Домашняя работа №2 Нечаевой Анны R3238

Задание №1

а) задача Коши $y' = p(x)y + q(x)$, $y(x_0) = y_0$

решение запишется в виде:

$$y(x) = \left(C - \int_{x_0}^{x} q(t) e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds} dt\right) e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}$$

• найдём значение C:

$$y_0(x_0) = \left(C - \int_{x_0}^{x_0} q(t) e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds} dt\right) e^{\int_{x_0}^{x_0} p(s)ds} = (C - 0)e^0 = C$$

$\Rightarrow$ $C = y_0$

• Окончательное решение:

$$y(x) = \left(y_0 - \int_{x_0}^{x} q(t) e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds} dt\right) e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}$$

б) решить задачу Коши и выразить ч/з $S_i(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

$x^2 y' + xy = \sin x$, $y(1) = y_0$

$x^2 y' + xy = \sin x \quad |: x^2 \neq 0 \quad (1)$

$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x^2}$

$y' = -\frac{y}{x} + \frac{\sin x}{x^2}$ – вид $y' = p(x)y + q(x)$, где

$q(x) = \frac{\sin x}{x^2}$

$p(x) = -\frac{1}{x}$

• тогда можем записать решение задачи Коши в виде:

$$y(x) = \left(C - \int_{x_0}^{x} q(t) e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds} dt\right) e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}$$

• аналогично пункту а) найдём C , $C = y_0$

$$y(x) = \left(y_0 - \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} e^{-\int_1^t -\frac{1}{s} ds} dt\right) e^{\int_1^x -\frac{1}{s} ds}$$

• $\int_1^t \frac{1}{s} ds = \ln t - \ln 1 = \ln t$

$$y(x) = \left(y_0 - \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} e^{\ln t} dt\right) e^{-\ln|x|}$$

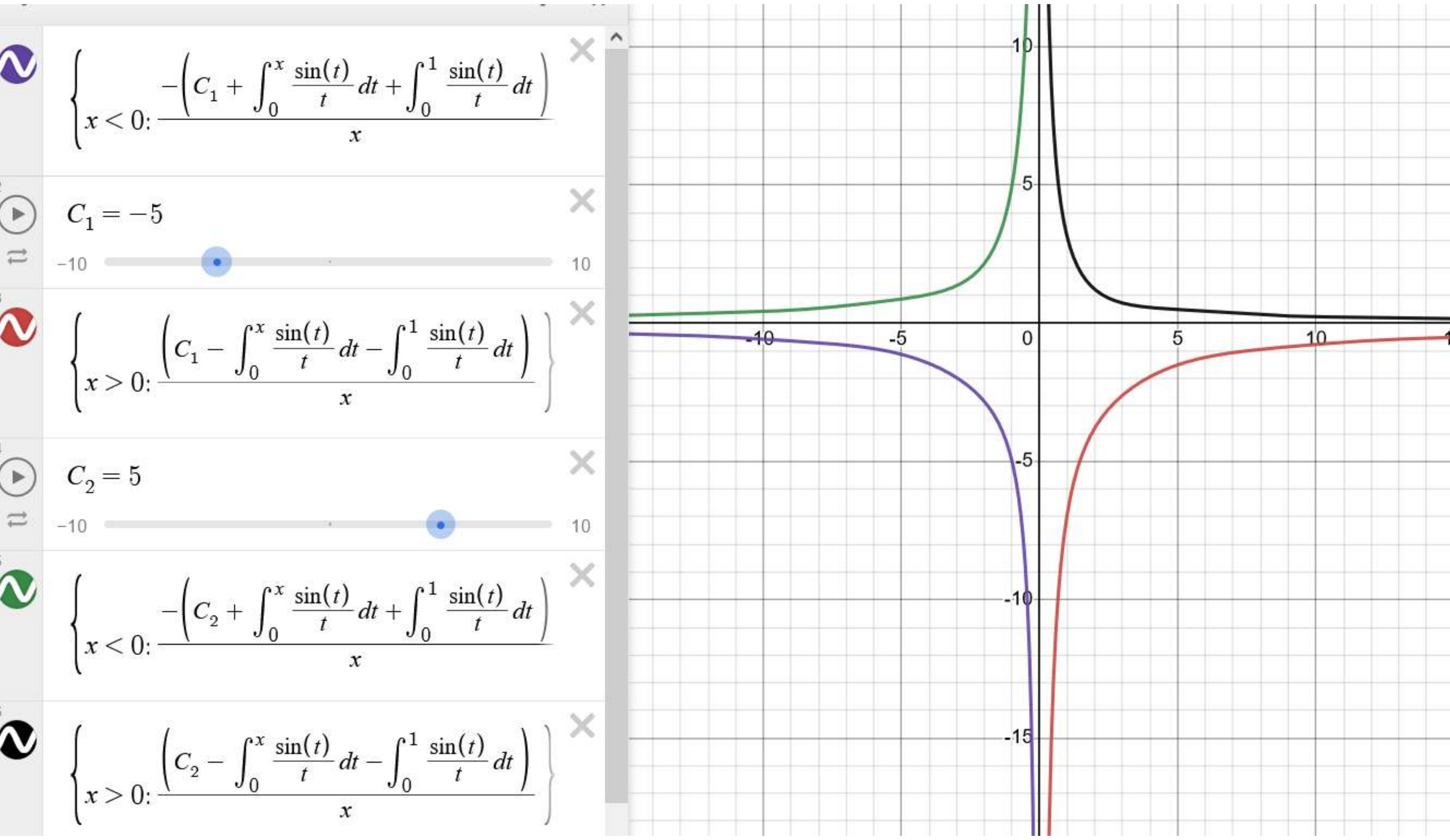
$$y(x) = \left(y_0 - \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} \cdot t\, dt\right) \frac{1}{|x|}$$

$$y(x) = \left(y_0 - \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt\right) \frac{1}{|x|}$$

$$y(x) = \left(y_0 - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt + \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt\right) \frac{1}{|x|}$$

$$y(x) = \left(y_0 - S_i(x) + S_i(1)\right) \frac{1}{|x|}$$

Ответ: $y(x) = \left(y_0 - S_i(x) + S_i(1)\right) \frac{1}{|x|}$, $x \neq 0$



$\left\{x<0: \frac{-\left(C_1+\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt+\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt\right)}{x}\right.$
$C_1=-5$
−10
10
$\left\{x>0: \frac{\left(C_1-\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt-\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt\right)}{x}\right\}$
$C_2=5$
−10
10
$\left\{x<0: \frac{-\left(C_2+\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt+\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt\right)}{x}\right.$
$\left\{x>0: \frac{\left(C_2-\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt-\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt\right)}{x}\right\}$
-10
-5
0
5
10
10
5
-5
-10
-15

Задание №2

Решить уравнение Риккати

$$xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2 \quad \Big| : x \neq 0 \ (1)$$

$$y' - \frac{2x+1}{x}y + \frac{y^2}{x} = -x$$

$$y' = \frac{2x+1}{x}y - \frac{y^2}{x} - x$$ — уравнение Риккати вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^2 + r(x)$$

- найдём частное решение в виде $y = Cx$:

$$(Cx)' = \frac{2x+1}{x} \cdot Cx - \frac{C^2x^2}{x} - x$$

$$C = (2x+1)C - C^2x - x$$

$$C^2x + x = 2xC \quad \Big| : x \neq 0$$

$$(C-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{C = 1}$$

- частное решение: $y = x$
- замена: $y = x + z$, $z = y - x$

$$1 + z' = \frac{(2x+1)}{x}(x+z) - \frac{(x+z)^2}{x} - x$$

$$z' + \cancel{1} = \cancel{2x} + \cancel{2z} + \cancel{1} + \frac{z}{x} - \cancel{x} - \cancel{2z} - \frac{z^2}{x} - \cancel{x}$$

$$z' = \frac{z - z^2}{x}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z(1-z)}{x} \quad \Big| \cdot \frac{dx}{z(1-z)}, \quad z(1-z) \neq 0 \ (2)$$

$$\int \frac{dz}{z(1-z)} = \int \frac{dx}{x}$$

- $$\int \frac{dz}{z(1-z)} = \int \frac{dz}{z} + \int \frac{dz}{1-z} = \ln|z| - \ln|1-z| + C = \ln\left|\frac{Cz}{1-z}\right|$$

$$\ln\left|\frac{Cz}{1-z}\right| = \ln|x|$$

$$\frac{Cz}{1-z} = x \Rightarrow \frac{C(y-x)}{1+x-y} = x$$

$$C(y-x) = x(1+x-y) \quad \Big| \ y \neq x+1 \text{ (из огр. 2)}$$

$$Cy - Cx = x + x^2 - yx$$

$$y(C+x) = x^2 + x + Cx$$

$$y = \frac{x^2+x+Cx}{C+x}$$

Δ наличие др. решений

(1) $x=0$ $\quad -y+y^2=0 \Rightarrow y(y-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right.$ – <u>не решение</u>

(2) $z(1-z)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} y=x \\ y=x+1 \end{array}\right.$

$\exists\ y=x$ $\quad x = \dfrac{x^2+x+Cx}{C+x} \Leftrightarrow \dfrac{Cx+x^2-x^2-x-Cx}{C+x} = \dfrac{-x}{C+x} = 0$ – входит в общ. интеграл, если $C \in \mathbb{R} \vee \{-\infty\}$, при $C=-\infty$; в случае $C \in \mathbb{R}$ $y=x$ – особое реш.

$\exists\ y=x+1$

$$x+1 = \frac{x^2+x+Cx}{C+x} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(C+x)-x^2-x-Cx}{C+x} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{\cancel{Cx}+C+\cancel{x^2}+\cancel{x}-\cancel{x^2}-\cancel{x}-\cancel{Cx}}{C+x} = \dfrac{C}{C+x} = 0$ – входит в общ. интеграл, если $C=0$

<u>Ответ:</u> $y = \dfrac{x^2+x+Cx}{C+x}$, $C \in \mathbb{R}$; $y=x$ – особое решение

Задание №3

$$(e^x \sin y + tg y)dx + (e^x \cos y + x \sec^2 y)dy = 0$$

$$(e^x \sin y + tg y)dx + (e^x \cos y + \frac{x}{\cos^2 y})dy = 0$$

• уравнение в полных дифференциалах, т.е.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$$

$$(e^x \sin y + tg y)'_y = e^x \cos y + \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$\parallel$$

$$(e^x \cos y + \frac{x}{\cos^2 y})'_x = e^x \cos y + \frac{1}{\cos^2 y}$$

• $d(e^x \sin y + x\, tg y) + d(e^x \sin y + x\, tg y) = 0$

$$2d(e^x \sin y + x\, tg y) = 0$$

$$2\int d(e^x \sin y + x\, tg y) = \int 0\, dx$$

$$2(e^x \sin y + x\, tg y) = C$$

$$\Downarrow$$

$$e^x \sin y + x\, tg y = C$$

Ответ: $e^x \sin y + x\, tg y = C$