

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ
по лабораторной работе № 1:
ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Вариант 27

по дисциплине
«Линейные системы автоматического управления»

Студент:
Группа № R3338

А.А. Нечаева

Предподаватель:
ассистент факультета СУиР, к. т. н.

А.В. Пашенко

Санкт-Петербург 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1	ОДНОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-ВЫХОД	3
1.1	Математическая модель.....	3
1.2	Структурная схема системы	3
1.3	Графики сигналов	4
1.4	Графики сигналов $u(t)$ и $y(t)$	4
2	ПЕРЕХОД ОТ ФОРМЫ ВХОД-ВЫХОД К ФОРМЕ ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД.....	6
2.1	Математическая модель.....	6
2.1.1	Передаточная функция	6
2.1.2	Каноническая управляемая форма	6
2.1.3	Каноническая наблюдаемая форма	7
2.1.4	Каноническая диагональная форма.....	7
2.2	Структурные схемы системы для представления В-С-В и соответствующие графики.....	9
2.2.1	Передаточная функция	9
2.2.2	Каноническая управляемая форма	10
2.2.3	Каноническая наблюдаемая форма	11
2.2.4	Каноническая диагональная форма.....	12
2.3	Вывод	14
3	МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-ВЫХОД	15
3.1	Математическая модель (ПМ).....	15
3.2	Структурная схема системы	15
3.3	Графики сигналов $u(t)$ и $y(t)$	16
4	МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД.....	18
4.1	Структурная схема.....	18
4.2	Графики сигналов $u(t)$ и $y(t)$	19
5	ВЫВОД	21

1 ОДНОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-ВЫХОД

1.1 Математическая модель

Возьмем коэффициенты $a_2 = 9$, $a_1 = 23$, $a_0 = 15$, $b_2 = 14$, $b_1 = 6$ и $b_0 = 16$. Рассмотрим математическую модель в форме дифференциального уравнения

$$\ddot{y} + 9\dot{y} + 23y = 14\ddot{u} + 6\dot{u} + 16u \quad (1)$$

Перепишем с применением оператора дифференцирования

$$p^3[y] + 9p^2[y] + 23p[y] + 15y = 14p^2[u] + 6p[u] + 16u \quad (2)$$

Теперь выразим выходной сигнал y

$$\begin{aligned} p^3[y] &= 14p^2[u] + 6p[u] + 16u - 9p^2[y] - 23p[y] - 15y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{p^3} [14p^2[u] + 6p[u] + 16u - 9p^2[y] - 23p[y] - 15y] = \\ &= 14\frac{1}{p}[u] + 6\frac{1}{p^2}[u] + 16\frac{1}{p^3}[u] - 9\frac{1}{p}[y] - 23\frac{1}{p^2}[y] - 15\frac{1}{p^3}[y] \quad (3) \end{aligned}$$

Получим выражение с применением операторов интегрирования.

1.2 Структурная схема системы

В среде моделирования *Simulink* построим структурную схему системы. Будем использовать блоки элементарных операций: «интегратор», «сумматор», «усилитель».

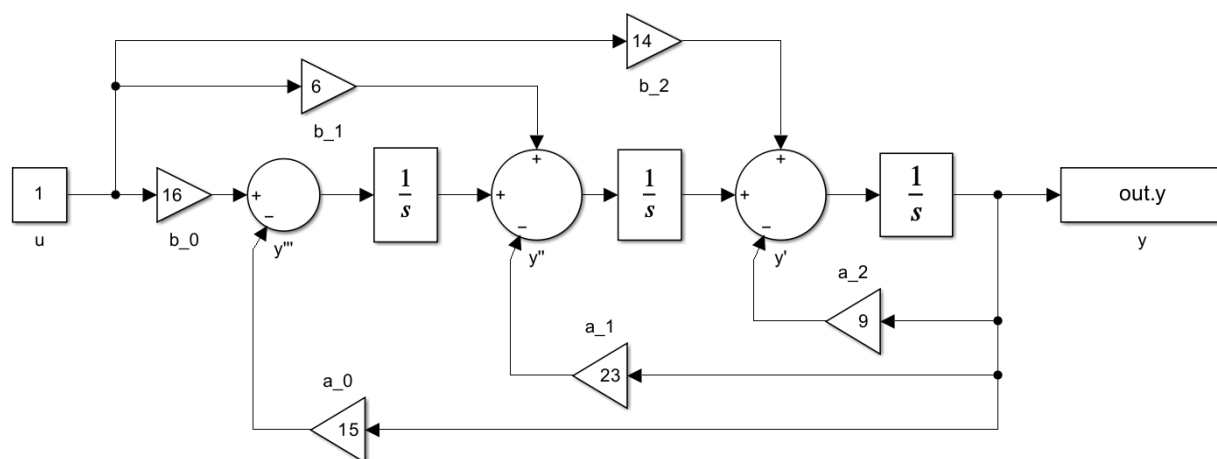


Рисунок 1 — Структурная схема первой системы.

1.3 Графики сигналов

Выполним моделирование при входном воздействии вида $u(t) = 1$ и нулевых начальных условиях $\ddot{y}(0)$, $\dot{y}(0)$, $y(0)$. Полученные графики входного и выходного сигналов приведены на рисунках 2 и 3 соответственно.

1.4 Графики сигналов $u(t)$ и $y(t)$

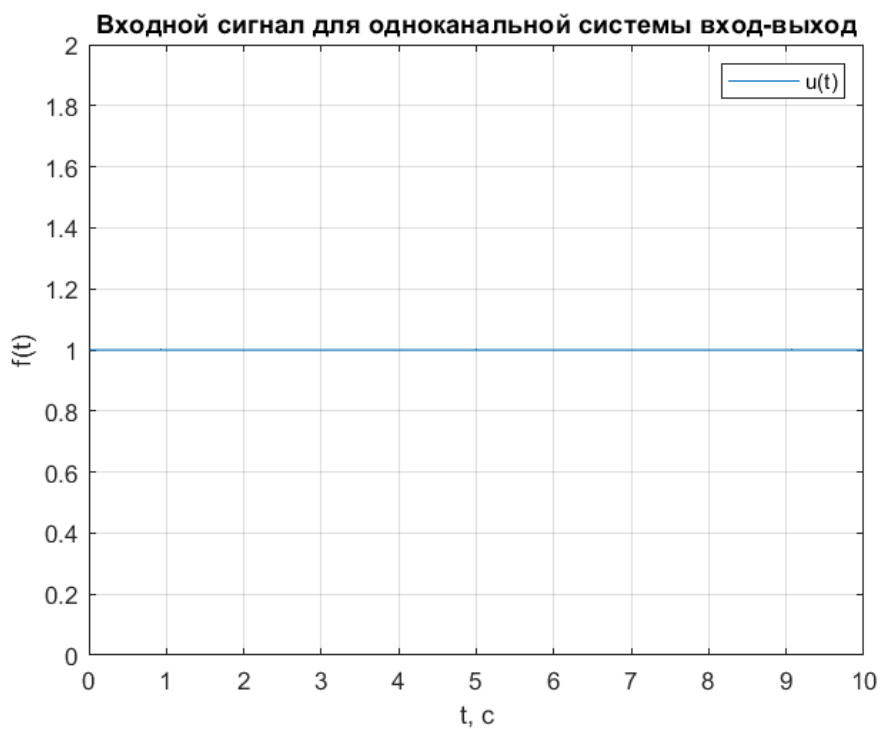


Рисунок 2 — График входного сигнала для одноканальной системы в форме вход-выход.

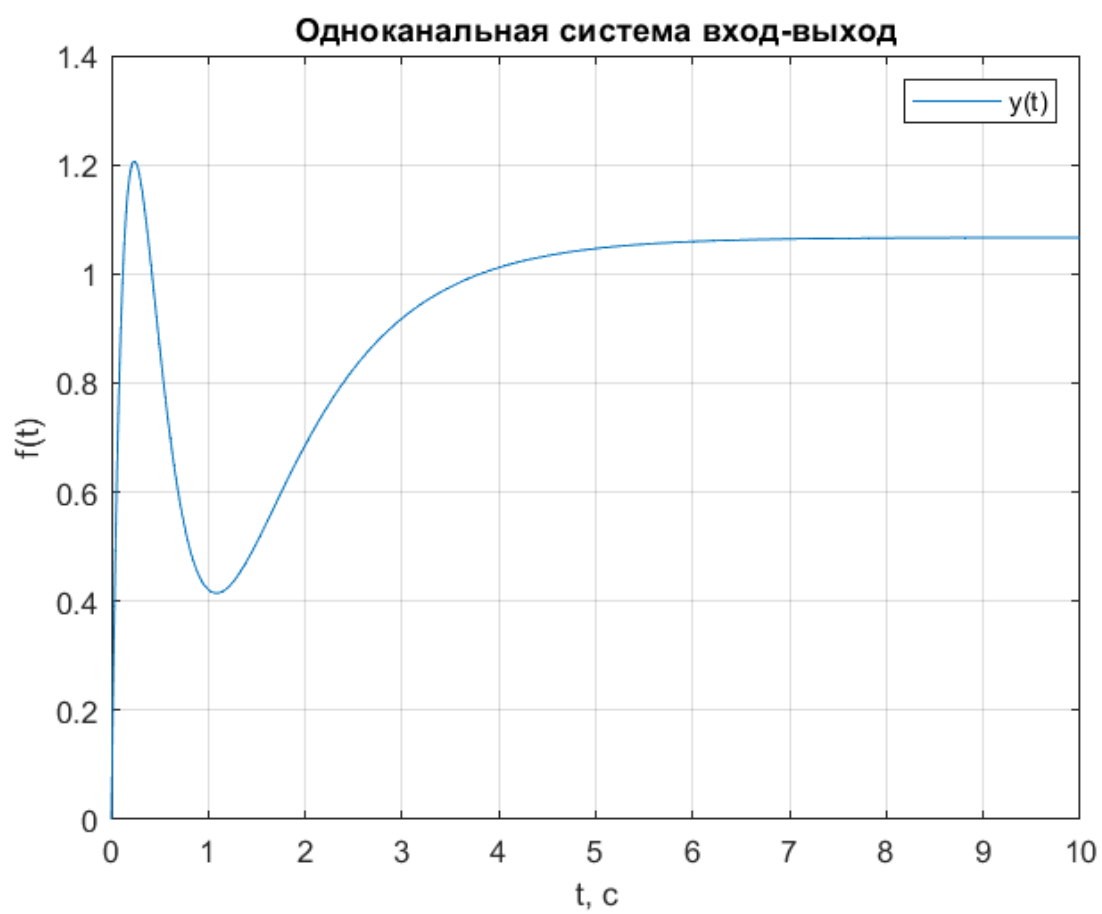


Рисунок 3 — Графики выходного сигнала для одноканальной системы в форме вход-выход.

2 ПЕРЕХОД ОТ ФОРМЫ ВХОД-ВЫХОД К ФОРМЕ ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД

2.1 Математическая модель

2.1.1 Передаточная функция

Для системы из 1 задания определим передаточную функцию $W(p)$.

$$\ddot{y} + 9\dot{y} + 23y = 14\ddot{u} + 6\dot{u} + 16u \quad (4)$$

Перепишем с применением оператора дифференцирования

$$\begin{aligned} p^3[y] + 9p^2[y] + 23p[y] + 15y &= 14p^2[u] + 6p[u] + 16u \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (p^3 + 9p^2 + 23p + 15)[y] &= (14p^2 + 6p + 16)[u] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= \frac{14p^2 + 6p + 16}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15}[u] + 0 \quad (5) \end{aligned}$$

Получим передаточную функцию

$$W(p) = \frac{14p^2 + 6p + 16}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} \quad (6)$$

2.1.2 Каноническая управляемая форма

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} 16 & 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (7) \end{aligned}$$

2.1.3 Каноническая наблюдаемая форма

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -15 \\ 1 & 0 & -23 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix} u \\ &y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (8)\end{aligned}$$

2.1.4 Каноническая диагональная форма

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u \\ &y = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (9)\end{aligned}$$

Запишем передаточную функцию

$$W(p) = \frac{14p^2 + 6p + 16}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} \quad (10)$$

Разложим знаменатель на произведение множителей. Заметим, что один из корней $p = -1$, после применения схемы Горнера останется квадратное уравнение, решение которого находится по теореме Виета

$$(p+1)(p^2+8p+15) = (p+1)(p+3)(p+5) \quad (11)$$

Найдем разложение вида

$$\begin{aligned} \frac{14p^2+6p+16}{p^3+9p^2+23p+15} &= \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p+5} = \\ &= \frac{A(p+3)(p+5) + B(p+1)(p+5) + C(p+3)(p+1)}{p^3+9p^2+23p+15} = \\ &= \frac{Ap^2+8Ap+15A + Bp^2+6Bp+5B + Cp^2+4Cp+3C}{p^3+9p^2+23p+15} = \\ &= \frac{(A+B+C)p^2 + (8A+6B+4C)p + 15A+5B+3C}{p^3+9p^2+23p+15} = \\ &= \frac{3}{p+1} - \frac{31}{p+3} + \frac{42}{p+5} \quad (12) \end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{\beta_1 \cdot \gamma_1}{p-\lambda_1} + \frac{\beta_2 \cdot \gamma_2}{p-\lambda_2} + \frac{\beta_3 \cdot \gamma_3}{p-\lambda_3} = \frac{3}{p+1} - \frac{31}{p+3} + \frac{42}{p+5} = \\ &= \frac{3 \cdot 1}{p+1} + \frac{31 \cdot (-1)}{p+3} + \frac{6 \cdot 7}{p+5} \quad (13) \end{aligned}$$

Наконец запишем систему в канонической диагональной форме.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 31 \\ 6 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (14) \end{aligned}$$

2.2 Структурные схемы системы для представления В-С-В и соответствующие графики

Для начала представим график входного сигнала (рисунок 4).

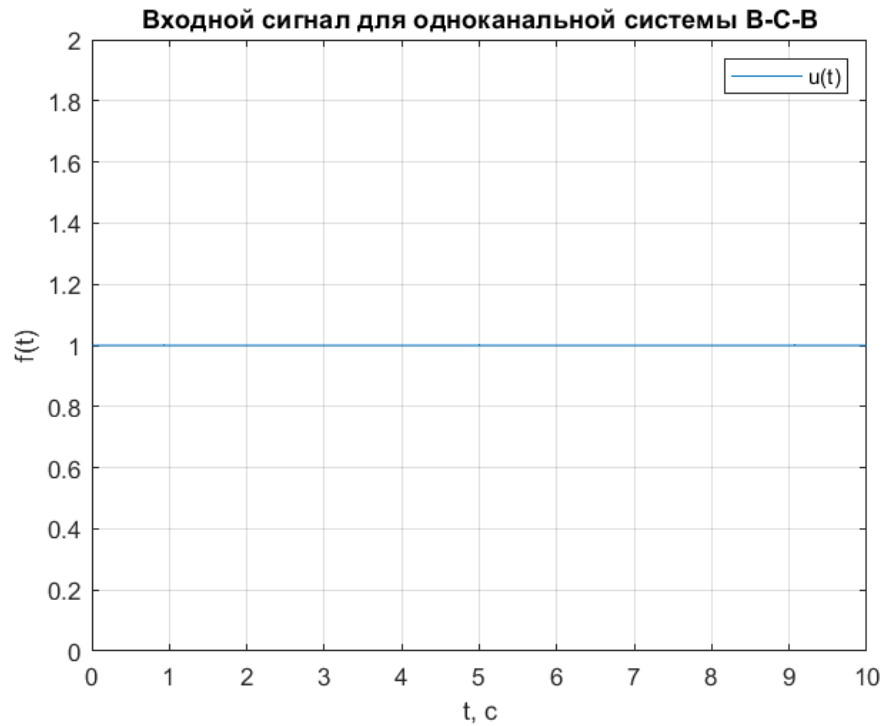


Рисунок 4 — График входного сигнала для одноканальной системы в форме вход-состояние-выход.

2.2.1 Передаточная функция

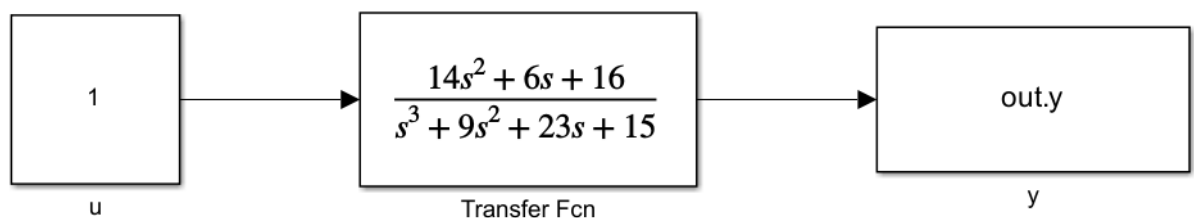


Рисунок 5 — Структурная схема с использованием передаточной функции.

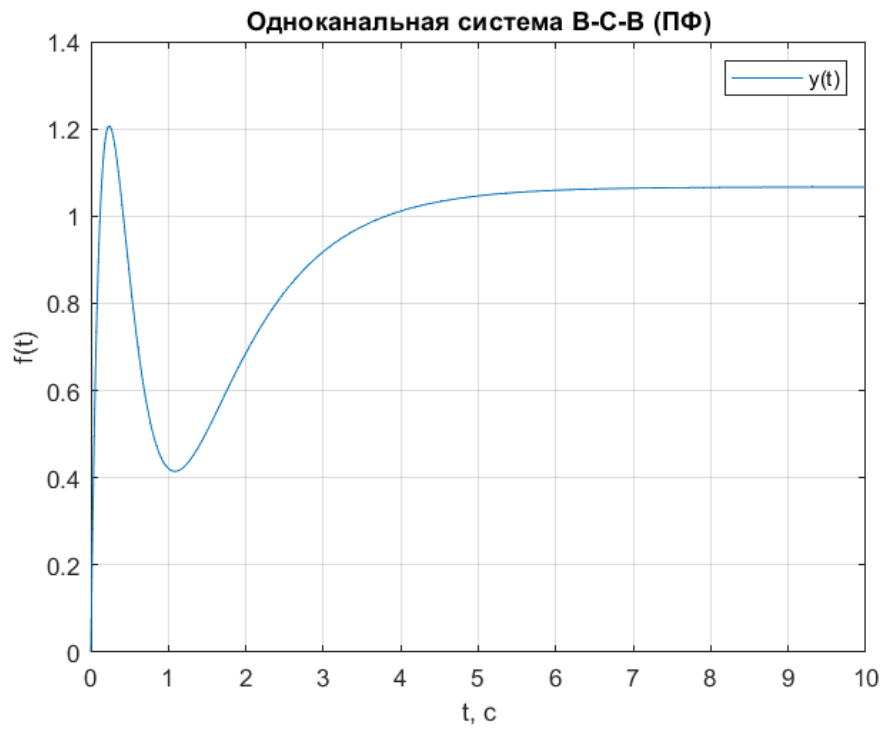


Рисунок 6 — График выходного сигнала одноканальной системы с использованием передаточной функции.

2.2.2 Каноническая управляемая форма

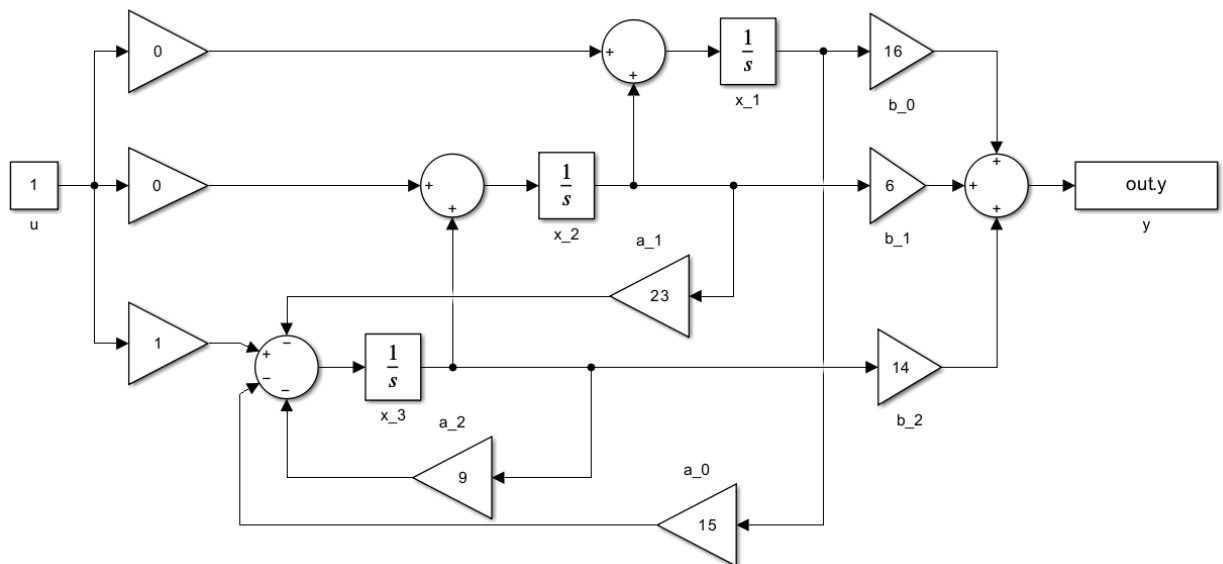


Рисунок 7 — Структурная схема системы в канонической управляемой форме.

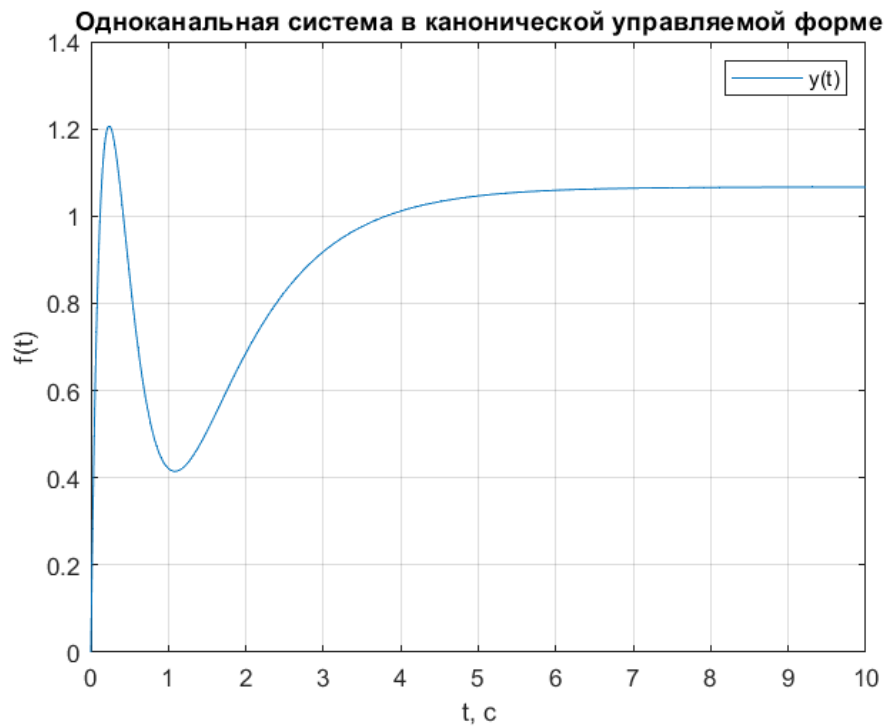


Рисунок 8 — График выходного сигнала системы в канонической управляемой форме.

2.2.3 Каноническая наблюдаемая форма

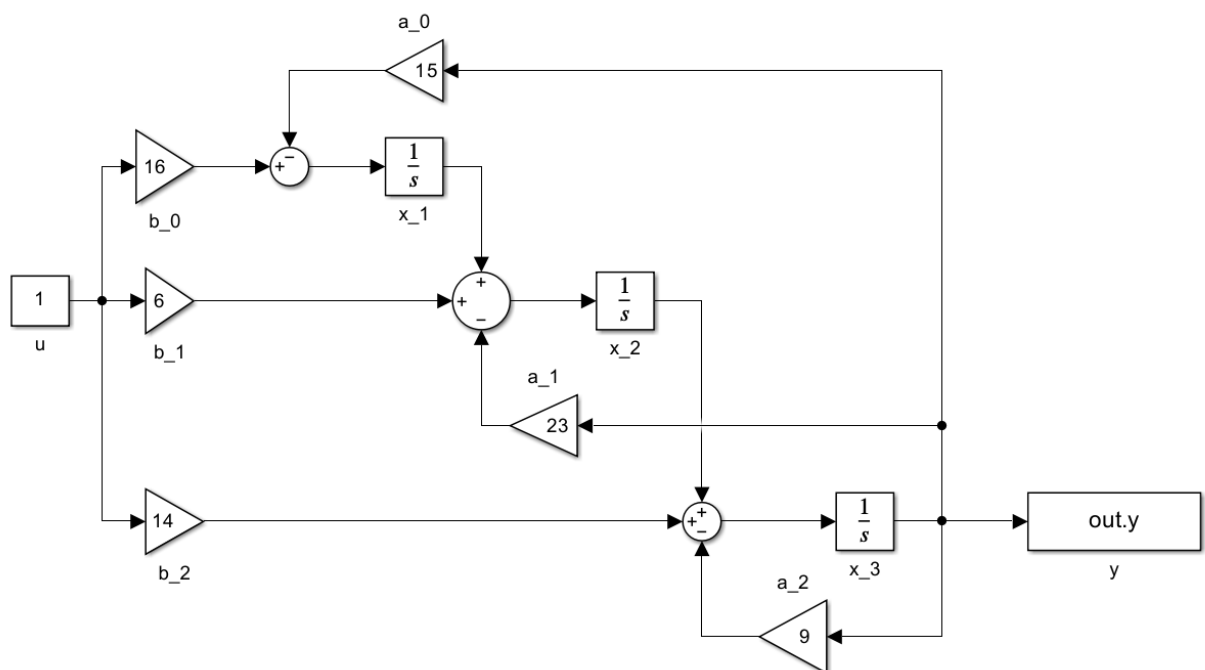


Рисунок 9 — Структурная схема системы в канонической наблюдаемой форме.

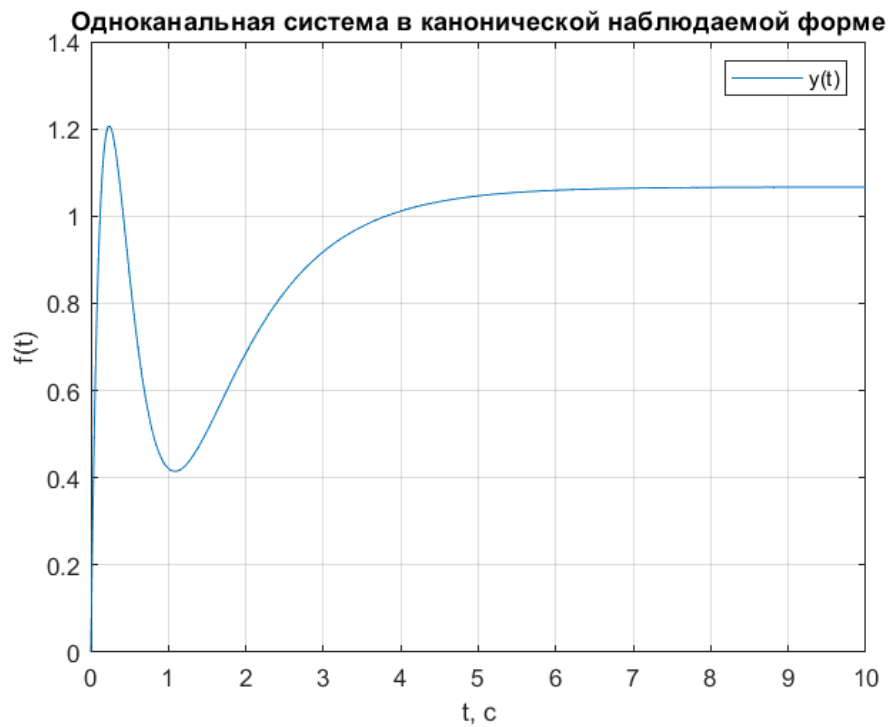


Рисунок 10 — График выходного сигнала системы в канонической наблюдаемой форме.

2.2.4 Каноническая диагональная форма

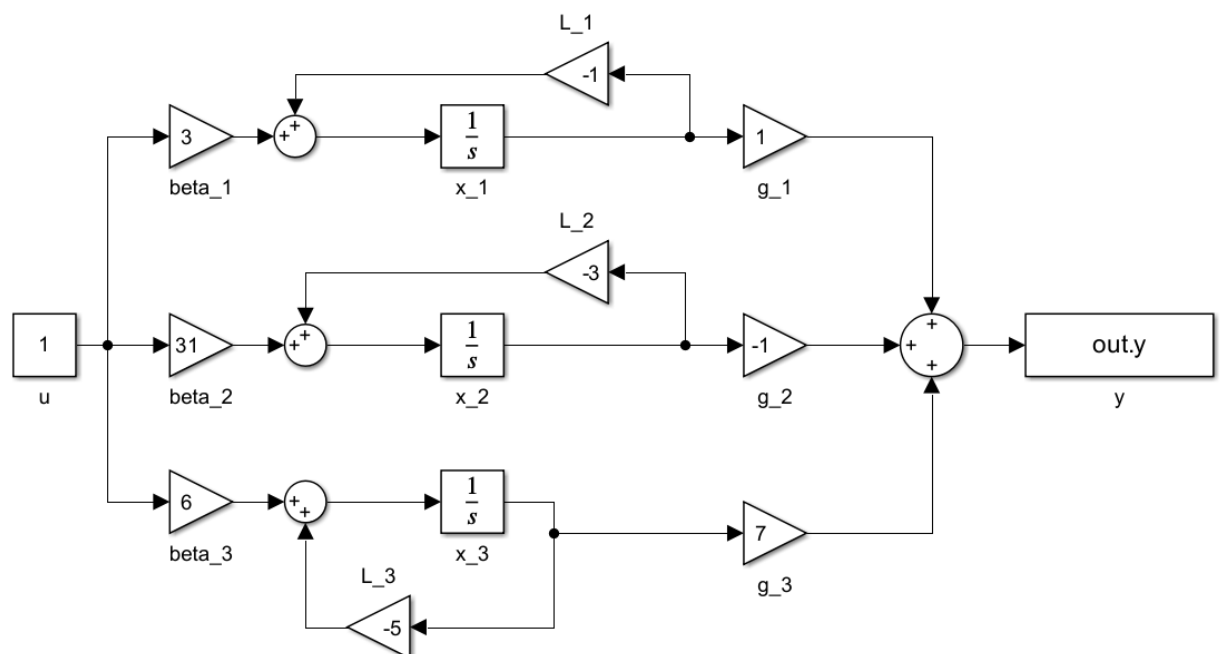


Рисунок 11 — Структурная схема системы в канонической диагональной форме.

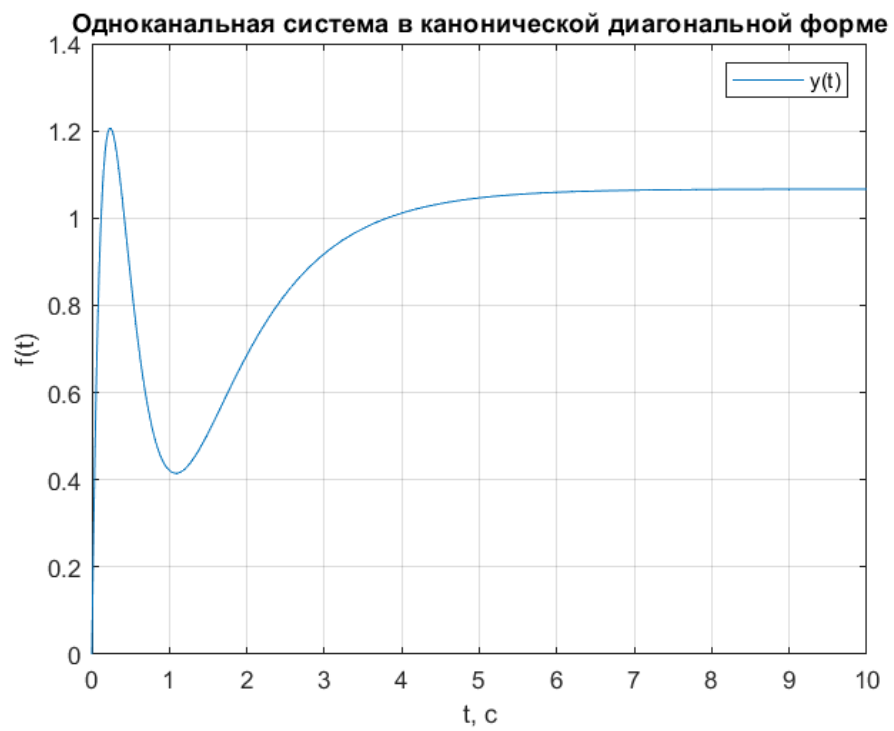


Рисунок 12 — График выходного сигнала системы в канонической диагональной форме.

2.3 Вывод

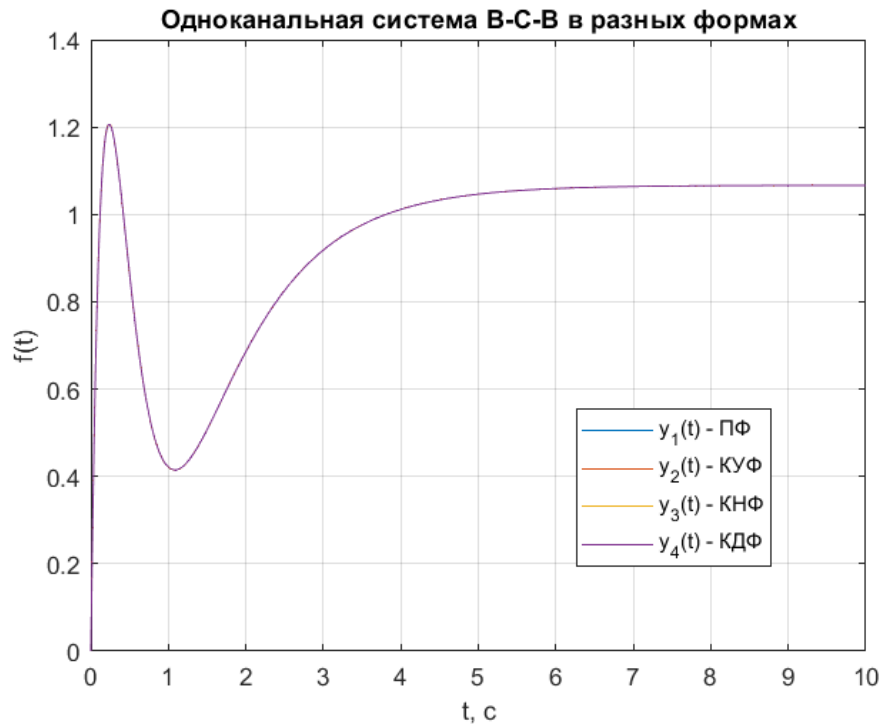


Рисунок 13 — График выходного сигнала системы в различных формах.

Заметим, что графики, представленные на рисунках 6, 8, 10, 12 идентичны друг другу, что дополнительно показано на рисунке 13, где все графики одной системы в различных формах наложились один на другой. Это служит доказательством того, что все рассмотренные формы представления системы равносильны друг другу.

3 МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-ВЫХОД

Возьмем коэффициенты в соответствии с вариантом $a_{11}(p) = p + 15$, $a_{12}(p) = p + 4$, $a_{21}(p) = p + 2$, $a_{22}(p) = p + 6$, $b_{11}(p) = 6$, $b_{12}(p) = 6$, $b_{21}(p) = 4$, $b_{22}(p) = 3$ и рассмотрим систему

$$A(p)y(t) = B(p)u(t),$$

где

$$A(p) = \begin{bmatrix} a_{11}(p) & a_{12}(p) \\ a_{21}(p) & a_{22}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + 15 & p + 4 \\ p + 2 & p + 6 \end{bmatrix},$$
$$B(p) = \begin{bmatrix} b_{11}(p) & b_{12}(p) \\ b_{21}(p) & b_{22}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},$$

3.1 Математическая модель (ПМ)

Получим выражение для передаточной матрицы:

$$A(p)y(t) = B(p)u(t) \Leftrightarrow y(t) = A^{-1}(p)B(p)u(t)$$

Теперь подставим имеющиеся данные и получим передаточную матрицу системы:

$$W(p) = \frac{1}{15p + 82} \begin{pmatrix} p + 6 & -p - 4 \\ -p - 2 & p + 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2p+20}{15p+82} & \frac{3p+24}{15p+82} \\ \frac{-2p+48}{15p+82} & \frac{-3p+33}{15p+82} \end{pmatrix}$$

3.2 Структурная схема системы

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p) \\ W_{21}(p) & W_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2p+20}{15p+82} & \frac{3p+24}{15p+82} \\ \frac{-2p+48}{15p+82} & \frac{-3p+33}{15p+82} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

В результате получим следующую структурную схему (рисунок 11)

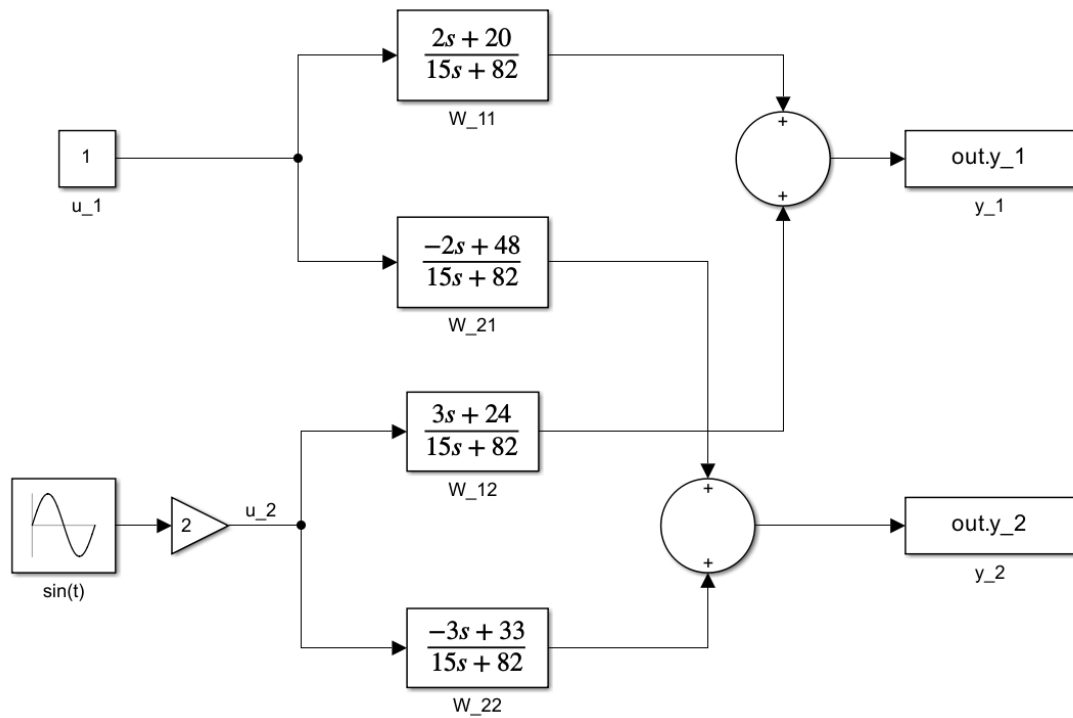


Рисунок 14 — Структурная схема многоканальной системы в форме вход-выход.

3.3 Графики сигналов $u(t)$ и $y(t)$

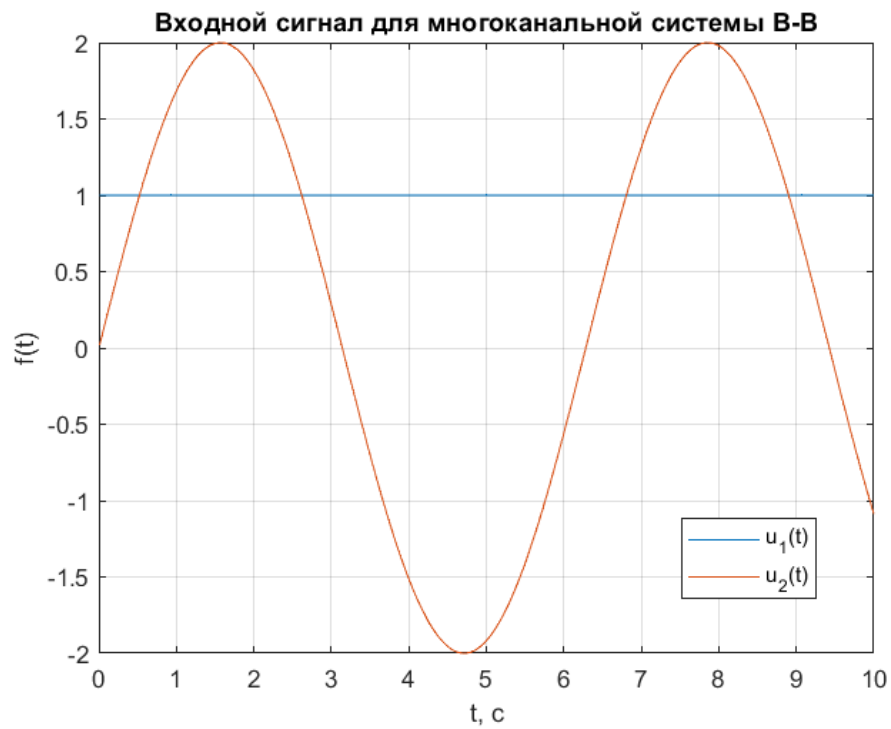


Рисунок 15 — График входного сигнала для многоканальной системы в форме вход-выход.

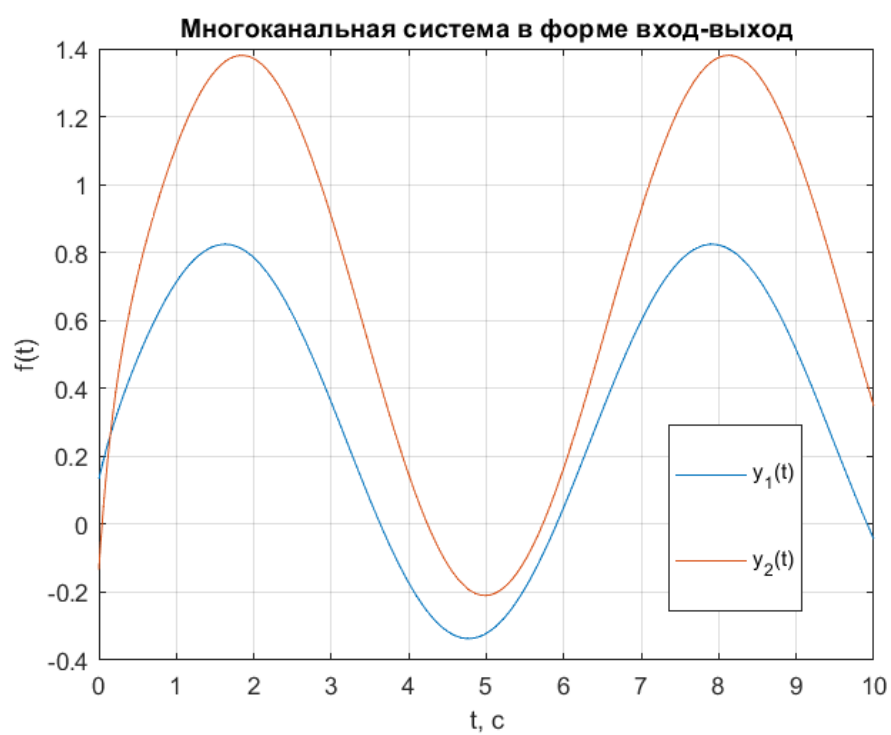


Рисунок 16 — График выходного сигнала многоканальной системы в форме вход-выход.

4 МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД

Запишем матрицы A , B и C в соответствии с вариантом:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

И рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \\ y_1 = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

4.1 Структурная схема

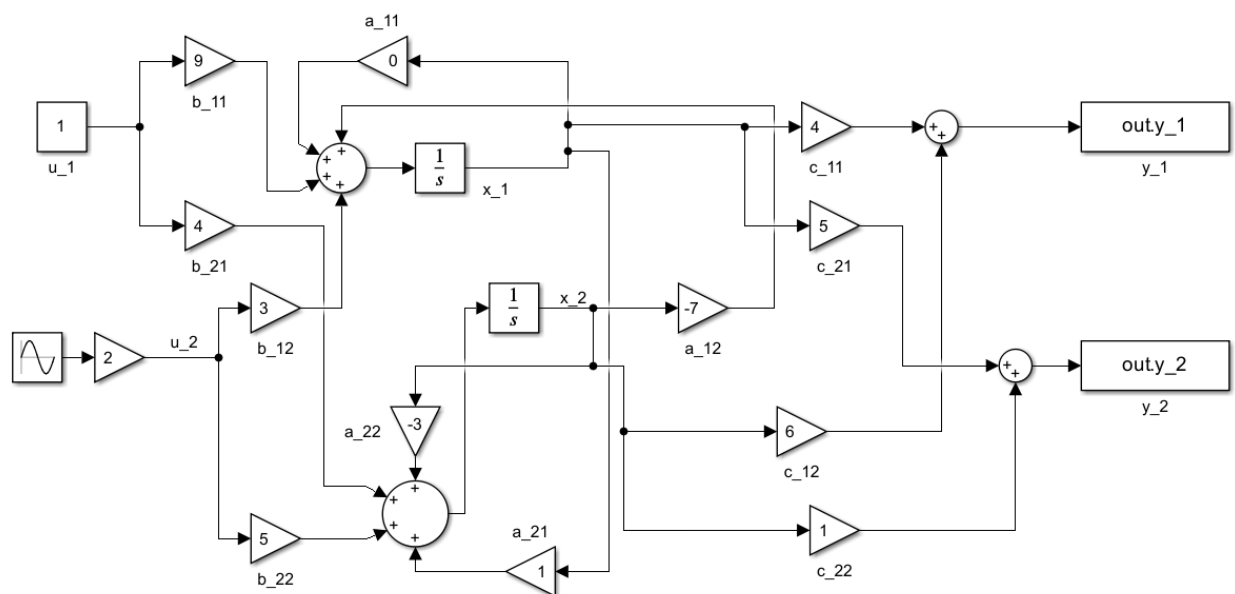


Рисунок 17 — Структурная схема многоканальной системы в форме вход-состояние-выход.

4.2 Графики сигналов $u(t)$ и $y(t)$

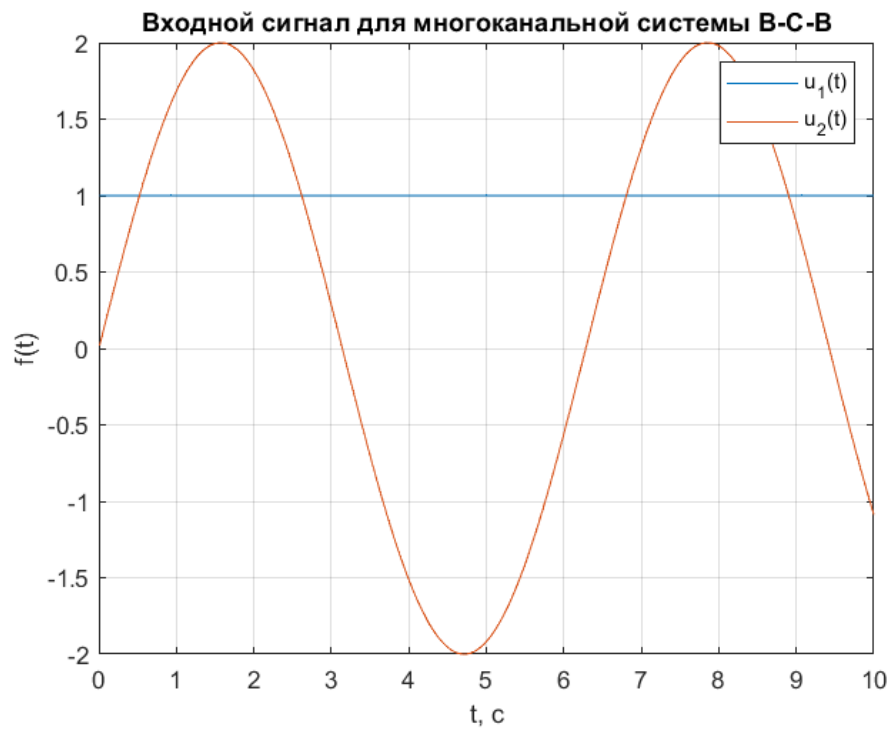


Рисунок 18 — График входного сигнала для многоканальной системы в форме вход-состояние-выход.

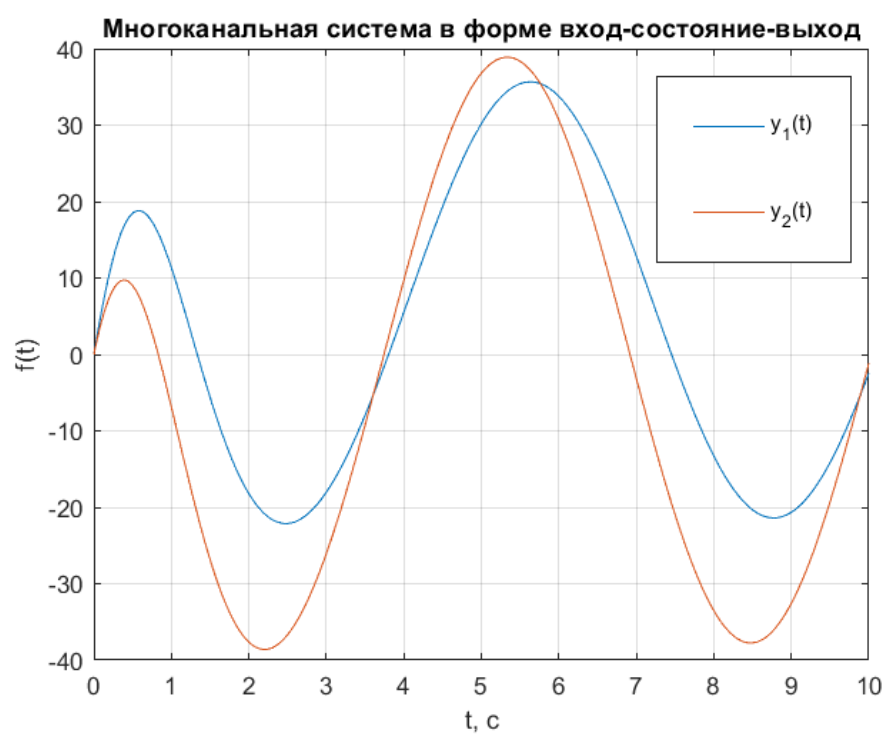


Рисунок 19 — График выходного сигнала многоканальной системы в форме вход-состояние-выход.

5 ВЫВОД

В ходе выполнения лабораторной работы были применены на практике знания о формах представления линейных динамических систем. Составлены математические модели для одноканальных и многоканальных систем в различных формах их представления. Построены структурные схемы с применением блоков элементарных операций. Проведено моделирование и предоставлены графики зависимости выходного сигнала от времени для каждой системы и рассмотренной формы ее представления.

Для одноканальной системы проведено сравнение результатов моделирования в различных формах представления, сделаны выводы о равносильности рассмотренных форм.