

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ  
по лабораторной работе № 3:  
ВЫНУЖДЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ И ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА

Вариант 27

по дисциплине  
*«Линейные системы автоматического управления»*

Студент:  
*Группа № R3338*

*А.А. Нечаева*

Предподаватель:  
*ассистент факультета СУиР, к. т. н.*

*А.В. Пашенко*

Санкт-Петербург 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

1	ВЫНУЖДЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ .....	3
1.1	Анализ результатов и вывод .....	10
2	КАЧЕСТВО ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ .....	12
2.1	Набор 1 .....	13
2.2	Набор 2 .....	14
2.3	Набор 3 .....	15
2.4	Набор 4 .....	16
2.5	Набор 5 .....	17
2.6	Набор 6 .....	18
2.7	Набор 7 .....	19
2.8	Набор 8 .....	20
2.9	Набор 9 .....	21
2.10	Набор 10 .....	22
2.11	Набор 11 .....	23
2.12	Анализ результатов .....	23
3	ВЫВОД .....	25

# 1 ВЫНУЖДЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассмотрим систему 2-го порядка, заданную дифференциальным уравнением

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u. \quad (1)$$

С использованием блоков элементарных операций построим структурную схему данной системы (рисунок 1). На структурной схеме отметим блоки, на которых задаются начальные условия  $y(0)$ ,  $\dot{y}(0)$ .

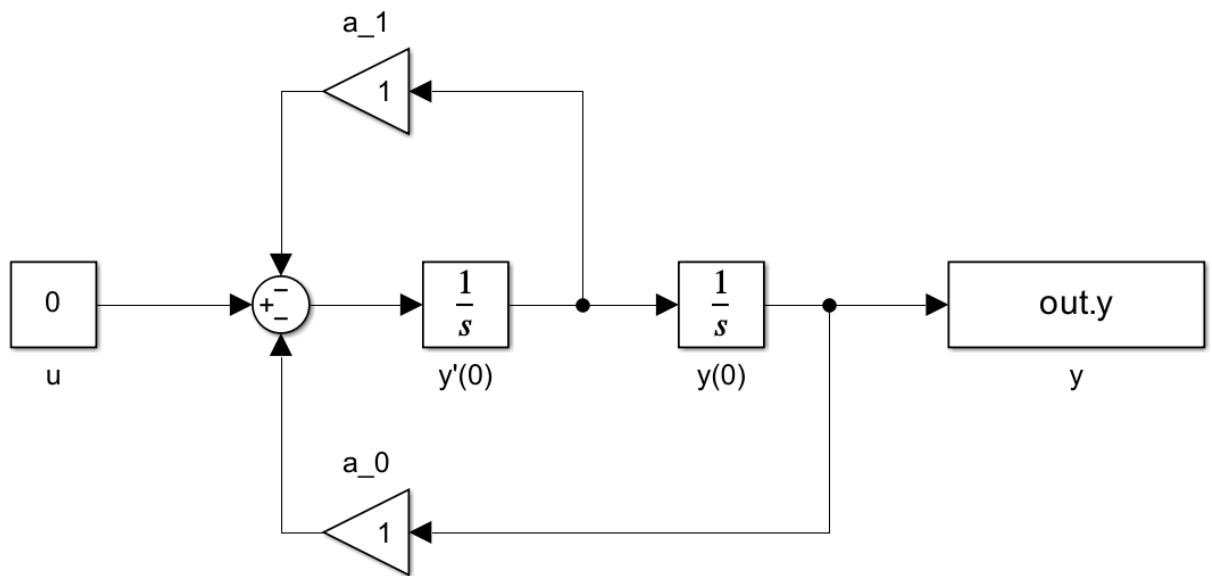


Рисунок 1 — Структурная схема исследуемой системы.

Для следующих наборов коэффициентов  $a_0$ ,  $a_1$ :

$$\begin{cases} a_1 = 7.4 \\ a_0 = 38.69 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_0 = 841 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = -1.4 \\ a_0 = 25.49 \end{cases} \quad (2)$$

И начальных условий

$$\begin{cases} y(0) = -1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Входные воздействия:

$$u_1 = 2 \quad u_2 = 0.7t \quad u_3 = \cos(4t) \quad (4)$$

Проведем моделирование с разными комбинациями входных сигналов, параметров  $a_i$  и начальных условий:

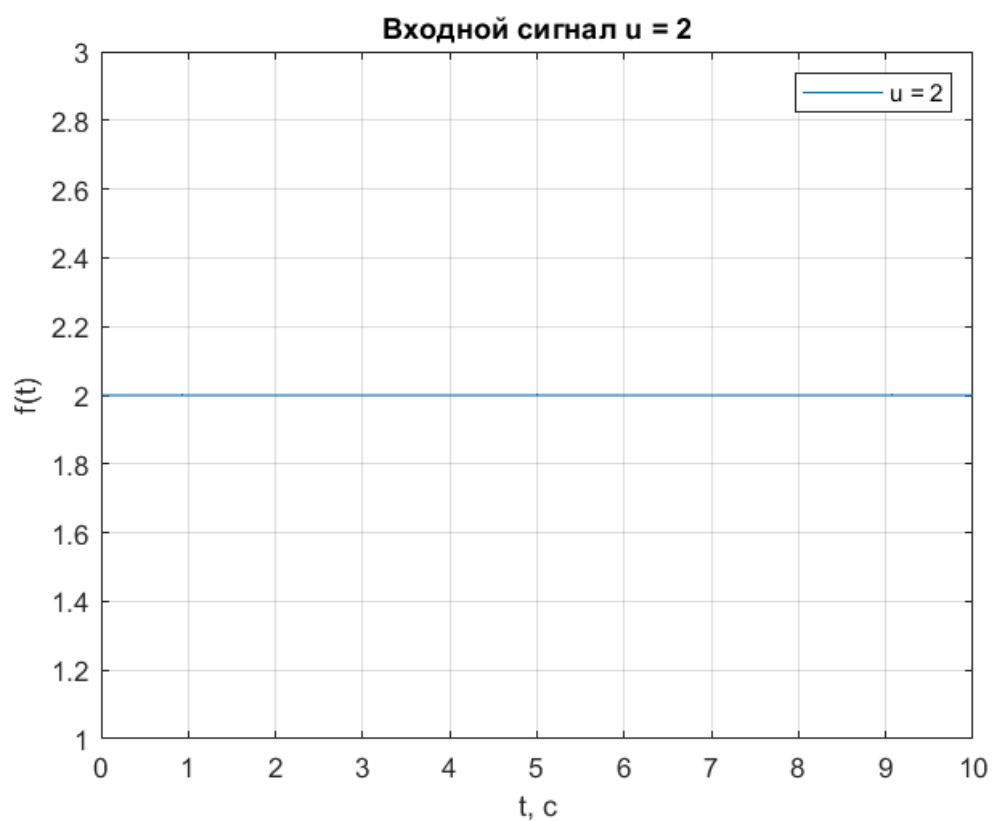


Рисунок 2 — График входного сигнала  $u = 2$ .

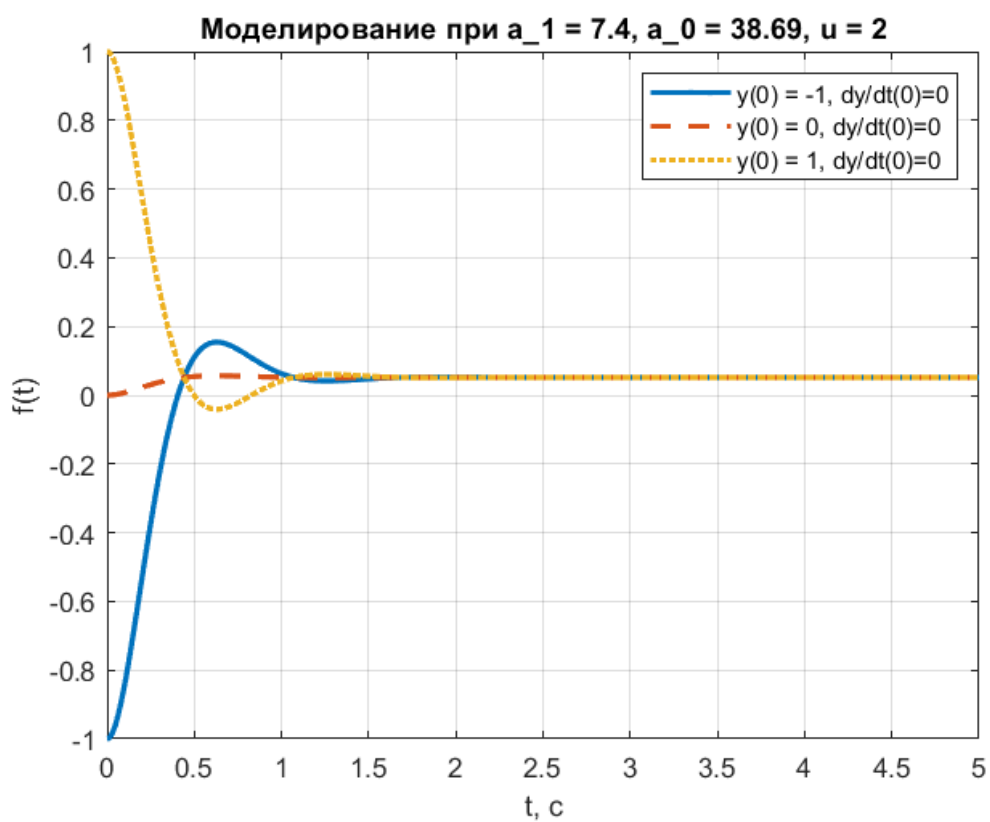


Рисунок 3 — Графики моделирования при  $a_1 = 7.4$ ,  $a_0 = 38.69$ ,  $u = 2$ .

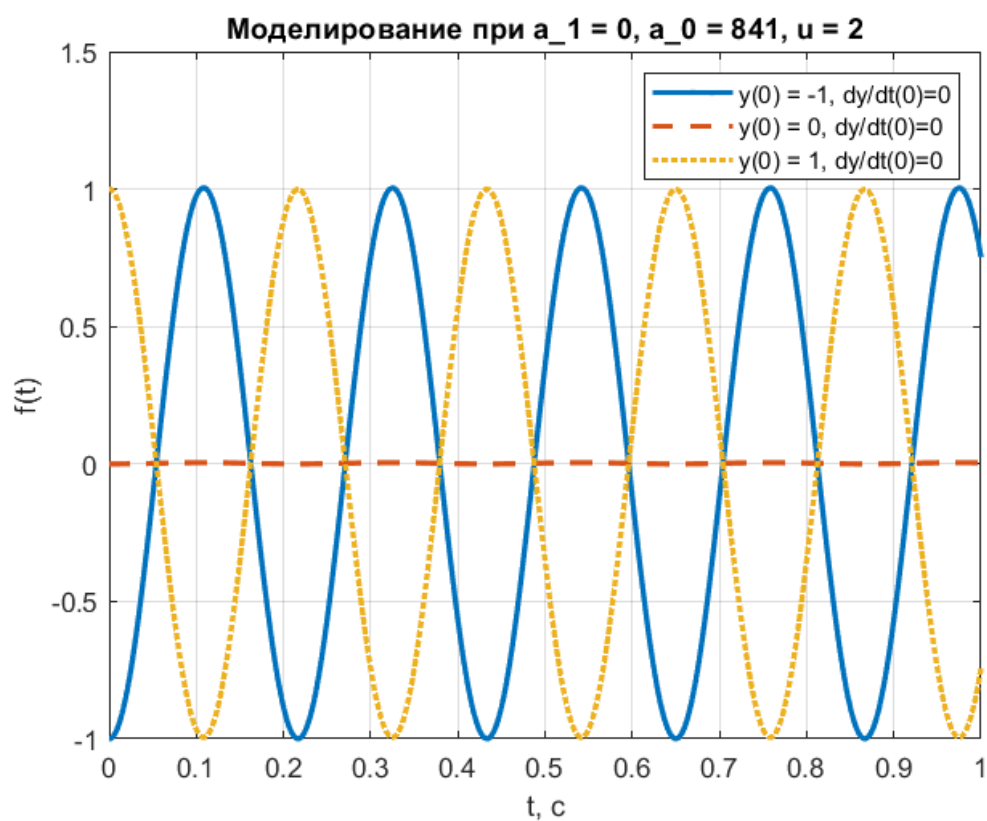


Рисунок 4 — Графики моделирования при  $a_1 = 0, a_0 = 841, u = 2$ .

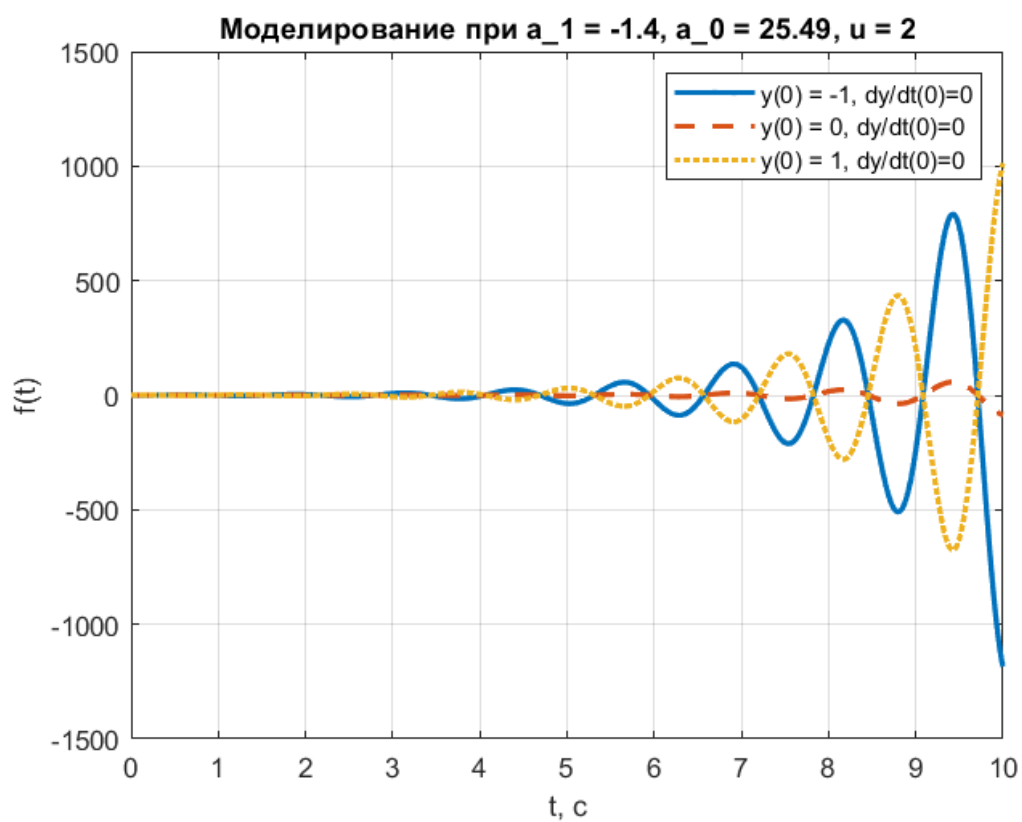


Рисунок 5 — Графики моделирования при  $a_1 = -1.4, a_0 = 25.49, u = 2$ .

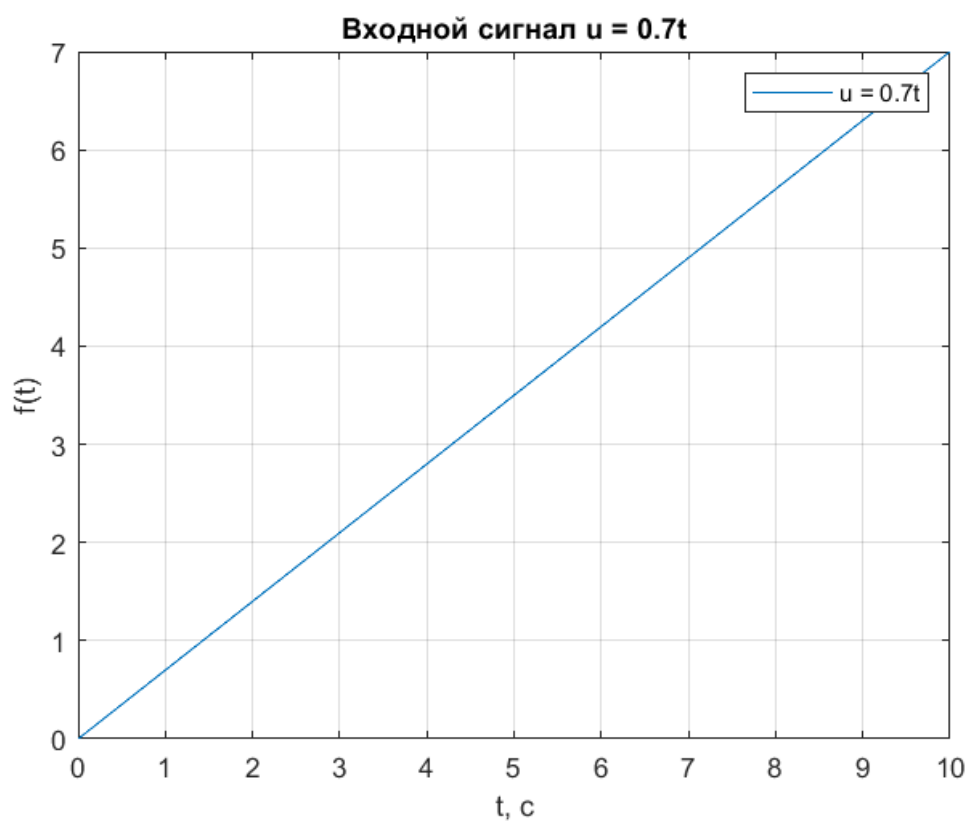


Рисунок 6 — График входного сигнала  $u = 0.7t$ .

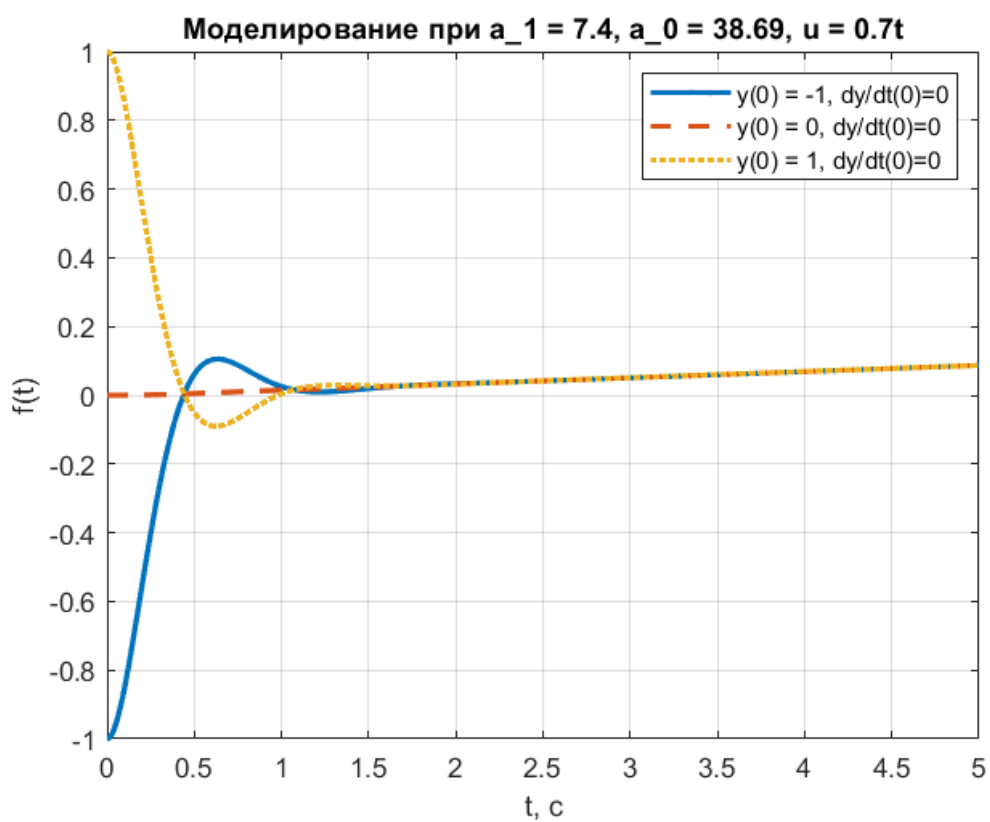


Рисунок 7 — Графики моделирования при  $a_1 = 7.4$ ,  $a_0 = 38.69$ ,  $u = 0.7t$ .

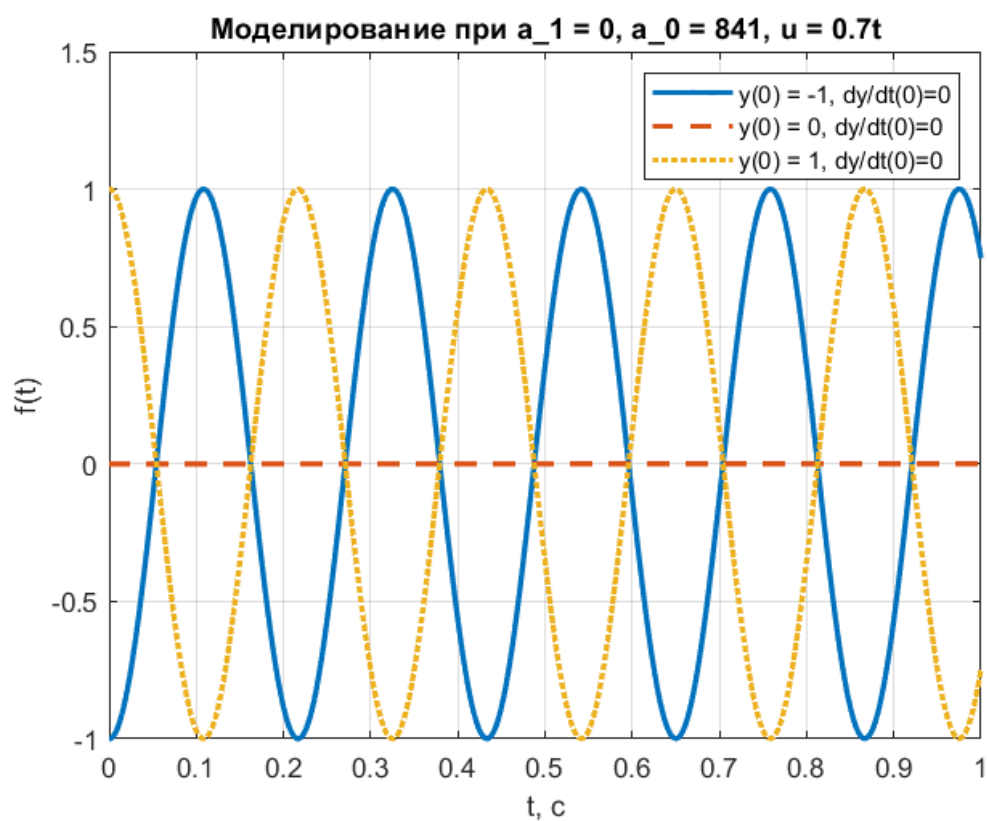


Рисунок 8 — Графики моделирования при  $a_1 = 0, a_0 = 841, u = 0.7t$ .

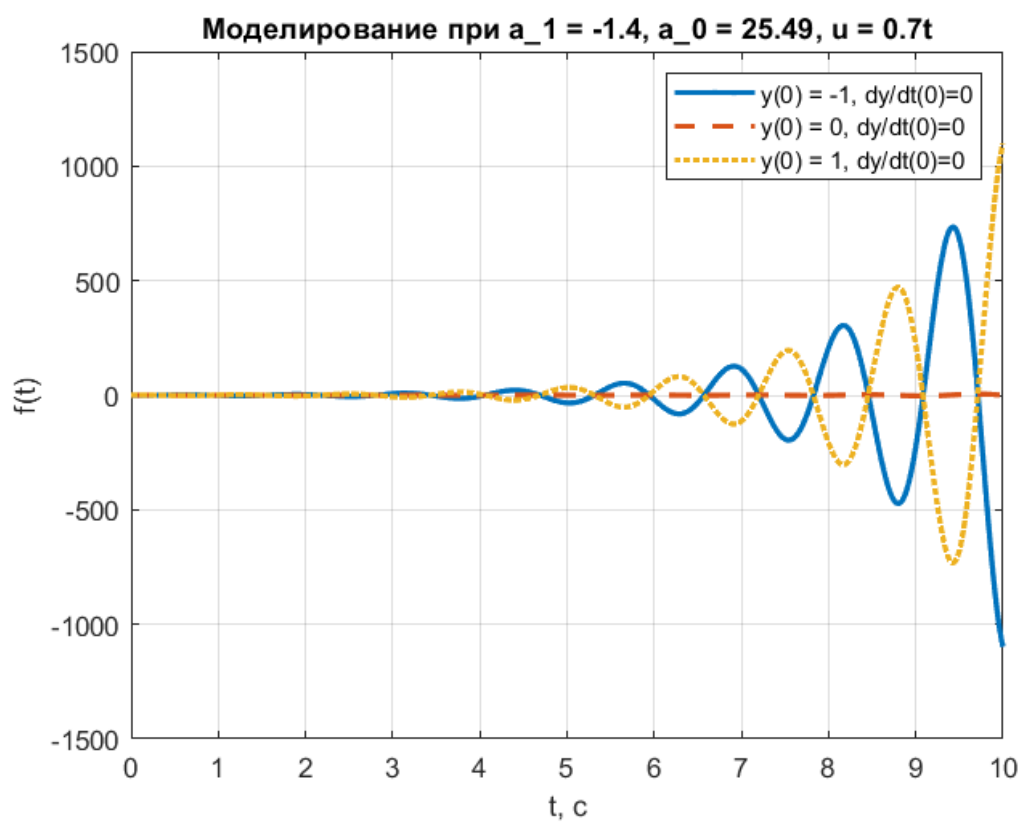


Рисунок 9 — Графики моделирования при  $a_1 = -1.4, a_0 = 25.49, u = 0.7t$ .

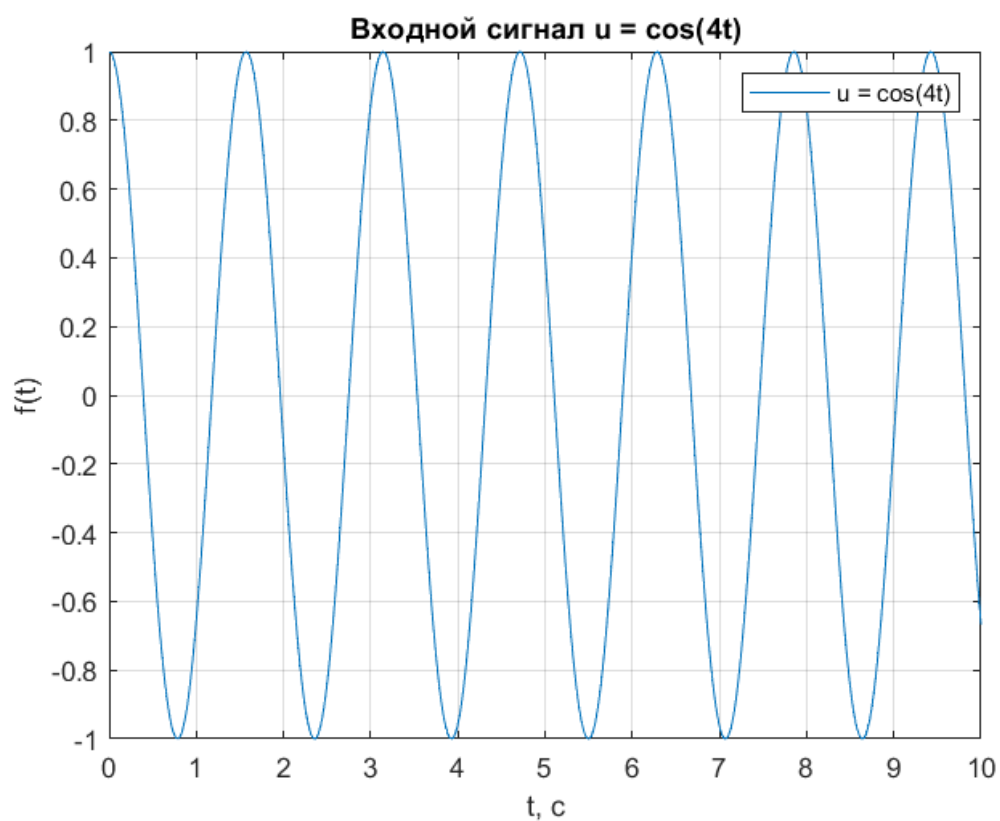


Рисунок 10 — График входного сигнала  $u = \cos(4t)$ .

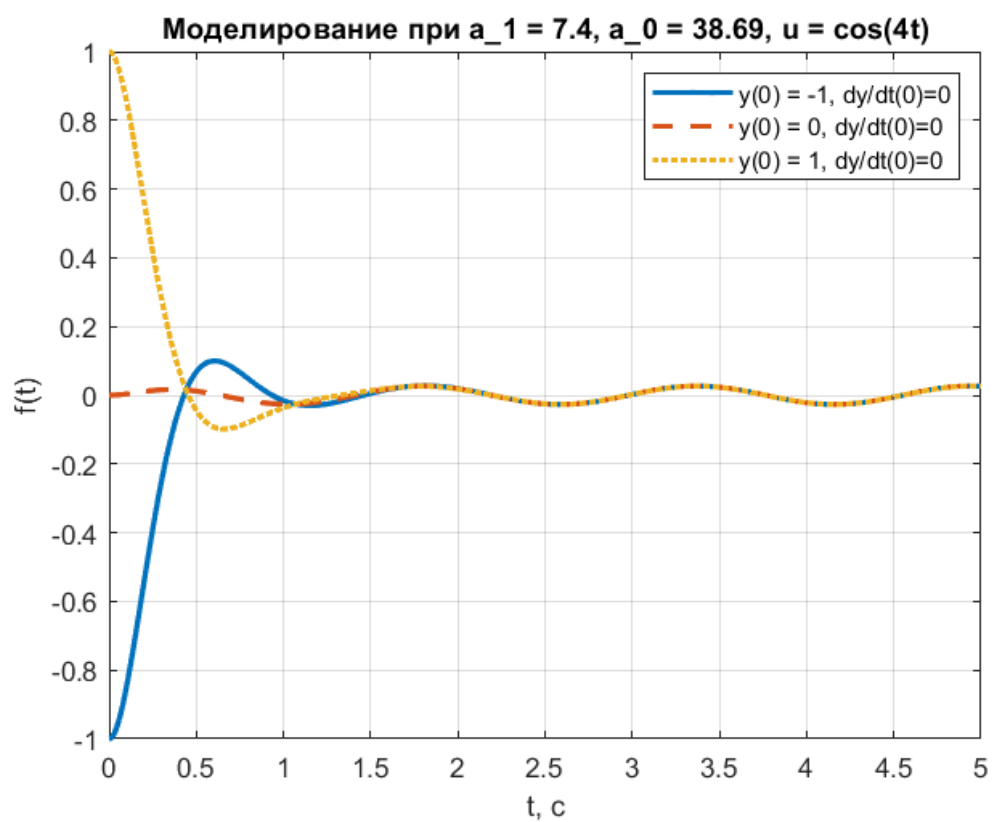


Рисунок 11 — Графики моделирования при  $a_1 = 7.4, a_0 = 38.69, u = \cos(4t)$ .



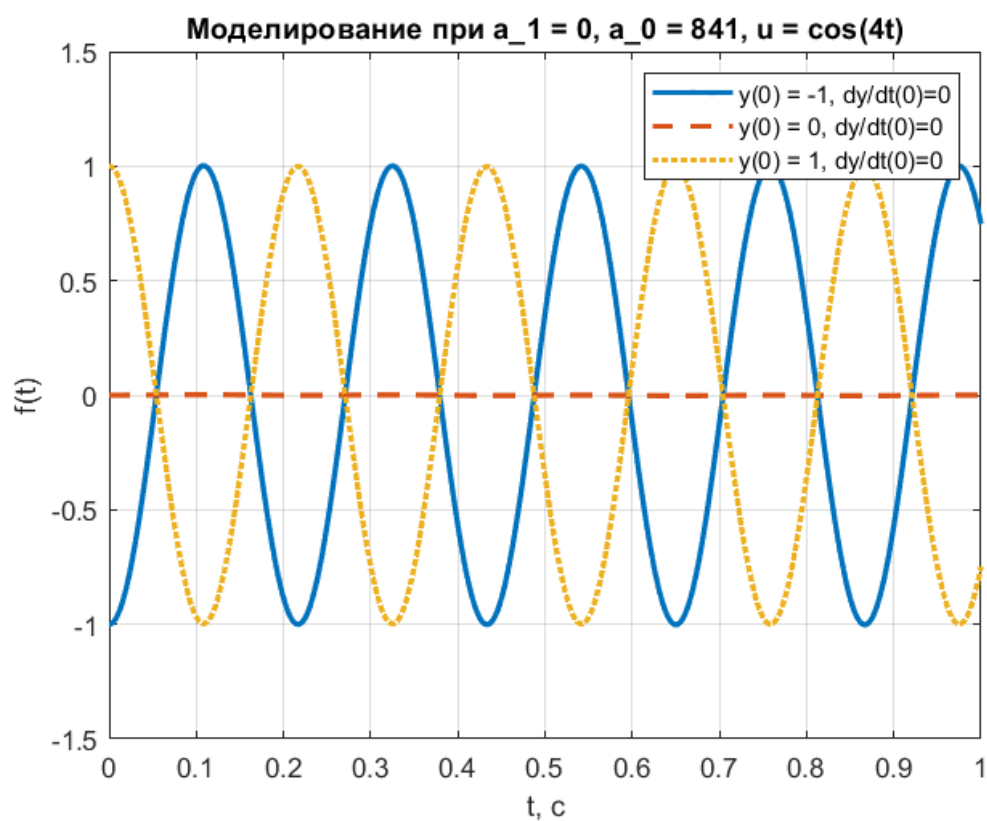


Рисунок 12 — Графики моделирования при  $a_1 = 0$ ,  $a_0 = 841$ ,  $u = \cos(4t)$ .

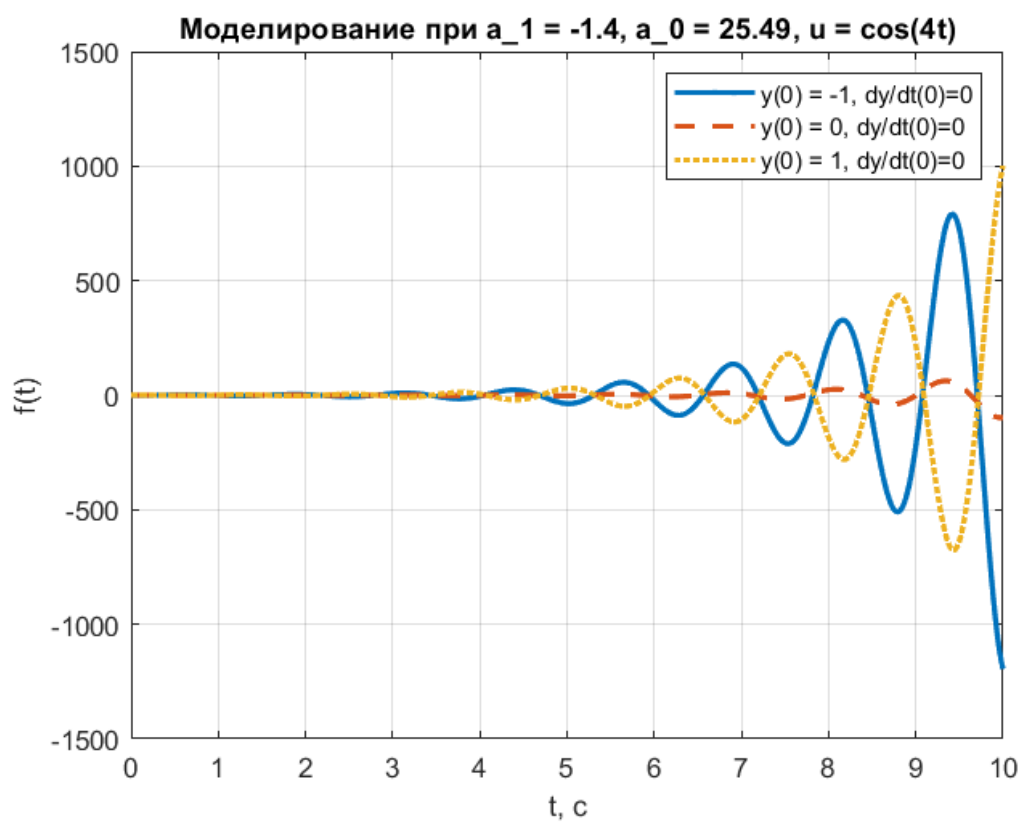


Рисунок 13 — Графики моделирования при  $a_1 = -1.4$ ,  $a_0 = 25.49$ ,  $u = \cos(4t)$ .

## 1.1 Анализ результатов и вывод

Запишем типы устойчивости систем при свободном движении при  $a_i$ :

- $a_1 = 7.4, a_0 = 38.69$  – асимптотическая устойчивость;
- $a_1 = 0, a_0 = 841$  – устойчивость по Ляпунову;
- $a_1 = -1.4, a_0 = 25.49$  – неустойчивость.

Заметим, что для всех рассмотренных входных сигналов движение системы близко по характеру к соответствующим графикам свободного движения. Это объясняется тем, что решение дифференциального уравнения для вынужденного движения содержит решение для свободного.

При моделировании с входным сигналом  $u = 2$  для каждой из систем (рисунки 3-5) вид графика отличается от изображения свободного движения системы лишь на константную величину, хорошо заметно на рисунке 3, где графики всех вариаций системы сходятся к величине, отличной от нуля (к которому сходится свободное движение системы) на константу. Для входного сигнала  $u = 0.7t$ , заметно отличие от графика свободного движения на величину, изменяющуюся по линейному закону (наглядно, рисунки 14 и 7). В случае с входным сигналом  $u = \cos(4t)$  в отличие от свободного движения на графиках заметно добавление гармонической составляющей (рисунок 11).

Начальные условия влияют на амплитуду движения и точку начала.

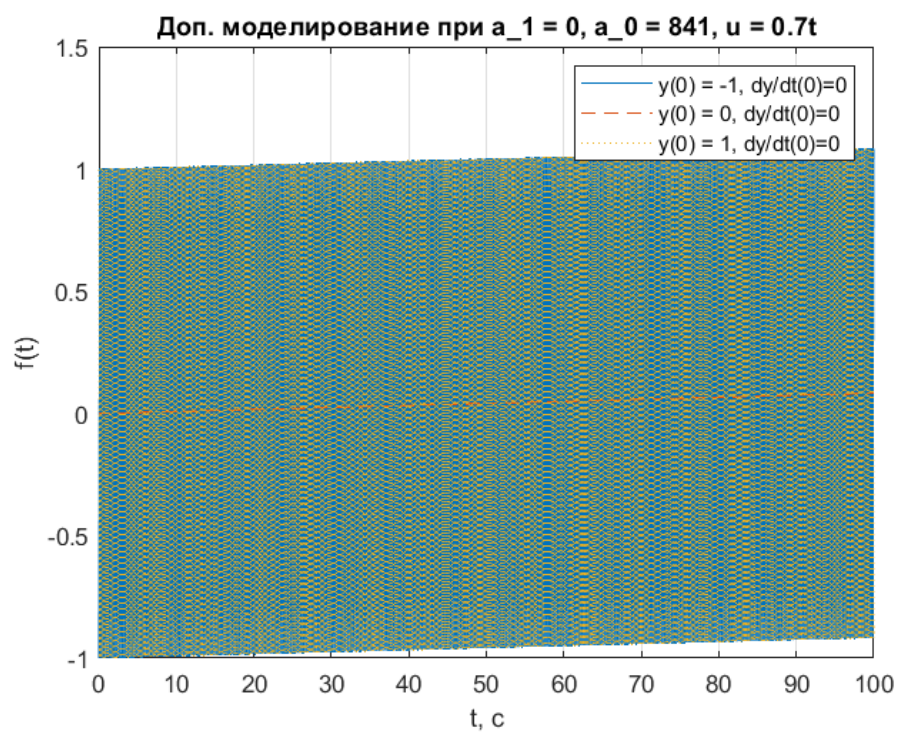


Рисунок 14 — Графики дополнительного моделирования при  $a_1 = 0$ ,  $a_0 = 841$ ,  $u = 0.7t$ .

## 2 КАЧЕСТВО ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Для системы 3-го порядка, заданной передаточной функцией

$$W(s) = \frac{|\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3|}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)} \quad (5)$$

исследуем зависимость качества переходной характеристики от выбора полюсов передаточной функции, для оценки качества будем использовать такие показатели, как **перерегулирование** и **время переходного процесса**.

Время переходного процесса (Settling Time) фиксируется, когда величина  $y(t)$  будет оставаться близкой к установившемуся значению с **точностью 5%**.

Формула для расчета перерегулирования:  $\sigma = \frac{y_{max} - y_{end}}{y_{end}} \cdot 100\%$ .

Зададимся наборами полюсов  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  с отрицательной вещественной частью. Половину наборов возьмем чисто вещественными, в половину включить комплексно-сопряженные полюса.

Таблица 1 — Наборы полюсов.

n	$Re(\lambda_1)$	$Im(\lambda_1)$	$Re(\lambda_2)$	$Im(\lambda_2)$	$Re(\lambda_3)$	$Im(\lambda_3)$
1	-10	0	-10	0	-10	0
2	-150	0	-2	0	-25	0
3	-10	-100	-10	100	-10	0
4	-100	0	-100	0	-100	0
5	-10	-100	-10	100	-100	0
6	-100	0	-10	0	-1	0
7	-10	0	-10	0	-0.5	0
8	-10	-250	-10	250	-100	0
9	-10	-250	-10	250	1000	0
10	-10	-250	-10	250	-10	0
11	-10	-10	-10	10	-1000	0

## 2.1 Набор 1

График переходного процесса при  $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = -10, \lambda_3 = -10$  изображен на рисунке 15:

- перерегулирование: 0 %;
- время переходного процесса  $T_s = 0.629593$  с.;

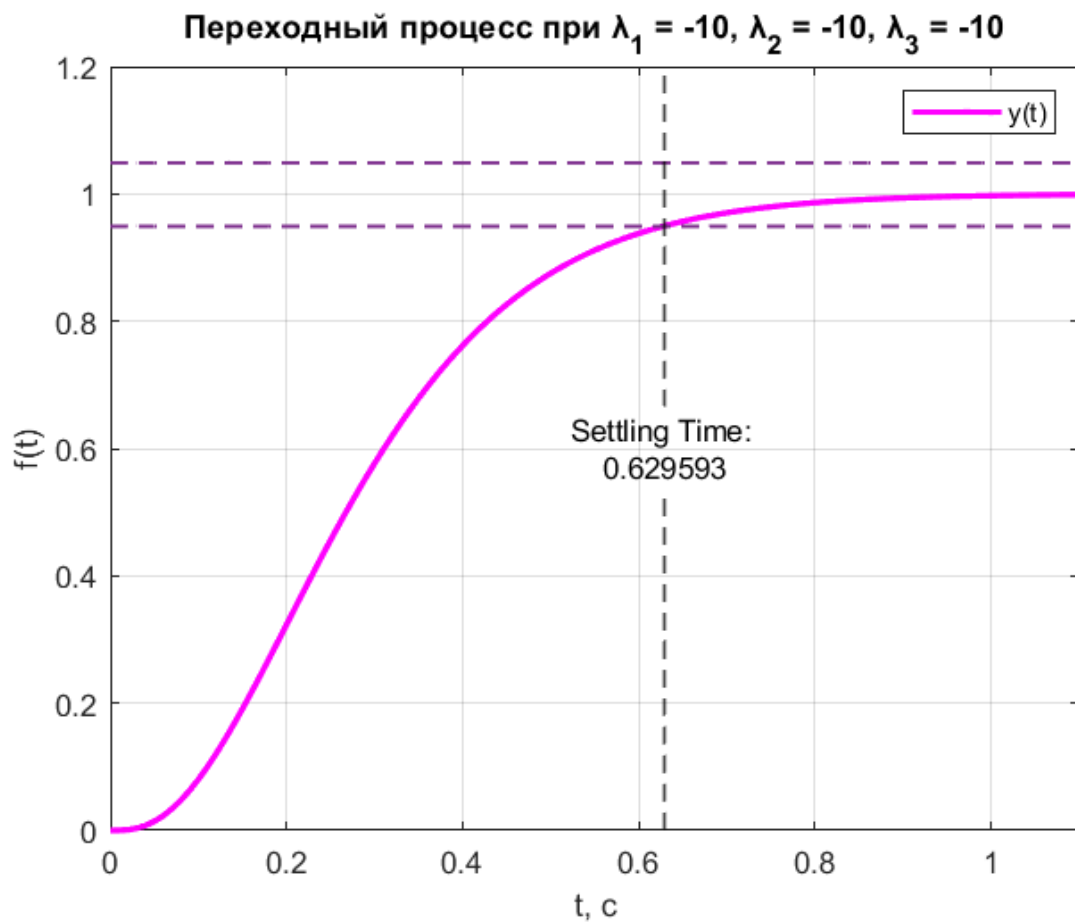


Рисунок 15 — График переходного процесса при  $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = -10, \lambda_3 = -10$ .

## 2.2 Набор 2

При рассмотрении графика (рисунок 16) с парой комплексно-сопряженных  $\lambda_1 = -150$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = -25$ :

- перерегулирование: 0 %;
- время переходного процесса  $T_s = 1.54634$  с.;

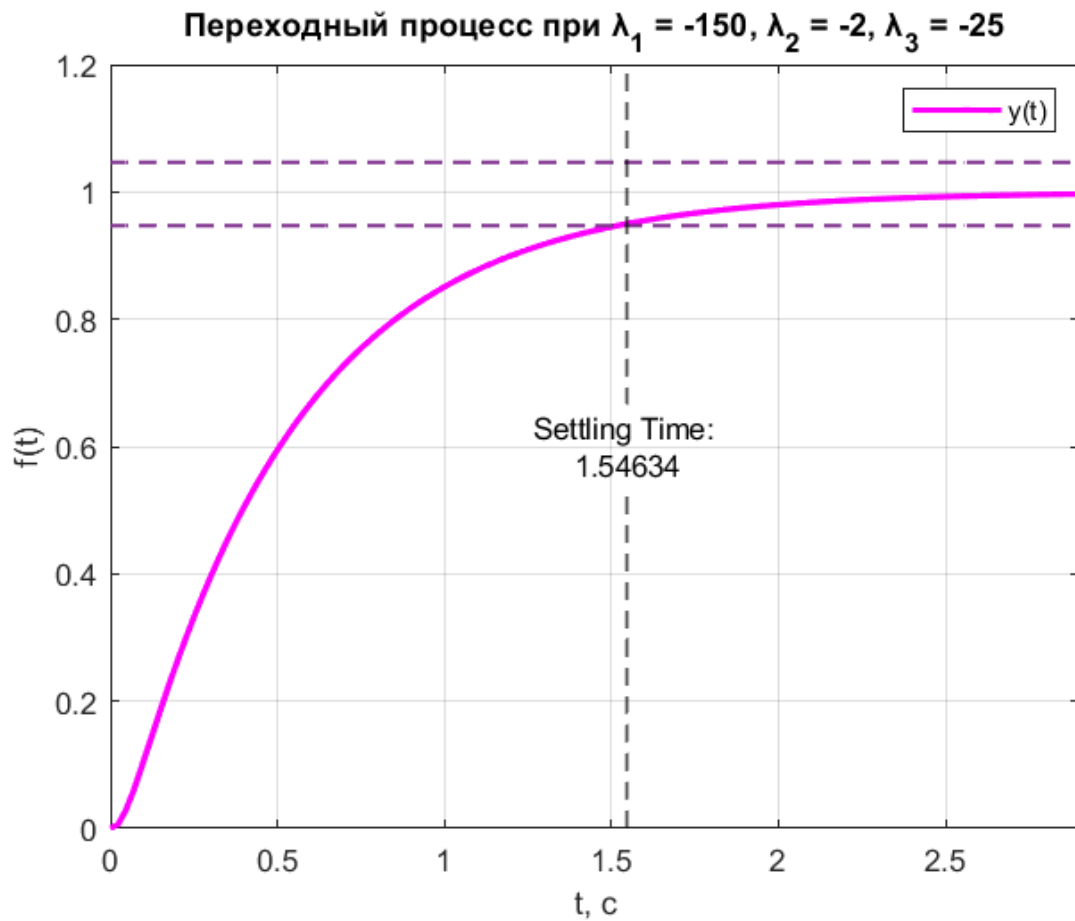


Рисунок 16 — График переходного процесса при  $\lambda_1 = -150$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = -25$ .

### 2.3 Набор 3

График переходного процесса при  $\lambda_1 = -10 - 100i$ ,  $\lambda_2 = -10 + 100i$ ,  $\lambda_3 = -10$  изображен на рисунке 17:

- перерегулирование: 0 %;
- время переходного процесса  $T_s = 0.292734$  с.;

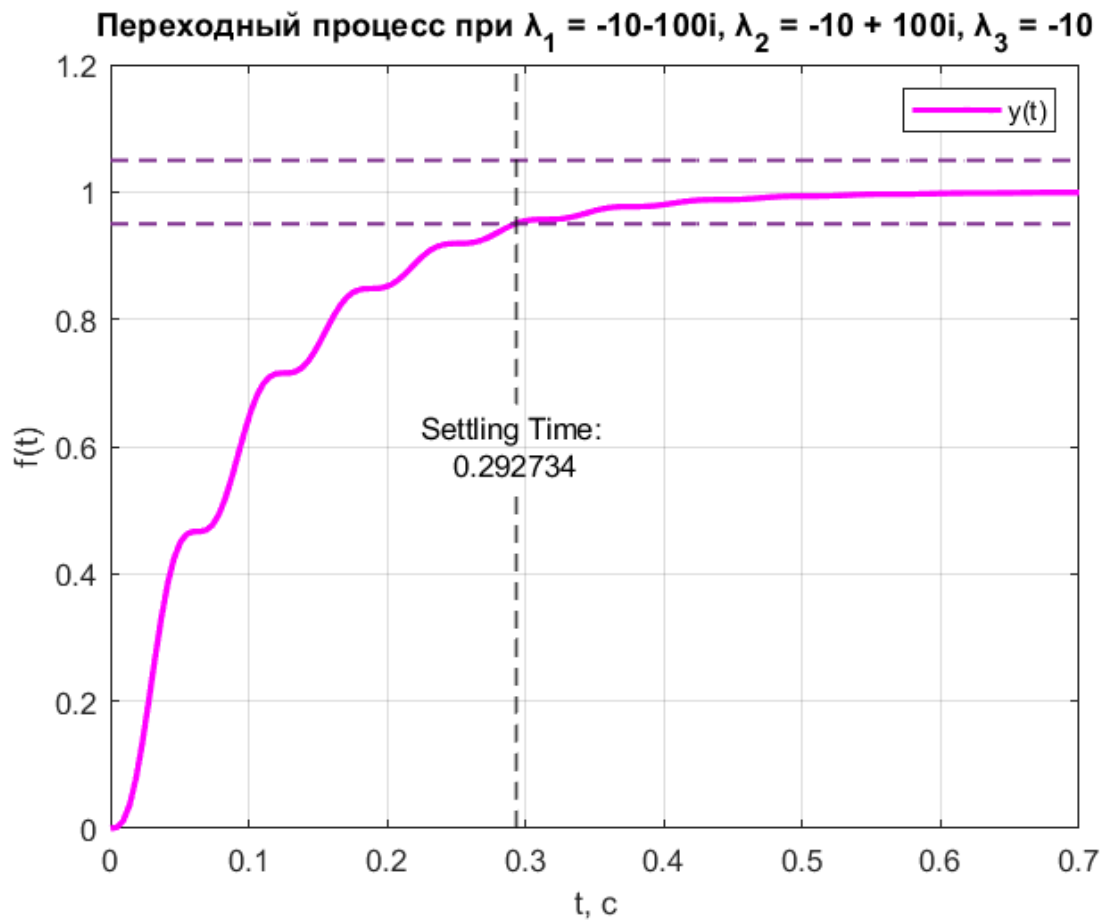


Рисунок 17 — График переходного процесса при  $\lambda_1 = -10 - 100i$ ,  $\lambda_2 = -10 + 100i$ ,  $\lambda_3 = -10$ .

## 2.4 Набор 4

График переходного процесса при  $\lambda_1 = -100$ ,  $\lambda_2 = -100$ ,  $\lambda_3 = -100$  изображен на рисунке 18:

- перерегулирование: 0 %;
- время переходного процесса  $T_s = 0.0637018$  с.;

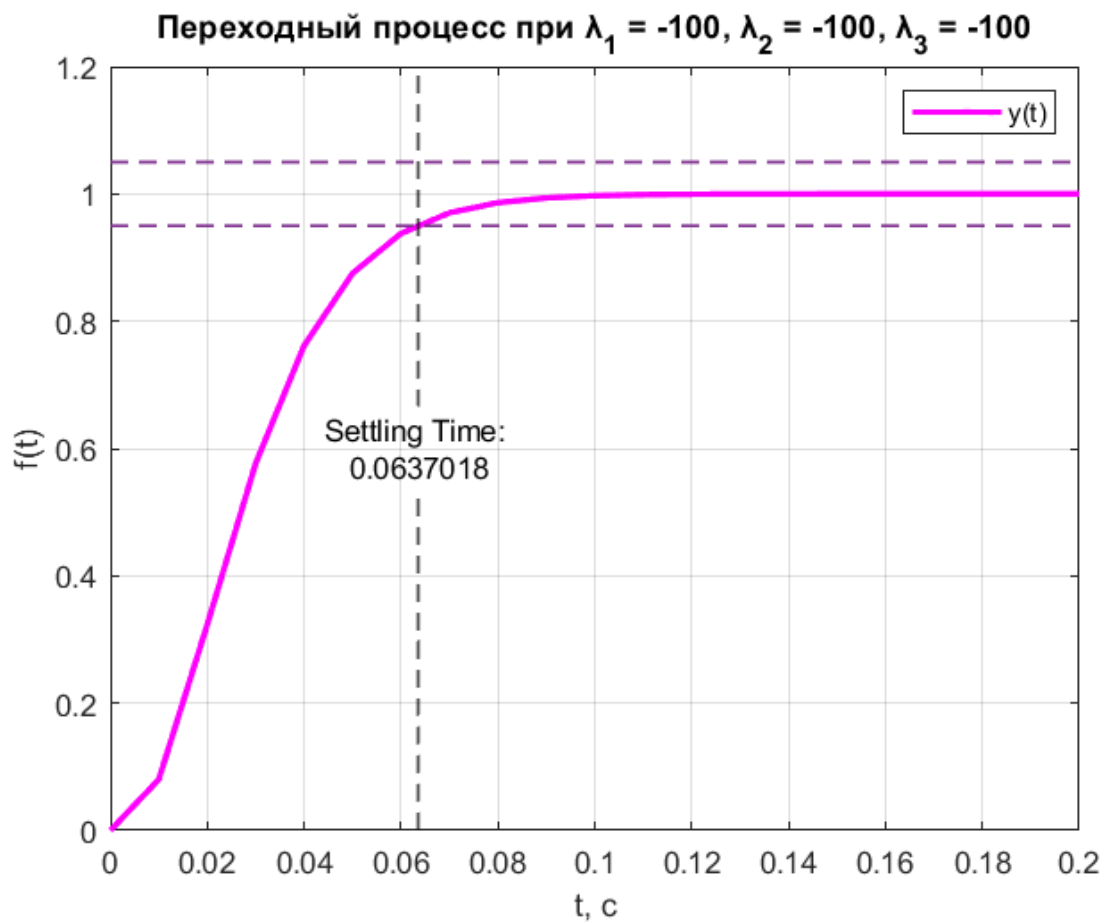


Рисунок 18 — График переходного процесса при  $\lambda_1 = -100$ ,  $\lambda_2 = -100$ ,  $\lambda_3 = -100$ .



## 2.5 Набор 5

График переходного процесса при  $\lambda_1 = -10 - 100i$ ,  $\lambda_2 = -10 + 100i$ ,  $\lambda_3 = -100$  изображен на рисунке 19:

- перерегулирование: 48.85 %;
- время переходного процесса  $T_s = 0.357806$  с.;

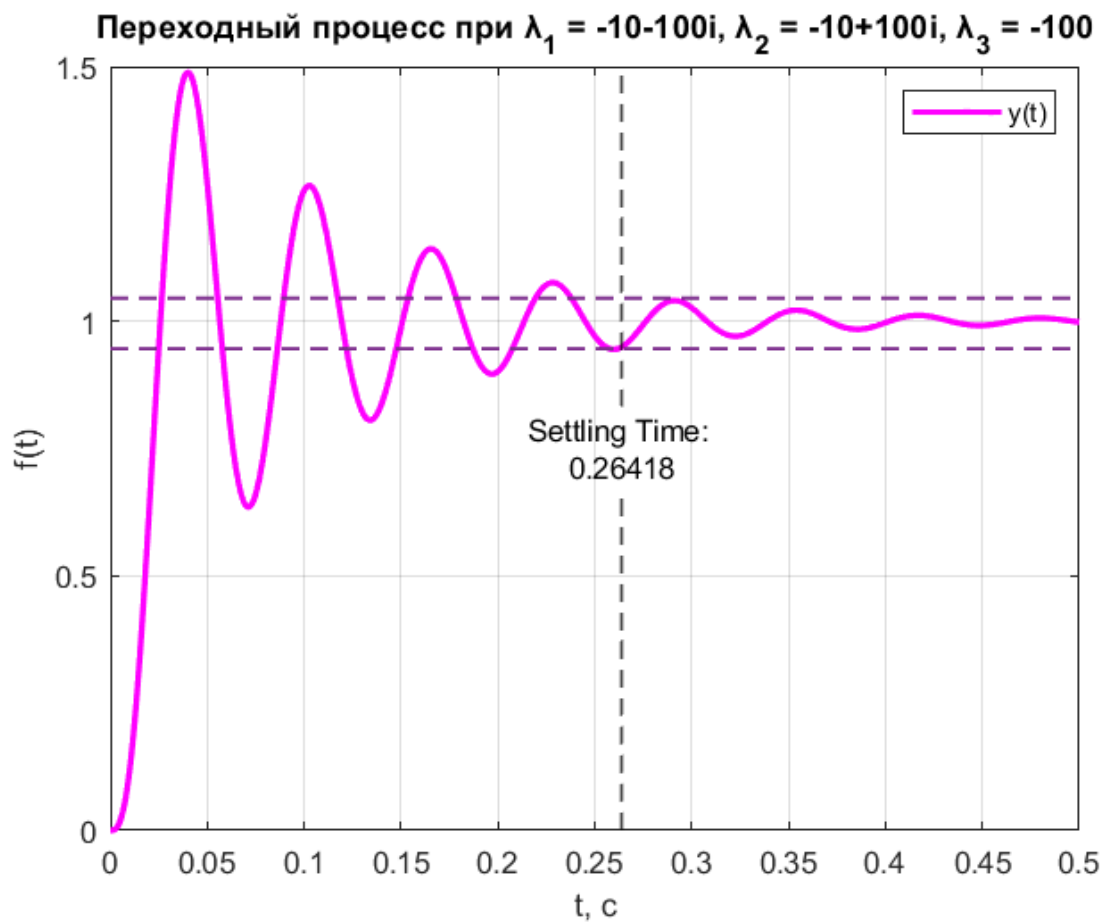


Рисунок 19 — График переходного процесса при  $\lambda_1 = -100 - 10i$ ,  $\lambda_2 = -100 + 10i$ ,  $\lambda_3 = -100$ .

## 2.6 Набор 6

График переходного процесса при  $\lambda_1 = -100$ ,  $\lambda_2 = -10$ ,  $\lambda_3 = -1$  изображен на рисунке 20:

- перерегулирование: 0 %;
- время переходного процесса  $T_s = 3.11115$  с.;

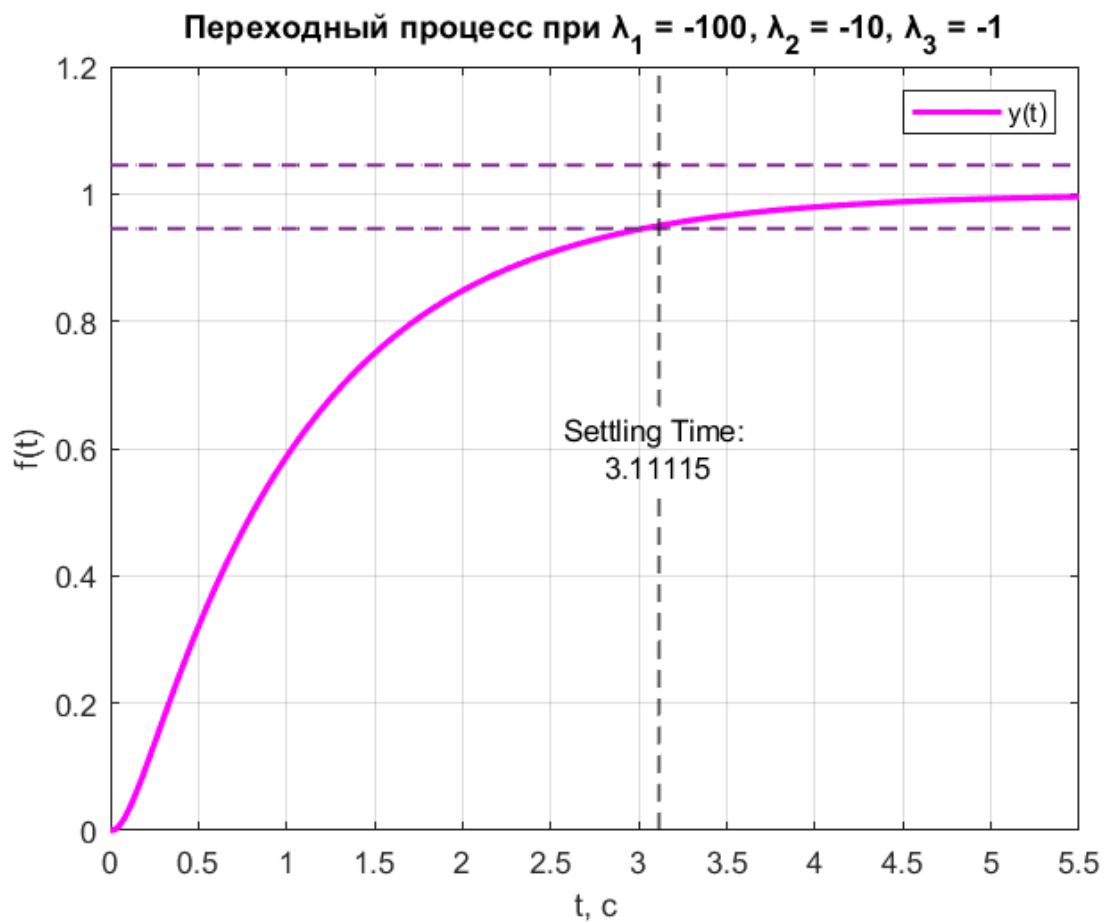


Рисунок 20 — График переходного процесса при  $\lambda_1 = -100$ ,  $\lambda_2 = -10$ ,  $\lambda_3 = -1$ .

## 2.7 Набор 7

График переходного процесса при  $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = -10, \lambda_3 = -0.5$  изображен на рисунке 21:

- перерегулирование: 0 %;
- время переходного процесса  $T_s = 6.19664$  с.;

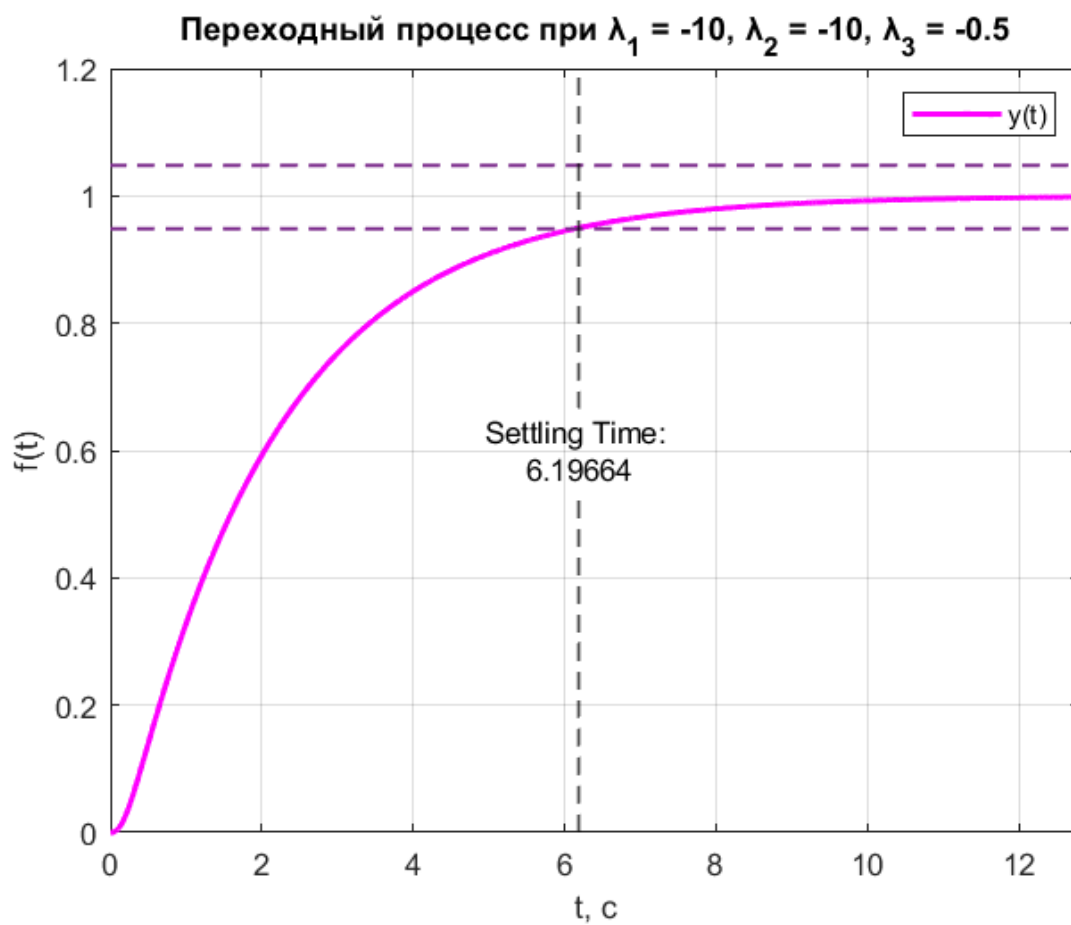


Рисунок 21 — График переходного процесса при  $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = -10, \lambda_3 = -0.5$ .

## 2.8 Набор 8

График переходного процесса при  $\lambda_1 = -10 - 250i$ ,  $\lambda_2 = -10 + 250i$ ,  $\lambda_3 = -100$  изображен на рисунке 22:

- перерегулирование: 23.26 %;
- время переходного процесса  $T_s = 0.194972$  с.;

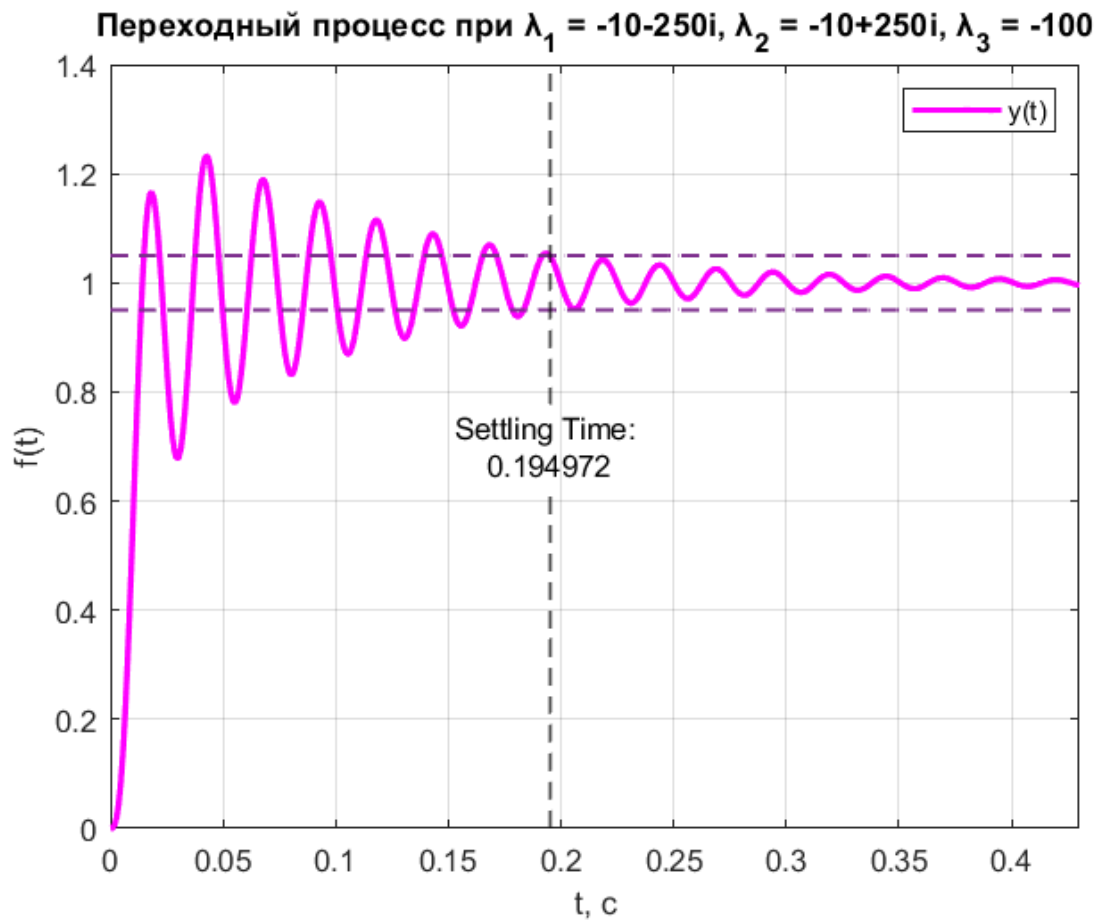


Рисунок 22 — График переходного процесса при  $\lambda_1 = -10 - 250i$ ,  $\lambda_2 = -10 + 250i$ ,  $\lambda_3 = -100$ .

## 2.9 Набор 9

График переходного процесса при  $\lambda_1 = -10 - 250i$ ,  $\lambda_2 = -10 + 250i$ ,  $\lambda_3 = -1000$  изображен на рисунке 23:

- перерегулирование: 85.35 %;
- время переходного процесса  $T_s = 0.291491$  с.;

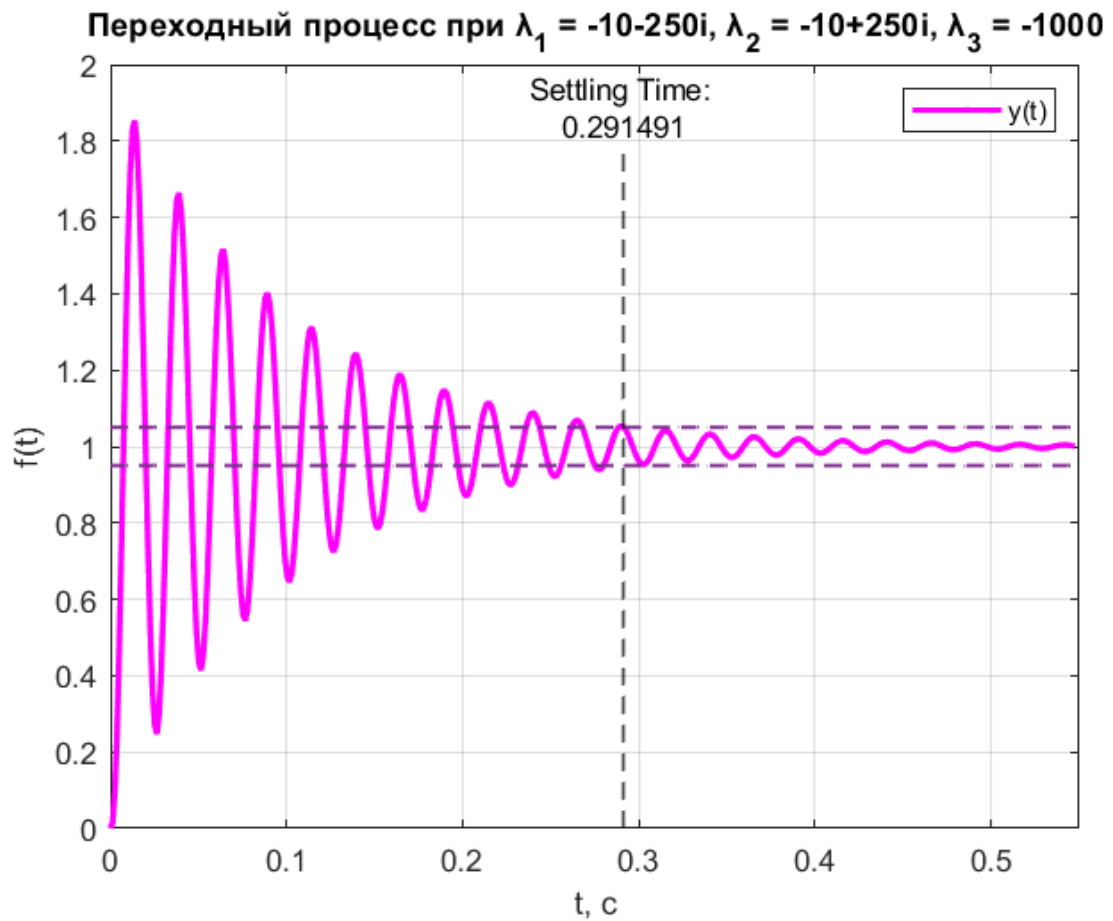


Рисунок 23 — График переходного процесса при  $\lambda_1 = -10 - 250i$ ,  $\lambda_2 = -10 + 250i$ ,  $\lambda_3 = -1000$ .

## 2.10 Набор 10

График переходного процесса при  $\lambda_1 = -10 - 250i$ ,  $\lambda_2 = -10 + 250i$ ,  $\lambda_3 = -10$  изображен на рисунке 24:

- перерегулирование: 0 %;
- время переходного процесса  $T_s = 0.296328$  с.;

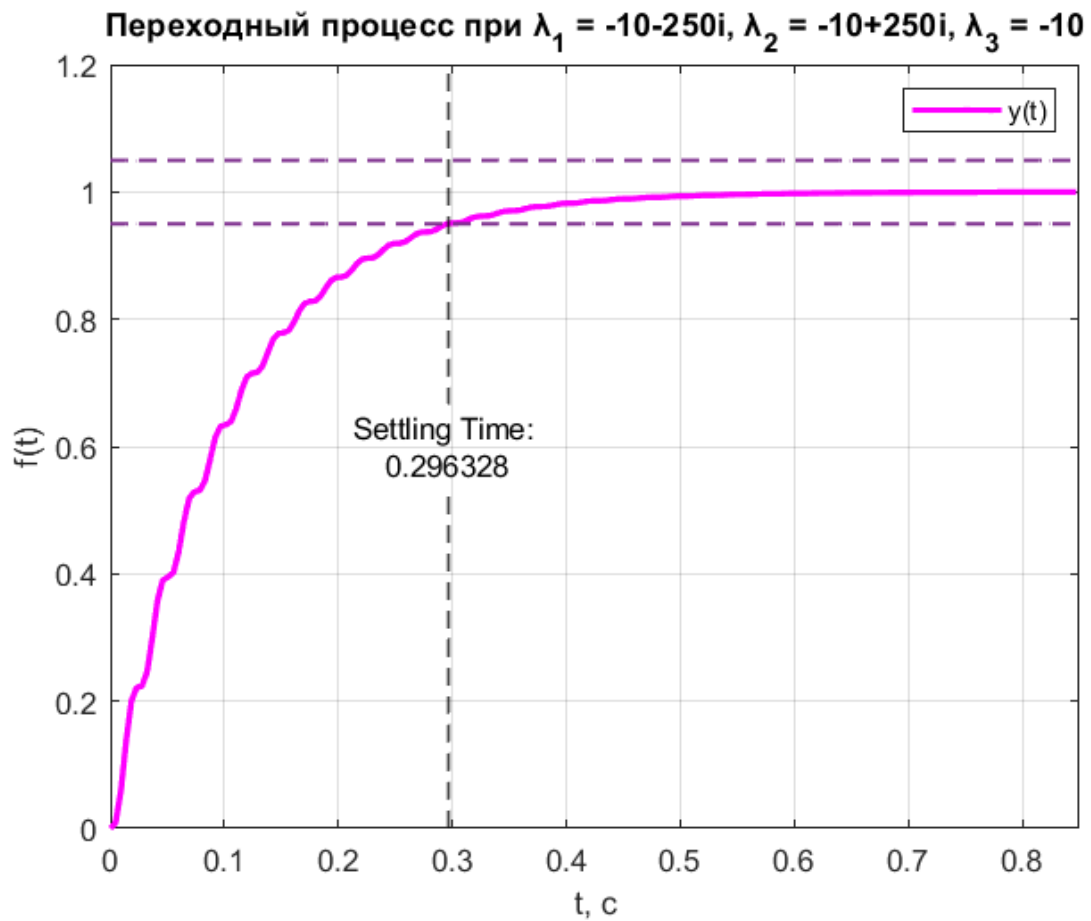


Рисунок 24 — График переходного процесса при  $\lambda_1 = -10 - 250i$ ,  $\lambda_2 = -10 + 250i$ ,  $\lambda_3 = -10$ .

## 2.11 Набор 11

График переходного процесса при  $\lambda_1 = -10 - 10i$ ,  $\lambda_2 = -10 + 10i$ ,  $\lambda_3 = -1000$  изображен на рисунке 25:

- перерегулирование: 0.422629 %;
- время переходного процесса  $T_s = 0.208206$  с.;

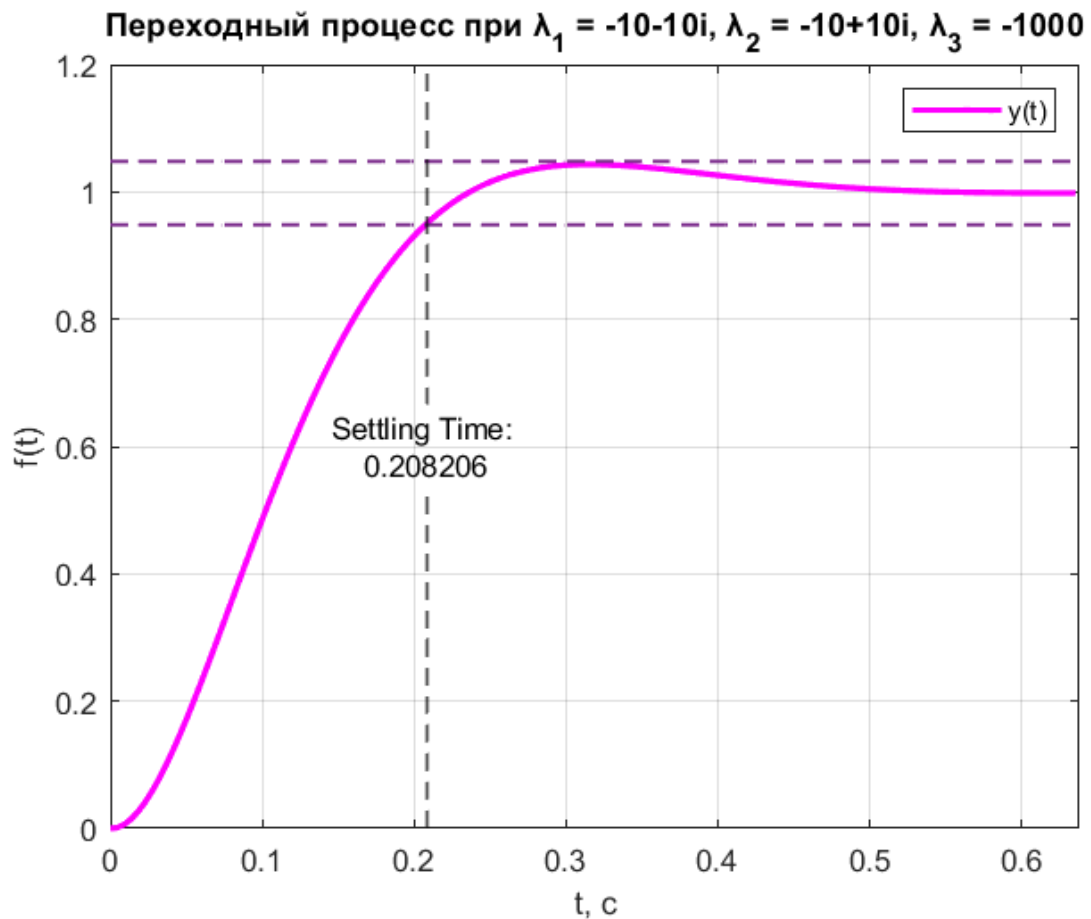


Рисунок 25 — График переходного процесса при  $\lambda_1 = -10 - 10i$ ,  $\lambda_2 = -10 + 10i$ ,  $\lambda_3 = -1000$ .

## 2.12 Анализ результатов

Запишем формулу для упрощения работы:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1; \\ \lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2; \\ \lambda_3 = \alpha_3 \end{cases} \quad (6)$$

- Если  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , то перерегулирование нулевое (наборы под номерами 1, 2, 4, 6 и 7).
- При увеличении  $|\alpha_i|$  время переходного процесса сокращается.
- При  $|\beta_1| = |\beta_2| > |\alpha_1| = |\alpha_2|$  замечен гармонический компонент в графике (набор 3). В данном случае перерегулирование становится ненулевым при  $|\alpha_3| > |\alpha_1| = |\alpha_2|$  (набор 5) и возрастает с увеличением  $|\alpha_3|$  (наборы 8 и 9).



### 3 ВЫВОД

В ходе выполнения лабораторной работы были применены на практике знания о вынужденном движении системы. В первом задании выполнен анализ влияния разных входных воздействий и начальных условий на движение систем, о которых нам известен характер их свободного движения и тип устойчивости из предыдущей лабораторной работы. Во втором задании на основании показателей перерегулирования и времени переходного процесса были оценены качества переходной характеристики в зависимости от значений полюсов передаточной функции.