Задание №2

Решить уравнение Риккати

$$xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2 \quad \Big| : x \neq 0 \ (1)$$

$$y' - \frac{2x+1}{x}y + \frac{y^2}{x} = -x$$

$$y' = \frac{2x+1}{x}y - \frac{y^2}{x} - x$$ — уравнение Риккати вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^2 + r(x)$$

- найдём частное решение в виде $y = Cx$:

$$(Cx)' = \frac{2x+1}{x}\cdot Cx - \frac{C^2x^2}{x} - x$$

$$C = (2x+1)C - C^2x - x$$

$$C^2x + x = 2xC \quad \Big| : x \neq 0$$

$$(C-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{C=1}$$

- частное решение: $y = x$
- замена: $y = x + z$, $z = y - x$

$$1 + z' = \frac{(2x+1)}{x}(x+z) - \frac{(x+z)^2}{x} - x$$

$$z' + \cancel{1} = \cancel{2x} + \cancel{2z} + \cancel{1} + \frac{z}{x} - \cancel{x} - \cancel{2z} - \frac{z^2}{x} - \cancel{x}$$

$$z' = \frac{z - z^2}{x}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z(1-z)}{x} \quad \Big| \cdot \frac{dx}{z(1-z)}, \quad z(1-z) \neq 0 \ (2)$$

$$\int \frac{dz}{z(1-z)} = \int \frac{dx}{x}$$

- $$\int \frac{dz}{z(1-z)} = \int \frac{dz}{z} + \int \frac{dz}{1-z} = \ln|z| - \ln|1-z| + C = \ln\left|\frac{Cz}{1-z}\right|$$

$$\ln\left|\frac{Cz}{1-z}\right| = \ln|x|$$

$$\frac{Cz}{1-z} = x \Rightarrow \frac{C(y-x)}{1+x-y} = x$$

$$C(y-x) = x(1+x-y) \quad \Big| \ y \neq x+1 \text{ (из огр. 2)}$$

$$Cy - Cx = x + x^2 - yx$$

$y(C+x) = x^2 + x + Cx$

$$y = \frac{x^2+x+Cx}{C+x}$$

1 наличие др. решений

(1) $x=0$ $\quad -y+y^2=0 \Rightarrow y(y-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right.$ – не решение

(2) $z(1-z)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=1 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=x+1 \end{array}\right.$

$\exists\ y=x$ $\quad x = \frac{x^2+x+Cx}{C+x} \Leftrightarrow \frac{Cx+x^2-x^2-x-Cx}{C+x} = \frac{-x}{C+x} = 0$ – входит в общ. интеграл, если $C \in \mathbb{R} \vee \{-\infty\}$, при $C=-\infty$;
в случае $C \in \mathbb{R}$ $\ y=x$ – особое реш.

$\exists\ y = x+1$

$x+1 = \frac{x^2+x+Cx}{C+x} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(C+x)-x^2-x-Cx}{C+x} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{Cx+C+x^2+x-x^2-x-Cx}{C+x} = \frac{C}{C+x} = 0$ – входит в общ. интеграл, если $C=0$

<u>Ответ:</u> $y = \frac{x^2+x+Cx}{C+x}$, $C \in \mathbb{R}$; $y=x$ – особое решение