Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 2
"Преобразование Фурье"

по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2024

В заданиях 1 и 2 используется унитарное преобразование Фурье к угловой частоте ω.

1 Задание. Вещественное.

Все функции ниже $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1.1 Прямоугольная функция

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \le b, \\ 0, & |t| > b \end{cases} \tag{1}$$

1.1.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

Фурье-образ функции $f(t)$ будем находить по формуле:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{2}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} ae^{-i\omega t}dt = \frac{a(e^{-i\omega b} - e^{i\omega b})}{-i\omega\sqrt{2\pi}} \tag{3}$$

1.2 Треугольная функция

$$f(t) = \begin{cases} a - |at/b|, & |t| \le b, \\ 0, & |t| > b \end{cases} \tag{4}$$

1.2.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} (a - |at/b|) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} a e^{-i\omega t} dt -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} |at/b| e^{-i\omega t} dt = \frac{a(e^{-i\omega b} - e^{i\omega b})}{-i\omega\sqrt{2\pi}} + \frac{a}{b\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-b}^{0} t e^{-i\omega t} dt - \int\limits_{0}^{b} t e^{-i\omega t} dt \right) \boxed{=}$$

Отдельно вычислим неопределенный интеграл:

$$\int t e^{-i\omega t} dt = ||\, u = t,\, dv = e^{-i\omega t} dt, du = dt, v = -\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} \,|| =$$

$$= -\frac{t e^{-i\omega t}}{i\omega} + \int \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} dt = -\frac{t e^{-i\omega t}}{i\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} + C = \frac{1 + i\omega t}{\omega^2 e^{i\omega t}} + C \tag{5}$$

И два соотвествующих определенных интеграла:

$$\int\limits_{-b}^{0} t e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{1 + i\omega t}{\omega^2 e^{i\omega t}} \right|_{-b}^{0} = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1 - i\omega b}{\omega^2 e^{-i\omega b}} \tag{6}$$

$$\int\limits_{0}^{b} t e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{1 + i\omega t}{\omega^2 e^{i\omega t}} \right|_{0}^{b} = \frac{1 + i\omega b}{\omega^2 e^{i\omega b}} - \frac{1}{\omega^2} \tag{7}$$

$$\int\limits_{-b}^{0} t e^{-i\omega t} dt - \int\limits_{0}^{b} t e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1 - i\omega b}{\omega^2 e^{-i\omega b}} - \frac{1 + i\omega b}{\omega^2 e^{i\omega b}} + \frac{1}{\omega^2} \tag{8}$$

1.3 Кардинальный синус

$$f(t) = asinc(bt) \tag{9}$$

1.3.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

1.4 Функция Гаусса

$$f(t) = ae^{-bt^2} \tag{10}$$

1.4.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

1.5 Двустороннее затухание

$$f(t) = ae^{-b|t|} \tag{11}$$

1.5.1 Аналитическое выражение Фурье-образа

Для визуализации был написан код на языке *Python*.
Код расположен на **GitHub**.