Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 2
"Преобразование Фурье"

по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2024

В заданиях 1 и 2 используется унитарное преобразование Фурье к угловой частоте ω.

1 Задание. Вещественное.

Все функции ниже $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1.1 Прямоугольная функция

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \le b, \\ 0, & |t| > b \end{cases} \tag{1}$$

1.1.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

Фурье-образ функции $f(t)$ будем находить по формуле:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{2}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} a e^{-i\omega t} dt = \frac{a(e^{-i\omega b} - e^{i\omega b})}{-i\omega\sqrt{2\pi}} \tag{3}$$

1.1.2 Построение графиков функции $f(t)$

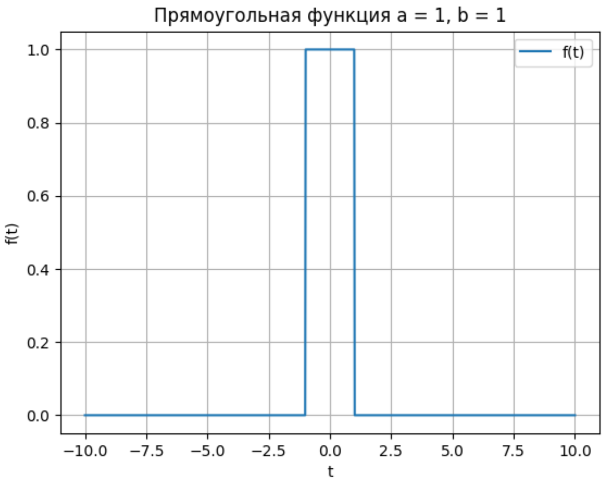

Рис. 1. График $f(t)$ при $a = 1$, $b = 1$.

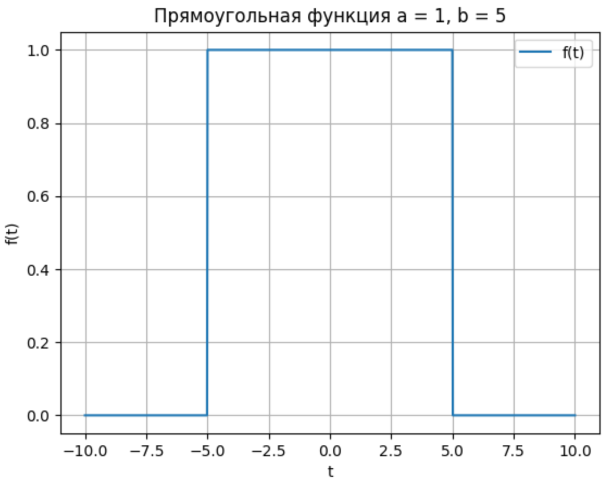

Рис. 2. График $f(t)$ при $a = 1$, $b = 5$.

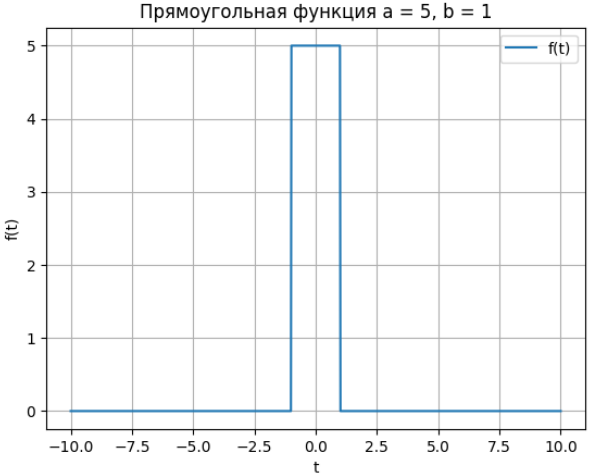

Рис. 3. График $f(t)$ при $a = 5$, $b = 1$.

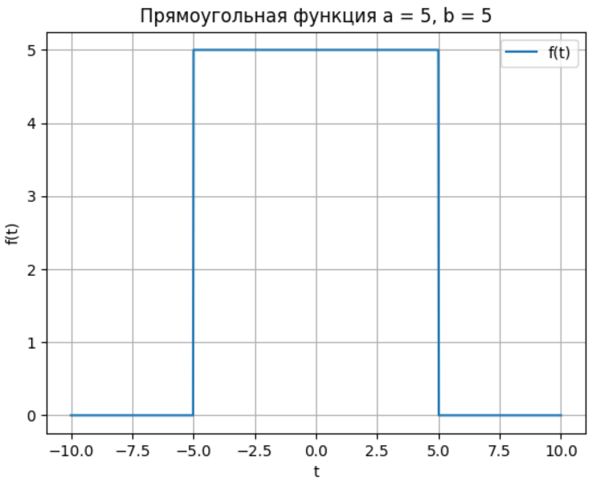

Рис. 4. График $f(t)$ при $a = 5$, $b = 5$.

1.1.3 Построение графиков Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$

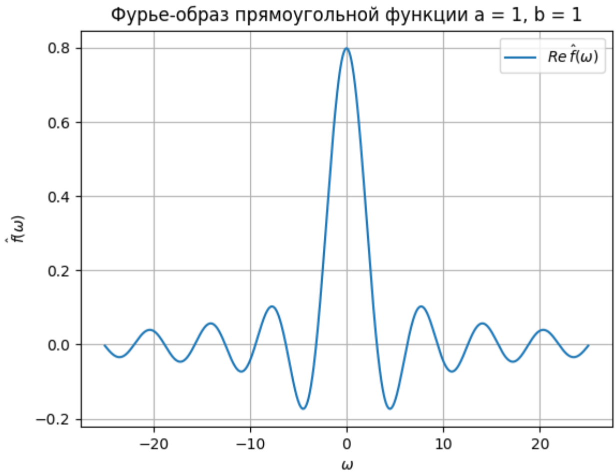

Рис. 5. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 1,\ b = 1$.

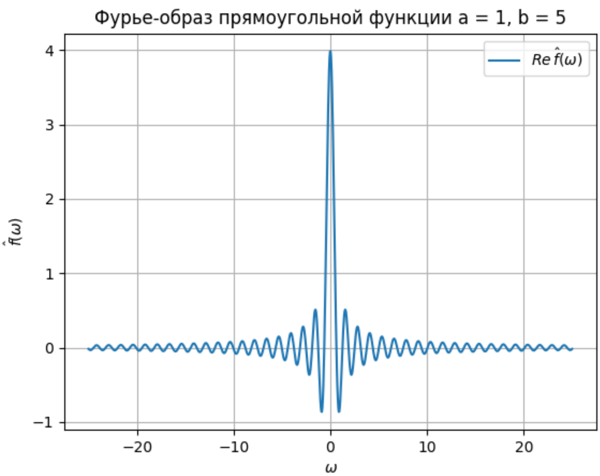

Рис. 6. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 1,\ b = 5$.

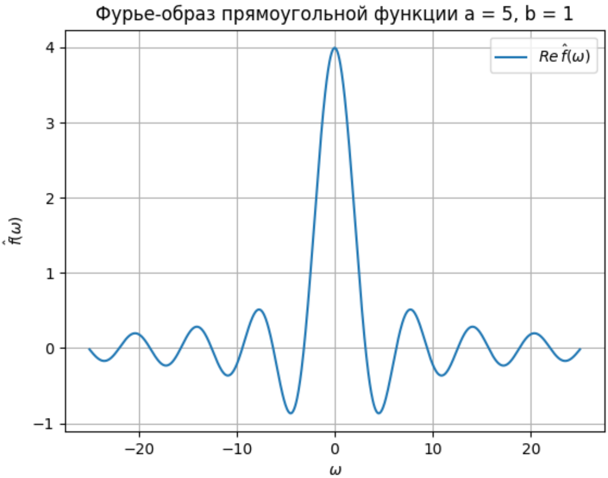

Рис. 7. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 5$, $b = 1$.

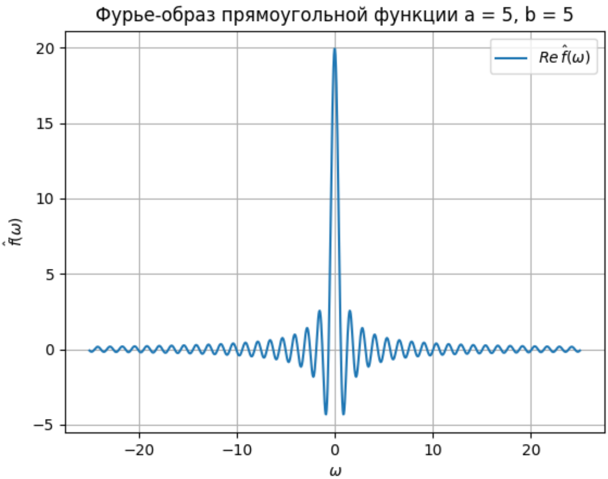

Рис. 8. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 5$, $b = 5$.

1.1.4 Проверка равенства Парсеваля

Таблица 1. Равенство Парсеваля для прямоугольной функции.

n	a	b	$\|f\|^2 = \int_{-d}^{d} \|f(t)\|^2 dt$	$\|\hat{f}\|^2 = \int_{-d}^{d} \|\hat{f}(\omega)\|^2 d\omega$
1	1	1	2.0	2.0
2	1	5		
3	5	1		
4	5	5		

1.2 Треугольная функция

$$f(t) = \begin{cases} a - |at/b|, & |t| \le b, \\ 0, & |t| > b \end{cases} \tag{4}$$

1.2.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} (a - |at/b|) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} a e^{-i\omega t} dt -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} |at/b| e^{-i\omega t} dt = \frac{a(e^{-i\omega b} - e^{i\omega b})}{-i\omega\sqrt{2\pi}} + \frac{a}{b\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-b}^{0} t e^{-i\omega t} dt - \int\limits_{0}^{b} t e^{-i\omega t} dt \right) \boxed{=}$$

Отдельно вычислим неопределенный интеграл:

$$\int t e^{-i\omega t} dt = \|\, u = t,\ dv = e^{-i\omega t} dt, du = dt, v = -\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} \,\| =$$

$$= -\frac{t e^{-i\omega t}}{i\omega} + \int \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} dt = -\frac{t e^{-i\omega t}}{i\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} + C = \frac{1 + i\omega t}{\omega^2 e^{i\omega t}} + C \tag{5}$$

И два соотвествующих определенных интеграла:

$$\int\limits_{-b}^{0} t e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{1 + i\omega t}{\omega^2 e^{i\omega t}} \right|_{-b}^{0} = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1 - i\omega b}{\omega^2 e^{-i\omega b}} \tag{6}$$

$$\int\limits_{0}^{b} t e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{1 + i\omega t}{\omega^2 e^{i\omega t}} \right|_{0}^{b} = \frac{1 + i\omega b}{\omega^2 e^{i\omega b}} - \frac{1}{\omega^2} \tag{7}$$

$$\int\limits_{-b}^{0} t e^{-i\omega t} dt - \int\limits_{0}^{b} t e^{-i\omega t} dt = \frac{2}{\omega^2} - \frac{1 - i\omega b}{\omega^2 e^{-i\omega b}} - \frac{1 + i\omega b}{\omega^2 e^{i\omega b}} \tag{8}$$

$$\boxed{=} \frac{a(e^{-i\omega b} - e^{i\omega b})}{-i\omega\sqrt{2\pi}} + \frac{a}{b\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{\omega^2} - \frac{1 - i\omega b}{\omega^2 e^{-i\omega b}} - \frac{1 + i\omega b}{\omega^2 e^{i\omega b}} \right) =$$
$$= \frac{a}{b\omega^2\sqrt{2\pi}} \left(i\omega b(e^{-i\omega b} - e^{i\omega b}) + 2 - e^{i\omega b} + i\omega b e^{i\omega b} - e^{-i\omega b} - i\omega b e^{-i\omega b} \right) =$$
$$= \frac{a}{b\omega^2\sqrt{2\pi}} \left(i\omega b e^{-i\omega b} - i\omega b e^{i\omega b} + 2 - e^{i\omega b} + i\omega b e^{i\omega b} - e^{-i\omega b} - i\omega b e^{-i\omega b} \right) =$$
$$= \frac{a}{b\omega^2\sqrt{2\pi}} \left(2 - e^{i\omega b} - e^{-i\omega b} \right) \quad (9)$$

1.2.2 Построение графиков функции $f(t)$

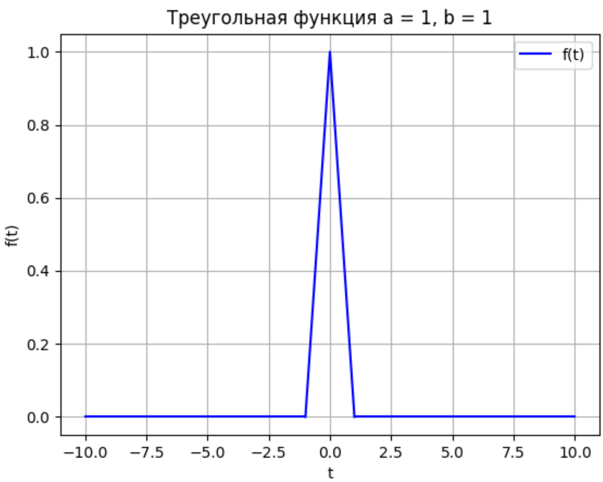

Рис. 9. График $f(t)$ при $a = 1$, $b = 1$.

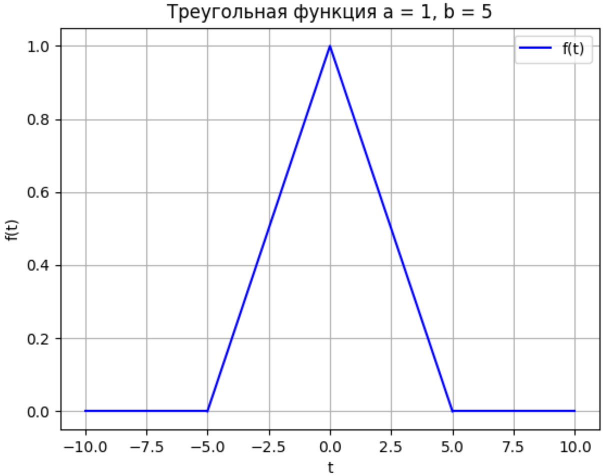

Рис. 10. График $f(t)$ при $a = 1$, $b = 5$.

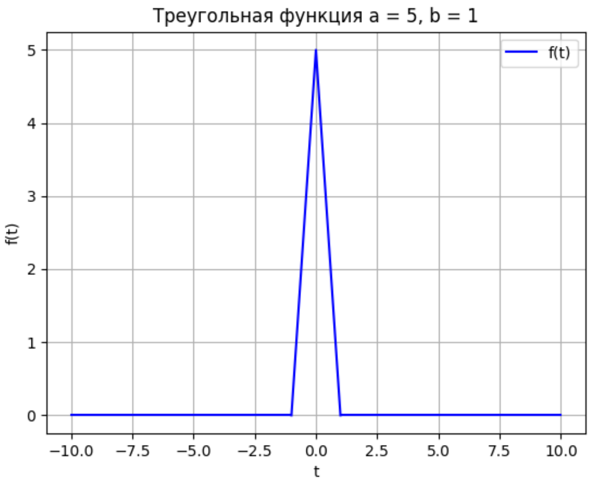

Рис. 11. График $f(t)$ при $a = 5$, $b = 1$.

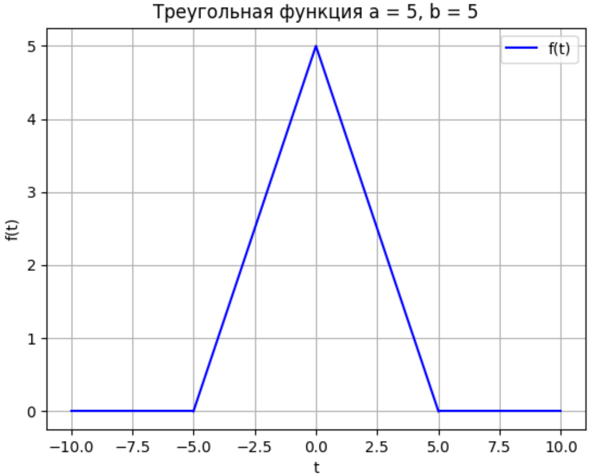

Рис. 12. График $f(t)$ при $a = 5$, $b = 5$.

1.2.3 Построение графиков Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$

1.2.4 Проверка равенства Парсеваля

Таблица 2. Равенство Парсеваля для треугольной функции.

n	a	b	$\|f\|^2 = \int_{-d}^{d} \|f(t)\|^2 dt$	$\|\hat{f}\|^2 = \int_{-d}^{d} \|\hat{f}(\omega)\|^2 d\omega$
1	1	1	2.0	2.0
2	1	5		
3	5	1		
4	5	5		

1.3 Кардинальный синус

$$f(t) = asinc(bt) \tag{10}$$

1.3.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

Результат получен с помощью калькулятора $Wolfram$.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} asinc(bt)e^{-i\omega t}dt = \frac{a}{|b|}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \begin{cases} 0, & \left(\frac{b}{\omega}\right)^2 \leq 1 \\ 1 & (otherwise) \end{cases} \tag{11}$$

1.3.2 Построение графиков функции $f(t)$

1.3.3 Построение графиков Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$

1.3.4 Проверка равенства Парсеваля

Таблица 3. Равенство Парсеваля для кардинального синуса.

n	a	b	$\|f\|^2 = \int_{-d}^{d} \|f(t)\|^2 dt$	$\|\hat{f}\|^2 = \int_{-d}^{d} \|\hat{f}(\omega)\|^2 d\omega$
1	1	1	2.0	2.0
2	1	5		
3	5	1		
4	5	5		

1.4 Функция Гаусса

$$f(t) = ae^{-bt^2} \tag{12}$$

1.4.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

Результат получен с помощью калькулятора $Wolfram$.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ae^{-bt^2} e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}} \tag{13}$$

1.4.2 Построение графиков функции $f(t)$

1.4.3 Построение графиков Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$

1.4.4 Проверка равенства Парсеваля

Таблица 4. Равенство Парсеваля для функции Гаусса.

n	a	b	$\|f\|^2 = \int_{-d}^{d} \|f(t)\|^2 dt$	$\|\hat{f}\|^2 = \int_{-d}^{d} \|\hat{f}(\omega)\|^2 d\omega$
1	1	1	2.0	2.0
2	1	5		
3	5	1		
4	5	5		

1.5 Двустороннее затухание

$$f(t) = ae^{-b|t|} \tag{14}$$

1.5.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ae^{-b|t|}e^{-i\omega t}dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{bt}e^{-i\omega t}dt + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-bt}e^{-i\omega t}dt \right) = \\
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(b-i\omega)t}dt + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(b+i\omega)t}dt \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{(b-i\omega)t}}{b-i\omega}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-(b+i\omega)t}}{-(b+i\omega)}\bigg|_{0}^{\infty} \right) = \\
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega} \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{b+i\omega+b-i\omega}{b^2+\omega^2} = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}(b^2+\omega^2)}
\end{aligned} \tag{15}$$

1.5.2 Построение графиков функции $f(t)$

1.5.3 Построение графиков Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$

1.5.4 Проверка равенства Парсеваля

Таблица 5. Равенство Парсеваля для двустороннего затухания.

n	a	b	$\|f\|^2 = \int_{-d}^{d} \|f(t)\|^2 dt$	$\|\hat{f}\|^2 = \int_{-d}^{d} \|\hat{f}(\omega)\|^2 d\omega$
1	1	1	2.0	2.0
2	1	5		
3	5	1		
4	5	5		

Для визуализации был написан код на языке *Python*.
Код расположен на **GitHub**.