

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 4 "Линейная фильтрация"

по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2024

1 Задание. Спектральное дифференцирование

1.1 Исходный график

Рассмотрим сигнал $y = \sin(t)$ на промежутке $[-100; 100]$ (рисунок 1).

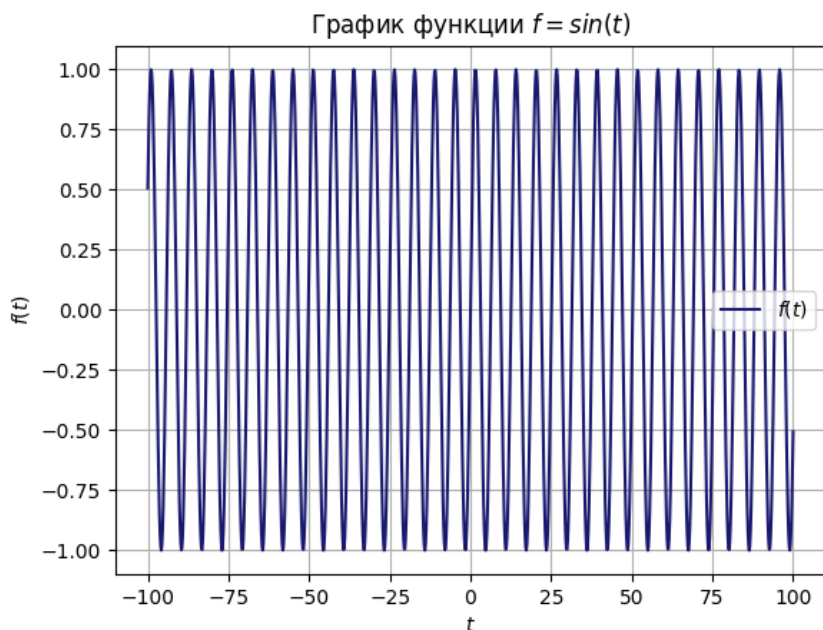


Рис. 1. Исходный график $f = \sin(t)$.

Будем также рассматривать часть исходного графика на промежутке $[-10; 10]$ (рисунок 2) для большей наглядности.

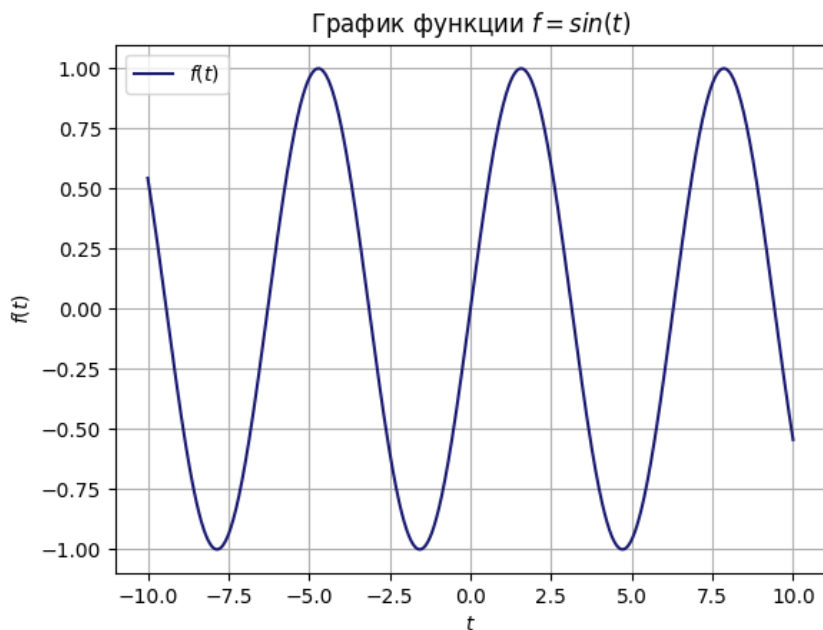


Рис. 2. Часть исходный график $f = \sin(t)$.

1.2 Добавление шума

Добавим к исходному графику функции небольшой шум вида

$$a \cdot (\text{rand}(\text{size}(t)) - 0.5)$$

результат представлен на рисунках 4 и 5.

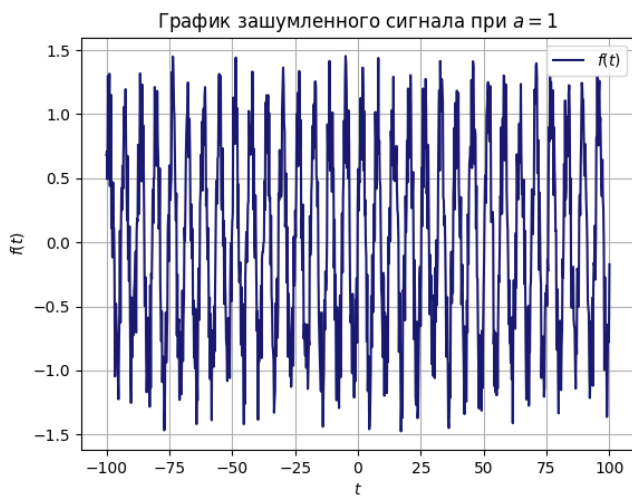


Рис. 3. Зашумленный график.

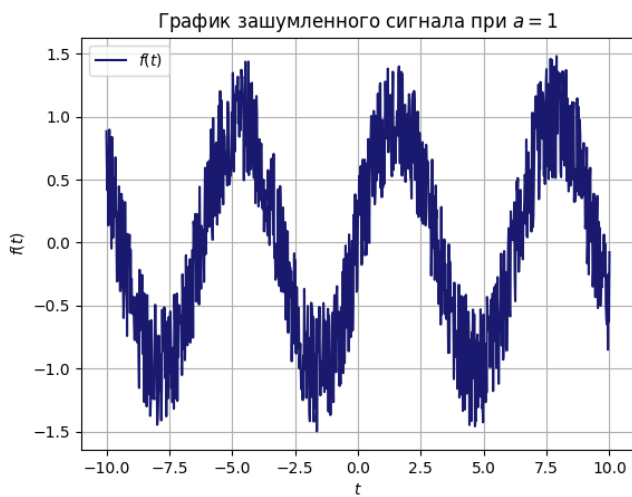


Рис. 4. Часть зашумленного графика.

1.3 Численная производная

Найдем численную производную от зашумленного сигнала, используя формулу поэлементного дифференцирования

$$\frac{y(k+1) - y(k)}{dt} \quad (1)$$

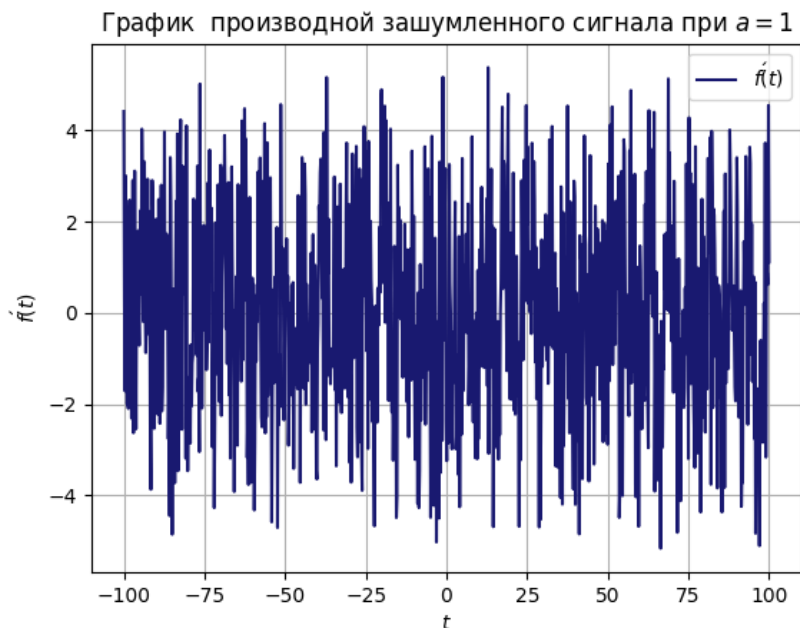


Рис. 5. Численная производная зашумленного графика функции при $a = 1$ на полном промежутке $[-100; 100]$.

Несмотря на то, что исходный график функции можно узнать при добавлении шума с коэффициентом $a = 1$, график численной производной в этом случае практически неузнаваем (рисунки 5-6), но при $a = 0.1$ очертания косинуса хорошо заметны и на графике численной производной (рисунок 7).

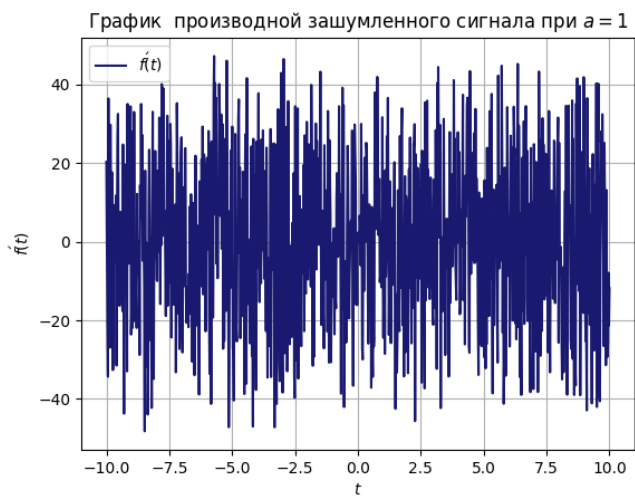


Рис. 6. Численная производная зашумленного графика функции при $a = 1$.



Рис. 7. Численная производная зашумленного графика функции при $a = 0.1$.

1.4 Спектральная производная

Найдем *спектральную производную* от зашумленного сигнала. Для этого с помощью численного интегрирования (*numpy.trapz*) найдем Фурье-образ сигнала и домножим его на ωi , так как $F\{f'(t)\} = \omega i F\{f(t)\}$, для того, чтобы получить Фурье-образ производной.

После чего выполним обратное преобразование Фурье для получения спектральной производной.



Рис. 8. Спектральная производная зашумленного графика функции при $a = 1$.

На промежутке $[-10; 10]$ графика заметно, что спектральная производная сильнее приближает точную производную $f'(t) = \cos(t)$ (рисунок 10) исходного графика функции по сравнению с численной производной. Причем как в случае $a = 1$, так и $a = 0.1$. Спектральная производная отличается меньшим количеством шумов, чем численная.

Вывод: применение Фурье-преобразования может помочь получить более точную производную функции зашумленного сигнала.

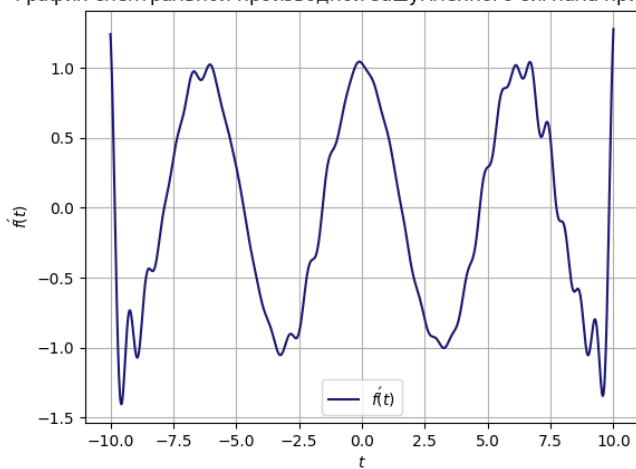
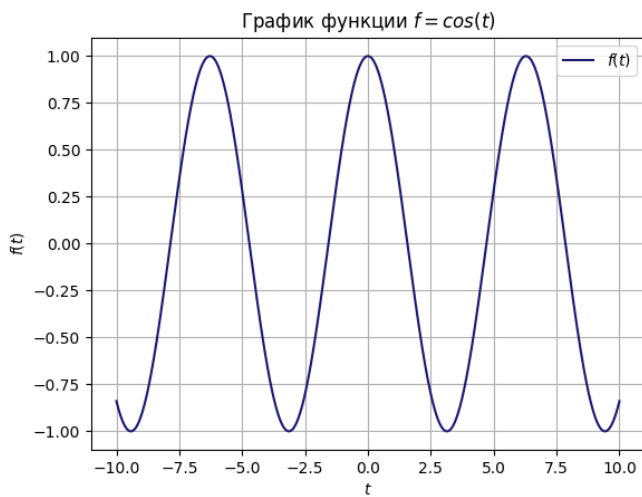
График спектральной производной зашумленного сигнала при $a = 0.1$ Рис. 9. Спектральная производная зашумленного графика функции при $a = 0.1$.

Рис. 10. График истинной производной.

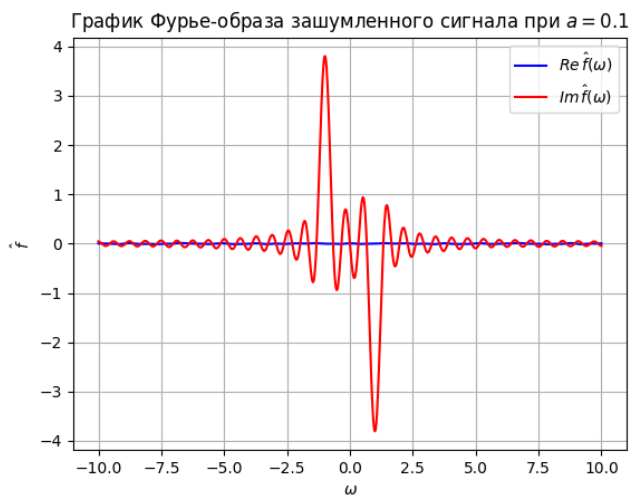


Рис. 11. График Фурье-образа зашумленной функции при $a = 0.1$.

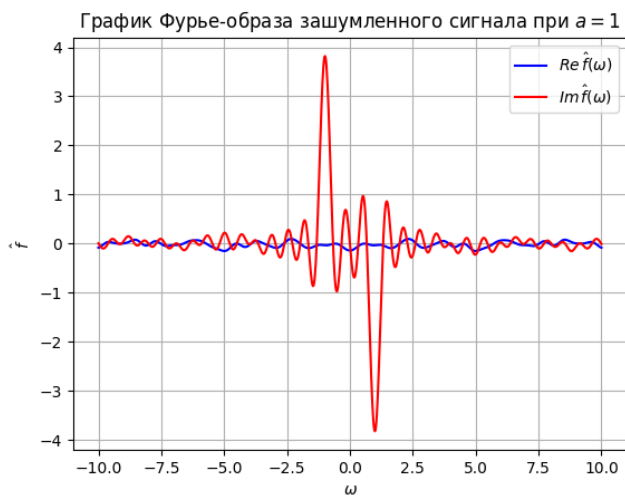


Рис. 12. График Фурье-образа зашумленной функции при $a = 1$.

2 Задание. Линейные фильтры.

Рассмотрим сигнал

$$u = g + b \cdot (\text{rand}(\text{size}(t)) - 0.5) + c \cdot \sin(d \cdot t)$$

и выполним фильтрацию указанного сигнала, используя линейные фильтры.

Сигнал $g(t)$ также перепишем из лабораторной 3: зададимся числами $a = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$ и рассмотрим функцию $g(t) = a$ при $t \in [t_1, t_2]$ и $g(t) = 0$ при других t .

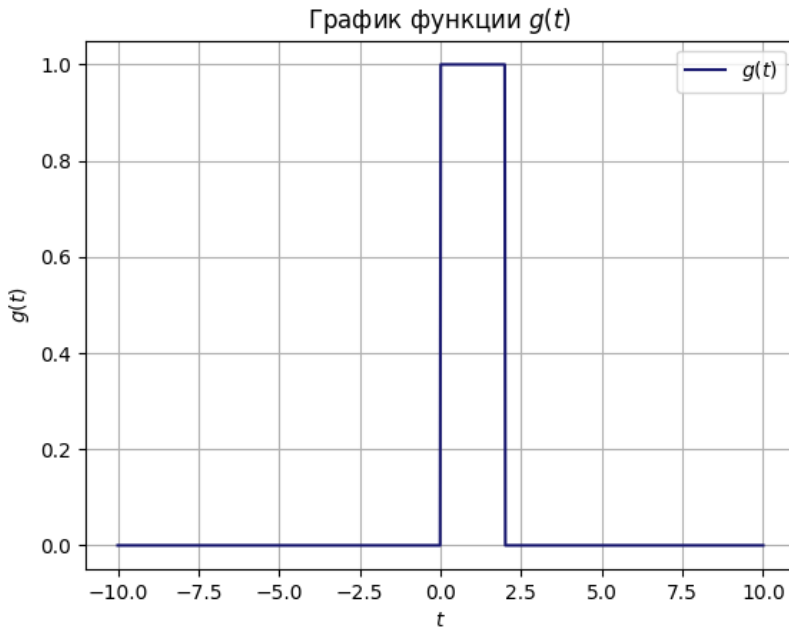


Рис. 13. Исходный график функции $g(t)$.

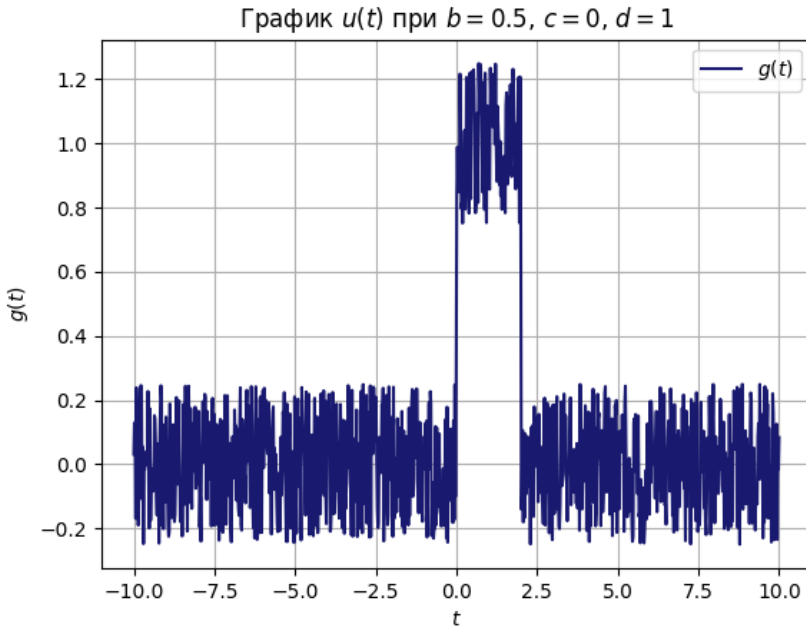


Рис. 14. График $u(t)$ при $b = 0.5, c = 0, d = 1$.

2.1 Фильтр первого порядка.

Пусть $c = 0$. Зададим постоянную времени $T > 0$ и пропустим сигнал u через линейный фильтр первого порядка

$$W_1(p) = \frac{1}{Tp + 1} \quad (2)$$

Заметим, что при малом значении параметра T шумы из сигнала практически не убираются (рисунок 15), но при увеличении значения коэффициента T график становится более гладким (рисунок 16).

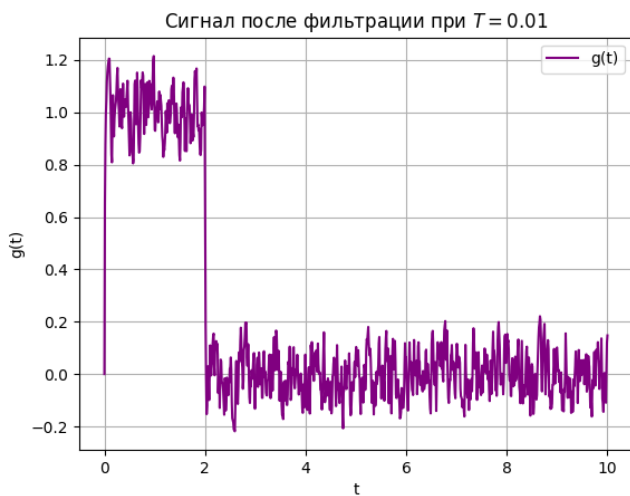


Рис. 15. График после фильтрации при $T = 0.01$.

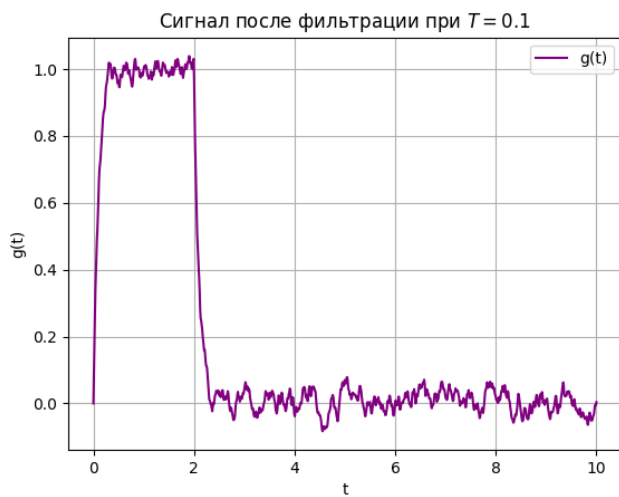


Рис. 16. График после фильтрации при $T = 0.1$.

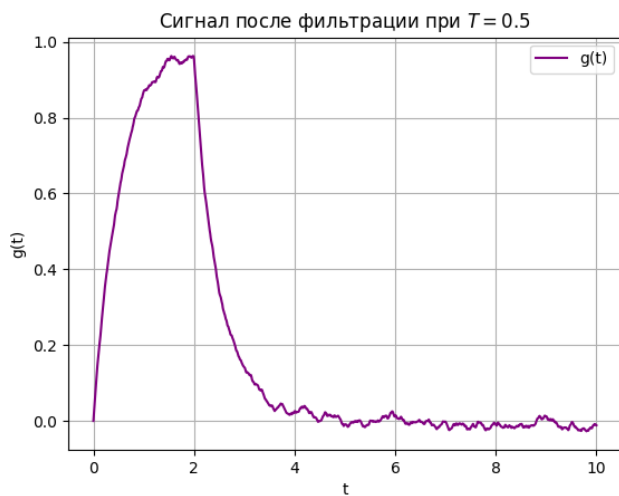


Рис. 17. График после фильтрации при $T = 0.5$.

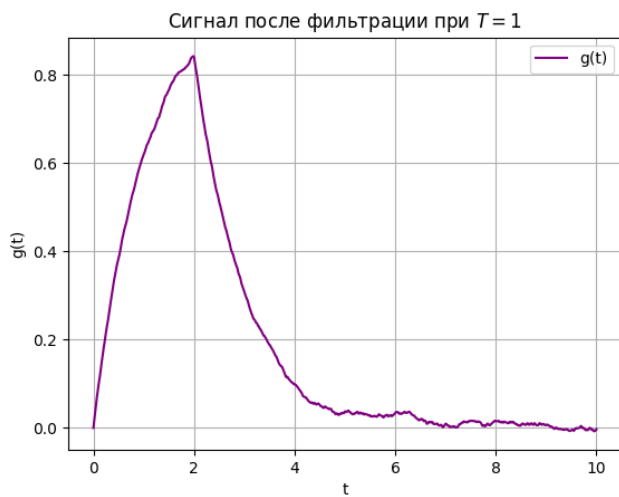


Рис. 18. График после фильтрации при $T = 1$.

При дальнейшем увеличении значения параметра T , начиная с $T = 1$ (рисунок 18), теряется точность передаваемого сигнала.

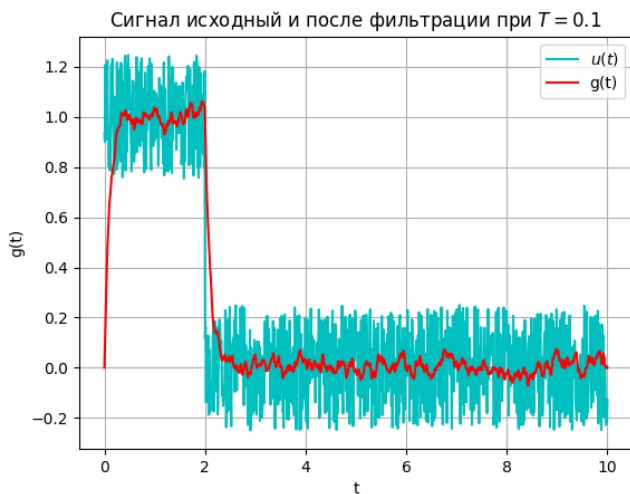


Рис. 19. График до и после фильтрации при $T = 0.1$.

2.2 Специальный фильтр

3 Задание. Сглаживание биржевых линий.

Для визуализации был написан код на языке *Python*.
Код расположен на **GitHub**.