Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Контрольная работа
Вариант 8

по дисциплине Частотные методы

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2024

1 Задание

Разложить в ряд Фурье функцию, определить значения в точках разрыва:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq t \leq 0, \\ 3, & 0 < t \leq \pi \end{cases} \tag{1}$$

1.1 Разложение в ряд Фурье

Функция $f(t)$ удовлетворяет условию теоремы Дирихле о разложении периодической функции в ряд Фурье.

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right), \tag{2}$$

где a_0, a_n, b_n – коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \tag{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt, \tag{4}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt, \tag{5}$$

Вычислим значения коэффициентов:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{0} dt + 3 \int\limits_{0}^{\pi} dt \right) = \frac{1}{\pi} \left(\pi + 3\pi\right) = 4 \tag{6}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{0} \cos(nt)dt + 3 \int\limits_{0}^{\pi} \cos(nt)dt \right) =$$
$$= \frac{1}{n\pi} \left(\sin(nt)\big|_{-\pi}^{0} + 3\sin(nt)\big|_{0}^{\pi} \right) = \frac{1}{n\pi} \left(0 + 3 \cdot 0\right) = 0 \tag{7}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}\sin(nt)dt + 3\int\limits_{0}^{\pi}\sin(nt)dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(\cos(nt)|_{-\pi}^{0} + 3\cos(nt)|_{0}^{\pi}\right) = -\frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n + 3\cdot((-1)^n - 1)\right) =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(2\cdot((-1)^n - 1)\right) = \frac{2-2(-1)^n}{n\pi} \quad (8)$$

В итоге, запишем, полученное разложение в ряд Фурье:

$$f(t) \sim 2 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\sin(nt)\right) \quad (9)$$

1.2 Нахождение значений в точках разрыва

Согласно теореме Дирихле: *если функция имеет ограниченную вариацию (конечное число точек строгого экстремума и точек разрыва первого рода), то в точках непрерывности ряд сходится к функции поточечно, а в точках разрыва сходится* **к среднему арифметическому значений двух концов**.

Точка разрыва первого рода $t = 0$, значение в точках разрыва

$$\phi(0) = \frac{1+3}{2} = 2.$$

2 Задание

Найти образ Фурье от функции

$$f(t) = \begin{cases} 1 - e^{1+t}, & t \leq -1, \\ 1 - e^{1-t}, & t \geq 1, \\ 0, else \end{cases} \tag{10}$$

2.1 Нахождение образа Фурье от функции

Фурье-образ функции $f(t)$ будем находить по формуле:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{-1} (1 - e^{1+t}) e^{-i\omega t} dt + \int\limits_{1}^{\infty} (1 - e^{1-t}) e^{-i\omega t} dt + \int\limits_{-1}^{1} 0 \cdot e^{-i\omega t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{-1} (1 - e^{1+t}) e^{-i\omega t} dt + \int\limits_{1}^{\infty} (1 - e^{1-t}) e^{-i\omega t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{-1} e^{-i\omega t} - e^{1+t-i\omega t} dt + \int\limits_{1}^{\infty} e^{-i\omega t} - e^{1-t-i\omega t} dt \right) \boxed{=} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\int e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} = \frac{i}{\omega} e^{-i\omega t} + C \tag{13}$$

$$\int e^{1+t-i\omega t} dt = e \int e^{t(1-i\omega)} dt = \frac{e}{1 - i\omega} e^{t(1-i\omega)} + C \tag{14}$$

$$\int e^{1-t-i\omega t} dt = e \int e^{-t(1+i\omega)} dt = -\frac{e}{1 + i\omega} e^{-t(1+i\omega)} + C \tag{15}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} e^{-i\omega t}dt = \left. \frac{i}{\omega}e^{-i\omega t} \right|_{-\infty}^{-1} = \frac{i}{\omega}e^{i\omega} - \frac{i}{\omega}e^{i\omega\infty} \tag{16}$$

$$\int\limits_{1}^{\infty} e^{-i\omega t}dt = \left. \frac{i}{\omega}e^{-i\omega t} \right|_{1}^{\infty} = \frac{i}{\omega}e^{-i\omega\infty} - \frac{i}{\omega}e^{-i\omega} \tag{17}$$