

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 5
"Связь непрерывного и дискретного "
по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2024

1 Задание. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье.

Рассмотрим прямоугольную функцию $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/2, \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases} \quad (1)$$

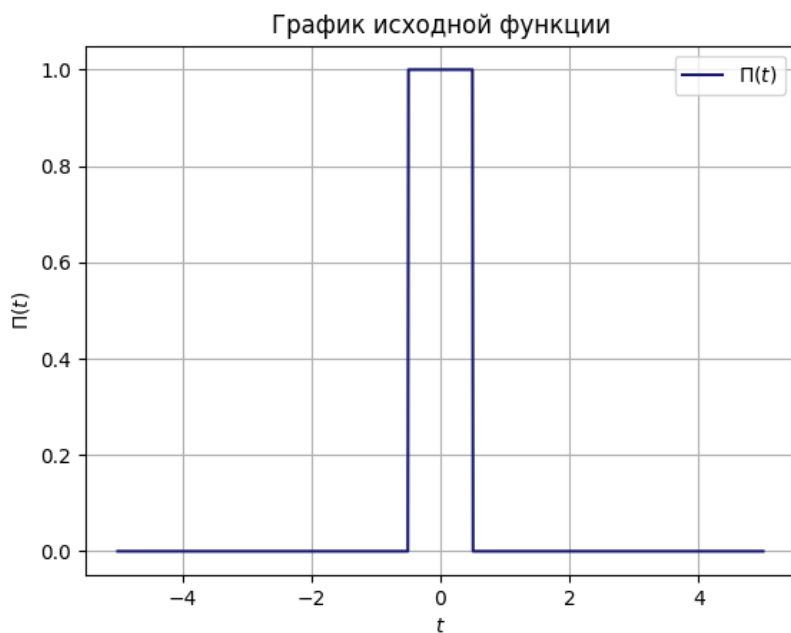


Рис. 1. График исходной функции $\Pi(t)$.

1.1 Истинный Фурье-образ.

Найдем аналитическое выражение для Фурье-образа

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \int_{-0.5}^{0.5} e^{-2\pi i \nu t} dt = -\frac{e^{-2\pi i \nu t}}{2\pi i \nu} \Big|_{-0.5}^{0.5} = \\ &= -\frac{e^{-\pi i \nu} - e^{\pi i \nu}}{2\pi i \nu} = \frac{e^{\pi i \nu} - e^{-\pi i \nu}}{2\pi i \nu} = \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} = \text{sinc}(\nu) \quad (2)\end{aligned}$$

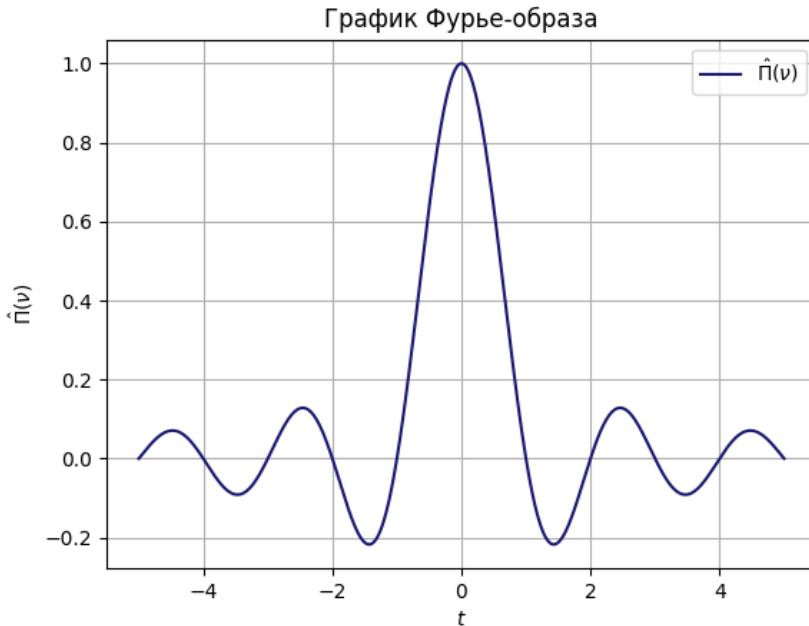
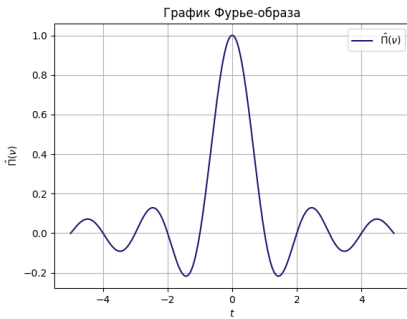


Рис. 2. График Фурье-образа функции $\Pi(t)$.

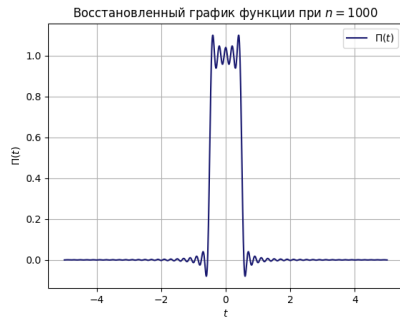
1.2 Численное интегрирование

Теперь найдем Фурье-образ $\Pi(t)$ с помощью численного интегрирования (функции `trapz` библиотеки *NumPy* языка *Python*), а затем с помощью численного интегрирования восстановим исходную функцию $\Pi(t)$.

Число шагов интегрирования будем задавать переменной n .



а)



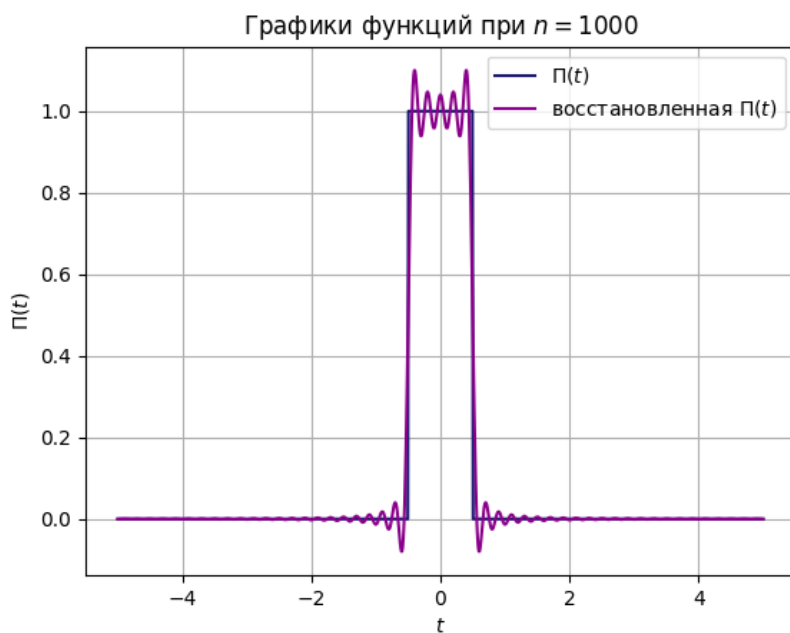
б)

Рис. 3. а) График Фурье-образа функции $\Pi(t)$, полученный с помощью численного интегрирования, б) график восстановленной функции.

Заметим, что при $n = 1000$ график Фурье-образа (рисунок 3а) совпадает с графиком Фурье-образа, построенного с помощью аналитической формулы (рисунок 2). В то же время, график восстановленной функции (рисунок 3б) имеет заметные отличия от исходного графика функции (рисунок 1). Далее построим сравнительные графики Фурье-образов, исходной функции и восстановленной при разных значениях n , также будем фиксировать время работы программы. Промежуток интегрирования обозначим $[-d, d]$. Основные характеристики графиков представлены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры графиков восстановленной функции.

№ рисунка	n	d	t, ms
4	1000	5	381
2	1	5	10.000
3	5	1	50.000
4	5	5	250.000

Рис. 4. Графики восстановленной и исходной функции $\Pi(t)$.

2 Задание. Сэмплирование.

2.1 Сэмплирование синусов

2.2 Сэмплирование *sinus cardinalis*