Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 1
"Ряды Фурье"

по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2024

1 Задание. Вещественные функции.

Придумать числа a, b, t_0, t_1, t_2 такие, что $a, b > 0$ и $t_2 > t_1 > t_0 > 0$.
Пусть $a = 1$, $b = 2$; $t_0 = \pi$, $t_1 = 2\pi$, $t_2 = 3\pi$.
Рассмотрим следующие функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1.1 Квадратная волна.

Периодическая функция с периодом $T = t_2 - t_0 = 3\pi - \pi = 2\pi$ такая, что

$$f(t) = \begin{cases} a, \ t \in [t_0, t_1), \\ b, \ t \in [t_1, t_2) \end{cases} = \begin{cases} 1, \ t \in [\pi, 2\pi), \\ 2, \ t \in [2\pi, 3\pi) \end{cases} \tag{1}$$

1.1.1 График функции

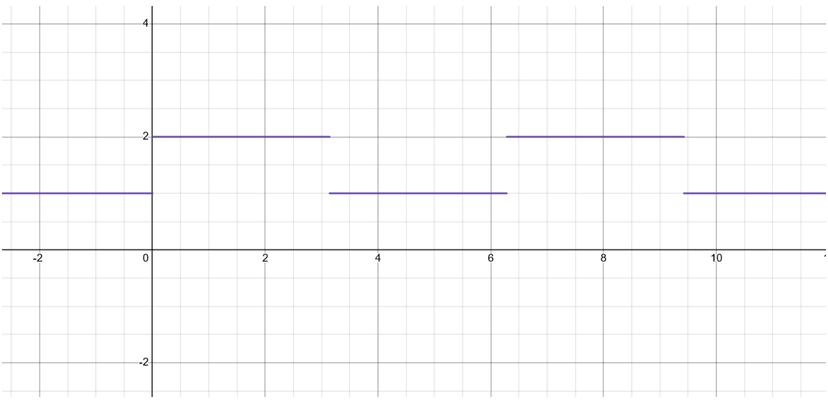

Рис. 1. График функции $f(t)$.

1.1.2 Частичные суммы Фурье

Рассмотрим частичные суммы Фурье F_N и G_N вида

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\right) \ , \tag{2}$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\omega_n t}\,, \tag{3}$$

где $\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}$.

Перепишем формулы выше с учетом того, что $T = 2\pi$, следовательно $\omega_n = 2\pi \frac{n}{2\pi} = n$:

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right)\,, \tag{4}$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}. \tag{5}$$

Перейдем к разложению по формуле 4.
$f(x)$ определена на $[\pi, 3\pi]$, преобразуем:

$$\pi \leq t \leq 3\pi \to \pi - 2\pi \leq t - 2\pi \leq 3\pi - 2\pi \to -\pi \leq t - 2\pi \leq \pi \tag{6}$$

Новая переменная $x = t - 2\pi$. Выразим $t = x + 2\pi$ и запишем новую функцию $\phi(x) = f(x + 2\pi)$.

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)\,, \tag{7}$$

где a_0, a_n, b_n – коэффициенты Фурье:

1.1.3 Вычисление коэффициентов a_n, b_n и c_n

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) dx, \tag{8}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \cos(nx) dx, \tag{9}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \sin(nx) dx, \tag{10}$$

Проведем обратную замену $x = t - 2\pi$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(n(t-2\pi)\right) + b_n \sin\left(n(t-2\pi)\right)\right) \tag{11}$$

Воспользуемся периодичностью синуса и косинуса:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(nt\right) + b_n \sin\left(nt\right)\right) \tag{12}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\pi}^{3\pi} f(t)dt, \tag{13}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\pi}^{3\pi} f(t)\cos(nt)dt, \tag{14}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\pi}^{3\pi} f(t)\sin(nt)dt, \tag{15}$$

Вычислим значения коэффициентов:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{\pi}^{2\pi} 1dt + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} 2dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\pi + 2\pi\right) = 3, \tag{16}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos(nt)dt + 2\int\limits_{2\pi}^{3\pi} \cos(nt)dt\right) \tag{17}$$

Отдельно вычислим неопределенный интеграл:

$$\int \cos(nt)dt = \left| u = nt, t = \frac{u}{n}, dt = \frac{du}{n} \right| = \int \frac{\cos(u)du}{n} = \frac{\sin u}{n} + C = \frac{\sin(nt)}{n} + C \tag{18}$$

Отсюда получим

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{\sin(nt)}{n}\right|_{\pi}^{2\pi} + 2\left.\frac{\sin(nt)}{n}\right|_{2\pi}^{3\pi}\right) = 0 \tag{19}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin(nt)dt + 2\int\limits_{2\pi}^{3\pi}\sin(nt)dt\right) = -\frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{\cos(nt)}{n}\right|_{\pi}^{2\pi} + 2\left.\frac{\cos(nt)}{n}\right|_{2\pi}^{3\pi}\right) =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(2\pi n)-\cos(\pi n)}{n} + 2\frac{\cos(3\pi n)-\cos(2\pi n)}{n}\right) =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(\pi n)}{n} + 2\frac{\cos(3\pi n)-1}{n}\right) = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n} + 2\frac{(-1)^n-1}{n}\right) =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n-1}{n}\right) = \frac{1-(-1)^n}{\pi n} \quad (20)$$

Примеры вычисления первых значений b_n:

$$b_1 = \frac{1-(-1)^1}{\pi} = \frac{2}{\pi} \quad (21)$$

$$b_2 = \frac{1-(-1)^2}{2\pi} = 0 \quad (22)$$

$$b_3 = \frac{1-(-1)^3}{3\pi} = \frac{2}{3\pi} \quad (23)$$

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin(0)dt + 2\int\limits_{2\pi}^{3\pi}\sin(0)dt\right) = 0 \quad (24)$$

Запишем получившуюся частичную сумму:

$$F_N(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n}\sin(nt)\right), \quad (25)$$

Перейдем к рассмотрению следующей частичной суммы:

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}. \quad (26)$$

Где соответствующий коэффициент:

$$c_n = \frac{1}{T}\int\limits_{h}^{h+T} f(t)e^{-i\omega_n t}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi}^{3\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-int}dt + 2\int\limits_{2\pi}^{3\pi} e^{-int}dt\right) \quad (27)$$

При $n = 0$ коэффициент будет равен:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^0 dt + 2\int\limits_{2\pi}^{3\pi} e^0 dt\right) = \frac{3}{2} \tag{28}$$

Отдельно вычислим неопределенный интеграл:

$$c_n = \int e^{-int} dt = \frac{-1}{in}\int e^{-int} d(-int) = -\frac{e^{-int}}{in} + C \tag{29}$$

$$c_n = -\frac{1}{2\pi}\left(\left.\frac{e^{-int}}{in}\right|_{\pi}^{2\pi} + 2\left.\frac{e^{-int}}{in}\right|_{2\pi}^{3\pi}\right) = \frac{e^{-in\pi} + e^{-2in\pi} - 2e^{-3in\pi}}{2in\pi} \tag{30}$$

В итоге полученое разложение:

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{-in\pi} + e^{-2in\pi} - 2e^{-3in\pi}}{2in\pi} e^{int}. \tag{31}$$

1.1.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье

1.1.5 Построение графиков частичных сумм F_N, G_N

...

1.1.6 Равенство Парсеваля

...

1.2 Любая четная периодическая функция.

$$f(t) = 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) \tag{32}$$

1.2.1 График функции

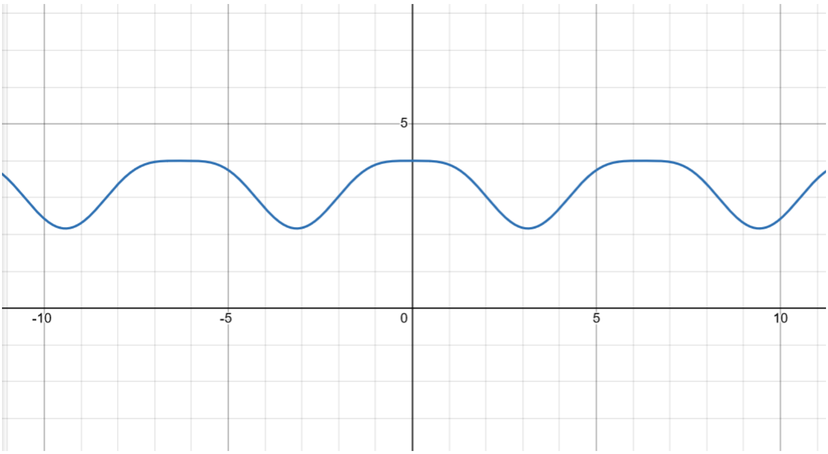

Рис. 2. График функции $f(t)$.

1.2.2 Частичные суммы Фурье

Рассмотрим частичные суммы Фурье F_N и G_N вида

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\omega_n t\right) + b_n \sin\left(\omega_n t\right)\right)\ , \tag{33}$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\omega_n t}\,, \tag{34}$$

где $\omega_n = 2\pi\frac{n}{T}$.

Аналогично, $T = 2\pi$, следовательно, $\omega_n = n$:

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right) , \tag{35}$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} , \tag{36}$$

1.2.3 Вычисление коэффициентов a_n, b_n и c_n

Запишем формулы для вычислия коэффициентов a_n, b_n и c_n :

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{h}^{h+T} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\cos(nt)dt \tag{37}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{h}^{h+T} f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\sin(nt)dt \tag{38}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int\limits_{h}^{h+T} f(t)e^{-i\omega_n t}dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)e^{-int}dt \tag{39}$$

Вычисление интегралов в данном случае возможно только численно, так как интегралы, содержащиеся в коэффициентах являются неберущимися. Найдем первые 3 значения:

$n = 0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt = 6.58868 \tag{40}$$

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\sin(0 \cdot t)dt = 0 \tag{41}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)e^{-i \cdot 0 \cdot t}dt = 3.29434 \tag{42}$$

$n = 1$:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\cos(t)dt = 0.929197 \tag{43}$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\sin(t)dt = 0 \tag{44}$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)e^{-it}dt = 0.464599 \tag{45}$$

$n = 2:$

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\cos(2t)dt = -0.21486 \tag{46}$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\sin(2t)dt = 0 \tag{47}$$

$$c_2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)e^{-2it}dt = -0.10743 \tag{48}$$

1.2.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье

1.2.5 Построение графиков частичных сумм F_N, G_N

...

1.2.6 Равенство Парсеваля

...

1.3 Любая нечетная периодическая функция.

$$f(t) = \sin^3(x) \tag{49}$$

1.3.1 График функции

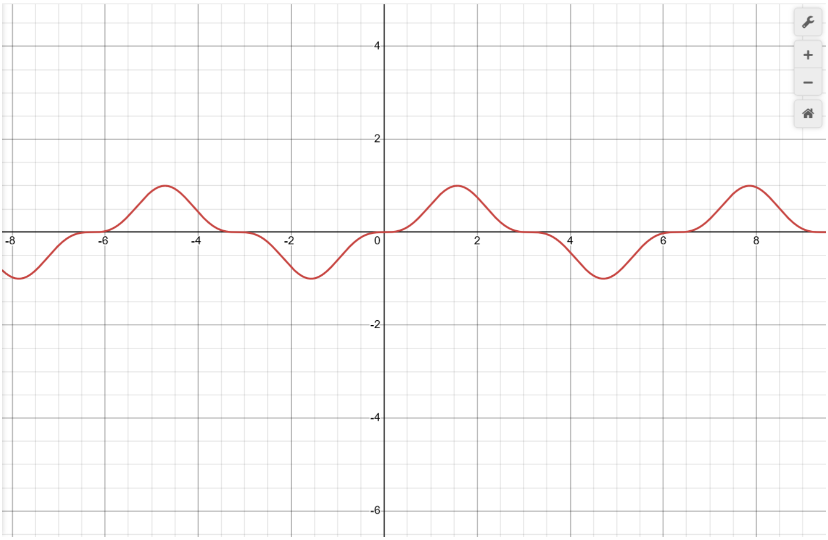

Рис. 3. График функции $f(t)$.

1.3.2 Частичные суммы Фурье

Рассмотрим частичные суммы Фурье F_N и G_N вида

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\right) , \tag{50}$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\omega_n t} , \tag{51}$$

где $\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}$.

Аналогично, $T = 2\pi$, следовательно, $\omega_n = n$:

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(nt\right) + b_n \sin\left(nt\right)\right) \,, \tag{52}$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \,, \tag{53}$$

1.3.3 Вычисление коэффициентов a_n, b_n и c_n

Запишем формулы для вычислия коэффициентов a_n, b_n и c_n :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{h}^{h+T} f(t)dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t)dt = 0 \tag{54}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{h}^{h+T} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t)\cos(nt)dt = 0 \tag{55}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{h}^{h+T} f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t)\sin(nt)dt \tag{56}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int\limits_{h}^{h+T} f(t)e^{-i\omega_n t}dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t)e^{-int}dt \tag{57}$$

Найдем численные значения коэффициентов для первых нескольких n.

$n = 0$:

$$a_0 = 0 \tag{58}$$

$$b_0 = 0 \tag{59}$$

$$c_0 = 0 \tag{60}$$

$n = 1:$

$$a_1 = 0 \tag{61}$$

$$b_1 = \frac{3}{4} \tag{62}$$

$$c_1 = -\frac{3i}{8} \tag{63}$$

$n = 2:$

$$a_2 = 0 \tag{64}$$

$$b_2 = 0 \tag{65}$$

$$c_2 = 0 \tag{66}$$

$n = 3:$

$$a_3 = 0 \tag{67}$$

$$b_3 = -\frac{1}{4} \tag{68}$$

$$c_3 = \frac{i}{8} \tag{69}$$

1.3.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье

1.3.5 Построение графиков частичных сумм F_N, G_N

...

1.3.6 Равенство Парсеваля

...

1.4 Любая периодическая функция, график которой состоит не только из прямых линий, и которая не является ни четной, ни нечетной.

$$f(t) = \cos(t+1) \tag{70}$$

1.4.1 График функции

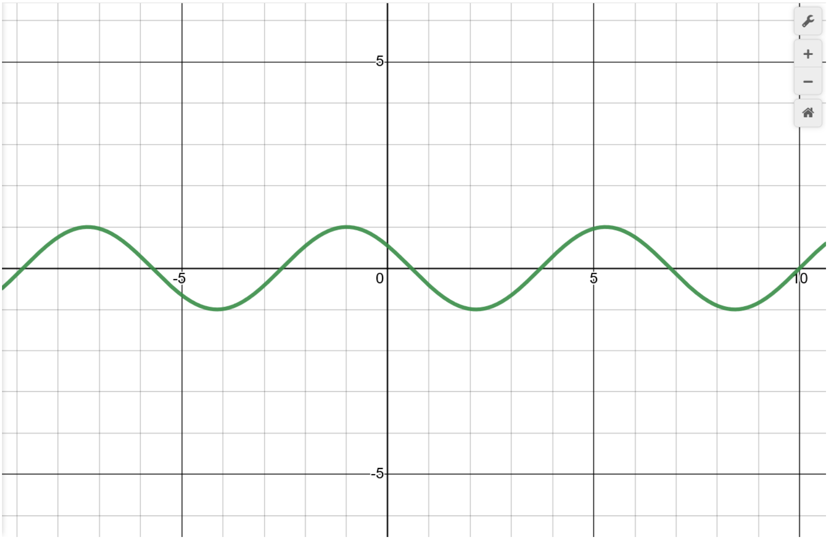

Рис. 4. График функции $f(t)$.

1.4.2 Частичные суммы Фурье

1.4.3 Вычисление коэффициентов a_n, b_n и c_n

1.4.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье

1.4.5 Построение графиков частичных сумм F_N, G_N

...

1.4.6 Равенство Парсеваля

...