Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Домашняя работа № 4

"Уравнения высших порядков: понижение порядка, ЛОУ и ЛУ"

по дисциплине Дифференциальные уравнения

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Магазенков Е. Н.*

Санкт-Петербург, 2023-2024

1

Решить уравнение, понизив порядок

$$\left(y' + 2y\right) y'' = y'^2 \tag{1}$$

1. Понижение порядка. Замена: $y' = p,\ y'' = p'p$:

$$\left(p + 2y\right) p'p = p^2 \ \mid : p \neq 0 \tag{2}$$

Заметим, что $p = 0$ – тоже решение.

$$\left(p + 2y\right) p' = p \tag{3}$$

$$\left(p + 2y\right) \frac{dp}{dy} = p \tag{4}$$

$$\left(p + 2y\right) dp = pdy \tag{5}$$

2. Получено однородное уравнение. Воспользуемся подстановкой: $p = vy \rightarrow dp = vdy + ydv$

$$\left(vy + 2y\right) \left(vdy + ydv\right) = vydy \tag{6}$$

$$y \left(v + 2\right) \left(vdy + ydv\right) = vydy \ \mid : y \neq 0 \tag{7}$$

Заметим, что $y = 0$ – тоже решение

$$\left(v + 2\right) \left(vdy + ydv\right) = vdy \tag{8}$$

$$v^2dy + 2vdy + vydv + 2ydv = vdy \tag{9}$$

$$v^2dy + vdy + vydv + 2ydv = 0 \tag{10}$$

$$(v^2 + v)dy = -y(v + 2)dv \ \Big| : y(v^2 + v) \neq 0 \tag{11}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{v + 2}{v^2 + v} dv \tag{12}$$

$$\int \frac{v+2}{v^2+v}dv = \int \frac{dv}{v+1} + 2\int \frac{dv}{v^2+v} = \int \frac{dv}{v+1} + 2\left(-\int \frac{dv}{v+1} + \int \frac{dv}{v}\right) =$$
$$= 2\ln|v| - \ln|v+1| + C = \ln C\frac{v^2}{v+1} \tag{13}$$

$$\ln y = -\ln C\frac{v^2}{v+1} \tag{14}$$

$$Cy = \frac{v+1}{v^2} \tag{15}$$

3. Вернемся к переменной p: $v = \frac{p}{y}$

$$Cy = \frac{\frac{p}{y}+1}{\left(\frac{p}{y}\right)^2} \tag{16}$$

$$Cy = \frac{\left(\frac{p}{y}+1\right)y^2}{p^2} \tag{17}$$

$$Cy = \frac{y}{p} + \frac{y^2}{p^2} \tag{18}$$

$$Cy = \frac{y}{y'} + \frac{y^2}{(y')^2} \tag{19}$$

$$Cy(y')^2 = yy' + y^2 \tag{20}$$

$$C(y')^2 - y' - y = 0 \tag{21}$$

Решим, как квадратное уравнение относительно y'

$$\sqrt{D} = \sqrt{1+4yC} \tag{22}$$

$$y_1' = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{1-\sqrt{1+4yC}}{2C} \tag{23}$$

$$y_2' = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{1+\sqrt{1+4yC}}{2C} \tag{24}$$

В общем виде:

$$y' = \frac{1\pm\sqrt{1+4yC}}{2C} \tag{25}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1\pm\sqrt{1+4yC}}{2C} \tag{26}$$

$$\frac{2C}{1\pm\sqrt{1+4yC}}dy = dx \tag{27}$$

$$\int \frac{2C}{1\pm\sqrt{1+4yC}}dy = \int dx \tag{28}$$

$$\int \frac{2C}{1 \pm \sqrt{1+4yC}} dy = \left| \begin{cases} u = 4yC + 1, \\ y = \frac{u-1}{4C}, \\ dy = \frac{du}{4C} \end{cases} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\pm\sqrt{u}+1} = \left| \begin{cases} w = \pm\sqrt{u} + 1, \\ dw = \pm\frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{u}} \end{cases} \right| =$$

$$= \int dw - \int \frac{dw}{w} = \pm\sqrt{4yC+1} + 1 - \ln\left(\pm\sqrt{4yC+1}+1\right) + A \quad (29)$$

$$\pm\sqrt{4yC+1} + 1 - \ln\left(\pm\sqrt{4yC+1}+1\right) + A = x \quad (30)$$

Объединим 1 и A и оставим предыдущее обозначение константы A:

$$\pm\sqrt{4yC+1} - \ln\left(\pm\sqrt{4yC+1}+1\right) + A = x \quad (31)$$

Ответ: $\pm\sqrt{4yC+1} - \ln\left(\pm\sqrt{4yC+1}+1\right) + A = x$

2

Решить ЛОДУ

$$y^{(4)} - 6y''' + 14y'' - 16y' + 8y = 0 \tag{32}$$

Соответствующий характеристический полином:

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 14\lambda^2 - 16\lambda + 8 = 0 \tag{33}$$

Первый корень $\lambda = 2$ – кратности 2:

$$(\lambda - 2)^2 \left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right) = 0 \tag{34}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 1 - i \\ \lambda_4 = 1 + i \end{cases} \tag{35}$$

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^x \cos x + C_4 e^x \sin x$

3

Решить ЛНДУ методом вариации произвольной постоянной

$$y''' - y' = \frac{e^x}{1 + e^x} \tag{36}$$

1. Решение соотвествующего однородного дифференциального уравнения:

$$y''' - y' = 0 \tag{37}$$

Характеристический полином:

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \tag{38}$$

Его корни:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases} \tag{39}$$

Решение:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x \tag{40}$$

Решим уравнеие методом вариации произвольной постоянной:

$$y' = C_1' + C_2' e^{-x} - C_2 e^{-x} + C_3' e^x + C_3 e^x \tag{41}$$

При этом $C_1' + C_2' e^{-x} + C_3' e^x = 0$.

$$y'' = -C_2' e^{-x} + C_2 e^{-x} + C_3' e^x + C_3 e^x \tag{42}$$

При этом $-C_2' e^{-x} + C_3' e^x = 0$.

$$y''' = C_2' e^{-x} - C_2 e^{-x} + C_3' e^x + C_3 e^x \tag{43}$$

$$\begin{aligned} y''' - y' = C_2' e^{-x} - C_2 e^{-x} + C_3' e^x + C_3 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 e^x = \\ = C_2' e^{-x} + C_3' e^x = \frac{e^x}{1 + e^x} \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{cases} C_1' + C_2' e^{-x} + C_3' e^x = 0 \\ -C_2' e^{-x} + C_3' e^x = 0 \\ C_2' e^{-x} + C_3' e^x = \frac{e^x}{1+e^x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1' + C_2' e^{-x} + C_3' e^x = 0 \\ C_3' e^{2x} = C_2' \\ C_2' e^{-x} + C_3' e^x = \frac{e^x}{1+e^x} \end{cases} \tag{45}$$

$$\begin{cases} C_1' = -2C_3'e^x \\ C_2' = C_3'e^{2x} \\ C_3' = \frac{1}{2}\frac{1}{1+e^x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1' = -\frac{e^x}{1+e^x} \\ C_2' = \frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{1+e^x} \\ C_3' = \frac{1}{2}\frac{1}{1+e^x} \end{cases} \tag{46}$$

$$C_1' = -\frac{e^x}{1+e^x} \rightarrow C_1 = -ln(e^x+1) + A \tag{47}$$

$$C_2' = \frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{1+e^x} \rightarrow C_2 = \frac{e^x - ln(e^x+1)}{2} + B \tag{48}$$

$$C_3' = \frac{1}{2}\frac{1}{1+e^x} \rightarrow C_3 = \frac{x - ln(e^x+1)}{2} + C \tag{49}$$

Ответ:

$y = -ln(e^x+1) + A + \left(\frac{e^x - ln(e^x+1)}{2} + B\right)e^{-x} + \left(\frac{x - ln(e^x+1)}{2} + C\right)e^x$