

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

## Лабораторная работа № 4 "Линейная фильтрация"

по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

**Нечаева А. А.**

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2024

# 1 Задание. Спектральное дифференцирование

## 1.1 Исходный график

Рассмотрим сигнал  $y = \sin(t)$  на промежутке  $[-100; 100]$  (рисунок 1).

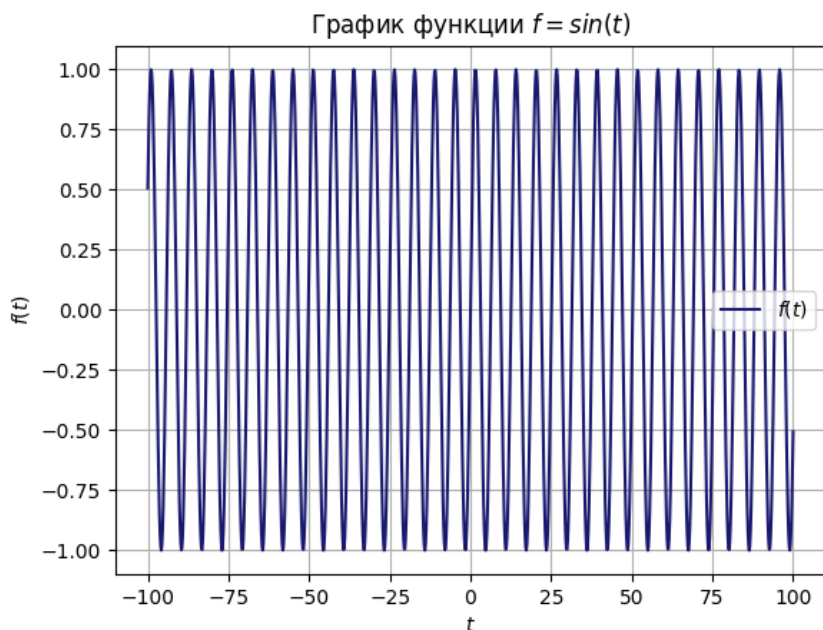


Рис. 1. Исходный график  $f = \sin(t)$ .

Будем также рассматривать часть исходного графика на промежутке  $[-10; 10]$  (рисунок 2) для большей наглядности.

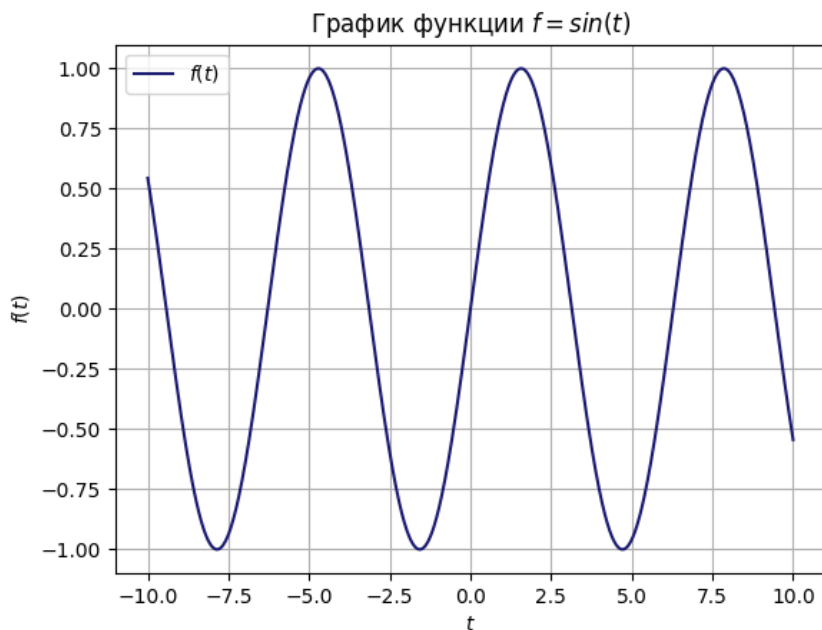


Рис. 2. Часть исходный график  $f = \sin(t)$ .

## 1.2 Добавление шума

Добавим к исходному графику функции небольшой шум вида

$$a \cdot (\text{rand}(\text{size}(t)) - 0.5)$$

результат представлен на рисунках 4 и 5.

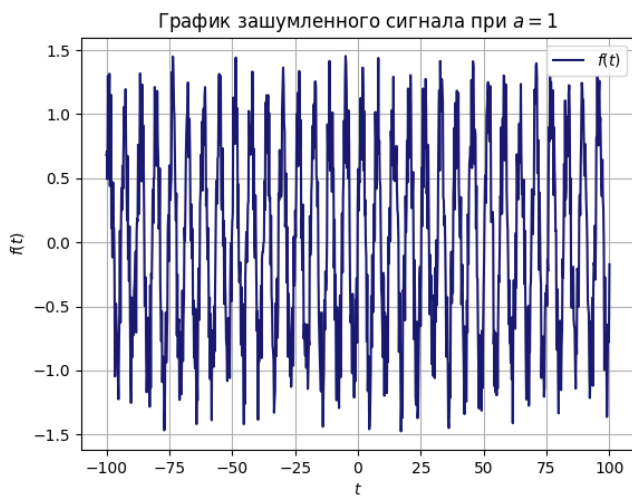


Рис. 3. Зашумленный график.

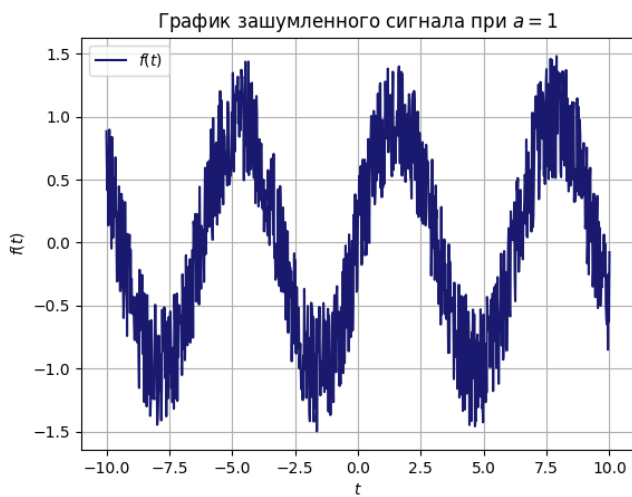


Рис. 4. Часть зашумленного графика.

### 1.3 Численная производная

Найдем численную производную от зашумленного сигнала, используя формулу поэлементного дифференцирования

$$\frac{y(k+1) - y(k)}{dt} \quad (1)$$

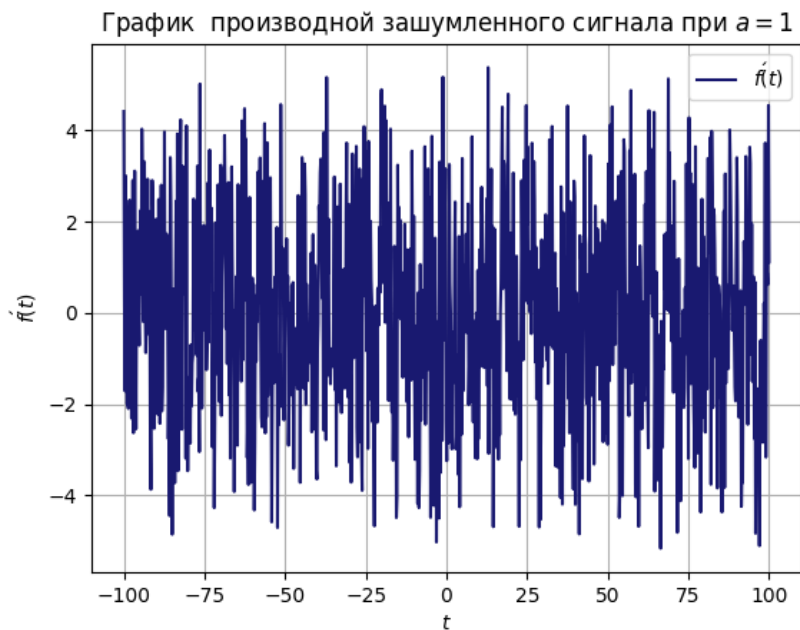


Рис. 5. Численная производная зашумленного графика функции при  $a = 1$  на полном промежутке  $[-100; 100]$ .

Несмотря на то, что исходный график функции можно узнать при добавлении шума с коэффициентом  $a = 1$ , график численной производной в этом случае практически неузнаваем (рисунки 5-6), но при  $a = 0.1$  очертания косинуса хорошо заметны и на графике численной производной (рисунок 7).

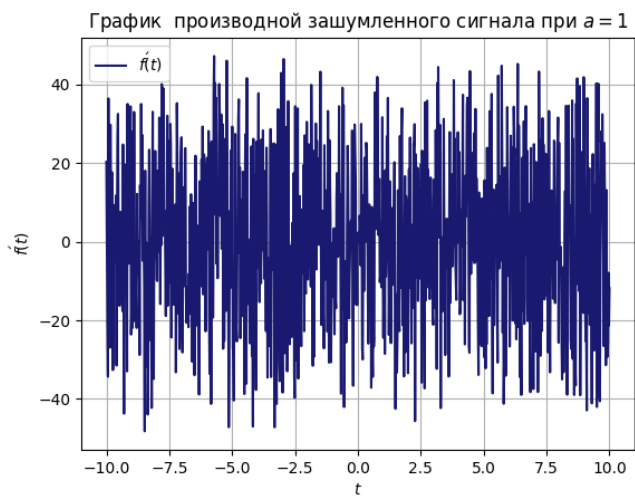


Рис. 6. Численная производная зашумленного графика функции при  $a = 1$ .



Рис. 7. Численная производная зашумленного графика функции при  $a = 0.1$ .

## 1.4 Спектральная производная

Найдем *спектральную производную* от зашумленного сигнала. Для этого с помощью численного интегрирования (*numpy.trapz*) найдем Фурье-образ сигнала и домножим его на  $\omega i$ , так как  $F\{f'(t)\} = \omega i F\{f(t)\}$ , для того, чтобы получить Фурье-образ производной.

После чего выполним обратное преобразование Фурье для получения спектральной производной.



Рис. 8. Спектральная производная зашумленного графика функции при  $a = 1$ .

На промежутке  $[-10; 10]$  графика заметно, что спектральная производная сильнее приближает точную производную  $f'(t) = \cos(t)$  (рисунок 10) исходного графика функции по сравнению с численной производной. Причем как в случае  $a = 1$ , так и  $a = 0.1$ . Спектральная производная отличается меньшим количеством шумов, чем численная.

**Вывод:** применение Фурье-преобразования может помочь получить более точную производную функции зашумленного сигнала.

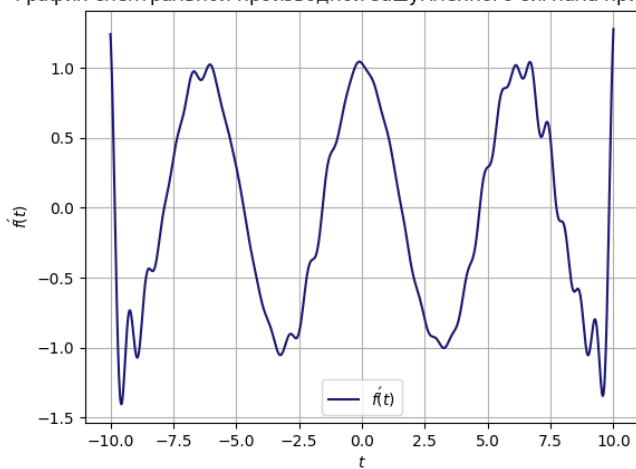
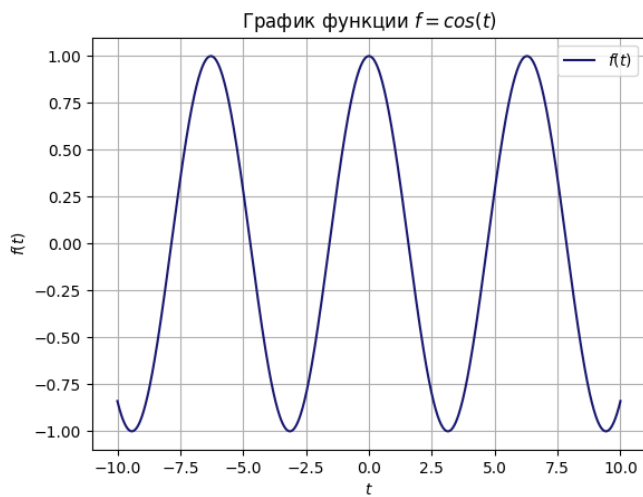
График спектральной производной зашумленного сигнала при  $a = 0.1$ Рис. 9. Спектральная производная зашумленного графика функции при  $a = 0.1$ .

Рис. 10. График истинной производной.



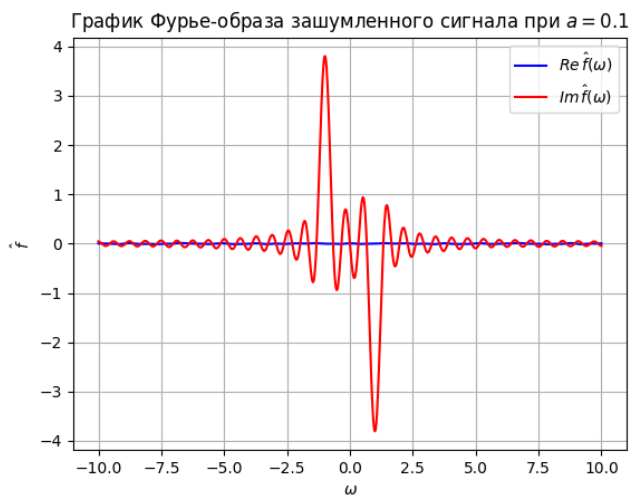


Рис. 11. График Фурье-образа зашумленной функции при  $a = 0.1$ .



Рис. 12. График Фурье-образа зашумленной функции при  $a = 1$ .

## 2 Задание. Линейные фильтры.

Рассмотрим сигнал

$$u = g + b \cdot (\text{rand}(\text{size}(t)) - 0.5) + c \cdot \sin(d \cdot t)$$

и выполним фильтрацию указанного сигнала, используя линейные фильтры.

Сигнал  $g(t)$  также перепишем из лабораторной 3: зададимся числами  $a = 1$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 2$  и рассмотрим функцию  $g(t) = a$  при  $t \in [t_1, t_2]$  и  $g(t) = 0$  при других  $t$ .

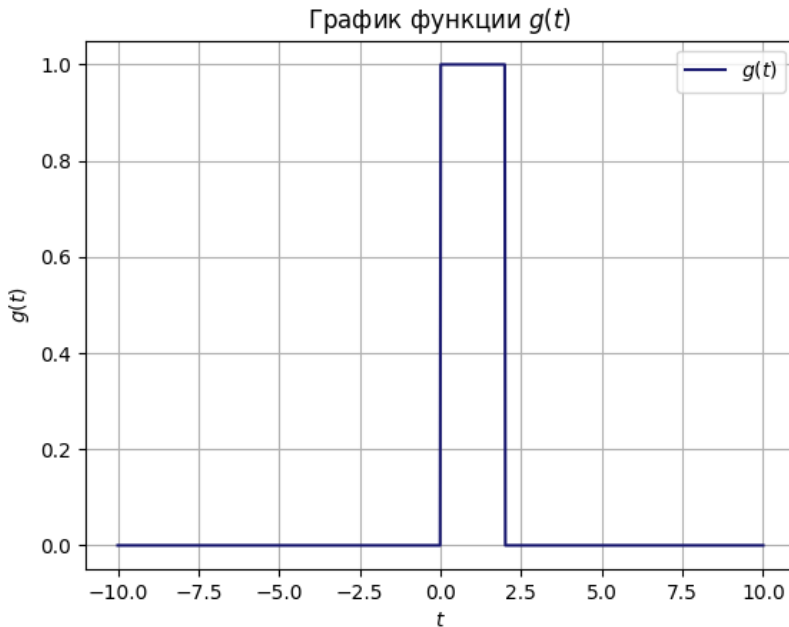


Рис. 13. Исходный график функции  $g(t)$ .

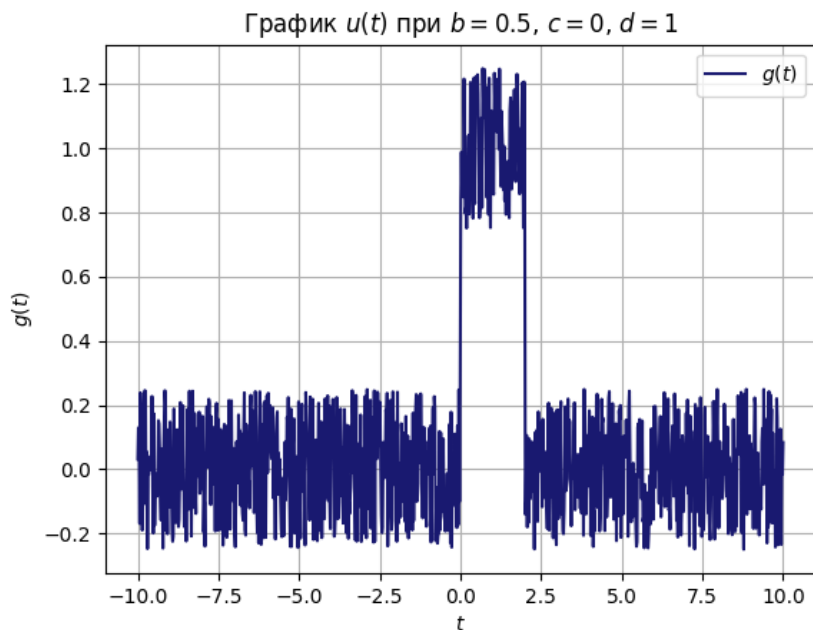


Рис. 14. График  $u(t)$  при  $b = 0.5, c = 0, d = 1$ .

## 2.1 Фильтр первого порядка.

Пусть  $c = 0$ . Зададим постоянную времени  $T > 0$  и пропустим сигнал  $u$  через линейный фильтр первого порядка

$$W_1(p) = \frac{1}{Tp + 1} \quad (2)$$

Заметим, что при малом значении параметра  $T$  шумы из сигнала практически не убираются (рисунок 15), но при увеличении значения коэффициента  $T$  график становится более гладким (рисунок 16).

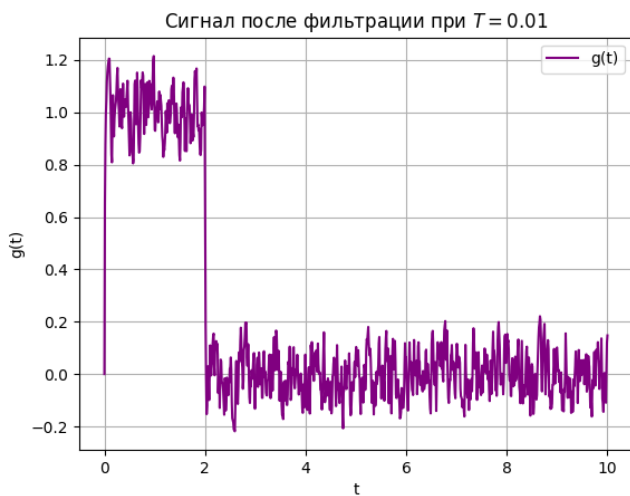


Рис. 15. График после фильтрации при  $T = 0.01$ .

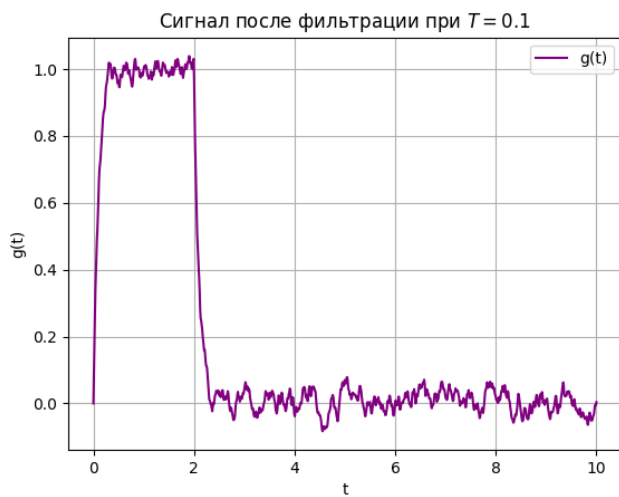


Рис. 16. График после фильтрации при  $T = 0.1$ .

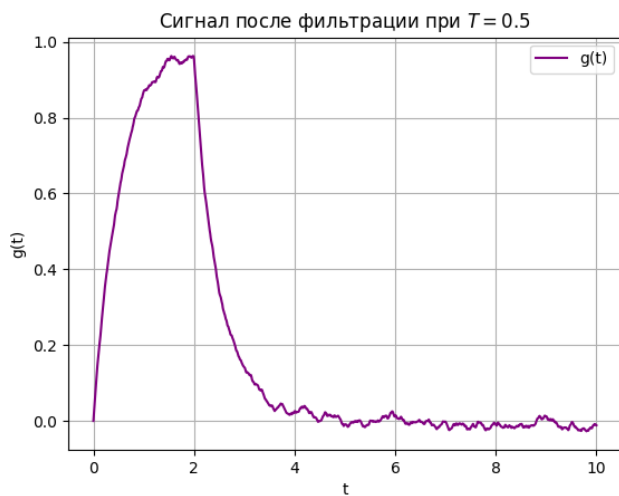


Рис. 17. График после фильтрации при  $T = 0.5$ .

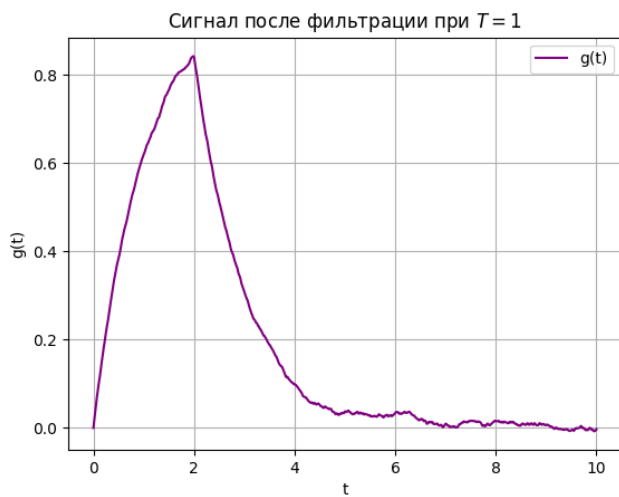


Рис. 18. График после фильтрации при  $T = 1$ .

При дальнейшем увеличении значения параметра  $T$ , начиная с  $T = 1$  (рисунок 18), теряется точность передаваемого сигнала.

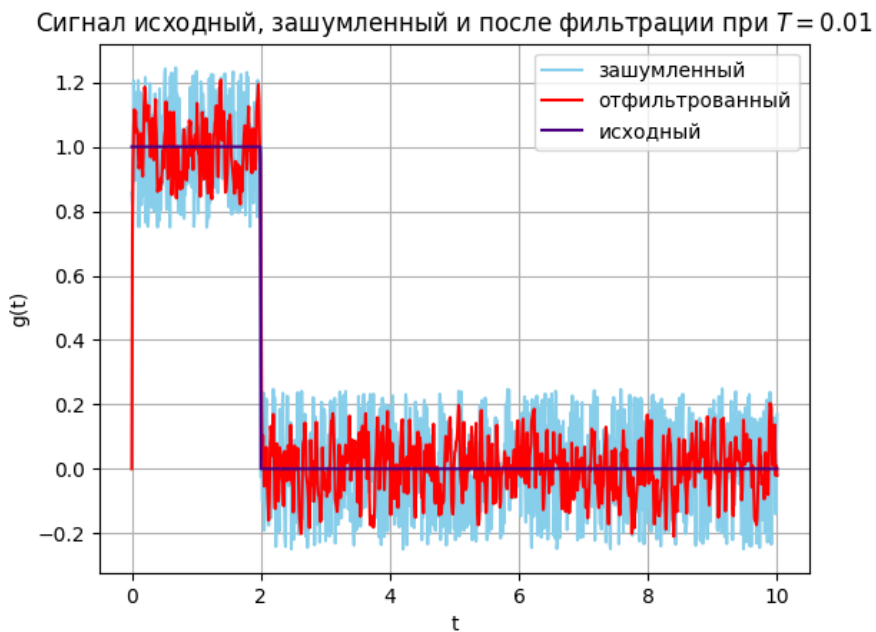


Рис. 19. Сравнительные графики при  $T = 0.01$ .

Далее, на рисунках 19-22 представлены сравнительные графики исходного сигнала  $g(t)$ , сигнала с шумами  $u(t)$  и сигнала после фильтрации при разных значениях параметра  $T$ .

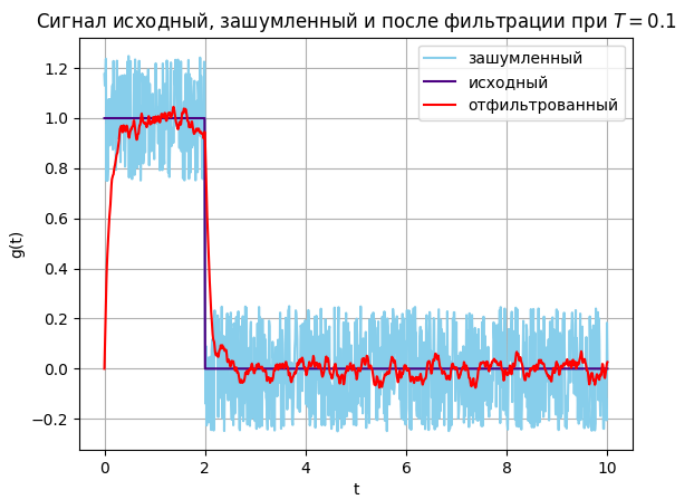


Рис. 20. Сравнительные графики при  $T = 0.1$ .

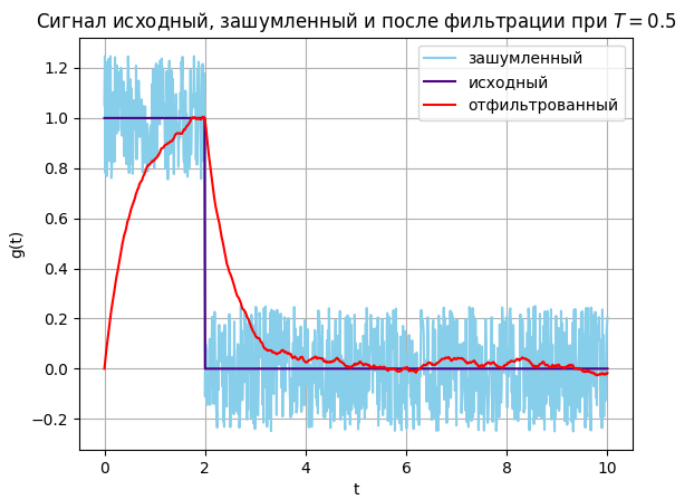


Рис. 21. Сравнительные графики при  $T = 0.5$ .

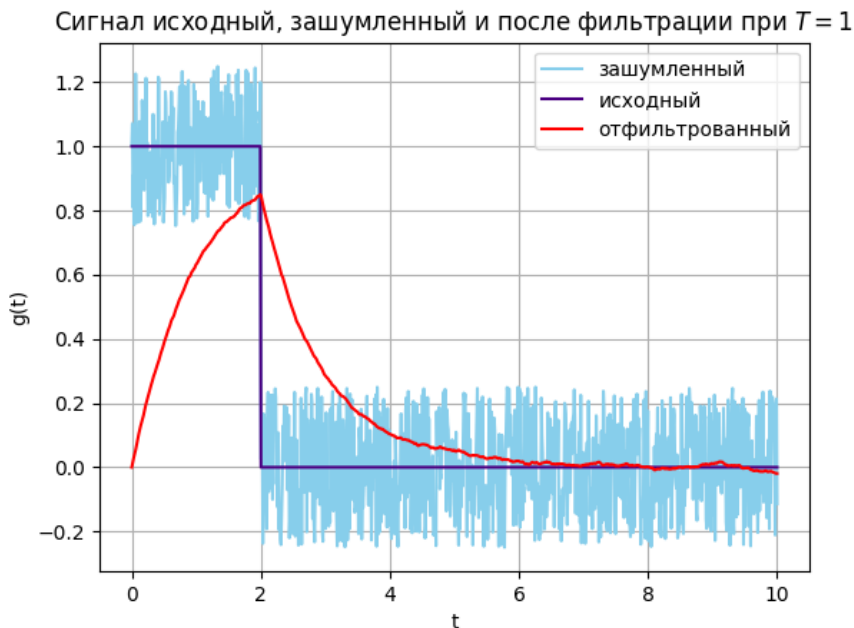


Рис. 22. Сравнительные графики при  $T = 1$ .

Наибольшее сходство фильтрованного сигнала с исходным достигается при  $T = 0.1$ , в чем можно убедиться, сравнив результаты, представленные на рисунках 19 - 22.

Модули Фурье-образов исходного и фильтрованного сигналов наиболее близки друг к другу при небольших значениях  $T$ , например,  $T = 0.01$  (рисунок 23) и  $T = 0.1$  (рисунок 24). При дальнейшем возрастании параметра  $T$  модуль Фурье-образа фильтрованного сигнала становится все более гладким и отличным от исходного сигнала. Фильтр избавляет от более высоких частот и чем выше параметр  $T$  тем ниже модуль подавляемых частот.





Рис. 23. Модули Фурье-образов сигналов при  $T = 0.01$ .



Рис. 24. Модули Фурье-образов сигналов при  $T = 0.1$ .



Рис. 25. Модули Фурье-образов сигналов при  $T = 0.5$ .

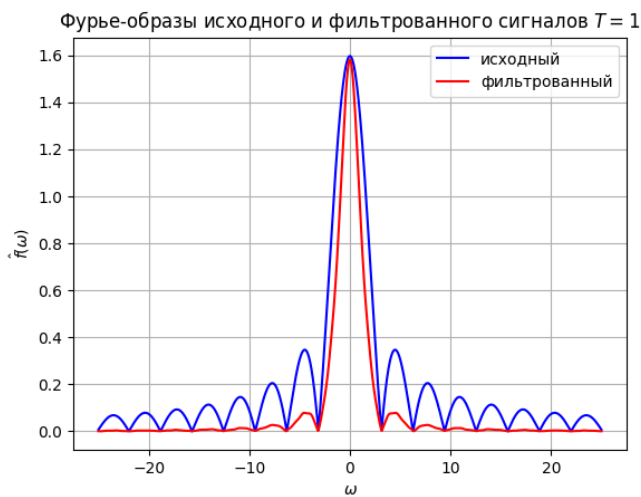


Рис. 26. Модули Фурье-образов сигналов при  $T = 1$ .

Построим также графики амплитудно-частотной характеристики линейного фильтра первого порядка.

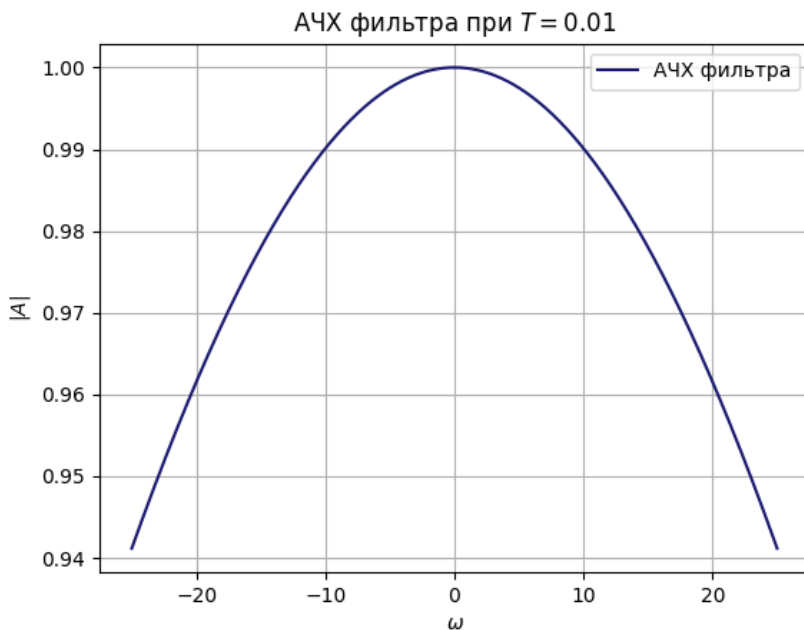


Рис. 27. АЧХ при  $T = 0.01$ .

Если опустить перпендикуляры на ось абсцисс из точек пересечения графика АЧХ с прямой  $|A| = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7$ , получим значения частот, выше которых частоты подавляются фильтром. Нетрудно заметить, что в случае  $T = 0.01$  подавляются очень высокие значения частот, поэтому разницы между сигналом с шумом и фильтрованным сигналом практически нет (рисунок 19). Наилучший результат был достигнут при  $T = 0.1$ , в этом случае подавляются частоты выше 7 по модулю, при увеличении значения  $T$  (рисунки 29-30) диапазон подавляемых частот становится настолько большим, что теряется сходство исходного сигнала и сигнала после фильтрации.

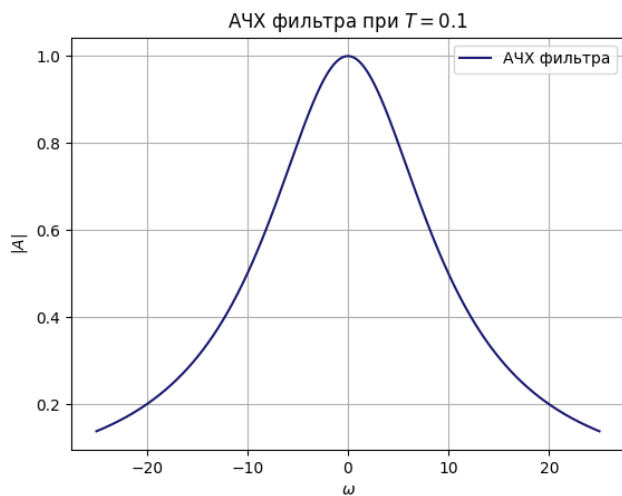


Рис. 28. АЧХ при  $T = 0.1$ .

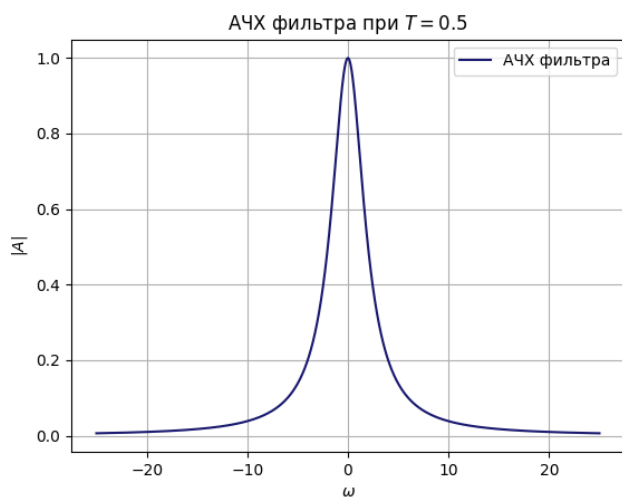


Рис. 29. АЧХ при  $T = 0.5$ .

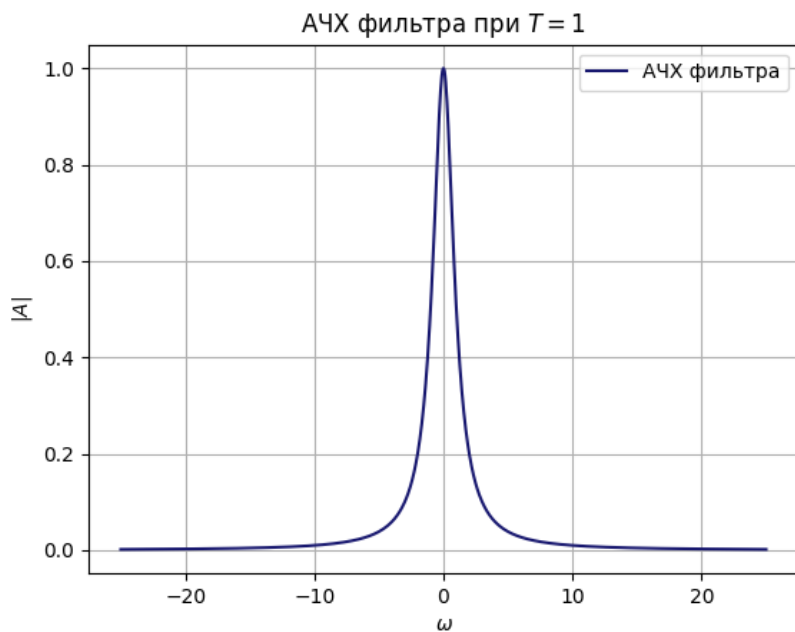


Рис. 30. АЧХ при  $T = 1$ .

## 2.2 Специальный фильтр

### **3 Задание. Сглаживание биржевых линий.**

Для визуализации был написан код на языке *Python*.  
Код расположен на **GitHub**.