$$p\left(1-\frac{1}{t}\right)dt = 2(1-t)dp\ |: p(1-t) \neq 0$$

Заметим, что $p = 0$ не является решением ???А ТЭ??

$$\left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{(1-t)}dt = \frac{2}{p}dp$$

$$-\frac{1}{t}dt = \frac{2}{p}dp$$

$$-\int\frac{1}{t}dt = \int\frac{2}{p}dp$$

$$-\ln|t| + C = 2\ln|p|$$

$$\ln\frac{C}{t} = \ln p^2$$

$$\frac{C}{t} = p^2$$

$$\frac{Cp}{y} = p^2$$

$$\frac{C}{y} = p$$

$$y = \frac{C}{p}$$

Теперь найдем $x(p)$:

$$2x = \frac{y}{p} + \ln(yp)$$

$$2x = \frac{y}{\frac{C}{y}} + \ln(y\frac{C}{y})$$

$$2x = \frac{y^2}{C} + \ln C$$

$$x = \frac{y^2}{2C} + \frac{\ln C}{2}$$

Ответ: $x = \frac{y^2}{2C} + \frac{\ln C}{2}$