Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 5
"Связь непрерывного и дискретного "

по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2024

1 Задание. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье.

Рассмотрим прямоугольную функцию $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/2, \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases} \tag{1}$$

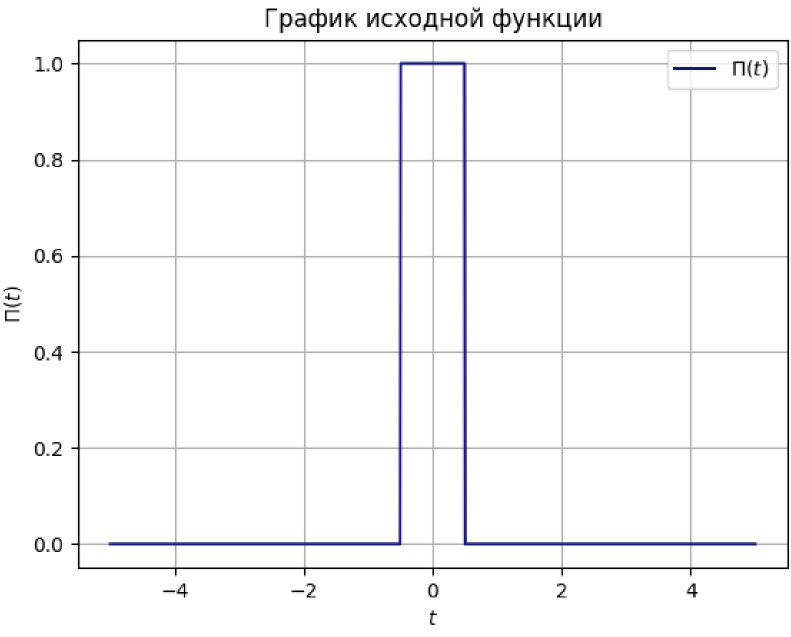


Рис. 1. График исходной функции $\Pi(t)$.

1.1 Истинный Фурье-образ.

Найдем аналитическое выражение для Фурье-образа

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \int\limits_{-0.5}^{0.5} e^{-2\pi i \nu t} dt = -\frac{e^{-2\pi i \nu t}}{2\pi i \nu}\Bigg|_{-0.5}^{0.5} =$$

$$= -\frac{e^{-\pi i \nu} - e^{\pi i \nu}}{2\pi i \nu} = \frac{e^{\pi i \nu} - e^{-\pi i \nu}}{2\pi i \nu} = \frac{sin(\pi \nu)}{\pi \nu} = sinc(\nu) \quad (2)$$

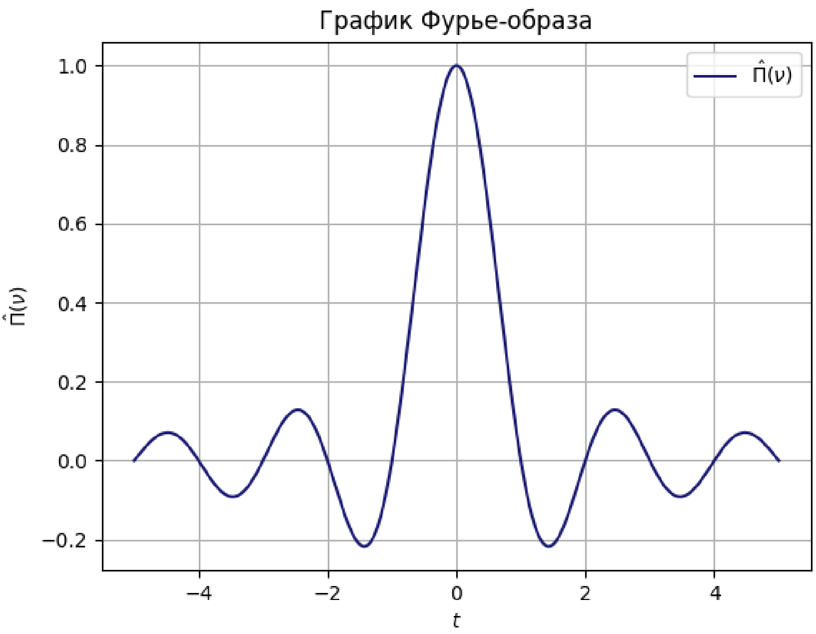
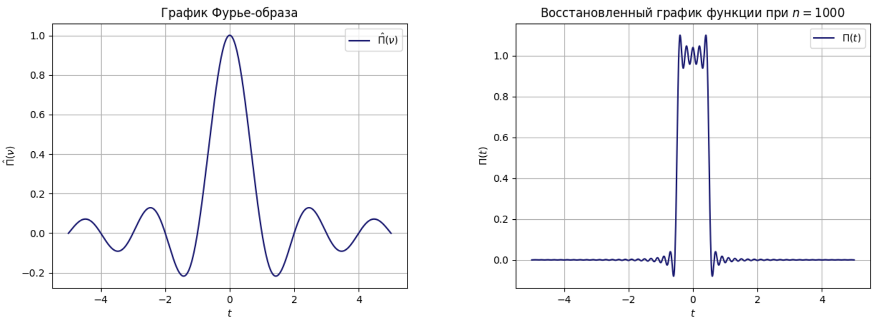


Рис. 2. График Фурье-образа функции $\Pi(t)$.

1.2 Численное интегрирование

Теперь найдем Фурье-образ $\Pi(t)$ с помощью численного интегрирования (функции *trapz* библиотеки *NumPy* языка *Python*), а затем с помощью численного интегрирования восстановим исходную функцию $\Pi(t)$.

Число шагов интегрирования будем задавать переменной n.



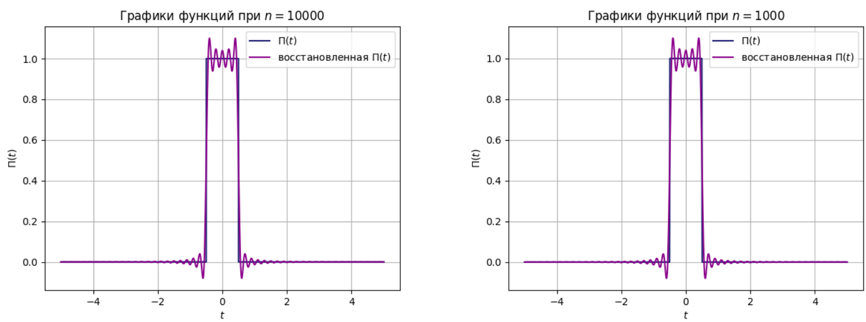
а) б)

Рис. 3. а) График Фурье-образа функции $\Pi(t)$*, полученный с помощью численного интегрирования, б) график восстановленной функции.*

Заметим, что при $n = 1000$ график Фурье-образа (рисунок 3а) совпадает с графиком Фурье-образа, построенного с помощью аналитической фомулы (рисунок 2). В то же время, график восстановленной функции (рисунок 3б) имеет заметные отличия от исходного графика функции (рисунок 1). Далее построим сравнительные графики Фурье-образов, исходной функции и восстановленной при разных значениях n, также будем фиксировать время работы программы. Промежуток интегрирования обозначим $[-d, d]$. Основные характеристики графиков представлены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры графиков восстановленной функции на промежутке интегрирования $[-5, 5]$.

№ рисунка	n	d	t, mc
4 а	10000	5	10369
4 б	1000	5	381
5 а	200	5	196
5 б	100	5	198
5 в	90	5	270
5 г	30	5	260



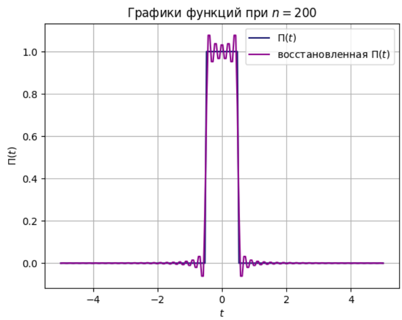
а) б)

Рис. 4. Графики восстановленной и исходной функции $\Pi(t)$ *при а)* $n = 10000$*, б)* $n = 1000$.

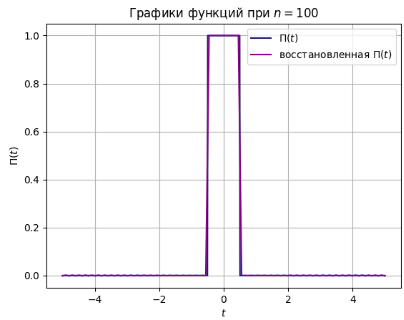
Сравнивая графики на рисунках 4, 5а-б, можно сделать вывод о том, что при уменьшении числа итераций в вычислении интегралов для нахождения Фурье-образа и последующего восстановления функции, сходство графиков исходной и восстановленной функций возрастает.

Однако при дальнейшем уменьшении n ($n < 100$) различия между графиками исходной и восстановленной функций возрастают (рисунки 5в и 5г). Время выполнения также возрастает (таблица 1).

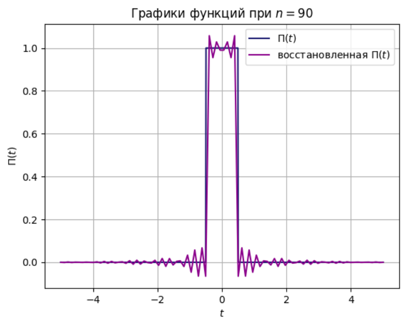
Наиболее оптимальным по результату и времени выполнения в нашем случае является $n = 100$.



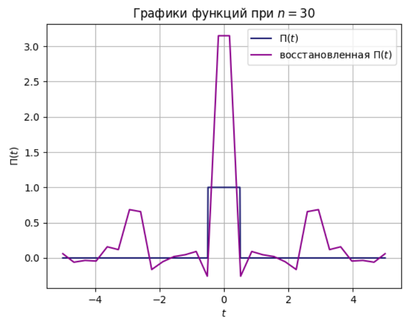
а)



б)



в)



г)

Рис. 5. Графики восстановленной и исходной функции $\Pi(t)$ *при а)* $n = 200$*, б)* $n = 100$*, а)* $n = 90$*, б)* $n = 30$*.*

2 Задание. Сэмплирование.

2.1 Сэмплирование синусов

2.2 Сэмплирование sinus cardinalis