

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 2 "Преобразование Фурье"

по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2024

В заданиях 1 и 2 используется унитарное преобразование Фурье к угловой частоте ω .

1 Задание. Вещественное.

Все функции ниже $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1.1 Прямоугольная функция

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \leq b, \\ 0, & |t| > b \end{cases} \quad (1)$$

1.1.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

Фурье-образ функции $f(t)$ будем находить по формуле:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2)$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b a e^{-i\omega t} dt = \frac{a(e^{-i\omega b} - e^{i\omega b})}{-i\omega\sqrt{2\pi}} \quad (3)$$

1.1.2 Построение графиков функции $f(t)$

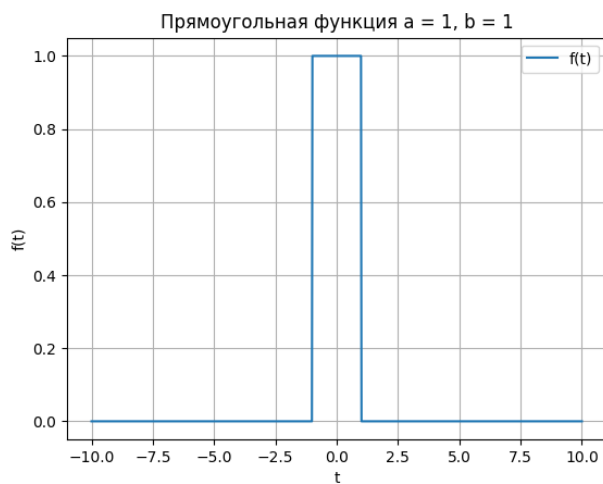


Рис. 1. График $f(t)$ при $a = 1, b = 1$.

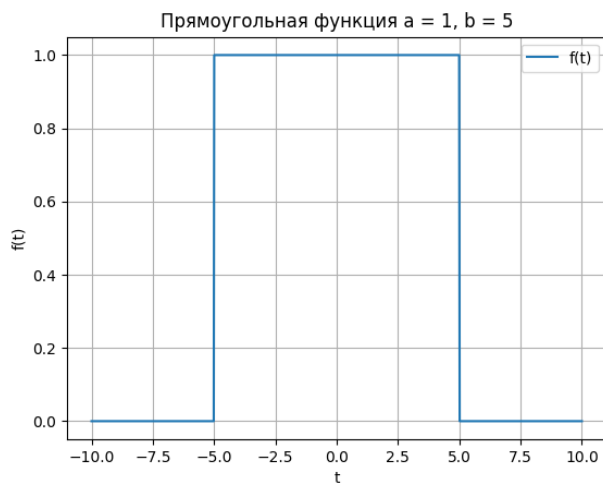


Рис. 2. График $f(t)$ при $a = 1, b = 5$.

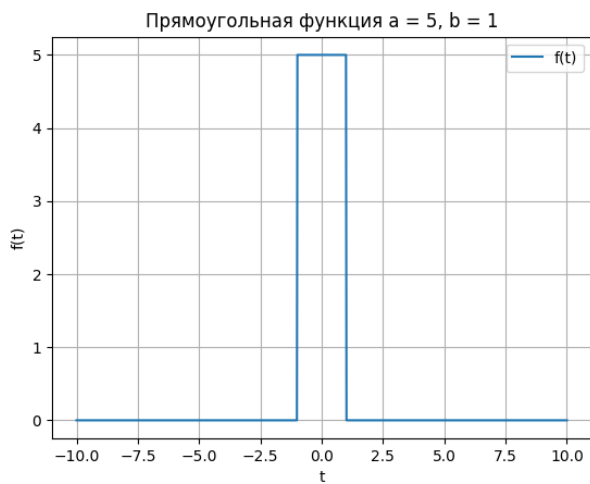


Рис. 3. График $f(t)$ при $a = 5, b = 1$.

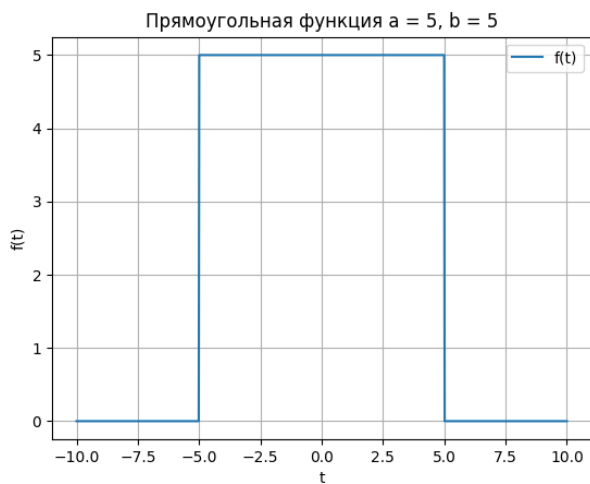


Рис. 4. График $f(t)$ при $a = 5, b = 5$.

1.1.3 Построение графиков Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$

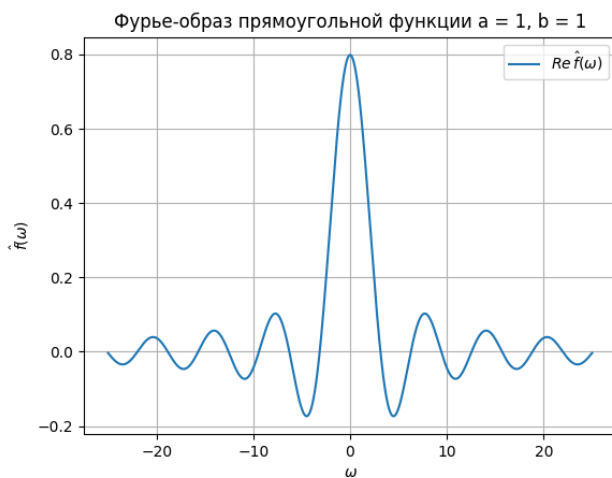


Рис. 5. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 1, b = 1$.

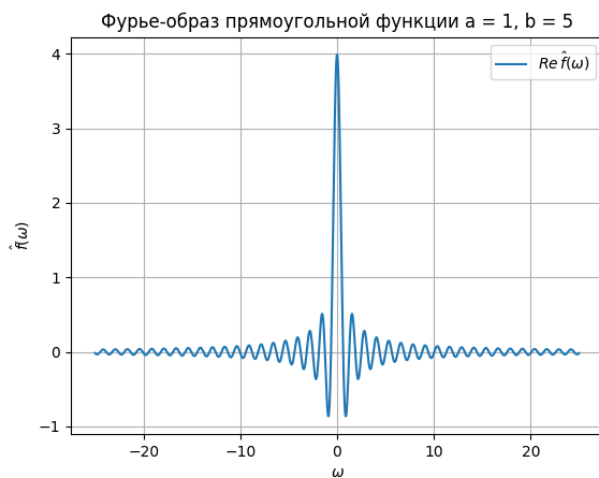


Рис. 6. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 1, b = 5$.

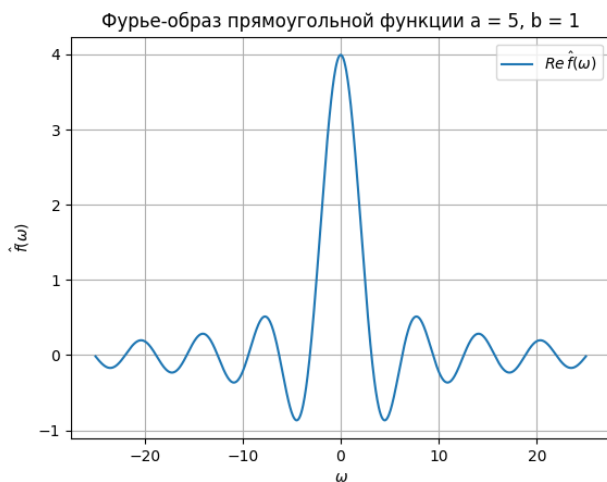


Рис. 7. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 5, b = 1$.

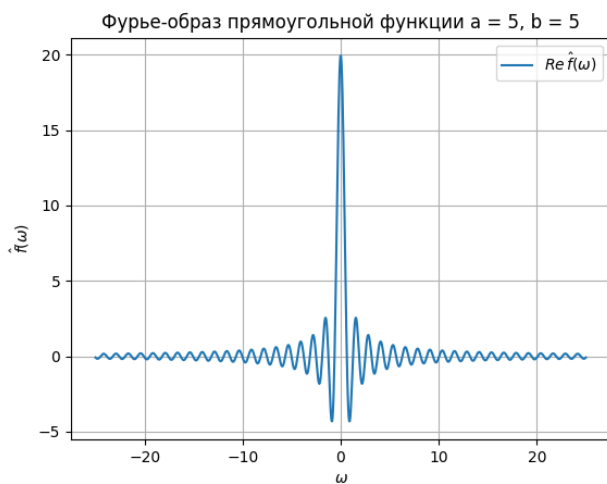


Рис. 8. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 5, b = 5$.

1.1.4 Проверка равенства Парсеваля

Таблица 1. Равенство Парсеваля для прямоугольной функции.

n	a	b	$\ f\ ^2 = \int_{-d}^d f(t) ^2 dt$	$\ \hat{f}\ ^2 = \int_{-d}^d \hat{f}(\omega) ^2 d\omega$
1	1	1	2.000	2.018
2	1	5	10.000	10.001
3	5	1	50.000	50.445
4	5	5	250.000	250.037

Для вычисления квадратов норм функции и ее образа интегрирование велось от -100 до 100 , то есть константа $d = 100$ из таблицы 1. Заметим, что с точностью до целых равенства Парсеваля выполнены для всех рассматриваемых значений параметров a и b .

1.1.5 Анализ результатов

Параметр a влияет на максимум функции, при $a = 1$ максимальное значение функции 1, при $a = 5$ – аналогично, максимум равен 5. Параметр b влияет на ширину "прямоугольной" области графика исходной функции, при $b = 1$ максимальное значение функция принимает на отрезке $[-1; 1]$, при $b = 5$ – аналогично, максимум будет на отрезке $[-5; 5]$.

На графиках Фурье-образа заметно, что параметр b влияет на частоту колебаний функции и на ширину центрального всплеска: при $b = 1$ частота ниже и ширина больше, чем при $b = 5$. Вместе параметры a и b влияют на амплитуду колебаний функции, при увеличении суммы a и b амплитуда возрастает, причем для двух разных наборов $a = 1, b = 5$ и $a = 5, b = 1$ амплитуда одинакова.

Принцип неопределенности Гейзенберга о том, что невозможно одновременно точно определить координату и импульс электрона в атоме, здесь заключается в том, графикам исходной функции с наименьшими промежутками максимума соответствуют Фурье-образы с наименьшей частотой колебаний.

1.2 Треугольная функция

$$f(t) = \begin{cases} a - |at/b|, & |t| \leq b, \\ 0, & |t| > b \end{cases} \quad (4)$$

1.2.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b (a - |at/b|) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b a e^{-i\omega t} dt - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b |at/b| e^{-i\omega t} dt = \frac{a(e^{-i\omega b} - e^{i\omega b})}{-i\omega\sqrt{2\pi}} + \frac{a}{b\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-b}^0 t e^{-i\omega t} dt - \int_0^b t e^{-i\omega t} dt \right) \equiv \end{aligned}$$

Отдельно вычислим неопределенный интеграл:

$$\begin{aligned} \int t e^{-i\omega t} dt &= || u = t, dv = e^{-i\omega t} dt, du = dt, v = -\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} || = \\ &= -\frac{t e^{-i\omega t}}{i\omega} + \int \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} dt = -\frac{t e^{-i\omega t}}{i\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} + C = \frac{1 + i\omega t}{\omega^2 e^{i\omega t}} + C \end{aligned} \quad (5)$$

И два соответствующих определенных интеграла:

$$\int_{-b}^0 t e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{1 + i\omega t}{\omega^2 e^{i\omega t}} \right|_{-b}^0 = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1 - i\omega b}{\omega^2 e^{-i\omega b}} \quad (6)$$

$$\int_0^b t e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{1 + i\omega t}{\omega^2 e^{i\omega t}} \right|_0^b = \frac{1 + i\omega b}{\omega^2 e^{i\omega b}} - \frac{1}{\omega^2} \quad (7)$$

$$\int_{-b}^0 t e^{-i\omega t} dt - \int_0^b t e^{-i\omega t} dt = \frac{2}{\omega^2} - \frac{1 - i\omega b}{\omega^2 e^{-i\omega b}} - \frac{1 + i\omega b}{\omega^2 e^{i\omega b}} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a(e^{-i\omega b} - e^{i\omega b})}{-i\omega\sqrt{2\pi}} + \frac{a}{b\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{\omega^2} - \frac{1-i\omega b}{\omega^2 e^{-i\omega b}} - \frac{1+i\omega b}{\omega^2 e^{i\omega b}} \right) = \\
&= \frac{a}{b\omega^2\sqrt{2\pi}} (i\omega b(e^{-i\omega b} - e^{i\omega b}) + 2 - e^{i\omega b} + i\omega b e^{i\omega b} - e^{-i\omega b} - i\omega b e^{-i\omega b}) = \\
&= \frac{a}{b\omega^2\sqrt{2\pi}} (i\omega b e^{-i\omega b} - i\omega b e^{i\omega b} + 2 - e^{i\omega b} + i\omega b e^{i\omega b} - e^{-i\omega b} - i\omega b e^{-i\omega b}) = \\
&= \frac{a}{b\omega^2\sqrt{2\pi}} (2 - e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}) \quad (9)
\end{aligned}$$

1.2.2 Построение графиков функции $f(t)$

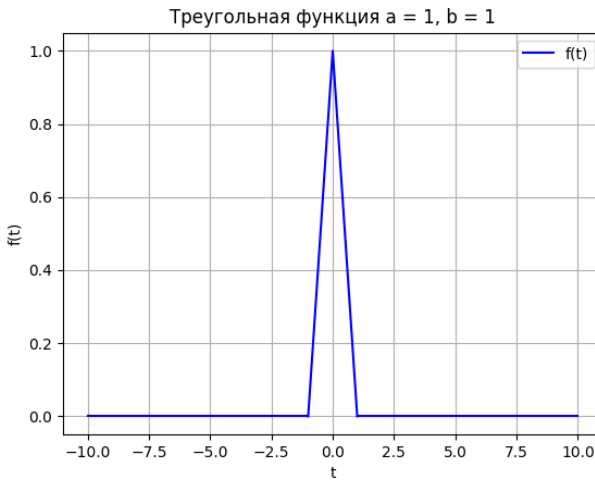


Рис. 9. График $f(t)$ при $a = 1, b = 1$.

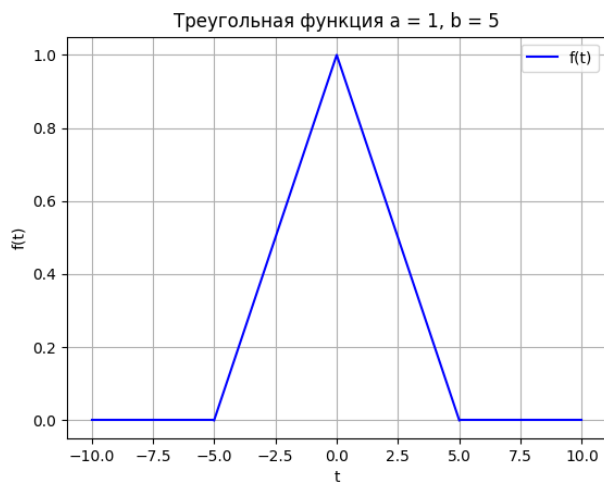


Рис. 10. График $f(t)$ при $a = 1, b = 5$.

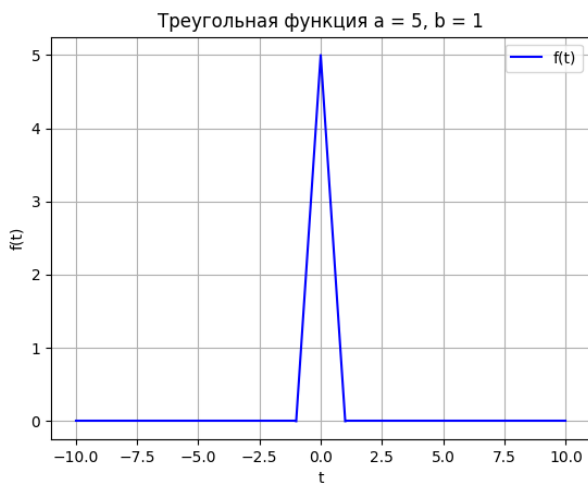


Рис. 11. График $f(t)$ при $a = 5, b = 1$.

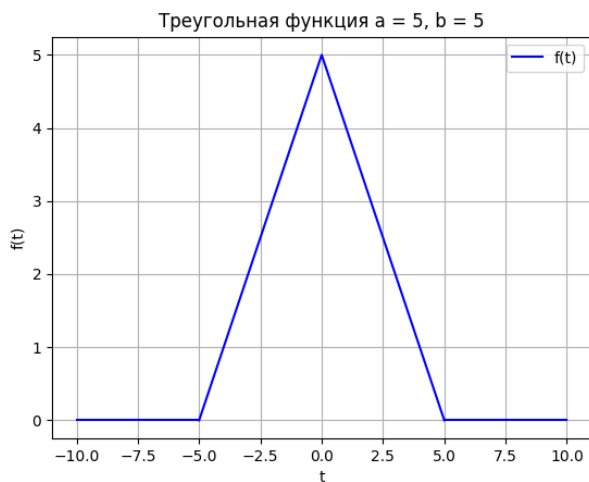


Рис. 12. График $f(t)$ при $a = 5, b = 5$.

1.2.3 Построение графиков Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$



Рис. 13. График $\hat{f}(t)$ при $a = 1, b = 1$.

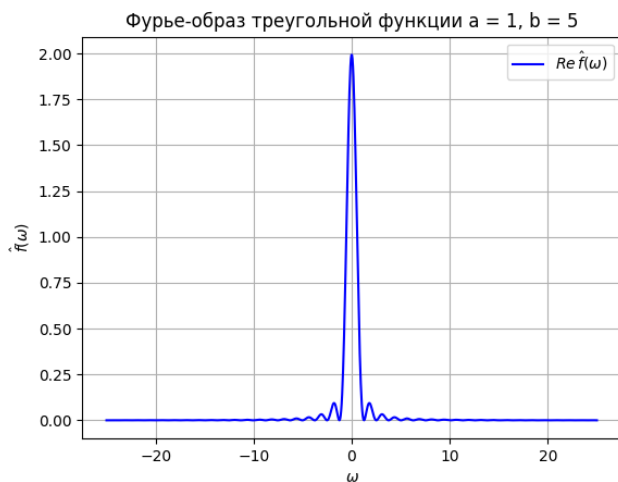


Рис. 14. График $\hat{f}(t)$ при $a = 1, b = 5$.



Рис. 15. График $\hat{f}(t)$ при $a = 5, b = 1$.

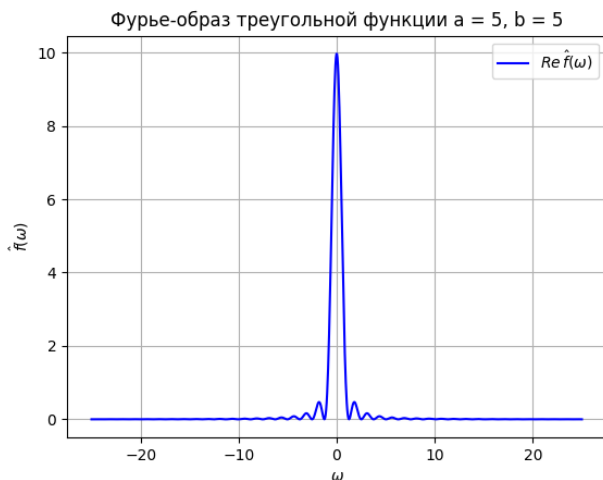


Рис. 16. График $\hat{f}(t)$ при $a = 5, b = 5$.

1.2.4 Проверка равенства Парсеваля

Таблица 2. Равенство Парсеваля для треугольной функции.

n	a	b	$\ f\ ^2 = \int_{-d}^d f(t) ^2 dt$	$\ \hat{f}\ ^2 = \int_{-d}^d \hat{f}(\omega) ^2 d\omega$
1	1	1	0.6659	0.6641
2	1	5	3.329	3.323
3	5	1	16.65	16.60
4	5	5	83.25	83.08

Заметим, что числа так же сходятся с точностью до целых, для небольших значений, с точностью до сотых (см. наборы $(1, 1)$, $(1, 5)$ вида (a, b) в таблице 2).

1.2.5 Анализ результатов

Параметр b соответствует отрезку, на котором расположено основание треугольника, образованного функцией: при $b = 1$ основание $[-1; 1]$, при $b = 5$ – аналогично $[-5; 5]$. Параметр a отвечает за максимум функции: при $a = 1$ – максимум 1, при $a = 5$, соответственно, в 5.

Для графика Фурье-образа параметр b определяет частоту колебаний графика, при $b = 1$ частота ниже, чем при $b = 5$. Вместе параметры a и b влияют на амплитуду колебаний функции, при увеличении суммы a и b амплитуда возрастает, причем для двух разных наборов $a = 1, b = 5$ и $a = 5, b = 1$ амплитуда одинакова.

Принцип неопределенности Гейзенберга о том, что невозможно одновременно точно определить координату и импульс электрона в атоме, здесь заключается в том, графикам исходной функции с наименьшими промежутками максимума соответствуют Фурье-образы с наименьшей частотой колебаний.

1.3 Кардинальный синус

$$f(t) = \text{sinc}(bt) \quad (10)$$

1.3.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

Результат получен с помощью калькулятора *Wolfram*.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(bt) e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{|b|} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \begin{cases} 0, & (\frac{b}{\omega})^2 \leq 1 \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (11)$$

1.3.2 Построение графиков функции $f(t)$



Рис. 17. График $f(t)$ при $a = 1$, $b = 1$.

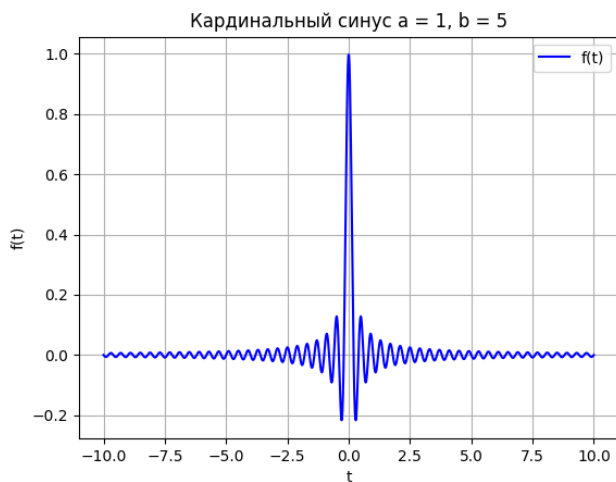


Рис. 18. График $f(t)$ при $a = 1, b = 5$.



Рис. 19. График $f(t)$ при $a = 5, b = 1$.

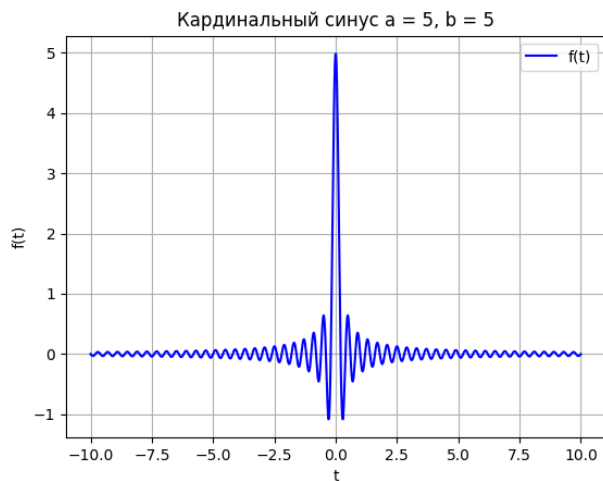


Рис. 20. График $f(t)$ при $a = 5, b = 5$.

1.3.3 Построение графиков Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$

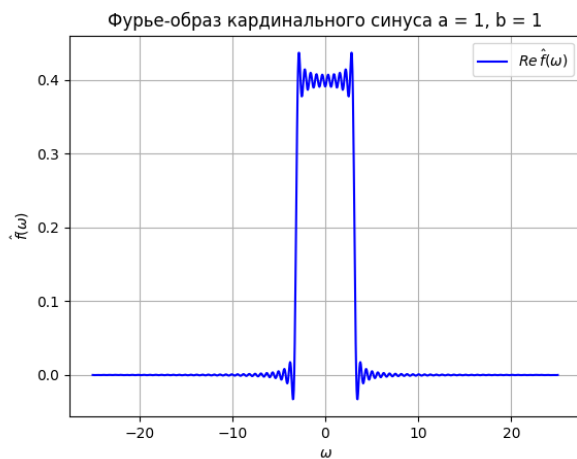


Рис. 21. График $\hat{f}(t)$ при $a = 1, b = 1$.

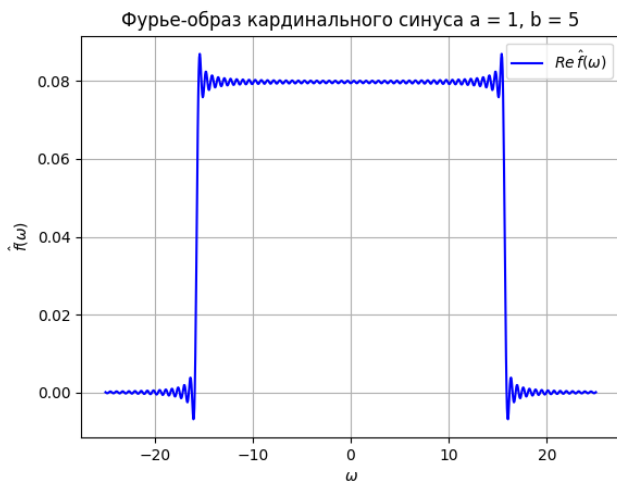


Рис. 22. График $\hat{f}(t)$ при $a = 1, b = 5$.

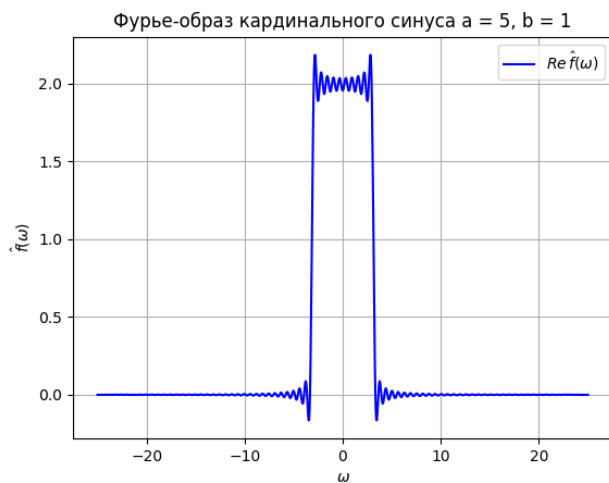


Рис. 23. График $\hat{f}(t)$ при $a = 5, b = 1$.

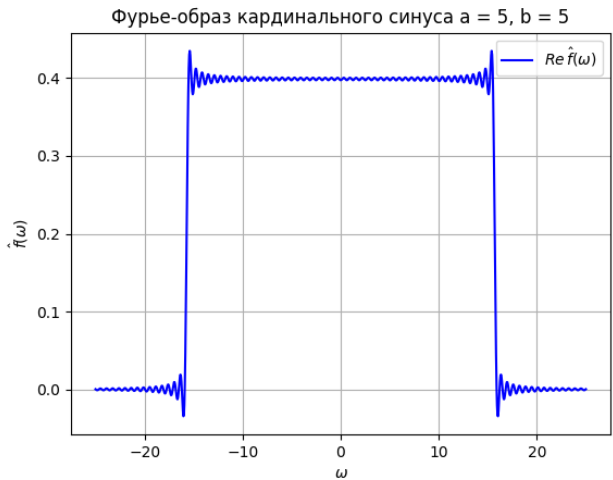


Рис. 24. График $\hat{f}(t)$ при $a = 5, b = 5$.

1.3.4 Проверка равенства Парсеваля

Таблица 3. Равенство Парсеваля для кардинального синуса.

n	a	b	$\ f\ ^2 = \int_{-d}^d f(t) ^2 dt$	$\ \hat{f}\ ^2 = \int_{-d}^d \hat{f}(\omega) ^2 d\omega$
1	1	1	0.9979	0.9896
2	1	5	0.1994	0.1989
3	5	1	24.94	24.74
4	5	5	4.984	4.973

С точностью до целых значения совпадают, более малые – с точностью до десятых или сотых. Равенство Парсеваля выполнено для всех рассматриваемых наборов (a, b) .

1.3.5 Анализ результатов

Параметр a влияет на максимум исходной функции: при $a = 1$ максимум 1, при $a = 5$ – аналогично 5. Влияние параметра b сказывается на частоте колебаний графика исходной функции: при $b = 1$ частота ниже, чем в случае $b = 5$.

Параметр b влияет на ширину скачка графика Фурье-образа: при $b = 1$ она меньше, чем при $b = 5$. Соотношение параметров a и b влияют на высоту скачка на графике Фурье-образа, заметим, что при $a = 1, b = 1$ и $a = 5, b = 5$ высота одинакова и равна примерно 0.4 (см. рисунки 21 и 24), если b больше a (рисунок 22), то высота ~ 0.08 , в обратном случае, (рисунок 23), ~ 2 .

Принцип неопределенности Гейзенберга о том, что невозможно одновременно точно определить координату и импульс электрона в атоме, здесь заключается в том, графикам исходной функции с наименьшей частотой колебаний соответствуют Фурье-образы с наименьшими промежутками максимума.

1.4 Функция Гаусса

$$f(t) = ae^{-bt^2} \quad (12)$$

1.4.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

Результат получен с помощью калькулятора *Wolfram*.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ae^{-bt^2} e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}} \quad (13)$$

1.4.2 Построение графиков функции $f(t)$

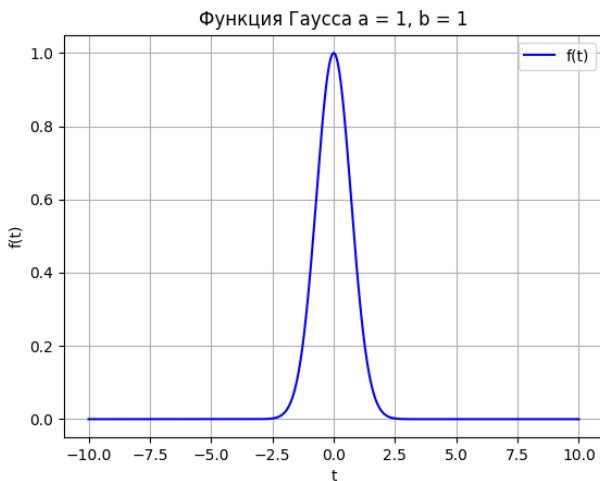


Рис. 25. График $f(t)$ при $a = 1$, $b = 1$.

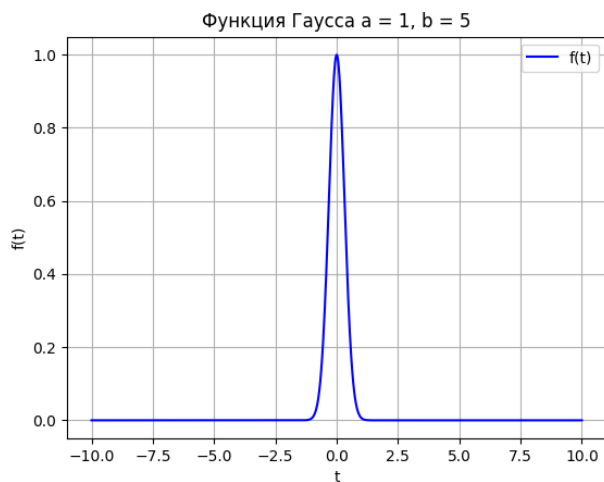


Рис. 26. График $f(t)$ при $a = 1, b = 5$.

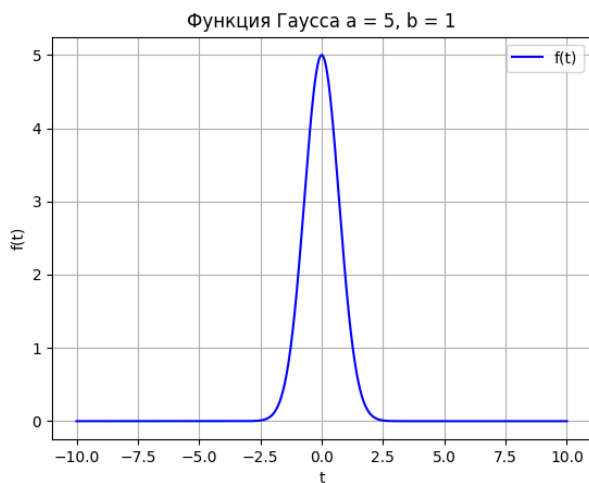


Рис. 27. График $f(t)$ при $a = 5, b = 1$.

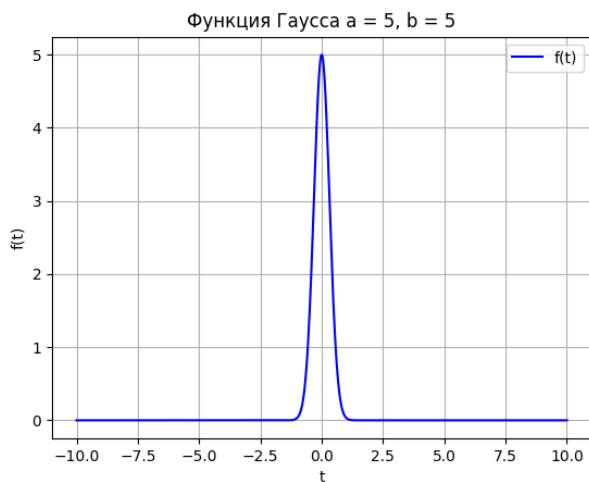


Рис. 28. График $f(t)$ при $a = 5, b = 5$.

1.4.3 Построение графиков Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$

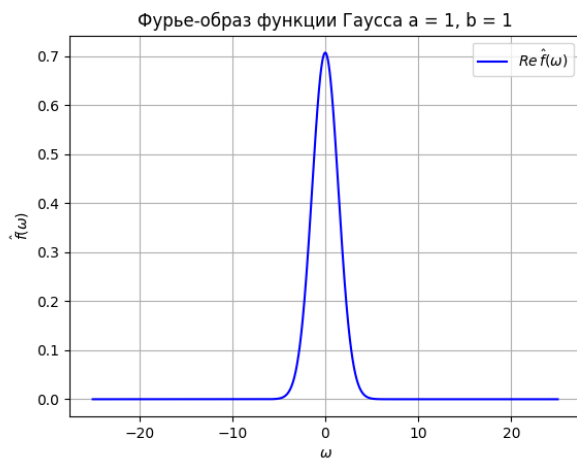


Рис. 29. График $\hat{f}(t)$ при $a = 1, b = 1$.

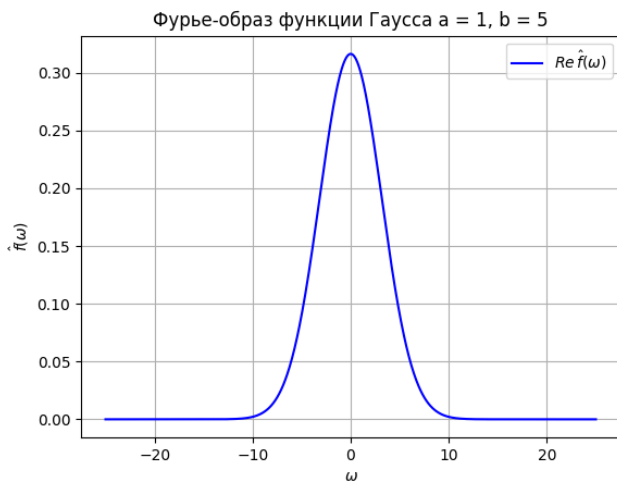


Рис. 30. График $\hat{f}(t)$ при $a = 1, b = 5$.

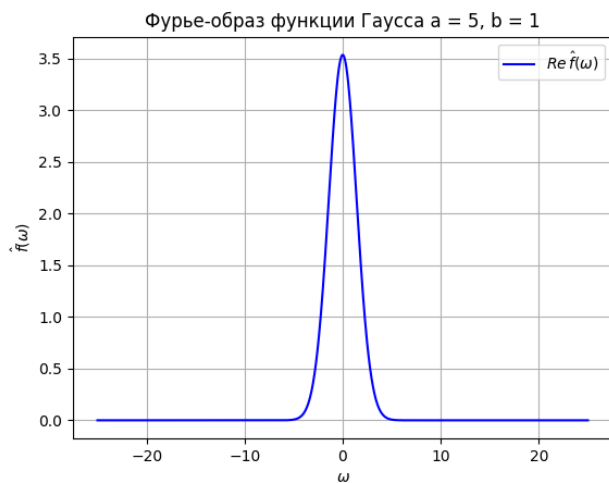


Рис. 31. График $\hat{f}(t)$ при $a = 5, b = 1$.

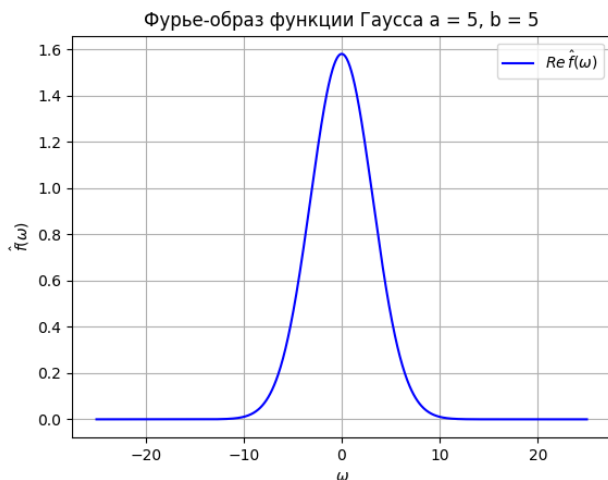


Рис. 32. График $\hat{f}(t)$ при $a = 5, b = 5$.

1.4.4 Проверка равенства Парсеваля

Таблица 4. Равенство Парсеваля для функции Гаусса.

n	a	b	$\ f\ ^2 = \int_{-d}^d f(t) ^2 dt$	$\ \hat{f}\ ^2 = \int_{-d}^d \hat{f}(\omega) ^2 d\omega$
1	1	1	1.252	1.250
2	1	5	0.5599	0.5588
3	5	1	31.30	31.24
4	5	5	13.99	13.97

Равенство Парсеваля выполнено с высокой степенью точности.

1.4.5 Анализ результатов

Параметр b влияет на ширину области всплеска графика исходной функции: при $b = 1$ ширина больше, чем при $b = 5$. Параметр a в точности соответствует значению максимума исходной функции.

В случае с Фурье-образом параметр b также влияет на ширину всплеска, но при $b = 1$ ширина меньше, чем при $b = 5$. Параметры a и b вместе влияют на максимум графика Фурье-образа.

Принцип неопределенности Гейзенберга о том, что невозможно одновременно точно определить координату и импульс электрона в атоме, здесь заключается в том, графикам исходной функции с наименьшей шириной всплеска соответствуют Фурье-образы с наибольшей шириной всплеска.

1.5 Двустороннее затухание

$$f(t) = ae^{-b|t|} \quad (14)$$

1.5.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ae^{-b|t|} e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{bt} e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-bt} e^{-i\omega t} dt \right) = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{(b-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(b+i\omega)t} dt \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\left. \frac{e^{(b-i\omega)t}}{b-i\omega} \right|_{-\infty}^0 + \left. \frac{e^{-(b+i\omega)t}}{-(b+i\omega)} \right|_0^{\infty} \right) = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega} \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{b+i\omega+b-i\omega}{b^2+\omega^2} = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}(b^2+\omega^2)} \quad (15) \end{aligned}$$

1.5.2 Построение графиков функции $f(t)$

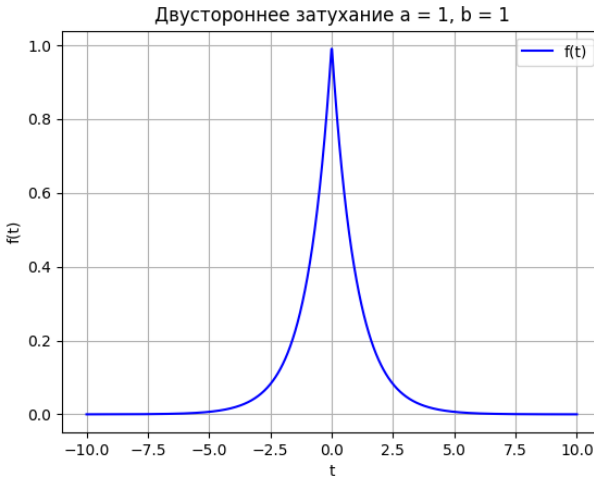


Рис. 33. График $f(t)$ при $a = 1, b = 1$.

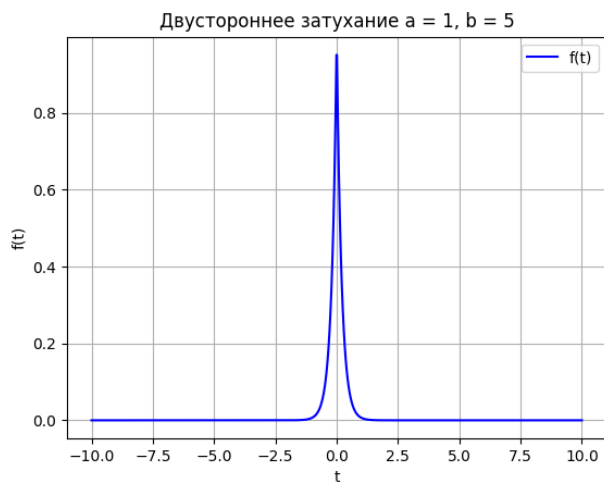


Рис. 34. График $f(t)$ при $a = 1, b = 5$.

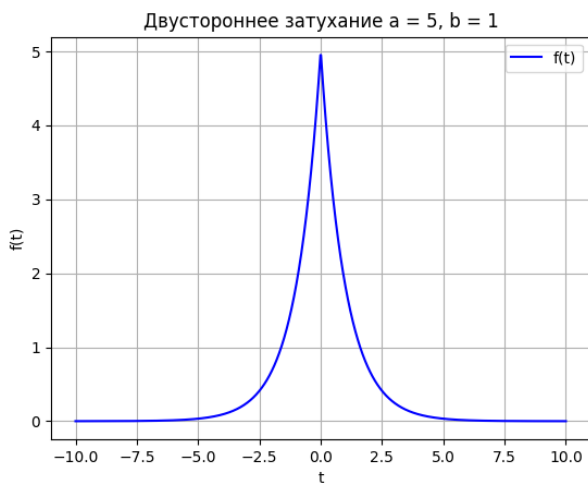


Рис. 35. График $f(t)$ при $a = 5, b = 1$.

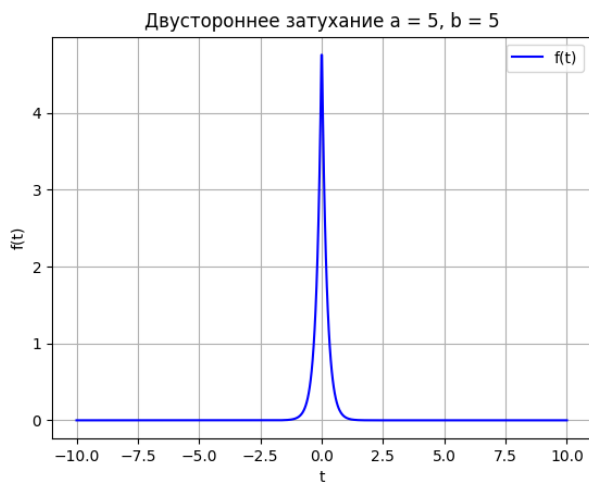


Рис. 36. График $f(t)$ при $a = 5, b = 5$.

1.5.3 Построение графиков Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$

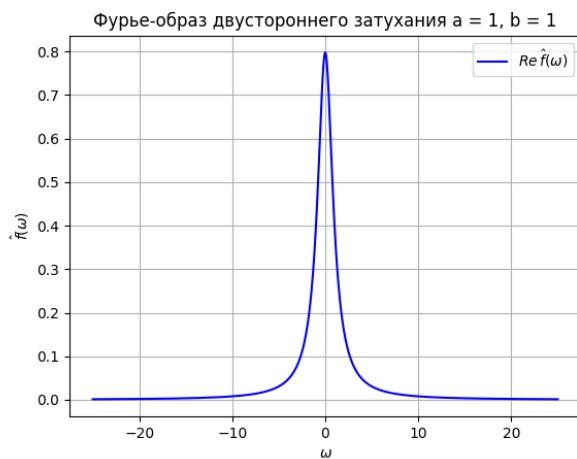


Рис. 37. График $\hat{f}(t)$ при $a = 1, b = 1$.

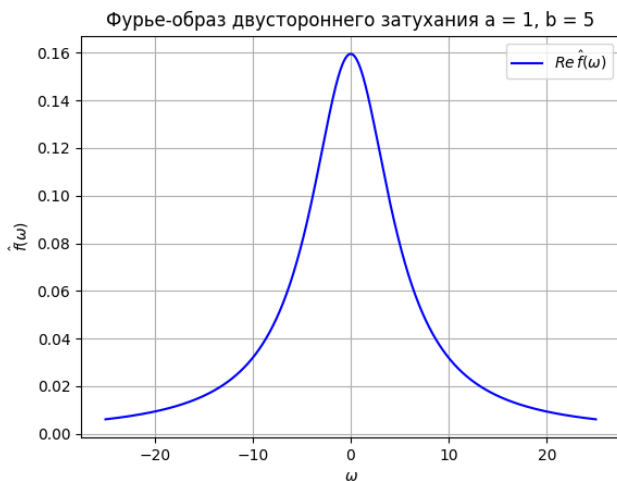


Рис. 38. График $\hat{f}(t)$ при $a = 1, b = 5$.

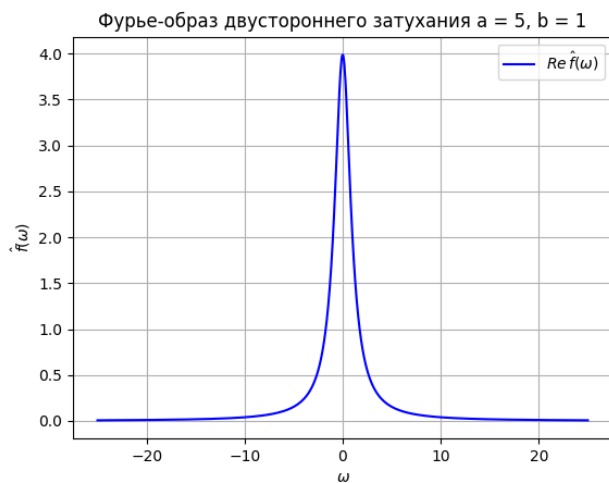


Рис. 39. График $\hat{f}(t)$ при $a = 5, b = 1$.

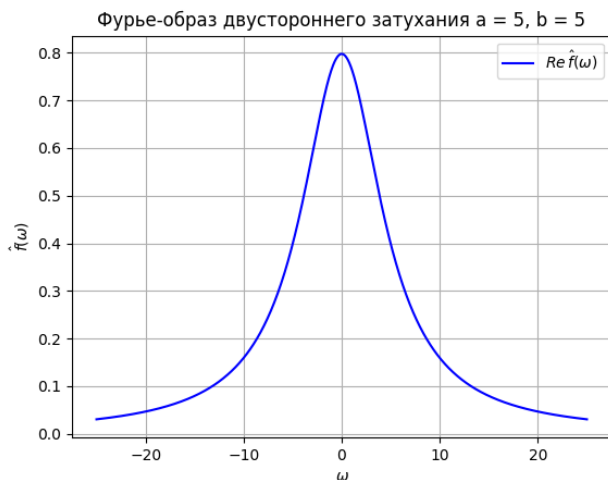


Рис. 40. График $\hat{f}(t)$ при $a = 5, b = 5$.

1.5.4 Проверка равенства Парсеваля

Таблица 5. Равенство Парсеваля для двустороннего затухания.

n	a	b	$\ f\ ^2 = \int_{-d}^d f(t) ^2 dt$	$\ \hat{f}\ ^2 = \int_{-d}^d \hat{f}(\omega) ^2 d\omega$
1	1	1	0.9924	0.9966
2	1	5	0.1700	0.1977
3	5	1	24.81	24.92
4	5	5	4.249	4.943

Как и в предыдущих случаях, значения норм оказались достаточно близки для того, чтобы считать равенство Парсеваля выполненным для всех рассматриваемых наборов значений параметров (a, b) .

1.5.5 Анализ результатов

Для визуализации был написан код на языке *Python*.
Код расположен на **GitHub**.