Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 3 "Жёсткая фильтрация"

по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2024

1 Задание. Жёсткие фильтры.

Зададимся числами $a = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$ такими, что $t_1 < t_2$, и рассмотрим функцию g такую, что $g(t) = a$ при $t \in [t_1, t_2]$ и $g(t) = 0$ при других t.

Выберем большой интервал $T = 20$ и маленький шаг дискретизации dt, соответствующий разбиению рассматриваемого интервала на 1000 точек. Зададим массив времени на отрезке $t = [-T/2, T/2]$ и найдем массив значений g рассматриваемой функции на множестве точек t. Зададим зашумленную версию сигнала как

$$u = g + b \cdot (rand(size(t)) - 0.5) + c \cdot \sin(d \cdot t)$$

Выполним жёсткую фильтрацию указанного сигнала. Для выполнения фильтрации будем поступать так: будем находить Фурье-образ сигнала u, затем обнулять его значения на некоторых (выбранных нами) диапазонах частот, затем восстанавливать сигнал с помощью обратного преобразования.

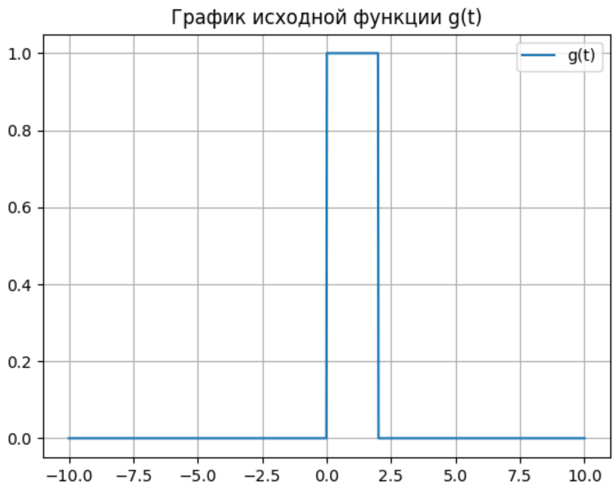


Рис. 1. График исходной функции $g(t)$.

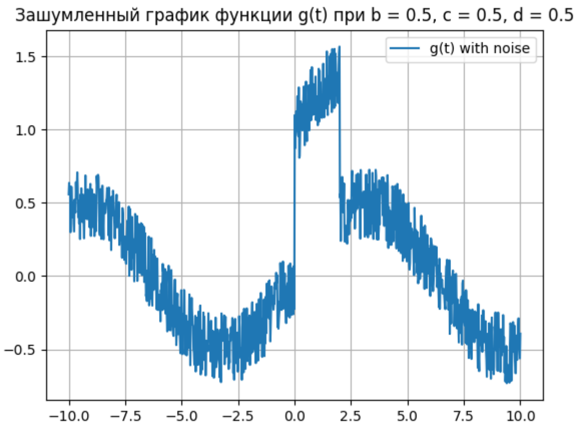


Рис. 2. График функции $g(t)$ с шумами при $b = 0.5, c = 0.5, d = 0.5$.

1.1 Убираем высокие частоты

Рис. 3. График функции $g(t)$ с шумами при $b = 0.5, c = 0, d = 0.5$.

График с шумами при $c = 0$ представлен на рисунке 3.

Найдем Фурье-образ сигнала u.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\omega} dt \tag{1}$$

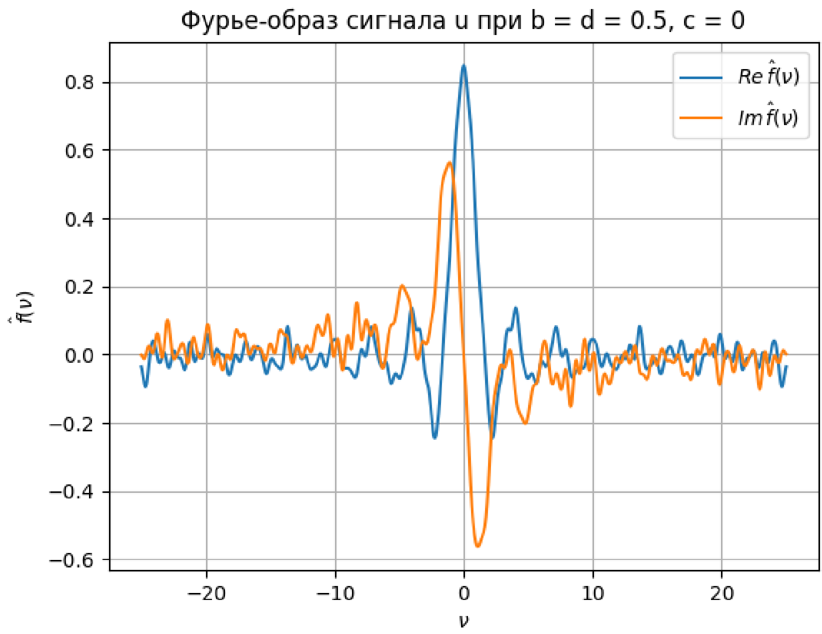


Рис. 4. Фурье-образ функции $u(t)$ при $b = 0.5, c = 0, d = 0.5$.

Частоту мы определили так: $V = 1/dt = 1000/20 = 50$ – ширина диапазона частот, $dv = 1/T = 1/20$ – шаг частоты.

Оставим неизменным Фурье-образ для диапазона частот $[-\nu_0, \nu_0]$ и обнулим его значения на всех остальных частотах. Пусть $\nu_0 = 8$. Результат предствлен на рисунке 5.

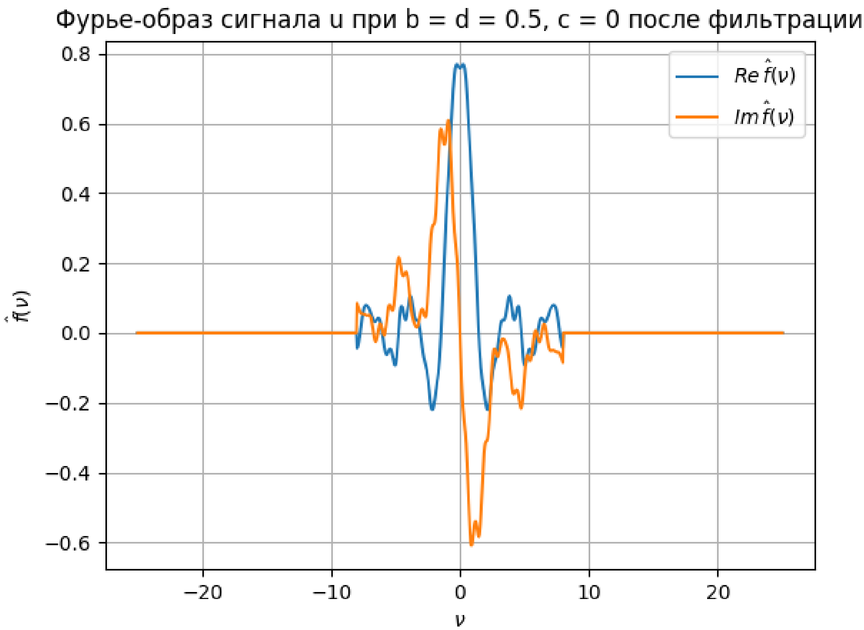


Рис. 5. Фурье-образ функции $u(t)$ при $b = 0.5, c = 0, d = 0.5$ после обнуления.

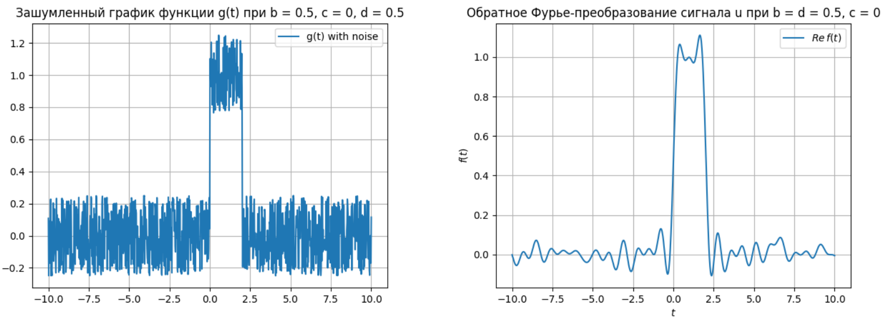
Теперь выполним обратное преобразование Фурье для полученного графика.
Формула для обратного преобразования Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{it\omega} d\omega \tag{2}$$

Рис. 6. Обратное Фурье-преобразование функции $u(t)$ при $b = 0.5, c = 0, d = 0.5$ после фильтрации.

На рисунках 6 и 7 хорошо заметно, что полученный после фильтрации график менее зашумлен.

Рисунок 8 иллюстрирует близость исходной функции к полученному после фильтрации высоких частот зашумленному графику.



а) б)

Рис. 7. Сигнал $u(t)$ до фильтрации высоких частот(а) и после(б).

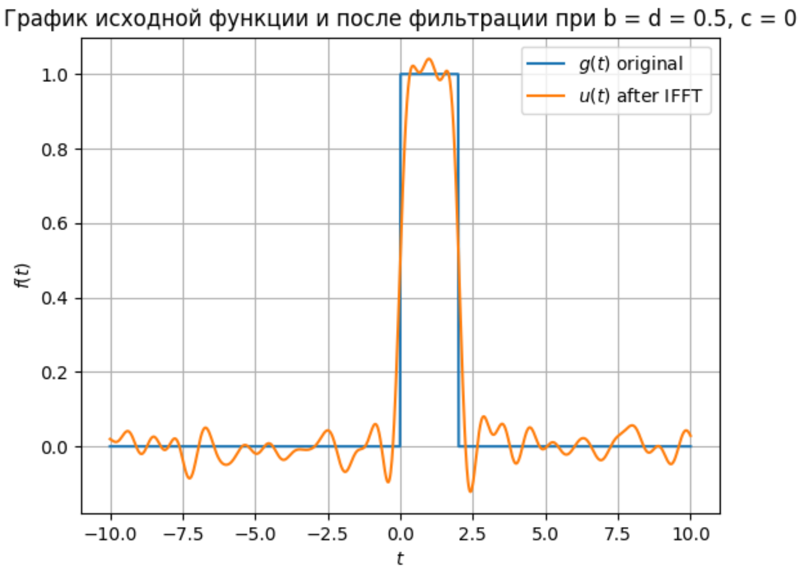


Рис. 8. Исходная функция $g(t)$ при $b = 0.5, c = 0, d = 0.5$ и после очистки зашумленного сигнала.

Построим сравнительные графики модуля Фурье-образа исходного и фильтрованного сигналов.

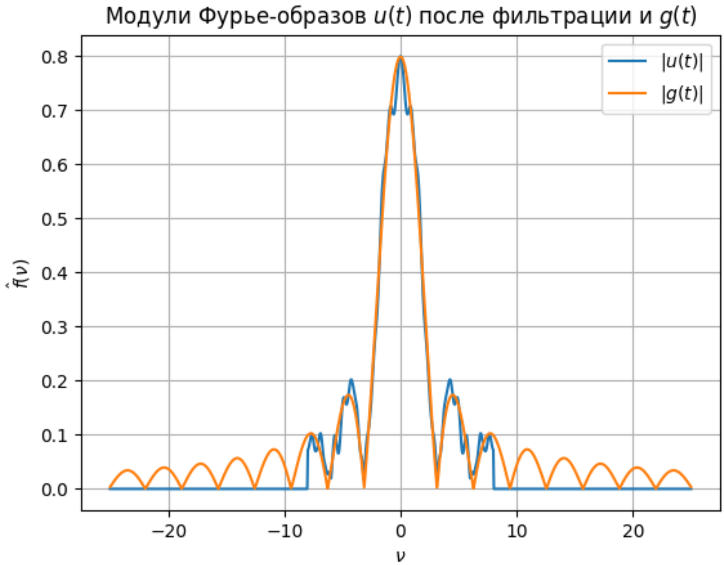
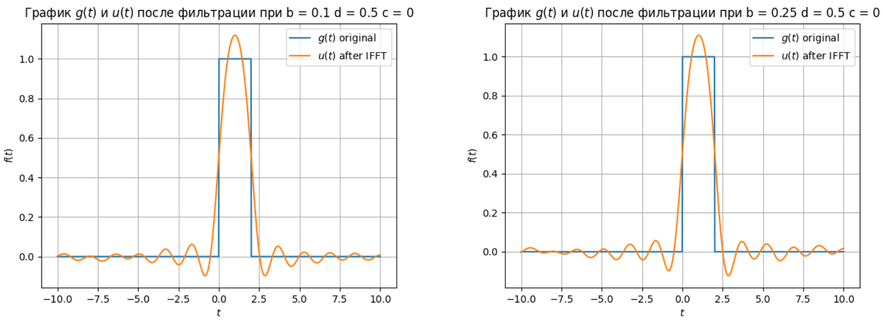


Рис. 9. Сравнительные графики модуля Фурье-образа исходного и фильтрованного сигналов при $b = 0.5, c = 0, d = 0.5$.

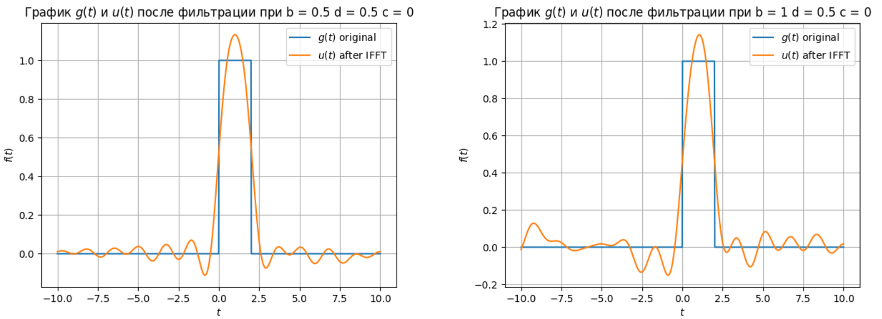
Исследуем влияние частоты среза ν_0 и значения параметра b на эффективность фильтрации.

Пусть $\nu_0 = [4, 8, 10]$, $b = [0.1, 0.25, 0.5, 1]$.



а) б)

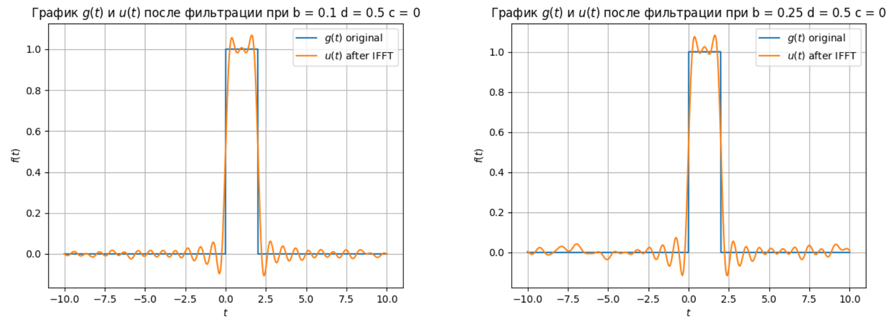
Рис. 10. Сигнал $g(t)$ и $u(t)$ после фильтрации при $\nu_0 = 4$ а) $b = 0.1$, б) $b = 0.25$.



а) б)

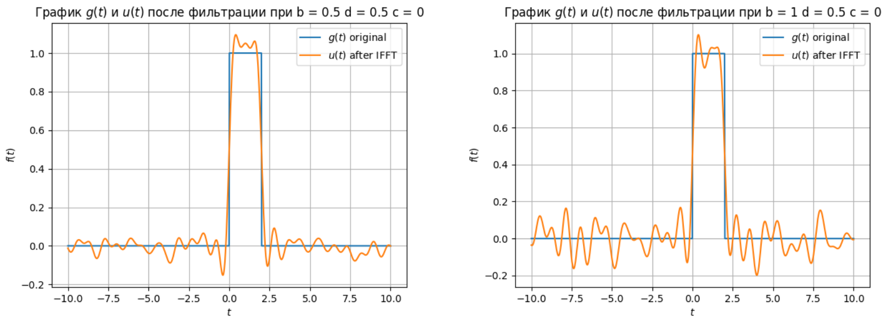
Рис. 11. Сигнал $g(t)$ и $u(t)$ после фильтрации при $\nu_0 = 4$ а) $b = 0.5$, б) $b = 1$.

При анализе графиков с одинаковой частотой, но разным коэффициентом b, можно заметить, незначительно эффективнее прошла фильтрации при наименьшем значении b (рисунки 10-11).



а) б)

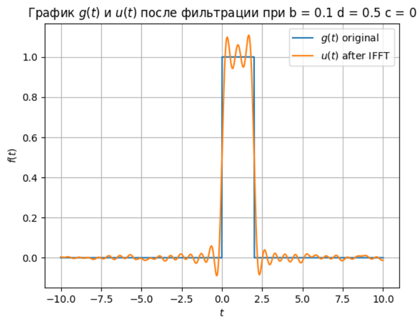
Рис. 12. Сигнал $g(t)$ и $u(t)$ после фильтрации при $\nu_0 = 8$ а) $b = 0.1$, б) $b = 0.25$.



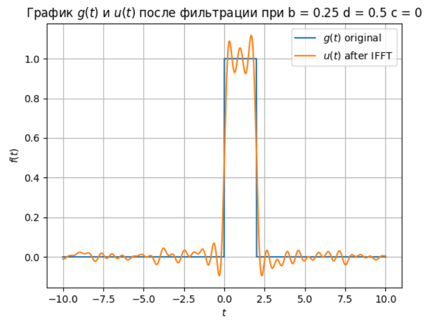
а) б)

Рис. 13. Сигнал $g(t)$ и $u(t)$ после фильтрации при $\nu_0 = 8$ а) $b = 0.5$, б) $b = 1$.

Графики на рисунках 12 и 13 демонстрируют ту же тенденцию: при одинаковом ν_0 наиболее эффективной является фильтрация при b минимальном.



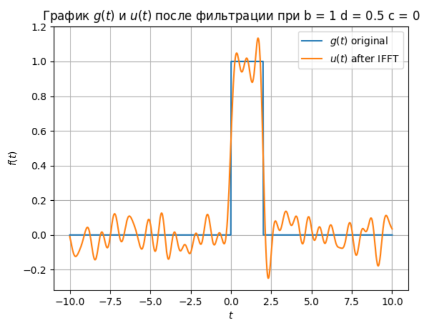
а)



б)

Рис. 14. Сигнал $g(t)$ и $u(t)$ после фильтрации при $\nu_0 = 10$ а) $b = 0.1$, б) $b = 0.25$.

а)



б)

Рис. 15. Сигнал $g(t)$ и $u(t)$ после фильтрации при $\nu_0 = 10$ а) $b = 0.5$, б) $b = 1$.

При увеличении параметра b в уравнении, задающем шумы, снижается эффективность фильтрации. Это происходит, потому что чем больше значение b, тем больше шумов добавляется к исходной функции $g(t)$. При увеличении параметра ν_0 полученная после фильтрации картинка становится четче и ближе к исходной функции $g(t)$.

1.2 Убираем специфические частоты

Пусть $b = 0.5, c = 0.5, d = 5$. Найдем Фурье-образ сигнала.

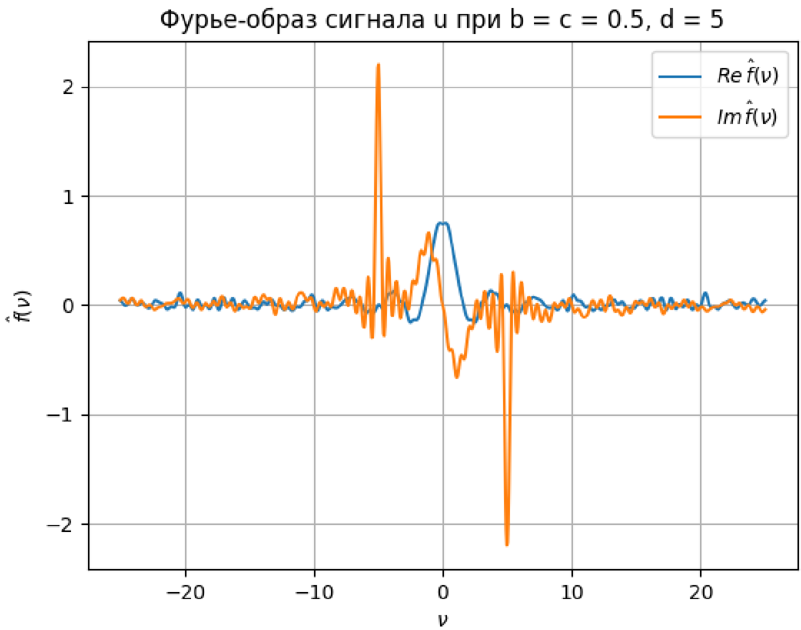


Рис. 16. Фурье-образ функции $u(t)$ при $b = 0.5, c = 0.5, d = 5$.

Попробуем убрать сначала высокие частоты, с помощью обнуления определенного диапазона частот, возьмем $\nu_0 = 10$ и воспользуемся способом из пункта 1.1.

Получим график (рисунок 17), в котором теперь основной шум представляют гармонические колебания. Попробуем обнулить частоты, которым соответствуют наибольшие скачки функции $Im\hat{f}(\nu)$ (рисунок 16), то есть около 5 и -5.

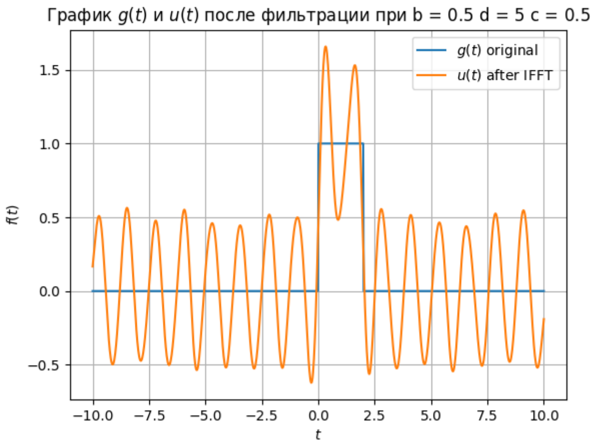
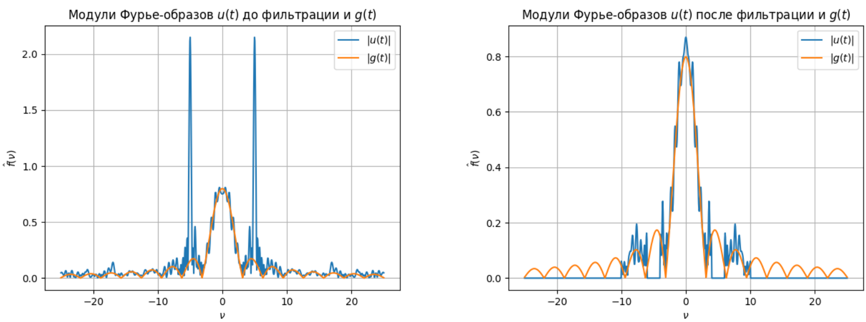


Рис. 17. Функция $g(t)$ при $b = 0.5, c = 0.5, d = 5$ и $u(t)$ без высоких частот.

Рис. 18. Фурье-образ функции $u(t)$ при $b = 0.5, c = 0.5, d = 5$ после фильтрации.

Рис. 19. Функция $g(t)$ при $b = 0.5, c = 0.5, d = 5$ и $u(t)$ после фильтрации от высоких частот и от специальных.



а) б)

Рис. 20. Модули образов $g(t)$ и сигнала $u(t)$ до фильтрации (а) и после(б).

В результате получаем график, изображенный на рисунке 19, шумы, присутствующие ранее заметно снизились и теперь $u(t)$ лучше приближает исходную функцию $g(t)$.

1.3 Убираем низкие частоты?

Рассмотрим фильтр, который обнуляет Фурье-образ на всех частотах в некоторой окрестности точки $\nu = 0$.

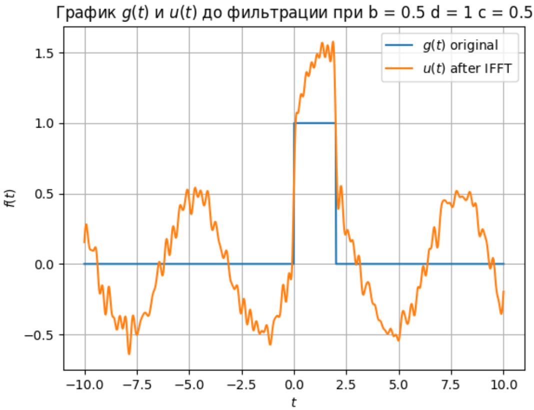


Рис. 21. Функция $g(t)$ при $b = 0.5, c = 0.5, d = 1$ и $u(t)$ до фильтрации.

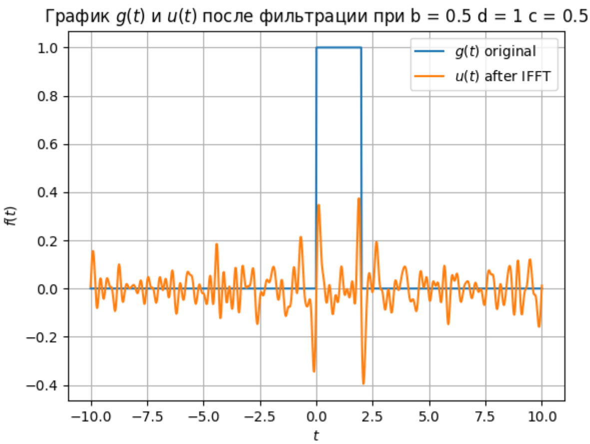
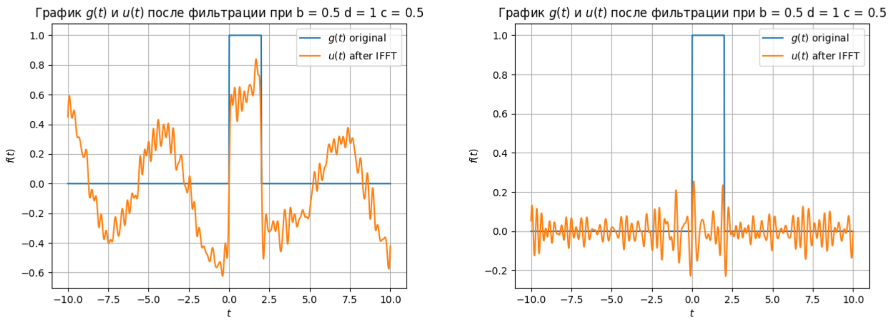


Рис. 22. Функция $g(t)$ при $b = 0.5, c = 0.5, d = 1$ и $u(t)$ после фильтрации $|\nu| < 5$.

Заметим, что фильтр снизил амплитуду гармонической составляющей помех, но вместе с ней понизилось и сходство с графиком исходной функции (рисунок 22).

Рассмотрим влияние изменения ширины промежутка, в котором мы зануляем частоты.



а) б)

Рис. 23. Графики $g(t)$ и сигнала $u(t)$ после фильтрации при а) $|\nu| < 1$ и б) $|\nu| < 10$.

На рисунках 22-23 заметно, что при увеличении промежутка снижется количество шумов, но пропадает и нужный нам сигнал. В нашем случае фильтрация низких частот оказалась малоэффективной при любом промежутке $[-\nu, \nu]$.

2 Задание. Фильтрация звука.

Дан файл, в которм присутствует запись голоса и шумы. Необходимо, чтобы после фильтрации остался только голос человека. После чтения файла 'MUHA.wav' получим следующий график звука в аудиодорожке:

Рис. 24. Исходные данные файла 'MUHA.wav'.

Построим так же модуль Фурье-образа исходной аудиодорожки (рисунок 25).

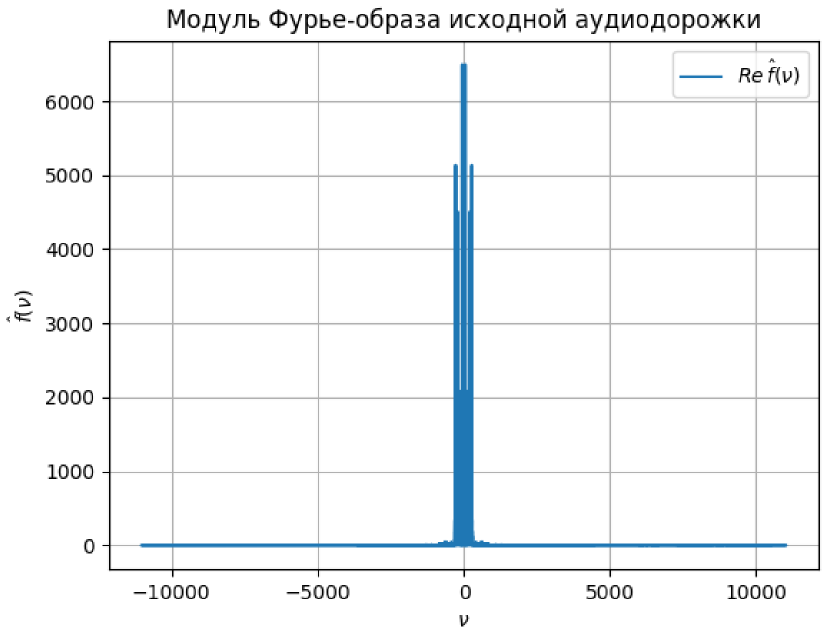


Рис. 25. Модуль Фурье-образа исходной аудиодорожки файла 'MUHA.wav'.

Попробуем применить тип фильтрации, который мы использовали в пункте 1.3 – фильтрация низких частот, предположим, что шум в записи является в основном низкочастотным. Для этого занулим все частоты, входящие в промежуток $[-\nu, \nu]$, ν будем подбирать так, чтобы голос был слышен максимально четко. При $\nu = 400$ и при $\nu = 500$ большая часть шума пропала, стал отчетливо слышаться голос, но на фоне появились звуки, похожие на свирель или легкий свист, значит, нужно ограничить еще и высокие частоты (аналогично тому, как это было выполнено в пункте 1.1 данной работы), частоты $|\nu| > 7000$ тоже были обращены в ноль. Звук стал яснее.

Прослушать получившийся файл можно по ссылке.

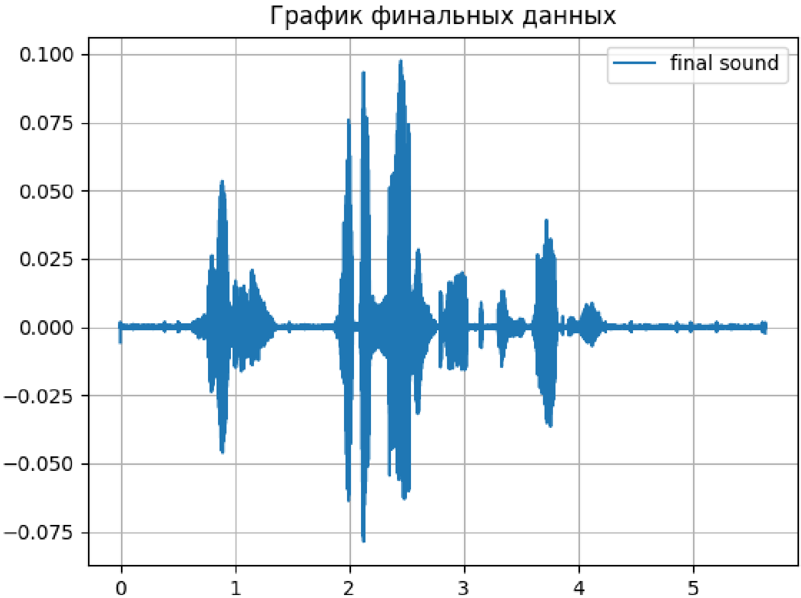


Рис. 26. Финальные данные файла 'MUHA.wav'.

Рис. 27. Модуль Фурье-образа финальной аудиодорожки файла 'MUHA.wav'.