Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 5
"Связь непрерывного и дискретного "

по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватели: *Перегудин Алексей Алексеевич, Пашенко Артём Витальевич*

Санкт-Петербург, 2024

1 Задание. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье.

Рассмотрим прямоугольную функцию $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/2, \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases} \tag{1}$$

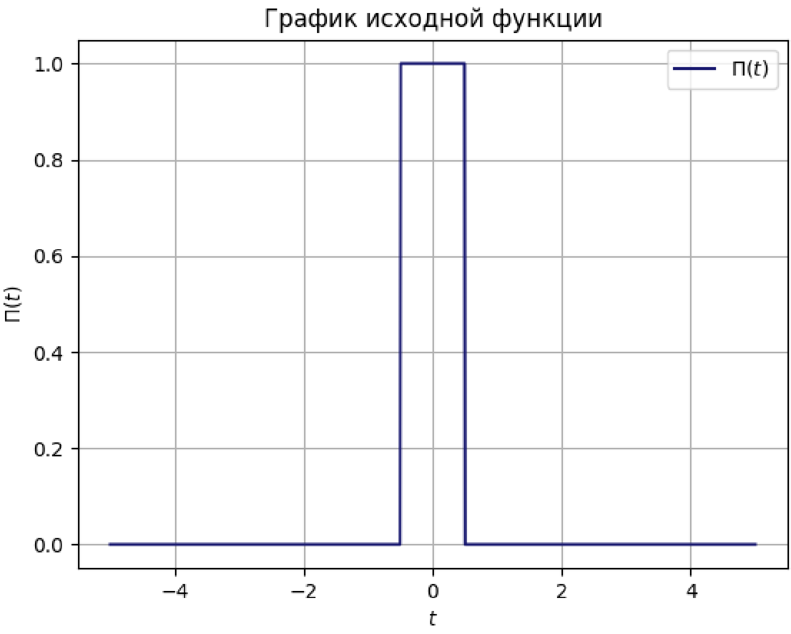


Рис. 1. График исходной функции $\Pi(t)$.

1.1 Истинный Фурье-образ.

Найдем аналитическое выражение для Фурье-образа

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \int\limits_{-0.5}^{0.5} e^{-2\pi i \nu t} dt = -\frac{e^{-2\pi i \nu t}}{2\pi i \nu}\Bigg|_{-0.5}^{0.5} =$$

$$= -\frac{e^{-\pi i \nu} - e^{\pi i \nu}}{2\pi i \nu} = \frac{e^{\pi i \nu} - e^{-\pi i \nu}}{2\pi i \nu} = \frac{sin(\pi \nu)}{\pi \nu} = sinc(\nu) \quad (2)$$

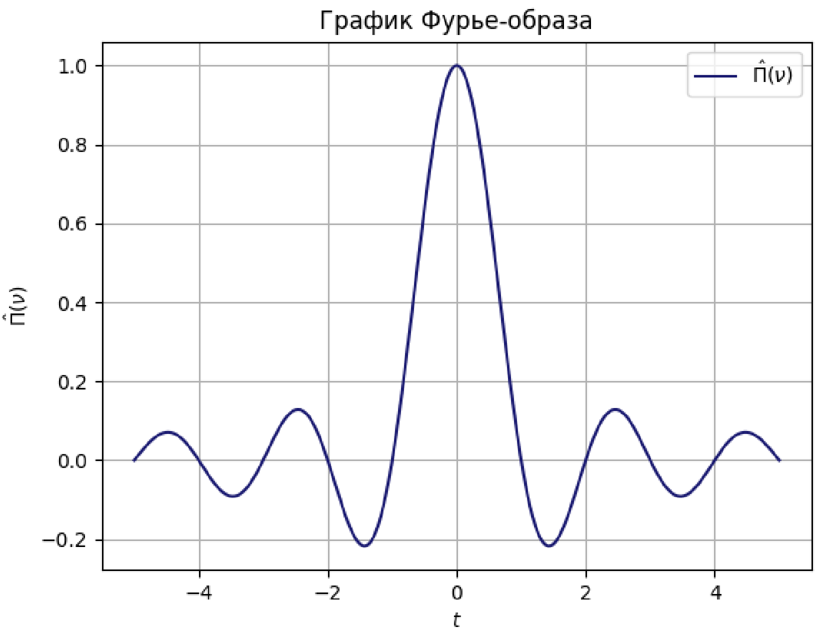


Рис. 2. График Фурье-образа функции $\Pi(t)$.

1.2 Численное интегрирование

Теперь найдем Фурье-образ $\Pi(t)$ с помощью численного интегрирования (функции *trapz* библиотеки *NumPy* языка *Python*), а затем с помощью численного интегрирования восстановим исходную функцию $\Pi(t)$.

Число шагов интегрирования будем задавать переменной n.

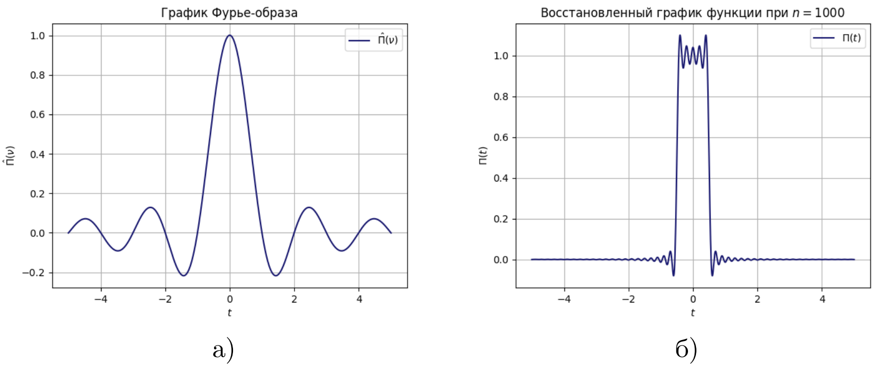
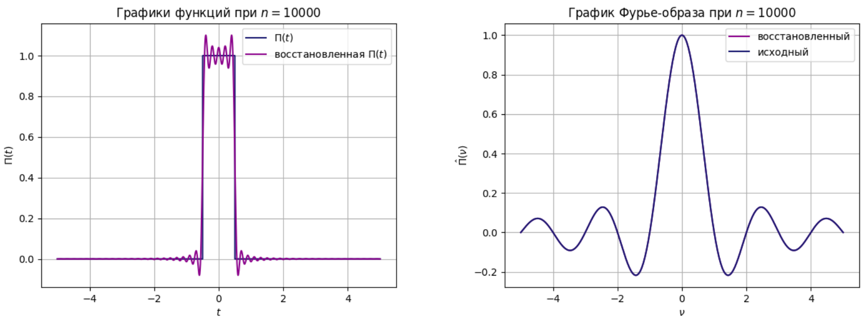


Рис. 3. а) График Фурье-образа функции $\Pi(t)$*, полученный с помощью численного интегрирования, б) график восстановленной функции.*

Заметим, что при $n = 1000$ график Фурье-образа (рисунок 3а) совпадает с графиком Фурье-образа, построенного с помощью аналитической фомулы (рисунок 2). В то же время, график восстановленной функции (рисунок 3б) имеет заметные отличия от исходного графика функции (рисунок 1). Далее построим сравнительные графики Фурье-образов, исходной функции и восстановленной при разных значениях n, также будем фиксировать время работы программы. Промежуток интегрирования обозначим $[-d, d]$. Основные характеристики графиков представлены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры графиков восстановленной функции на промежутке интегрирования $[-5, 5]$.

№ рисунка	n	d	t, mc
4 а	10000	5	10369
4 б	10000	5	5341
5 а	200	5	196
5 б	200	5	202
5 в	100	5	198
5 г	100	5	276
6 а	90	5	270
6 б	90	5	236

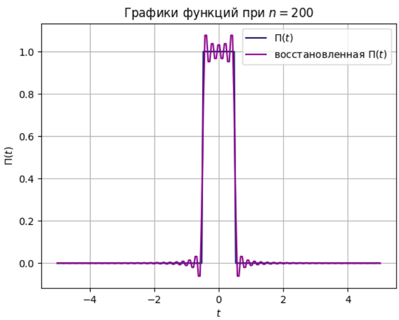


а) б)

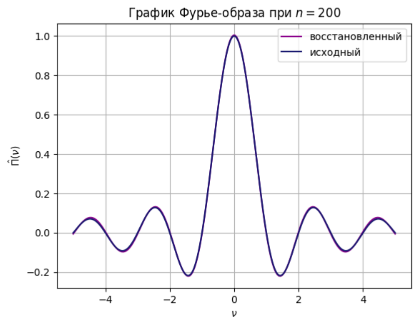
Рис. 4. Графики восстановленной и исходной функции и их Фурье-образов при $n = 10000$.

Сравнивая графики на рисунках 4 а, 5 а, 5 в, можно сделать вывод о том, что при уменьшении числа итераций в вычислении интегралов для нахождения Фурье-образа и последующего восстановления функции, сходство графиков исходной и восстановленной функций возрастает.

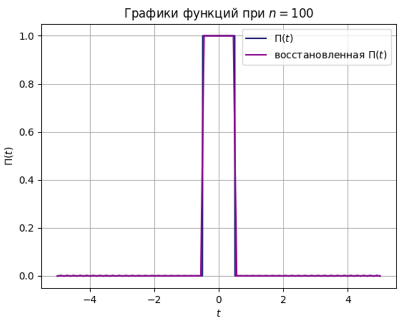
Однако при дальнейшем уменьшении n ($n < 100$) различия между графиками исходной и восстановленной функций возрастают (рисунки 5в и 5г). Время выполнения также возрастает (таблица 1).



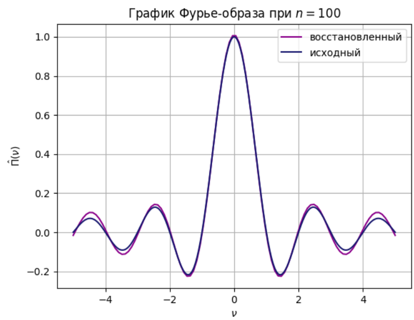
а)



б)



в)



г)

Рис. 5. Графики восстановленной и исходной функции и их Фурье-образов при $n = 200$, 100.

Наиболее оптимальным по результату и времени выполнения в нашем случае является $n = 100$.

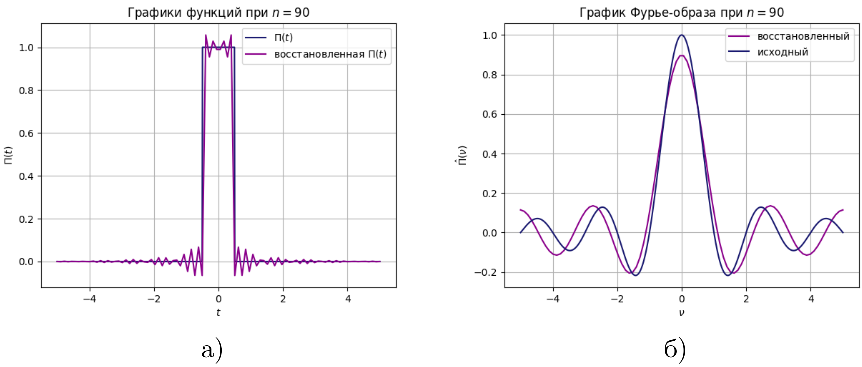
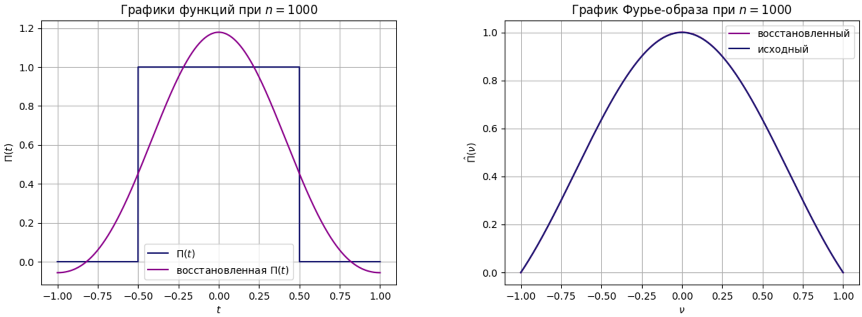


Рис. 6. Графики восстановленной и исходной функции и их Фурье-образов при $n = 90$.

Таблица 2. Параметры графиков восстановленной функции на промежутке интегрирования $[-1, 1]$.

№ рисунка	n	d	t, mc
7 а	1000	1	486
7 б	1000	1	287
8 а	30	1	241
8 б	30	1	211
8 в	10	1	191
8 г	10	1	274
9 а	5	1	161
9 б	5	1	188



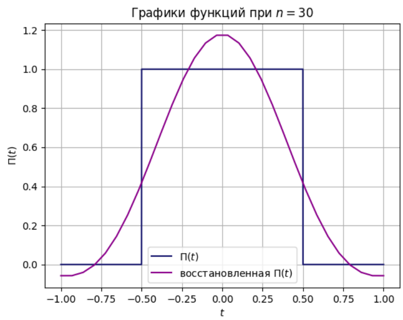
а) б)

Рис. 7. Графики восстановленной и исходной функции и их Фурье-образов при $n = 1000$.

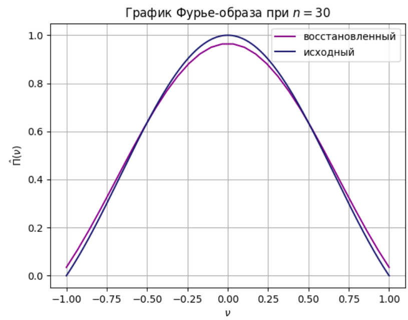
Заметим, что при $n = 1000$ и при $n = 30$ существенной разницы между восстановленными функциями нет (рисунок 7 а и 8 а), кроме того, что в восстановаленной функции на рисунке 8 а отчетливее видны ломанная, из которой она состоит. При дельнейшем уменьшении n точность восстановленной функции снижается. Время работы программы также снижается и достигает минимума при $n = 5$, далее опять увеличивается.

Наиболее оптимальными с точки зрения точности приближения исходного графика функции и времени выполнения в данном случае являются $n = 5$ и $n = 6$.

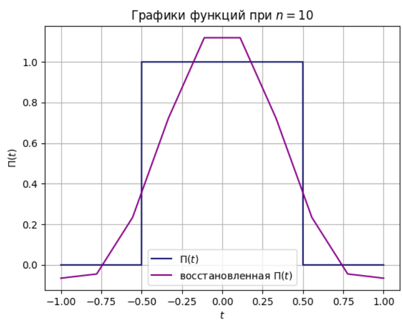
Теперь рассмотрим интегрирование на промежутке $[-10, 10]$, то есть при $d = 10$.



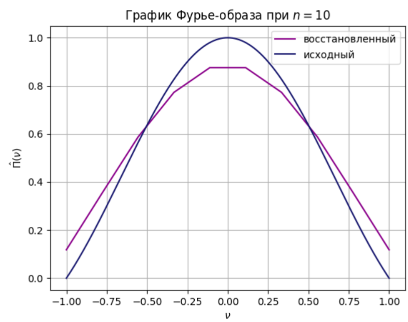
а)



б)



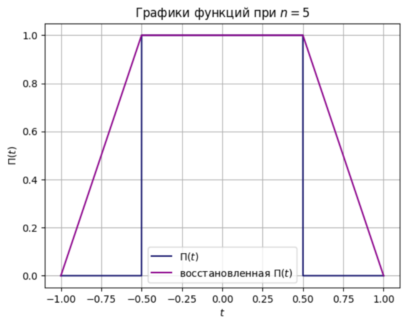
в)



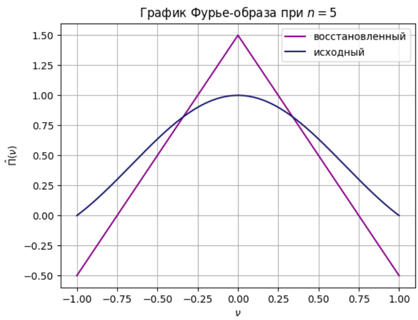
г)

Рис. 8. Графики восстановленной и исходной функции и их Фурье-образов при $n = 30$, 10.

Заметим, что при $n = 10000$ и $n = 1000$ для случая $d = 10$ результат на графике практически идентичен, но время, затраченное на вычисление последнего примерно в 30 раз меньше. С точки зрения точности приближения в обоих случаях график исходной функции узнаваем, наибольшие различия замечены в точках скачков функции.



а)



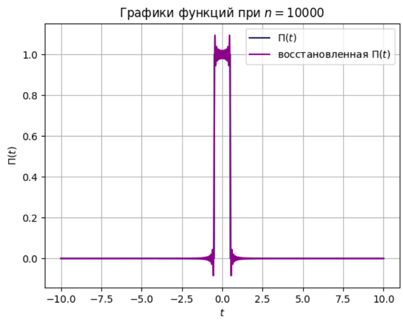
б)

Рис. 9. Графики восстановленной и исходной функции и их Фурье-образов при $n = 5$*.*

Таблица 3. Параметры графиков восстановленной функции на промежутке интегрирования $[-10, 10]$*.*

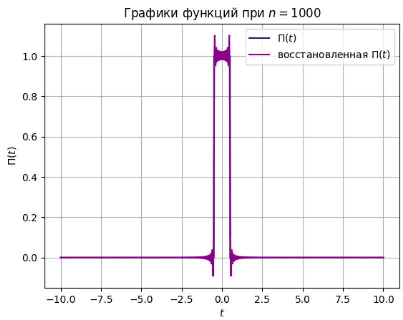
№ рисунка	n	d	t, mc
10 а	10000	10	10766
10 б	10000	10	5302
10 в	1000	10	390
10 г	1000	10	281
11 а	500	10	271
11 б	500	10	192
11 в	250	10	223
11 г	250	10	188

При $n = 500$ получаем еще удовлетворительный результат: исходная функция угадывается по графику восстановленной, в ходе дальнейшего уменьшении $n < 500$ график восстановленной функции все меньше похож на исходную.

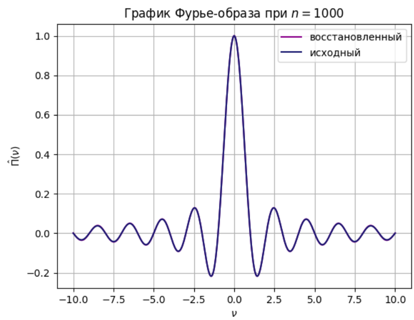


а)

б)



в)



г)

Рис. 10. Графики восстановленной и исходной функции и их Фурье-образов при $n = 10000$, 1000.

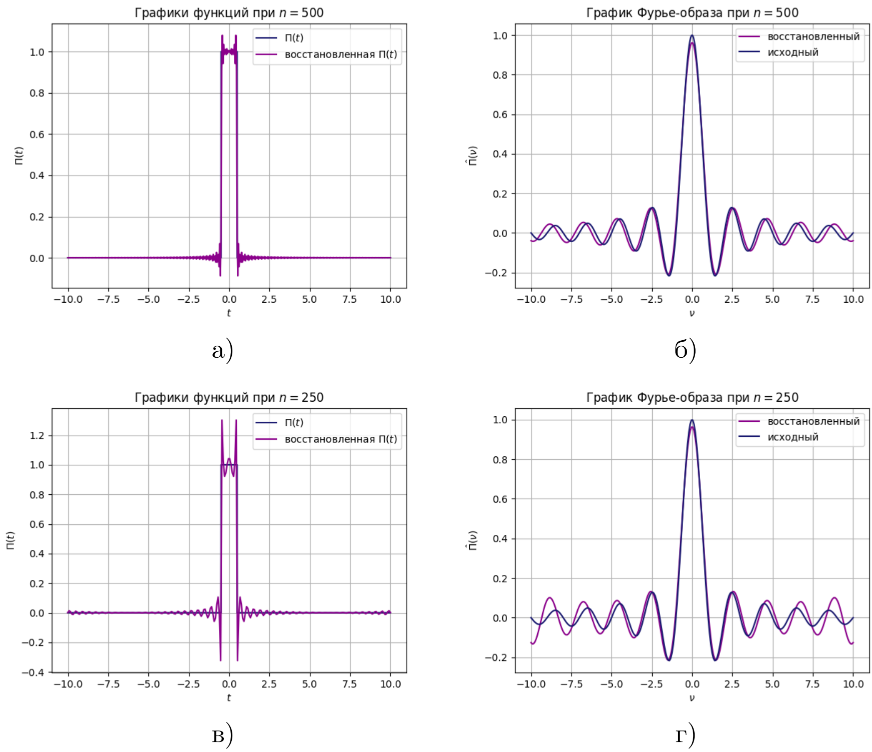


Рис. 11. Графики восстановленной и исходной функции и их Фурье-образов при $n = 500$, 250.

Вывод. Для получения оптимального результата требуется достаточно большое количество времени: 200 – 300 мс. Точность позволяет узнать в восстановленной функции исходную, пусть и с небольшими помехами в областях скачков функции.

1.3 Использование DFT

...В работе...

2 Задание. Сэмплирование.

2.1 Сэмплирование синусов

...В работе...

2.2 Сэмплирование sinus cardinalis

...В работе...