Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 1 "Ряды Фурье"

по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2024

1 Задание. Вещественные функции.

Придумать числа a, b, t_0, t_1, t_2 такие, что a, $b > 0$ и $t_2 > t_1 > t_0 > 0$.
Пусть $a = 1$, $b = 2$; $t_0 = \pi$, $t_1 = 2\pi$, $t_2 = 3\pi$.
Рассмотрим следующие функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1.1 Квадратная волна.

Периодическая функция с периодом $T = t_2 - t_0 = 3\pi - \pi = 2\pi$ такая, что

$$f(t) = \begin{cases} a, \ t \in [t_0, t_1), \\ b, \ t \in [t_1, t_2) \end{cases} = \begin{cases} 1, \ t \in [\pi, 2\pi), \\ 2, \ t \in [2\pi, 3\pi) \end{cases} \tag{1}$$

1.1.1 График функции

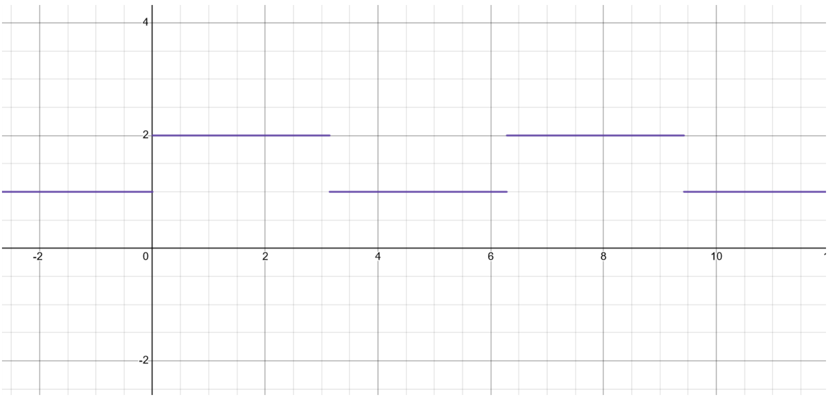


Рис. 1. График функции $f(t)$.

1.1.2 Частичные суммы Фурье

Рассмотрим частичные суммы Фурье F_N и G_N вида

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\right) , \tag{2}$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\omega_n t}\,, \tag{3}$$

где $\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}$.

Перепишем формулы выше с учетом того, что $T = 2\pi$, следовательно $\omega_n = 2\pi \frac{n}{2\pi} = n$:

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos{(nt)} + b_n \sin{(nt)}\right)\,, \tag{4}$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}. \tag{5}$$

Перейдем к разложению по формуле 4.
$f(x)$ определена на $[\pi, 3\pi]$, преобразуем:

$$\pi \le t \le 3\pi \to \pi - 2\pi \le t - 2\pi \le 3\pi - 2\pi \to -\pi \le t - 2\pi \le \pi \tag{6}$$

Новая переменная $x = t - 2\pi$. Выразим $t = x + 2\pi$ и запишем новую функцию $\phi(x) = f(x + 2\pi)$.

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos{(nx)} + b_n \sin{(nx)}\right)\,, \tag{7}$$

где a_0, a_n, b_n – коэффициенты Фурье:

1.1.3 Вычисление коэффициентов a_n, b_n и c_n

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \phi(x) dx, \tag{8}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \cos(nx) dx, \tag{9}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \sin(nx) dx, \tag{10}$$

Проведем обратную замену $x = t - 2\pi$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(n(t - 2\pi)\right) + b_n \sin\left(n(t - 2\pi)\right)\right) \tag{11}$$

Воспользуемся периодичностью синуса и косинуса:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(nt\right) + b_n \sin\left(nt\right)\right) \tag{12}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\pi}^{3\pi} f(t) dt, \tag{13}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\pi}^{3\pi} f(t) \cos(nt) dt, \tag{14}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\pi}^{3\pi} f(t) \sin(nt) dt, \tag{15}$$

Вычислим значения коэффициентов:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{\pi}^{2\pi} 1 dt + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} 2 dt \right) = \frac{1}{\pi} \left(\pi + 2\pi\right) = 3, \tag{16}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos(nt) dt + 2 \int\limits_{2\pi}^{3\pi} \cos(nt) dt \right) \tag{17}$$

Отдельно вычислим неопределенный интеграл:

$$\int \cos(nt) dt = \left| u = nt, t = \frac{u}{n}, dt = \frac{du}{n} \right| = \int \frac{\cos(u) du}{n} = \frac{\sin u}{n} + C = \frac{\sin(nt)}{n} + C \tag{18}$$

Отсюда получим

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\left. \frac{\sin(nt)}{n} \right|_{\pi}^{2\pi} + 2 \left. \frac{\sin(nt)}{n} \right|_{2\pi}^{3\pi} \right) = 0 \tag{19}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin(nt)dt + 2\int\limits_{2\pi}^{3\pi}\sin(nt)dt\right) = -\frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{\cos(nt)}{n}\right|_{\pi}^{2\pi} + 2\left.\frac{\cos(nt)}{n}\right|_{2\pi}^{3\pi}\right) =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(2\pi n)-\cos(\pi n)}{n} + 2\frac{\cos(3\pi n)-\cos(2\pi n)}{n}\right) =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(\pi n)}{n} + 2\frac{\cos(3\pi n)-1}{n}\right) = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n} + 2\frac{(-1)^n-1}{n}\right) =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n-1}{n}\right) = \frac{1-(-1)^n}{\pi n} \quad (20)$$

Примеры вычисления первых значений b_n:

$$b_1 = \frac{1-(-1)^1}{\pi} = \frac{2}{\pi} \quad (21)$$

$$b_2 = \frac{1-(-1)^2}{2\pi} = 0 \quad (22)$$

$$b_3 = \frac{1-(-1)^3}{3\pi} = \frac{2}{3\pi} \quad (23)$$

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin(0)dt + 2\int\limits_{2\pi}^{3\pi}\sin(0)dt\right) = 0 \quad (24)$$

Запишем получившуюся частичную сумму:

$$F_N(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n}\sin(nt)\right), \quad (25)$$

Перейдем к рассмотрению следующей частичной суммы:

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}. \quad (26)$$

Где соответствующий коэффициент:

$$c_n = \frac{1}{T}\int\limits_{h}^{h+T} f(t)e^{-i\omega_n t}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi}^{3\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-int}dt + 2\int\limits_{2\pi}^{3\pi} e^{-int}dt\right) \quad (27)$$

При $n = 0$ коэффициент будет равен:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^0 dt + 2\int\limits_{2\pi}^{3\pi} e^0 dt\right) = \frac{3}{2} \tag{28}$$

Отдельно вычислим неопределенный интеграл:

$$c_n = \int e^{-int}dt = \frac{-1}{in}\int e^{-int}d(-int) = -\frac{e^{-int}}{in} + C \tag{29}$$

$$c_n = -\frac{1}{2\pi}\left(\left.\frac{e^{-int}}{in}\right|_{\pi}^{2\pi} + 2\left.\frac{e^{-int}}{in}\right|_{2\pi}^{3\pi}\right) = \frac{e^{-in\pi} + e^{-2in\pi} - 2e^{-3in\pi}}{2in\pi} \tag{30}$$

В итоге полученое разложение:

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{-in\pi} + e^{-2in\pi} - 2e^{-3in\pi}}{2in\pi} e^{int}. \tag{31}$$

1.1.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье

Код для выисления коэффициентов Фурье написан на *Python* с использованием библитеки *NumPy*.

Листинг 1. Функция, реализующая квадратную волну

```
def fun_square_wave(t):
    if (t // np.pi) % 2 == 0:
        return 2
    else:
        return 1


fun_wave = np.vectorize(fun_square_wave)
```

Необходимое в процессе нахождения коэффициентов интегрирование реализовано с помощью вычисления скалярного произведения подынтегральных функций.

Листинг 2. Функция, реализующая интегрирование для вычисления коэффициентов Фурье.

```
def integral_counter(f_1, f_2, a, b):

    t = np.linspace(a, b, my_sigma)
    dt = (b - a) / my_sigma

    return np.dot(f_1(t), f_2(t)) * dt
```

Далее приведены функции, непосредственно возвращающие вычисленные значения коэффициентов Фурье.

Листинг 3. Функция для коэффициентов a_n

```
def a_coef(f, N):
    res = []
    for n in range(N):
        fourier_cos = lambda t: np.cos(n * t)
        res.append(integral_counter(f, fourier_cos, np.pi, 3 *
            np.pi) / np.pi)

    return res
```

Листинг 4. Функция для коэффициентов b_n

```
def b_coef(f, N):
    res = []
    for n in range(N):
        fourier_sin = lambda t: np.sin(n * t)
        res.append(integral_counter(f, fourier_sin, np.pi, 3 *
            np.pi) / np.pi)
    return res
```

Листинг 5. Функция для коэффициентов c_n

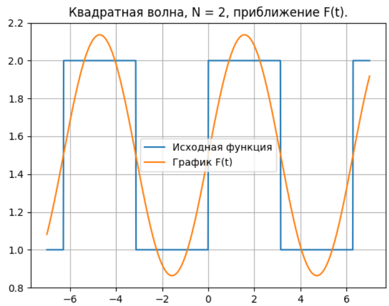
```
def c_coef(f, N):
    res = []
    for n in range(N):
        fourier_exp = lambda t: np.exp(-1j * n * t)
        res.append(integral_counter(f, fourier_exp, np.pi, 3 *
            np.pi) / (2 * np.pi))
    return res
```

Таблица 1. Значения коэффициентов, вычисленных с помощью написанной программы для квадратной волны.

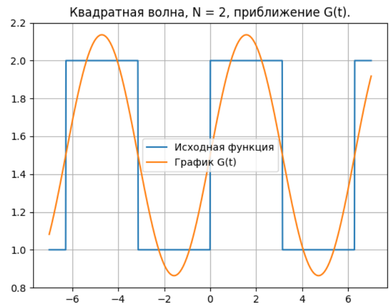
n	a_n	b_n	$Re(c_n)$	$Im(c_n)$
0	2.9998	0	1.4999	0
1	-0.0001	0.6366	-0.00005	-0.3183
2	0.0001	0	0.00005	0

Значения коэффициентов для первых трех значений n, вычисленные с помощью программы близки к числам, полученным аналитически.

1.1.5 Построение графиков частичных сумм F_N, G_N



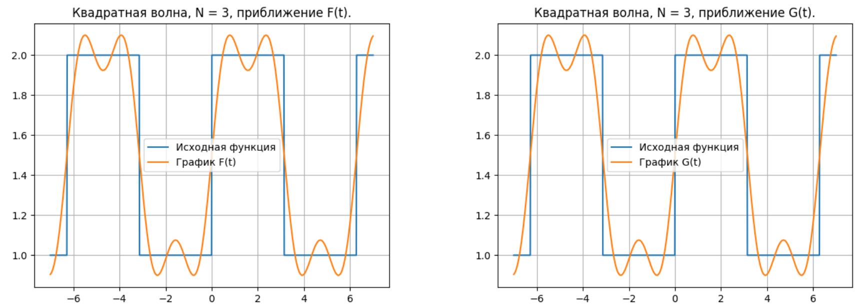
а)



б)

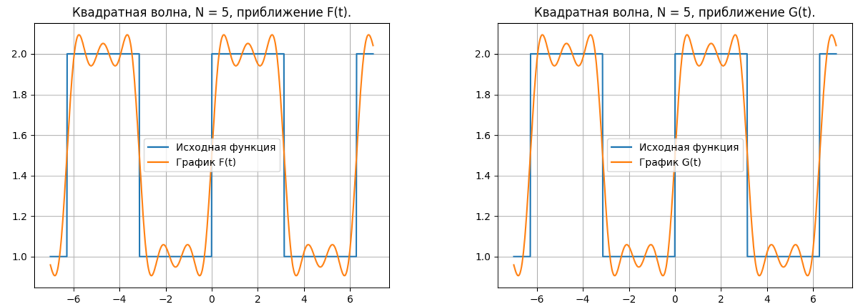
Рис. 2. Построение графиков частичных сумм, для квадратной волны, $N = 2$.

При малых значениях N (рис. 2-4) можно заметить, что суммы $F_N(t)$ и $G_N(t)$ практически неотличимы друг от друга.



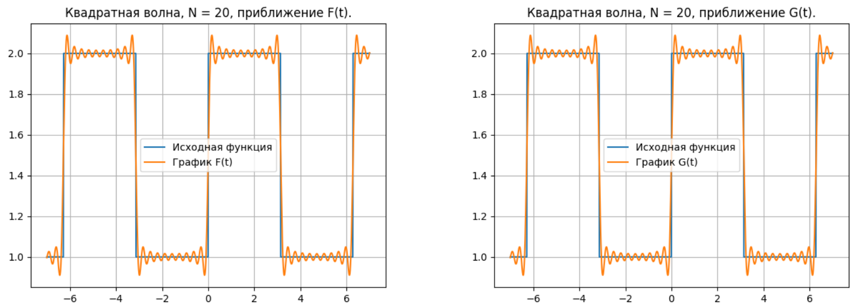
а) б)

Рис. 3. Построение графиков частичных сумм, для квадратной волны, $N = 3$.



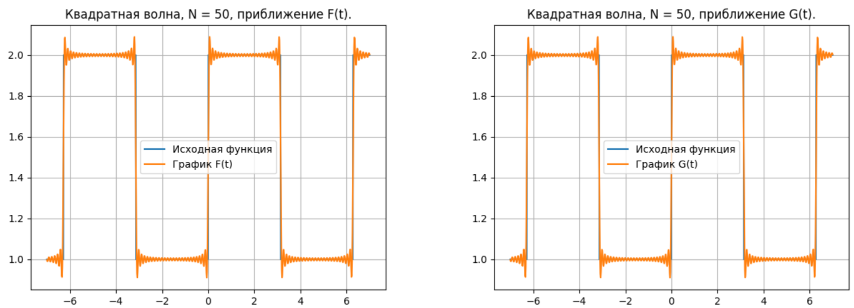
а) б)

Рис. 4. Построение графиков частичных сумм, для квадратной волны, $N = 5$.



а) б)

Рис. 5. Построение графиков частичных сумм, для квадратной волны, $N = 20$.



а) б)

Рис. 6. Построение графиков частичных сумм, для квадратной волны, $N = 50$.

На рисунках 2-6 можно заметить, что при увеличении N точность приближения исходного графика функции с помощью частичных сумм Фурье повышается, причем синхронно и неотличимо друг от друга. При $N \geq 5$ суммы Фурье очерчивают очень похожую на исходную функцию.

1.1.6 Равенство Парсеваля

Запишем равенство Парсеваля для F_N:

$$\|f\|^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \right) \tag{32}$$

и для G_N:

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2, \tag{33}$$

где $\|f\|^2 = \int_a^b (f(t))^2 dt$.
Проведем численную проверку того, что равенство выполнено, для этого напишем новые функции на $Python$.
В результате получим выполнение равенства уже при $N = 100$, при округлении полученных значений до сотых. В выводе программы получаем:

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \right) = 15.699401582331111$$

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = 15.699401613754796$$

$$\|f\|^2 = 15.706078312356812$$

Следовательно, равенство Парсеваля для функции квадратной волны выполнено.

1.2 Любая четная периодическая функция.

$$f(t) = 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) \tag{34}$$

1.2.1 График функции

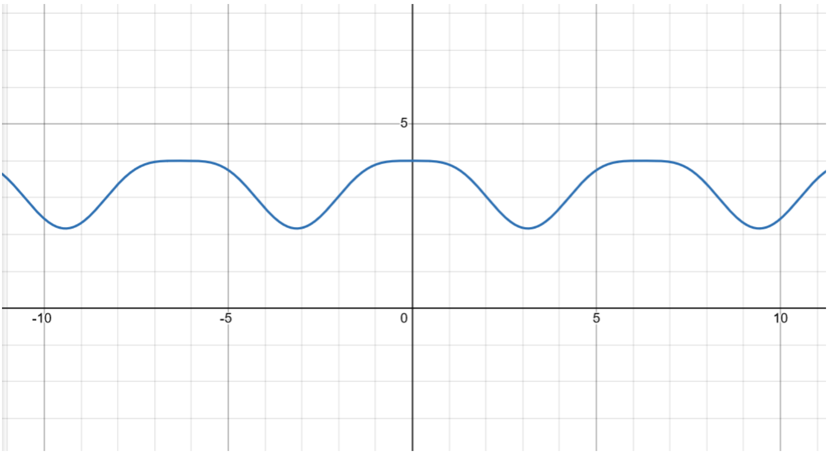


Рис. 7. График функции $f(t)$.

1.2.2 Частичные суммы Фурье

Рассмотрим частичные суммы Фурье F_N и G_N вида

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\right) \ , \tag{35}$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\omega_n t} \, , \tag{36}$$

где $\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}$.

Аналогично, $T = 2\pi$, следовательно, $\omega_n = n$:

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(nt\right) + b_n \sin\left(nt\right)\right) , \tag{37}$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} , \tag{38}$$

1.2.3 Вычисление коэффициентов a_n, b_n и c_n

Запишем формулы для вычислия коэффициентов a_n, b_n и c_n :

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{h}^{h+T} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\cos(nt)dt \tag{39}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int\limits_{h}^{h+T} f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\sin(nt)dt \tag{40}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int\limits_{h}^{h+T} f(t)e^{-i\omega_n t}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)e^{-int}dt \tag{41}$$

Вычисление интегралов в данном случае возможно только численно, так как интегралы, содержащиеся в коэффициентах являются неберущимися. Найдем первые 3 значения:

$n = 0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt = 6.58868 \tag{42}$$

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\sin(0\cdot t)dt = 0 \tag{43}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)e^{-i\cdot 0\cdot t}dt = 3.29434 \tag{44}$$

$n = 1$:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\cos(t)dt = 0.929197 \tag{45}$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\sin(t)dt = 0 \tag{46}$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)e^{-it}dt = 0.464599 \tag{47}$$

$n = 2:$

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\cos(2t)dt = -0.21486 \tag{48}$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\sin(2t)dt = 0 \tag{49}$$

$$c_2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)e^{-2it}dt = -0.10743 \tag{50}$$

1.2.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье

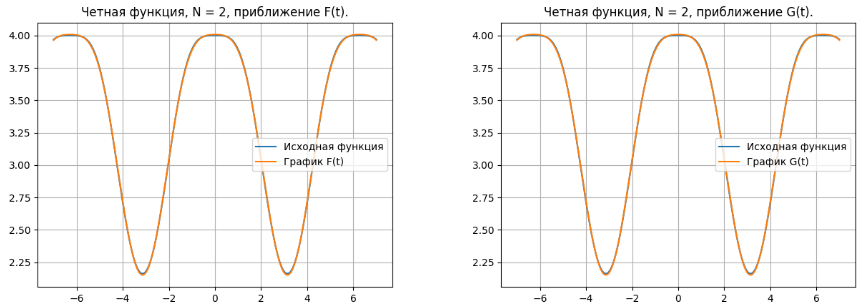
Программа аналогична той, которая использовалась для случая квадратной волны, поэтому приведем здесь лишь вычисленные значения для первых трех n.

Таблица 2. Значения коэффициентов, вычисленных с помощью написанной программы для четной периодической функции.

n	a_n	b_n	$Re(c_n)$	$Im(c_n)$
0	6.5885	0	3.2942	0
1	0.9287	0	0.4643	0
2	-0.2144	0	-0.1072	0

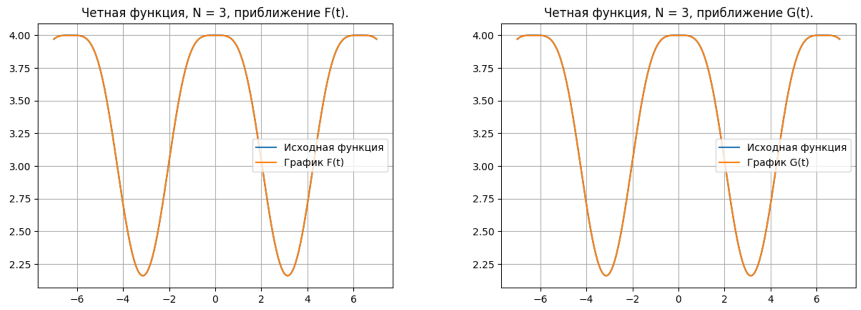
Для четной функции так же легко убедиться, что численные значения близки к полученным аналитическим путем (сложные интегралы в этом случае были посчитаны с помощью *Wolfram*).

1.2.5 Построение графиков частичных сумм F_N, G_N



а) б)

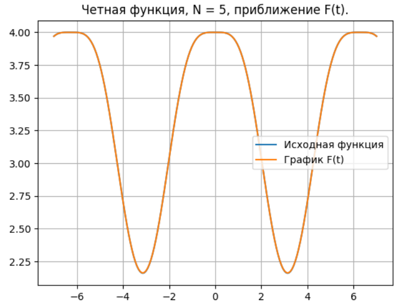
Рис. 8. Построение графиков частичных сумм, для четной функции, $N = 2$.



а) б)

Рис. 9. Построение графиков частичных сумм, для четной функции, $N = 3$.

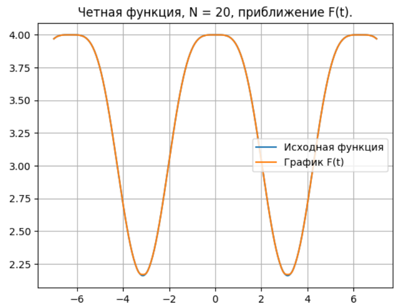
Для функции $4\cos\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)$ суммы F_N и G_N с высокой точностью приближают исходную функцию уже при минимальном $N = 2$.



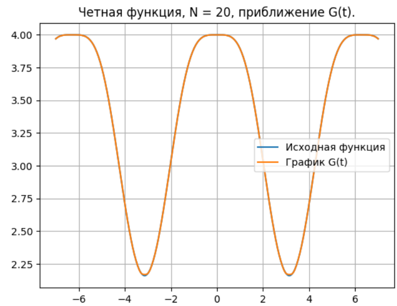
а)

б)

Рис. 10. Построение графиков частичных сумм, для четной функции, $N = 5$.

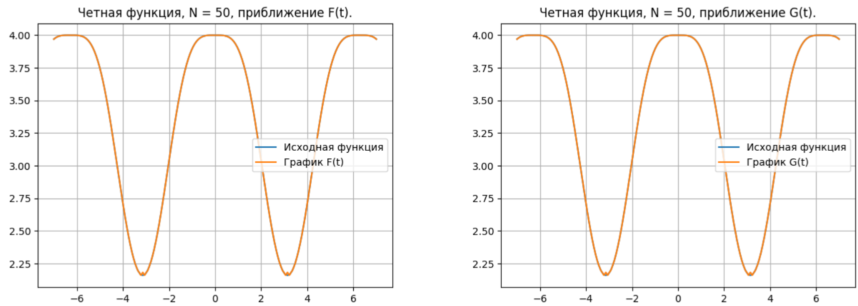


а)



б)

Рис. 11. Построение графиков частичных сумм, для четной функции, $N = 20$.



а) б)

Рис. 12. Построение графиков частичных сумм, для четной функции, $N = 50$.

1.2.6 Равенство Парсеваля

Вновь запишем равенство Парсеваля для F_N:

$$\|f\|^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right) \tag{51}$$

и для G_N:

$$\|f\|^2 = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2, \tag{52}$$

где $\|f\|^2 = \int_a^b (f(t))^2 dt$.
В выводе программы при $N = 10$ получаем:

$$\pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right) = 71.03881254047784$$

$$2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = 71.03881312743097$$

$$\|f\|^2 = 71.04297678948326$$

Следовательно, равенство Парсеваля для четной функции выполнено. Вновь результаты вычислений оказались равны с точностью до сотых.

1.3 Любая нечетная периодическая функция.

$$f(t) = \sin^3(t) \tag{53}$$

1.3.1 График функции

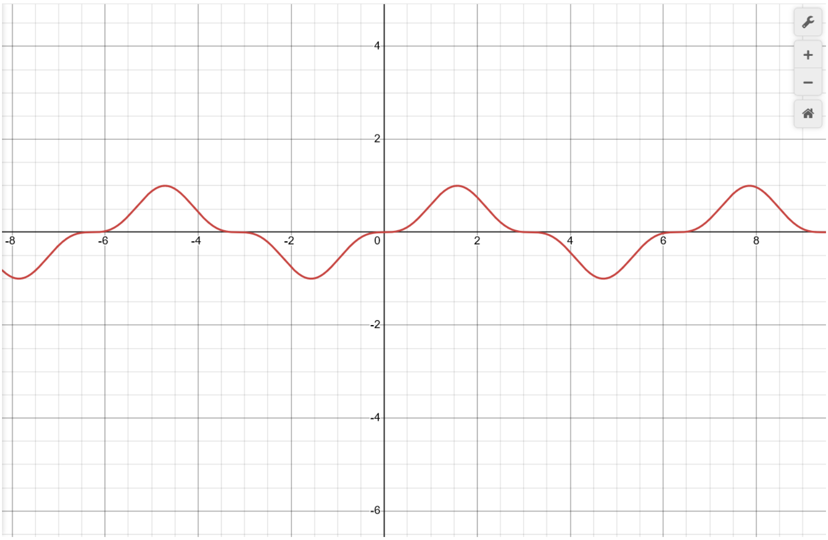


Рис. 13. График функции $f(t)$.

1.3.2 Частичные суммы Фурье

Рассмотрим частичные суммы Фурье F_N и G_N вида

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\right), \tag{54}$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\omega_n t}, \tag{55}$$

где $\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}$.

Аналогично, $T = 2\pi$, следовательно, $\omega_n = n$:

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos{(nt)} + b_n \sin{(nt)}\right) , \tag{56}$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} , \tag{57}$$

1.3.3 Вычисление коэффициентов a_n, b_n и c_n

Запишем формулы для вычислия коэффициентов a_n, b_n и c_n :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{h}^{h+T} f(t)dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t)dt = 0 \tag{58}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{h}^{h+T} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t)\cos(nt)dt = 0 \tag{59}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{h}^{h+T} f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t)\sin(nt)dt \tag{60}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int\limits_{h}^{h+T} f(t)e^{-i\omega_n t}dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t)e^{-int}dt \tag{61}$$

Найдем численные значения коэффициентов для первых нескольких n.

$n = 0$:

$$a_0 = 0 \tag{62}$$

$$b_0 = 0 \tag{63}$$

$$c_0 = 0 \tag{64}$$

$n = 1:$

$$a_1 = 0 \tag{65}$$

$$b_1 = \frac{3}{4} \tag{66}$$

$$c_1 = -\frac{3i}{8} \tag{67}$$

$n = 2:$

$$a_2 = 0 \tag{68}$$

$$b_2 = 0 \tag{69}$$

$$c_2 = 0 \tag{70}$$

$n = 3:$

$$a_3 = 0 \tag{71}$$

$$b_3 = -\frac{1}{4} \tag{72}$$

$$c_3 = \frac{i}{8} \tag{73}$$

1.3.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье

Программа для вычисления коэффициентов Фурье идентична, использовавшейся ранее, поэтому приведем численные результаты для первых четырех значений коэффициентов.

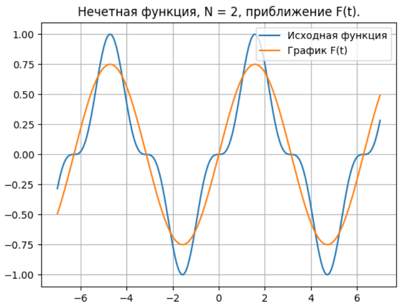
Таблица 3. Значения коэффициентов, вычисленных с помощью написанной программы для нечетной периодической функции.

n	a_n	b_n	$Re(c_n)$	$Im(c_n)$
0	0	0	0	0
1	0	0.74992	0	-0.37496
2	0	0	0	0
3	0	-0.24998	0	0.12499

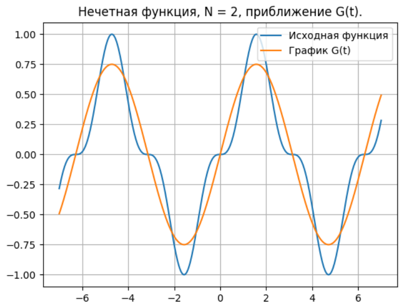
С помощью программы были посчитаны довольно близкие к аналитическим значения коэффициентов.

1.3.5 Построение графиков частичных сумм F_N, G_N

Ниже предствлены графики частичных сумм для нечетной периодической функции $f(t) = \sin^3(t)$:

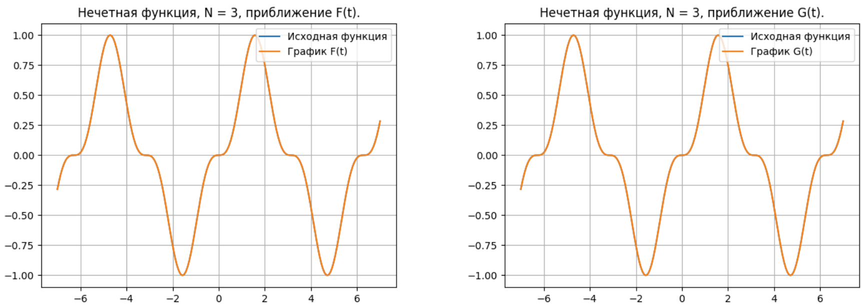


а)



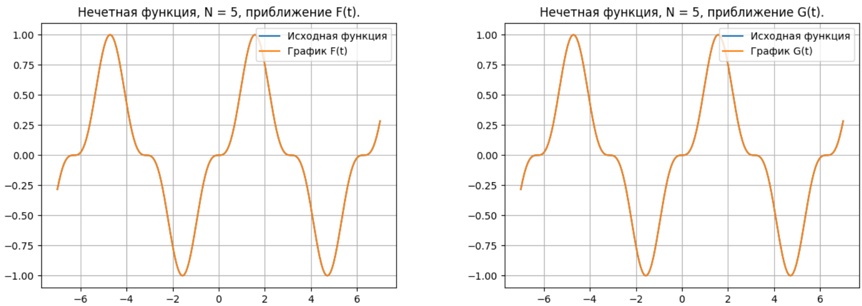
б)

Рис. 14. Построение графиков частичных сумм, для нечетной функции, $N = 2$.



а) б)

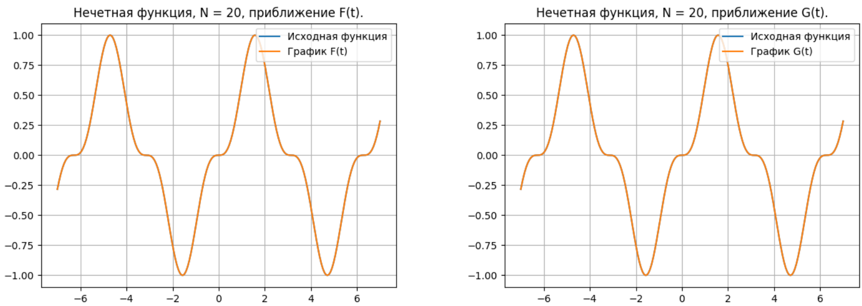
Рис. 15. Построение графиков частичных сумм, для нечетной функции, $N = 3$.



а) б)

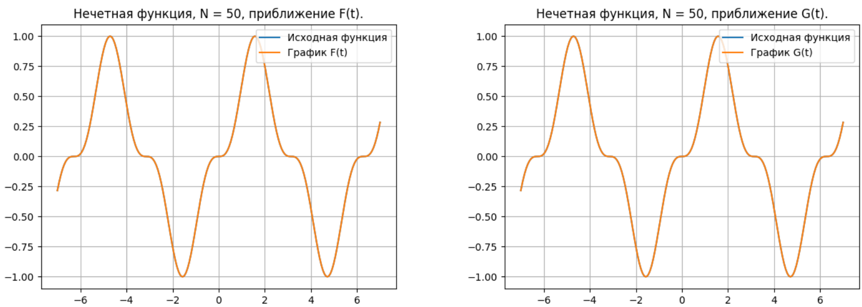
Рис. 16. Построение графиков частичных сумм, для нечетной функции, $N = 5$.

Для функции $f(t) = \sin^3(t)$ неотличимыми от исходной функции графики частичных сумм становится с $N = 3$, при $N = 2$ приближение минимальное (рисунок 14).



а) б)

Рис. 17. Построение графиков частичных сумм, для нечетной функции, $N = 20$.



а) б)

Рис. 18. Построение графиков частичных сумм, для нечетной функции, $N = 50$.

1.3.6 Равенство Парсеваля

Вновь запишем равенство Парсеваля для F_N:

$$\|f\|^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \right) \tag{74}$$

и для G_N:

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2, \tag{75}$$

где $\|f\|^2 = \int_a^b (f(t))^2 dt$.

В выводе программы при $N = 10$ получаем:

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \right) = 1.9631027290468754$$

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = 1.963102729046876$$

$$\|f\|^2 = 1.9632990589527717$$

Следовательно, равенство Парсеваля для нечетной функции выполнено. Результаты вычислений равны с точностью до тысячных.

1.4 Любая периодическая функция, график которой состоит не только из прямых линий, и которая не является ни четной, ни нечетной.

$$f(t) = \sin(t) - \cos^2(t) \tag{76}$$

1.4.1 График функции

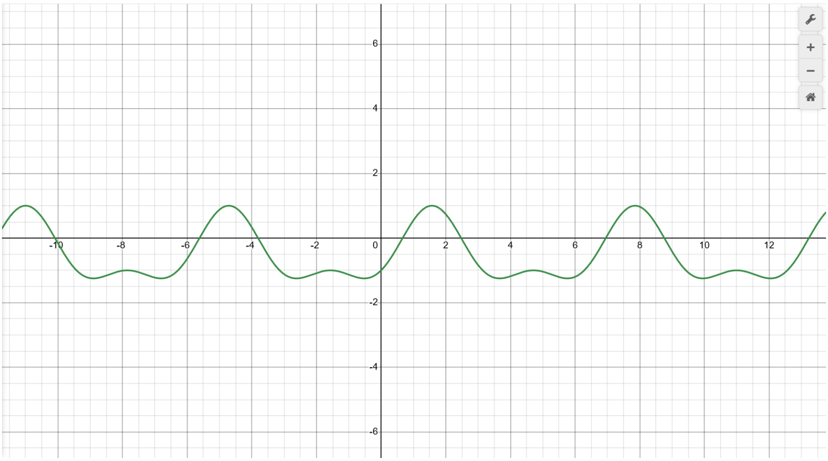


Рис. 19. График функции $f(t)$.

1.4.2 Частичные суммы Фурье

Рассмотрим частичные суммы Фурье F_N и G_N вида

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\omega_n t\right) + b_n \sin\left(\omega_n t\right)\right), \tag{77}$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\omega_n t}, \tag{78}$$

где $\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}$.

Аналогично, $T = 2\pi$, следовательно, $\omega_n = n$:

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(nt\right) + b_n \sin\left(nt\right)\right) , \tag{79}$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} , \tag{80}$$

1.4.3 Вычисление коэффициентов a_n, b_n и c_n

Запишем формулы для вычислия коэффициентов a_n, b_n и c_n :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{h}^{h+T} f(t)dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sin(t) - \cos^2(t)\right) dt = -1 \tag{81}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sin(t) - \cos^2(t)\right) \cos(nt)dt = -\frac{2(n^2-2)\sin(\pi n)}{\pi n(n^2-4)} \tag{82}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sin(t) - \cos^2(t)\right) \sin(nt)dt = \frac{2\sin(\pi n)}{\pi(1-n^2)} \tag{83}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sin(t) - \cos^2(t)\right) e^{-int}dt = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2-n^2}{n(n^2-4)} + \frac{i}{n^2-1}\right) \sin(\pi n) \tag{84}$$

Найдем численные значения коэффициентов для первых нескольких n.

$n = 0$:

$$a_0 = -1 \tag{85}$$

$$b_0 = 0 \tag{86}$$

$$c_0 = -0.5 \tag{87}$$

$n = 1:$

$$a_1 = 0 \tag{88}$$

$$b_1 = 1 \tag{89}$$

$$c_1 = -0.5i \tag{90}$$

$n = 2:$

$$a_2 = -0.5 \tag{91}$$

$$b_2 = 0 \tag{92}$$

$$c_2 = -0.25 \tag{93}$$

1.4.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье

Программа для вычисления коэффициентов Фурье идентична, использовавшейся ранее, поэтому приведем численные результаты для первых трех значений коэффициентов.

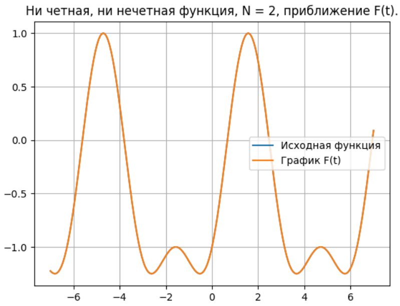
Таблица 4. Значения коэффициентов, вычисленных с помощью написанной программы для ни четной, ни нечетной периодической функции.

n	a_n	b_n	$Re(c_n)$	$Im(c_n)$
0	-1	0	-0.5	0
1	0	1	0	-0.5
2	-0.5	0	-0.25	0

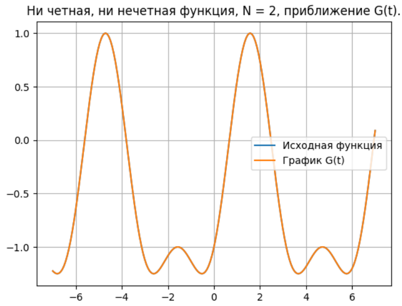
С помощью программы были посчитаны идентичные аналитическим значения коэффициентов.

1.4.5 Построение графиков частичных сумм F_N, G_N

Ниже предствлены графики частичных сумм для ни четной, ни нечетной периодической функции $f(t) = \sin(t) - \cos^2(t)$:

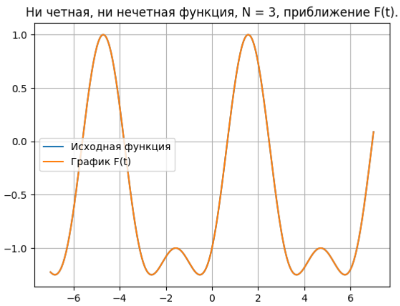


а)

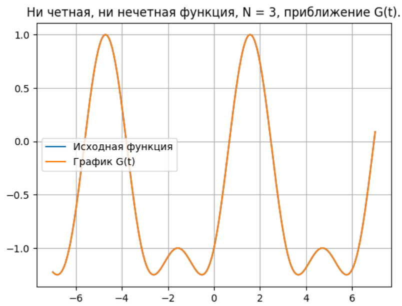


б)

Рис. 20. Графики частичных сумм для ни чет. ни нечет. функции, $N = 2$.



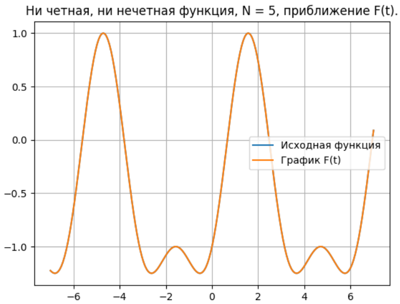
а)



б)

Рис. 21. Графики частичных сумм для ни чет. ни нечет. функции, $N = 3$.

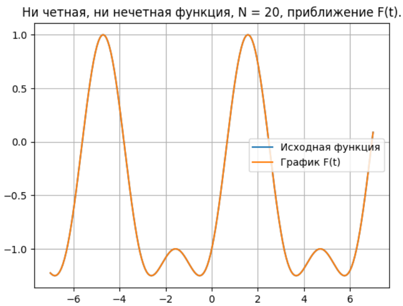
Несложно заметить, что уже при значении $N = 2$ оба графика частичных сумм практически совпадают с исходной функцией.



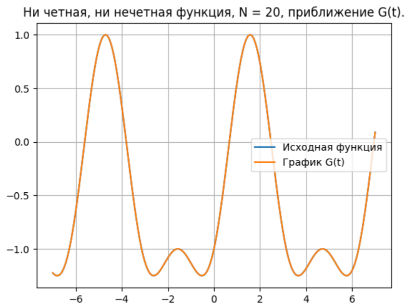
а)

б)

Рис. 22. Графики частичных сумм для ни чет. ни нечет. функции, $N = 5$.

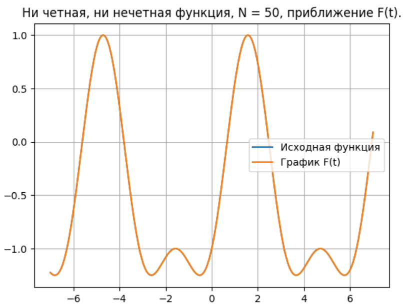


а)

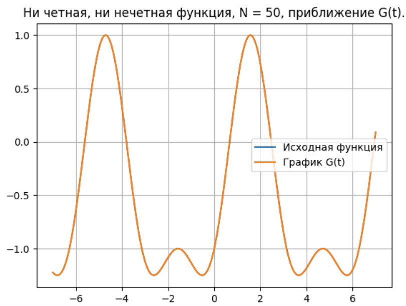


б)

Рис. 23. Графики частичных сумм для ни чет. ни нечет. функции, $N = 20$.



а)



б)

Рис. 24. Графики частичных сумм для ни чет. ни нечет. функции, $N = 50$.

1.4.6 Равенство Парсеваля

Вновь запишем равенство Парсеваля для F_N:

$$\|f\|^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right) \tag{94}$$

и для G_N:

$$\|f\|^2 = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2, \tag{95}$$

где $\|f\|^2 = \int_a^b (f(t))^2 dt$.

В выводе программы при $N = 10$ получаем:

$$\pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right) = 5.497945346534191$$

$$2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = 5.497945472197905$$

$$\|f\|^2 = 5.497865683598477$$

Следовательно, равенство Парсеваля для ни четной, ни нечетной функции выполнено. Результаты вычислений равны с точностью до четвертого знака после запятой.

2 Задание.

2.1 Комплексная функция.

Зададимся числами R, $T > 0$ и рассмотрим комплекснозначную функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ с периодом T такую, что

$$Ref(t) = \begin{cases} R, & t \in \left[-\frac{T}{8}, \frac{T}{8}\right) \\ 2R - 8Rt/T, & t \in \left[\frac{T}{8}, \frac{3T}{8}\right) \\ -R, & t \in \left[\frac{3T}{8}, \frac{5T}{8}\right) \\ -6R + 8Rt/T, & t \in \left[\frac{5T}{8}, \frac{7T}{8}\right) \end{cases} \quad Imf(t) = \begin{cases} 8Rt/T, & t \in \left[-\frac{T}{8}, \frac{T}{8}\right) \\ R, & t \in \left[\frac{T}{8}, \frac{3T}{8}\right) \\ 4R - 8Rt/T, & t \in \left[\frac{3T}{8}, \frac{5T}{8}\right) \\ -R, & t \in \left[\frac{5T}{8}, \frac{7T}{8}\right) \end{cases} \tag{96}$$

Пусть $R = 1$, $T = 8$, тогда рассматриваемая функция будет:

$$Ref(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 1) \\ 2 - t, & t \in [1, 3) \\ -1, & t \in [3, 5) \\ -6 + t, & t \in [5, 7) \end{cases} \quad Imf(t) = \begin{cases} t, & t \in [-1, 1) \\ 1, & t \in [1, 3) \\ 4 - t, & t \in [3, 5) \\ -1, & t \in [5, 7) \end{cases} \tag{97}$$

2.1.1 Параметрический график $f(t)$

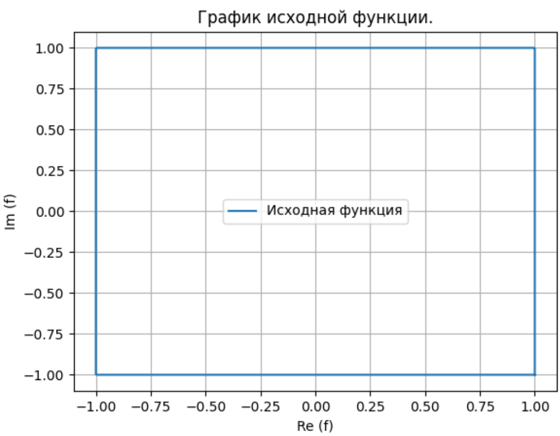


Рис. 25. График функции $f(t)$.

2.1.2 Частичные суммы Фурье

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\omega_n t}, \tag{98}$$

где $\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}$.

Так как период $T = 8$, то $\omega_n = \frac{\pi n}{4}$ и формула для частичных сумм перепишется в следующем виде:

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{\pi n}{4}t}, \tag{99}$$

2.1.3 Вычисление коэффициентов c_n

Запишем формулу c_n для произвольного n:

$$c_n = \frac{1}{T} \int\limits_{h}^{h+T} f(t) e^{-i\omega_n t} dt \tag{100}$$

И вычислим значение коэффициентов c_0, c_1, c_2 вручную.

$$c_0 = \frac{1}{8} \int\limits_{-1}^{7} f(t) e^{-i\frac{\pi \cdot 0}{4}t} dt = \frac{1}{8} \left(\int\limits_{-1}^{1} f(t)dt + \int\limits_{1}^{3} f(t)dt + \int\limits_{3}^{5} f(t)dt + \int\limits_{5}^{7} f(t)dt \right) \boxed{=}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} f(t)dt = \int\limits_{-1}^{1} (1 + ti)\, dt = 2 \tag{101}$$

$$\int\limits_{1}^{3} f(t)dt = \int\limits_{1}^{3} (2 - t + i)\, dt = 2i \tag{102}$$

$$\int\limits_{3}^{5} f(t)dt = \int\limits_{3}^{5} (-1 + (4 - t)i)\, dt = -2 \tag{103}$$

$$\int_{5}^{7} f(t)dt = \int_{5}^{7} \left(-6 + t - i\right) dt = -2i \tag{104}$$

$$\boxed{=} \frac{1}{8}\left(2 + 2i - 2 - 2i\right) = 0 \tag{105}$$

$$c_1 = \frac{1}{8}\left(\int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt + \int_{1}^{3} f(t)e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt + \int_{3}^{5} f(t)e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt + \int_{5}^{7} f(t)e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt\right) \boxed{=}$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt = \int_{-1}^{1} \left(1 + ti\right) e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^2} \simeq 2.29264 \tag{106}$$

$$\int_{1}^{3} f(t)e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt = \int_{1}^{3} \left(2 - t + i\right) e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^2} \simeq 2.29264 \tag{107}$$

$$\int_{3}^{5} f(t)e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt = \int_{3}^{5} \left(-1 + (4 - t)i\right) e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^2} \simeq 2.29264 \tag{108}$$

$$\int_{5}^{7} f(t)e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt = \int_{5}^{7} \left(-6 + t - i\right) e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^2} \simeq 2.29264 \tag{109}$$

$$\boxed{=} \frac{1}{8}\left(\frac{16\sqrt{2}}{\pi^2} \cdot 4\right) = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^2} \simeq 1.14632 \tag{110}$$

$$c_2 = \frac{1}{8}\left(\int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\frac{\pi}{2}t}dt + \int_{1}^{3} f(t)e^{-i\frac{\pi}{2}t}dt + \int_{3}^{5} f(t)e^{-i\frac{\pi}{2}t}dt + \int_{5}^{7} f(t)e^{-i\frac{\pi}{2}t}dt\right) \boxed{=}$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\frac{\pi}{2}t}dt = \int_{-1}^{1} \left(1 + ti\right) e^{-i\frac{\pi}{2}t}dt = \frac{4(2 + \pi)}{\pi^2} \simeq 2.08381 \tag{111}$$

$$\int\limits_1^3 f(t)e^{-i\frac{\pi}{2}t}dt = \int\limits_1^3 \left(2 - t + i\right) e^{-i\frac{\pi}{2}t}dt = -\frac{4i(2+\pi)}{\pi^2} \simeq -2.08381i \tag{112}$$

$$\int\limits_3^5 f(t)e^{-i\frac{\pi}{2}t}dt = \int\limits_3^5 \left(-1 + (4 - t)i\right) e^{-i\frac{\pi}{2}t}dt = -\frac{4(2+\pi)}{\pi^2} \simeq -2.08381 \tag{113}$$

$$\int\limits_5^7 f(t)e^{-i\frac{\pi}{2}t}dt = \int\limits_5^7 \left(-6 + t - i\right) e^{-i\frac{\pi}{2}t}dt = \frac{4i(2+\pi)}{\pi^2} \simeq 2.08381i \tag{114}$$

$$\boxed{=}\frac{1}{8}\left(\frac{4(2+\pi)}{\pi^2} - \frac{4i(2+\pi)}{\pi^2} - \frac{4(2+\pi)}{\pi^2} + \frac{4i(2+\pi)}{\pi^2}\right) = 0 \tag{115}$$

2.1.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье c_n

Листинг 6. Функция для коэффициентов c_n комплексной функции

```
# count coefficient c_n for complex fun
def c_complex(f, N):
    res = []
    for n in range(-N, N + 1):
        fourier_exp = lambda t: np.exp(-1j * n * t * np.pi / 4)
        res.append(integral_counter(f, fourier_exp, -1, 7) / 8)
    return res
```

Таблица 5. Значения коэффициентов, вычисленных с помощью написанной программы для коплексной функции.

n	$Re(c_n)$	$Im(c_n)$
0	0	0
1	1.14632	0
2	0	0

Примечательно, что значения коэффициентов, вычисленных с помощью программы идентичны найденным выше аналитическим способом.

2.1.5 Построение параметрических графиков $G_N(t)$

Построим параметрические графики $G_N(t)$ для $N = 1, 2, 3, 10$.

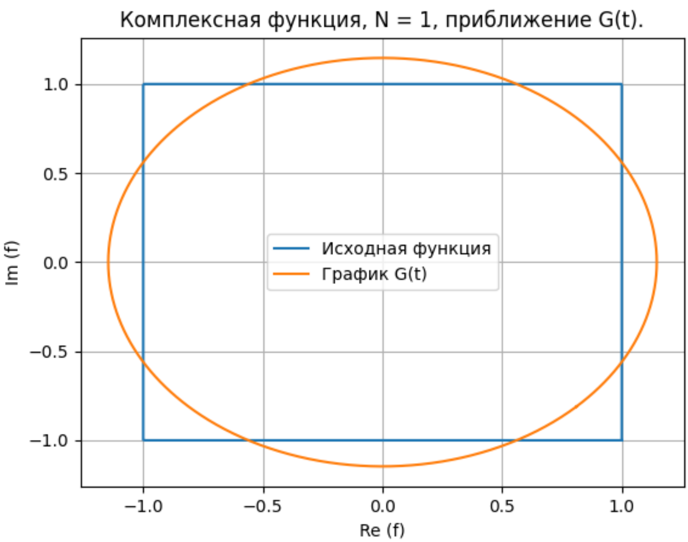


Рис. 26. График частичной суммы комплексной функции, $N = 1$.

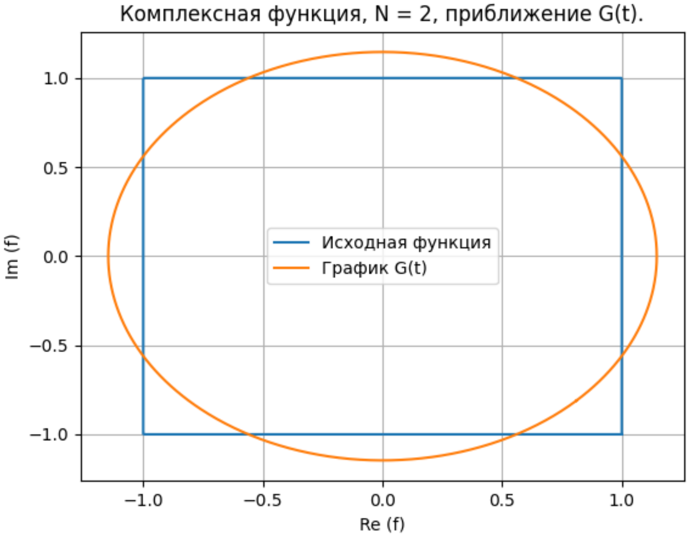


Рис. 27. График частичной суммы комплексной функции, $N = 2$.

При малых значениях $N = 1, 2$ (рисунки 26 - 27) графики частичных сумм слабо приближают график исходной функции и почти не отличаются друг от друга.

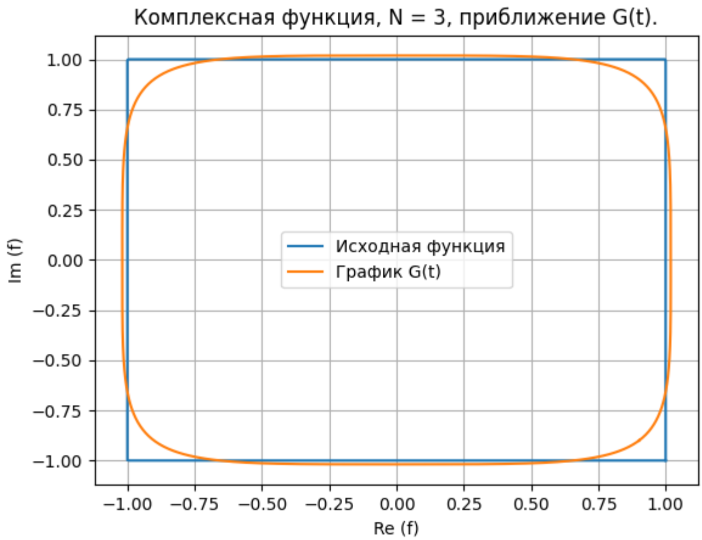


Рис. 28. График частичной суммы комплексной функции, $N = 3$.

Начиная с $N = 3$ сумма ряда $G_N(t)$ уже точнее описывает график исходной функции, при $N = 10$ разница между ними почти незаметна.

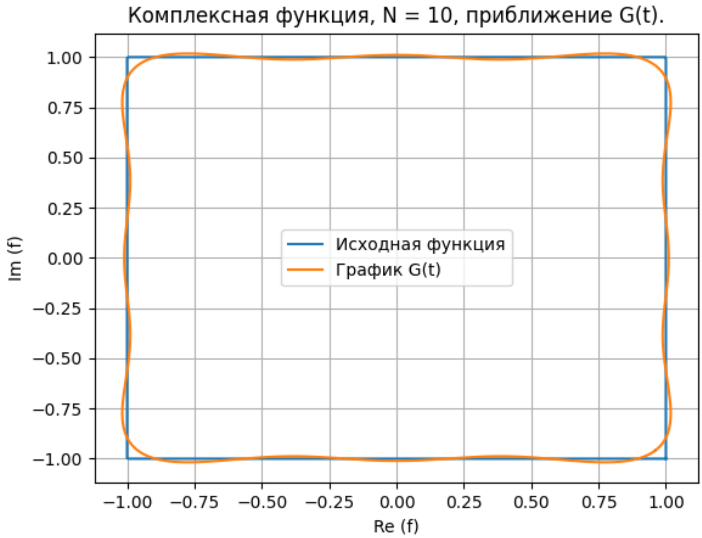
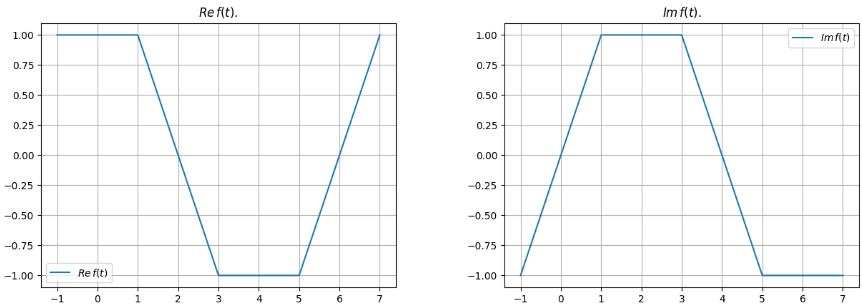


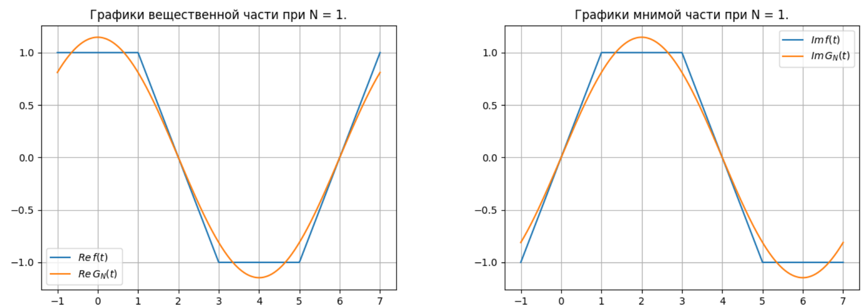
Рис. 29. График частичной суммы комплексной функции, $N = 10$.

2.1.6 Построение графиков $Ref(t)$, $Imf(t)$, $ReG_N(t)$ и $ImG_N(t)$



а) б)

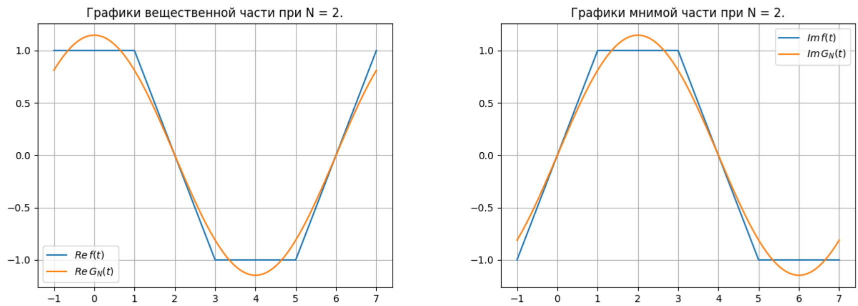
Рис. 30. Графики вещественной и мнимой частей функции $f(t)$.



а) б)

Рис. 31. Графики вещественной и мнимой частей функции $f(t)$ и G_N, $N = 1$.

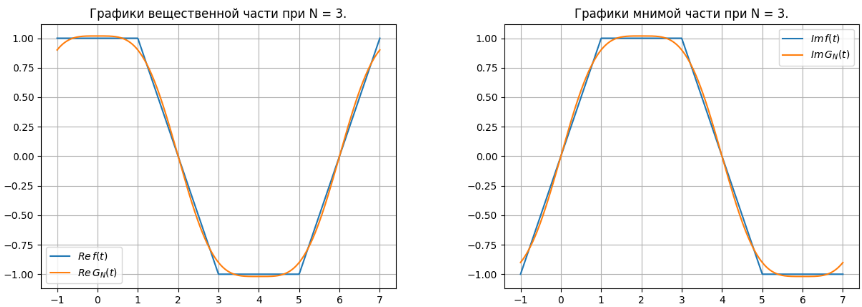
При $N = 1$, если сравнивать с параметрическим заданием функции, сумма ряда $G_N(t)$ сильнее приближает график исходной функции, как для вещественной, так и для мнимой части.



а) б)

Рис. 32. Графики вещественной и мнимой частей функции $f(t)$ и G_N, $N = 2$.

Для $N = 2$ не наблюдается заметных отличий от случая $N = 1$ с точки зрения точности приближения исходной функции.



а) б)

Рис. 33. Графики вещественной и мнимой частей функции $f(t)$ и G_N, $N = 3$.

При $N = 3$ точность существенно возрастает и графики практически идентичны, за исключением углов.

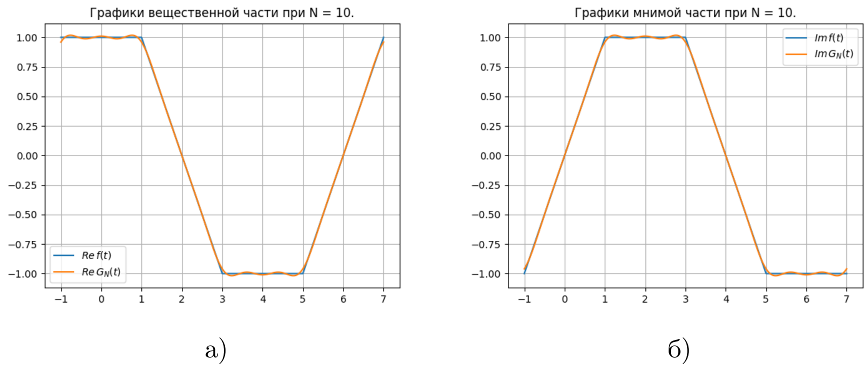


Рис. 34. Графики вещественной и мнимой частей функции $f(t)$ и G_N, $N = 10$.

В случае $N = 10$ график частичной суммы ряда практически неотличим от исходной функции.

2.1.7 Проверка равенства Парсеваля

Запишем равенство Парсеваля для G_N:

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{116}$$

В выводе программы при $N = 100$ получаем:

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = 8.376304629985912$$

$$\|f\|^2 = 8.000040000400004$$

Следовательно, равенство Парсеваля комплексной функции выполнено. Результаты вычислений равны с точностью до целых при $N = 100$.