Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 4
"Линейная фильтрация"

по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2024

1 Задание. Спектральное дифференцирование

1.1 Исходный график

Рассмотрим сигнал $y = \sin(t)$ на промежутке $[-100; 100]$ (рисунок 1).

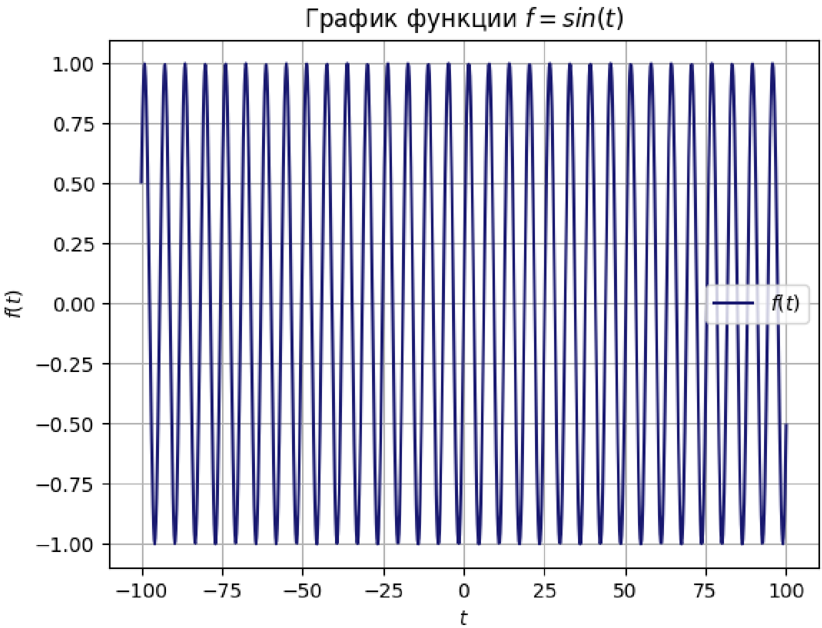


Рис. 1. Исходный график $f = \sin(t)$.

Будем также рассматривать часть исходного графика на промежутке $[-10; 10]$ (рисунок 2) для большей наглядности.

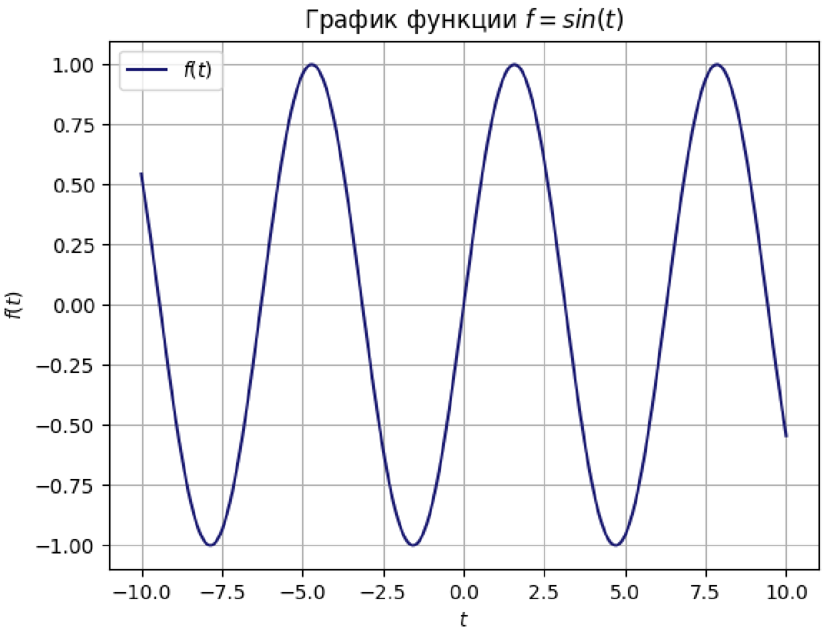


Рис. 2. Часть исходный график $f = \sin(t)$.

1.2 Добавление шума

Добавим к исходному графику функции небольшой шум вида

$$a \cdot (rand(size(t)) - 0.5)$$

результат представлен на рисунках 4 и 5.

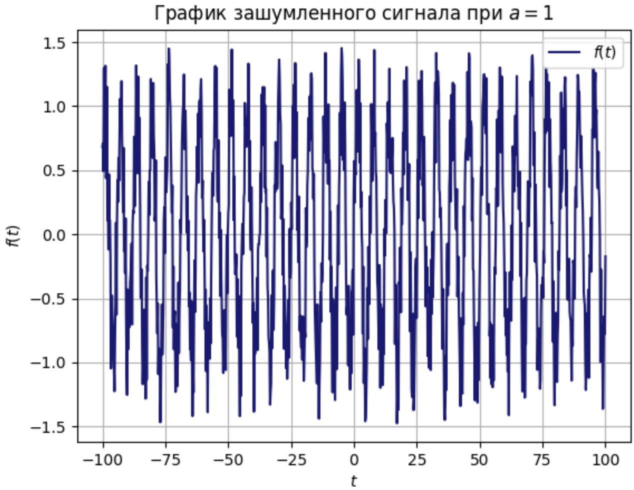


Рис. 3. Зашумленный график.

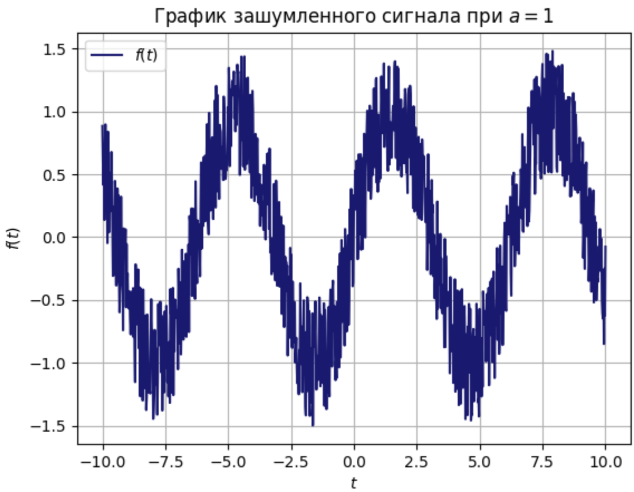


Рис. 4. Часть зашумленного графика.

1.3 Численная производная

Найдем *численную производную* от зашумленного сигнала, используя формулу поэлементного дифференцирования

$$\frac{y(k+1) - y(k)}{dt} \tag{1}$$

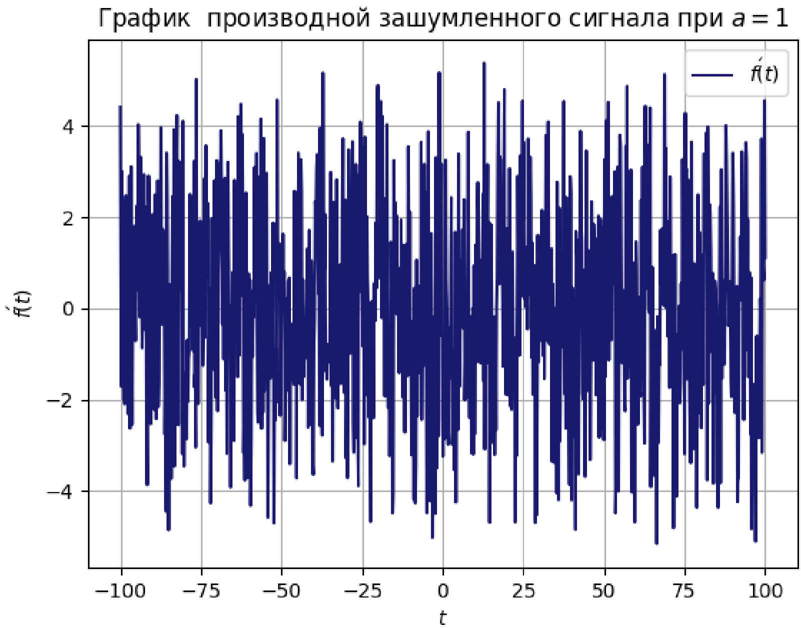


Рис. 5. Численная производная зашумленного графика функции при $a = 1$ *на полном промежутке* $[-100; 100]$.

Несмотря на то, что исходный график функции можно узнать при добавлении шума с коэффициентом $a = 1$, график численной производной в этом случае практически неузнаваем (рисунки 5-6), но при $a = 0.1$ очертания косинуса хорошо заметны и на графике численной производной (рисунок 7).

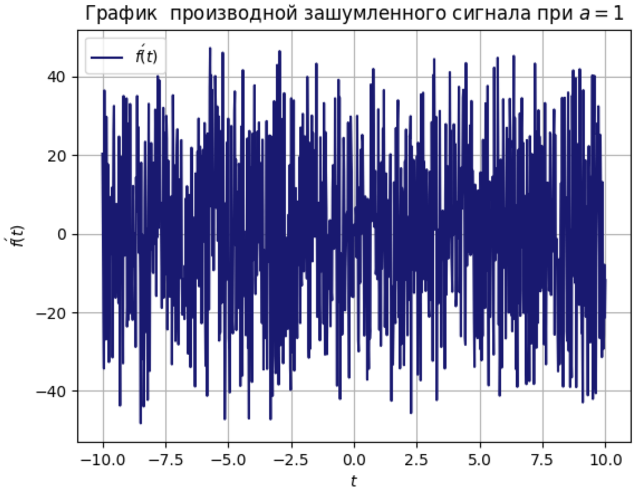


Рис. 6. Численная производная зашумленного графика функции при $a = 1$.

Рис. 7. Численная производная зашумленного графика функции при $a = 0.1$.

1.4 Спектральная производная

Найдем *спектральную производную* от зашумленного сигнала. Для этого с помощью численного интегрирования (*numpy.trapz*) найдем Фурье-образ сигнала и домножим его на ωi, так как $F\{f'(t)\} = \omega i F\{f(t)\}$, для того, чтобы получить Фурье-образ производной.
После чего выполним обратное преобразование Фурье для получения спектральной производной.

Рис. 8. Спектральная производная зашумленного графика функции при $a = 1$.

На промежутке $[-10; 10]$ графика заметно, что спектральная производная сильнее приближает точную производную $f'(t) = \cos(t)$ (рисунок 10) исходного графика функции по сравнению с численной производной. Причем как в случае $a = 1$, так и $a = 0.1$. Спектральная производная отличается меньшим количеством шумов, чем численная.
Вывод: применение Фурье-преобразования может помочь получить более точную производную функции зашумленного сигнала.

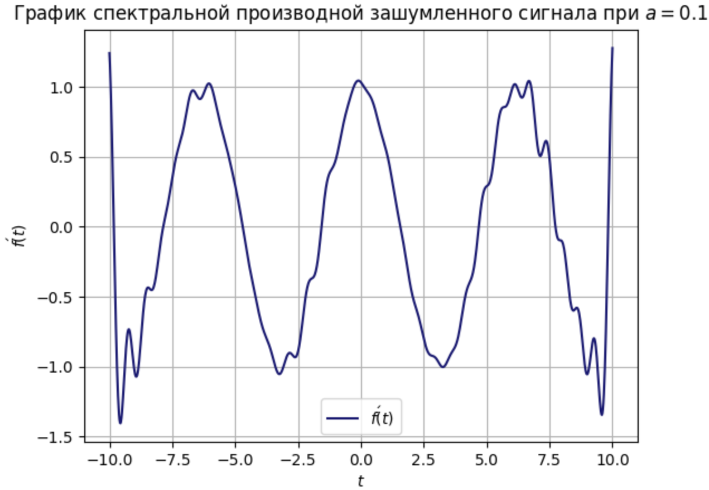


Рис. 9. Спектральная производная зашумленного графика функции при $a = 0.1$.

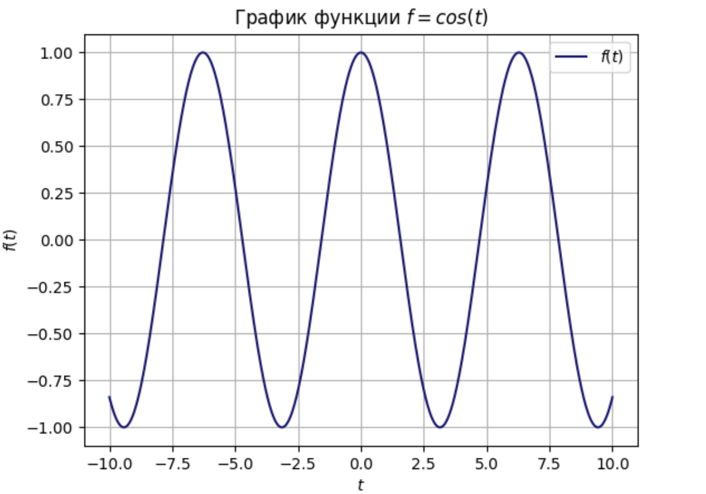


Рис. 10. График истинной производной.

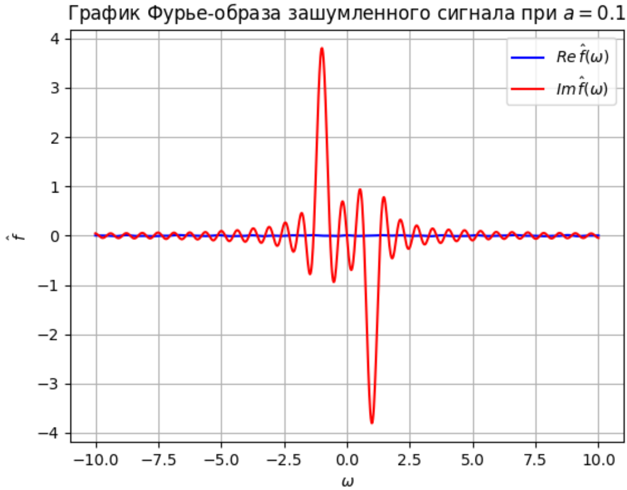


Рис. 11. График Фурье-образа зашумленной функции при $a = 0.1$*.*

Рис. 12. График Фурье-образа зашумленной функции при $a = 1$*.*

2 Задание. Линейные фильтры.

Рассмотрим сигнал

$$u = g + b \cdot (rand(size(t)) - 0.5) + c \cdot \sin(d \cdot t)$$

и выполним фильтрацию указанного сигнала, используя линейные фильтры.
Сигнал $g(t)$ также перепишем из лабораторной 3: зададимся числами $a = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$ и рассмотрим функцию $g(t) = a$ при $t \in [t_1, t_2]$ и $g(t) = 0$ при других t.

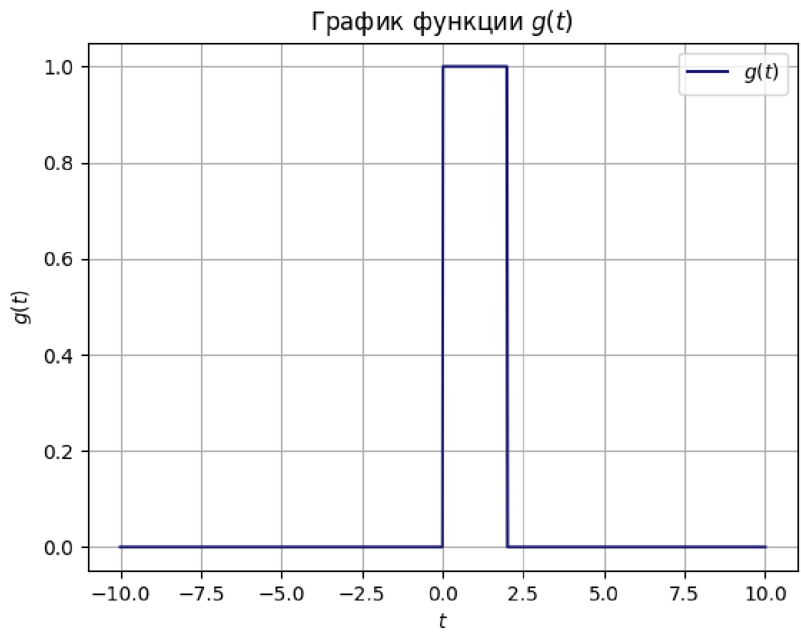


Рис. 13. Исходный график функции $g(t)$.

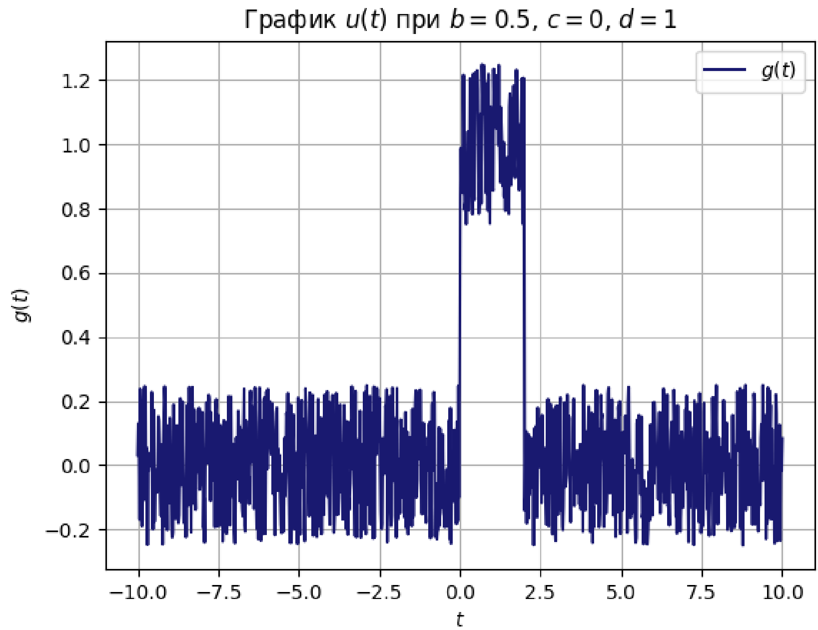


Рис. 14. График $u(t)$ при $b = 0.5$, $c = 0$, $d = 1$.

2.1 Фильтр первого порядка.

Пусть $c = 0$. Зададим постоянную времени $T > 0$ и пропустим сигнал u через линейный фильтр первого порядка

$$W_1(p) = \frac{1}{Tp + 1} \tag{2}$$

Заметим, что при малом значении параметра T шумы из сигнала практически не убираются (рисунок 15), но при увеличении значения коэффициента T график становится более гладким (рисунок 16).

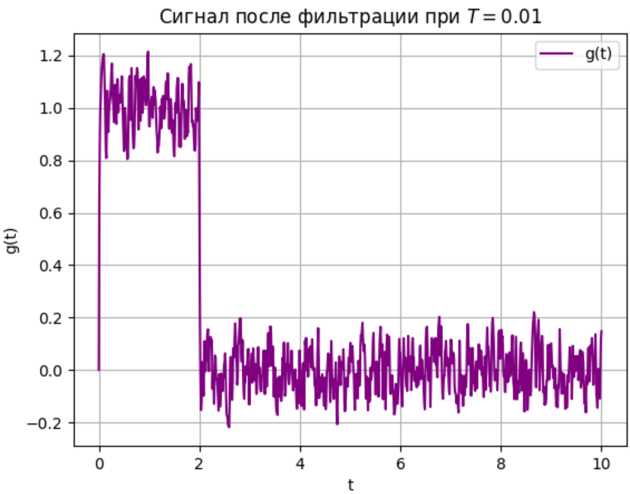


Рис. 15. График после фильтрации при $T = 0.01$.

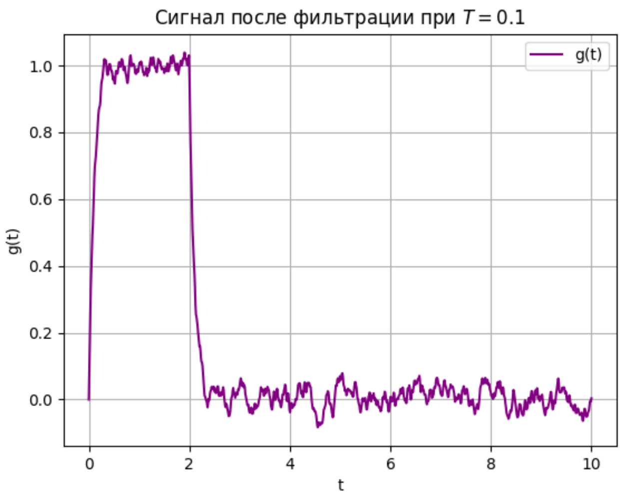


Рис. 16. График после фильтрации при $T = 0.1$.

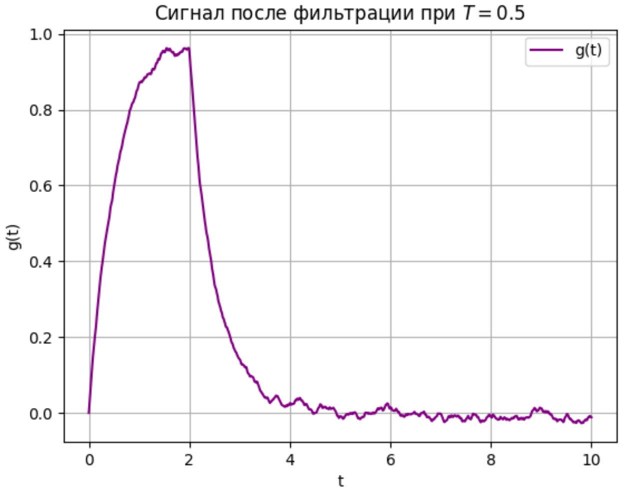


Рис. 17. График после фильтрации при $T = 0.5$.

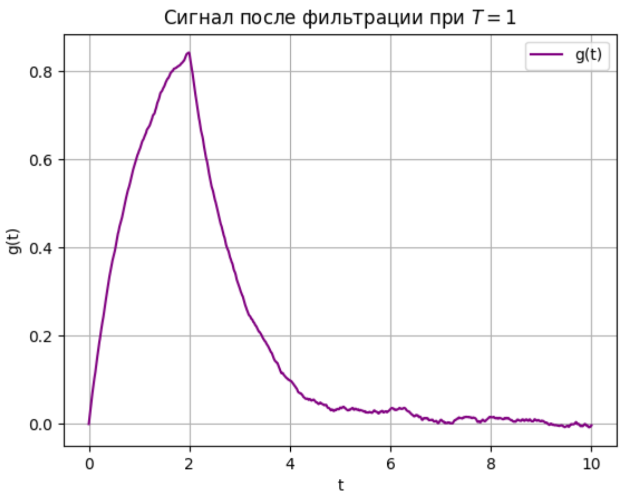


Рис. 18. График после фильтрации при $T = 1$.

При дальнейшем увеличении значения параметра T, начиная с $T = 1$ (рисунок 18), теряется точность передаваемого сигнала.

2.1.1 Сравнительные графики исходного, зашумленного и сигнала после фильтрации

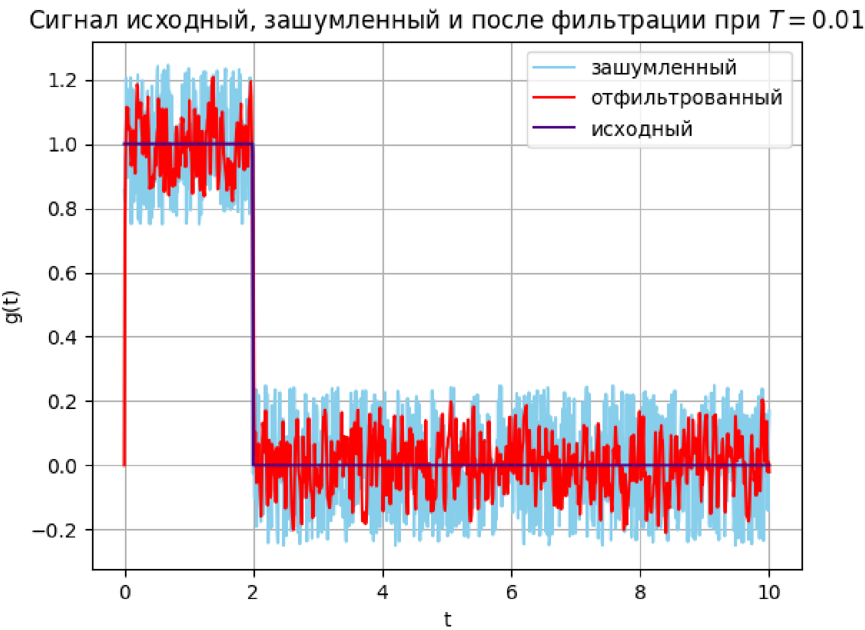


Рис. 19. Сравнительные графики при $T = 0.01$.

Далее, на рисунках 19-22 представлены сравнительные графики исходного сигнала $g(t)$, сигнала с шумами $u(t)$ и сигнала после фильтрации при разных значениях параметра T.

Рис. 20. Сравнительные графики при $T = 0.1$.

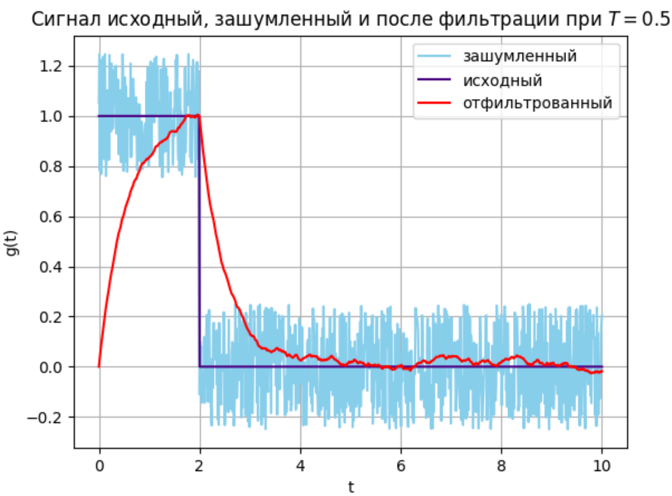


Рис. 21. Сравнительные графики при $T = 0.5$.

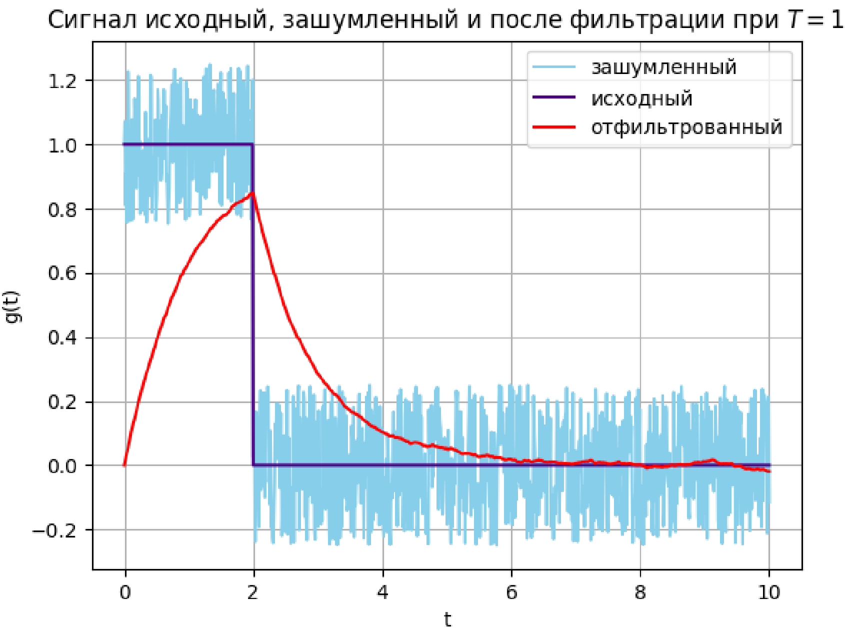


Рис. 22. Сравнительные графики при $T = 1$.

Наибольшее сходство фильтрованного сигнала с исходным достигается при $T = 0.1$, в чем можно убедиться, сравнив результаты, представленные на рисунках 19 - 22.

2.1.2 Модули Фурье-образов

Модули Фурье-образов исходного и фильтрованного сигналов наиболее близки друг к другу при небольших значениях T, например, $T = 0.01$ (рисунок 23) и $T = 0.1$ (рисунок 24). При дальнейшем возрастании параметра T модуль Фурье-образа фильтрованного сигнала становится все более гладким и отличным от исходного сигнала. Фильтр избавляет от более высоких частот и чем выше параметр T тем ниже модуль подавляемых частот.

Рис. 23. Модули Фурье-образов сигналов при $T = 0.01$.

Рис. 24. Модули Фурье-образов сигналов при $T = 0.1$.

Рис. 25. Модули Фурье-образов сигналов при $T = 0.5$.

Рис. 26. Модули Фурье-образов сигналов при $T = 1$.

2.1.3 Амплитудно-частотные характеристики фильтра

Построим также графики амплитудно-частотной характеристики линейного фильтра первого порядка.

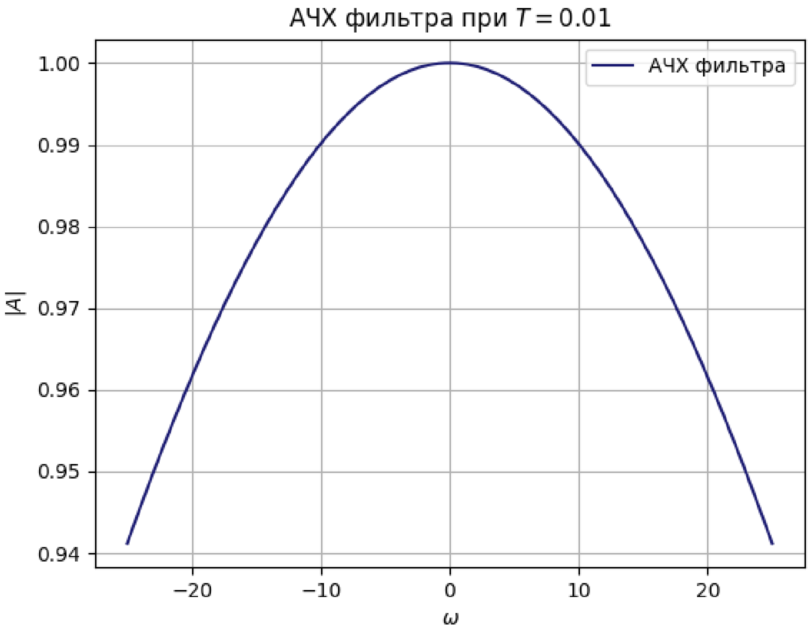


Рис. 27. АЧХ при $T = 0.01$.

Если опустить перпендикуляры на ось абсцисс из точек пересечения графика АЧХ с прямой $|A| = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7$, получим значения частот, выше которых частоты подавляются фильтром. Нетрудно заметить, что в случае $T = 0.01$ подавляются очень высокие значения частот, поэтому разницы между сигнала с шумом и фильтрованным сигналом практически нет (рисунок 19). Наилучший результат был достигнут при $T = 0.1$, в этом случает подавляются частоты выше 7 по модулю, при увеличении значения T (рисунки 29-30) диапазон подавляемых частот становится настолько большим, что теряется сходство исходного сигнала и сигнала после фильтрации.

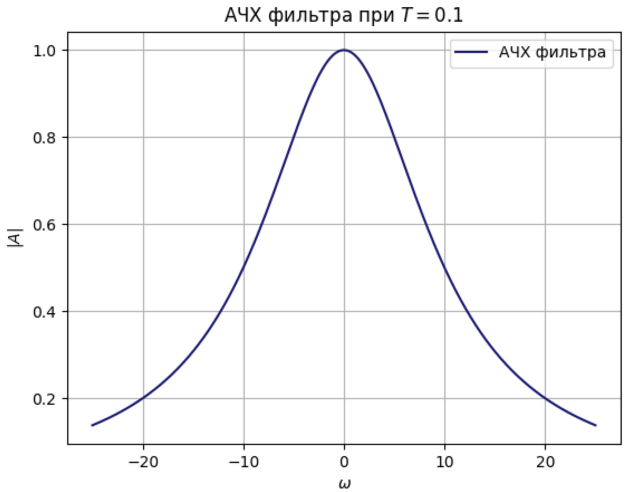


Рис. 28. АЧХ при $T = 0.1$.

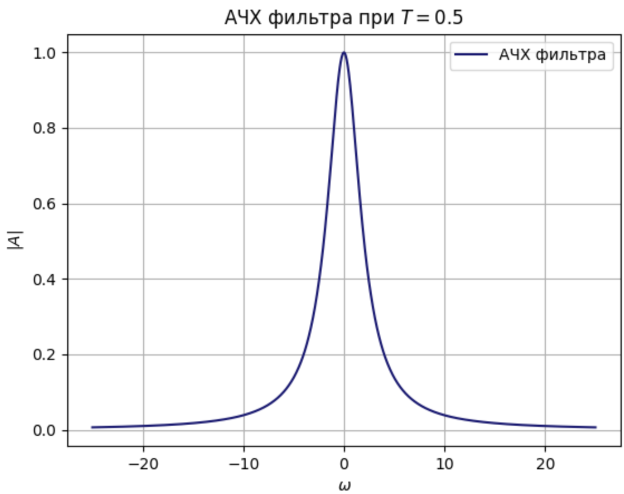


Рис. 29. АЧХ при $T = 0.5$.

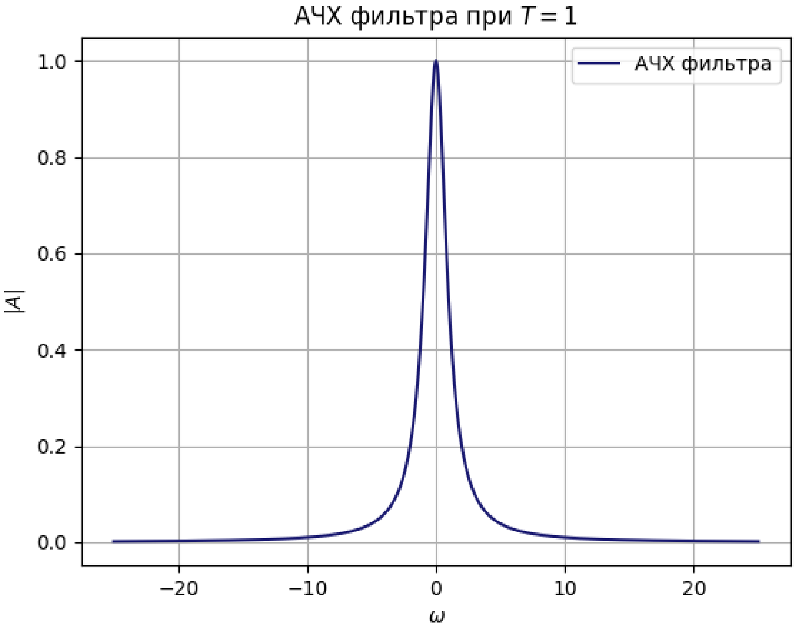


Рис. 30. АЧХ при $T = 1$.

2.1.4 Влияние параметра a

Рассмотрим, как изменится результат фильтрации при $a = \{0.1, 0.5, 1, 2\}$ при $T = \{0.01, 0.1, 0.5, 1\}$.

Параметр a существенно не влияет на успешность фильтрации: при $T = 0.01$ – очистки от шумов практически не происходит, при $T = 1$ график получается слишком пологим, а наиболее оптимальный результат немного отличается, например, при $a = 0.1$ лучшее значение параметра $T = 0.5$, для значений $a = 0.5$, $a = 1$, $a = 2$ подходит $T = 0.1$.

a)

b)

c)

d)

Рис. 31. Сравнительные графики исходного и фильтрованного сигналов для $a = 0.1$ *при: a)* $T = 0.01$, *b)* $T = 0.1$, *c)* $T = 0.5$, *d)* $T = 1$.

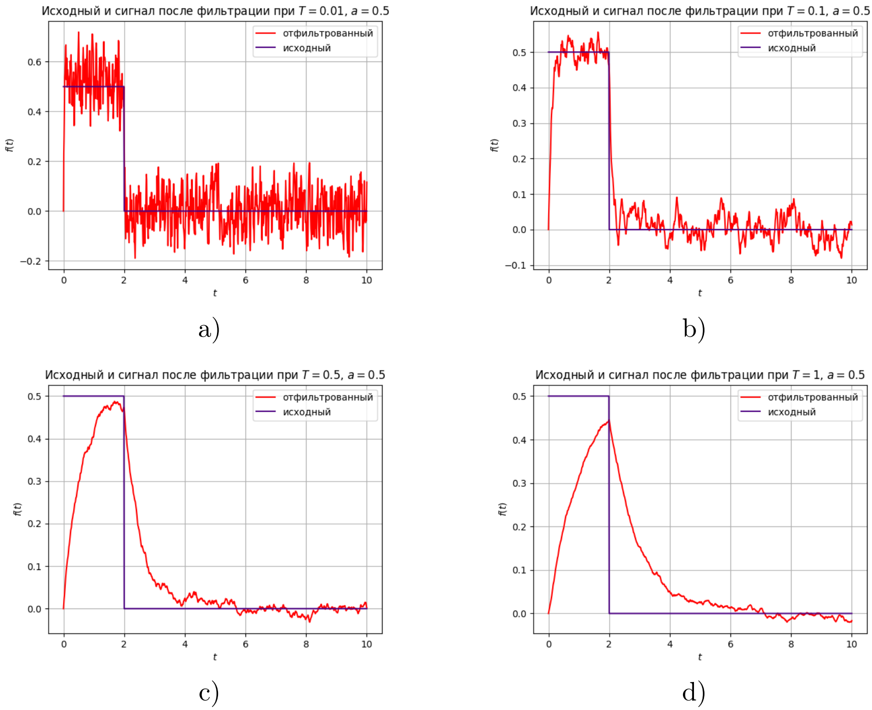


Рис. 32. Сравнительные графики исходного и фильтрованного сигналов для $a = 0.5$ при: a) $T = 0.01$, b) $T = 0.1$, c) $T = 0.5$, d) $T = 1$.

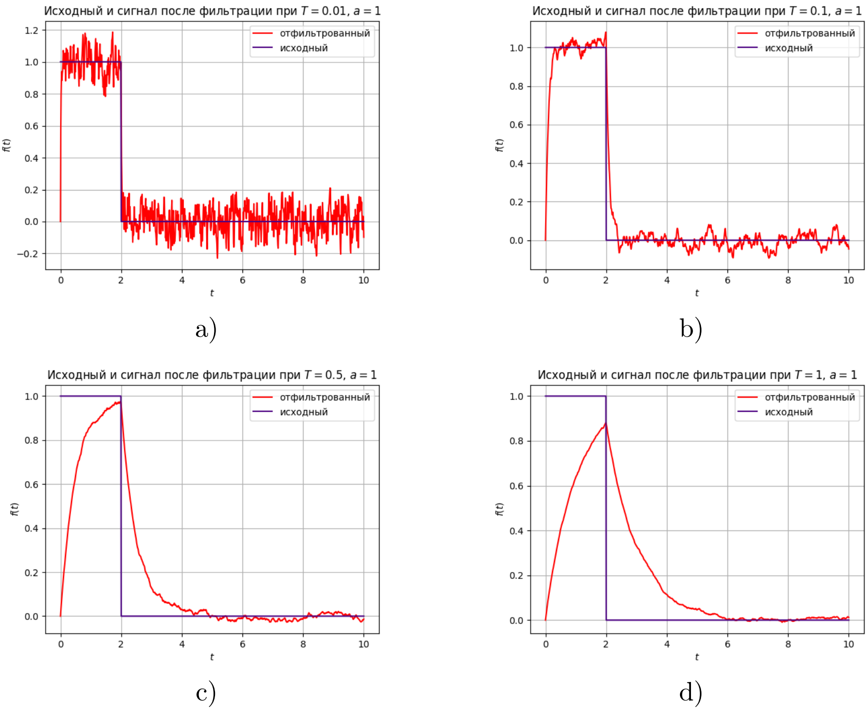
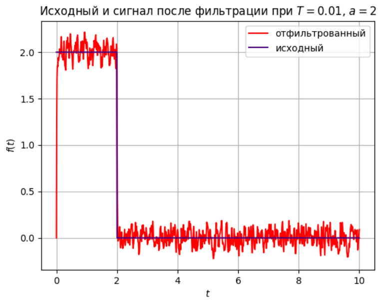
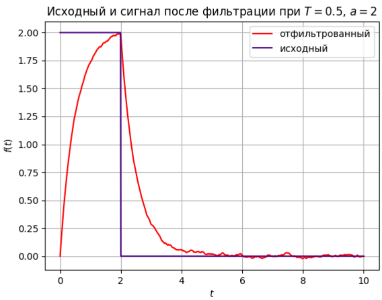


Рис. 33. Сравнительные графики исходного и фильтрованного сигналов для $a = 1$ *при: a)* $T = 0.01$, *b)* $T = 0.1$, *c)* $T = 0.5$, *d)* $T = 1$.

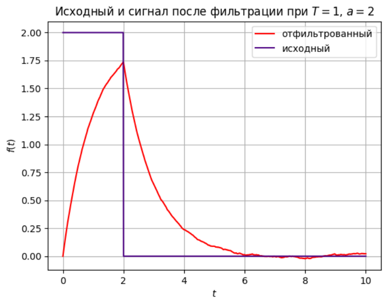


a)

b)



c)



d)

Рис. 34. Сравнительные графики исходного и фильтрованного сигналов для $a = 2$ при: a) $T = 0.01$, b) $T = 0.1$, c) $T = 0.5$, d) $T = 1$.

2.2 Специальный фильтр

3 Задание. Сглаживание биржевых линий.

Для визуализации был написан код на языке *Python*.
Код расположен на **GitHub**.