

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

**Лабораторная работа № 1**  
**«Формы представления линейных  
динамических систем»**

по дисциплине «Линейные системы автоматического управления»

**Вариант 27**

Студент: группа **R3338**

**Нечаева А. А.**

Преподаватель: *Пашенко Артем Витальевич*

Санкт-Петербург  
2024

ДОБАВИТЬ СТРАНИЦУ СОДЕРЖАНИЕ

# 1    Задание. Одноканальная система в форме ВХОД-ВЫХОД

## 1.1    Математическая модель

Возьмем коэффициенты  $a_2 = 9$ ,  $a_1 = 23$ ,  $a_0 = 15$ ,  $b_2 = 14$ ,  $b_1 = 6$  и  $b_0 = 16$ . Рассмотрим математическую модель в форме дифференциального уравнения

$$\ddot{y} + 9\ddot{y} + 23\dot{y} + 15y = 14\ddot{u} + 6\dot{u} + 16u \quad (1)$$

Перепишем с применением оператора дифференцирования

$$p^3[y] + 9p^2[y] + 23p[y] + 15y = 14p^2[u] + 6p[u] + 16u \quad (2)$$

Теперь выразим выходной сигнал  $y$

$$\begin{aligned} p^3[y] &= 14p^2[u] + 6p[u] + 16u - 9p^2[y] - 23p[y] - 15y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{p^3} [14p^2[u] + 6p[u] + 16u - 9p^2[y] - 23p[y] - 15y] = \\ &= 14\frac{1}{p}[u] + 6\frac{1}{p^2}[u] + 16\frac{1}{p^3}[u] - 9\frac{1}{p}[y] - 23\frac{1}{p^2}[y] - 15\frac{1}{p^3}[y] \quad (3) \end{aligned}$$

Получим выражение с применением операторов интегрирования.

## 1.2    Структурная схема системы

В среде моделирования *Simulink* построим структурную схему системы. Будем использовать блоки элементарных операций: «интегратор», «сумматор», «усилитель».

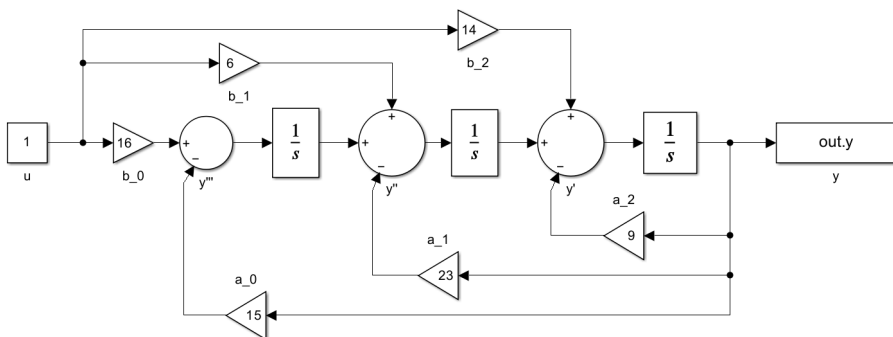


Рис. 1. Структурная схема первой системы.

### 1.3 Графики сигналов

Выполним моделирование при входном воздействии вида  $u(t) = 1$  и нулевых начальных условиях  $\ddot{y}(0)$ ,  $\dot{y}(0)$ ,  $y(0)$ . Полученные графики выходных сигналов приведены на рисунке 2.

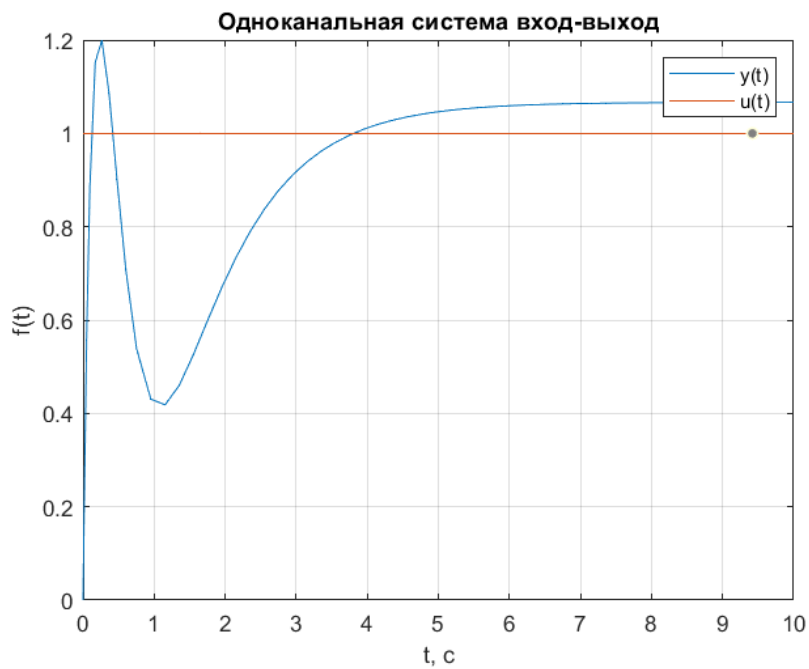


Рис. 2. Графики сигналов для одноканальной системы в форме вход-выход.

## 2    Задание. Переход от формы вход-выход к форме вход-состояние-выход

### 2.1    Математическая модель

#### 2.1.1    Передаточная функция

Для системы из 1 задания определим передаточную функцию  $W(p)$ .

$$\ddot{y} + 9\dot{y} + 23y = 14\ddot{u} + 6\dot{u} + 16u \quad (4)$$

Перепишем с применением оператора дифференцирования

$$\begin{aligned} p^3[y] + 9p^2[y] + 23p[y] + 15y &= 14p^2[u] + 6p[u] + 16u \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (p^3 + 9p^2 + 23p + 15)[y] &= (14p^2 + 6p + 16)[u] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= \frac{14p^2 + 6p + 16}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15}[u] + 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Получим передаточную функцию

$$W(p) = \frac{14p^2 + 6p + 16}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} \quad (6)$$

#### 2.1.2    Каноническая управляемая форма

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= [b_0 \quad b_1 \quad b_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = [16 \quad 6 \quad 14] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

### 2.1.3 Каноническая наблюдаемая форма

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -15 \\ 1 & 0 & -23 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix} u \\
 &\quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\
 &\quad \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (8)
 \end{aligned}$$

### 2.1.4 Каноническая диагональная форма

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u \\
 &\quad y = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Запишем передаточную функцию

$$W(p) = \frac{14p^2 + 6p + 16}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} \quad (10)$$

Разложим знаменатель на произведение множителей. Заметим, что один из корней  $p = -1$ , после применения схемы Горнера останется квадратное уравнение, решение которого находится по теореме Виета

$$(p + 1)(p^2 + 8p + 15) = (p + 1)(p + 3)(p + 5) \quad (11)$$

Найдем разложение вида

$$\begin{aligned}
 \frac{14p^2 + 6p + 16}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} &= \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p+5} = \\
 &= \frac{A(p+3)(p+5) + B(p+1)(p+5) + C(p+3)(p+1)}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} = \\
 &= \frac{Ap^2 + 8Ap + 15A + Bp^2 + 6Bp + 5B + Cp^2 + 4Cp + 3C}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} = \\
 &= \frac{(A+B+C)p^2 + (8A+6B+4C)p + 15A+5B+3C}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} = \\
 &= \frac{3}{p+1} - \frac{31}{p+3} + \frac{42}{p+5} \quad (12)
 \end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned}
 W(p) &= \frac{\beta_1 \cdot \gamma_1}{p - \lambda_1} + \frac{\beta_2 \cdot \gamma_2}{p - \lambda_2} + \frac{\beta_3 \cdot \gamma_3}{p - \lambda_3} = \frac{3}{p+1} - \frac{31}{p+3} + \frac{42}{p+5} = \\
 &= \frac{3 \cdot 1}{p+1} + \frac{31 \cdot (-1)}{p+3} + \frac{6 \cdot 7}{p+5} \quad (13)
 \end{aligned}$$

Наконец запишем систему в канонической диагональной форме.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 31 \\ 6 \end{bmatrix} u \\
 y &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (14)
 \end{aligned}$$

## 2.2 Структурные схемы системы для представления В-С-В и соответствующие графики

### 2.2.1 Передаточная функция

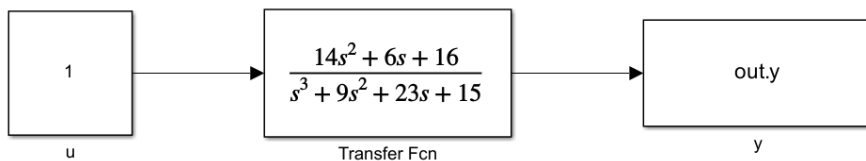


Рис. 3. Структурная схема с использованием передаточной функции.

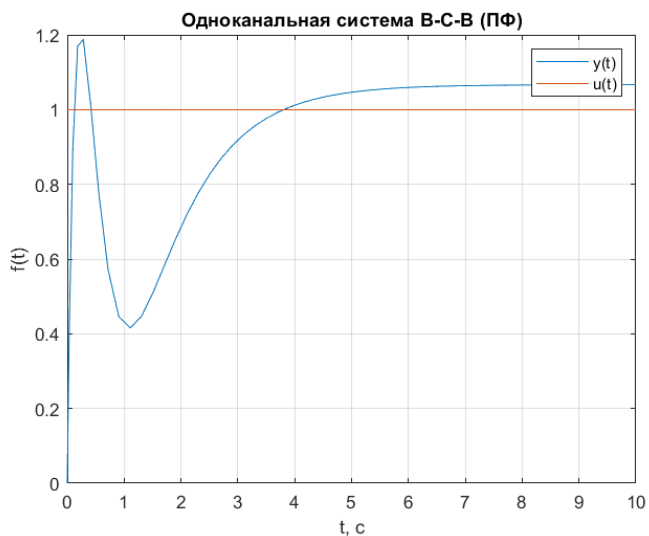


Рис. 4. График системы с использованием передаточной функции.



## 2.2.2 Каноническая управляемая форма

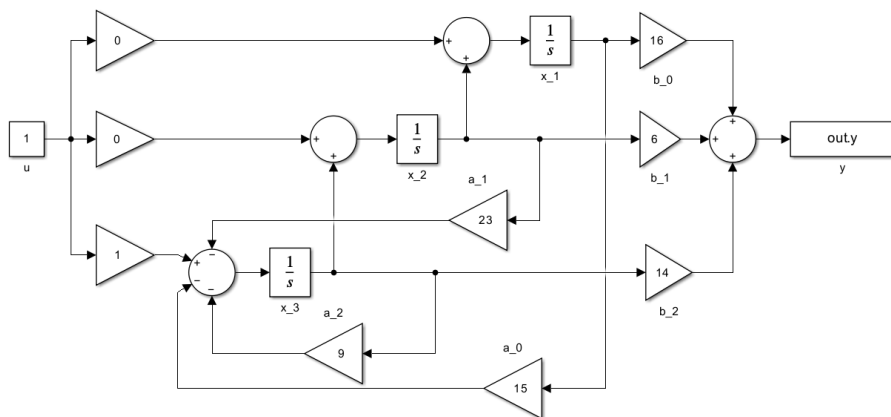
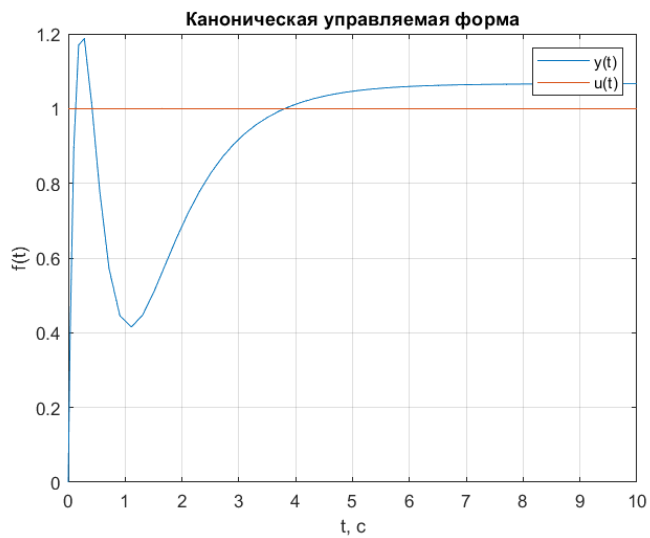


Рис. 5. Структурная схема системы в канонической управляемой форме.



*Рис. 6. График системы в канонической управляемой форме.*

### 2.2.3 Каноническая наблюдаемая форма

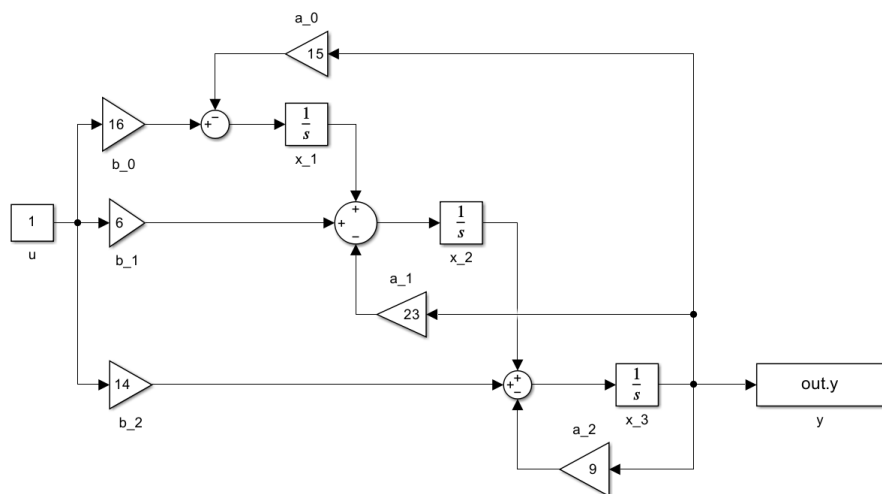
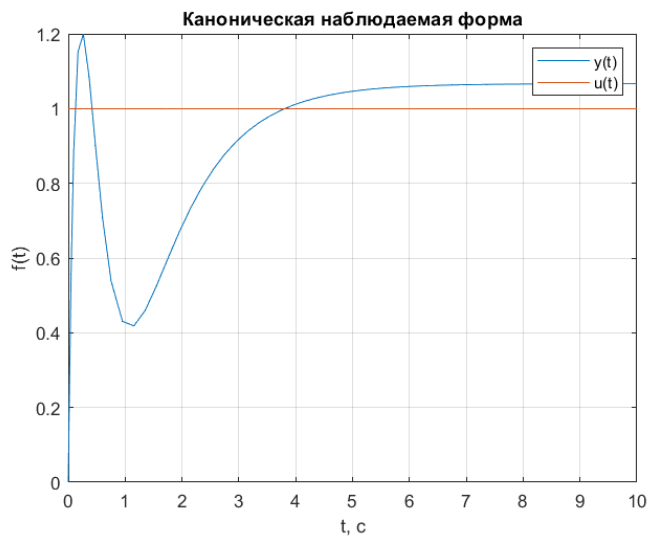


Рис. 7. Структурная схема системы в канонической наблюдаемой форме.



*Рис. 8. График системы в канонической наблюдаемой форме.*

## 2.2.4 Каноническая диагональная форма

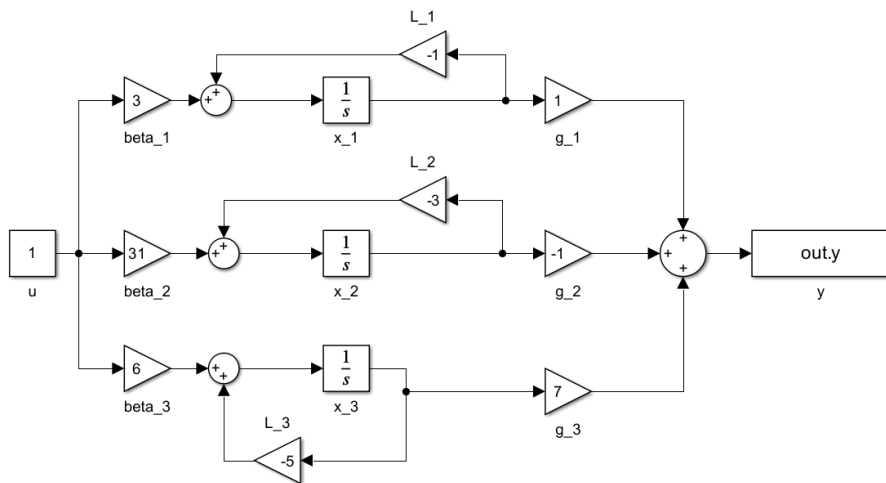


Рис. 9. Структурная схема системы в канонической диагональной форме.

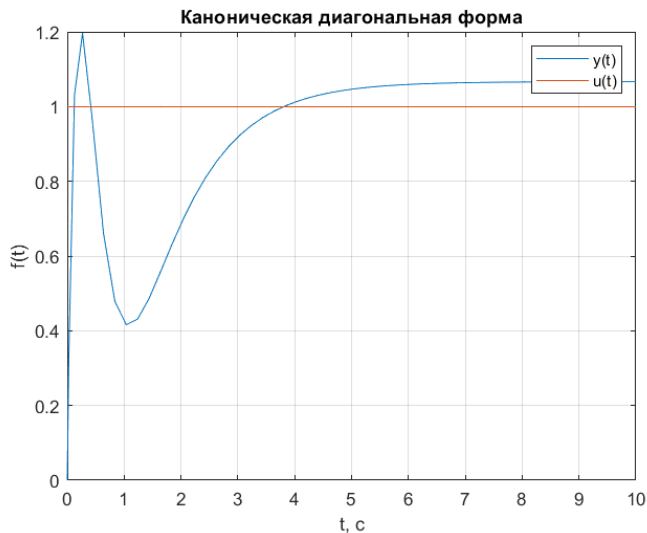


Рис. 10. График системы в канонической диагональной форме.

## 2.3 Выводы

Заметим, что графики, представленные на рисунках 4, 6, 8, 10 идентичны друг другу. Это служит доказательством того, что все рассмотренные формы представления системы верны.

## 3 Многоканальная система в форме вход-выход

Возьмем коэффициенты в соответствии с вариантом  $a_{11}(p) = p + 15$ ,  $a_{12}(p) = p + 4$ ,  $a_{21}(p) = p + 2$ ,  $a_{22}(p) = p + 6$ ,  $b_{11}(p) = 6$ ,  $b_{12}(p) = 6$ ,  $b_{21}(p) = 4$ ,  $b_{22}(p) = 3$  и рассмотрим систему

$$A(p)y(t) = B(p)u(t),$$

где

$$A(p) = \begin{bmatrix} a_{11}(p) & a_{12}(p) \\ a_{21}(p) & a_{22}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + 15 & p + 4 \\ p + 2 & p + 6 \end{bmatrix},$$

$$B(p) = \begin{bmatrix} b_{11}(p) & b_{12}(p) \\ b_{21}(p) & b_{22}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},$$

### 3.1 Математическая модель (ПМ)

Получим выражение для передаточной матрицы:

$$A(p)y(t) = B(p)u(t) \Leftrightarrow y(t) = A^{-1}(p)B(p)u(t)$$

Теперь подставим имеющиеся данные и получим передаточную матрицу системы:

$$W(p) = \frac{1}{15p+82} \begin{pmatrix} p+6 & -p-4 \\ -p-2 & p+15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2p+20}{15p+82} & \frac{3p+24}{15p+82} \\ \frac{-2p+48}{15p+82} & \frac{-3p+33}{15p+82} \end{pmatrix}$$

### 3.2 Структурная схема системы

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p) \\ W_{21}(p) & W_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2p+20}{15p+82} & \frac{3p+24}{15p+82} \\ \frac{-2p+48}{15p+82} & \frac{-3p+33}{15p+82} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

В результате получим следующую структурную схему (рисунок 11)

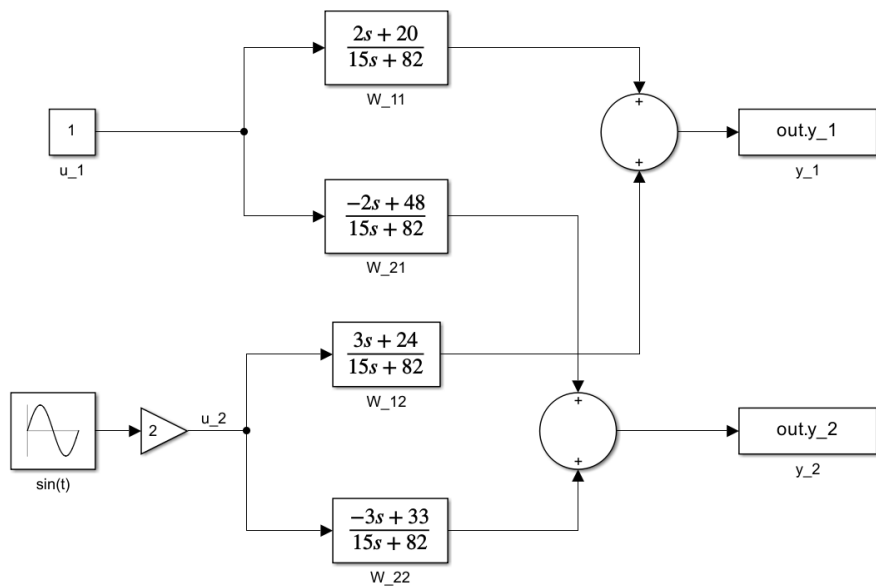


Рис. 11. Структурная схема многоканальной системы в форме вход-выход.

### 3.3 Графики сигналов $u(t)$ и $y(t)$



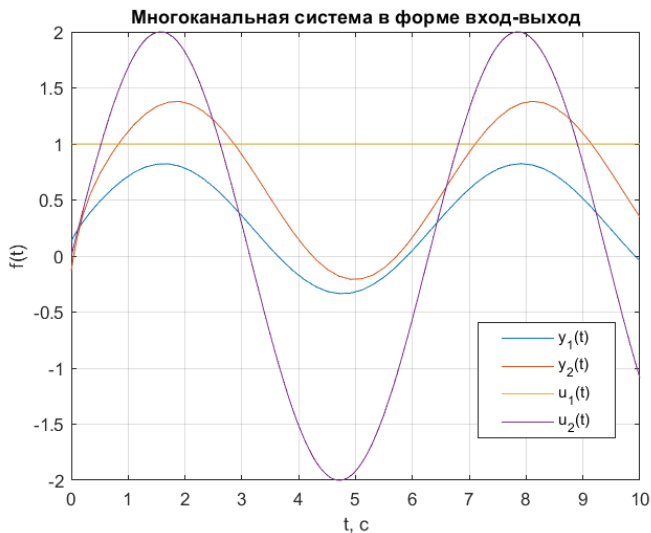


Рис. 12. График многоканальной системы в форме вход-выход.

## 4 Многоканальная система в форме вход-состояние-выход

Запишем матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  в соответствии с вариантом:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

И рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \\ y_1 = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

## 4.1 Структурная схема

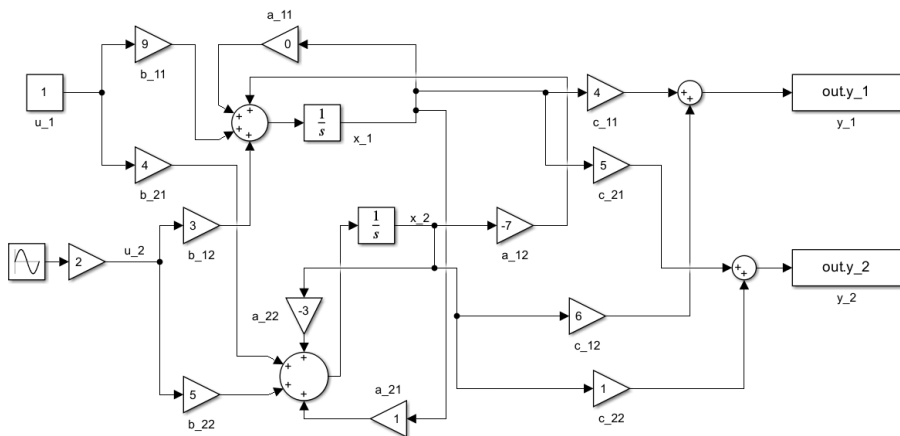


Рис. 13. Структурная схема многоканальной системы в форме вход-выход.

## 4.2 Графики сигналов $u(t)$ и $y(t)$

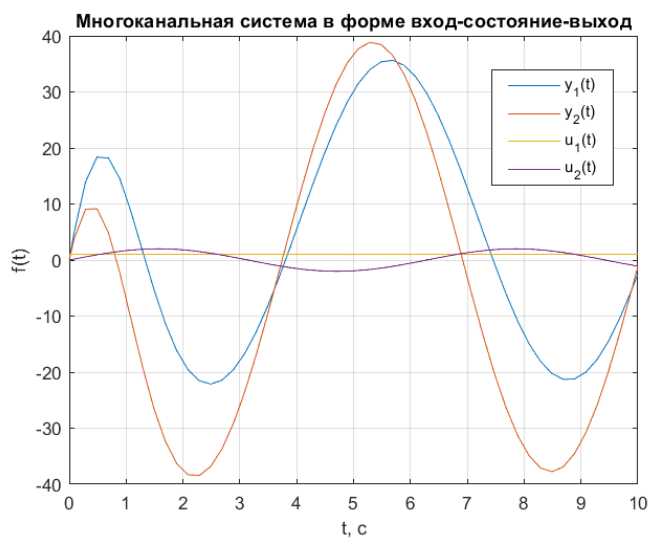


Рис. 14. График многоканальной системы в форме вход-выход.