

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

## Контрольная работа Вариант 8

по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

**Нечаева А. А.**

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2024

# 1 Задание

Разложить в ряд Фурье функцию, определить значения в точках разрыва:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq t \leq 0, \\ 3, & 0 < t \leq \pi \end{cases} \quad (1)$$

## 1.1 Разложение в ряд Фурье

Функция  $f(t)$  удовлетворяет условию теоремы Дирихле о разложении периодической функции в ряд Фурье.

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad (2)$$

где  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  – коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad (3)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad (4)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad (5)$$

Вычислим значения коэффициентов:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 dt + 3 \int_0^{\pi} dt \right) = \frac{1}{\pi} (\pi + 3\pi) = 4 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 \cos(nt) dt + 3 \int_0^{\pi} \cos(nt) dt \right) = \\ &= \frac{1}{n\pi} \left( \sin(nt) \Big|_{-\pi}^0 + 3 \sin(nt) \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{n\pi} (0 + 3 \cdot 0) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 \sin(nt) dt + 3 \int_0^{\pi} \sin(nt) dt \right) = \\
 &= -\frac{1}{n\pi} \left( \cos(nt) \Big|_{-\pi}^0 + 3 \cos(nt) \Big|_0^{\pi} \right) = -\frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n + 3 \cdot ((-1)^n - 1)) = \\
 &= -\frac{1}{n\pi} (2 \cdot ((-1)^n - 1)) = \frac{2 - 2(-1)^n}{n\pi} \quad (8)
 \end{aligned}$$

В итоге, запишем, полученное разложение в ряд Фурье:

$$f(t) \sim 2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin(nt) \right) \quad (9)$$

## 1.2 Нахождение значений в точках разрыва

Согласно теореме Дирихле: *если функция имеет ограниченную вариацию (конечное число точек строгого экстремума и точек разрыва первого рода), то в точках непрерывности ряд сходится к функции поточечно, а в точках разрыва сходится к среднему арифметическому значений двух концов.*

Точка разрыва первого рода  $t = 0$ , значение в точках разрыва

$$\phi(0) = \frac{1+3}{2} = 2.$$

## 2 Задание

Найти образ Фурье от функции

$$f(t) = \begin{cases} 1 - e^{1+t}, & t \leq -1, \\ 1 - e^{1-t}, & t \geq 1, \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (10)$$

### 2.1 Нахождение образа Фурье от функции

Фурье-образ функции  $f(t)$  будем находить по формуле:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{-1} (1 - e^{1+t}) e^{-i\omega t} dt + \int_1^{\infty} (1 - e^{1-t}) e^{-i\omega t} dt + \int_{-1}^1 0 \cdot e^{-i\omega t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{-1} (1 - e^{1+t}) e^{-i\omega t} dt + \int_1^{\infty} (1 - e^{1-t}) e^{-i\omega t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{-1} e^{-i\omega t} - e^{1+t-i\omega t} dt + \int_1^{\infty} e^{-i\omega t} - e^{1-t-i\omega t} dt \right) \quad \square \quad (12) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{1+t-i\omega t} dt = e \int_{-\infty}^{-1} e^{t(1-i\omega)} dt = \frac{e^{1+t(1-i\omega)}}{1-i\omega} \Big|_{-\infty}^{-1} = \frac{e^{1-(1-i\omega)}}{1-i\omega} - \frac{e^{1+\infty(1-i\omega)}}{1-i\omega} \quad (13)$$

$$\int_1^{\infty} e^{1-t-i\omega t} dt = e \int_1^{\infty} e^{-t(1+i\omega)} dt = -\frac{e}{1+i\omega} e^{-t(1+i\omega)} + C \quad (14)$$

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{i}{\omega} e^{-i\omega t} \right|_{-\infty}^{-1} = \frac{i}{\omega} e^{i\omega} - \frac{i}{\omega} e^{i\omega\infty} \quad (15)$$

$$\int_1^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{i}{\omega} e^{-i\omega t} \right|_1^{\infty} = \frac{i}{\omega} e^{-i\omega\infty} - \frac{i}{\omega} e^{-i\omega} \quad (16)$$