

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 1 "Ряды Фурье"

по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2024

1 Задание. Вещественные функции.

Придумать числа a, b, t_0, t_1, t_2 такие, что $a, b > 0$ и $t_2 > t_1 > t_0 > 0$.

Пусть $a = 1, b = 2; t_0 = \pi, t_1 = 2\pi, t_2 = 3\pi$.

Рассмотрим следующие функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

1.1 Квадратная волна.

Периодическая функция с периодом $T = t_2 - t_0 = 3\pi - \pi = 2\pi$ такая, что

$$f(t) = \begin{cases} a, & t \in [t_0, t_1), \\ b, & t \in [t_1, t_2) \end{cases} = \begin{cases} 1, & t \in [\pi, 2\pi), \\ 2, & t \in [2\pi, 3\pi) \end{cases} \quad (1)$$

1.1.1 График функции

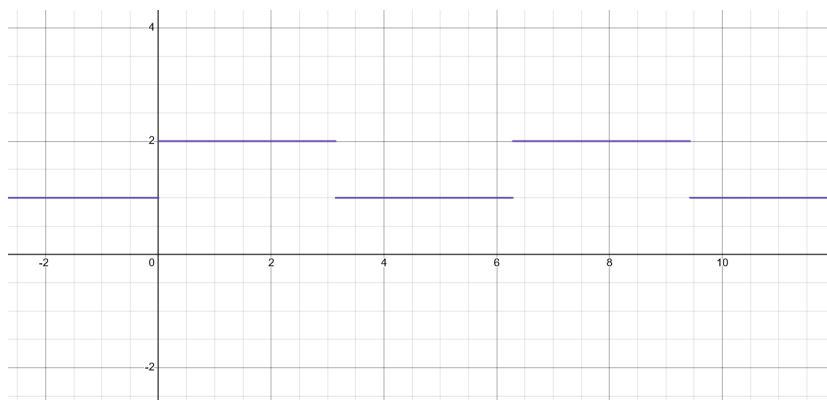


Рис. 1. График функции $f(t)$.

1.1.2 Частичные суммы Фурье

Рассмотрим частичные суммы Фурье F_N и G_N вида

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) , \quad (2)$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t}, \quad (3)$$

где $\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}$.

Перепишем формулы выше с учетом того, что $T = 2\pi$, следовательно $\omega_n = 2\pi \frac{n}{2\pi} = n$:

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad (4)$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}. \quad (5)$$

Перейдем к разложению по формуле 4.

$f(x)$ определена на $[\pi, 3\pi]$, преобразуем:

$$\pi \leq t \leq 3\pi \rightarrow \pi - 2\pi \leq t - 2\pi \leq 3\pi - 2\pi \rightarrow -\pi \leq t - 2\pi \leq \pi \quad (6)$$

Новая переменная $x = t - 2\pi$. Выразим $t = x + 2\pi$ и запишем новую функцию $\phi(x) = f(x + 2\pi)$.

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (7)$$

где a_0, a_n, b_n – коэффициенты Фурье:

1.1.3 Вычисление коэффициентов a_n, b_n и c_n

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) dx, \quad (8)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \cos(nx) dx, \quad (9)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \sin(nx) dx, \quad (10)$$

Проведем обратную замену $x = t - 2\pi$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n(t - 2\pi)) + b_n \sin(n(t - 2\pi))) \quad (11)$$

Воспользуемся периодичностью синуса и косинуса:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \quad (12)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} f(t) dt, \quad (13)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad (14)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad (15)$$

Вычислим значения коэффициентов:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{\pi}^{2\pi} 1 dt + \int_{2\pi}^{3\pi} 2 dt \right) = \frac{1}{\pi} (\pi + 2\pi) = 3, \quad (16)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{\pi}^{2\pi} \cos(nt) dt + 2 \int_{2\pi}^{3\pi} \cos(nt) dt \right) \quad (17)$$

Отдельно вычислим неопределенный интеграл:

$$\int \cos(nt) dt = \left| u = nt, t = \frac{u}{n}, dt = \frac{du}{n} \right| = \int \frac{\cos(u) du}{n} = \frac{\sin u}{n} + C = \frac{\sin(nt)}{n} + C \quad (18)$$

Отсюда получим

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\left. \frac{\sin(nt)}{n} \right|_{\pi}^{2\pi} + 2 \left. \frac{\sin(nt)}{n} \right|_{2\pi}^{3\pi} \right) = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\pi}^{2\pi} \sin(nt) dt + 2 \int_{2\pi}^{3\pi} \sin(nt) dt \right) = -\frac{1}{\pi} \left(\left. \frac{\cos(nt)}{n} \right|_{\pi}^{2\pi} + 2 \left. \frac{\cos(nt)}{n} \right|_{2\pi}^{3\pi} \right) = \\
&= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos(2\pi n) - \cos(\pi n)}{n} + 2 \frac{\cos(3\pi n) - \cos(2\pi n)}{n} \right) = \\
&= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - \cos(\pi n)}{n} + 2 \frac{\cos(3\pi n) - 1}{n} \right) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} + 2 \frac{(-1)^n - 1}{n} \right) = \\
&= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n} \right) = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \quad (20)
\end{aligned}$$

Примеры вычисления первых значений b_n :

$$b_1 = \frac{1 - (-1)^1}{\pi} = \frac{2}{\pi} \quad (21)$$

$$b_2 = \frac{1 - (-1)^2}{2\pi} = 0 \quad (22)$$

$$b_3 = \frac{1 - (-1)^3}{3\pi} = \frac{2}{3\pi} \quad (23)$$

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{\pi}^{2\pi} \sin(0) dt + 2 \int_{2\pi}^{3\pi} \sin(0) dt \right) = 0 \quad (24)$$

Запишем получившуюся частичную сумму:

$$F_N(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \sin(nt) \right), \quad (25)$$

Перейдем к рассмотрению следующей частичной суммы:

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}. \quad (26)$$

Где соответствующий коэффициент:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_h^{h+T} f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{3\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\pi}^{2\pi} e^{-int} dt + 2 \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-int} dt \right) \quad (27)$$

При $n = 0$ коэффициент будет равен:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\pi}^{2\pi} e^0 dt + 2 \int_{2\pi}^{3\pi} e^0 dt \right) = \frac{3}{2} \quad (28)$$

Отдельно вычислим неопределенный интеграл:

$$c_n = \int e^{-int} dt = \frac{-1}{in} \int e^{-int} d(-int) = -\frac{e^{-int}}{in} + C \quad (29)$$

$$c_n = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{-int}}{in} \Big|_{\pi}^{2\pi} + 2 \frac{e^{-int}}{in} \Big|_{2\pi}^{3\pi} \right) = \frac{e^{-in\pi} + e^{-2in\pi} - 2e^{-3in\pi}}{2in\pi} \quad (30)$$

В итоге полученное разложение:

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N \frac{e^{-in\pi} + e^{-2in\pi} - 2e^{-3in\pi}}{2in\pi} e^{int}. \quad (31)$$

1.1.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье

Код для вычисления коэффициентов Фурье написан на *Python* с использованием библиотеки *NumPy*.

Листинг 1. Функция, реализующая квадратную волну

```

1 def fun_square_wave(t):
2     if (t // np.pi) % 2 == 0:
3         return 2
4     else:
5         return 1
6
7
8 fun_wave = np.vectorize(fun_square_wave)
```

Необходимое в процессе нахождения коэффициентов интегрирование реализовано с помощью вычисления скалярного произведения подынтегральных функций.

Листинг 2. Функция, реализующая интегрирование для вычисления коэффициентов Фурье.

```
1 def integral_counter(f_1, f_2, a, b):  
2  
3     t = np.linspace(a, b, my_sigma)  
4     dt = (b - a) / my_sigma  
5  
6     return np.dot(f_1(t), f_2(t)) * dt
```

Далее приведены функции, непосредственно возвращающие вычисленные значения коэффициентов Фурье.

Листинг 3. Функция для коэффициентов a_n

```
1 def a_coef(f, N):  
2     res = []  
3     for n in range(N):  
4         fourier_cos = lambda t: np.cos(n * t)  
5         res.append(integral_counter(f, fourier_cos, np.pi, 3 *  
6             np.pi) / np.pi)  
7  
8     return res
```

Листинг 4. Функция для коэффициентов b_n

```
1 def b_coef(f, N):  
2     res = []  
3     for n in range(N):  
4         fourier_sin = lambda t: np.sin(n * t)  
5         res.append(integral_counter(f, fourier_sin, np.pi, 3 *  
6             np.pi) / np.pi)  
7  
8     return res
```

Листинг 5. Функция для коэффициентов c_n

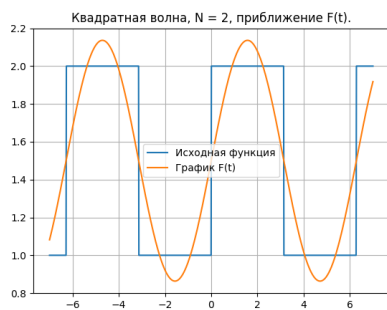
```
1 def c_coef(f, N):  
2     res = []  
3     for n in range(N):  
4         fourier_exp = lambda t: np.exp(-1j * n * t)  
5         res.append(integral_counter(f, fourier_exp, np.pi, 3 *  
6             np.pi) / (2 * np.pi))  
7  
8     return res
```

Таблица 1. Значения коэффициентов, вычисленных с помощью написанной программы для квадратной волны.

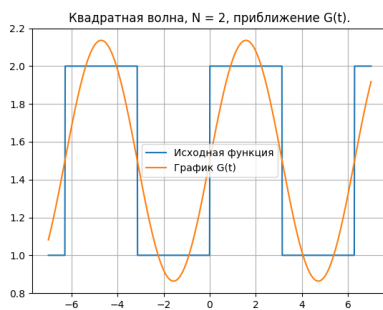
n	a_n	b_n	$Re(c_n)$	$Im(c_n)$
0	2.9998	0	1.4999	0
1	-0.0001	0.6366	-0.00005	-0.3183
2	0.0001	0	0.00005	0

Значения коэффициентов для первых трех значений n , вычисленные с помощью программы близки к числам, полученным аналитически.

1.1.5 Построение графиков частичных сумм F_N , G_N



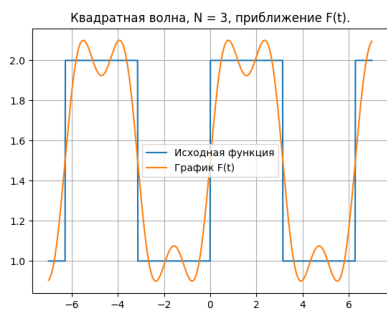
а)



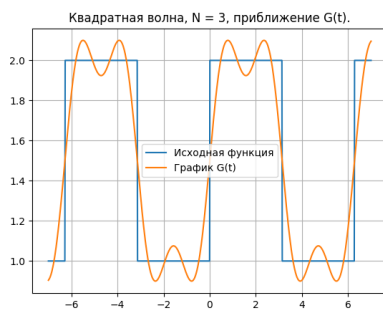
б)

Рис. 2. Построение графиков частичных сумм, для квадратной волны, $N = 2$.

При малых значениях N (рис. 2-4) можно заметить, что суммы $F_N(t)$ и $G_N(t)$ практически неотличимы друг от друга.

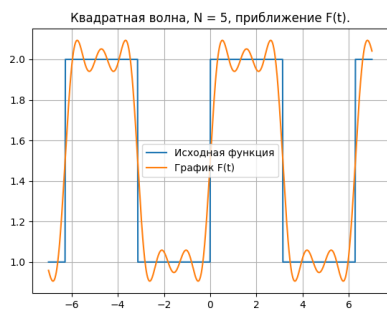


а)

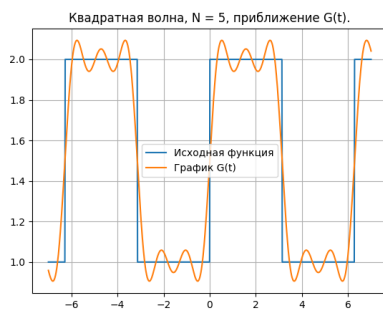


б)

Рис. 3. Построение графиков частичных сумм, для квадратной волны, $N = 3$.

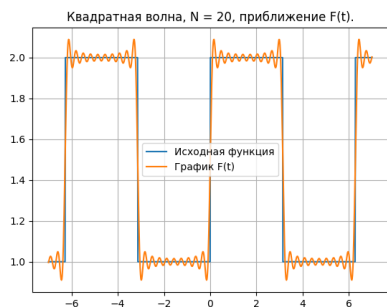


а)

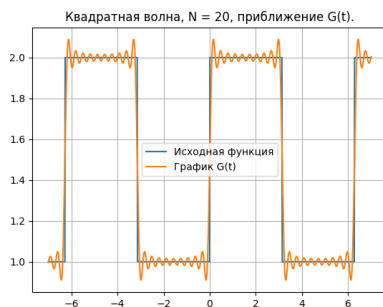


б)

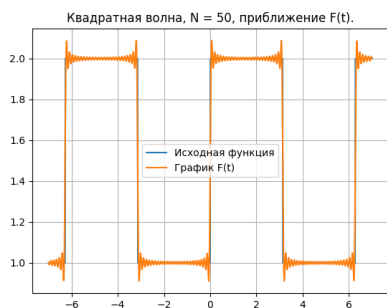
Рис. 4. Построение графиков частичных сумм, для квадратной волны, $N = 5$.



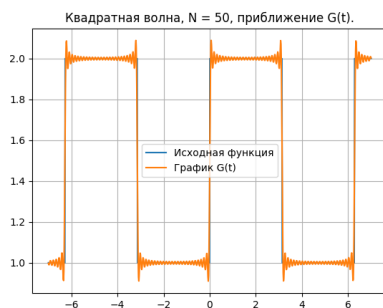
а)



б)

Рис. 5. Построение графиков частичных сумм, для квадратной волны, $N = 20$.

а)



б)

Рис. 6. Построение графиков частичных сумм, для квадратной волны, $N = 50$.

На рисунках 2-6 можно заметить, что при увеличении N точность приближения исходного графика функции с помощью частичных сумм Фурье повышается, причем синхронно и неотличимо друг от друга. При $N \geq 5$ суммы Фурье очерчивают очень похожую на исходную функцию.

1.1.6 Равенство Парсеваля

Запишем равенство Парсеваля для F_N :

$$\|f\|^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) \quad (32)$$

и для G_N :

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2, \quad (33)$$

где $\|f\|^2 = \int_a^b (f(t))^2 dt$.

Проведем численную проверку того, что равенство выполнено, для этого напомним новые функции на *Python*.

В результате получим выполнение равенства уже при $N = 100$, при округлении полученных значений до сотых. В выводе программы получаем:

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) = 15.699401582331111$$

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = 15.699401613754796$$

$$\|f\|^2 = 15.706078312356812$$

Следовательно, равенство Парсеваля для функции квадратной волны выполнено.

1.2 Любая четная периодическая функция.

$$f(t) = 4 \cos \left(\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \quad (34)$$

1.2.1 График функции

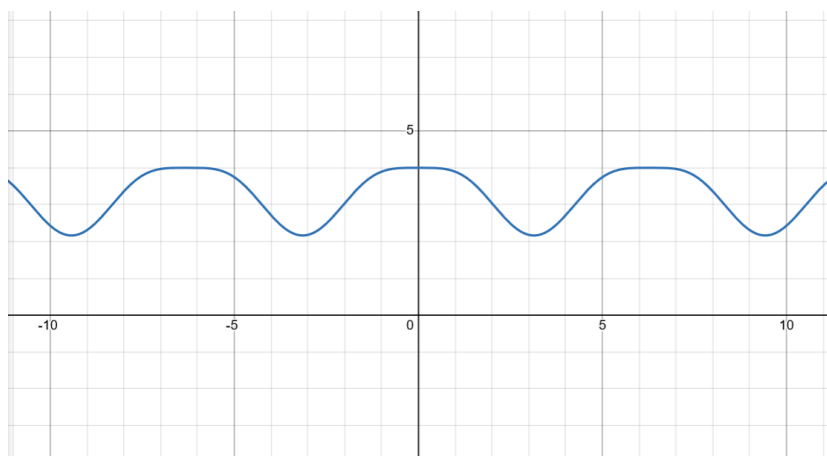


Рис. 7. График функции $f(t)$.

1.2.2 Частичные суммы Фурье

Рассмотрим частичные суммы Фурье F_N и G_N вида

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) , \quad (35)$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t} , \quad (36)$$

где $\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}$.

Аналогично, $T = 2\pi$, следовательно, $\omega_n = n$:

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) , \quad (37)$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} , \quad (38)$$

1.2.3 Вычисление коэффициентов a_n , b_n и c_n

Запишем формулы для вычисления коэффициентов a_n , b_n и c_n :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left(\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \cos(nt) dt \quad (39)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left(\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \sin(nt) dt \quad (40)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_h^{h+T} f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left(\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) e^{-int} dt \quad (41)$$

Вычисление интегралов в данном случае возможно только численно, так как интегралы, содержащиеся в коэффициентах являются неберущимися. Найдем первые 3 значения:

$n = 0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left(\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) dt = 6.58868 \quad (42)$$

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left(\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \sin(0 \cdot t) dt = 0 \quad (43)$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left(\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) e^{-i \cdot 0 \cdot t} dt = 3.29434 \quad (44)$$

$n = 1$:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left(\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \cos(t) dt = 0.929197 \quad (45)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left(\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \sin(t) dt = 0 \quad (46)$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left(\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) e^{-it} dt = 0.464599 \quad (47)$$

$n = 2 :$

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left(\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \cos(2t) dt = -0.21486 \quad (48)$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left(\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \sin(2t) dt = 0 \quad (49)$$

$$c_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left(\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) e^{-2it} dt = -0.10743 \quad (50)$$

1.2.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье

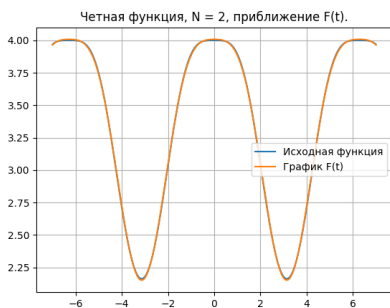
Программа аналогична той, которая использовалась для случая квадратной волны, поэтому приведем здесь лишь вычисленные значения для первых трех n .

Таблица 2. Значения коэффициентов, вычисленных с помощью написанной программы для четной периодической функции.

n	a_n	b_n	$Re(c_n)$	$Im(c_n)$
0	6.5885	0	3.2942	0
1	0.9287	0	0.4643	0
2	-0.2144	0	-0.1072	0

Для четной функции так же легко убедиться, что численные значения близки к полученным аналитическим путем (сложные интегралы в этом случае были посчитаны с помощью *Wolfram*).

1.2.5 Построение графиков частичных сумм F_N , G_N

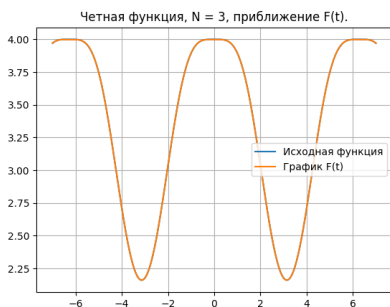


а)



б)

Рис. 8. Построение графиков частичных сумм, для четной функции, $N = 2$.



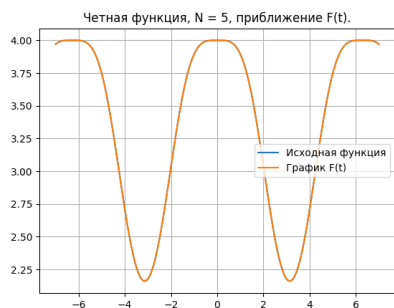
а)



б)

Рис. 9. Построение графиков частичных сумм, для четной функции, $N = 3$.

Для функции $4 \cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)$ суммы F_N и G_N с высокой точностью приближают исходную функцию уже при минимальном $N = 2$.

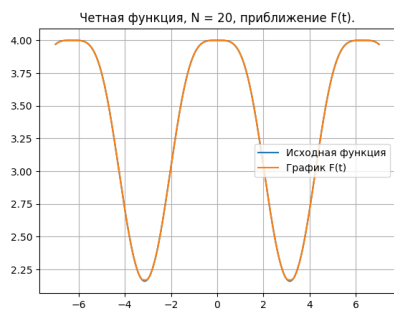


а)

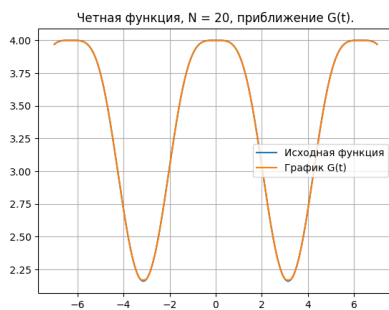


б)

Рис. 10. Построение графиков частичных сумм, для четной функции, $N = 5$.

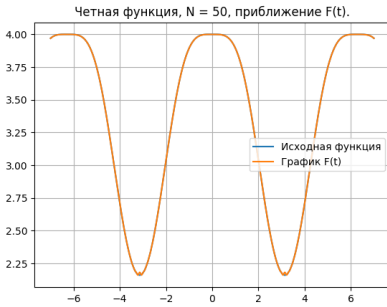


а)

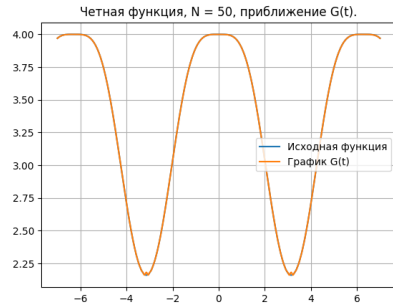


б)

Рис. 11. Построение графиков частичных сумм, для четной функции, $N = 20$.



а)



б)

Рис. 12. Построение графиков частичных сумм, для четной функции, $N = 50$.

1.2.6 Равенство Парсеваля

Вновь запишем равенство Парсеваля для F_N :

$$\|f\|^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) \quad (51)$$

и для G_N :

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2, \quad (52)$$

где $\|f\|^2 = \int_a^b (f(t))^2 dt$.

В выводе программы при $N = 10$ получаем:

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) = 71.03881254047784$$

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = 71.03881312743097$$

$$\|f\|^2 = 71.04297678948326$$

Следовательно, равенство Парсеваля для четной функции выполнено. Вновь результаты вычислений оказались равны с точностью до сотых.

1.3 Любая нечетная периодическая функция.

$$f(t) = \sin^3(t) \quad (53)$$

1.3.1 График функции

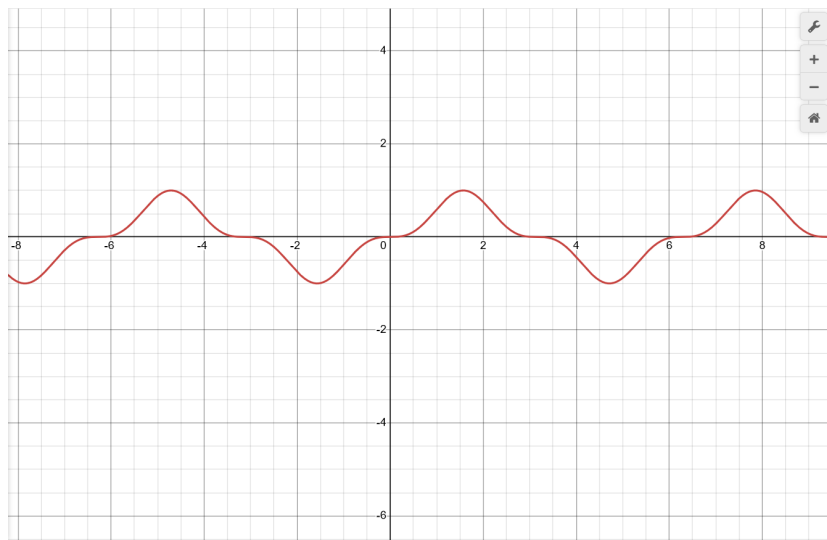


Рис. 13. График функции $f(t)$.

1.3.2 Частичные суммы Фурье

Рассмотрим частичные суммы Фурье F_N и G_N вида

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) , \quad (54)$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t} , \quad (55)$$

где $\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}$.

Аналогично, $T = 2\pi$, следовательно, $\omega_n = n$:

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) , \quad (56)$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} , \quad (57)$$

1.3.3 Вычисление коэффициентов a_n , b_n и c_n

Запишем формулы для вычисления коэффициентов a_n , b_n и c_n :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t) dt = 0 \quad (58)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t) \cos(nt) dt = 0 \quad (59)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t) \sin(nt) dt \quad (60)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_h^{h+T} f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t) e^{-int} dt \quad (61)$$

Найдем численные значения коэффициентов для первых нескольких n .

$n = 0$:

$$a_0 = 0 \quad (62)$$

$$b_0 = 0 \quad (63)$$

$$c_0 = 0 \quad (64)$$

$n = 1 :$

$$a_1 = 0 \quad (65)$$

$$b_1 = \frac{3}{4} \quad (66)$$

$$c_1 = -\frac{3i}{8} \quad (67)$$

 $n = 2 :$

$$a_2 = 0 \quad (68)$$

$$b_2 = 0 \quad (69)$$

$$c_2 = 0 \quad (70)$$

 $n = 3 :$

$$a_3 = 0 \quad (71)$$

$$b_3 = -\frac{1}{4} \quad (72)$$

$$c_3 = \frac{i}{8} \quad (73)$$

1.3.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье

Программа для вычисления коэффициентов Фурье идентична, использовавшейся ранее, поэтому приведем численные результаты для первых четырех значений коэффициентов.

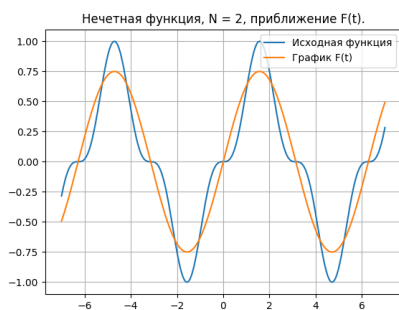
Таблица 3. Значения коэффициентов, вычисленных с помощью написанной программы для нечетной периодической функции.

n	a_n	b_n	$Re(c_n)$	$Im(c_n)$
0	0	0	0	0
1	0	0.74992	0	-0.37496
2	0	0	0	0
3	0	-0.24998	0	0.12499

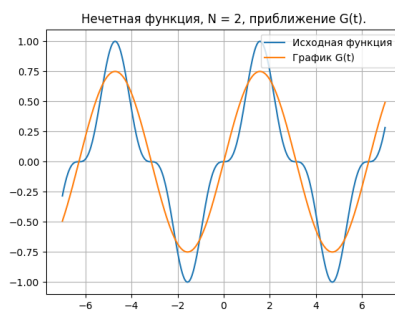
С помощью программы были посчитаны довольно близкие к аналитическим значения коэффициентов.

1.3.5 Построение графиков частичных сумм F_N , G_N

Ниже представлены графики частичных сумм для нечетной периодической функции $f(t) = \sin^3(t)$:



а)



б)

Рис. 14. Построение графиков частичных сумм, для нечетной функции, $N = 2$.



а)



б)

Рис. 15. Построение графиков частичных сумм, для нечетной функции, $N = 3$.

а)



б)

Рис. 16. Построение графиков частичных сумм, для нечетной функции, $N = 5$.

Для функции $f(t) = \sin^3(t)$ неотличимыми от исходной функции графики частичных сумм становится с $N = 3$, при $N = 2$ приближение минимальное (рисунок 14).



а)



б)

Рис. 17. Построение графиков частичных сумм, для нечетной функции, $N = 20$.



а)



б)

Рис. 18. Построение графиков частичных сумм, для нечетной функции, $N = 50$.

1.3.6 Равенство Парсеваля

Вновь запишем равенство Парсеваля для F_N :

$$\|f\|^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) \quad (74)$$

и для G_N :

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2, \quad (75)$$

где $\|f\|^2 = \int_a^b (f(t))^2 dt$.

В выводе программы при $N = 10$ получаем:

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) = 1.9631027290468754$$

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = 1.963102729046876$$

$$\|f\|^2 = 1.9632990589527717$$

Следовательно, равенство Парсеваля для нечетной функции выполнено. Результаты вычислений равны с точностью до тысячных.

1.4 Любая периодическая функция, график которой состоит не только из прямых линий, и которая не является ни четной, ни нечетной.

$$f(t) = \sin(t) - \cos^2(t) \quad (76)$$

1.4.1 График функции

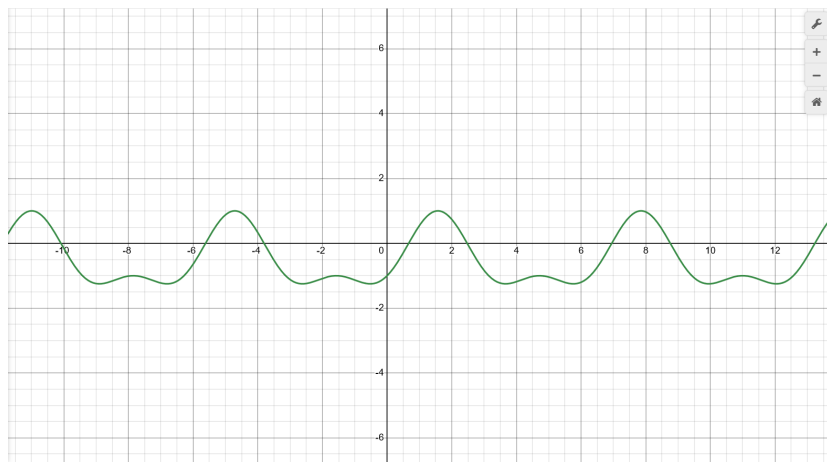


Рис. 19. График функции $f(t)$.

1.4.2 Частичные суммы Фурье

Рассмотрим частичные суммы Фурье F_N и G_N вида

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) , \quad (77)$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t} , \quad (78)$$

где $\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}$.

Аналогично, $T = 2\pi$, следовательно, $\omega_n = n$:

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) , \quad (79)$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} , \quad (80)$$

1.4.3 Вычисление коэффициентов a_n , b_n и c_n

Запишем формулы для вычисления коэффициентов a_n , b_n и c_n :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(t) - \cos^2(t)) dt = -1 \quad (81)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(t) - \cos^2(t)) \cos(nt) dt = -\frac{2(n^2 - 2) \sin(\pi n)}{\pi n(n^2 - 4)} \quad (82)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(t) - \cos^2(t)) \sin(nt) dt = \frac{2 \sin(\pi n)}{\pi(1 - n^2)} \quad (83)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(t) - \cos^2(t)) e^{-int} dt = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2 - n^2}{n(n^2 - 4)} + \frac{i}{n^2 - 1} \right) \sin(\pi n) \quad (84)$$

Найдем численные значения коэффициентов для первых нескольких n .

$n = 0$:

$$a_0 = -1 \quad (85)$$

$$b_0 = 0 \quad (86)$$

$$c_0 = -0.5 \quad (87)$$

$n = 1 :$

$$a_1 = 0 \quad (88)$$

$$b_1 = 1 \quad (89)$$

$$c_1 = -0.5i \quad (90)$$

 $n = 2 :$

$$a_2 = -0.5 \quad (91)$$

$$b_2 = 0 \quad (92)$$

$$c_2 = -0.25 \quad (93)$$

1.4.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье

Программа для вычисления коэффициентов Фурье идентична, использовавшейся ранее, поэтому приведем численные результаты для первых трех значений коэффициентов.

Таблица 4. Значения коэффициентов, вычисленных с помощью написанной программы для ни четной, ни нечетной периодической функции.

n	a_n	b_n	$Re(c_n)$	$Im(c_n)$
0	-1	0	-0.5	0
1	0	1	0	-0.5
2	-0.5	0	-0.25	0

С помощью программы были посчитаны идентичные аналитическим значения коэффициентов.

1.4.5 Построение графиков частичных сумм F_N , G_N

Ниже представлены графики частичных сумм для нечетной, нечетной периодической функции $f(t) = \sin(t) - \cos^2(t)$:



а)



б)

Рис. 20. Графики частичных сумм для нечет. нечет. функции, $N = 2$.



а)



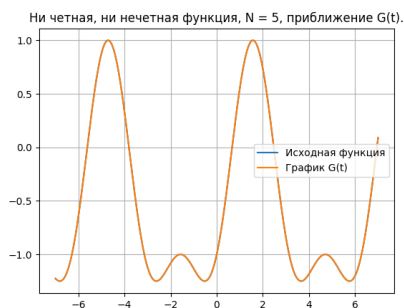
б)

Рис. 21. Графики частичных сумм для нечет. нечет. функции, $N = 3$.

Несложно заметить, что уже при значении $N = 2$ оба графика частичных сумм практически совпадают с исходной функцией.

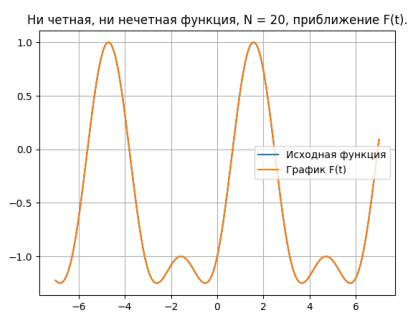


а)



б)

Рис. 22. Графики частичных сумм для ни чет. ни нечет. функции, $N = 5$.



а)



б)

Рис. 23. Графики частичных сумм для ни чет. ни нечет. функции, $N = 20$.



а)



б)

Рис. 24. Графики частичных сумм для ни чет. ни нечет. функции, $N = 50$.

1.4.6 Равенство Парсеваля

Вновь запишем равенство Парсеваля для F_N :

$$\|f\|^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) \quad (94)$$

и для G_N :

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2, \quad (95)$$

где $\|f\|^2 = \int_a^b (f(t))^2 dt$.

В выводе программы при $N = 10$ получаем:

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) = 5.497945346534191$$

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = 5.497945472197905$$

$$\|f\|^2 = 5.497865683598477$$

Следовательно, равенство Парсеваля для ни четной, ни нечетной функции выполнено. Результаты вычислений равны с точностью до четвертого знака после запятой.

2 Задание.

2.1 Комплексная функция.

Зададимся числами $R, T > 0$ и рассмотрим комплекснозначную функцию $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ с периодом T такую, что

$$Ref(t) = \begin{cases} R, & t \in [-\frac{T}{8}, \frac{T}{8}) \\ 2R - 8Rt/T, & t \in [\frac{T}{8}, \frac{3T}{8}) \\ -R, & t \in [\frac{3T}{8}, \frac{5T}{8}) \\ -6R + 8Rt/T, & t \in [\frac{5T}{8}, \frac{7T}{8}) \end{cases} \quad Imf(t) = \begin{cases} 8Rt/T, & t \in [-\frac{T}{8}, \frac{T}{8}) \\ R, & t \in [\frac{T}{8}, \frac{3T}{8}) \\ 4R - 8Rt/T, & t \in [\frac{3T}{8}, \frac{5T}{8}) \\ -R, & t \in [\frac{5T}{8}, \frac{7T}{8}) \end{cases} \quad (96)$$

Пусть $R = 1, T = 8$, тогда рассматриваемая функция будет:

$$Ref(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 1) \\ 2 - t, & t \in [1, 3) \\ -1, & t \in [3, 5) \\ -6 + t, & t \in [5, 7) \end{cases} \quad Imf(t) = \begin{cases} t, & t \in [-1, 1) \\ 1, & t \in [1, 3) \\ 4 - t, & t \in [3, 5) \\ -1, & t \in [5, 7) \end{cases} \quad (97)$$

2.1.1 Параметрический график $f(t)$

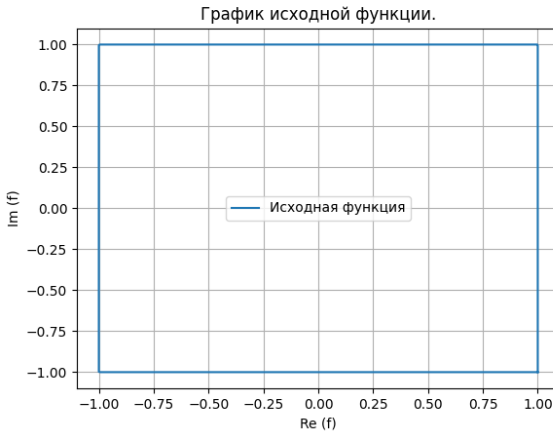


Рис. 25. График функции $f(t)$.

2.1.2 Частичные суммы Фурье

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t}, \quad (98)$$

где $\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}$.

Так как период $T = 8$, то $\omega_n = \frac{\pi n}{4}$ и формула для частичных сумм перепишется в следующем виде:

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{\pi n}{4}t}, \quad (99)$$

2.1.3 Вычисление коэффициентов c_n

Запишем формулу c_n для произвольного n :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_h^{h+T} f(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad (100)$$

И вычислим значение коэффициентов c_0, c_1, c_2 вручную.

$$c_0 = \frac{1}{8} \int_{-1}^7 f(t) e^{-i\frac{\pi \cdot 0}{4}t} dt = \frac{1}{8} \left(\int_{-1}^1 f(t) dt + \int_1^3 f(t) dt + \int_3^5 f(t) dt + \int_5^7 f(t) dt \right) \equiv$$

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 (1 + ti) dt = 2 \quad (101)$$

$$\int_1^3 f(t) dt = \int_1^3 (2 - t + i) dt = 2i \quad (102)$$

$$\int_3^5 f(t) dt = \int_3^5 (-1 + (4 - t)i) dt = -2 \quad (103)$$

$$\int_5^7 f(t) dt = \int_5^7 (-6 + t - i) dt = -2i \quad (104)$$

$$\boxed{=} \frac{1}{8} (2 + 2i - 2 - 2i) = 0 \quad (105)$$

$$c_1 = \frac{1}{8} \left(\int_{-1}^1 f(t) e^{-i\frac{\pi}{4}t} dt + \int_1^3 f(t) e^{-i\frac{\pi}{4}t} dt + \int_3^5 f(t) e^{-i\frac{\pi}{4}t} dt + \int_5^7 f(t) e^{-i\frac{\pi}{4}t} dt \right) \boxed{=}$$

$$\int_{-1}^1 f(t) e^{-i\frac{\pi}{4}t} dt = \int_{-1}^1 (1 + ti) e^{-i\frac{\pi}{4}t} dt = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^2} \simeq 2.29264 \quad (106)$$

$$\int_1^3 f(t) e^{-i\frac{\pi}{4}t} dt = \int_1^3 (2 - t + i) e^{-i\frac{\pi}{4}t} dt = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^2} \simeq 2.29264 \quad (107)$$

$$\int_3^5 f(t) e^{-i\frac{\pi}{4}t} dt = \int_3^5 (-1 + (4 - t)i) e^{-i\frac{\pi}{4}t} dt = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^2} \simeq 2.29264 \quad (108)$$

$$\int_5^7 f(t) e^{-i\frac{\pi}{4}t} dt = \int_5^7 (-6 + t - i) e^{-i\frac{\pi}{4}t} dt = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^2} \simeq 2.29264 \quad (109)$$

$$\boxed{=} \frac{1}{8} \left(\frac{16\sqrt{2}}{\pi^2} \cdot 4 \right) = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^2} \simeq 1.14632 \quad (110)$$

$$c_2 = \frac{1}{8} \left(\int_{-1}^1 f(t) e^{-i\frac{\pi}{2}t} dt + \int_1^3 f(t) e^{-i\frac{\pi}{2}t} dt + \int_3^5 f(t) e^{-i\frac{\pi}{2}t} dt + \int_5^7 f(t) e^{-i\frac{\pi}{2}t} dt \right) \boxed{=}$$

$$\int_{-1}^1 f(t) e^{-i\frac{\pi}{2}t} dt = \int_{-1}^1 (1 + ti) e^{-i\frac{\pi}{2}t} dt = \frac{4(2 + \pi)}{\pi^2} \simeq 2.08381 \quad (111)$$

$$\int_1^3 f(t) e^{-i\frac{\pi}{2}t} dt = \int_1^3 (2 - t + i) e^{-i\frac{\pi}{2}t} dt = -\frac{4i(2 + \pi)}{\pi^2} \simeq -2.08381i \quad (112)$$

$$\int_3^5 f(t) e^{-i\frac{\pi}{2}t} dt = \int_3^5 (-1 + (4 - t)i) e^{-i\frac{\pi}{2}t} dt = -\frac{4(2 + \pi)}{\pi^2} \simeq -2.08381 \quad (113)$$

$$\int_5^7 f(t) e^{-i\frac{\pi}{2}t} dt = \int_5^7 (-6 + t - i) e^{-i\frac{\pi}{2}t} dt = \frac{4i(2 + \pi)}{\pi^2} \simeq 2.08381i \quad (114)$$

$$\boxed{=} \frac{1}{8} \left(\frac{4(2 + \pi)}{\pi^2} - \frac{4i(2 + \pi)}{\pi^2} - \frac{4(2 + \pi)}{\pi^2} + \frac{4i(2 + \pi)}{\pi^2} \right) = 0 \quad (115)$$

2.1.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье c_n

Листинг 6. Функция для коэффициентов c_n комплексной функции

```

1 # count coefficient c_n for complex fun
2 def c_complex(f, N):
3     res = []
4     for n in range(-N, N + 1):
5         fourier_exp = lambda t: np.exp(-1j * n * t * np.pi /
6             4)
7         res.append(integral_counter(f, fourier_exp, -1, 7) /
8             8)
9     return res

```

Таблица 5. Значения коэффициентов, вычисленных с помощью написанной программы для комплексной функции.

n	$Re(c_n)$	$Im(c_n)$
0	0	0
1	1.14632	0
2	0	0

Примечательно, что значения коэффициентов, вычисленных с помощью программы идентичны найденным выше аналитическим способом.

2.1.5 Построение параметрических графиков $G_N(t)$

Построим параметрические графики $G_N(t)$ для $N = 1, 2, 3, 10$.

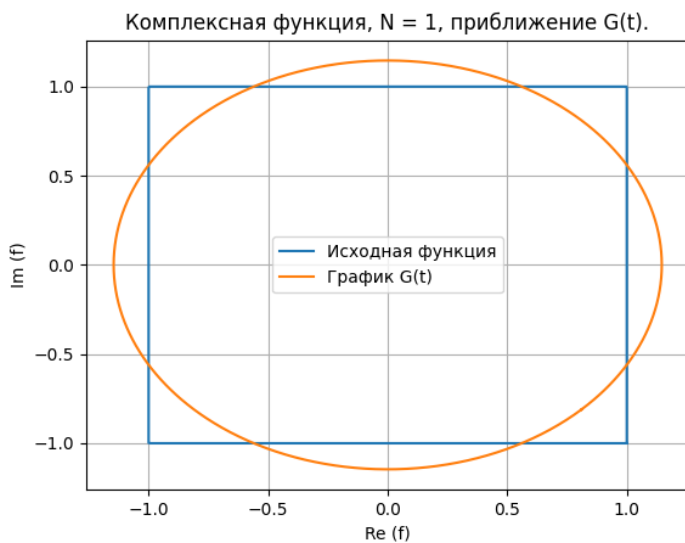


Рис. 26. График частичной суммы комплексной функции, $N = 1$.

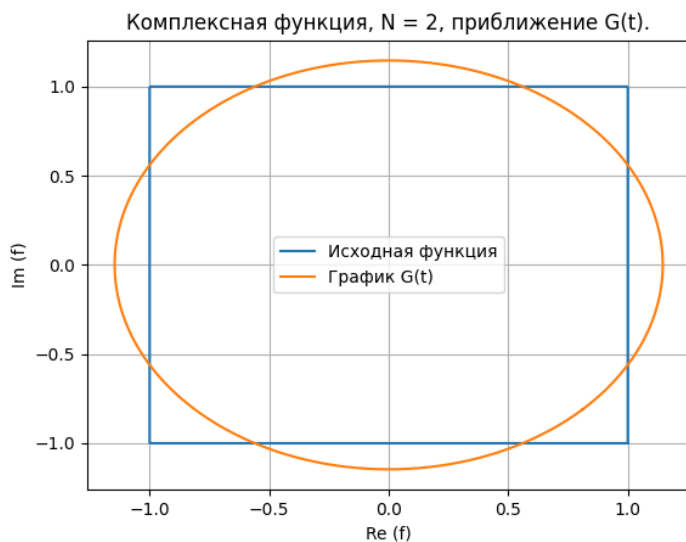


Рис. 27. График частичной суммы комплексной функции, $N = 2$.

При малых значениях $N = 1, 2$ (рисунки 26 - 27) графики частичных сумм слабо приближают график исходной функции и почти не отличаются друг от друга.

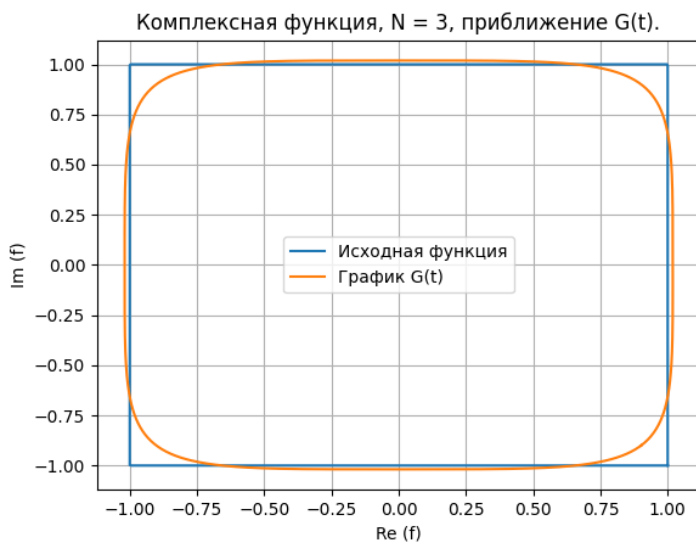


Рис. 28. График частичной суммы комплексной функции, $N = 3$.

Начиная с $N = 3$ сумма ряда $G_N(t)$ уже точнее описывает график исходной функции, при $N = 10$ разница между ними почти незаметна.

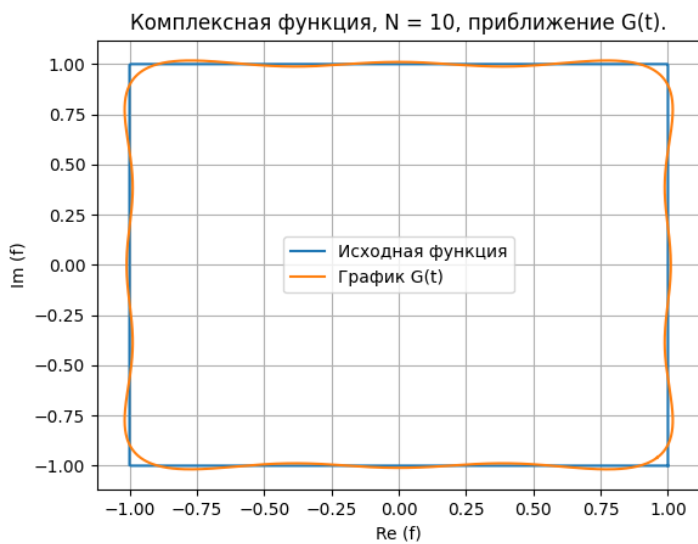
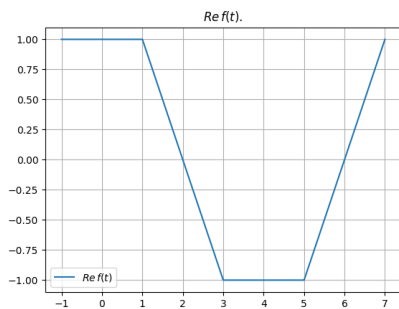
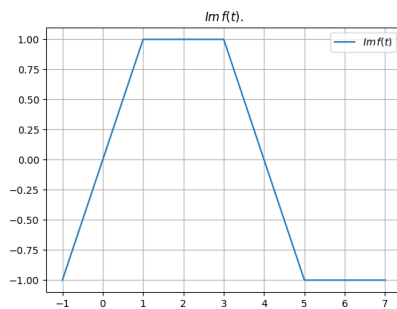


Рис. 29. График частичной суммы комплексной функции, $N = 10$.

2.1.6 Построение графиков $Re f(t)$, $Im f(t)$, $Re G_N(t)$ и $Im G_N(t)$

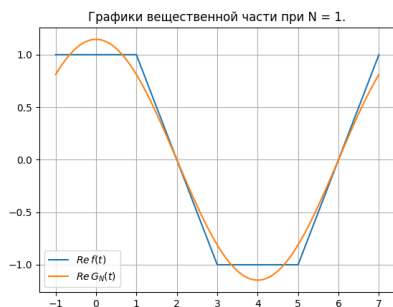


а)

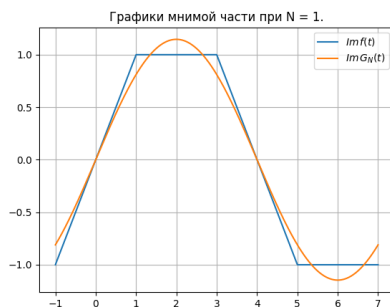


б)

Рис. 30. Графики вещественной и мнимой частей функции $f(t)$.



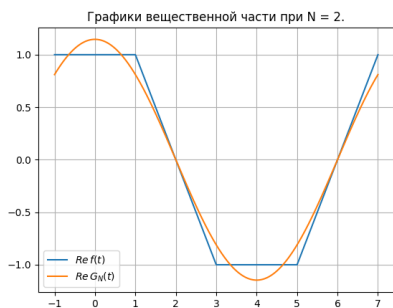
а)



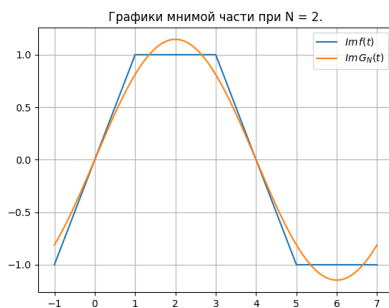
б)

Рис. 31. Графики вещественной и мнимой частей функции $f(t)$ и G_N , $N = 1$.

При $N = 1$, если сравнивать с параметрическим заданием функции, сумма ряда $G_N(t)$ сильнее приближает график исходной функции, как для вещественной, так и для мнимой части.



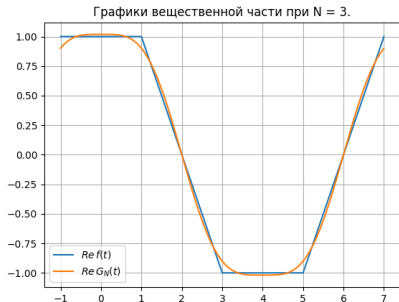
а)



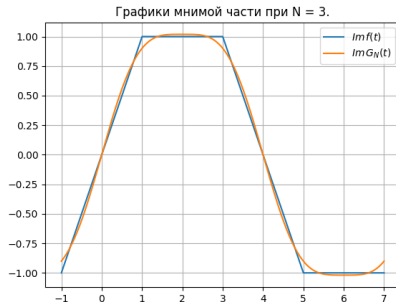
б)

Рис. 32. Графики вещественной и мнимой частей функции $f(t)$ и G_N , $N = 2$.

Для $N = 2$ не наблюдается заметных отличий от случая $N = 1$ с точки зрения точности приближения исходной функции.



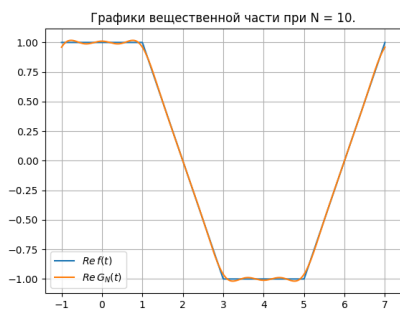
а)



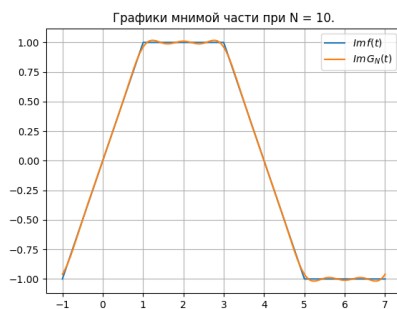
б)

Рис. 33. Графики вещественной и мнимой частей функции $f(t)$ и G_N , $N = 3$.

При $N = 3$ точность существенно возрастает и графики практически идентичны, за исключением углов.



а)



б)

Рис. 34. Графики вещественной и мнимой частей функции $f(t)$ и G_N , $N = 10$.

В случае $N = 10$ график частичной суммы ряда практически неотличим от исходной функции.