

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

## Лабораторная работа № 1 "Ряды Фурье"

по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

**Нечаева А. А.**

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2024

# 1 Задание. Вещественные функции.

Придумать числа  $a, b, t_0, t_1, t_2$  такие, что  $a, b > 0$  и  $t_2 > t_1 > t_0 > 0$ .

Пусть  $a = 1, b = 2; t_0 = \pi, t_1 = 2\pi, t_2 = 3\pi$ .

Рассмотрим следующие функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

## 1.1 Квадратная волна.

Периодическая функция с периодом  $T = t_2 - t_0 = 3\pi - \pi = 2\pi$  такая, что

$$f(t) = \begin{cases} a, & t \in [t_0, t_1), \\ b, & t \in [t_1, t_2) \end{cases} = \begin{cases} 1, & t \in [\pi, 2\pi), \\ 2, & t \in [2\pi, 3\pi) \end{cases} \quad (1)$$

### 1.1.1 График функции

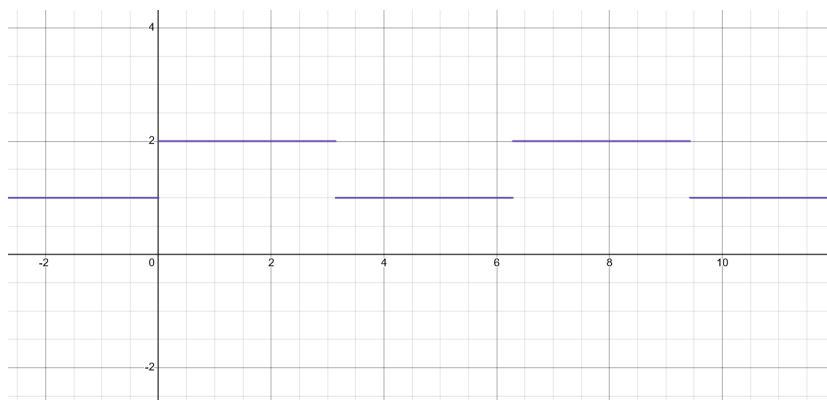


Рис. 1. График функции  $f(t)$ .

### 1.1.2 Частичные суммы Фурье

Рассмотрим частичные суммы Фурье  $F_N$  и  $G_N$  вида

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) , \quad (2)$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t}, \quad (3)$$

где  $\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}$ .

Перепишем формулы выше с учетом того, что  $T = 2\pi$ , следовательно  $\omega_n = 2\pi \frac{n}{2\pi} = n$ :

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad (4)$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}. \quad (5)$$

Перейдем к разложению по формуле 4.

$f(x)$  определена на  $[\pi, 3\pi]$ , преобразуем:

$$\pi \leq t \leq 3\pi \rightarrow \pi - 2\pi \leq t - 2\pi \leq 3\pi - 2\pi \rightarrow -\pi \leq t - 2\pi \leq \pi \quad (6)$$

Новая переменная  $x = t - 2\pi$ . Выразим  $t = x + 2\pi$  и запишем новую функцию  $\phi(x) = f(x + 2\pi)$ .

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (7)$$

где  $a_0, a_n, b_n$  – коэффициенты Фурье:

### 1.1.3 Вычисление коэффициентов $a_n, b_n$ и $c_n$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) dx, \quad (8)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \cos(nx) dx, \quad (9)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \sin(nx) dx, \quad (10)$$

Проведем обратную замену  $x = t - 2\pi$ :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n(t - 2\pi)) + b_n \sin(n(t - 2\pi))) \quad (11)$$

Воспользуемся периодичностью синуса и косинуса:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \quad (12)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} f(t) dt, \quad (13)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad (14)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad (15)$$

Вычислим значения коэффициентов:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \int_{\pi}^{2\pi} 1 dt + \int_{2\pi}^{3\pi} 2 dt \right) = \frac{1}{\pi} (\pi + 2\pi) = 3, \quad (16)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_{\pi}^{2\pi} \cos(nt) dt + 2 \int_{2\pi}^{3\pi} \cos(nt) dt \right) \quad (17)$$

Отдельно вычислим неопределенный интеграл:

$$\int \cos(nt) dt = \left| u = nt, t = \frac{u}{n}, dt = \frac{du}{n} \right| = \int \frac{\cos(u) du}{n} = \frac{\sin u}{n} + C = \frac{\sin(nt)}{n} + C \quad (18)$$

Отсюда получим

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left( \left. \frac{\sin(nt)}{n} \right|_{\pi}^{2\pi} + 2 \left. \frac{\sin(nt)}{n} \right|_{2\pi}^{3\pi} \right) = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{\pi}^{2\pi} \sin(nt) dt + 2 \int_{2\pi}^{3\pi} \sin(nt) dt \right) = -\frac{1}{\pi} \left( \left. \frac{\cos(nt)}{n} \right|_{\pi}^{2\pi} + 2 \left. \frac{\cos(nt)}{n} \right|_{2\pi}^{3\pi} \right) = \\
&= -\frac{1}{\pi} \left( \frac{\cos(2\pi n) - \cos(\pi n)}{n} + 2 \frac{\cos(3\pi n) - \cos(2\pi n)}{n} \right) = \\
&= -\frac{1}{\pi} \left( \frac{1 - \cos(\pi n)}{n} + 2 \frac{\cos(3\pi n) - 1}{n} \right) = -\frac{1}{\pi} \left( \frac{1 - (-1)^n}{n} + 2 \frac{(-1)^n - 1}{n} \right) = \\
&= -\frac{1}{\pi} \left( \frac{(-1)^n - 1}{n} \right) = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \quad (20)
\end{aligned}$$

Примеры вычисления первых значений  $b_n$ :

$$b_1 = \frac{1 - (-1)^1}{\pi} = \frac{2}{\pi} \quad (21)$$

$$b_2 = \frac{1 - (-1)^2}{2\pi} = 0 \quad (22)$$

$$b_3 = \frac{1 - (-1)^3}{3\pi} = \frac{2}{3\pi} \quad (23)$$

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \left( \int_{\pi}^{2\pi} \sin(0) dt + 2 \int_{2\pi}^{3\pi} \sin(0) dt \right) = 0 \quad (24)$$

Запишем получившуюся частичную сумму:

$$F_N(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^N \left( \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \sin(nt) \right), \quad (25)$$

Перейдем к рассмотрению следующей частичной суммы:

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}. \quad (26)$$

Где соответствующий коэффициент:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_h^{h+T} f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{3\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\pi}^{2\pi} e^{-int} dt + 2 \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-int} dt \right) \quad (27)$$

При  $n = 0$  коэффициент будет равен:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\pi}^{2\pi} e^0 dt + 2 \int_{2\pi}^{3\pi} e^0 dt \right) = \frac{3}{2} \quad (28)$$

Отдельно вычислим неопределенный интеграл:

$$c_n = \int e^{-int} dt = \frac{-1}{in} \int e^{-int} d(-int) = -\frac{e^{-int}}{in} + C \quad (29)$$

$$c_n = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{-int}}{in} \Big|_{\pi}^{2\pi} + 2 \frac{e^{-int}}{in} \Big|_{2\pi}^{3\pi} \right) = \frac{e^{-in\pi} + e^{-2in\pi} - 2e^{-3in\pi}}{2in\pi} \quad (30)$$

В итоге полученное разложение:

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N \frac{e^{-in\pi} + e^{-2in\pi} - 2e^{-3in\pi}}{2in\pi} e^{int}. \quad (31)$$

#### 1.1.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье

Код для вычисления коэффициентов Фурье написан на *Python* с использованием библиотеки *NumPy*.

Листинг 1. Функция, реализующая квадратную волну

```

1 def fun_square_wave(t):
2     if (t // np.pi) % 2 == 0:
3         return 2
4     else:
5         return 1
6
7
8 fun_wave = np.vectorize(fun_square_wave)
```

Необходимое в процессе нахождения коэффициентов интегрирование реализовано с помощью вычисления скалярного произведения подынтегральных функций.

*Листинг 2. Функция, реализующая интегрирование для вычисления коэффициентов Фурье.*

```
1 def integral_counter(f_1, f_2, a, b):  
2  
3     t = np.linspace(a, b, my_sigma)  
4     dt = (b - a) / my_sigma  
5  
6     return np.dot(f_1(t), f_2(t)) * dt
```

Далее приведены функции, непосредственно возвращающие вычисленные значения коэффициентов Фурье.

*Листинг 3. Функция для коэффициентов  $a_n$*

```
1 def a_coef(f, N):  
2     res = []  
3     for n in range(N):  
4         fourier_cos = lambda t: np.cos(n * t)  
5         res.append(integral_counter(f, fourier_cos, np.pi, 3 *  
6             np.pi) / np.pi)  
7  
8     return res
```

*Листинг 4. Функция для коэффициентов  $b_n$*

```
1 def b_coef(f, N):  
2     res = []  
3     for n in range(N):  
4         fourier_sin = lambda t: np.sin(n * t)  
5         res.append(integral_counter(f, fourier_sin, np.pi, 3 *  
6             np.pi) / np.pi)  
7  
8     return res
```

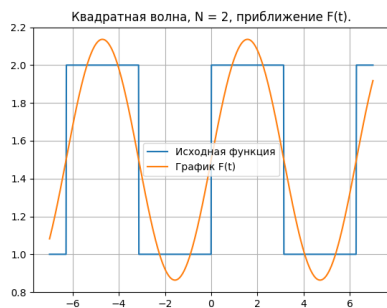
*Листинг 5. Функция для коэффициентов  $c_n$*

```
1 def c_coef(f, N):  
2     res = []  
3     for n in range(N):  
4         fourier_exp = lambda t: np.exp(-1j * n * t)  
5         res.append(integral_counter(f, fourier_exp, np.pi, 3 *  
6             np.pi) / (2 * np.pi))  
7  
8     return res
```

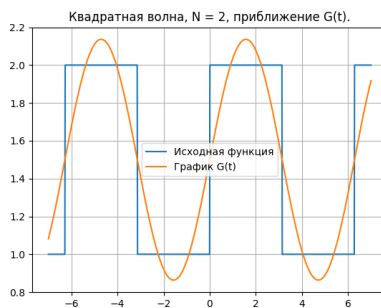
Таблица 1. Значения коэффициентов, вычисленных с помощью написанной программы для квадратной волны.

$n$	$a_n$	$b_n$	$Re(c_n)$	$Im(c_n)$
0	2.9998	0	1.4999	0
1	-0.0001	0.6366	-0.00005	-0.3183
2	0.0001	0	0.00005	0

### 1.1.5 Построение графиков частичных сумм $F_N$ , $G_N$



а)

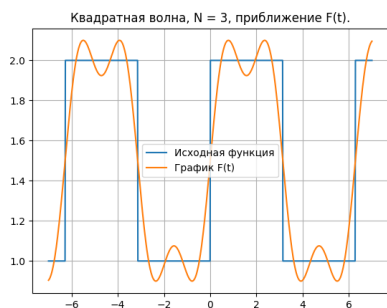


б)

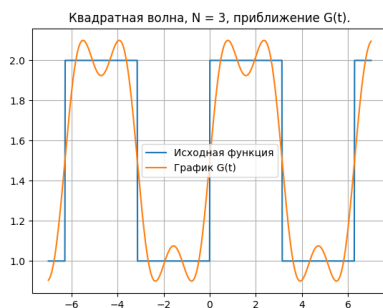
Рис. 2. Построение графиков частичных сумм, для квадратной волны,  $N = 2$ .

При малых значениях  $N$  (рис. 2-4) можно заметить, что суммы  $F_N(t)$  и  $G_N(t)$  практически неотличимы друг от друга.



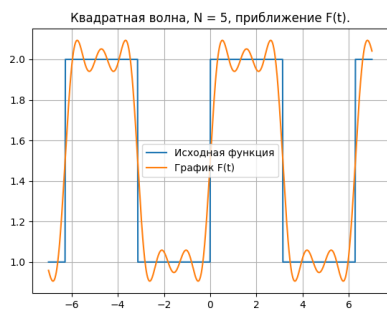


а)

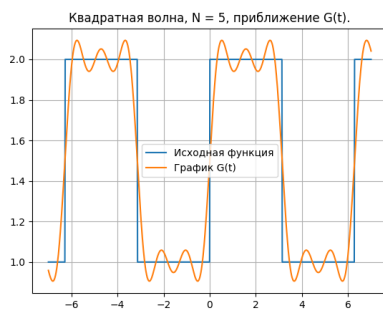


б)

Рис. 3. Построение графиков частичных сумм, для квадратной волны,  $N = 3$ .

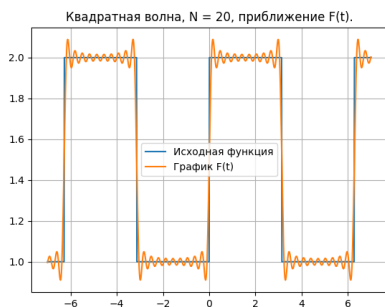


а)

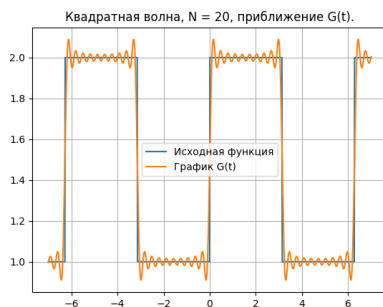


б)

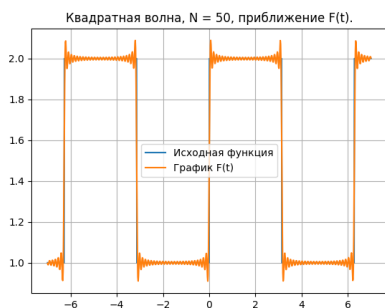
Рис. 4. Построение графиков частичных сумм, для квадратной волны,  $N = 5$ .



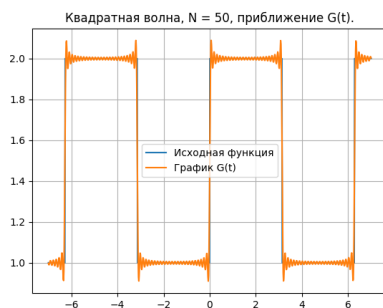
а)



б)

Рис. 5. Построение графиков частичных сумм, для квадратной волны,  $N = 20$ .

а)



б)

Рис. 6. Построение графиков частичных сумм, для квадратной волны,  $N = 50$ .

На рисунках 2-6 можно заметить, что при увеличении  $N$  точность приближения исходного графика функции с помощью частичных сумм Фурье повышается, причем синхронно и неотличимо друг от друга. При  $N \geq 5$  суммы Фурье очерчивают очень похожую на исходную функцию.

### 1.1.6 Равенство Парсеваля

Запишем равенство Парсеваля для  $F_N$ :

$$\|f\|^2 = \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) \quad (32)$$

и для  $G_N$ :

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (33)$$

## 1.2 Любая четная периодическая функция.

$$f(t) = 4 \cos \left( \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right) \quad (34)$$

### 1.2.1 График функции

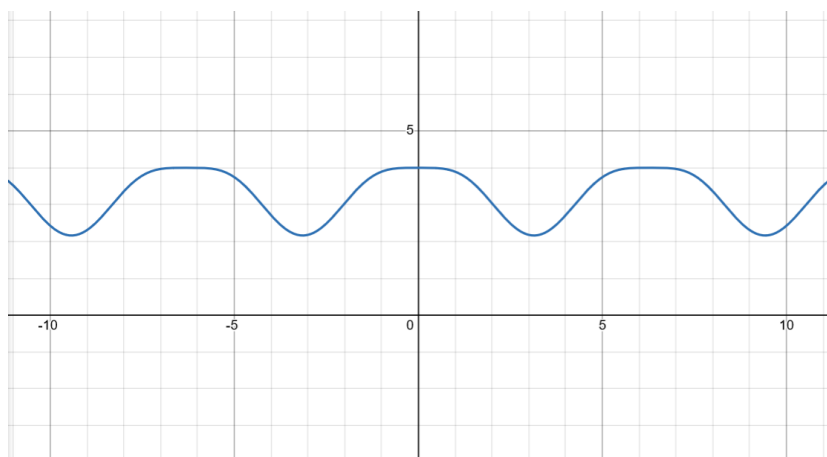


Рис. 7. График функции  $f(t)$ .

### 1.2.2 Частичные суммы Фурье

Рассмотрим частичные суммы Фурье  $F_N$  и  $G_N$  вида

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) , \quad (35)$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t} , \quad (36)$$

где  $\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}$ .

Аналогично,  $T = 2\pi$ , следовательно,  $\omega_n = n$ :

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) , \quad (37)$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} , \quad (38)$$

### 1.2.3 Вычисление коэффициентов $a_n$ , $b_n$ и $c_n$

Запишем формулы для вычисления коэффициентов  $a_n$ ,  $b_n$  и  $c_n$  :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left( \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right) \cos(nt) dt \quad (39)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left( \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right) \sin(nt) dt \quad (40)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_h^{h+T} f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left( \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right) e^{-int} dt \quad (41)$$

Вычисление интегралов в данном случае возможно только численно, так как интегралы, содержащиеся в коэффициентах являются неберущимися. Найдем первые 3 значения:

$n = 0$  :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left( \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right) dt = 6.58868 \quad (42)$$

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left( \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right) \sin(0 \cdot t) dt = 0 \quad (43)$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left( \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right) e^{-i \cdot 0 \cdot t} dt = 3.29434 \quad (44)$$

$n = 1$  :

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left( \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right) \cos(t) dt = 0.929197 \quad (45)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left( \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right) \sin(t) dt = 0 \quad (46)$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left( \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right) e^{-it} dt = 0.464599 \quad (47)$$

$n = 2 :$

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left( \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right) \cos(2t) dt = -0.21486 \quad (48)$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left( \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right) \sin(2t) dt = 0 \quad (49)$$

$$c_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos \left( \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right) e^{-2it} dt = -0.10743 \quad (50)$$

#### 1.2.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье

#### 1.2.5 Построение графиков частичных сумм $F_N$ , $G_N$

...

#### 1.2.6 Равенство Парсеваля

...

### 1.3 Любая нечетная периодическая функция.

$$f(t) = \sin^3(t) \quad (51)$$

#### 1.3.1 График функции

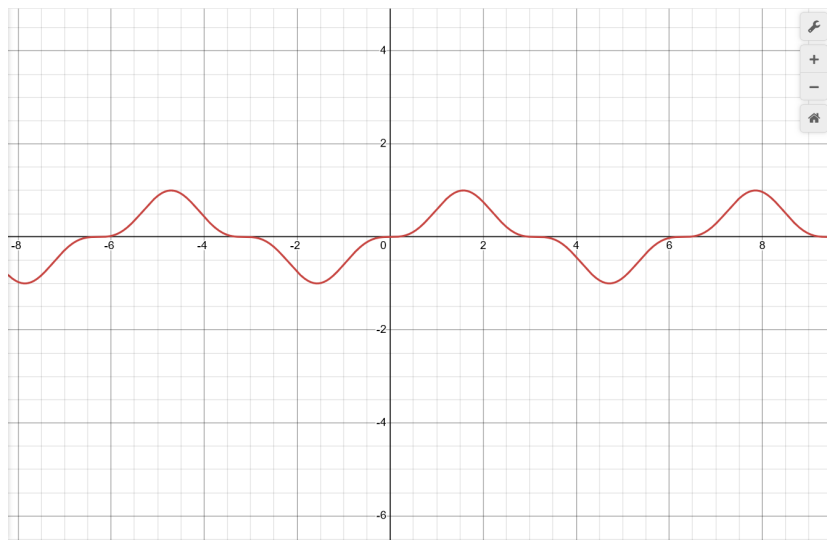


Рис. 8. График функции  $f(t)$ .

#### 1.3.2 Частичные суммы Фурье

Рассмотрим частичные суммы Фурье  $F_N$  и  $G_N$  вида

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) , \quad (52)$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t} , \quad (53)$$

где  $\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}$ .

Аналогично,  $T = 2\pi$ , следовательно,  $\omega_n = n$ :

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) , \quad (54)$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} , \quad (55)$$

### 1.3.3 Вычисление коэффициентов $a_n$ , $b_n$ и $c_n$

Запишем формулы для вычисления коэффициентов  $a_n$ ,  $b_n$  и  $c_n$  :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t) dt = 0 \quad (56)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t) \cos(nt) dt = 0 \quad (57)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t) \sin(nt) dt \quad (58)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_h^{h+T} f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t) e^{-int} dt \quad (59)$$

Найдем численные значения коэффициентов для первых нескольких  $n$ .

$n = 0$  :

$$a_0 = 0 \quad (60)$$

$$b_0 = 0 \quad (61)$$

$$c_0 = 0 \quad (62)$$



$n = 1 :$ 

$$a_1 = 0 \quad (63)$$

$$b_1 = \frac{3}{4} \quad (64)$$

$$c_1 = -\frac{3i}{8} \quad (65)$$

 $n = 2 :$ 

$$a_2 = 0 \quad (66)$$

$$b_2 = 0 \quad (67)$$

$$c_2 = 0 \quad (68)$$

 $n = 3 :$ 

$$a_3 = 0 \quad (69)$$

$$b_3 = -\frac{1}{4} \quad (70)$$

$$c_3 = \frac{i}{8} \quad (71)$$

### 1.3.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье

### 1.3.5 Построение графиков частичных сумм $F_N, G_N$

...

### 1.3.6 Равенство Парсеваля

...

**1.4 Любая периодическая функция, график которой состоит не только из прямых линий, и которая не является ни четной, ни нечетной.**

$$f(t) = \cos(t + 1) \quad (72)$$

#### 1.4.1 График функции

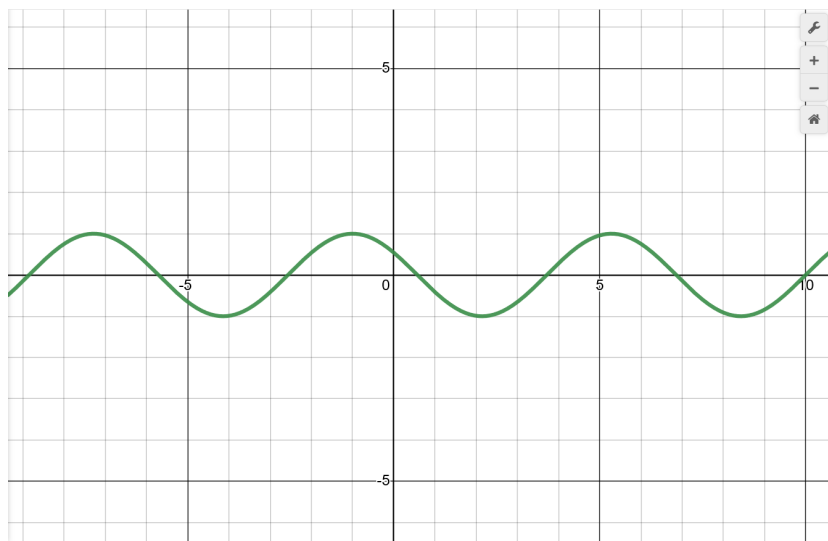


Рис. 9. График функции  $f(t)$ .

#### 1.4.2 Частичные суммы Фурье

#### 1.4.3 Вычисление коэффициентов $a_n$ , $b_n$ и $c_n$

#### 1.4.4 Программа для вычисления коэффициентов Фурье

#### 1.4.5 Построение графиков частичных сумм $F_N$ , $G_N$

...

#### 1.4.6 Равенство Парсеваля

...