Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 5
"Связь непрерывного и дискретного "

по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватели: *Перегудин Алексей Алексеевич, Пашенко Артём Витальевич*

Санкт-Петербург, 2024

1 Задание. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье.

Рассмотрим прямоугольную функцию $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/2, \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases} \tag{1}$$

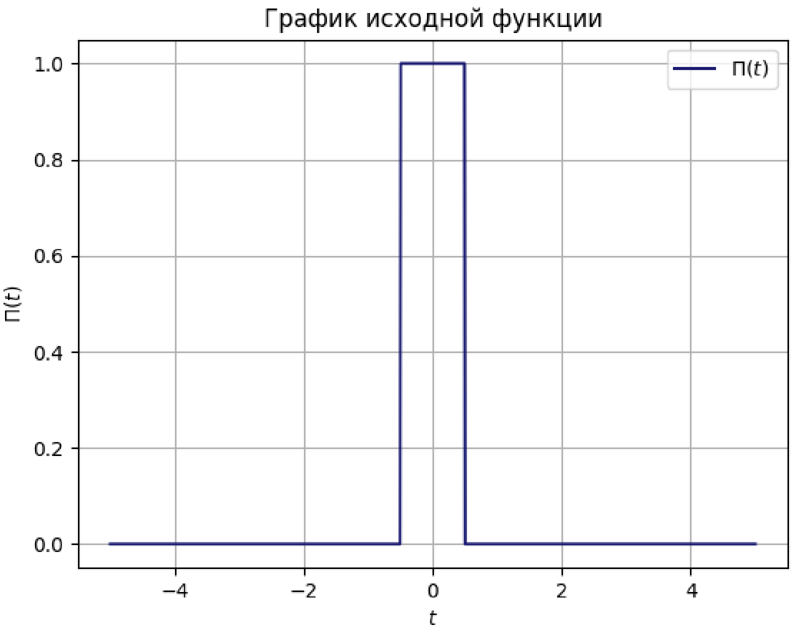


Рис. 1. График исходной функции $\Pi(t)$.

1.1 Истинный Фурье-образ.

Найдем аналитическое выражение для Фурье-образа

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \int\limits_{-0.5}^{0.5} e^{-2\pi i \nu t} dt = -\frac{e^{-2\pi i \nu t}}{2\pi i \nu}\bigg|_{-0.5}^{0.5} =$$
$$= -\frac{e^{-\pi i \nu} - e^{\pi i \nu}}{2\pi i \nu} = \frac{e^{\pi i \nu} - e^{-\pi i \nu}}{2\pi i \nu} = \frac{sin(\pi \nu)}{\pi \nu} = sinc(\nu) \quad (2)$$

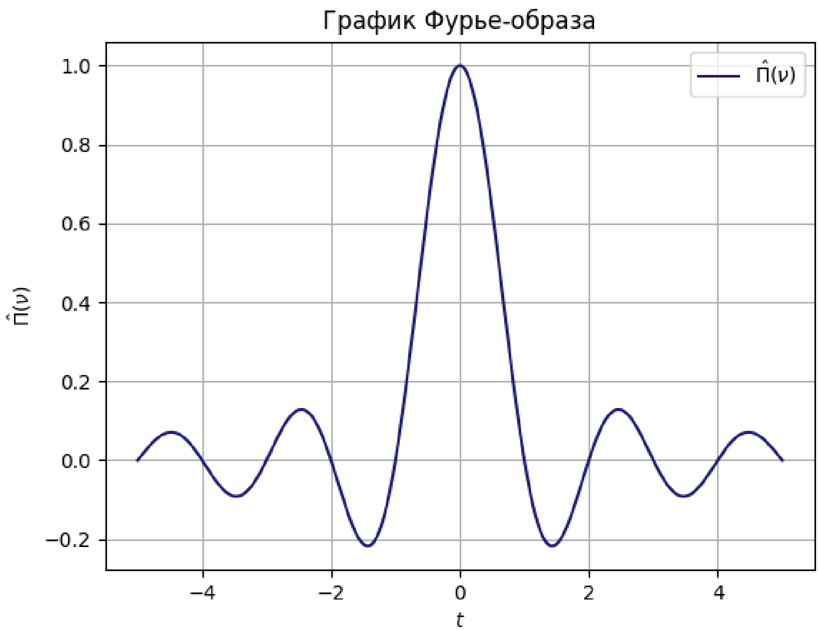
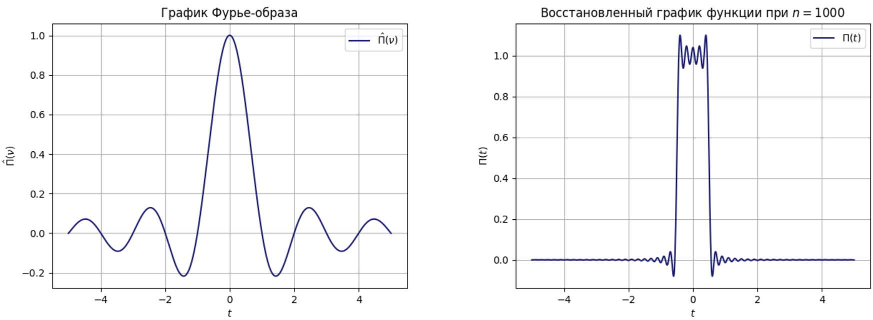


Рис. 2. График Фурье-образа функции $\Pi(t)$.

1.2 Численное интегрирование

Теперь найдем Фурье-образ $\Pi(t)$ с помощью численного интегрирования (функции *trapz* библиотеки *NumPy* языка *Python*), а затем с помощью численного интегрирования восстановим исходную функцию $\Pi(t)$.

Число шагов интегрирования будем задавать переменной n.



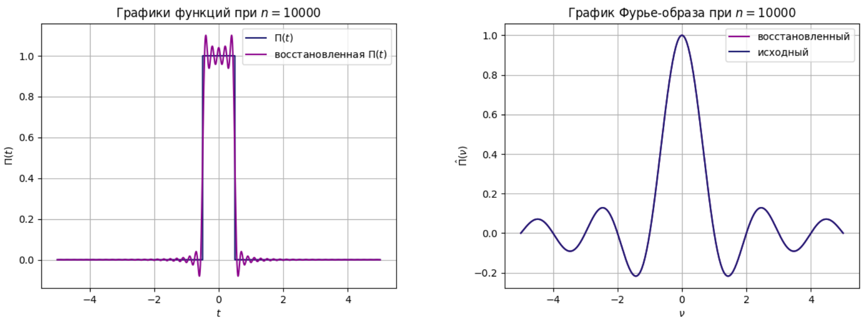
а) б)

Рис. 3. а) График Фурье-образа функции $\Pi(t)$*, полученный с помощью численного интегрирования, б) график восстановленной функции.*

Заметим, что при $n = 1000$ график Фурье-образа (рисунок 3а) совпадает с графиком Фурье-образа, построенного с помощью аналитической фомулы (рисунок 2). В то же время, график восстановленной функции (рисунок 3б) имеет заметные отличия от исходного графика функции (рисунок 1). Далее построим сравнительные графики Фурье-образов, исходной функции и восстановленной при разных значениях n, также будем фиксировать время работы программы. Промежуток интегрирования обозначим $[-d, d]$. Основные характеристики графиков представлены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры графиков восстановленной функции на промежутке интегрирования $[-5, 5]$.

№ рисунка	объект	n	d	$t, мс$
4 а	функция	10000	5	10369
4 б	образ	10000	5	5341
5 а	функция	200	5	196
5 б	образ	200	5	202
5 в	функция	100	5	198
5 г	образ	100	5	276
6 а	функция	90	5	270
6 б	образ	90	5	236



а) б)

Рис. 4. Графики восстановленной и исходной функции и их Фурье-образов при $n = 10000$.

Сравнивая графики на рисунках 4 а, 5 а, 5 в, можно сделать вывод о том, что при уменьшении числа итераций в вычислении интегралов для нахождения Фурье-образа и последующего восстановления функции, сходство графиков исходной и восстановленной функций возрастает.

Однако при дальнейшем уменьшении n ($n < 100$) различия между графиками исходной и восстановленной функций возрастают (рисунки 5в и 5г). Время выполнения также возрастает (таблица 1).

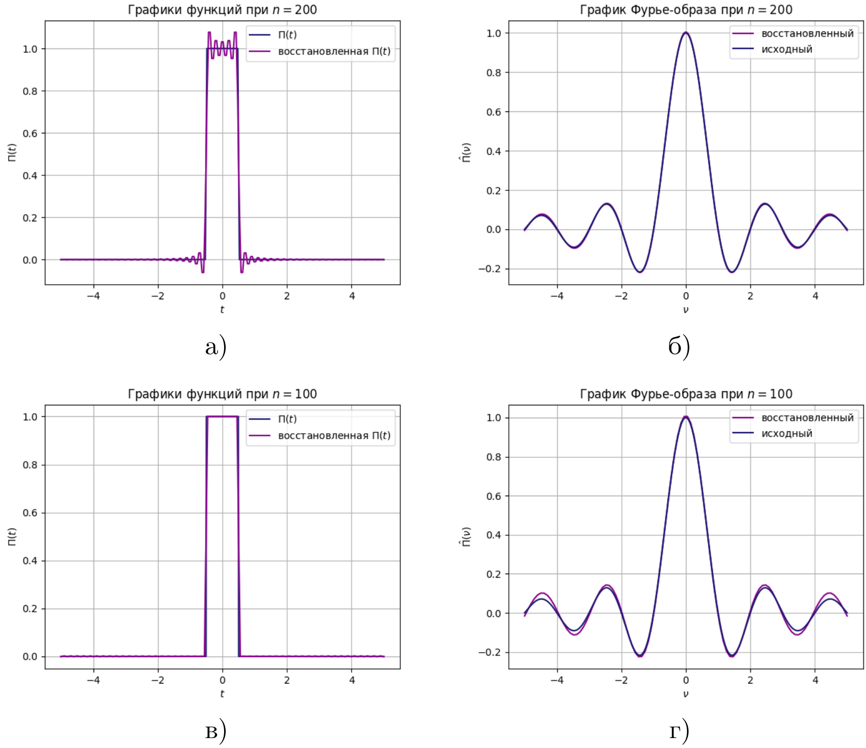
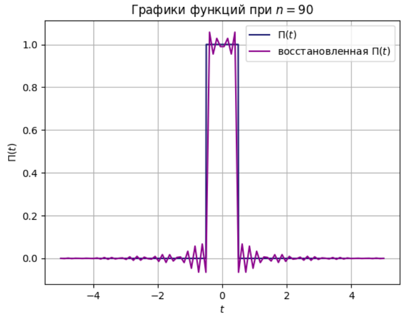
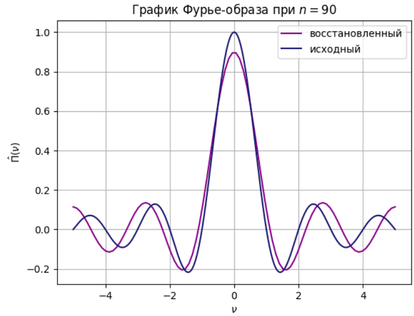


Рис. 5. Графики восстановленной и исходной функции и их Фурье-образов при $n = 200, 100$.

Наиболее оптимальным по результату и времени выполнения в нашем случае является $n = 100$.



а)

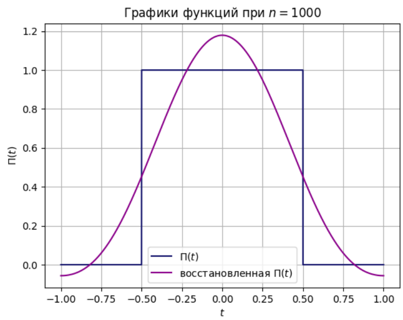


б)

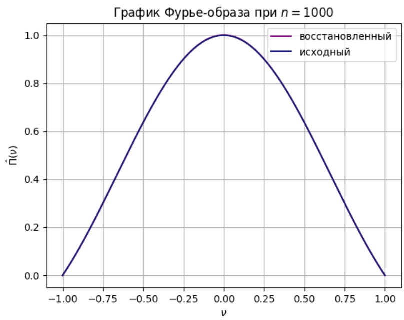
Рис. 6. Графики восстановленной и исходной функции и их Фурье-образов при $n = 90$.

Таблица 2. Параметры графиков восстановленной функции на промежутке интегрирования $[-1, 1]$.

№ рисунка	объект	n	d	t, mc
7 а	функция	1000	1	486
7 б	образ	1000	1	287
8 а	функция	30	1	241
8 б	образ	30	1	211
8 в	функция	10	1	191
8 г	образ	10	1	274
9 а	функция	5	1	161
9 б	образ	5	1	188



а)



б)

Рис. 7. Графики восстановленной и исходной функции и их Фурье-образов при $n = 1000$.

Заметим, что при $n = 1000$ и при $n = 30$ существенной разницы между восстановленными функциями нет (рисунок 7 а и 8 а), кроме того, что в восстановаленной функции на рисунке 8 а отчетливее видны ломанная, из которой она состоит. При дельнейшем уменьшении n точность восстановленной функции снижается. Время работы программы также снижается и достигает минимума при $n = 5$, далее опять увеличивается.

Наиболее оптимальными с точки зрения точности приближения исходного графика функции и времени выполнения в данном случае являются $n = 5$ и $n = 6$.

Теперь рассмотрим интегрирование на промежутке $[-10, 10]$, то есть при $d = 10$.

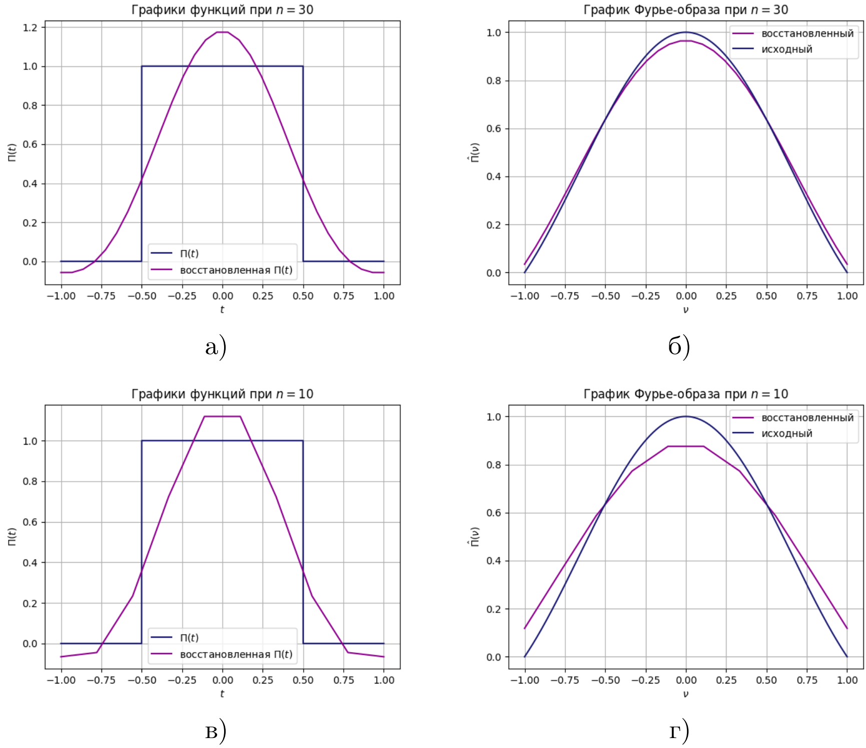
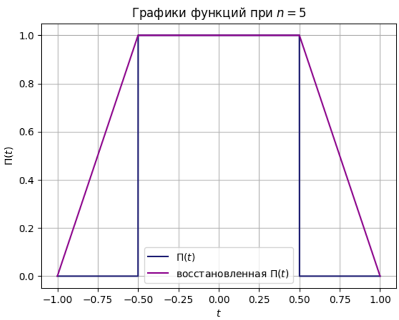
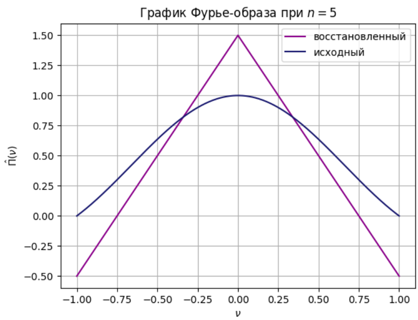


Рис. 8. Графики восстановленной и исходной функции и их Фурье-образов при $n = 30$, 10.

Заметим, что при $n = 10000$ и $n = 1000$ для случая $d = 10$ результат на графике практически идентичен, но время, затраченное на вычисление последнего примерно в 30 раз меньше. С точки зрения точности приближения в обоих случаях график исходной функции узнаваем, наибольшие различия замечены в точках скачков функции.



а)



б)

Рис. 9. Графики восстановленной и исходной функции и их Фурье-образов при $n = 5$.

Таблица 3. Параметры графиков восстановленной функции на промежутке интегрирования $[-10, 10]$.

№ рисунка	объект	n	d	t, mc
10 а	функция	10000	10	10766
10 б	образ	10000	10	5302
10 в	функция	1000	10	390
10 г	образ	1000	10	281
11 а	функция	500	10	271
11 б	образ	500	10	192
11 в	функция	250	10	223
11 г	образ	250	10	188

При $n = 500$ получаем еще удовлетворительный результат: исходная функция угадывается по графику восстановленной, в ходе дальнейшего уменьшении $n < 500$ график восстановленной функции все меньше похож на исходную.

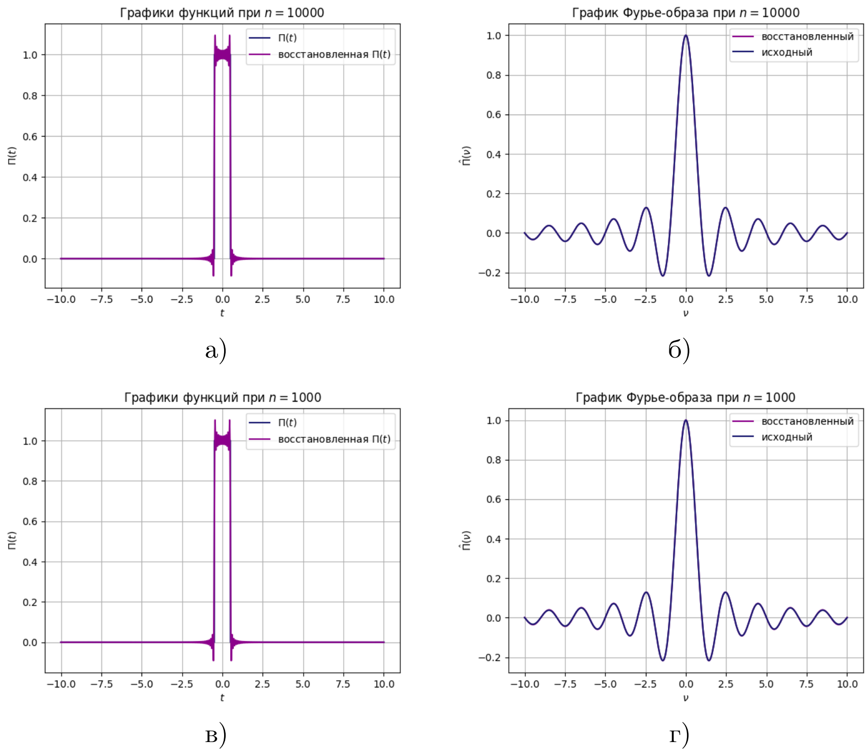
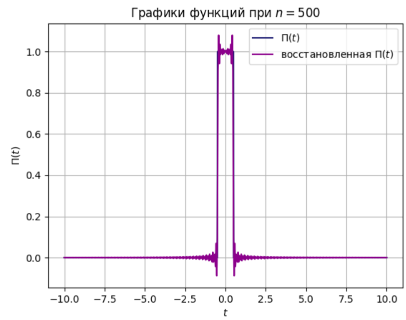
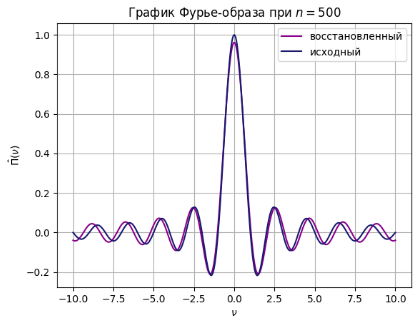


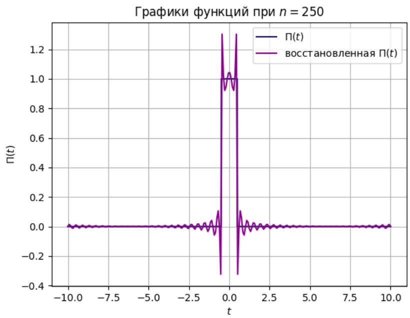
Рис. 10. Графики восстановленной и исходной функции и их Фурье-образов при $n = 10000$, 1000.



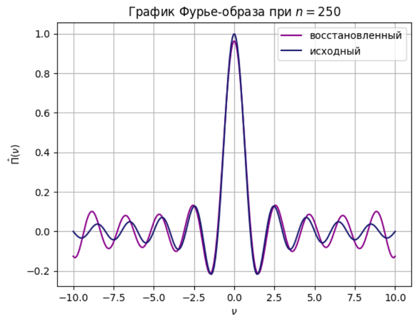
а)



б)



в)



г)

Рис. 11. Графики восстановленной и исходной функции и их Фурье-образов при $n = 500,\ 250$.

Вывод. Для получения оптимального результата требуется достаточно большое количество времени: 200 – 300 мс. Точность позволяет узнать в восстановленной функции исходную, пусть и с небольшими помехами в областях скачков функции.

1.3 Использование DFT

Найдем Фурье-образ функции $\Pi(t)$ с помощью дискретного преобразования Фурье (конструкция *fftshift(fft())*), используя его так, чтобы преобразование было *унитарным*. Затем выполним обратное преобразование от найденного Фурье-образа с помощью обратного дискретного преобразования. Сначала запишем, как работают преобразования:

$$numpy.fft.fft:$$

$$y(j) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k) \cdot \exp\left\{-\frac{2\pi ijk}{n}\right\} \tag{3}$$

$$numpy.fft.ifft:$$

$$x(k) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y(j) \cdot \exp\left\{\frac{2\pi ijk}{n}\right\} \tag{4}$$

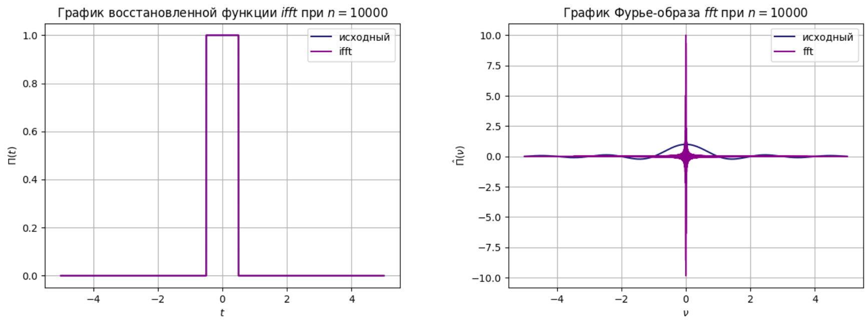
Для того, чтобы преобразования стали *унитарными*:

$$F(j) = \frac{y(j)}{\sqrt{n}}, \qquad f(k) = x(k)\sqrt{n}.$$

Таблица 4. Параметры графиков восстановленной с помощью DFT функции и ее Фурье-образа на промежутке интегрирования $[-5, 5]$.

№ рисунка	объект	n	d	$t, мс$
12 а	функция	10000	5	174
12 б	образ	10000	5	174

Заметим, что относительно аналогичного случая применения *trapz*, то есть при $n = 10000$ и $d = 5$, скорость выполнения с помощью DFT возрасла примерно в 100 раз, для сравнения для получения восстановленной функции с помощью численного интегрирования понадобилось **10369** мс, а для DFT **174** мс. График восстановленной функции визуально совпадает с графиком исходной, но Фурье-образ, полученный с помощью DFT сильно отличается от графика истинного Фурье-образа, хотя при использовании численного интегрирования (рисунок 4б) Фурье-образы восстановленной и исходной функций совпадают.



а) б)

Рис. 12. Графики восстановленной и исходной функции и их Фурье-образов при $n = 10000$.

1.4 Объяснения

1.4.1 Быстрота выполнения с помощью DFT.

Скорость DFT объясняется алгоритмамми, которые работают "под капотом"функций из библиотеки *NumPy*. Алгоритмы используют свойство симметрии, например, рассмотрим вычисление следующего компонента Фурье-образа:

$$y(j+n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k)\cdot\exp\left\{-\frac{2\pi i(n+j)k}{n}\right\} = \sum_{k=0}^{n-1} x(k)\cdot\exp\{-2\pi ik\}\cdot\exp\left\{-\frac{2\pi ijk}{n}\right\} = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} x(k)\cdot\exp\left\{-\frac{2\pi ijk}{n}\right\} = y(j) \quad (5)$$

Заметим свойство симметрии: $y(j + z \cdot n) = y(j)$, где $z \in \mathbb{Z}$.

Последовательно применяя этот инструмент, рекурсивно постоянно разделяя массив, который необходимо вычислить, добиваемся того, что ассимптотика алгоритма становится $O(n \log n)$ вместо $O(n^2)$, которая получается при преобразовании Фурье без использования оптимизации.

1.4.2 Отличие образа после DFT.

Предположим, что различия вызваны несоответствием дискретной формулы, использованной в DFT, непрерывной фурмуле для нахождения Фурье-образа. Запишем аналитическое выражение для Фурье-образа

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \tag{6}$$

И попробуем от непрерывного интеграла перейти к дискретной сумме.

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \sim \sum_{k=0}^{n-1} \Pi(t_0 + k \cdot \Delta t) \exp\left\{-2\pi i \nu (t_0 + k \cdot \Delta t)\right\} \Delta t =$$

$$= e^{-2\pi i \nu t_0} \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \Pi(t_0 + k \cdot \Delta t) e^{-2\pi i \nu k \cdot \Delta t} \tag{7}$$

Пусть $\widetilde{\nu} = m\Delta\nu$ – дискретная частота, $\widetilde{t} = t_0 + k\Delta t$ – дискретное время.

$$\hat{\Pi}(\widetilde{\nu}) = e^{-2\pi i \widetilde{\nu} t_0} \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \Pi(t_0 + k \cdot \Delta t) e^{-2\pi i \Delta\nu k \cdot \Delta t} =$$

$$= e^{-2\pi i \widetilde{\nu} t_0} \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \Pi(\widetilde{t}) \exp\left\{-\frac{2\pi i m \cdot k}{n}\right\} \tag{8}$$

Заметим, что полученное выражение похоже на формулу для Фурье-образа DFT с точностью до множителя перед знаком сумматора.

1.5 Приближение непрерывного с помощью DFT

Запишем формулу для приближения непрерывного с помощью унитарного DFT – умное использование fft:

$$\hat{\Pi}(\widetilde{\nu}) = \frac{\Delta t}{\sqrt{n}} e^{-2\pi i \widetilde{\nu} t_0} \sum_{k=0}^{n-1} \Pi(\widetilde{t}) \exp\left\{-\frac{2\pi i m \cdot k}{n}\right\} \tag{9}$$

Теперь запишем умное использование ifft:

$$\Pi(\widetilde{t}) = \frac{\Delta\nu}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{n-1} \Pi(\widetilde{\nu}) \exp\left\{\frac{2\pi i k \cdot m}{n}\right\} \tag{10}$$

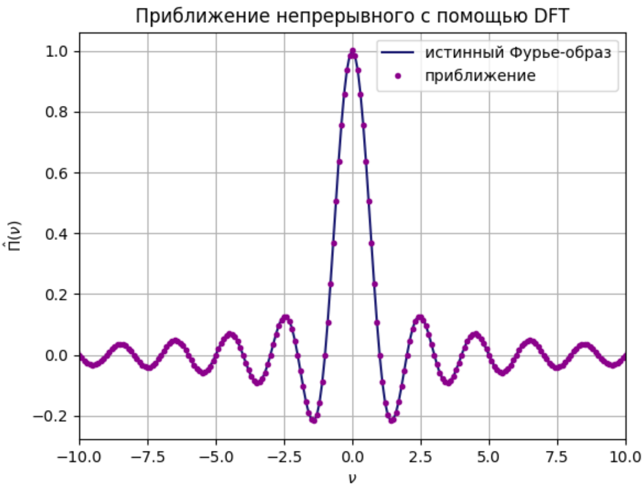


Рис. 13. Графики истинного и Фурье-образа, полученного с помощью умного fft.

Рис. 14. Графики исходной и функции, полученной с помощью умного ifft.

2 Задание. Сэмплирование.

2.1 Сэмплирование синусов

Зададимся параметрами $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 4$, $\phi_1 = \pi$, $\phi_2 = 2\pi$ и рассмотрим функцию $y(t) = a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$

$$y(t) = \sin(3t + \pi) + 2\sin(4t + 2\pi) \tag{11}$$

2.1.1 Построение непрерывного графика

Рис. 15. График исходной функции $y(t)$.

2.1.2 Сэмплированный вариант функции

Рассмотрим разреженный вариант массива времени и соответствующий ему массив значений.

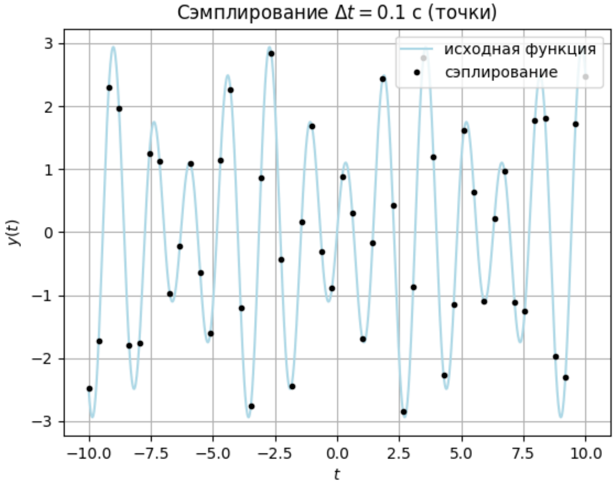


Рис. 16. Исходный и график после сэмплирования (точки).

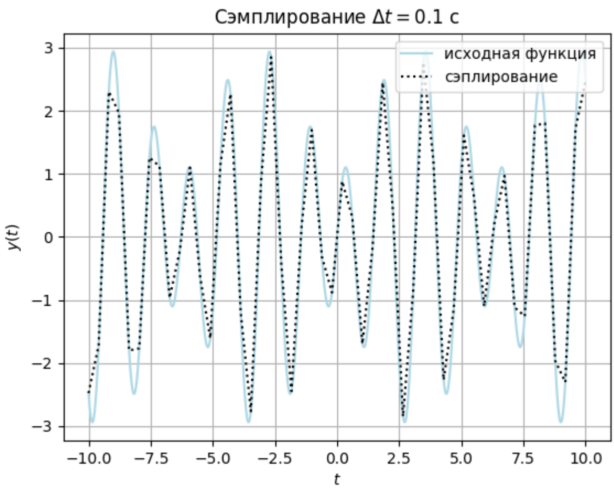


Рис. 17. Исходный и график после сэмплирования.

2.1.3 Восстановление функции

Применим интерполяционную формулу $f(t) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} f(t_n)\, sinc\,(2Bt - t_n)$ к сэмплированным данным с целью восстановления непрерывной функции.

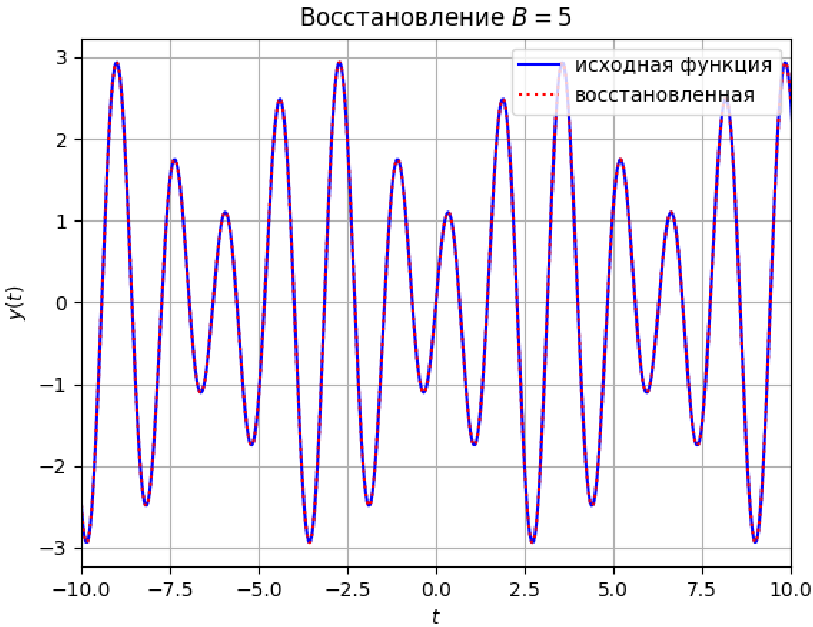


Рис. 18. Исходный график функции и восстановленный после сэмплирования.

2.1.4 Влияние шага дискретизации

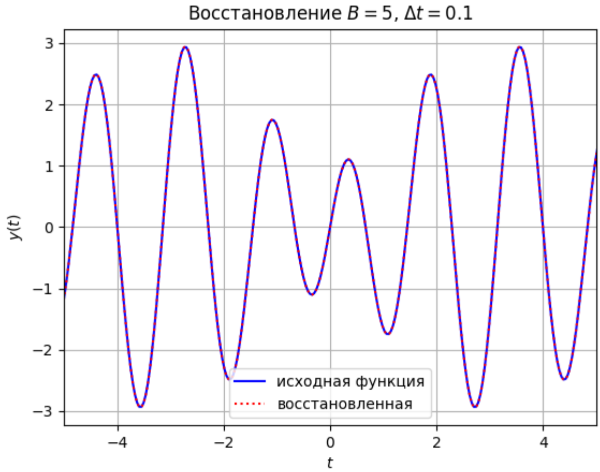


Рис. 19. Исходная и восстановленная функции при $\Delta t = 0.1$.

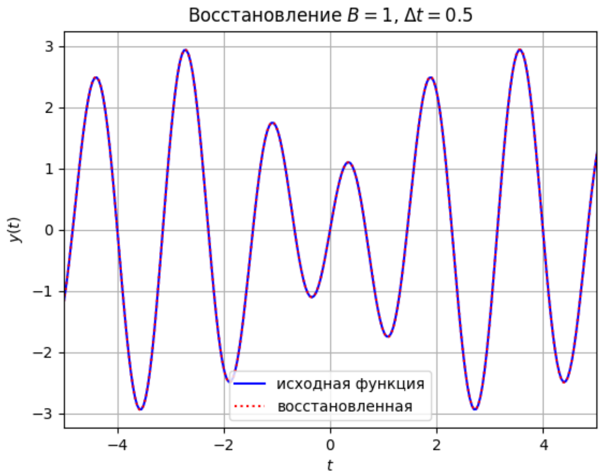


Рис. 20. Исходная и восстановленная функции при $\Delta t = 0.5$.

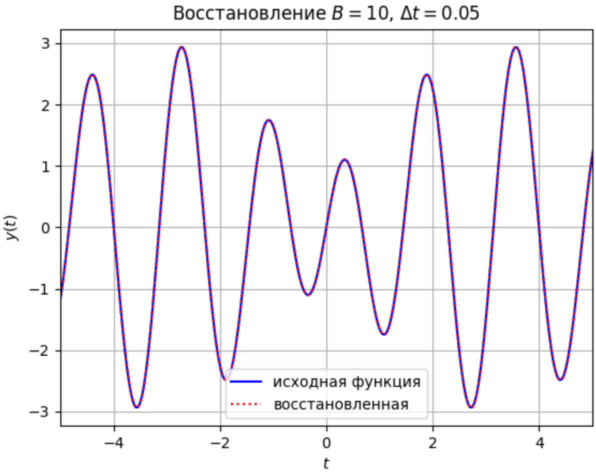


Рис. 21. Исходная и восстановленная функции при $\Delta t = 0.05$.

На рисунках 19, 20 и 21 изображены исходные и восстановленные графики функции $y(t)$ при шагах дискретизации 0.1, 0.5 и 0.05 соответственно. Так как для всех трех случаев восстановленная функция практически совпадает с исходной, успешность восстановления не зависит от шага дискретизации при условии $\Delta t = \frac{1}{2B}$. Следовательно, результаты подтверждают теорему Найквиста-Шеннона-Котельникова.

2.2 Сэмплирование sinus cardinalis

Зададимся параметром $b = 2$ и рассмотрим функцию $y(t) = sinc(bt)$:

$$y(t) = sinc(2t) \tag{12}$$

2.2.1 Построение непрерывного графика

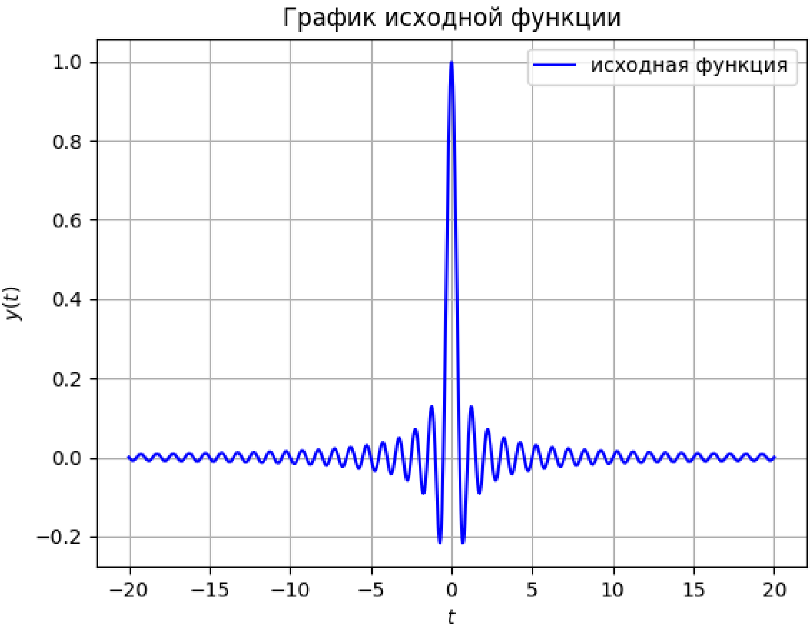


Рис. 22. График исходной функции $y(t)$.

2.2.2 Влияние шага дискретизации

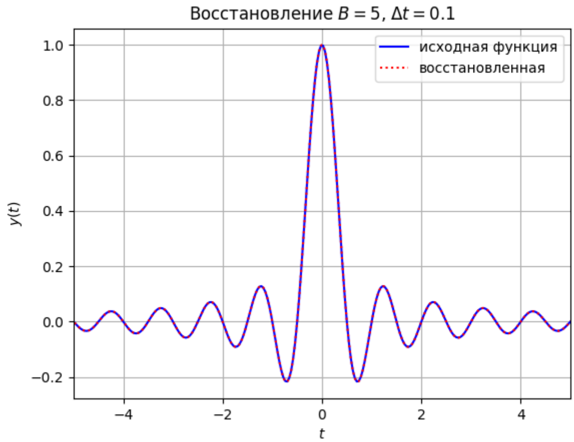


Рис. 23. Исходная и восстановленная функции при $\Delta t = 0.01$.

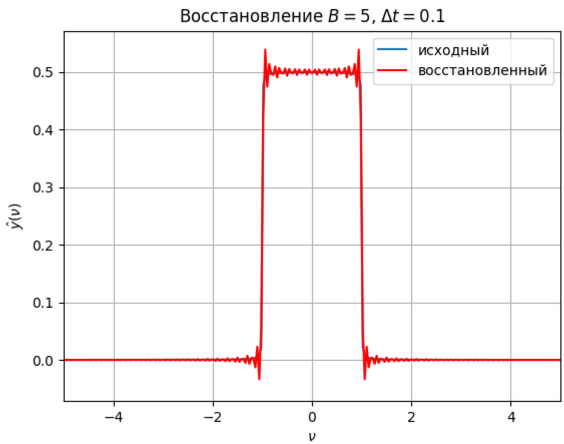


Рис. 24. Фурье-образ исходной и восстановленной функции при $\Delta t = 0.01$.

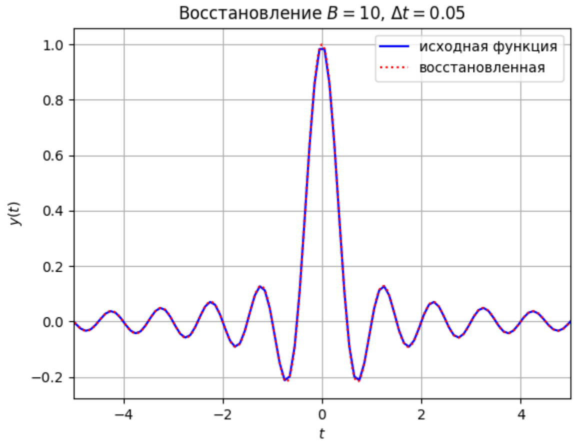


Рис. 25. Исходная и восстановленная функции при $\Delta t = 0.05$.

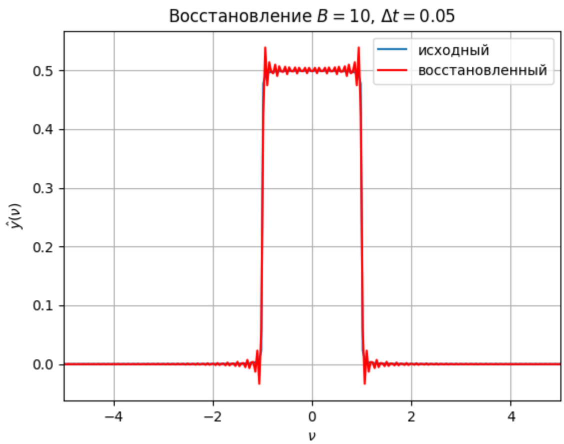


Рис. 26. Фурье-образ исходной и восстановленной функции при $\Delta t = 0.05$.

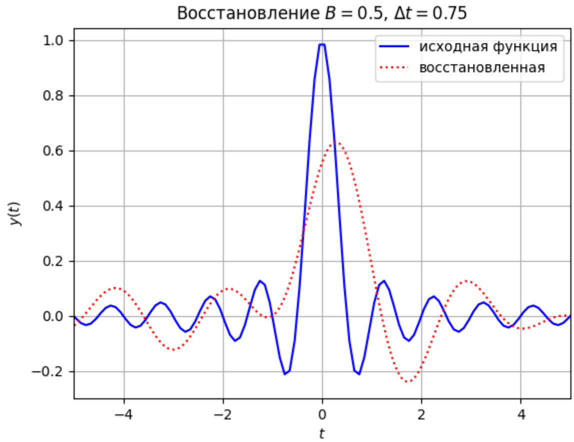


Рис. 27. Исходная и восстановленная функции при $\Delta t = 0.75$.

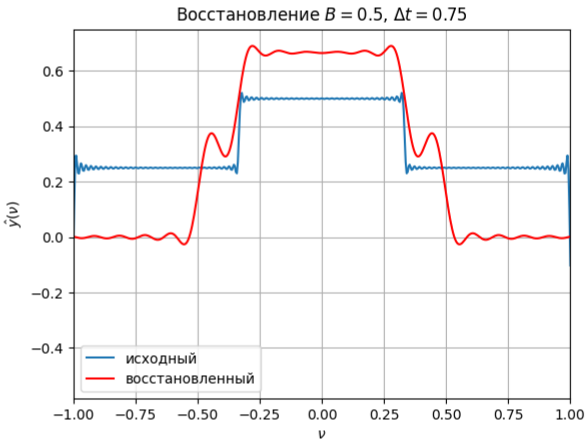


Рис. 28. Фурье-образ исходной и восстановленной функции при $\Delta t = 0.75$.

Заметим, что при шаге дискретизации $\Delta t = 0.75$ возникают проблемы как с образом восстановленной функции, так и с ее графиком.

Согласно теореме Найквиста-Шеннона-Котельникова, для сигнала, представленного последовательностью дискретных отсчетов, точное восстановление возможно, только если частота дискретизации более чем в 2 раза выше максимальной частоты в спектре сигнала. Максимальная частота для $y(t) = sinc(bt)$ соответствует $\frac{b}{2}$, в нашем случае $\frac{1}{2}$. Таким образом, шаг дискретизации должен быть меньше $\frac{1}{2}$.