Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 2 "Преобразование Фурье"

по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2024

В заданиях 1 и 2 используется унитарное преобразование Фурье к угловой частоте ω.

1 Задание. Вещественное.

Все функции ниже $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1.1 Прямоугольная функция

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \le b, \\ 0, & |t| > b \end{cases} \tag{1}$$

1.1.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

Фурье-образ функции $f(t)$ будем находить по формуле:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{2}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} a e^{-i\omega t} dt = \frac{a(e^{-i\omega b} - e^{i\omega b})}{-i\omega\sqrt{2\pi}} \tag{3}$$

1.1.2 Построение графиков функции $f(t)$

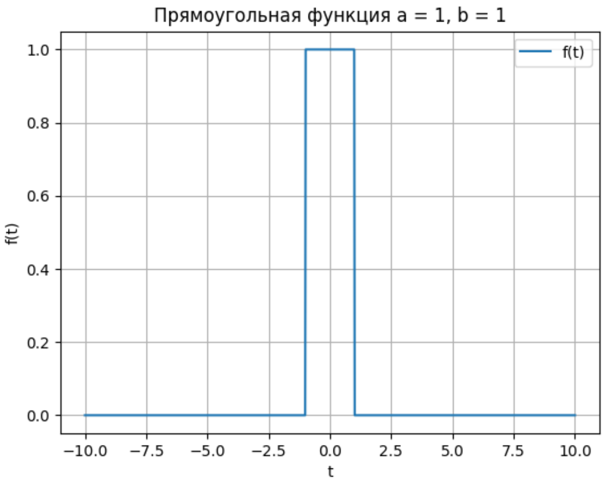

Рис. 1. График $f(t)$ при $a = 1$, $b = 1$.

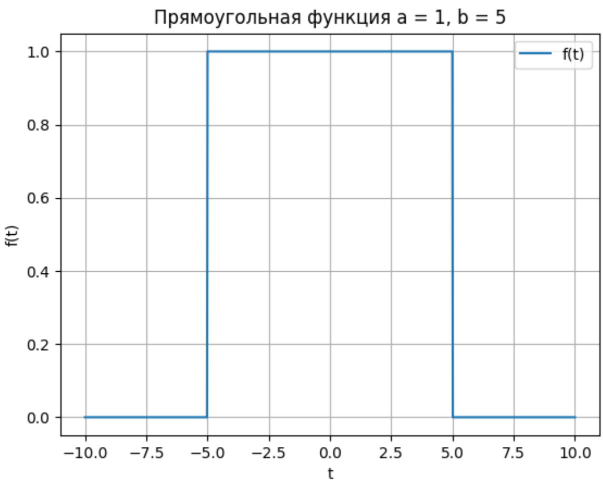

Рис. 2. График $f(t)$ при $a = 1$, $b = 5$.

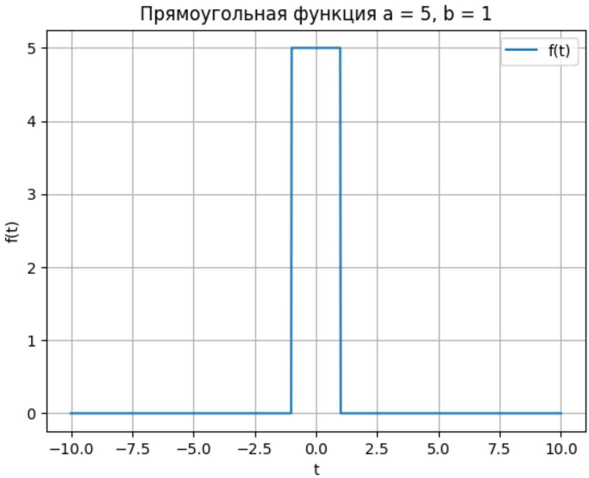

Рис. 3. График $f(t)$ при $a = 5$, $b = 1$.

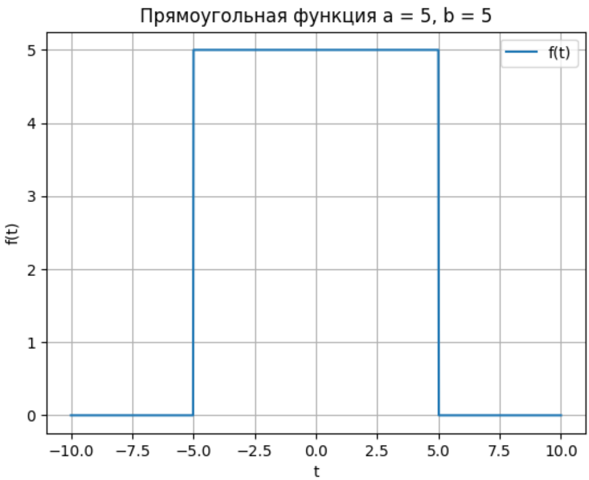

Рис. 4. График $f(t)$ при $a = 5$, $b = 5$.

1.1.3 Построение графиков Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$

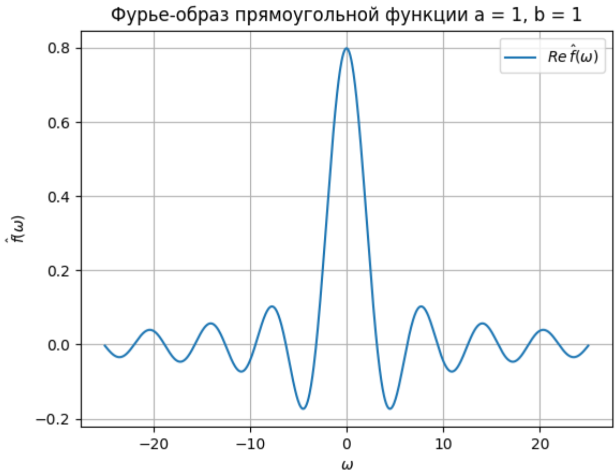

Рис. 5. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 1$, $b = 1$.

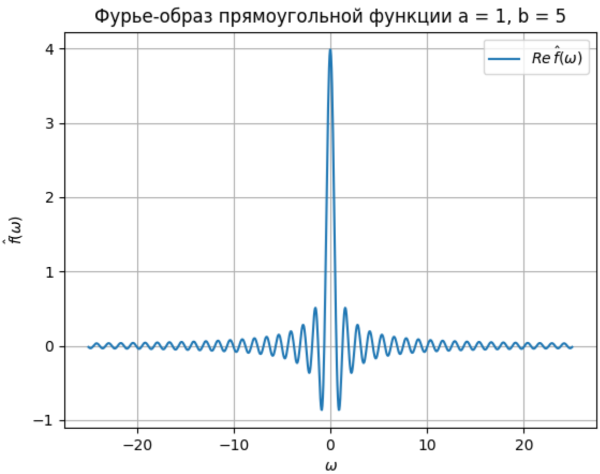

Рис. 6. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 1$, $b = 5$.

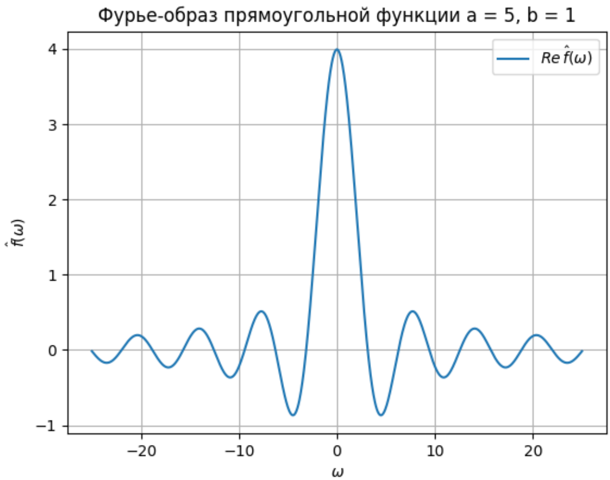

Рис. 7. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 5$, $b = 1$.

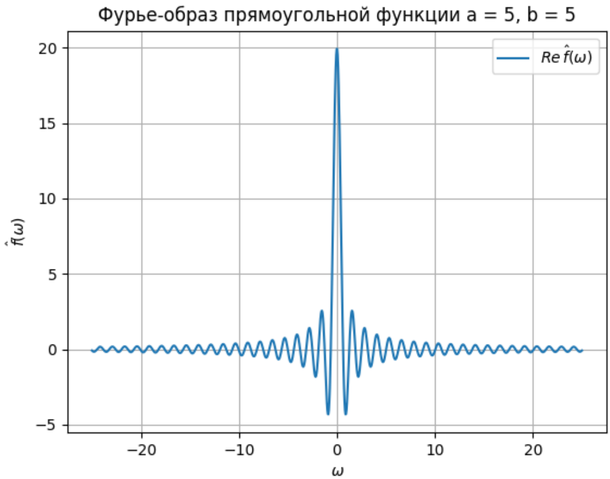

Рис. 8. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 5$, $b = 5$.

1.1.4 Проверка равенства Парсеваля

Таблица 1. Равенство Парсеваля для прямоугольной функции.

n	a	b	$\|f\|^2 = \int_{-d}^{d} \|f(t)\|^2 dt$	$\|\hat{f}\|^2 = \int_{-d}^{d} \|\hat{f}(\omega)\|^2 d\omega$
1	1	1	2.000	2.018
2	1	5	10.000	10.001
3	5	1	50.000	50.445
4	5	5	250.000	250.037

Для вычисления квадратов норм функции и ее образа интегрирование велось от -100 до 100, то есть константа $d = 100$ из таблицы 1. Заметим, что с точностью до целых равенства Парсеваля выполнены для всех рассматриваемых значений параметров a и b.

1.1.5 Анализ результатов

Параметр a влияет на максимум функции, при $a = 1$ максимальное значение функции 1, при $a = 5$ – аналогично, максимум равен 5. Параметр b влияет на ширину "прямоугольной"области графика исходной функции, при $b = 1$ максимальное значение функция принимает на отрезке $[-1; 1]$, при $b = 5$ – аналогично, максимум будет на отрезке $[-5; 5]$.
На графиках Фурье-образа заметно, что параметр b влияет на частоту колебаний функции и на ширину центрального всплеска: при $b = 1$ частота ниже и ширина больше, чем при $b = 5$. Вместе параметры a и b влияют на амплитуду колебаний функции, при увеличении суммы a и b амплитуда возрастает, причем для двух разных наборов $a = 1$, $b = 5$ и $a = 5$, $b = 1$ амплитуда одинакова.
Принцип неопределенности Гейзенберга о том, что невозможно одновременно точно определить координату и импульс электрона в атоме, здесь заключается в том, графикам исходной функции с наименьшими промежутками максимума соответствуют Фурье-образы с наименьшей частотой колебаний.

1.2 Треугольная функция

$$f(t) = \begin{cases} a - |at/b|, & |t| \leq b, \\ 0, & |t| > b \end{cases} \tag{4}$$

1.2.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} (a - |at/b|) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} a e^{-i\omega t} dt -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} |at/b| e^{-i\omega t} dt = \frac{a(e^{-i\omega b} - e^{i\omega b})}{-i\omega\sqrt{2\pi}} + \frac{a}{b\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-b}^{0} t e^{-i\omega t} dt - \int\limits_{0}^{b} t e^{-i\omega t} dt \right) \boxed{=}$$

Отдельно вычислим неопределенный интеграл:

$$\int t e^{-i\omega t} dt = ||\, u = t,\ dv = e^{-i\omega t} dt, du = dt, v = -\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} \,|| =$$

$$= -\frac{t e^{-i\omega t}}{i\omega} + \int \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} dt = -\frac{t e^{-i\omega t}}{i\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} + C = \frac{1 + i\omega t}{\omega^2 e^{i\omega t}} + C \tag{5}$$

И два соотвествующих определенных интеграла:

$$\int\limits_{-b}^{0} t e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{1 + i\omega t}{\omega^2 e^{i\omega t}} \right|_{-b}^{0} = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1 - i\omega b}{\omega^2 e^{-i\omega b}} \tag{6}$$

$$\int\limits_{0}^{b} t e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{1 + i\omega t}{\omega^2 e^{i\omega t}} \right|_{0}^{b} = \frac{1 + i\omega b}{\omega^2 e^{i\omega b}} - \frac{1}{\omega^2} \tag{7}$$

$$\int\limits_{-b}^{0} t e^{-i\omega t} dt - \int\limits_{0}^{b} t e^{-i\omega t} dt = \frac{2}{\omega^2} - \frac{1 - i\omega b}{\omega^2 e^{-i\omega b}} - \frac{1 + i\omega b}{\omega^2 e^{i\omega b}} \tag{8}$$

$$\boxed{=}\frac{a(e^{-i\omega b}-e^{i\omega b})}{-i\omega\sqrt{2\pi}}+\frac{a}{b\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{\omega^2}-\frac{1-i\omega b}{\omega^2 e^{-i\omega b}}-\frac{1+i\omega b}{\omega^2 e^{i\omega b}}\right)=$$
$$=\frac{a}{b\omega^2\sqrt{2\pi}}\left(i\omega b(e^{-i\omega b}-e^{i\omega b})+2-e^{i\omega b}+i\omega b e^{i\omega b}-e^{-i\omega b}-i\omega b e^{-i\omega b}\right)=$$
$$=\frac{a}{b\omega^2\sqrt{2\pi}}\left(i\omega b e^{-i\omega b}-i\omega b e^{i\omega b}+2-e^{i\omega b}+i\omega b e^{i\omega b}-e^{-i\omega b}-i\omega b e^{-i\omega b}\right)=$$
$$=\frac{a}{b\omega^2\sqrt{2\pi}}\left(2-e^{i\omega b}-e^{-i\omega b}\right) \quad (9)$$

1.2.2 Построение графиков функции $f(t)$

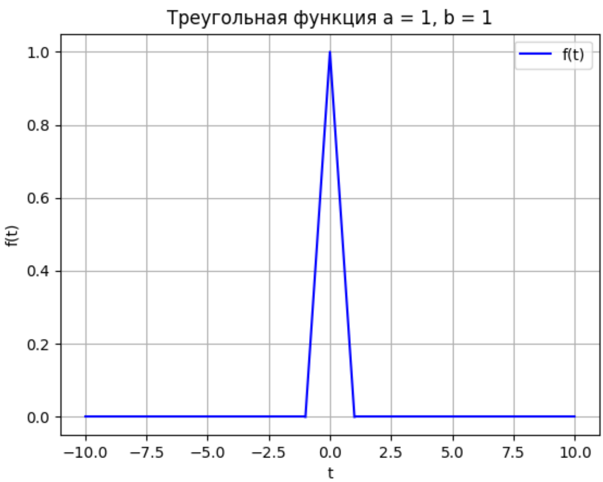

Рис. 9. График $f(t)$ при $a = 1$, $b = 1$.

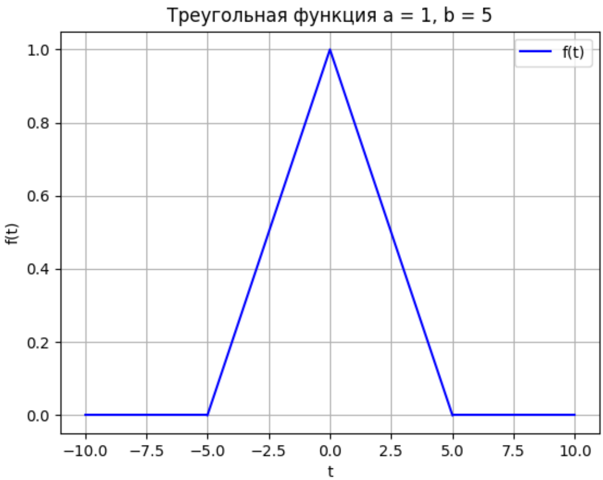

Рис. 10. График $f(t)$ при $a = 1$, $b = 5$.

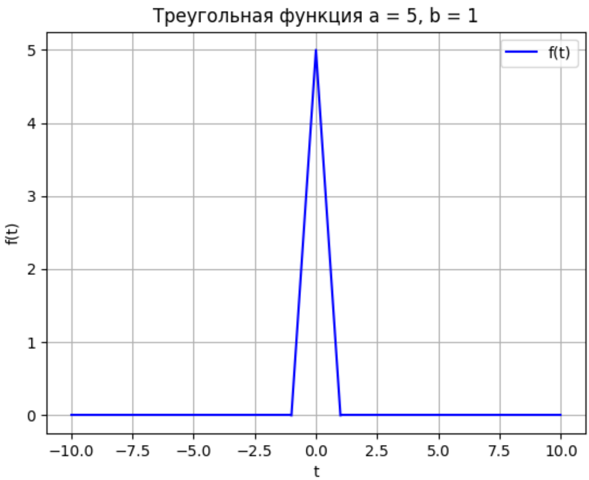

Рис. 11. График $f(t)$ при $a = 5$, $b = 1$.

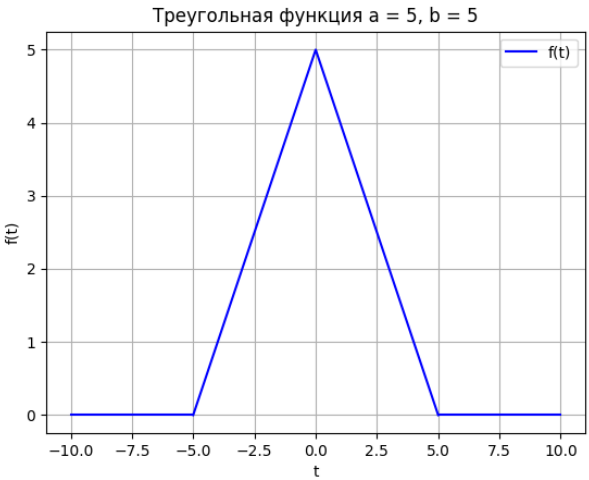

Рис. 12. График $f(t)$ при $a = 5,\ b = 5$.

1.2.3 Построение графиков Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$

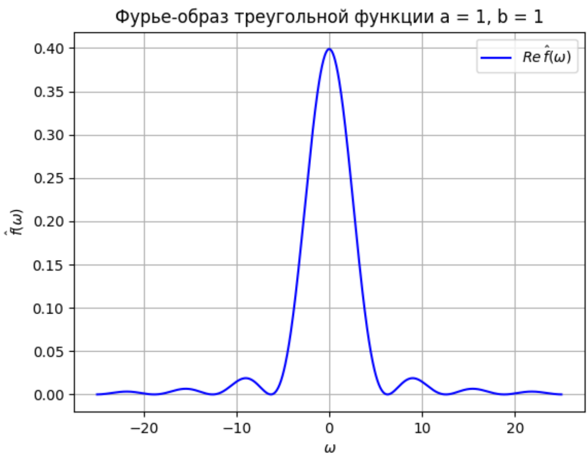

Рис. 13. График $\hat{f}(t)$ при $a = 1,\ b = 1$.

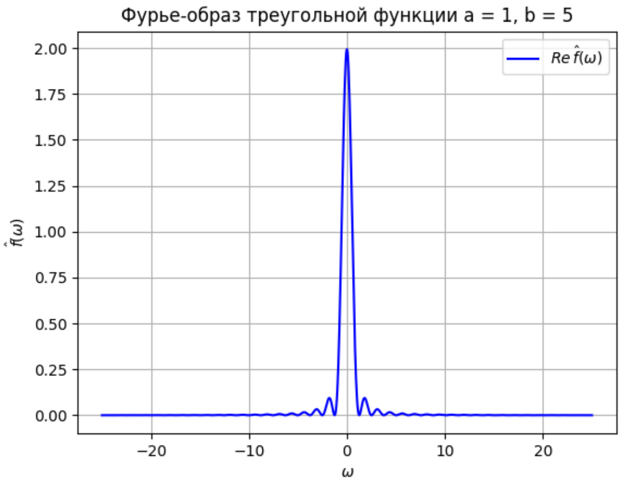

Рис. 14. График $\hat{f}(t)$ при $a = 1$, $b = 5$.

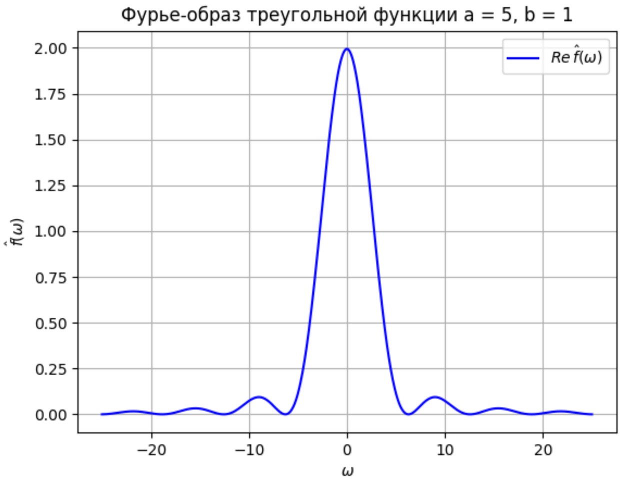

Рис. 15. График $\hat{f}(t)$ при $a = 5$, $b = 1$.

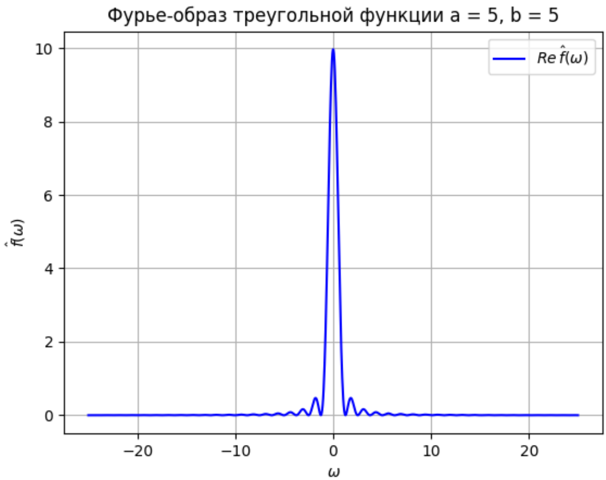

Рис. 16. График $\hat{f}(t)$ при $a = 5$, $b = 5$.

1.2.4 Проверка равенства Парсеваля

Таблица 2. Равенство Парсеваля для треугольной функции.

n	a	b	$\|f\|^2 = \int_{-d}^{d} \|f(t)\|^2 dt$	$\|\hat{f}\|^2 = \int_{-d}^{d} \|\hat{f}(\omega)\|^2 d\omega$
1	1	1	0.6659	0.6641
2	1	5	3.329	3.323
3	5	1	16.65	16.60
4	5	5	83.25	83.08

Заметим, что числа так же сходятся с точностью до целых, для небольших значений, с точностью до сотых (см. наборы $(1, 1)$, $(1, 5)$ вида (a, b) в таблице 2).

1.2.5 Анализ результатов

Параметр b соотвествует отрезку, на котором расположено основание треугольника, образованного функцией: при $b = 1$ основание $[-1; 1]$, при $b = 5$ – аналогично $[-5; 5]$. Параметр a отвечает за максимум функции: при $a = 1$ – максимум 1, при $a = 5$, соотвественно, в 5.
Для графика Фурье-образа параметр b определяет частоту колебаний графика, при $b = 1$ частота ниже, чем при $b = 5$. Вместе параметры a и b влияют на амплитуду колебаний функции, при увеличении суммы a и b амплитуда возрастает, причем для двух разных наборов $a = 1$, $b = 5$ и $a = 5$, $b = 1$ амплитуда одинакова.
Принцип неопределенности Гейзенберга о том, что невозможно одновременно точно определить координату и импульс электрона в атоме, здесь заключается в том, графикам исходной функции с наименьшими промежутками максимума соответствуют Фурье-образы с наименьшей частотой колебаний.

1.3 Кардинальный синус

$$f(t) = asinc(bt) \tag{10}$$

1.3.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

Результат получен с помощью калькулятора $Wolfram$.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} asinc(bt)e^{-i\omega t}dt = \frac{a}{|b|}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \begin{cases} 0, & \left(\frac{b}{\omega}\right)^2 \leq 1 \\ 1 & (otherwise) \end{cases} \tag{11}$$

1.3.2 Построение графиков функции $f(t)$

Рис. 17. График $f(t)$ при $a = 1$, $b = 1$.

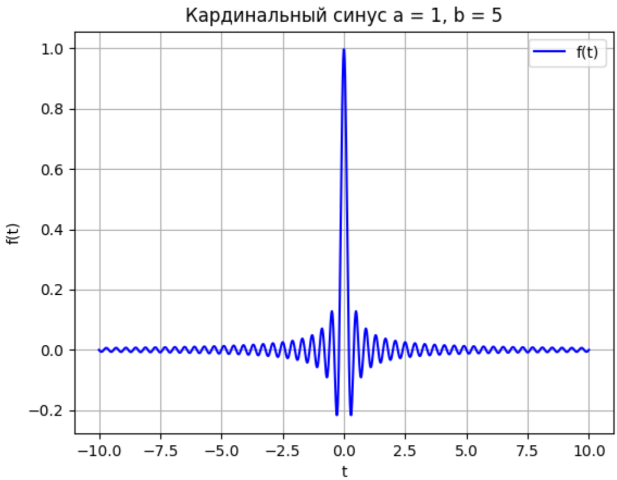

Рис. 18. График $f(t)$ при $a = 1$, $b = 5$.

Рис. 19. График $f(t)$ при $a = 5$, $b = 1$.

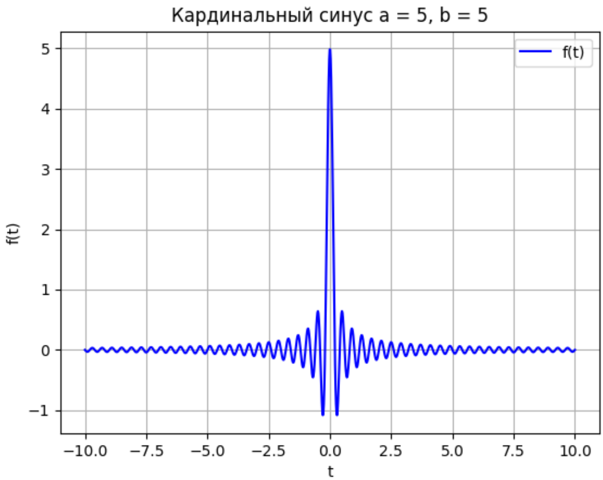

Рис. 20. График $f(t)$ при $a = 5,\ b = 5$.

1.3.3 Построение графиков Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$

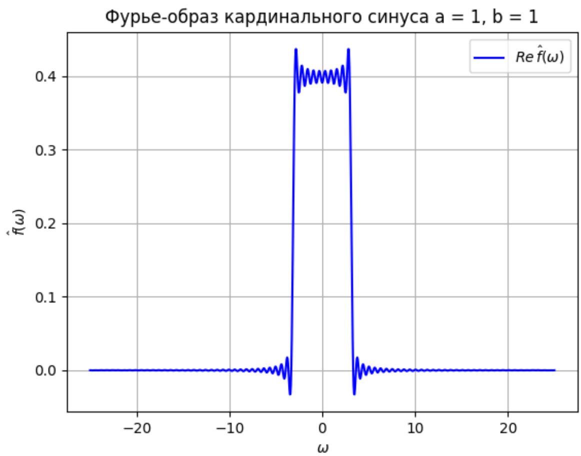

Рис. 21. График $\hat{f}(t)$ при $a = 1,\ b = 1$.

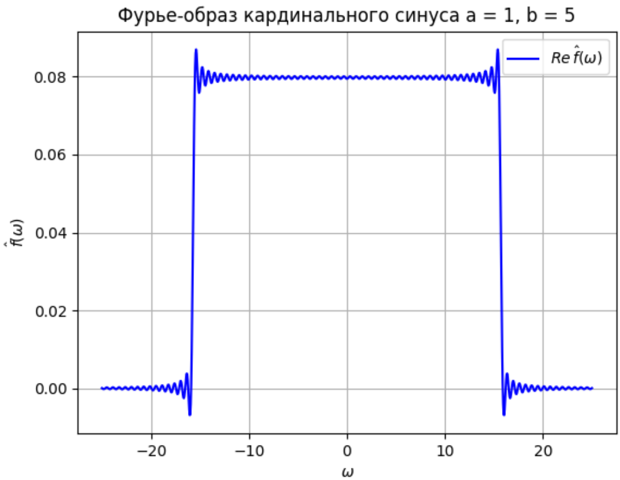

Рис. 22. График $\hat{f}(t)$ при $a = 1,\ b = 5$.

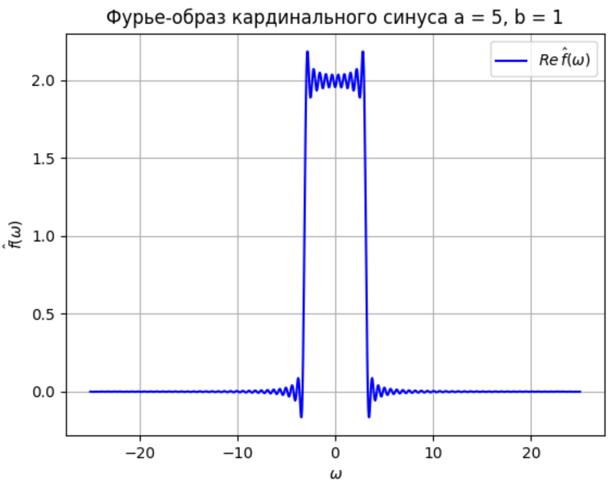

Рис. 23. График $\hat{f}(t)$ при $a = 5,\ b = 1$.

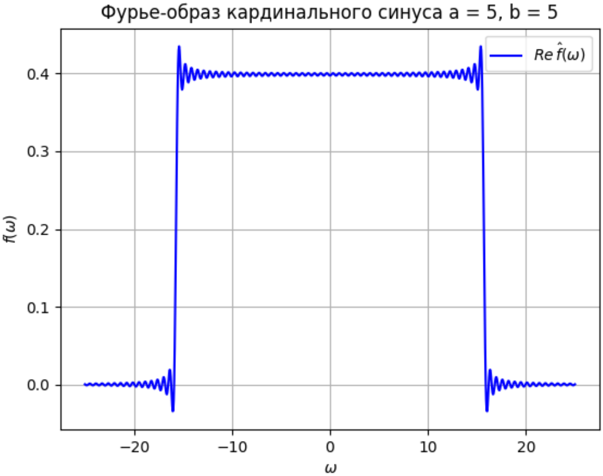

Рис. 24. График $\hat{f}(t)$ при $a = 5$, $b = 5$.

1.3.4 Проверка равенства Парсеваля

Таблица 3. Равенство Парсеваля для кардинального синуса.

n	a	b	$\|f\|^2 = \int_{-d}^{d} \|f(t)\|^2 dt$	$\|\hat{f}\|^2 = \int_{-d}^{d} \|\hat{f}(\omega)\|^2 d\omega$
1	1	1	0.9979	0.9896
2	1	5	0.1994	0.1989
3	5	1	24.94	24.74
4	5	5	4.984	4.973

С точностью до целых значения совпадают, более малые – с точностью до десятых или сотых. Равенство Парсеваля выполнено для всех рассматриваемых наборов (a, b).

1.3.5 Анализ результатов

1.4 Функция Гаусса

$$f(t) = ae^{-bt^2} \tag{12}$$

1.4.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

Результат получен с помощью калькулятора $Wolfram$.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ae^{-bt^2} e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}} \tag{13}$$

1.4.2 Построение графиков функции $f(t)$

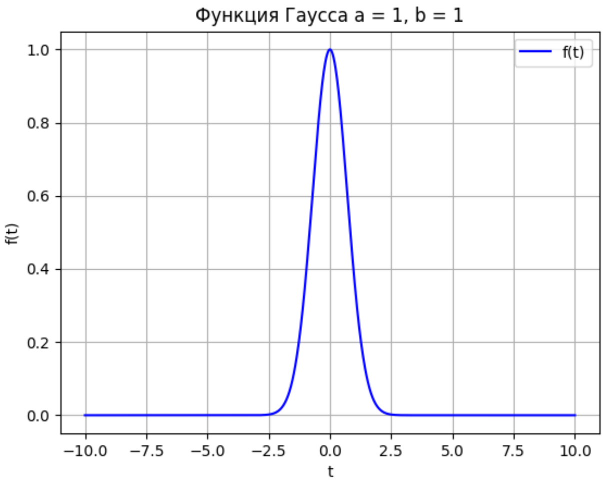

Рис. 25. График $f(t)$ при $a = 1$, $b = 1$.

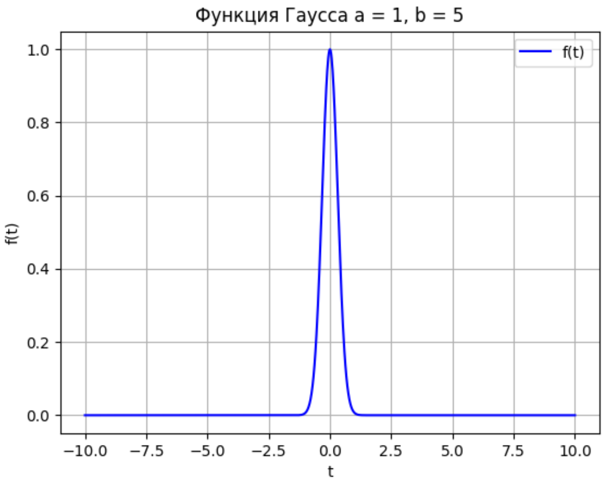

Рис. 26. График $f(t)$ при $a = 1$, $b = 5$.

Рис. 27. График $f(t)$ при $a = 5$, $b = 1$.

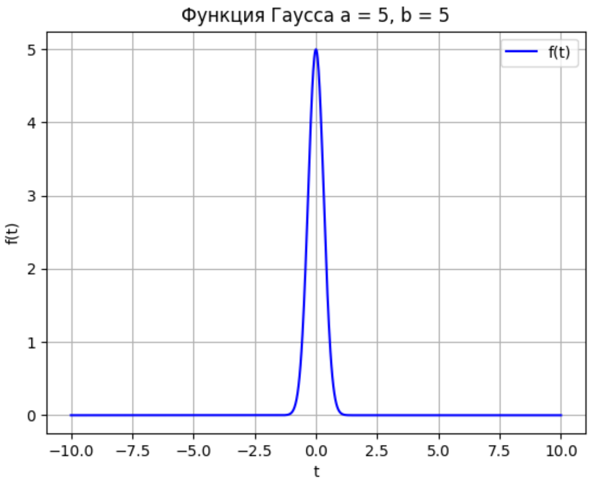

Рис. 28. График $f(t)$ при $a = 5$, $b = 5$.

1.4.3 Построение графиков Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$

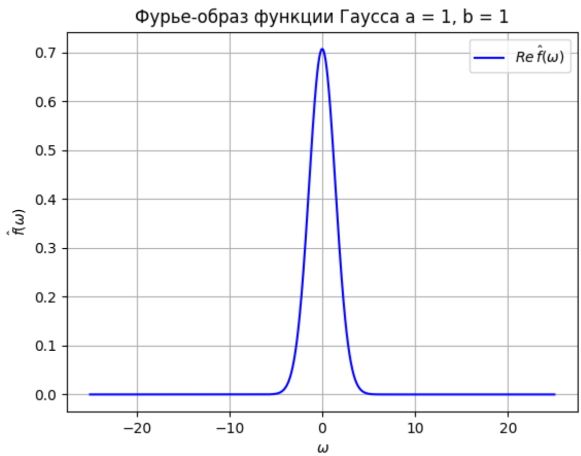

Рис. 29. График $\hat{f}(t)$ при $a = 1$, $b = 1$.

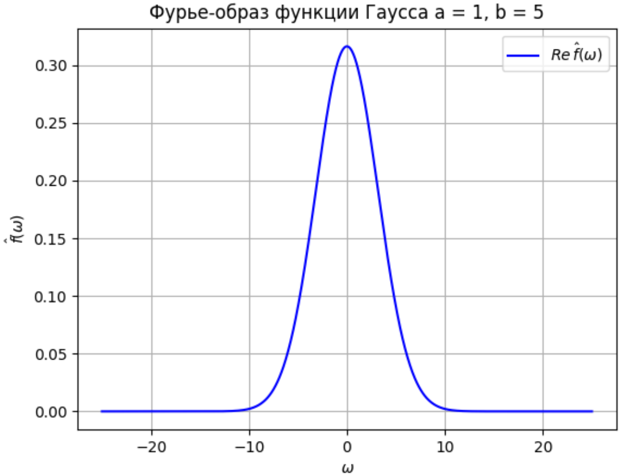

Рис. 30. График $\hat{f}(t)$ при $a = 1,\ b = 5$.

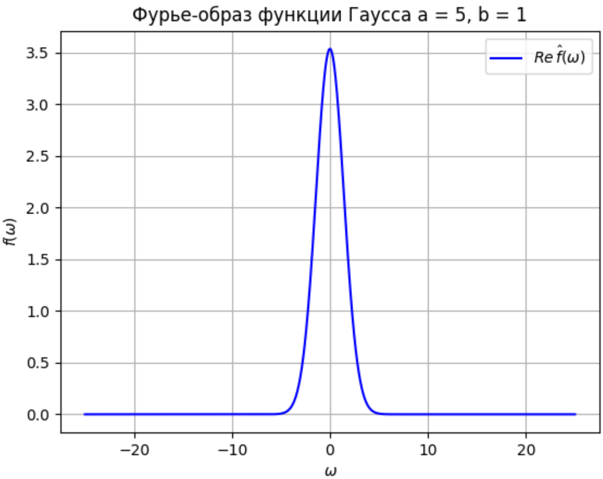

Рис. 31. График $\hat{f}(t)$ при $a = 5,\ b = 1$.

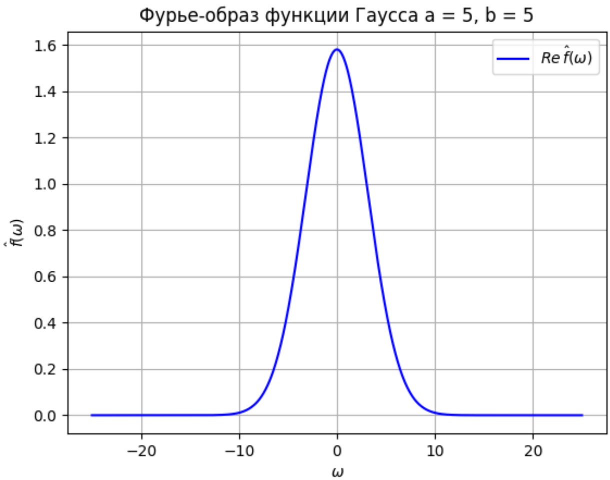

Рис. 32. График $\hat{f}(t)$ при $a = 5$, $b = 5$.

1.4.4 Проверка равенства Парсеваля

Таблица 4. Равенство Парсеваля для функции Гаусса.

n	a	b	$\|f\|^2 = \int_{-d}^{d} \|f(t)\|^2 dt$	$\|\hat{f}\|^2 = \int_{-d}^{d} \|\hat{f}(\omega)\|^2 d\omega$
1	1	1	1.252	1.250
2	1	5	0.5599	0.5588
3	5	1	31.30	31.24
4	5	5	13.99	13.97

Равенство Парсеваля выполнено с высокой степенью точности.

1.4.5 Анализ результатов

1.5 Двустороннее затухание

$$f(t) = ae^{-b|t|} \tag{14}$$

1.5.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ae^{-b|t|}e^{-i\omega t}dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{bt}e^{-i\omega t}dt + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-bt}e^{-i\omega t}dt \right) =$$
$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(b-i\omega)t}dt + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(b+i\omega)t}dt \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{(b-i\omega)t}}{b-i\omega}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-(b+i\omega)t}}{-(b+i\omega)}\Bigg|_{0}^{\infty} \right) =$$
$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega} \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{b+i\omega+b-i\omega}{b^2+\omega^2} = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}(b^2+\omega^2)} \tag{15}$$

1.5.2 Построение графиков функции $f(t)$

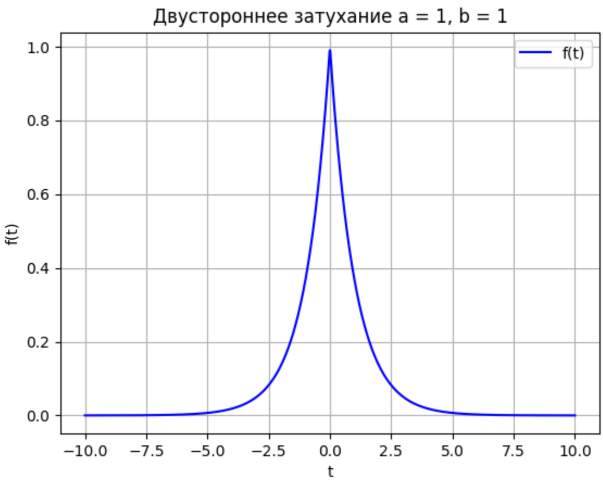

Рис. 33. График $f(t)$ при $a = 1$, $b = 1$.

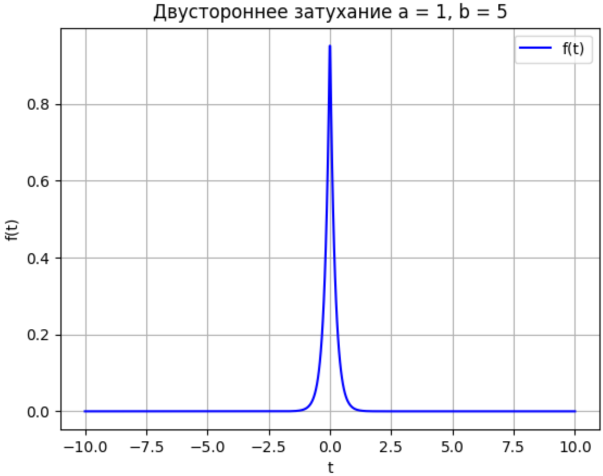

Рис. 34. График $f(t)$ при $a = 1$, $b = 5$.

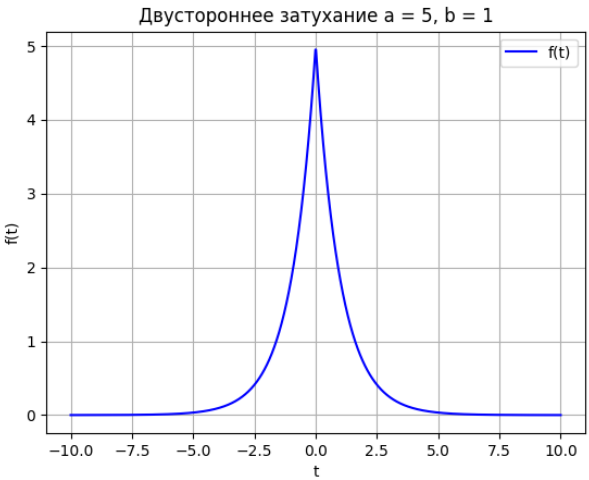

Рис. 35. График $f(t)$ при $a = 5$, $b = 1$.

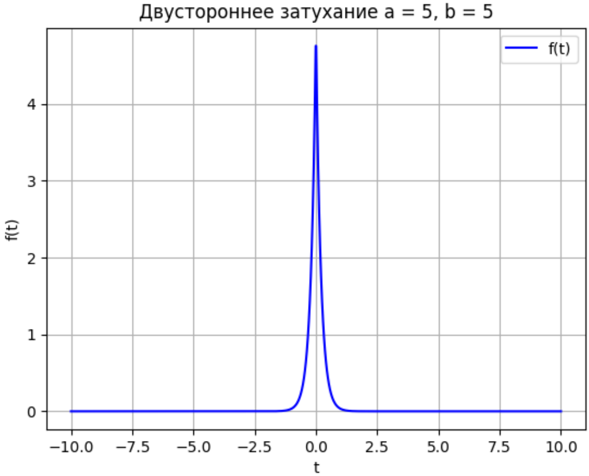

Рис. 36. График $f(t)$ при $a = 5$, $b = 5$.

1.5.3 Построение графиков Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$

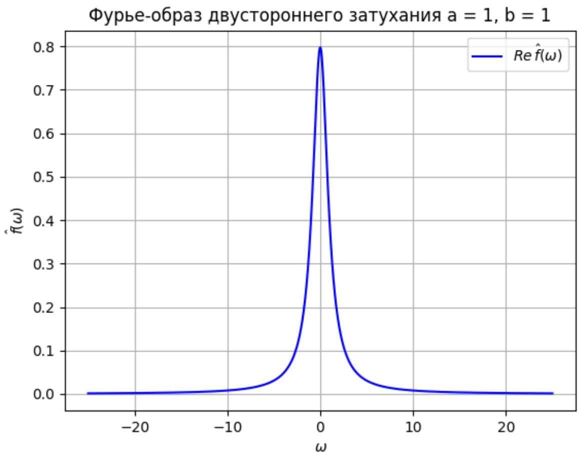

Рис. 37. График $\hat{f}(t)$ при $a = 1$, $b = 1$.

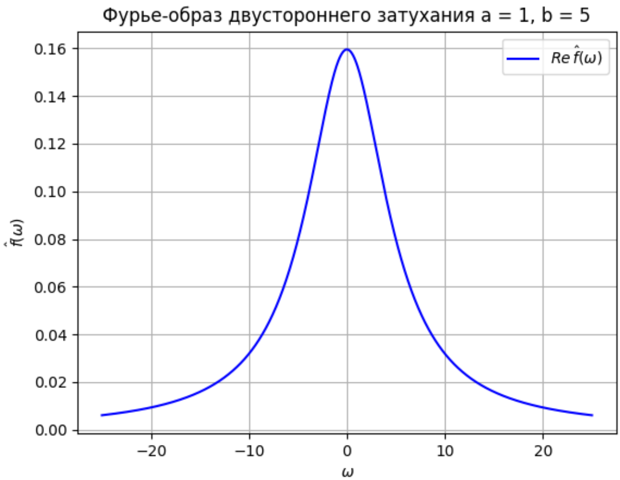

Рис. 38. График $\hat{f}(t)$ при $a = 1,\ b = 5$.

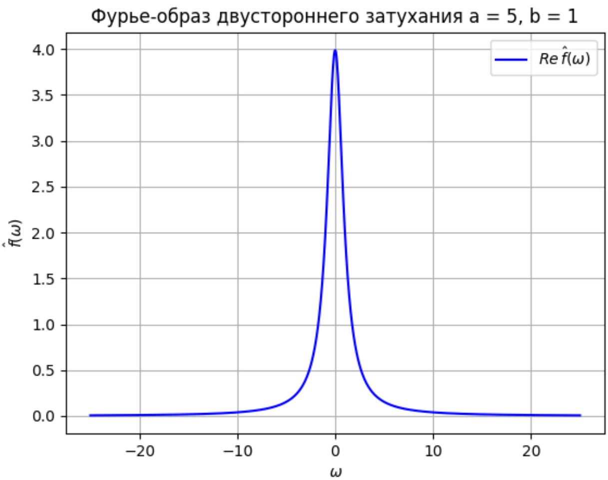

Рис. 39. График $\hat{f}(t)$ при $a = 5,\ b = 1$.

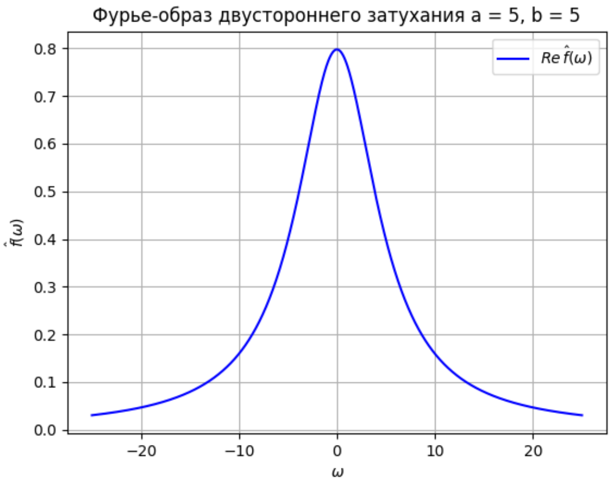

Рис. 40. График $\hat{f}(t)$ при $a = 5$, $b = 5$.

1.5.4 Проверка равенства Парсеваля

Таблица 5. Равенство Парсеваля для двустороннего затухания.

n	a	b	$\|f\|^2 = \int_{-d}^{d} \|f(t)\|^2 dt$	$\|\hat{f}\|^2 = \int_{-d}^{d} \|\hat{f}(\omega)\|^2 d\omega$
1	1	1	0.9924	0.9966
2	1	5	0.1700	0.1977
3	5	1	24.81	24.92
4	5	5	4.249	4.943

Как и в предыдущих случаях, значения норм оказались достаточно близки для того, чтобы считать равенство Парсеваля выполненным для всех рассматриваемых наборов значений параметров (a, b).

1.5.5 Анализ результатов

Для визуализации был написан код на языке *Python*.
Код расположен на **GitHub**.