Теория автоматического управления

Критерий Найквиста и системы с запаздыванием

Показатели качества систем управления

Показатели качества

1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. Точностные
4. Частотные
5. …

Частотные показатели качества

1. Частота $\omega_{\text{р}}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_{\text{р}}\colon A\left(\omega_{\text{р}}\right) = \max\{A(\omega)\}$

Частотные показатели качества

1. Частота $\omega_\text{р}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_\text{р}\colon A(\omega_\text{р}) = \max\{A(\omega)\}$

Вообще можно быть несколько, если рассматривать максимумы в отдельных «пиках»

Частотные показатели качества

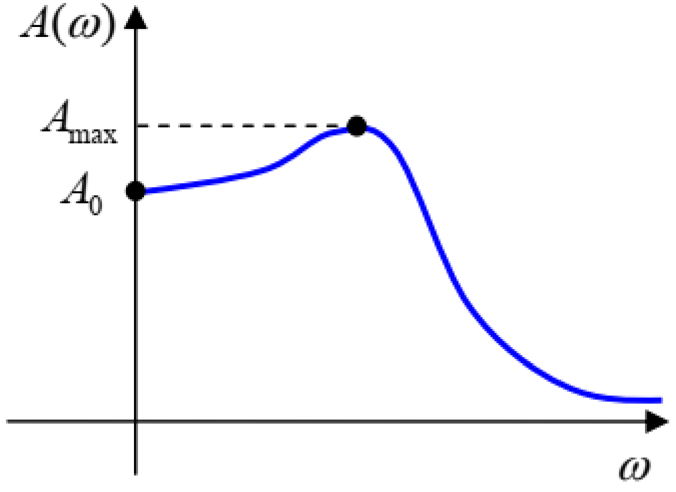
1. Частота $\omega_\text{р}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_\text{р}: A(\omega_\text{р}) = \max\{A(\omega)\}$

2. **Показателем колебательности** M называется отношение максимального значения $A(\omega_\text{р})$ к начальному значению $A(0)$.

$$M = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{A(\omega_\text{р})}{A(0)}$$

Тоже имеет смысл только для колебательных систем



Частотные показатели качества

1. Частота $\omega_\text{р}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_\text{р}\colon A(\omega_\text{р}) = \max\{A(\omega)\}$

2. **Показателем колебательности** M называется отношение максимального значения $A(\omega_\text{р})$ к начальному значению $A(0)$.

$$M = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{A(\omega_\text{р})}{A(0)}$$

3. **Частота среза** – частота, на которой ослабление фильтра равно $1/\sqrt{2}$ (-3 ДБ в логарифмическом масштабе).

Имеет смысл только для фильтров, см. предыдущую практику

Частотные показатели качества

1. Частота $\omega_\text{р}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_\text{р}\colon A(\omega_\text{р}) = \max\{A(\omega)\}$

2. **Показателем колебательности** M называется отношение максимального значения $A(\omega_\text{р})$ к начальному значению $A(0)$.

$$M = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{A(\omega_\text{р})}{A(0)}$$

3. **Частота среза** – частота, на которой ослабление фильтра равно $1/\sqrt{2}$ (-3 ДБ в логарифмическом масштабе).

4. **Полосой пропускания** называют интервал частот, при которых выполняется соотношение $A(\omega) > \frac{A(0)}{\sqrt{2}}$ или $A(\omega) > \frac{A(\omega_\text{р})}{\sqrt{2}}$.

Записано в общем виде,
но осмысленно раскрывает себя
тоже только для фильтров

Частотные показатели качества

1. Частота $\omega_\text{р}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_\text{р}\colon A(\omega_\text{р}) = \max\{A(\omega)\}$

2. **Показателем колебательности** M называется отношение максимального значения $A(\omega_\text{р})$ к начальному значению $A(0)$.

$$M = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{A(\omega_\text{р})}{A(0)}$$

Вот тут проблема, поскольку существует и другое определение, *противоречащее этому…*

3. **Частота среза** – частота, на которой ослабление фильтра равно $1/\sqrt{2}$ (-3 ДБ в логарифмическом масштабе).

4. **Полосой пропускания** называют интервал частот, при которых выполняется соотношение $A(\omega) > \frac{A(0)}{\sqrt{2}}$ или $A(\omega) > \frac{A(\omega_\text{р})}{\sqrt{2}}$.

Частотные показатели качества

1. Частота $\omega_\text{р}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_\text{р}\colon A\left(\omega_\text{р}\right) = \max\{A(\omega)\}$

2. **Показателем колебательности** M называется отношение максимального значения $A\left(\omega_\text{р}\right)$ к начальному значению $A(0)$.

$$M = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{A\left(\omega_\text{р}\right)}{A(0)}$$

Уже не только для фильтров, а для любых систем. Но к фильтрации теперь отношения не имеет.

3. **Частота среза** – частота, при которой $A\left(\omega_{\text{ср}}\right) = 1$, а $L\left(\omega_{\text{ср}}\right) = 0$.

4. **Полосой пропускания** называют интервал частот, при которых выполняется соотношение $A(\omega) > \frac{A(0)}{\sqrt{2}}$ или $A(\omega) > \frac{A\left(\omega_\text{р}\right)}{\sqrt{2}}$.

Частотные показатели качества

1. Частота $\omega_\text{р}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_\text{р}: A(\omega_\text{р}) = \max\{A(\omega)\}$

2. **Показателем колебательности** M называется отношение максимального значения $A(\omega_\text{р})$ к начальному значению $A(0)$.

$$M = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{A(\omega_\text{р})}{A(0)}$$

Остается только аккуратно говорить о двух частотах среза, уточняя, о которой речь

3а. **Частота среза (*фильтрация*)** – частота, на которой ослабление фильтра равно $1/\sqrt{2}$ (-3 ДБ в логарифмическом масштабе).

3б. **Частота среза (*частотные характеристики*)** – частота, при которой $A(\omega_{\text{ср}}) = 1$, а $L(\omega_{cp}) = 0$.

4. **Полосой пропускания** называют интервал частот, при которых выполняется соотношение $A(\omega) > \frac{A(0)}{\sqrt{2}}$ или $A(\omega) > \frac{A(\omega_\text{р})}{\sqrt{2}}$.

Частотные показатели качества

1. Частота $\omega_{\text{р}}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_{\text{р}}: A(\omega_{\text{р}}) = \max\{A(\omega)\}$

2. **Показателем колебательности** M называется отношение максимального значения $A(\omega_{\text{р}})$ к начальному значению $A(0)$.

$$M = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{A(\omega_{\text{р}})}{A(0)}$$

Остается только аккуратно говорить о двух частотах среза, уточняя, о которой речь

3а. **Частота среза (*фильтрация*)** – частота, на которой ослабление фильтра равно $1/\sqrt{2}$ (-3 ДБ в логарифмическом масштабе).

3б. **Частота среза (*частотные характеристики*)** – частота, при которой $A(\omega_{\text{ср}}) = 1$, а $L(\omega_{cp}) = 0$.

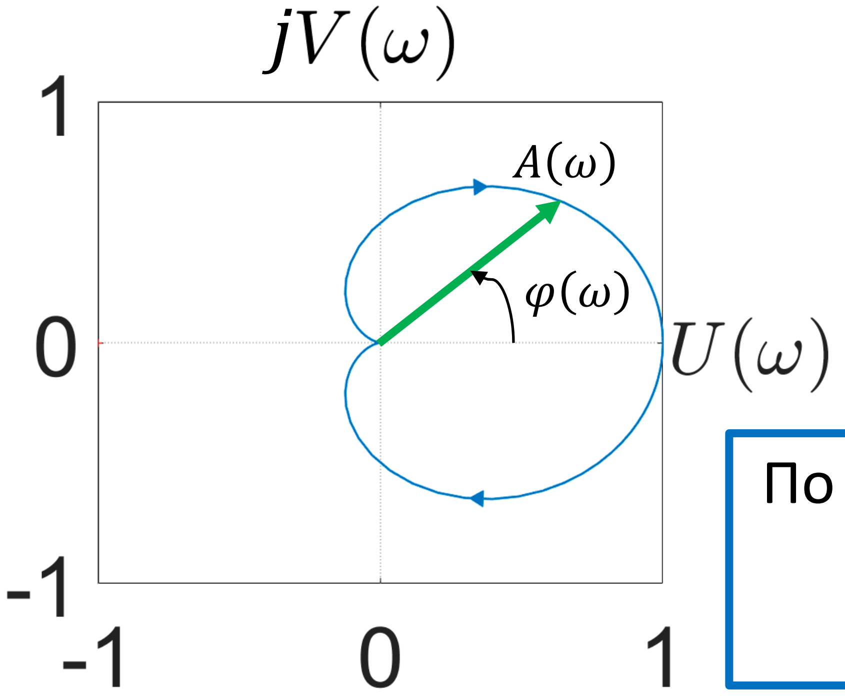
4. **Полосой пропускания** называют интервал частот, при которых выполняется соотношение $A(\omega) > \frac{A(0)}{\sqrt{2}}$ или $A(\omega) > \frac{A(\omega_{\text{р}})}{\sqrt{2}}$.

И это не все, еще пара позже

С предыдущей практики: АФЧХ

$V(U)$:

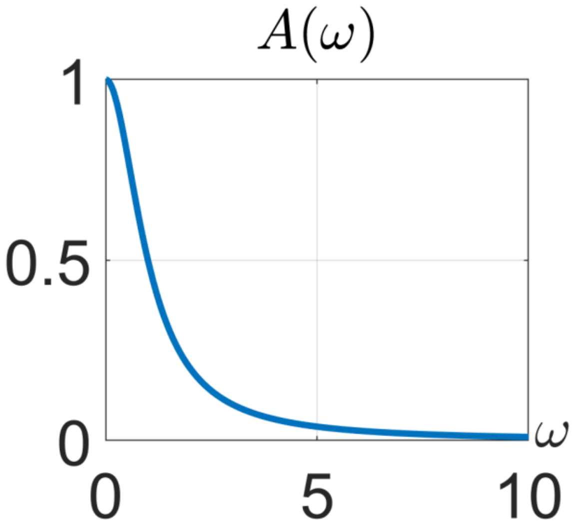
Амплитудно-фазовая частотная характеристика



$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

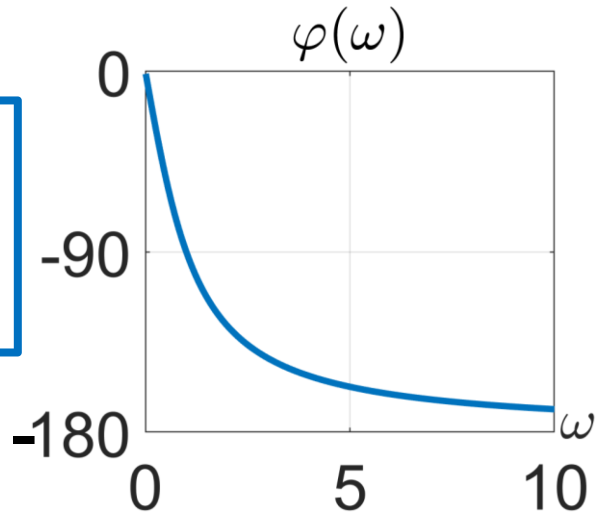
$A(\omega)$:

Амплитудная частотная характеристика



$\varphi(\omega)$:

Фазовая

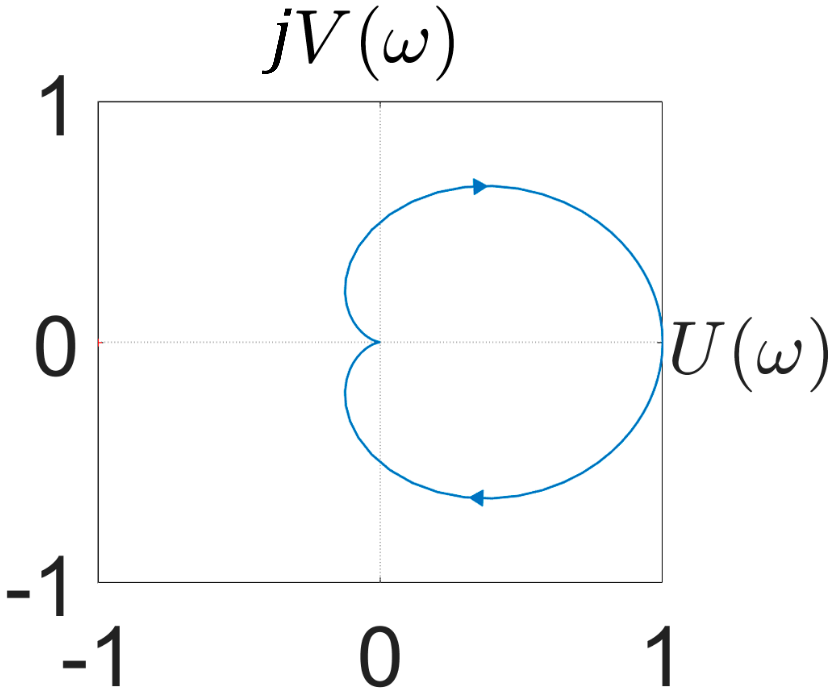


По сути полярные координаты, можно сопоставить одновременное изменение фазы и амплитуды

С предыдущей практики: АФЧХ

$V(U)$:

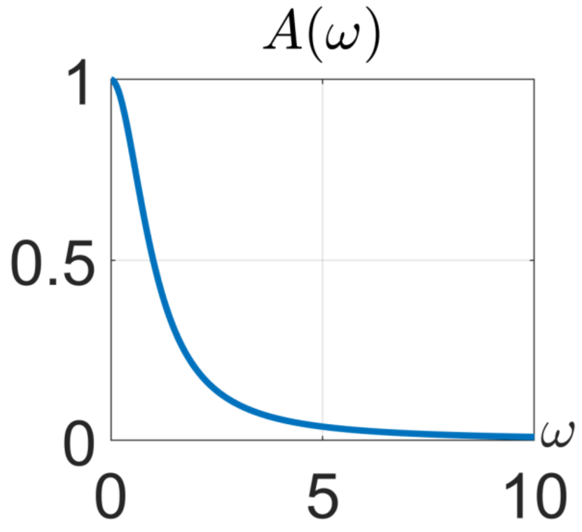
Амплитудно-фазовая частотная характеристика



$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

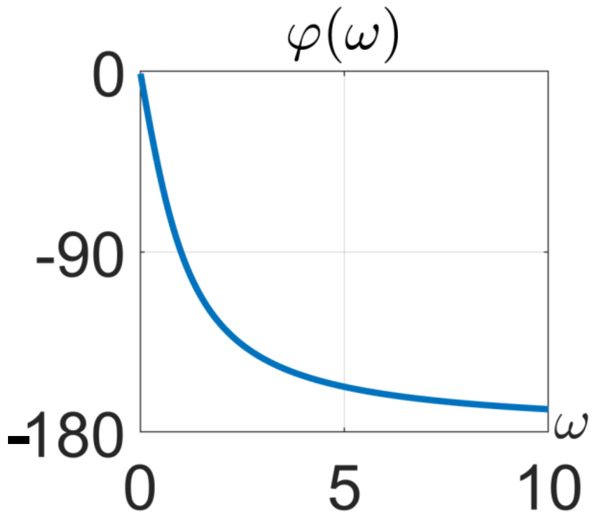
$A(\omega)$:

Амплитудная частотная характеристика



$\varphi(\omega)$:

Фазовая частотная характеристика

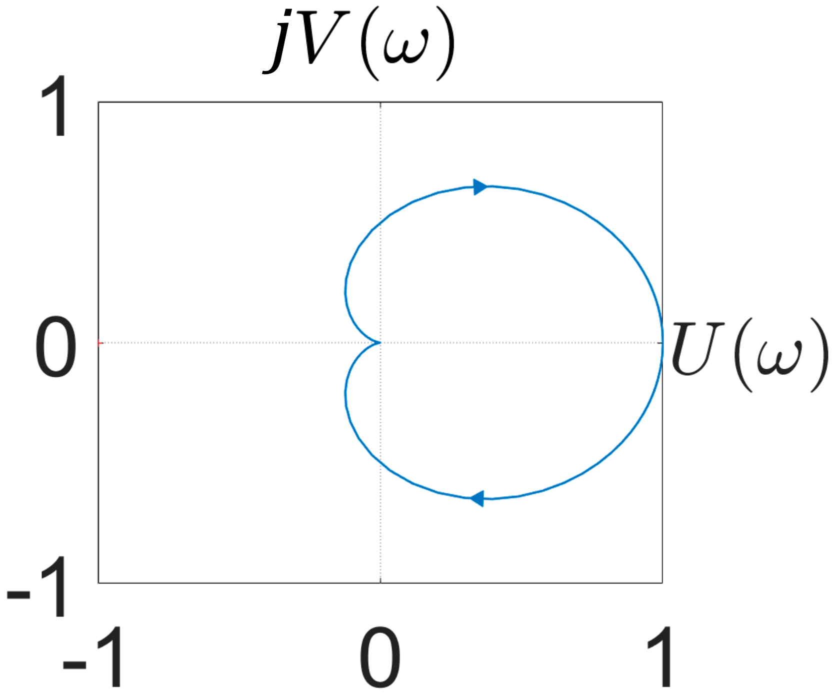


Критерий Найквиста: с лекции

$V(U)$:

Амплитудно-фазовая частотная характеристика /

Годограф Найквиста



$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Число неустойчивых полюсов разомкнутой системы

+

Число оборотов АФЧХ по часовой стрелке вокруг точки (-1,0)

=

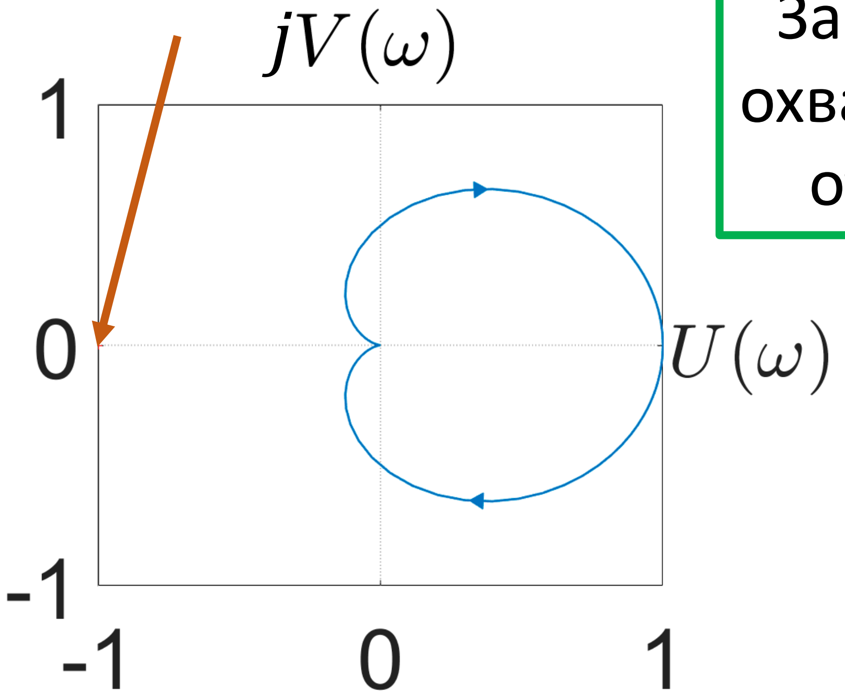
Число неустойчивых полюсов замкнутой системы

Критерий Найквиста: с лекции

$V(U)$:

Амплитудно-фазовая частотная характеристика /

Годограф Найквиста



$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Замкнутая система = охваченная единичной отрицательной ОС

Число неустойчивых полюсов разомкнутой системы

$+$

Число оборотов АФЧХ по часовой стрелке вокруг точки (-1,0)

$=$

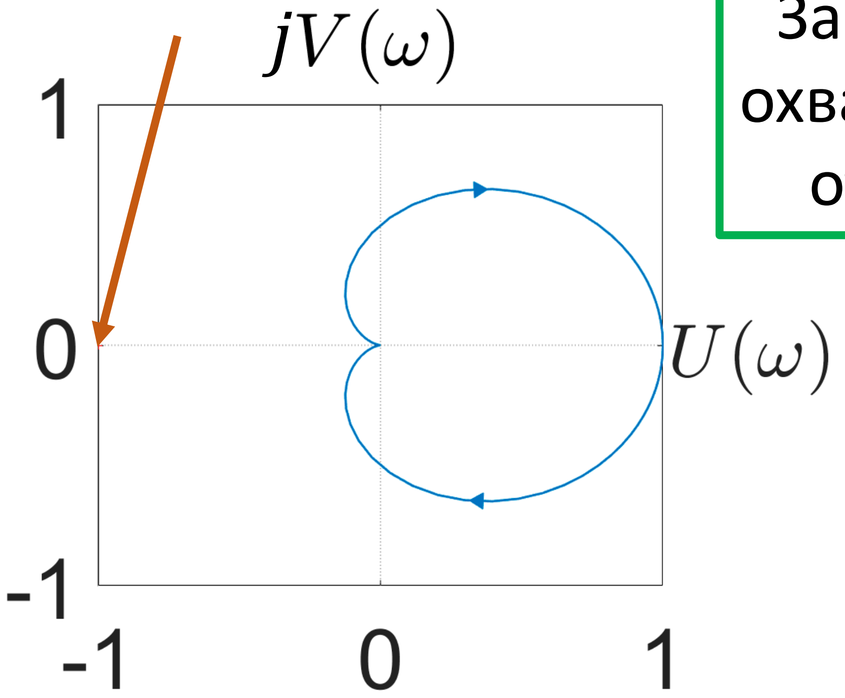
Число неустойчивых полюсов замкнутой системы

Критерий Найквиста: с лекции

$V(U)$:

Амплитудно-фазовая частотная характеристика /

Годограф Найквиста



Замкнутая система = охваченная единичной отрицательной ОС

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Число неустойчивых полюсов разомкнутой системы

—

Число оборотов АФЧХ против часовой стрелке вокруг точки (-1,0)

=

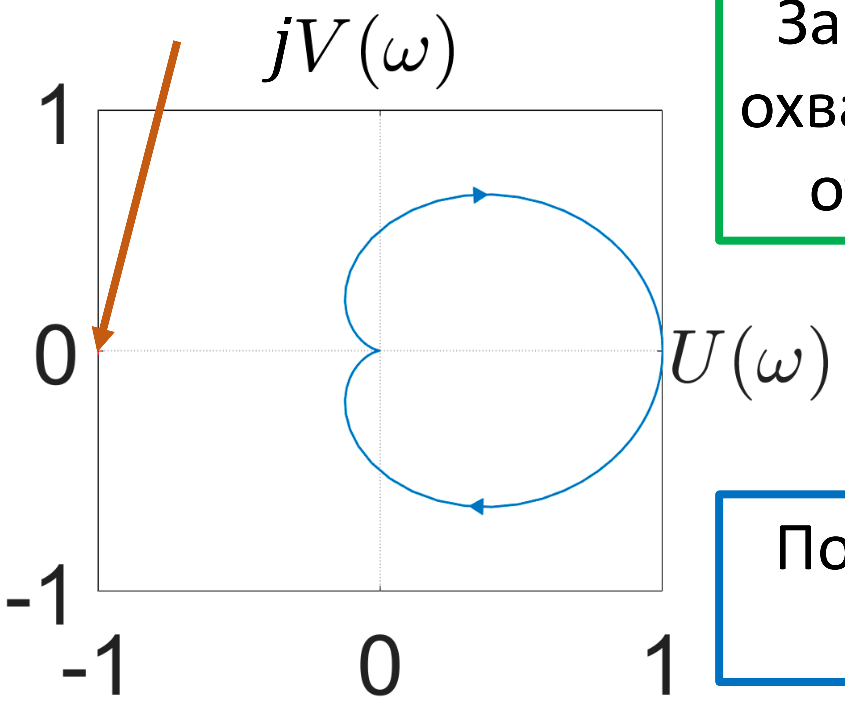
Число неустойчивых полюсов замкнутой системы

Критерий Найквиста: с лекции

$V(U)$:

Амплитудно-фазовая частотная характеристика /

Годограф Найквиста



Замкнутая система = охваченная единичной отрицательной ОС

Почему вокруг точки (-1,0)?

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Число неустойчивых полюсов разомкнутой системы

+

Число оборотов АФЧХ по часовой стрелке вокруг точки (-1,0)

=

Число неустойчивых полюсов замкнутой системы

Принцип аргумента

Рассмотрим частотный полином

$$D(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0$$

Принцип аргумента

Рассмотрим частотный полином

$$\boxed{j\omega - \lambda_i = A_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)}}$$

$$D(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0$$

$$\Downarrow$$

Можно разложить $D(j\omega) = a_n(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2)\dots(j\omega - \lambda_n) = \left(\prod A_i(\omega)\right)e^{j\sum \varphi_i(\omega)}$,

пусть среди n корней $(n - m)$ левых и m правых (считая граничные).

Принцип аргумента

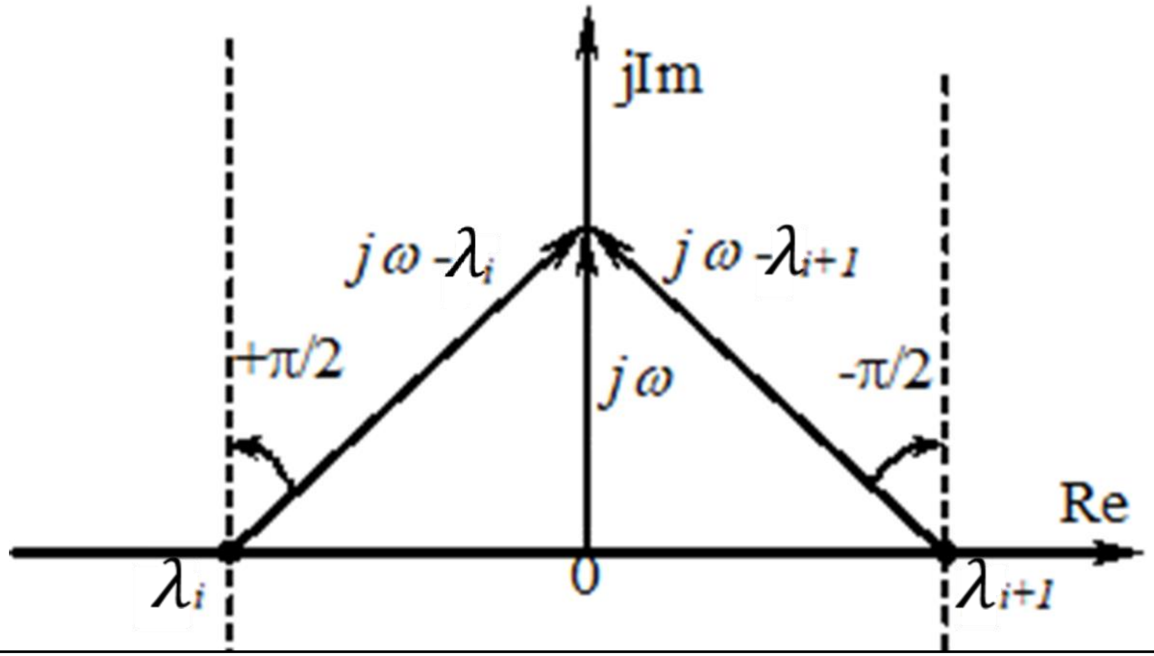
Рассмотрим частотный полином

$$D(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0$$

$$\Downarrow$$

Можно разложить $D(j\omega) = a_n(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2)\dots(j\omega - \lambda_n) = \left(\prod A_i(\omega)\right)e^{j\sum \varphi_i(\omega)}$,
пусть среди n корней $(n-m)$ левых и m правых (считая граничные).

Пусть все корни – вещественные.
При изменении ω от 0 до $+\infty$ аргумент (угол вектора $j\omega - \lambda_i$) изменится
на $\frac{\pi}{2}$ для левого корня
и на $-\frac{\pi}{2}$ для правого корня.



Принцип аргумента

Рассмотрим частотный полином

$$D(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0$$

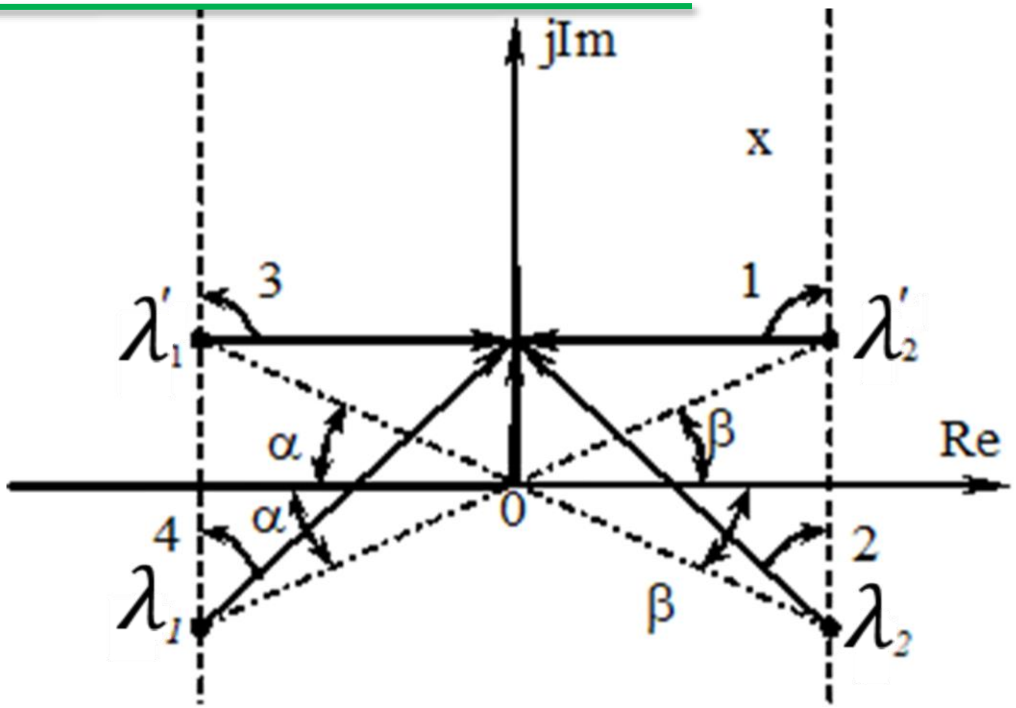
$$\Downarrow$$

Можно разложить $D(j\omega) = a_n(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2)\dots(j\omega - \lambda_n) = \left(\prod A_i(\omega)\right)e^{j\sum \varphi_i(\omega)}$,

пусть среди n корней $(n-m)$ левых и m правых (считая граничные).

В случае пары комплексных корней при изменении ω от 0 до $+\infty$ изменение аргумента составит
π для пары левых корней
и $-\pi$ для пары правых корней.

То есть все равно по $\pm\frac{\pi}{2}$ *на корень.*



Принцип аргумента

Рассмотрим частотный полином

$$D(j\omega)=a_n(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\cdots+a_1(j\omega)+a_0$$

$$\Downarrow$$

Можно разложить $D(j\omega)=a_n(j\omega-\lambda_1)(j\omega-\lambda_2)\ldots(j\omega-\lambda_n)=\left(\prod A_i(\omega)\right)e^{j\sum\varphi_i(\omega)}$,
пусть среди n корней $(n-m)$ левых и m правых (считая граничные).

По правилу перемножения комплексных чисел:

$$\Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)\Big|_{\omega\to+\infty}=\sum\Delta\varphi_i(\omega)\Big|_{\omega\to+\infty}=m\left(-\frac{\pi}{2}\right)+(n-m)\frac{\pi}{2}=n\frac{\pi}{2}-2m\frac{\pi}{2}$$

Принцип аргумента

Рассмотрим частотный полином

$$D(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0$$

$$\Downarrow$$

Можно разложить $D(j\omega) = a_n(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2) \dots (j\omega - \lambda_n) = \left(\prod A_i(\omega)\right) e^{j\sum \varphi_i(\omega)}$,
пусть среди n корней $(n - m)$ левых и m правых (считая граничные).

По правилу перемножения комплексных чисел:

$$\Delta\varphi_\mathrm{D}(\omega)\Big|_{\omega\to+\infty} = \sum \Delta\varphi_i(\omega)\Big|_{\omega\to+\infty} = m\left(-\frac{\pi}{2}\right) + (n-m)\frac{\pi}{2} = n\frac{\pi}{2} - 2m\frac{\pi}{2}$$

$W(s) = \dfrac{R(s)}{D(s)}$ – асимптотически устойчива (нет правых корней) $\Leftrightarrow$ $\Delta\varphi_\mathrm{D}(\omega)\Big|_{\omega\to+\infty} = n\dfrac{\pi}{2}$

Принцип аргумента

$W(s) = \frac{R(s)}{D(s)}$ – асимптотически устойчива (нет правых корней) $\Leftrightarrow$ $\Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)\Big|_{\omega\to+\infty} = n\frac{\pi}{2}$ (вращение против часовой)

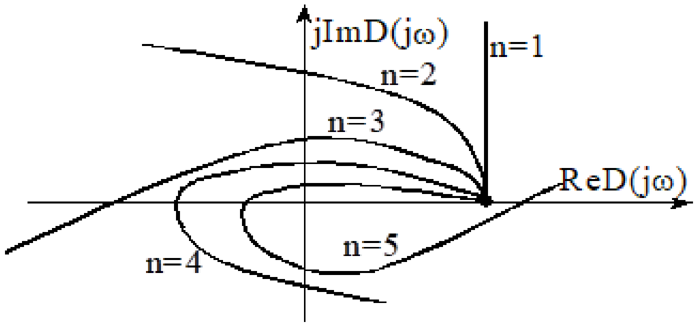
На основании этого существует критерий устойчивости Эрмита-Михайлова:
Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова (АФЧХ знаменателя ПФ) при изменении ω от 0 до $+\infty$ пересек против часовой стрелки n четвертей без пропусков, где n – порядок системы.

Принцип аргумента

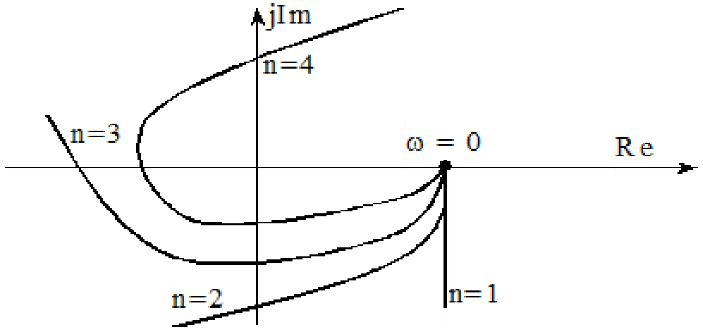
$W(s) = \frac{R(s)}{D(s)}$ – асимптотически устойчива (нет правых корней) $\Leftrightarrow$ $\Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)\Big|_{\omega\to+\infty} = n\frac{\pi}{2}$ (вращение против часовой)

На основании этого существует критерий устойчивости Эрмита-Михайлова:

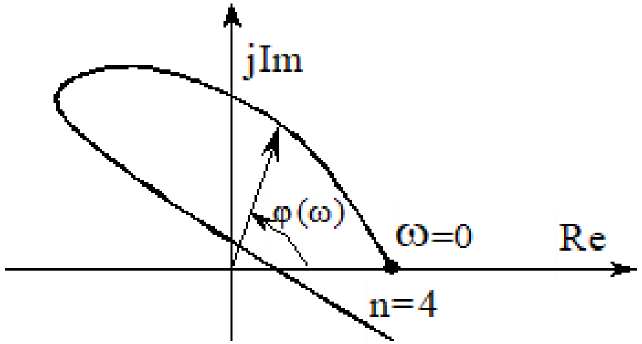
Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова (АФЧХ знаменателя ПФ) при изменении ω от 0 до $+\infty$ пересек против часовой стрелки n четвертей без пропусков, где n – порядок системы.



Системы устойчивы



Системы неустойчивы (по часовой)



Система неустойчива (не по порядку)

Принцип аргумента

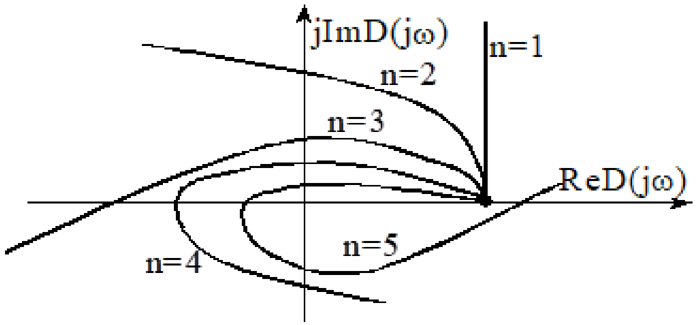
$W(s) = \dfrac{R(s)}{D(s)}$ – асимптотически устойчива (нет правых корней)

$\Leftrightarrow$

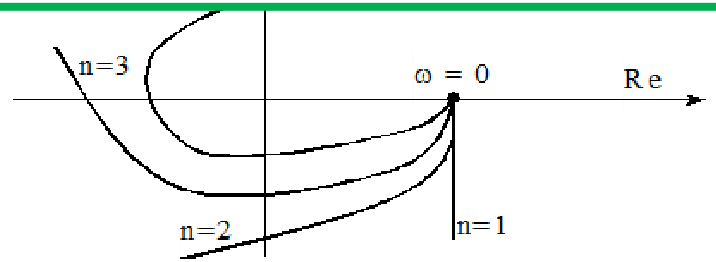
$\Delta\varphi_D(\omega)\Big|_{\omega\to+\infty} = n\dfrac{\pi}{2}$ (вращение против часовой)

На основании этого сущес … ита-Михайлова:
Для устойчивости систе … чтобы годограф
Михайлова (АФЧХ знамен … 0 до $+\infty$ пересек
против часовой стрелки … n – порядок системы.

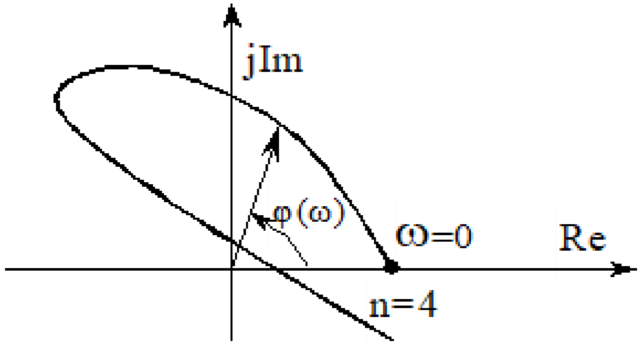
При желании можете подробнее ознакомиться в специализированной литературе (например, что делать для систем на границе)



Системы устойчивы

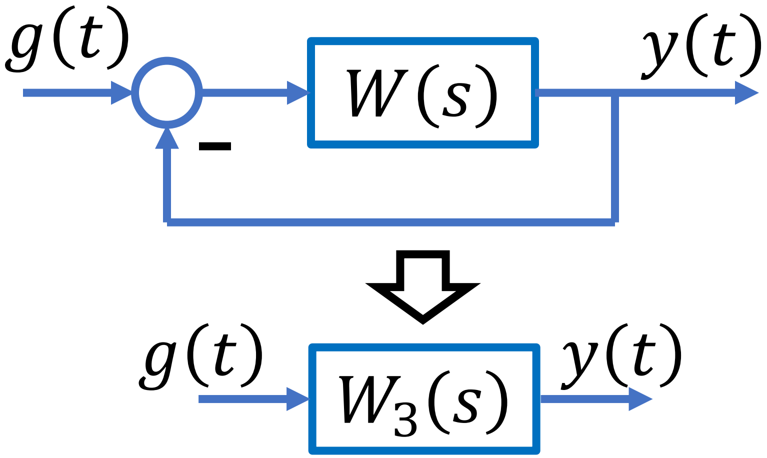


Системы неустойчивы (по часовой)



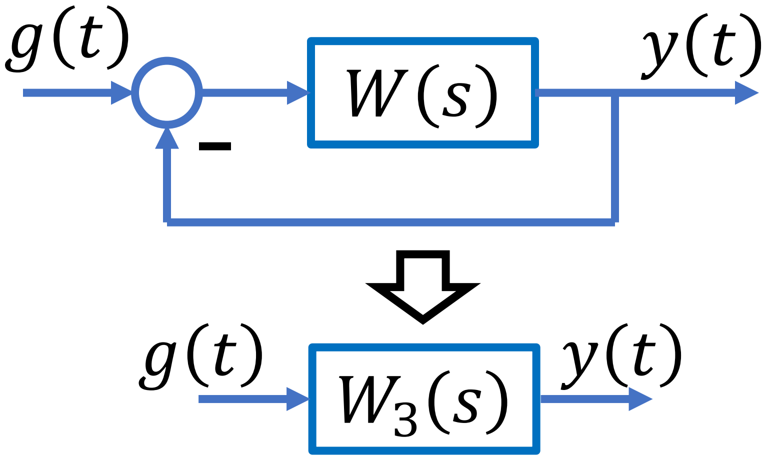
Система неустойчива (не по порядку)

Критерий Найквиста: обоснование



Откуда взялась точка (-1;0)?

Критерий Найквиста: обоснование

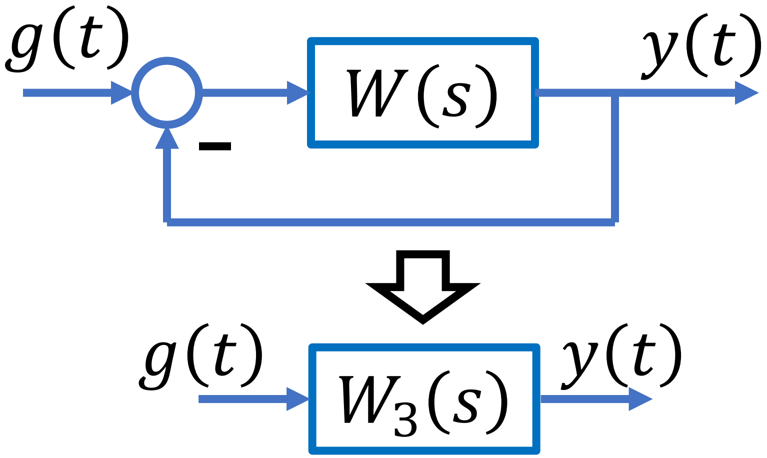


$$W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$$

Откуда взялась точка (-1;0)?

$$W_3(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{R(s)}{Q(s) + R(s)} = \frac{R(s)}{D(s)}$$

Критерий Найквиста: обоснование



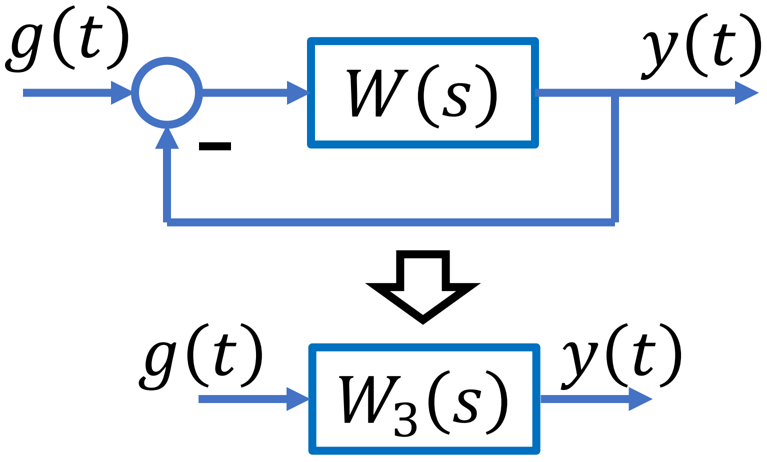
$$W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$$

Откуда взялась точка (-1;0)?

$$W_3(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{R(s)}{Q(s) + R(s)} = \frac{R(s)}{D(s)}$$

Для асимптотической устойчивости нужны левые корни $D(s)$

Критерий Найквиста: обоснование



$$W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$$

Откуда взялась точка (-1;0)?

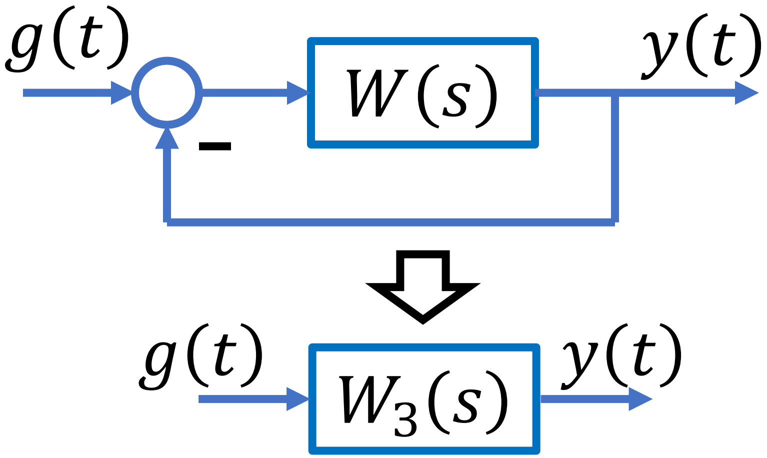
$$W_З(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{R(s)}{Q(s) + R(s)} = \frac{R(s)}{D(s)}$$

Вспомогательная ПФ:

$$W_{Вс}(s) = 1 + W(s) = \frac{Q(s) + R(s)}{Q(s)} = \frac{D(s)}{Q(s)}$$

Для асимптотической устойчивости нужны левые корни $D(s)$

Критерий Найквиста: обоснование



$$W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$$

Откуда взялась точка (-1;0)?

$$W_3(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{R(s)}{Q(s) + R(s)} = \frac{R(s)}{D(s)}$$

Вспомогательная ПФ:

$$W_{\text{Вс}}(s) = 1 + W(s) = \frac{Q(s) + R(s)}{Q(s)} = \frac{D(s)}{Q(s)}$$

Отношение полинома знаменателя замкнутой системы $D(s)$ к полиному разомкнутой $Q(s)$

Для асимптотической устойчивости нужны левые корни $D(s)$

Критерий Найквиста: обоснование

1. Пусть $W(s)$ – асимптотически устойчивая, тогда

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Q}}(\omega)\big|_{\omega\to+\infty} = n\frac{\pi}{2},$$ где n – порядок системы

Откуда взялась точка (-1;0)?

Критерий Найквиста: обоснование

1. Пусть $W(s)$ – асимптотически устойчивая, тогда

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Q}}(\omega)\big|_{\omega\to+\infty} = n\frac{\pi}{2},$$ где n – порядок системы

Откуда взялась точка (-1;0)?

2.

Если замкнутая система $W_З(s)$ ас. устойчива, тогда

$$\Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)\big|_{\omega\to+\infty} = n\frac{\pi}{2}$$

Если замкнутая система $W_З(s)$ неустойчива, тогда

$$\Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)\Big|_{\omega\to+\infty} = (n-2m)\frac{\pi}{2},$$

где m – количество корней в правой полуплоскости полинома $D(j\omega)$

Критерий Найквиста: обоснование

Откуда взялась точка (-1;0)?

1. Пусть $W(s)$ – асимптотически устойчивая, тогда

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Q}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = n\frac{\pi}{2},$$ где n – порядок системы

2.

Если замкнутая система $W_3(s)$ ас. устойчива, тогда

$$\Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = n\frac{\pi}{2}$$

Если замкнутая система $W_3(s)$ неустойчива, тогда

$$\Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)\Big|_{\omega\to+\infty} = (n-2m)\frac{\pi}{2},$$

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Bc}}(\omega) = \Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega) - \Delta\varphi_{\mathrm{Q}}(\omega)$$

$$W_{\mathrm{Bc}}(s) = 1 + W(s) = \frac{D(s)}{Q(s)}$$

Критерий Найквиста: обоснование

Откуда взялась точка (-1;0)?

1. Пусть $W(s)$ – асимптотически устойчивая, тогда

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Q}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = n\frac{\pi}{2},$$ где n – порядок системы

2.

Если замкнутая система $W_{З}(s)$ ас. устойчива, тогда

$$\Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = n\frac{\pi}{2}$$

Если замкнутая система $W_{З}(s)$ неустойчива, тогда

$$\Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)\Big|_{\omega\to+\infty} = (n-2m)\frac{\pi}{2},$$

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Bc}}(\omega) = \Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega) - \Delta\varphi_{\mathrm{Q}}(\omega)$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

3.

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Bc}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = 0$$

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Bc}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = -m\pi$$

Критерий Найквиста: обоснование

Откуда взялась точка (-1;0)?

1. Пусть $W(s)$ – асимптотически устойчивая, тогда

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Q}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = n\frac{\pi}{2},$$ где n – порядок системы

2.

Если замкнутая система $W_3(s)$ ас. устойчива, тогда

$$\Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = n\frac{\pi}{2}$$

Если замкнутая система $W_3(s)$ неустойчива, тогда

$$\Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)\Big|_{\omega\to+\infty} = (n-2m)\frac{\pi}{2},$$

$$\Downarrow \qquad \Delta\varphi_{\mathrm{Bc}}(\omega) = \Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega) - \Delta\varphi_{\mathrm{Q}}(\omega) \qquad \Downarrow$$

3.

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Bc}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = 0$$

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Bc}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = -m\pi$$

Если замкнутая система устойчива, то АФЧХ вспомогательной системы не охватывает начало координат

Критерий Найквиста: обоснование

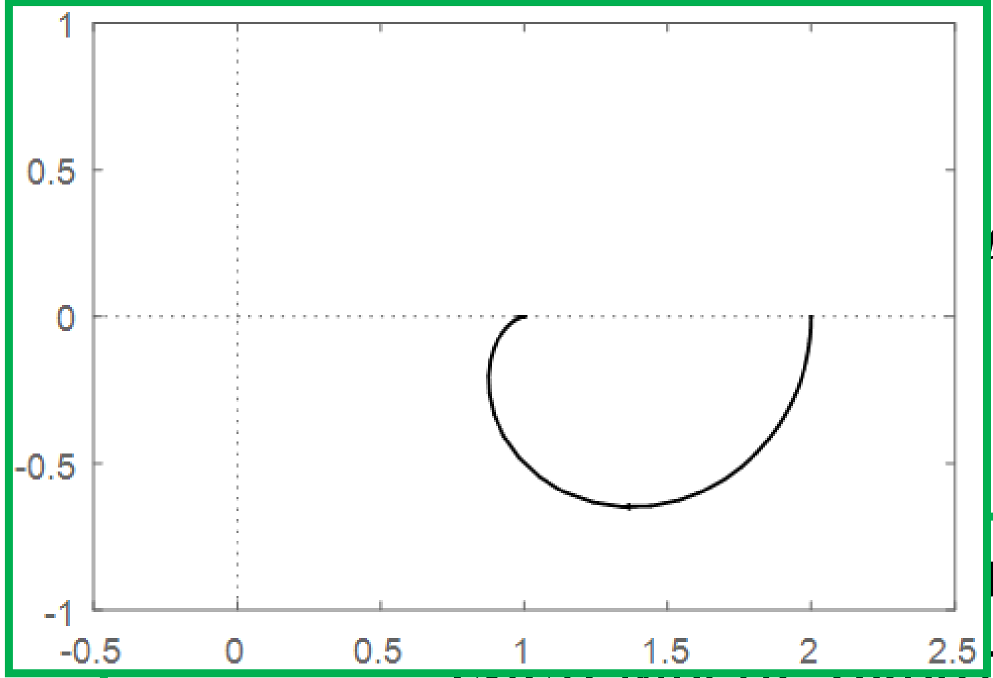
1. Пусть $W(s)$ – асимптотически устойчивая, тогда

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Q}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = n\frac{\pi}{2},$$ где n – порядок системы

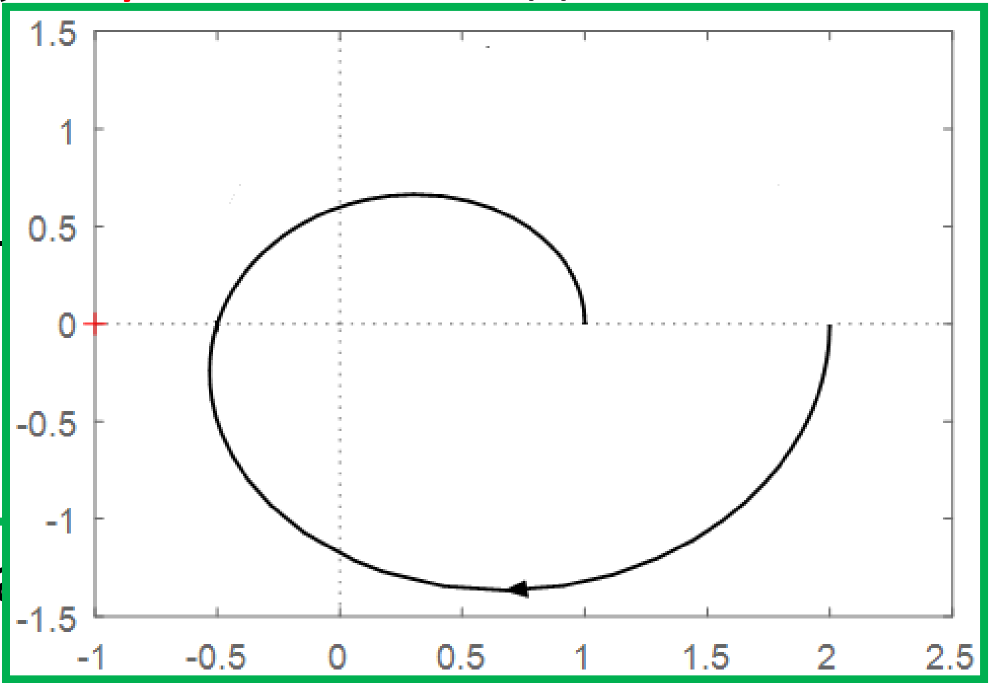
Откуда взялась точка (-1;0)?

2.

Если замкнутая система $W_З(s)$ ас. устойчива, тогда



Если замкнутая система $W_З(s)$ неустойчива, тогда



$\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)$ –

3.

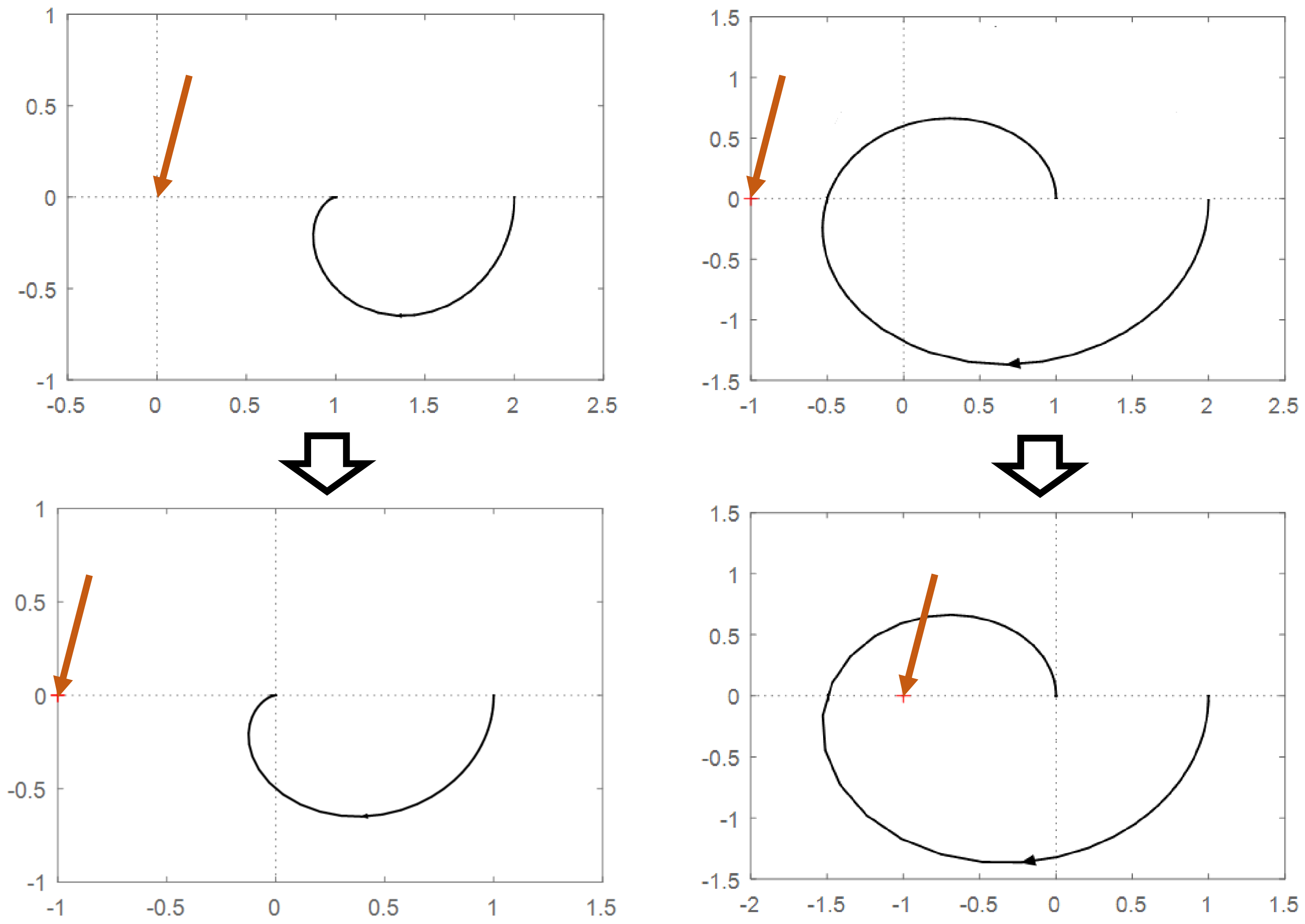
тойчива

тывает

Критерий Найквиста: обоснование

$W_{\text{Вс}}(s)$

$W(s)$
$= W_{\text{Вс}}(s) - 1$

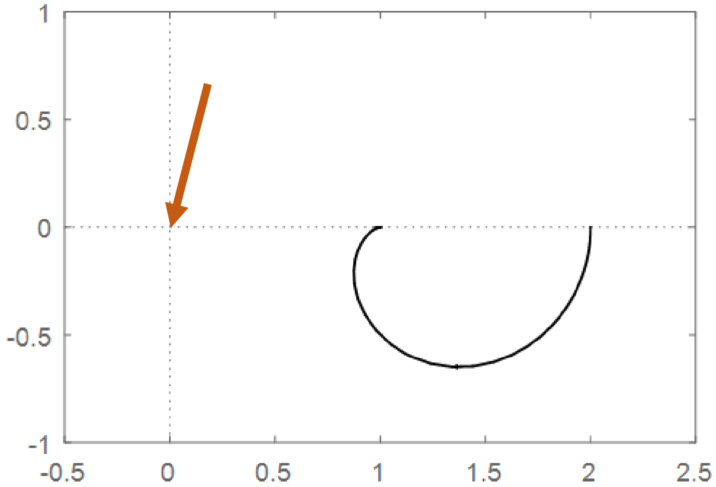


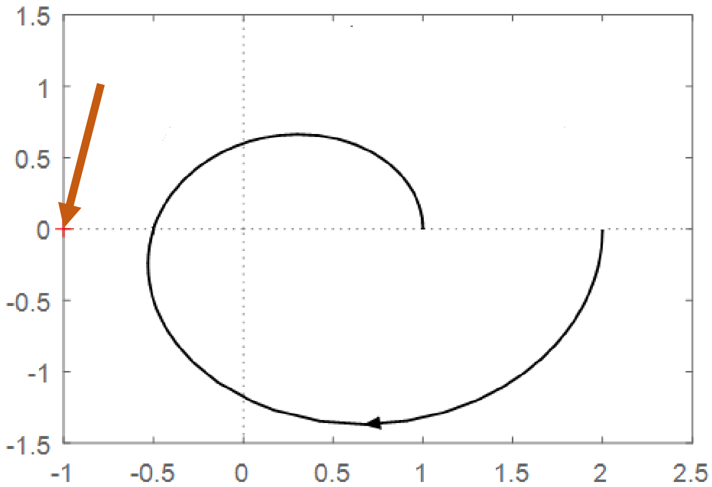
Откуда взялась точка (-1;0)?

Для $W_{\text{Вс}}(s)$ это (0,0), начало координат!

Критерий Найквиста: обоснование

$W_{\text{Вс}}(s)$

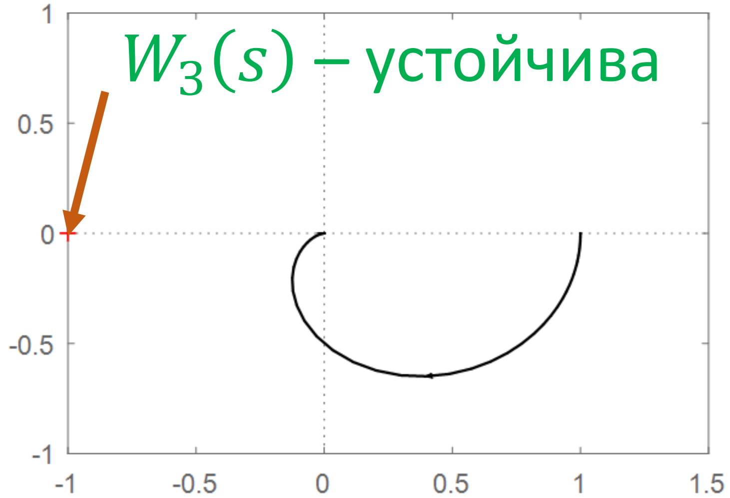


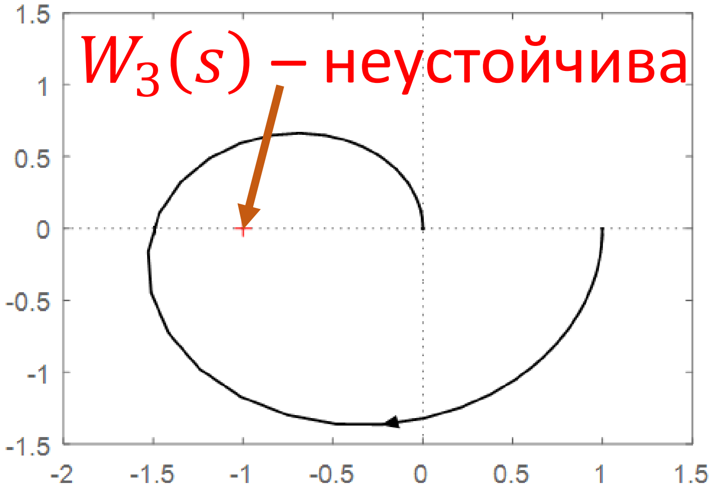


Откуда взялась точка (-1;0)?

Для $W_{\text{Вс}}(s)$ это (0,0), начало координат!

$W(s) = W_{\text{Вс}}(s) - 1$





Критерий Найквиста: обоснование

Откуда взялись обороты и зависимость знака от направления?

Критерий Найквиста: обоснование

Откуда взялись обороты и зависимость знака от направления?

1. Пусть $W(s)$ имеет r правых полюсов, тогда

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Q}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = (n-2r)\frac{\pi}{2}$$

2.

Если замкнутая система $W_3(s)$ ас. устойчива, тогда

$$\Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = n\frac{\pi}{2}$$

Если замкнутая система $W_3(s)$ неустойчива (m правых полюсов), то

$$\Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = (n-2m)\frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Bc}}(\omega) = \Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega) - \Delta\varphi_{\mathrm{Q}}(\omega)$$

3.

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Bc}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = r\pi$$

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Bc}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = (r-m)\pi$$

$$\boxed{W_{\mathrm{Bc}}(s) = 1 + W(s) = \frac{D(s)}{Q(s)}}$$

Критерий Найквиста: обоснование

1. Пусть $W(s)$ имеет r правых полюсов, тогда

$$(n-2r)\frac{\pi}{2}$$

Число
неустойчивых полюсов
разомкнутой системы

$+$

Число оборотов АФЧХ
по часовой стрелке
вокруг точки (-1,0)

$=$

Число
неустойчивых полюсов
замкнутой системы

Откуда взялись обороты и зависимость знака от направления?

Если замкнутая система $W_З(s)$ неустойчива (m правых полюсов), то

$$\Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)|_{\omega\to+\infty}=(n-2m)\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)-\Delta\varphi_{\mathrm{Q}}(\omega)$$

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Bc}}(\omega)|_{\omega\to+\infty}=(r-m)\pi$$

$$\boxed{W_{\mathrm{Bc}}(s)=1+W(s)=\frac{D(s)}{Q(s)}}$$

Критерий Найквиста: обоснование

Откуда взялись обороты и зависимость знака от направления?

1. Пусть $W(s)$ имеет r правых полюсов, тогда

$$(n-2r)\frac{\pi}{2}$$

$$r$$

$$+$$

$$-\frac{\Delta\varphi_{\text{Вс}}(\omega)|_{\omega\to+\infty}}{\pi}$$

$$=$$

$$m$$

Если замкнутая система $W_3(s)$ неустойчива (m правых полюсов), то

$$\Delta\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)|_{\omega\to+\infty}=(n-2m)\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)-\Delta\varphi_{\mathrm{Q}}(\omega)$$

$$\Delta\varphi_{\text{Вс}}(\omega)|_{\omega\to+\infty}=(r-m)\pi$$

$$W_{\text{Вс}}(s)=1+W(s)=\frac{D(s)}{Q(s)}$$

Критерий Найквиста: обоснование

Откуда взялись обороты и зависимость знака от направления?

1. Пусть $W(s)$ имеет r правых полюсов, тогда

$(n - 2r)\frac{\pi}{2}$

r

$+$

$-\frac{\Delta\varphi_{\text{Вс}}(\omega)|_{\omega\to+\infty}}{\pi}$

$=$

m

Если замкнутая система $W_3(s)$ неустойчива (m правых полюсов), то

$)|_{\omega\to+\infty} = (n - 2m)\frac{\pi}{2}$

Но оборот это 2π!

$\omega)$

$\Downarrow$

$$\Delta\varphi_{\text{Вс}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = (r - m)\pi$$

$$W_{\text{Вс}}(s) = 1 + W(s) = \frac{D(s)}{Q(s)}$$

Критерий Найквиста: обоснование

1. Пусть $W(s)$ имеет r правых полюсов, тогда

$$(n - 2r)\frac{\pi}{2}$$

$$r$$

$$+$$

$$-\frac{\Delta\varphi_{\text{Вс}}(\omega)|_{\omega\to+\infty}}{\pi}$$

$$=$$

$$m$$

Откуда взялись обороты и зависимость знака от направления?

Если замкнутая система $W_3(s)$ неустойчива (m правых полюсов), то

$$- 2m)\frac{\pi}{2}$$

Мы рассматривали изменение ω от 0 до +∞, *а отрицательных частот не существует…*

$$\Delta\varphi_{\text{Вс}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = (r - m)\pi$$

$$W_{\text{Вс}}(s) = 1 + W(s) = \frac{D(s)}{Q(s)}$$

Критерий Найквиста: обоснование

1. Пусть $W(s)$ имеет r правых полюсов, тогда

$(n-2r)\frac{\pi}{2}$

$$r$$

$$+$$

$$-\frac{\Delta\varphi_{\text{Вс}}(\omega)|_{\omega\to+\infty}}{\pi}$$

$$=$$

$$m$$

Откуда взялись обороты и зависимость знака от направления?

Если замкнутая система $W_З(s)$ неустойчива (m правых полюсов), то

$-2m)\frac{\pi}{2}$

Мы рассматривали изменение ω от 0 до +∞, диапазон от −∞ до 0 даст вторую половину

$$\Delta\varphi_{\text{Вс}}(\omega)|_{\omega\to+\infty} = (r-m)\pi$$

$$W_{\text{Вс}}(s) = 1 + W(s) = \frac{D(s)}{Q(s)}$$

Критерий Найквиста: обоснование

1. Пусть $W(s)$ имеет r правых полюсов, тогда

$$(n-2r)\frac{\pi}{2}$$

$$r$$

$$+$$

$$\frac{\Delta\varphi_{Вс}(\omega)|_{\omega\to-\infty}-\Delta\varphi_{Вс}(\omega)|_{\omega\to+\infty}}{2\pi}$$

$$=$$

$$m$$

Откуда взялись обороты и зависимость знака от направления?

Если замкнутая система $W_З(s)$ неустойчива (m правых полюсов), то

$$-2m)\frac{\pi}{2}$$

Мы рассматривали изменение ω от 0 до +∞, диапазон от −∞ до 0 даст вторую половину

$$\Delta\varphi_{Вс}(\omega)|_{\omega\to+\infty}=(r-m)\pi$$

$$W_{Вс}(s)=1+W(s)=\frac{D(s)}{Q(s)}$$

Критерий Найквиста: обоснование

1. Пусть $W(s)$ имеет r правых полюсов, тогда

$(n - 2r)\frac{\pi}{2}$

$$r$$

$$+$$

$$-\frac{\Delta\varphi_{\text{Вс}}(\omega)|_{\omega\to+\infty}}{\pi}$$

$$=$$

$$m$$

Если замкнутая система

Откуда взялись обороты и зависимость знака от направления?

Но вообще с инженерной точки зрения отрицательных частот действительно нет, на объект их не подать, данные не снять, характеристику по ним не построить…
и классическая формулировка критерия дается для ω от 0 до $+\infty$

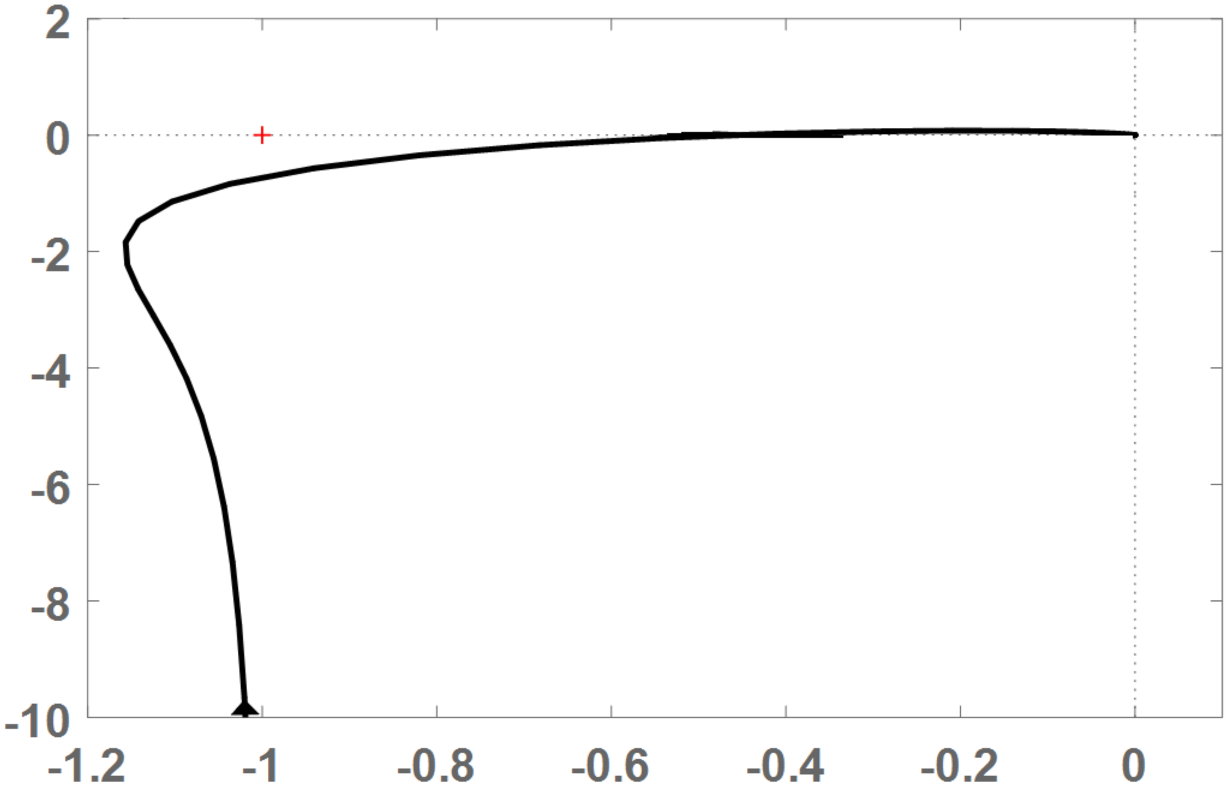
$$W_{\text{Вс}}(s) = 1 + W(s) = \frac{D(s)}{Q(s)}$$

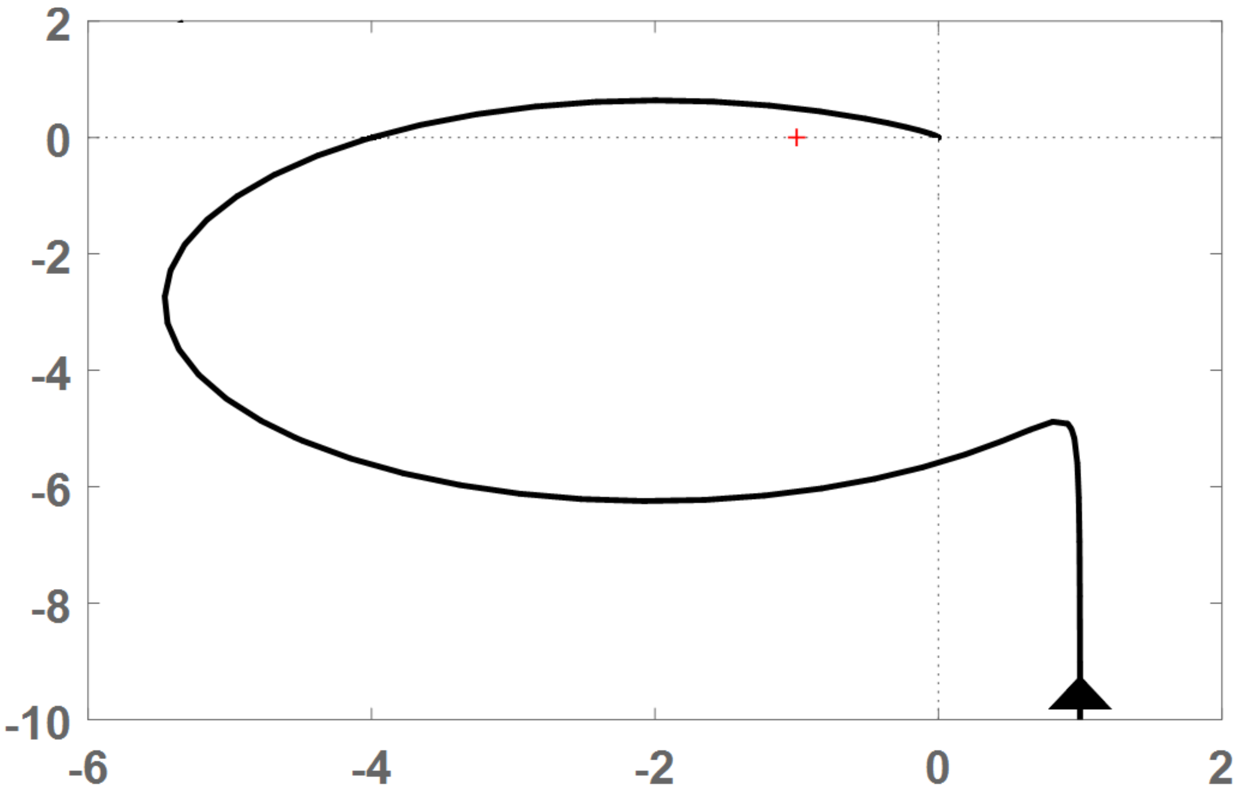
Критерий Найквиста: частные случаи

1. Пусть $W(s)$ имеет r нулевых полюсов

$\Downarrow$

2. $A_Q(\omega)|_{\omega\to 0} = \infty, \varphi_Q(\omega)|_{\omega\to 0} = r\frac{\pi}{2}$





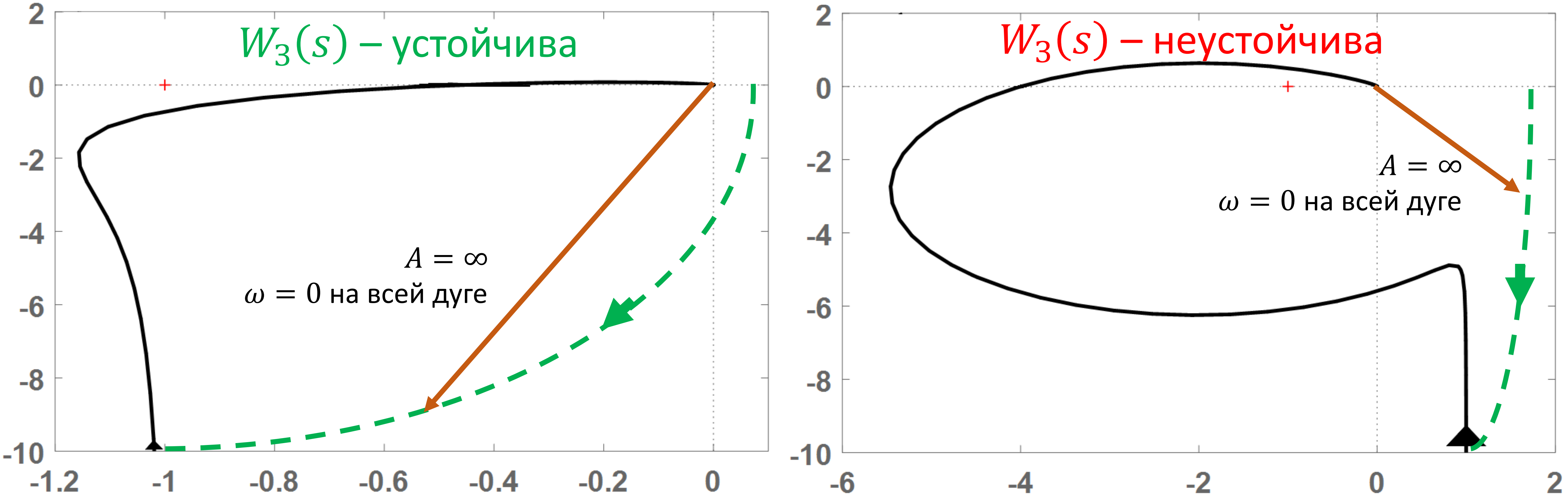
Критерий Найквиста: частные случаи

1. Пусть $W(s)$ имеет r нулевых полюсов

$\Downarrow$

2. $A_Q(\omega)|_{\omega\to 0} = \infty, \varphi_Q(\omega)|_{\omega\to 0} = r\frac{\pi}{2}$

«Дополнение» – дуга с $A = \infty$, повернутая от оси вещественных корней на угол $-r\frac{\pi}{2}$

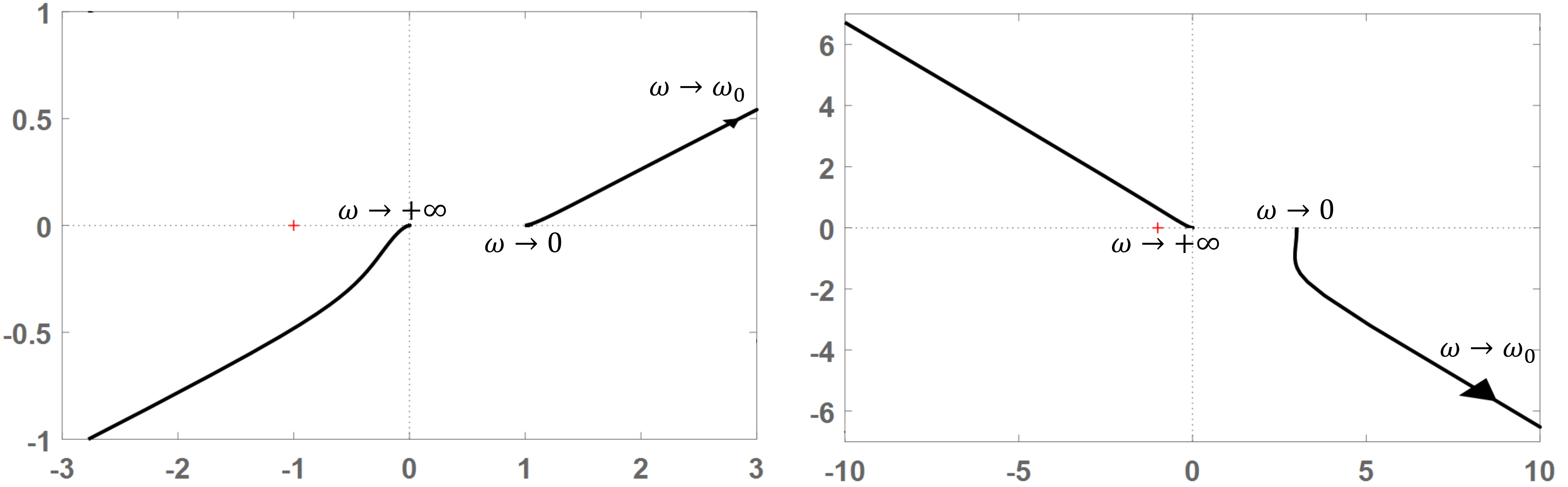


Критерий Найквиста: частные случаи

1. Пусть $W(s)$ имеет пару чисто мнимых полюсов $\pm i\omega_0$

$\Downarrow$

2. $A_Q(\omega)|_{\omega\to 0} = \infty,\ \varphi_Q(\omega)|_{\omega\to\omega_0} - \varphi_Q(\omega)|_{\omega\leftarrow\omega_0} = -\pi$

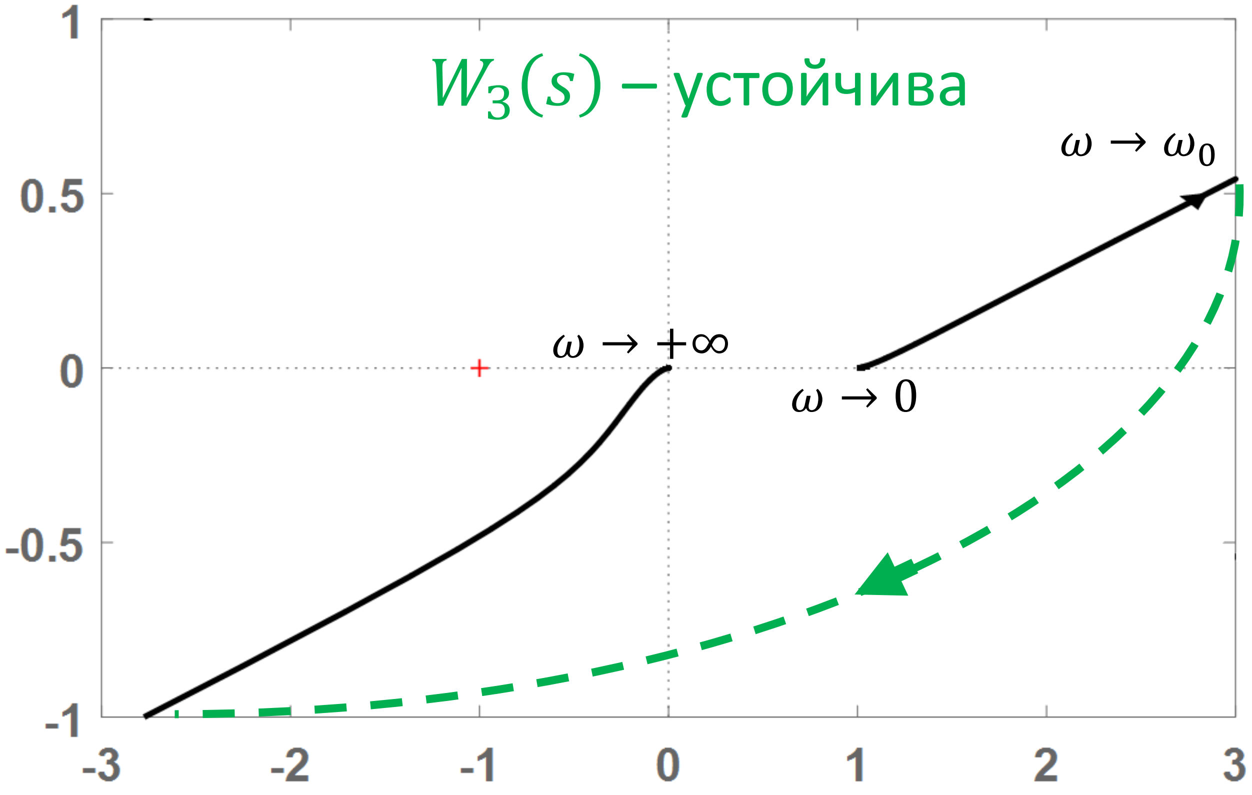


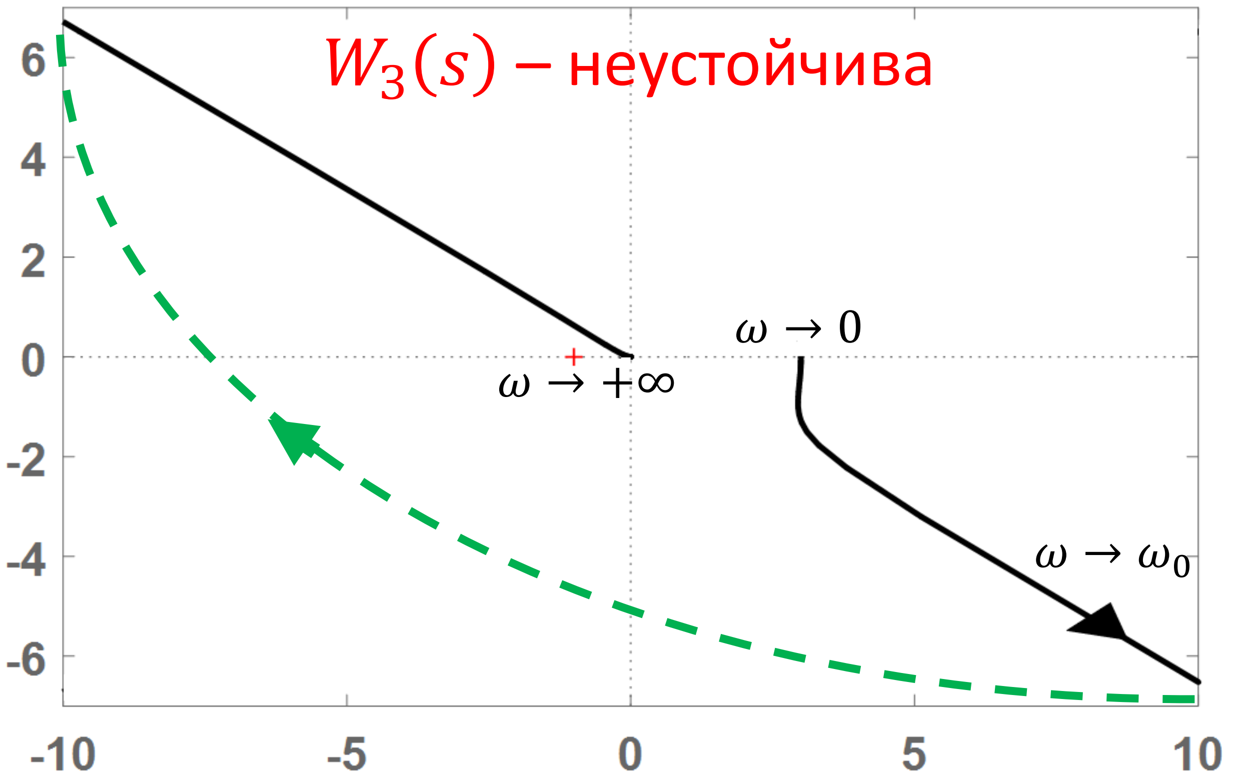
Критерий Найквиста: частные случаи

1. Пусть $W(s)$ имеет пару чисто мнимых полюсов $\pm i\omega_0$

$\Downarrow$

2. $A_Q(\omega)|_{\omega\to 0} = \infty,\ \varphi_Q(\omega)|_{\omega\to\omega_0} - \varphi_Q(\omega)|_{\omega\leftarrow\omega_0} = -\pi$





Критерий Найквиста: (более) полная формулировка

Критерий Найквиста: для того чтобы замкнутая система $W_3(s)$ с единичной отрицательной обратной связью была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ (для ω от 0 до $+\infty$) разомкнутой системы $W(s)$ охватывала точку $(-1{,}0)$ на угол $r\pi$, где r — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Критерий Найквиста: для того чтобы замкнутая система $W_3(s)$ с единичной отрицательной обратной связью была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ (для ω от 0 до $+\infty$) разомкнутой системы $W(s)$ охватывала точку $(-1{,}0)$ в положительном направлении $r/2$ раз, где r — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Критерий Найквиста: (более) полная формулировка

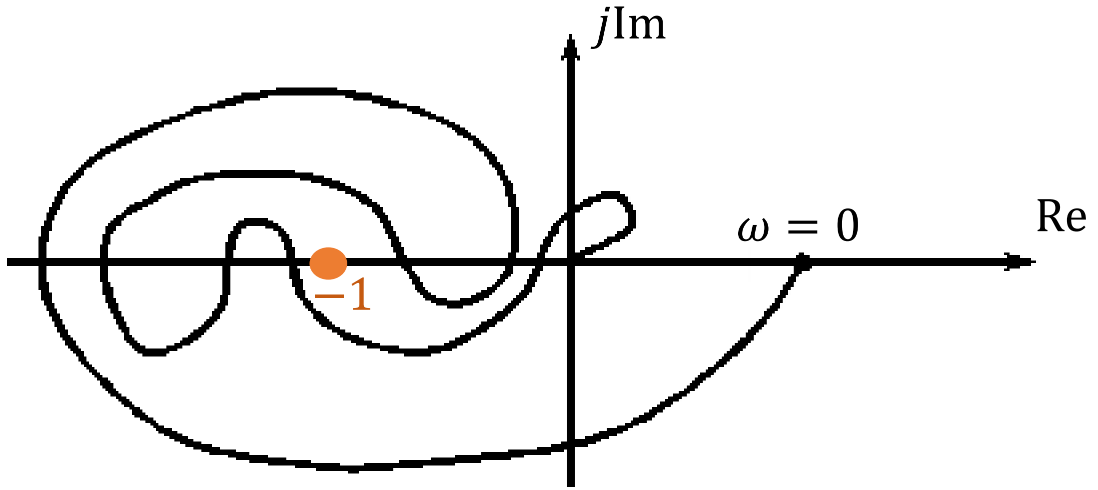
Критерий Найквиста: для того чтобы замкнутая система $W_3(s)$ с единичной отрицательной обратной связью была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ (для ω от 0 до $+\infty$) разомкнутой системы $W(s)$ охватывала точку $(-1{,}0)$ на угол $r\pi$, где r — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Критерий Найквиста: для того чтобы замкнутая система $W_3(s)$ с единичной отрицательной обратной связью была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ (для ω от 0 до $+\infty$) разомкнутой системы $W(s)$ охватывала точку $(-1{,}0)$ в положительном направлении $r/2$ раз, где r — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Положительное направление /
Против часовой стрелки /
«Сверху вниз»

Критерий Найквиста: (более) полная формулировка

Можно просто считать сумму переходов левее точки (-1,0), «сверху вниз» положительные, «снизу вверх» отрицательные



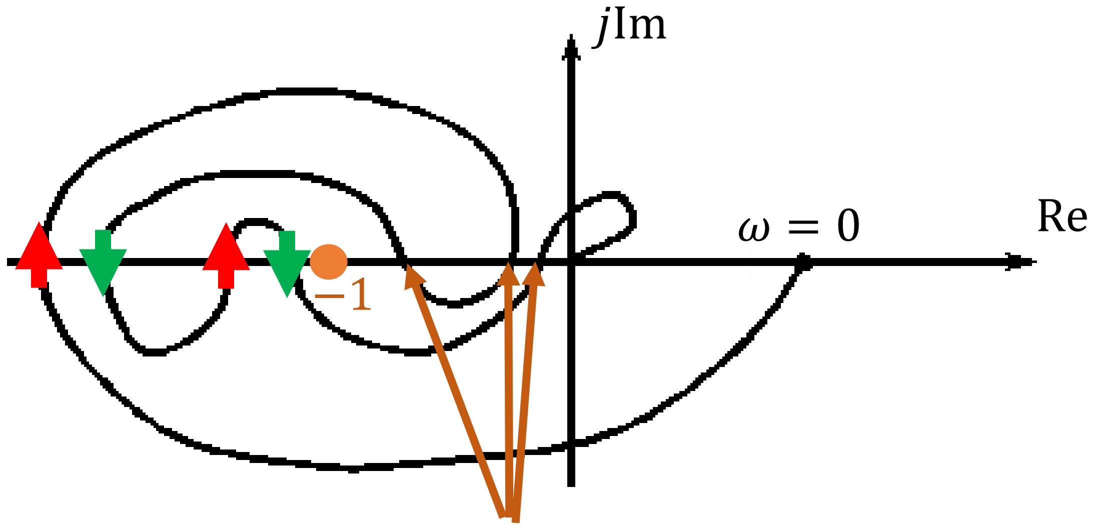
ая система $W_3(s)$ с единичной
необходимо и достаточно, чтобы
$W(s)$ охватывала точку $(-1{,}0)$
характеристического уравнения

ая система $W_3(s)$ с единичной
необходимо и достаточно, чтобы
$W(s)$ охватывала точку $(-1{,}0)$
r — число правых корней
емы.

Положительное направление / Против часовой стрелки / «Сверху вниз»

Критерий Найквиста: (более) полная формулировка

Можно просто считать сумму переходов левее точки (-1,0), «сверху вниз» положительные, «снизу вверх» отрицательные



Переходы правее не учитываем!

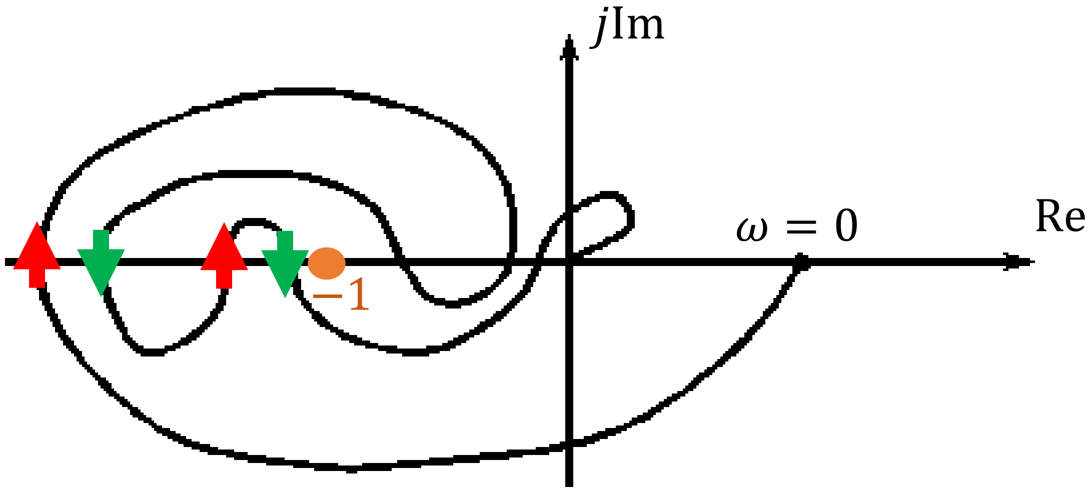
ая система $W_3(s)$ с единичной необходимо и достаточно, чтобы $W(s)$ охватывала точку $(-1{,}0)$ характеристического уравнения

ая система $W_3(s)$ с единичной необходимо и достаточно, чтобы $W(s)$ охватывала точку $(-1{,}0)$ r — число правых корней емы.

Положительное направление / Против часовой стрелки / «Сверху вниз»

Критерий Найквиста: (более) полная формулировка

Можно просто считать сумму переходов левее точки (-1,0), «сверху вниз» положительные, «снизу вверх» отрицательные



Переходы правее не учитываем!

Если сумма переходов $> \frac{r}{2}$

(половина т.к. $0 \leq \omega < +\infty$),

то замкнутая система устойчива

…ая система $W_3(s)$ с единичной …необходимо и достаточно, чтобы … $W(s)$ охватывала точку $(-1{,}0)$ …характеристического уравнения

…ая система $W_3(s)$ с единичной …необходимо и достаточно, чтобы … $W(s)$ охватывала точку $(-1{,}0)$ … r — число правых корней …емы.

Положительное направление /
Против часовой стрелки /
«Сверху вниз»

Критерий Найквиста: (более) полная формулировка

Критерий Найквиста: для того чтобы замкнутая система $W_З(s)$ с единичной отрицательной обратной связью была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ (для ω от 0 до $+\infty$) разомкнутой системы $W(s)$ охватывала точку $(-1{,}0)$ на угол $r\pi$, где r — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

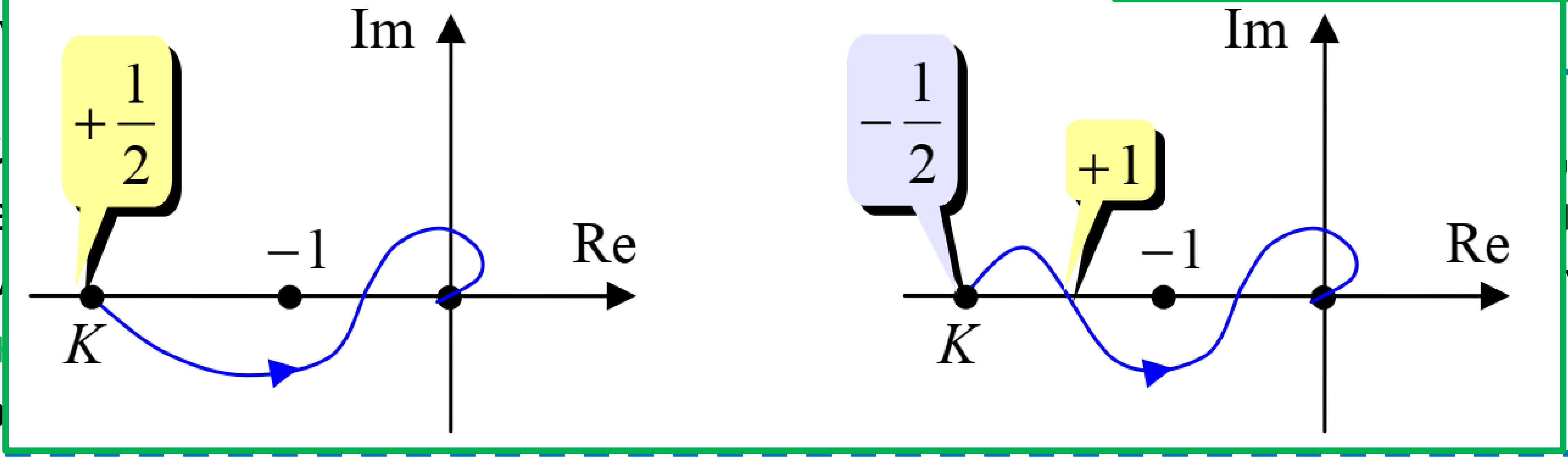
Критерий Найквиста: для того чтобы замкнутая система $W_З(s)$ с единичной отрицательной обратной связью была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ (для ω от 0 до $+\infty$) разомкнутой системы $W(s)$ охватывала точку $(-1{,}0)$ в положительном направлении $r/2$ раз, где r — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Если АФЧХ начинается на отрезке вещественной оси левее $(-1{,}0)$, то переход считается равным $1/2$ с соответствующим знаком!

Критерий Найквиста: (более) полная формулировка

Критерий Найквиста: для того чтобы замкнутая система $W_З(s)$ с единичной отрицательной обратной связью была устойчива, необх… бы АФЧХ (для ω от 0 до $+\infty$) разомкнутой системы $W(s$ … $0)$ на угол … ия разомкн…

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»
6.5.2 Критерий Найквиста



Критери… …иничной отрицате… …о, чтобы АФЧХ (д… …у $(-1,0)$ в полож… корней характер…

Если АФЧХ начинается на отрезке вещественной оси левее $(-1,0)$, то переход считается равным $1/2$ с соответствующим знаком!

Критерий Найквиста: (более) полная формулировка

Критерий Найквиста: для того чтобы замкну[...]й отрицательной обратной связью была устойчива[...]ы АФЧХ (для ω от 0 до $+\infty$) разомкнутой систем[...]) на угол $r\pi$, где r — число правых корней[...]я разомкнутой системы.

В классической литературе как правило все формулировки для ω от 0 до $+\infty$, отрицательные частоты не рассматриваются

Критерий Найквиста: для того чтобы замкнутая система $W_3(s)$ с единичной отрицательной обратной связью была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ (для ω от 0 до $+\infty$) разомкнутой системы $W(s)$ охватывала точку $(-1{,}0)$ в положительном направлении $r/2$ раз, где r — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Если АФЧХ начинается на отрезке вещественной оси левее $(-1{,}0)$, то переход считается равным $1/2$ с соответствующим знаком!

Критерий Найквиста: (более) полная формулировка

Критерий Найквиста: для того чтобы за… й отрицательной обратной связью была устойч… ы АФЧХ (для ω от $-\infty$ до $+\infty$) разомкнутой си…) на угол $2r\pi$, где r — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Если рассматриваем годограф для ω от $-\infty$ до $+\infty$, то уточнение про начало АФЧХ не нужно

Критерий Найквиста: для того чтобы замкнутая система $W_3(s)$ с единичной отрицательной обратной связью была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ (для ω от $-\infty$ до $+\infty$) разомкнутой системы $W(s)$ охватывала точку $(-1,0)$ в положительном направлении r раз, где r — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

~~Если АФЧХ начинается на отрезке вещественной оси левее $(-1,0)$, то переход считается равным $1/2$ с соответствующим знаком!~~

Критерий Найквиста: (более) полная формулировка

Критерий Найквиста: для того чтобы замкнутая система $W_3(s)$ с единичной отрицательной обратной связью была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ (для ω от $-\infty$ до $+\infty$) разомкнутой системы $W(s)$ охватывала точку $(-1{,}0)$ на угол $2r\pi$, где r — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Критерий Найквиста: для того чтобы замкнутая система $W_3(s)$ с единичной отрицательной обратной связью была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ (для ω от $-\infty$ до $+\infty$) разомкнутой системы $W(s)$ охватывала точку $(-1{,}0)$ в положительном направлении r раз, где r — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Критерий Найквиста: упрощенное следствие

Смотрим на АФЧХ разомкнутой асимптотически устойчивой системы и делаем вывод об устойчивости замкнутой

АФЧХ разомкнутой не охватывает (-1,0)	⇨	Замкнутая асимптотически устойчива
АФЧХ разомкнутой охватывает (-1,0)	⇨	Замкнутая неустойчива

Критерий Найквиста: логарифмический

Логарифмический Критерий Найквиста: для того чтобы замкнутая система $W_З(s)$ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между положительными и отрицательными переходами ЛФЧХ прямой $\varphi(\omega) = \pm(2k+1)\pi, (k = 0,1,2,\dots)$ при частотах, когда $L(\omega) > 0$, была равна $r/2$, где r — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

«Снизу вверх» – положительные, «Сверху вниз» – отрицательные;
Если ЛФЧХ начинается на критическом отрезке, то переход считается равным $1/2$ с соответствующим знаком.
Критические отрезки — отрезки прямой проходящей на уровнях
$\varphi(\omega_{кр}) = \pm(2k+1)\pi, (k = 0,1,2,\dots)$ при частотах, когда $L(\omega) > 0$.
$\omega_{кр}$ – критическая частота.

Критерий Найквиста: логарифмический

Логарифмический Критерий Найквиста: для того чтобы замкнутая система $W_3(s)$ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между положительными и отрицательными переходами ЛФЧХ прямой $\varphi(\omega) = \pm(2k+1)\pi, (k = 0,1,2,\dots)$ при частотах, когда $L(\omega) > 0$, была равна $r/2$, где r — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Внимание! «Положительность» переходов обратна нелогарифмическому случаю!

«Снизу вверх» – положительные, «Сверху вниз» – отрицательные;

Если ЛФЧХ начинается на критическом отрезке, то переход считается равным $1/2$ с соответствующим знаком.

Критические отрезки — отрезки прямой проходящей на уровнях $\varphi(\omega_{\text{кр}}) = \pm(2k+1)\pi, (k = 0,1,2,\dots)$ при частотах, когда $L(\omega) > 0$.

$\omega_{\text{кр}}$ – критическая частота.

Критерий Найквиста: логарифмический

Логарифмический Критерий Найквиста: для то
$W_3(s)$ была устойчива, необходимо и достато
положительными и отрицательными пер
$\varphi(\omega) = \pm(2k+1)\pi, (k = 0,1,2, \dots)$ при частотах, когда $L(\omega) > 0$, была равна $r/2$, где r — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Проще: отмечаем на ЛАЧХ и ЛФЧХ нужные уровни и смотрим переходы

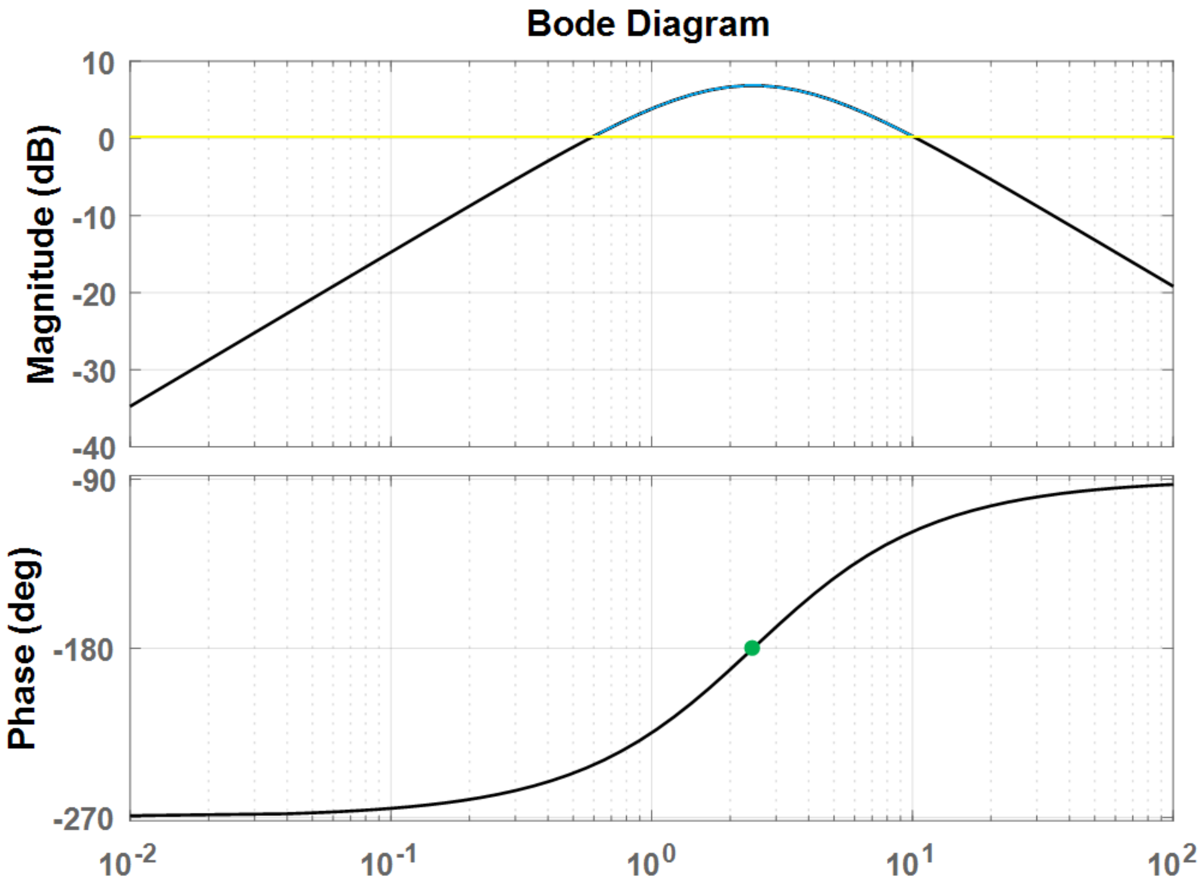
«Снизу вверх» – положительные, «Сверху вниз» – отрицательные;
Если ЛФЧХ начинается на критическом отрезке, то переход считается равным $1/2$ с соответствующим знаком.
Критические отрезки — отрезки прямой проходящей на уровнях $\varphi(\omega_{\text{кр}}) = \pm(2k+1)\pi, (k = 0,1,2, \dots)$ при частотах, когда $L(\omega) > 0$.
$\omega_{\text{кр}}$ – критическая частота.

Критерий Найквиста: логарифмический

$$W(s) = \frac{11s}{s^2 - 5s + 6}$$

Корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$
$r = 2$, нужен в сумме 1 переход

Проще: отмечаем на ЛАЧХ и ЛФЧХ нужные уровни и смотрим переходы

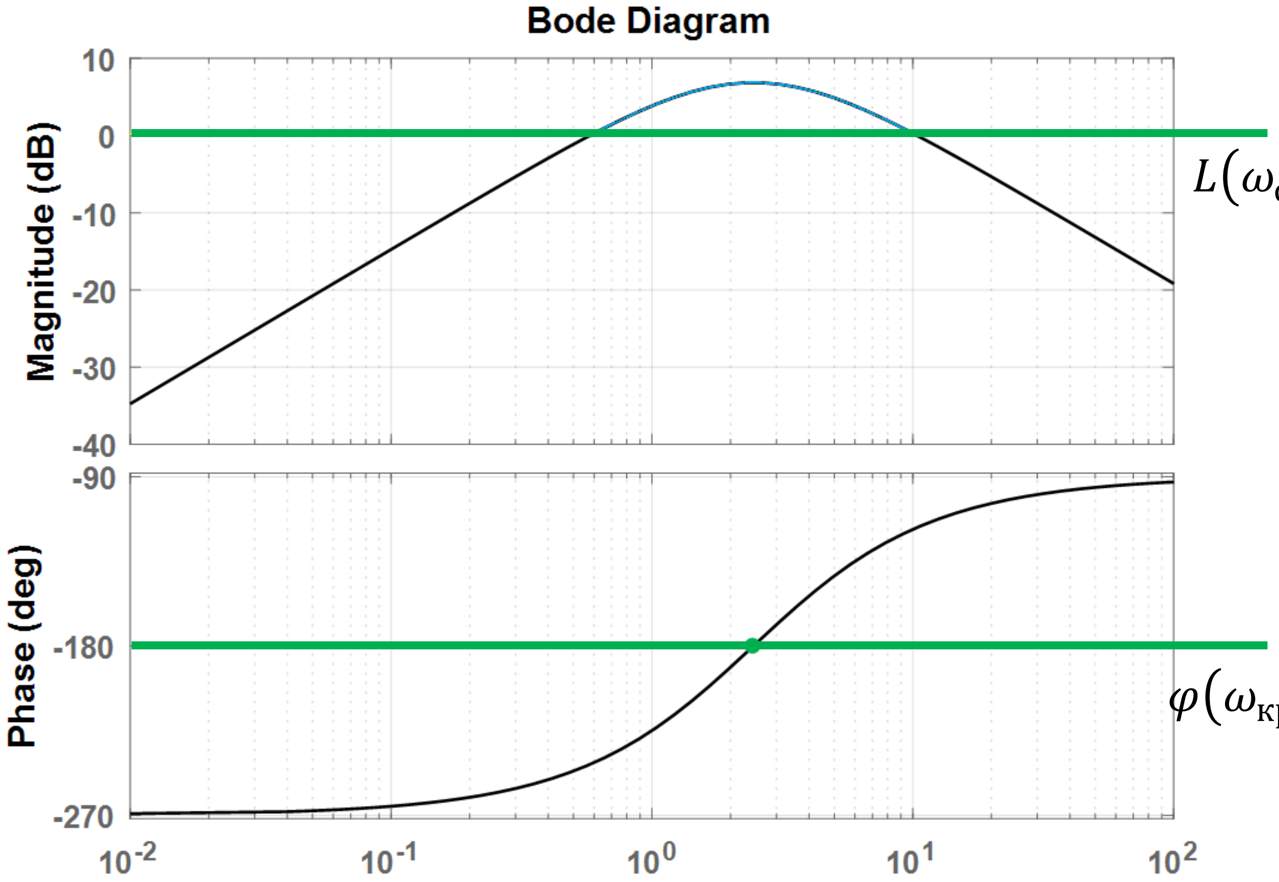


Критерий Найквиста: логарифмический

$$W(s) = \frac{11s}{s^2 - 5s + 6}$$

Корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$
$r = 2$, нужен в сумме 1 переход

Проще: отмечаем на ЛАЧХ и ЛФЧХ нужные уровни и смотрим переходы



$L(\omega_{\text{ср}}) = 0$

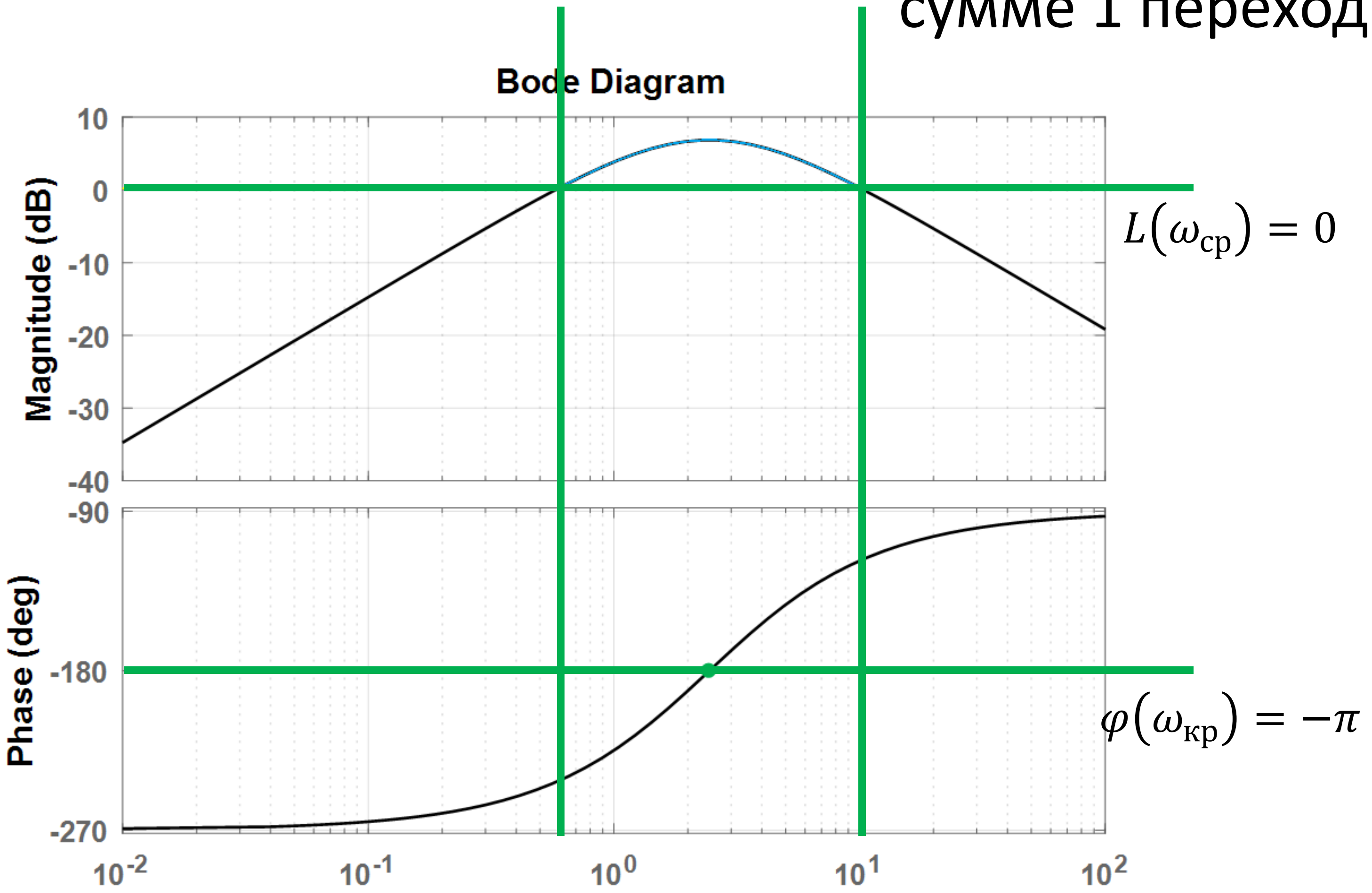
$\varphi(\omega_{\text{кр}}) = -\pi$

Критерий Найквиста: логарифмический

$$W(s) = \frac{11s}{s^2 - 5s + 6}$$

Корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$
$r = 2$, нужен в сумме 1 переход

Проще: отмечаем на ЛАЧХ и ЛФЧХ нужные уровни и смотрим переходы



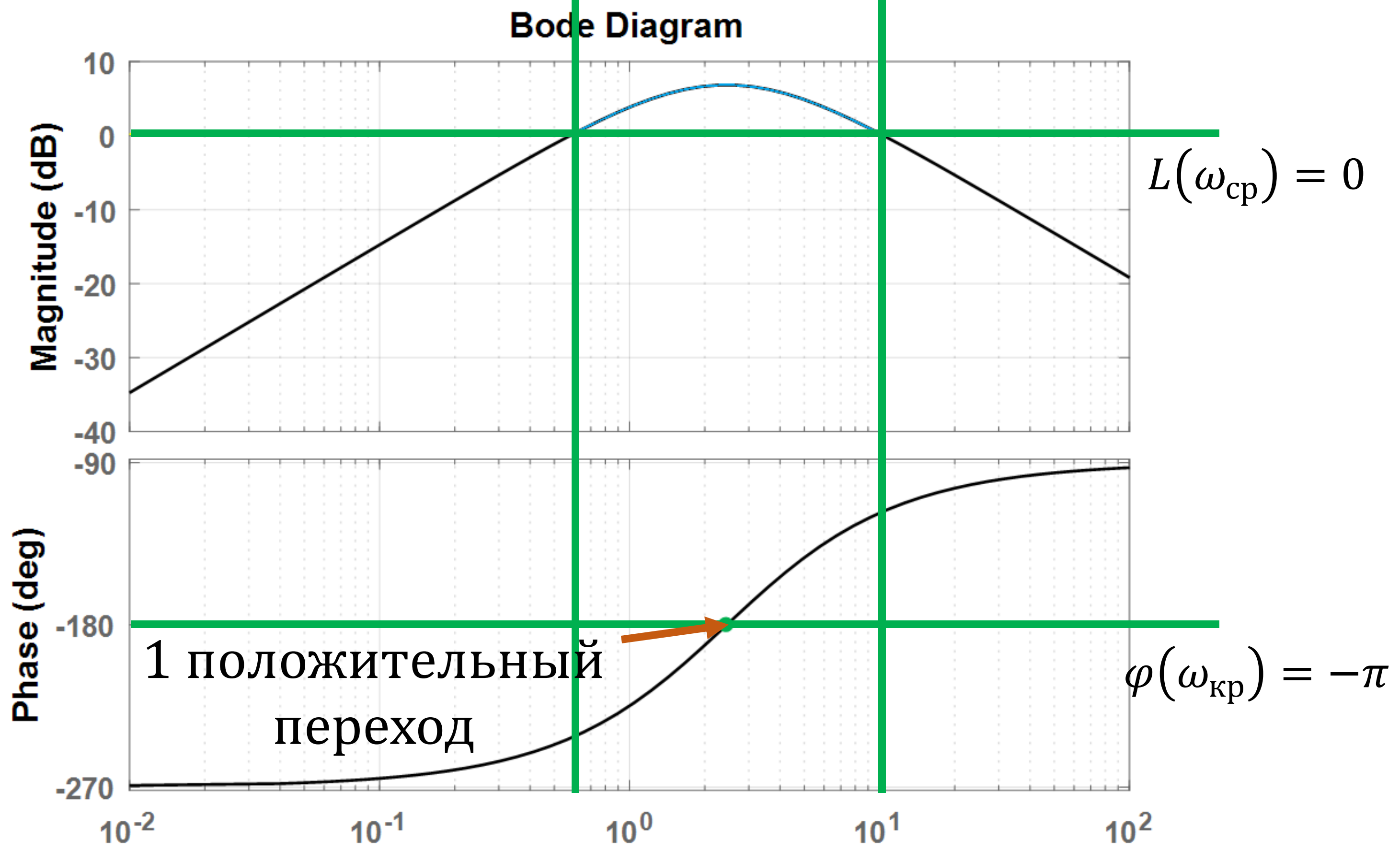
Критерий Найквиста: логарифмический

$$W(s) = \frac{11s}{s^2 - 5s + 6}$$

Корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$

$r = 2$, нужен в сумме 1 переход

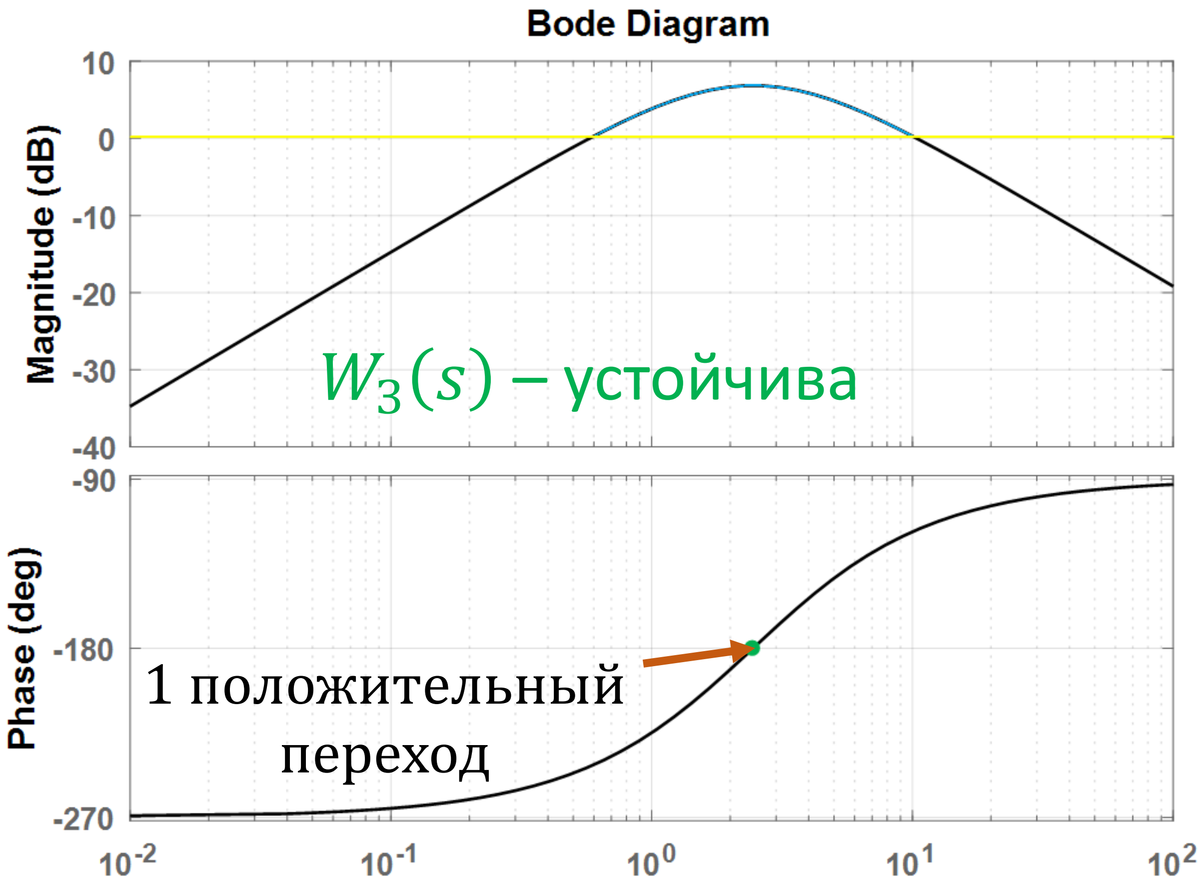
Проще: отмечаем на ЛАЧХ и ЛФЧХ нужные уровни и смотрим переходы



Критерий Найквиста: логарифмический

$$W(s) = \frac{11s}{s^2 - 5s + 6}$$

Корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$
$r = 2$, нужен в сумме 1 переход

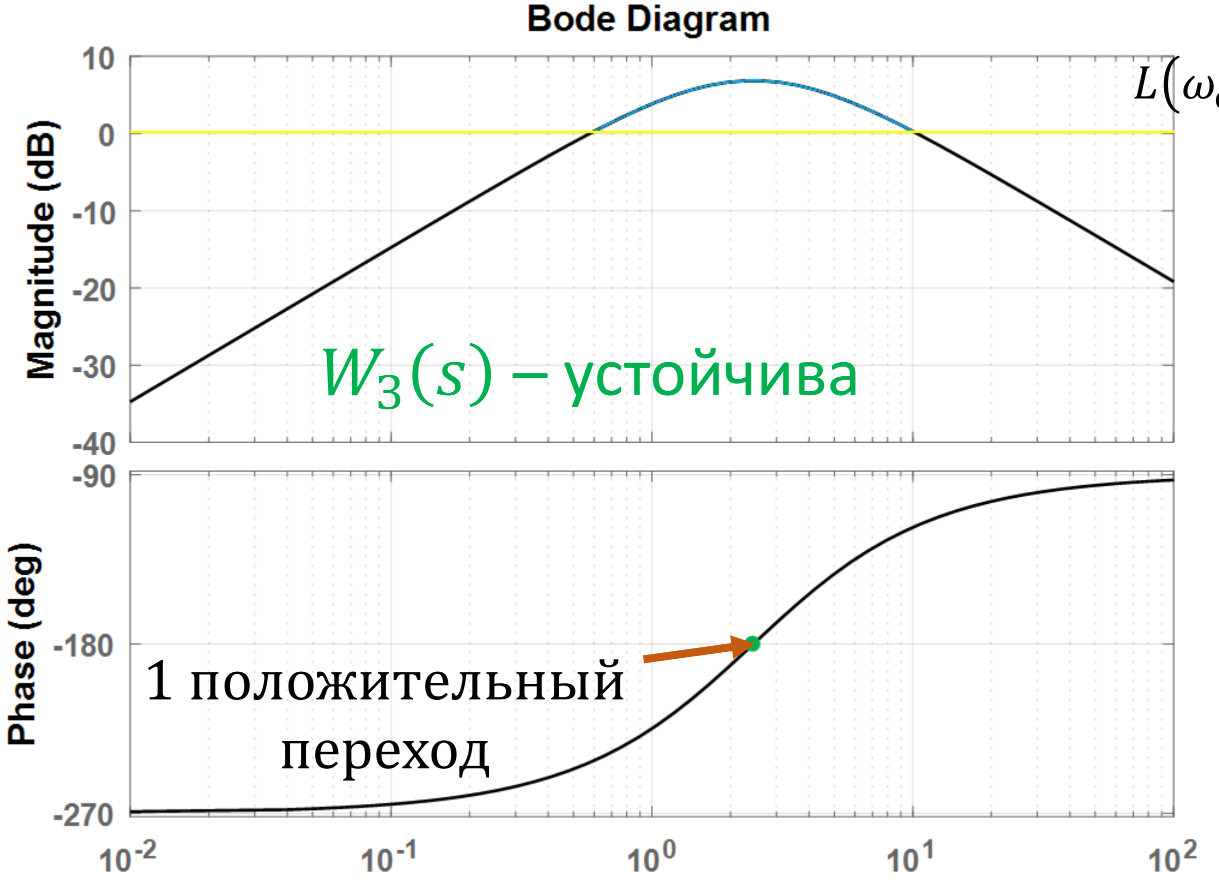


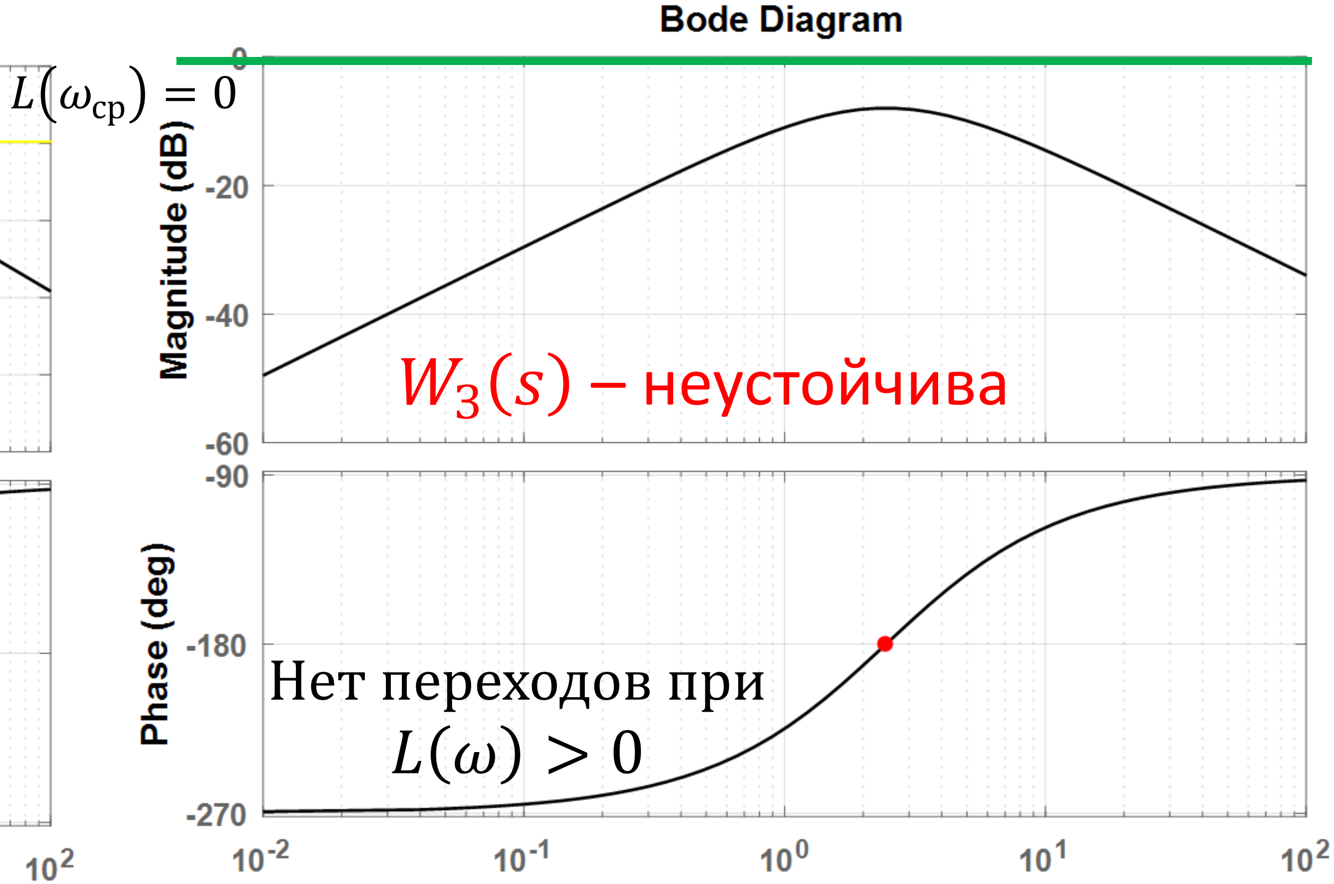
Критерий Найквиста: логарифмический

$$W(s) = \frac{11s}{s^2 - 5s + 6}$$

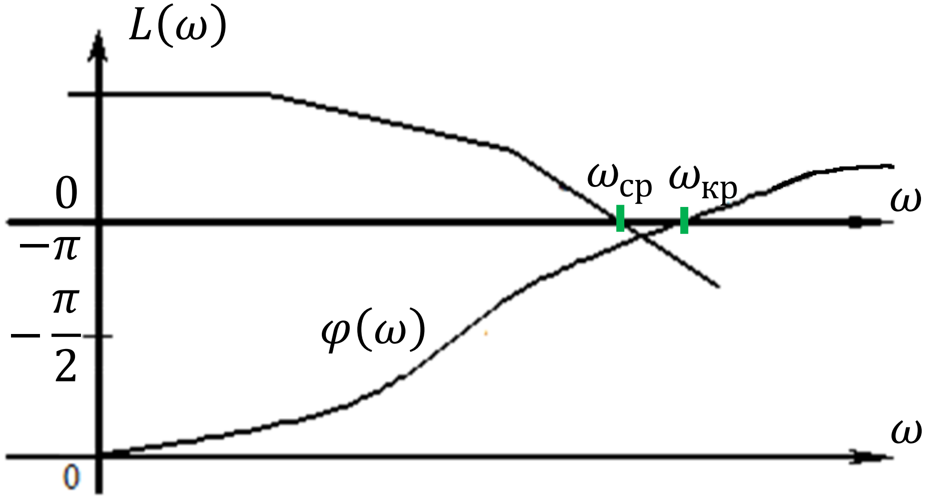
Корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$
$r = 2$, нужен в сумме 1 переход

$$W(s) = \frac{2s}{s^2 - 5s + 6}$$



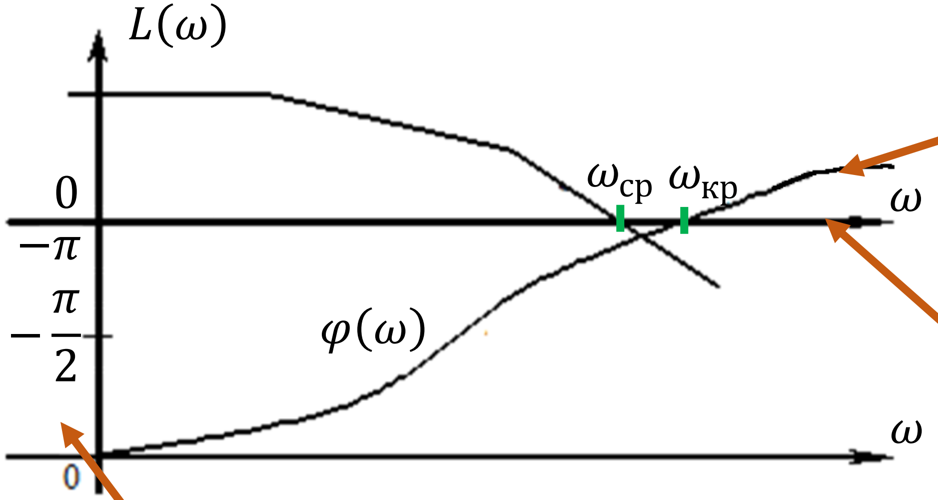


Критерий Найквиста: логарифмический



Иначе: строим ЛАЧХ и ЛФЧХ «по особому» и считаем переходы

Критерий Найквиста: логарифмический



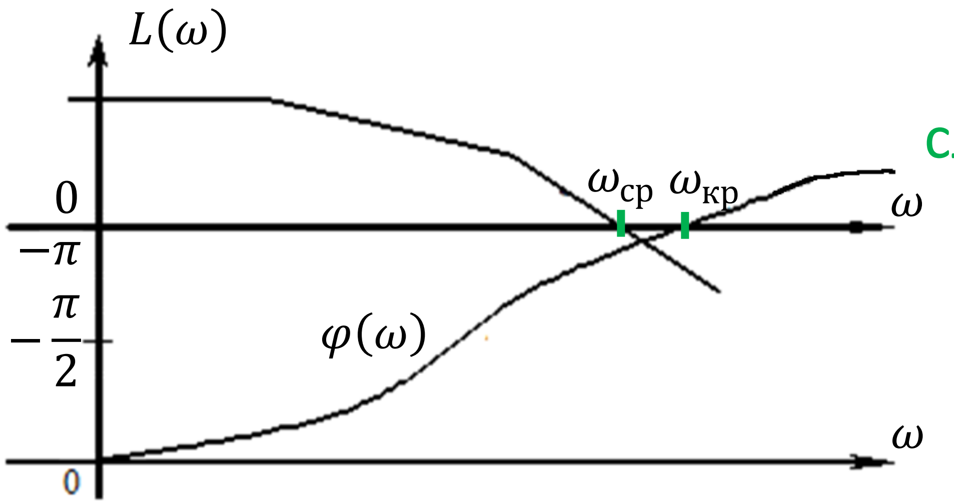
Применимо только когда ЛФЧХ пересекает только один критический отрезок!

Иначе: строим ЛАЧХ и ЛФЧХ «по особому» и считаем переходы

Критический отрезок для $\varphi(\omega_{кр}) = -\pi$ совмещен с осью абсцисс $L(\omega)$

Шкала для $\varphi(\omega)$ инвертирована

Критерий Найквиста: логарифмический

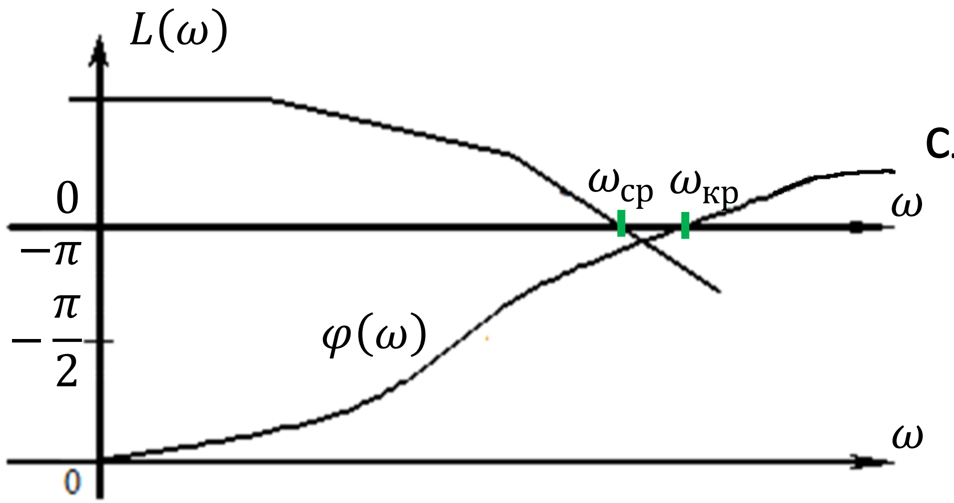


$\omega_{кр} > \omega_{ср}$ и переходов слева от пересечения нет.

Система устойчива, если $W(s)$ устойчива!

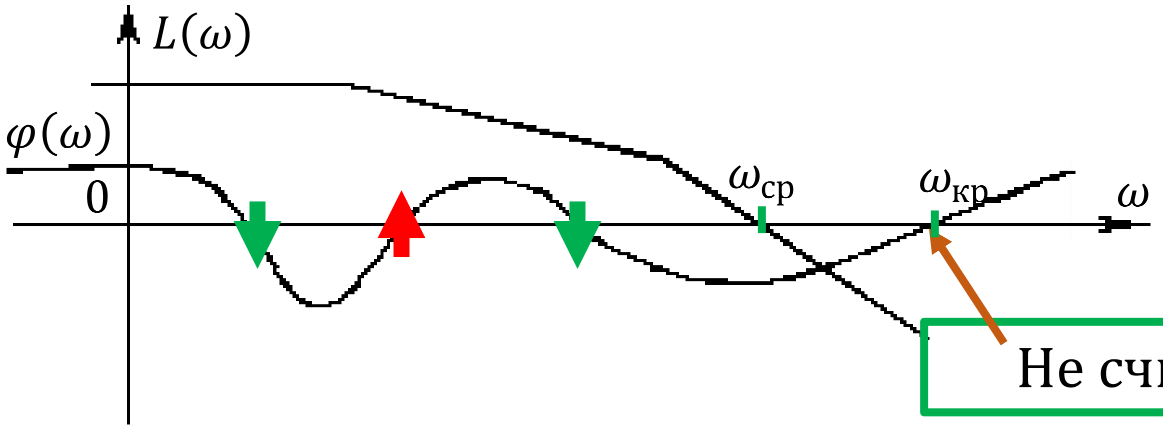
Иначе: строим ЛАЧХ и ЛФЧХ «по особому» и считаем переходы

Критерий Найквиста: логарифмический



$\omega_{кр} > \omega_{ср}$ и переходов слева от пересечения нет. Система устойчива, если $W(s)$ устойчива!

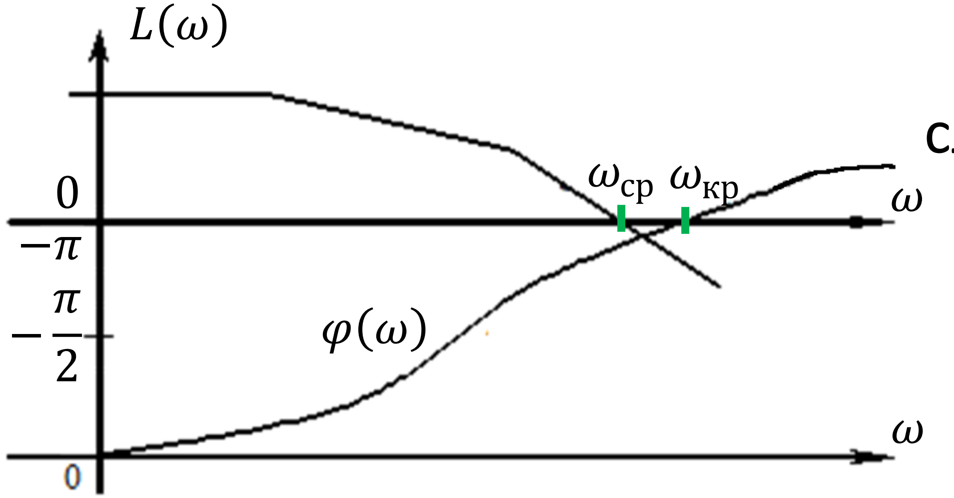
Иначе: строим ЛАЧХ и ЛФЧХ «по особому» и считаем переходы



Шкала инвертирована, переходы тоже инвертированы!

Не считаем

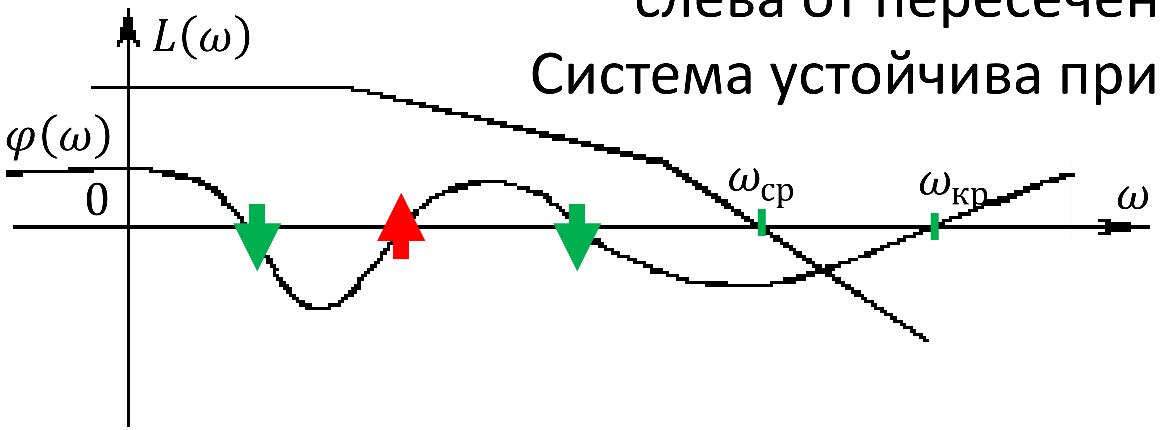
Критерий Найквиста: логарифмический



$\omega_{кр} > \omega_{ср}$ и переходов слева от пересечения нет. Система устойчива, если $W(s)$ устойчива!

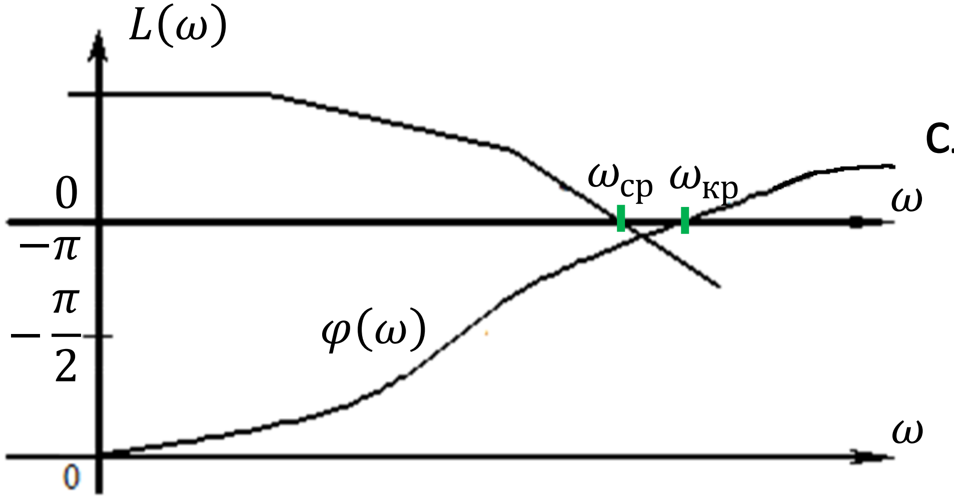
Иначе: строим ЛАЧХ и ЛФЧХ «по особому» и считаем переходы

$\omega_{кр} > \omega_{ср}$ и суммарно 1 переход слева от пересечения. Система устойчива при $r = 2$!



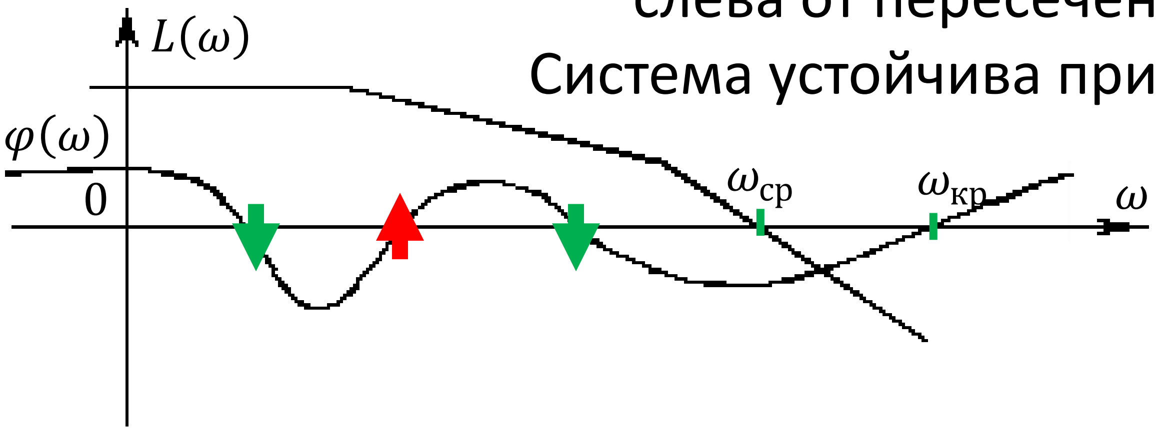
Критерий Найквиста: логарифмический

Иначе: строим ЛАЧХ и ЛФЧХ «по особому» и считаем переходы



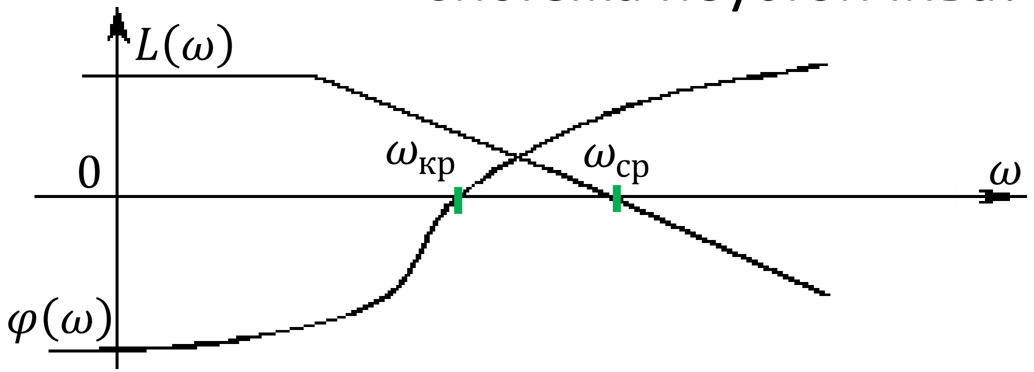
$\omega_{кр} > \omega_{ср}$ и переходов слева от пересечения нет. Система устойчива, если $W(s)$ устойчива!

$\omega_{кр} > \omega_{ср}$ и суммарно 1 переход слева от пересечения. Система устойчива при $r = 2$!

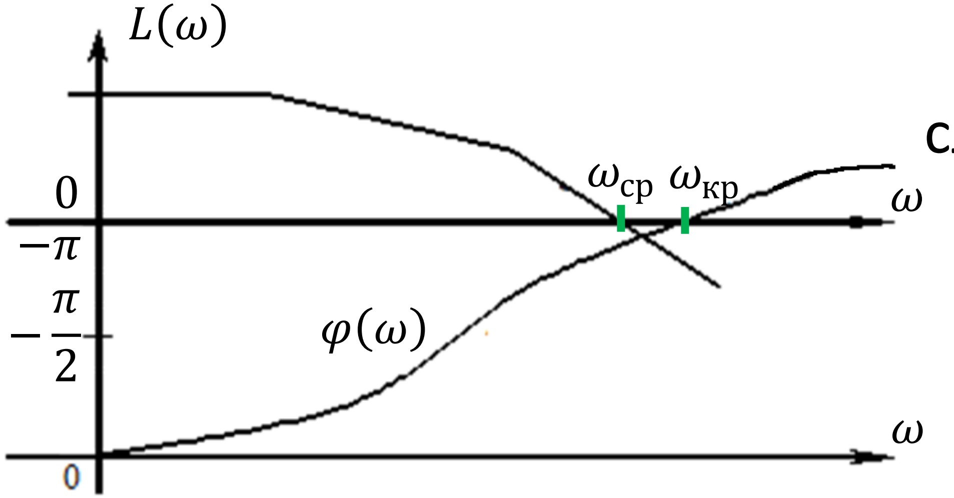


$\omega_{кр} < \omega_{ср}$

Система неустойчива!



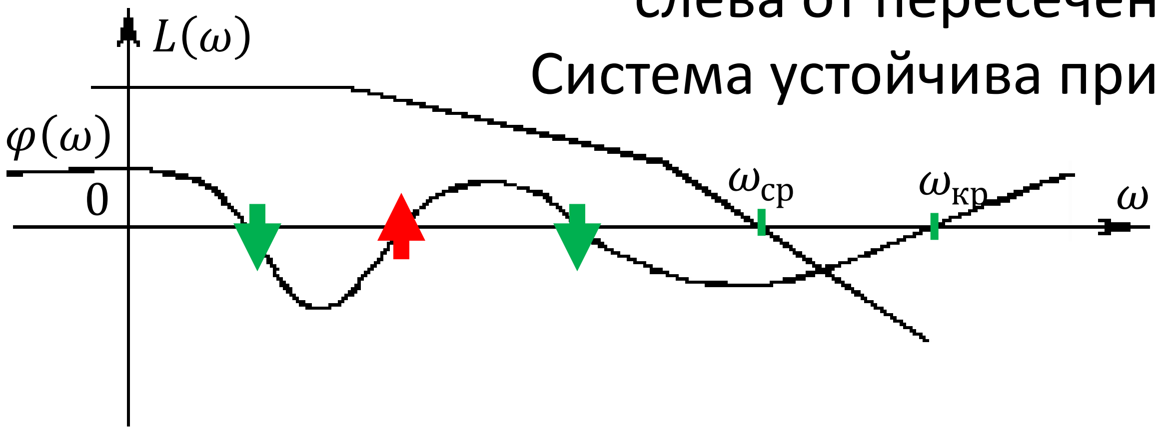
Критерий Найквиста: логарифмический



$\omega_{\text{кр}} > \omega_{\text{ср}}$ и переходов слева от пересечения нет. Система устойчива, если $W(s)$ устойчива!

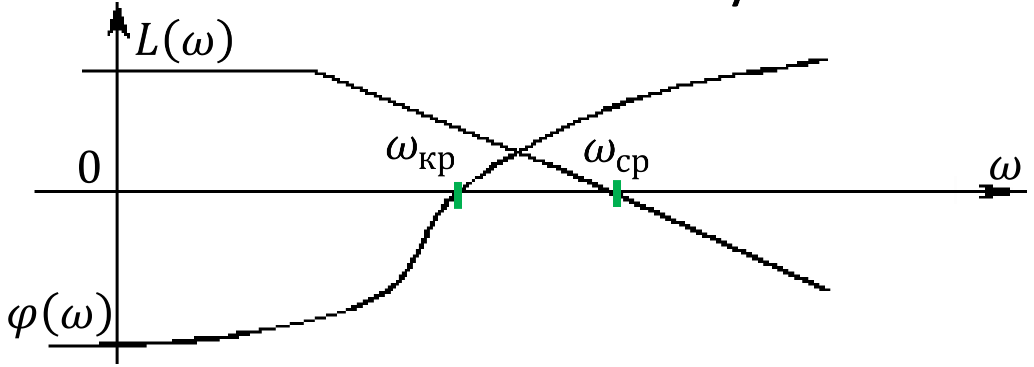
Это связано с запасами устойчивости

$\omega_{\text{кр}} > \omega_{\text{ср}}$ и суммарно 1 переход слева от пересечения. Система устойчива при $r = 2$!



$\omega_{\text{кр}} < \omega_{\text{ср}}$

Система неустойчива!



Частотные показатели качества: запасы устойчивости

1. **Резонансная частота**

2. **Показателем колебательности**

3а. **Частота среза (*фильтрация*)**

3б. **Частота среза (*частотные характеристики*)**

4. **Полосой пропускания**

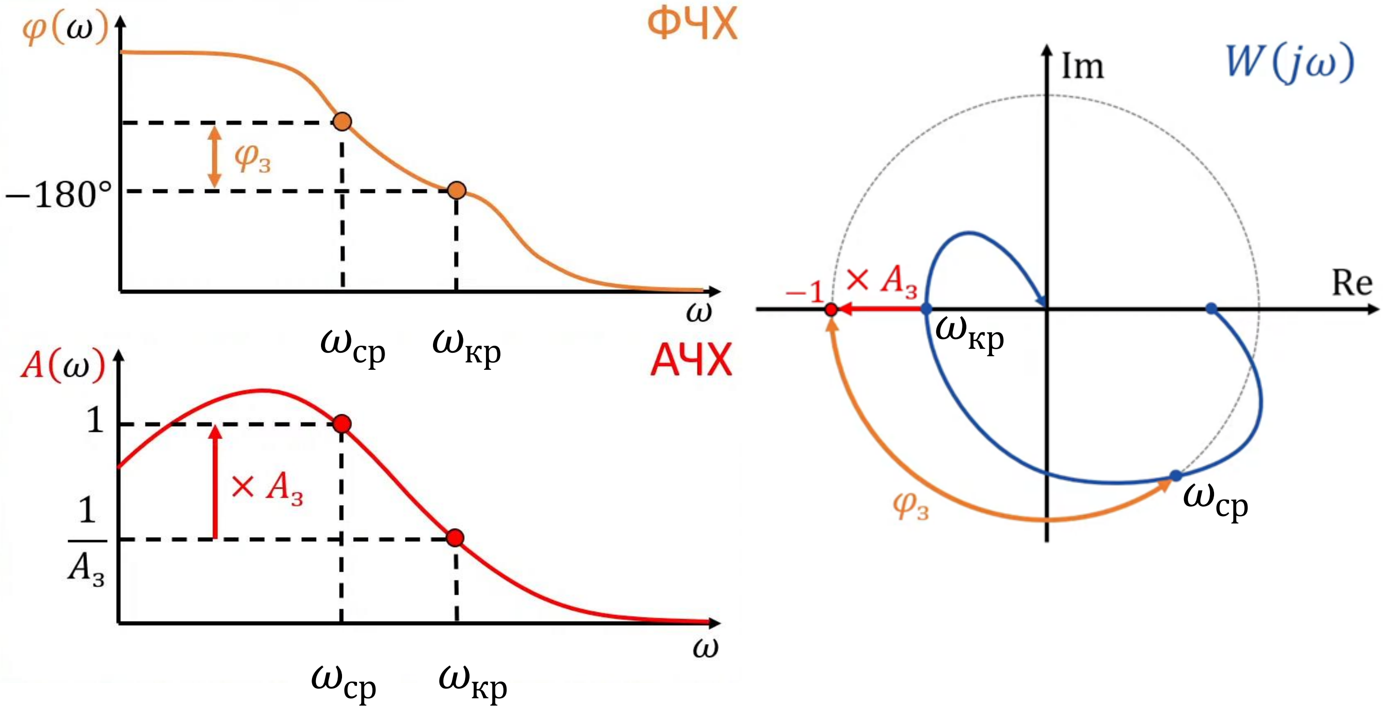
5. **Запасы устойчивости**

    5а. **Запас по фазе**

    5б. **Запас по амплитуде**

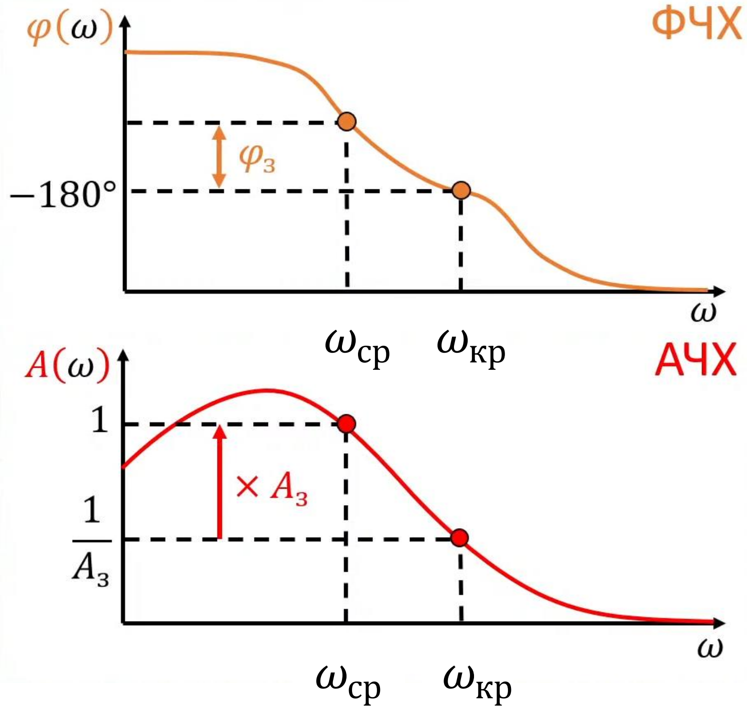
Частотные показатели качества: запасы устойчивости

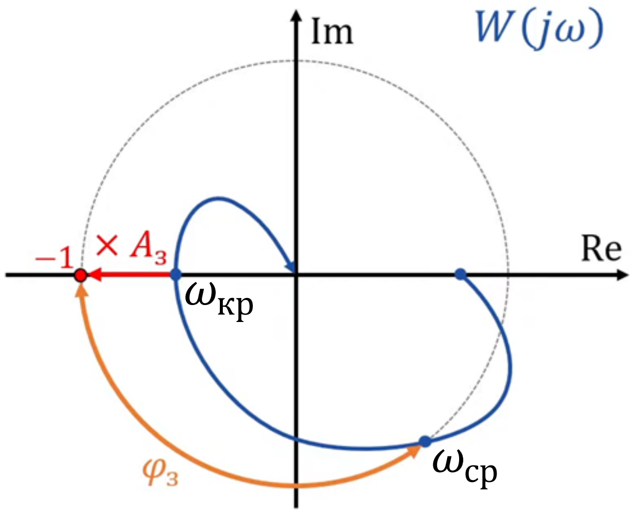
По АЧХ, ФЧХ, АФЧХ (с лекции):



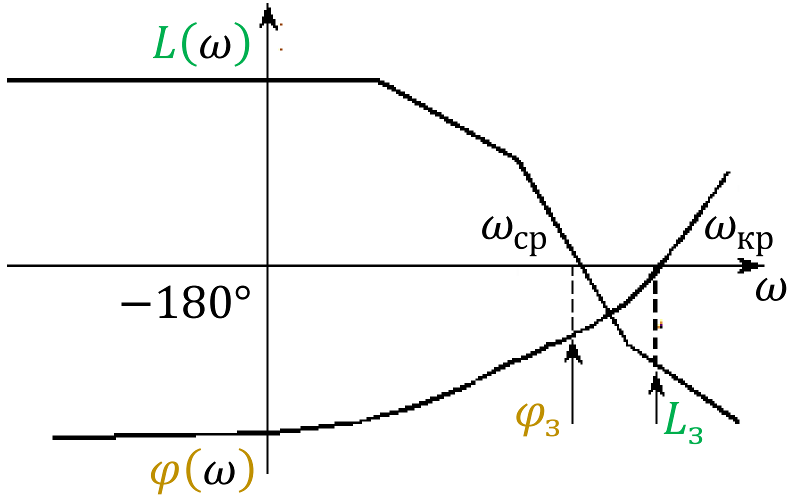
Частотные показатели качества: запасы устойчивости

По АЧХ, ФЧХ, АФЧХ (с лекции):





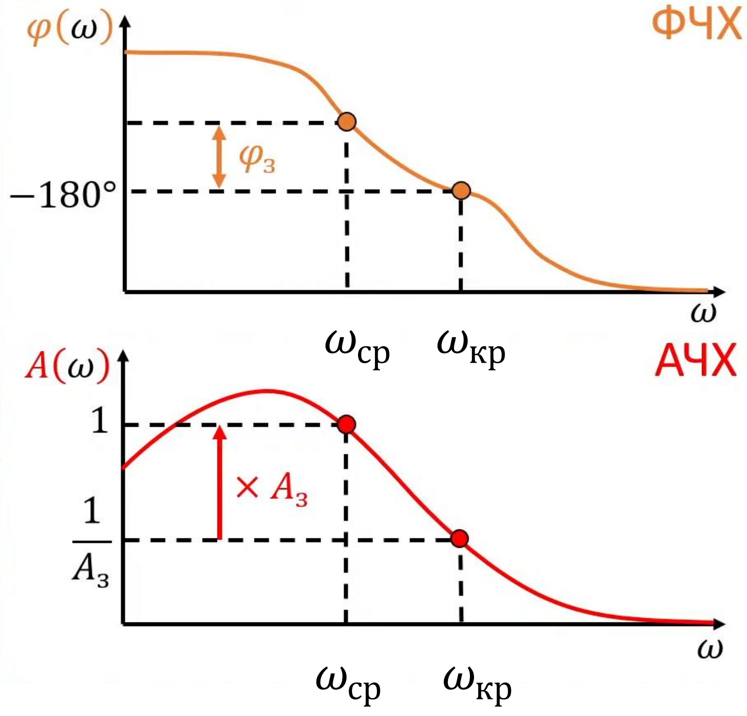
По логарифмическим:

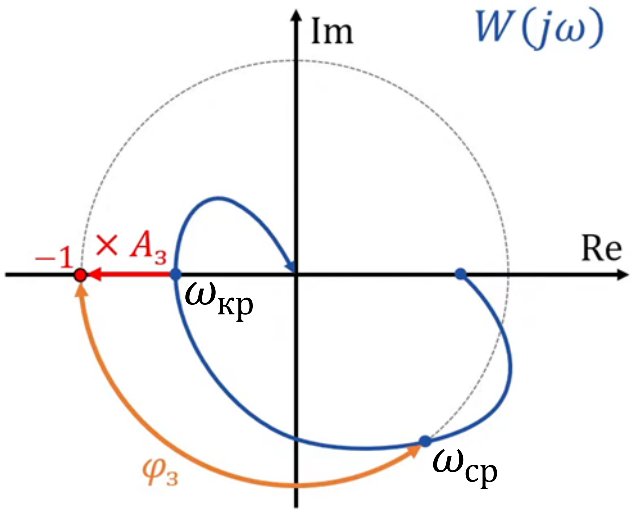


$$\boxed{L_з = 0 - L(\omega_{кр}) = 20\lg(A_з)}$$

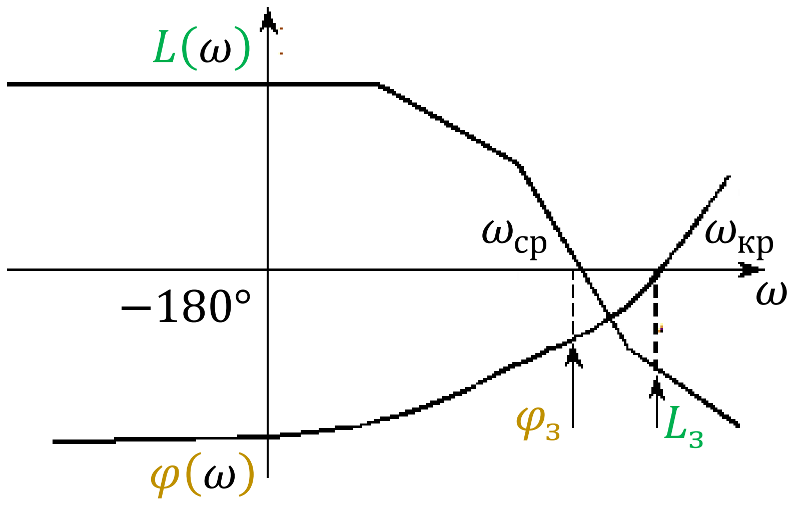
Частотные показатели качества: запасы устойчивости

По АЧХ, ФЧХ, АФЧХ (с лекции):





По логарифмическим:



Алгебраически:

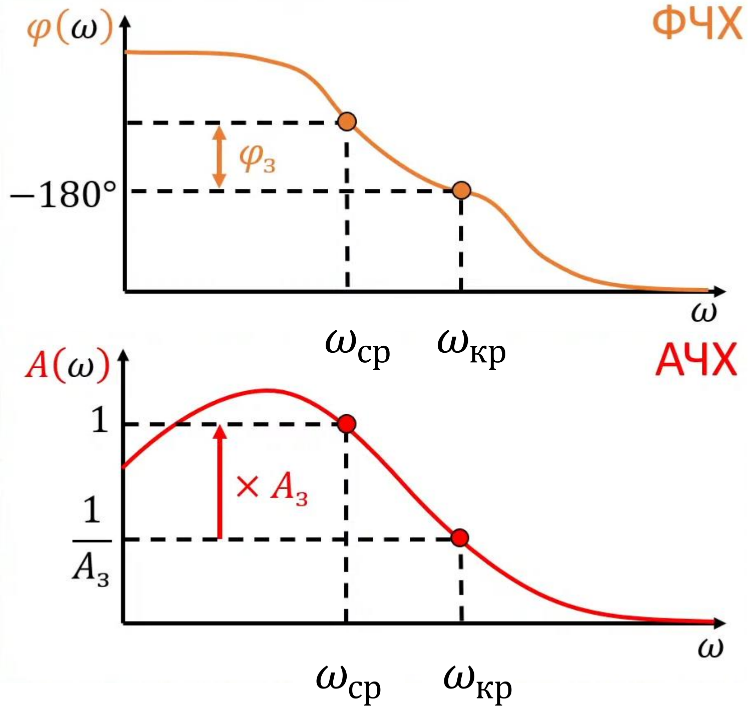
$$A_з = A^{-1}\left(\omega_{кр}\right)$$

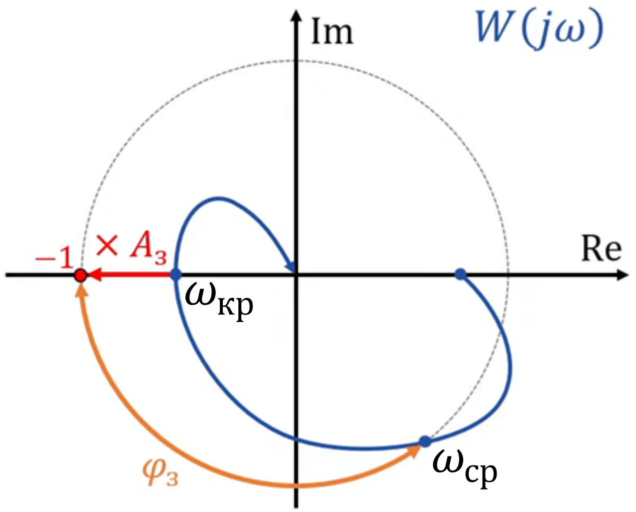
$$L_з = -L\left(\omega_{кр}\right) = 20\lg(A_з)$$

$$\varphi_з = \pi + \varphi\left(\omega_{ср}\right)$$

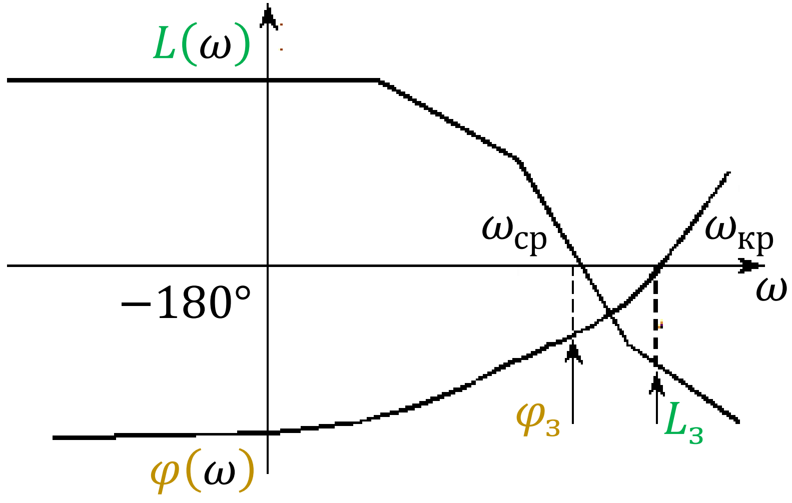
Частотные показатели качества: запасы устойчивости

По АЧХ, ФЧХ, АФЧХ (с лекции):





По логарифмическим:



Если есть несколько кандидатов на запас (например, несколько $\omega_{кр}$), то запас – минимальный из них.

Алгебраически:

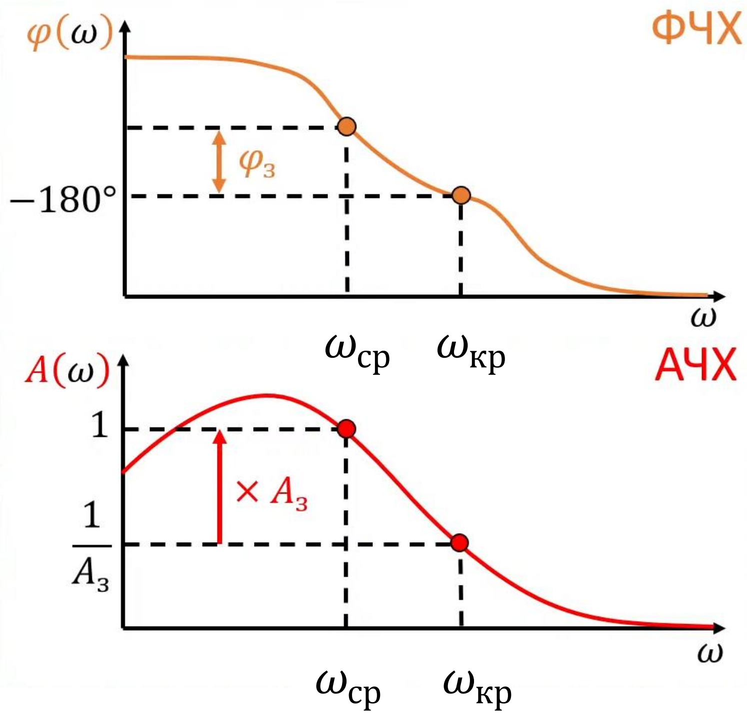
$$A_з = A^{-1}(\omega_{кр})$$

$$L_з = -L(\omega_{кр}) = 20\lg(A_з)$$

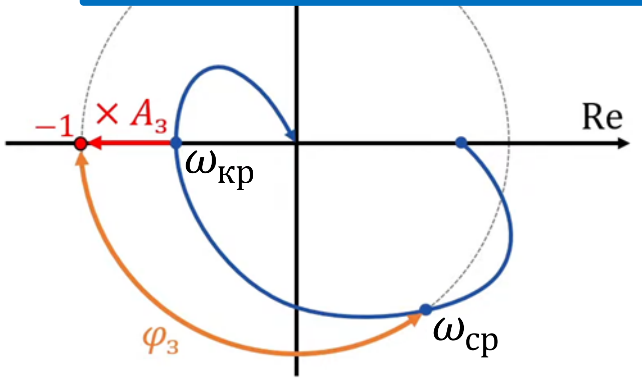
$$\varphi_з = \pi + \varphi(\omega_{ср})$$

Частотные показатели качества:
запасы устойчивости

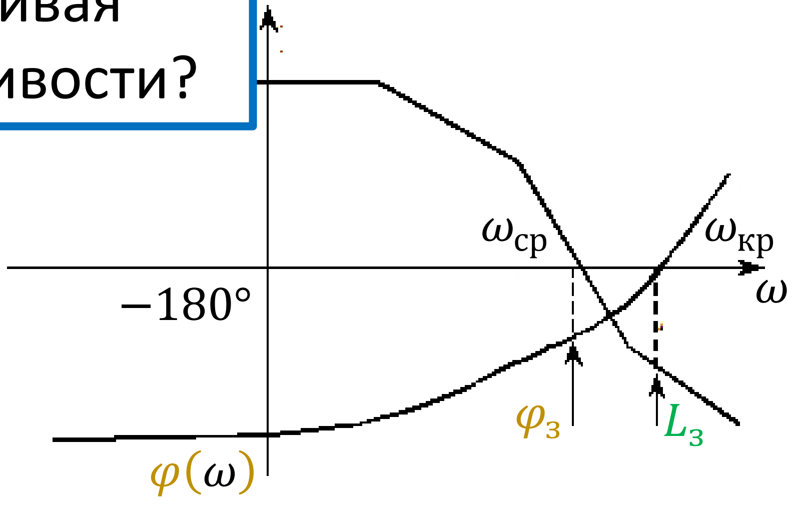
По АЧХ, ФЧХ, АФЧХ (с лекции):



Имеет ли неустойчивая система запас устойчивости?



По логарифмическим:



Если есть несколько кандидатов на запас (например, несколько $\omega_{кр}$), то запас – минимальный из них.

Алгебраически:

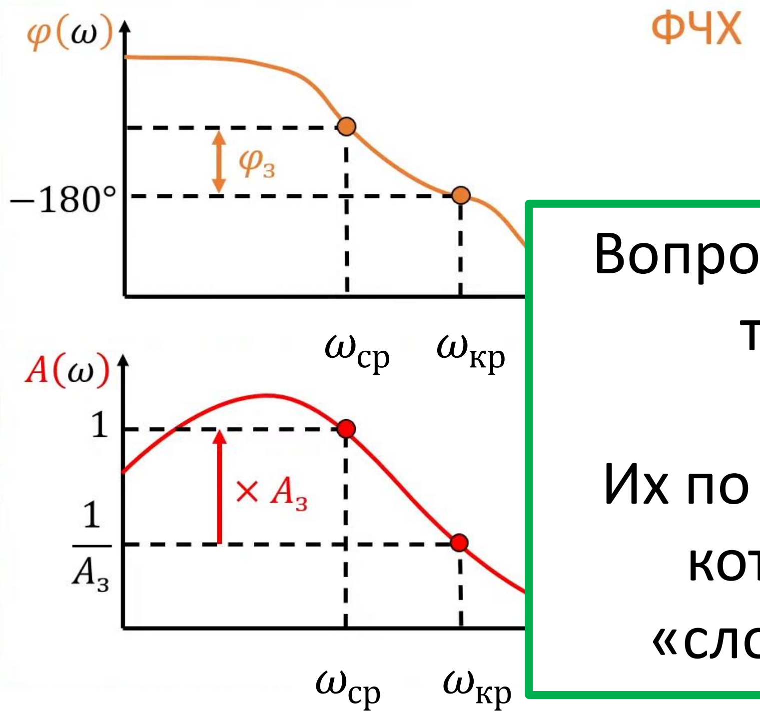
$$A_з = A^{-1}(\omega_{кр})$$

$$L_з = -L(\omega_{кр}) = 20\lg(A_з)$$

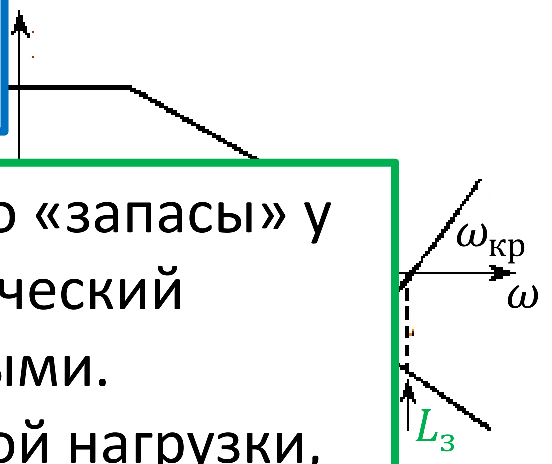
$$\varphi_з = \pi + \varphi(\omega_{ср})$$

Частотные показатели качества: запасы устойчивости

По АЧХ, ФЧХ, АФЧХ (с лекции):



По логарифмическим:



Имеет ли неустойчивая система запас устойчивости?

Вопрос дискуссионный. Если посчитать, то «запасы» у такой системы по фазе и логарифмический амплитудный будут отрицательными.
Их по сути нет, нет «запаса прочности», той нагрузки, которую наша система может вынести, пока не «сломается»! Настоящие запасы когда $\omega_{кр} > \omega_{ср}$!

Если есть несколько кандидатов на запас (например, несколько $\omega_{кр}$), то запас – минимальный из них.

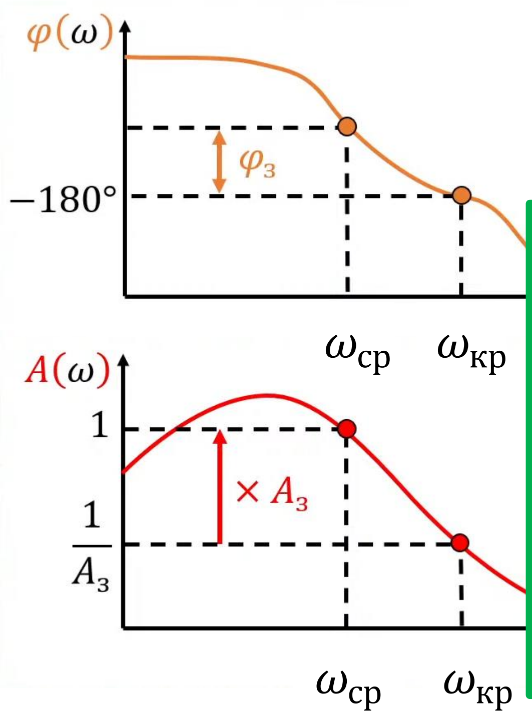
$$A_з = A^{-1}(\omega_{кр})$$

$$L_з = -L(\omega_{кр}) = 20\lg(A_з)$$

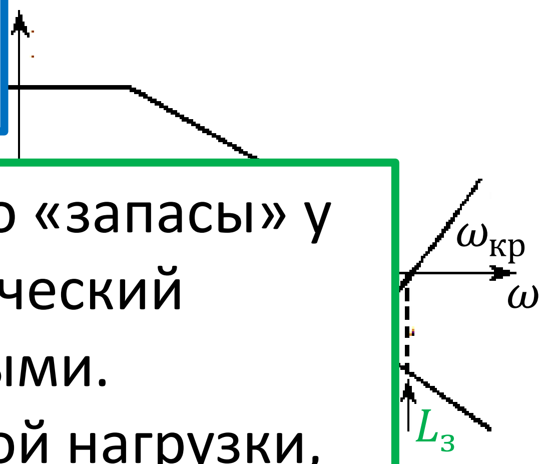
$$\varphi_з = \pi + \varphi(\omega_{ср})$$

Частотные показатели качества: запасы устойчивости

По АЧХ, ФЧХ, АФЧХ (с лекции):



По логарифмическим:



Имеет ли неустойчивая система запас устойчивости?

Вопрос дискуссионный. Если посчитать, то «запасы» у такой системы по фазе и логарифмический амплитудный будут отрицательными.
Их по сути нет, нет «запаса прочности», той нагрузки, которую наша система может вынести, пока не «сломается»! Настоящие запасы когда $\omega_{кр} > \omega_{ср}$!

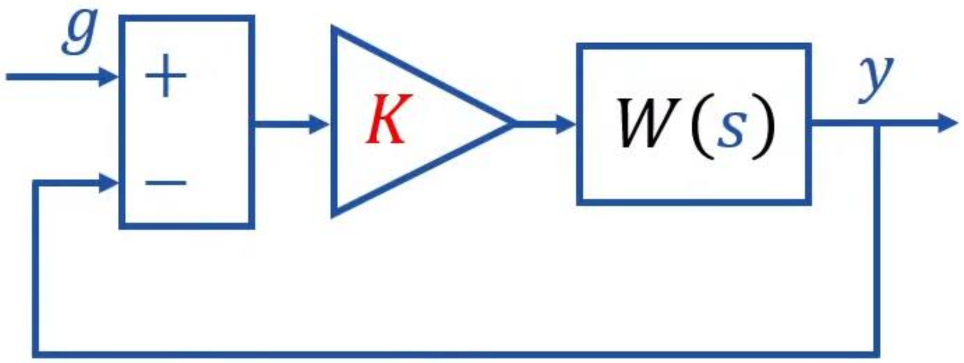
Если есть несколько кандидатов на запас (например, несколько $\omega_{кр}$), то запас – минимальный из них.

Но посчитать что-то можем…

$L_з$ = $A_з)$

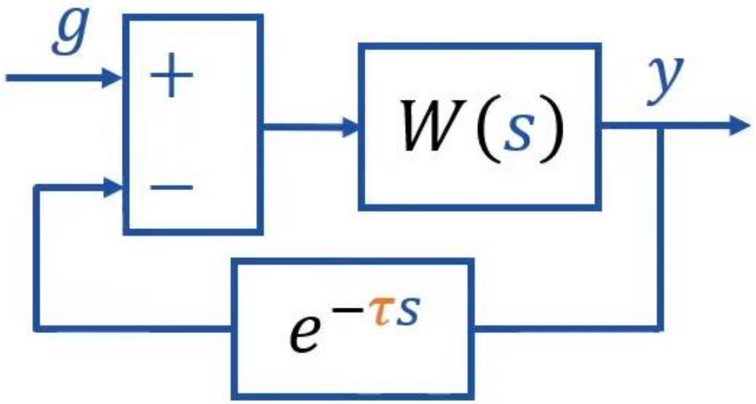
$\varphi_з = \pi + \varphi(\omega_{ср})$

Частотные показатели качества: запасы устойчивости



Критический допустимый коэффициент П-регулятора

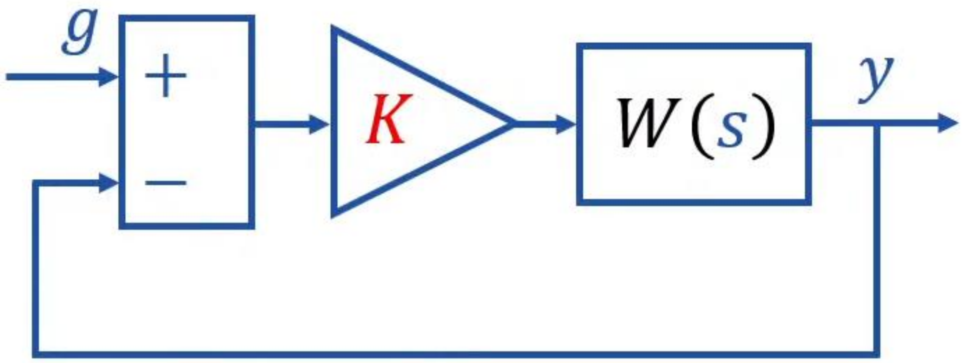
$$K_{\max} = A_з$$



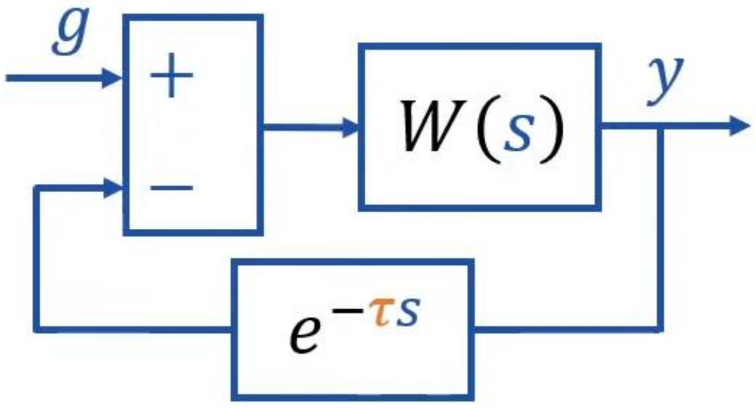
Критическое допустимое время запаздывания

$$\tau = \frac{\varphi_з}{\omega_{ср}}$$

Частотные показатели качества: запасы устойчивости



Критический допустимый коэффициент П-регулятора



Критическое допустимое время запаздывания

$$K_{\max} = A_з$$

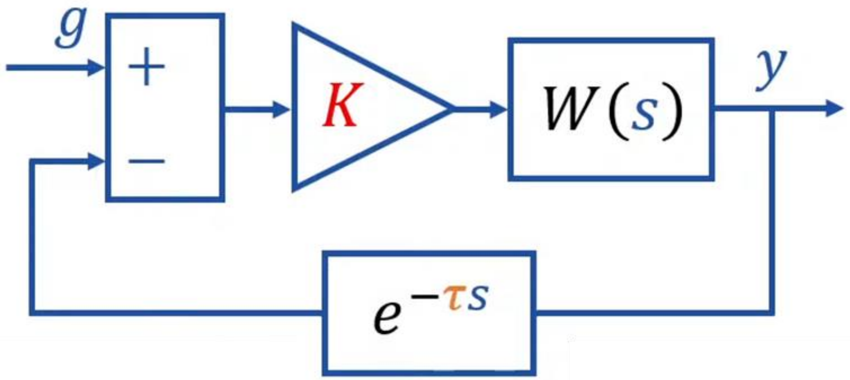
Это будет видно и на характеристиках.

$$\tau = \frac{\varphi_з}{\omega_{ср}}$$

На лекциях показывали, как закручивает АФЧХ от $e^{-\tau s}$

$e^{-\tau s}$ не влияет на ЛАЧХ, но искажает ЛФЧХ, смещая $\omega_{кр}$ левее

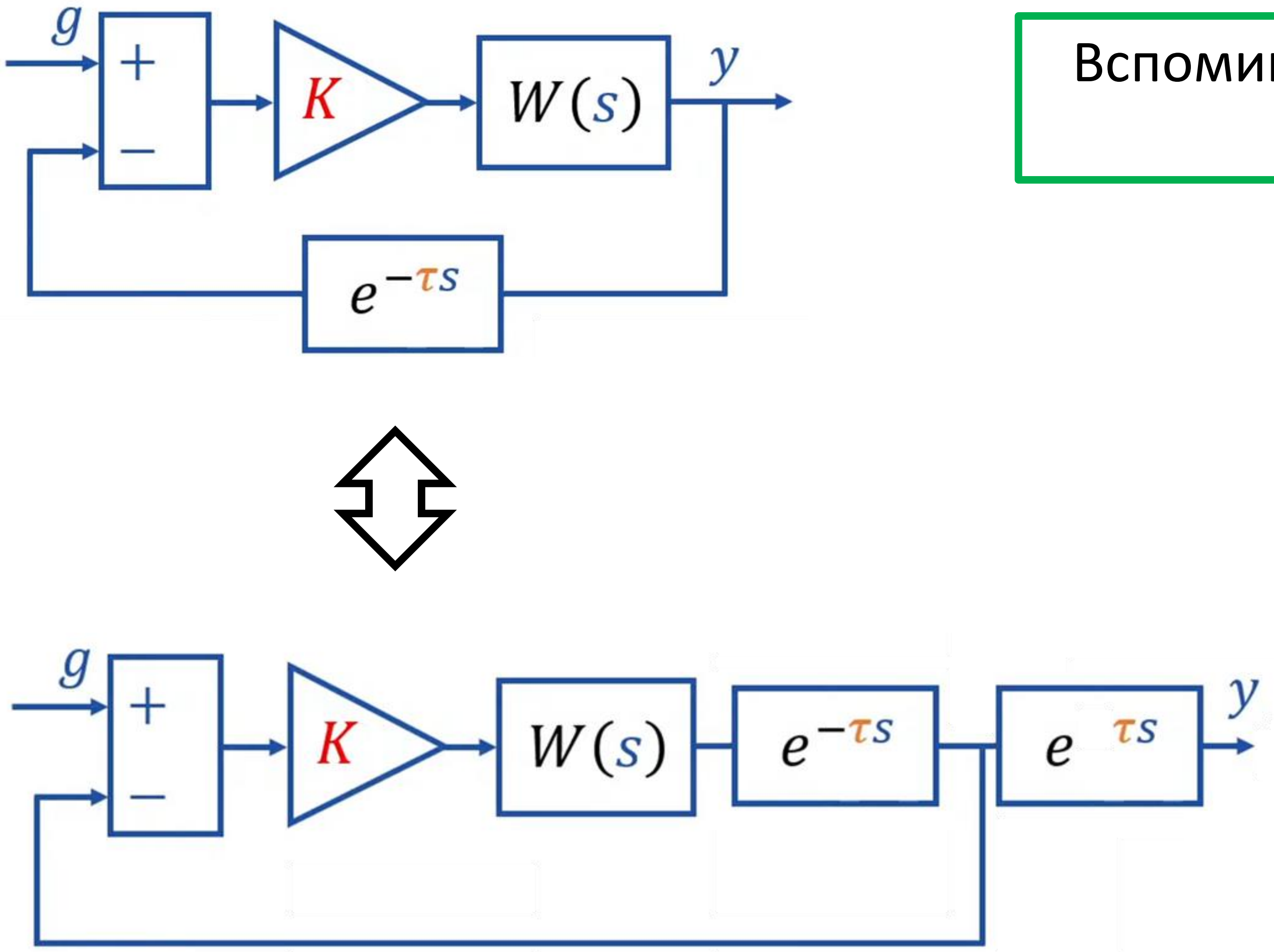
Частотные показатели качества: запасы устойчивости



Почему расчет ведется будто запаздывание часть системы, а не в обратной связи?

$$\varphi_з = \pi + \varphi(\omega_{ср})$$

$$\tau = \frac{\varphi_з}{\omega_{ср}}$$

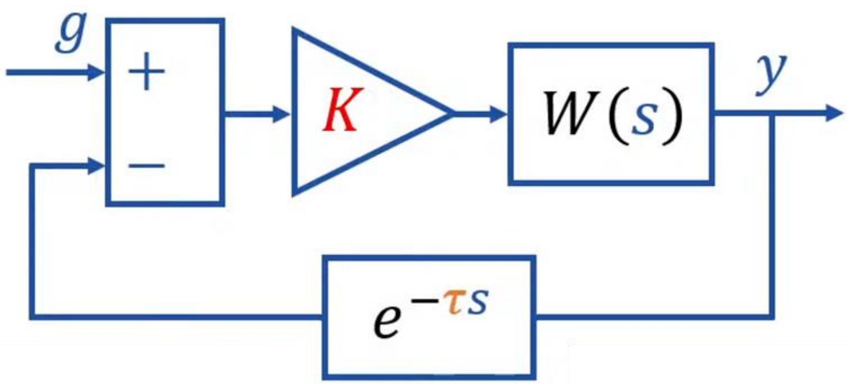


Вспоминаем правила преобразования структурных схем!

$$\varphi_з = \pi + \varphi(\omega_{ср})$$

$$\tau = \frac{\varphi_з}{\omega_{ср}}$$

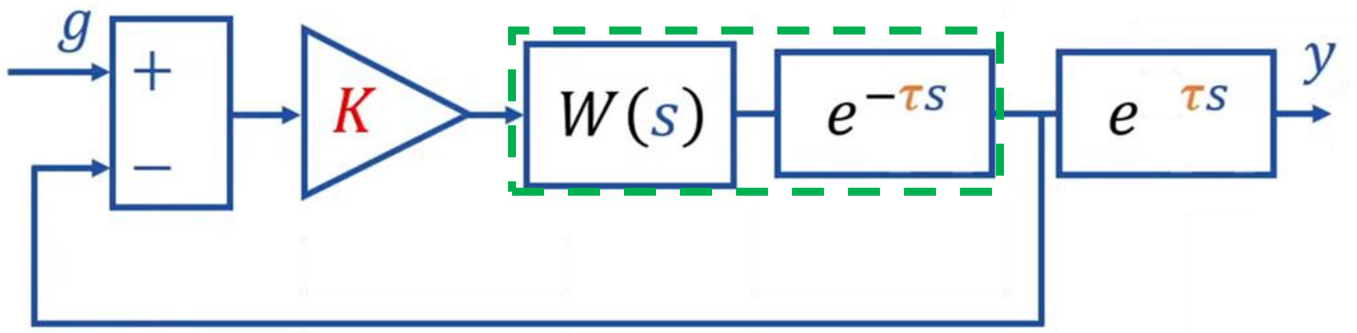
Частотные показатели качества: запасы устойчивости



«Честная» система

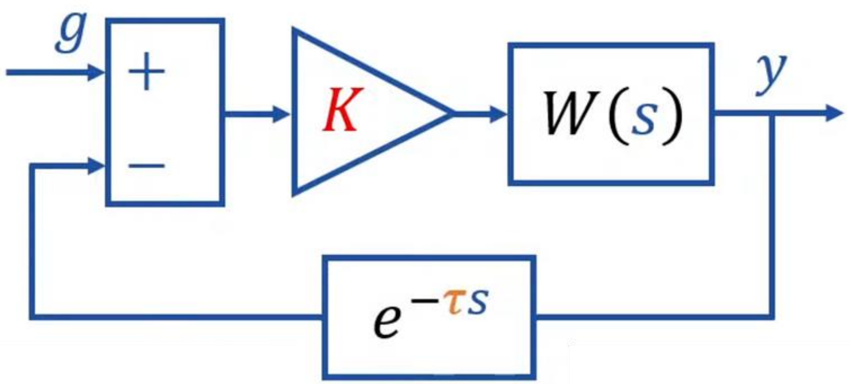
$$\varphi_з = \pi + \varphi(\omega_{ср})$$

$$\tau = \frac{\varphi_з}{\omega_{ср}}$$



«Абстрактная» система для определения запасов по фазе и амплитуде

Частотные показатели качества: запасы устойчивости

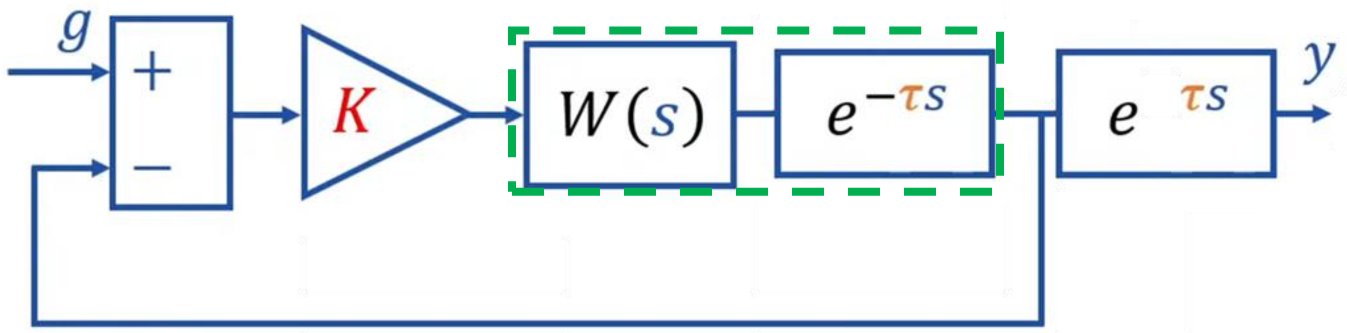


«Честная» система

Запасы, определенные по абстракции, справедливы для изначального случая

$$\varphi_з = \pi + \varphi(\omega_{ср})$$

$$\tau = \frac{\varphi_з}{\omega_{ср}}$$



«Абстрактная» система для определения запасов по фазе и амплитуде

Частотные показатели качества: запасы устойчивости

1. **Резонансная частота**

2. **Показателем колебательности**

3а. **Частота среза (*фильтрация*)**

3б. **Частота среза (*частотные характеристики*)**

4. **Полосой пропускания**

5. **Запасы устойчивости**
   - 5а. **Запас по фазе**
   - 5б. **Запас по амплитуде**
   - 5в. **Обобщенный запас устойчивости**

Частотные показатели качества: запасы устойчивости

1. Резонансная ча

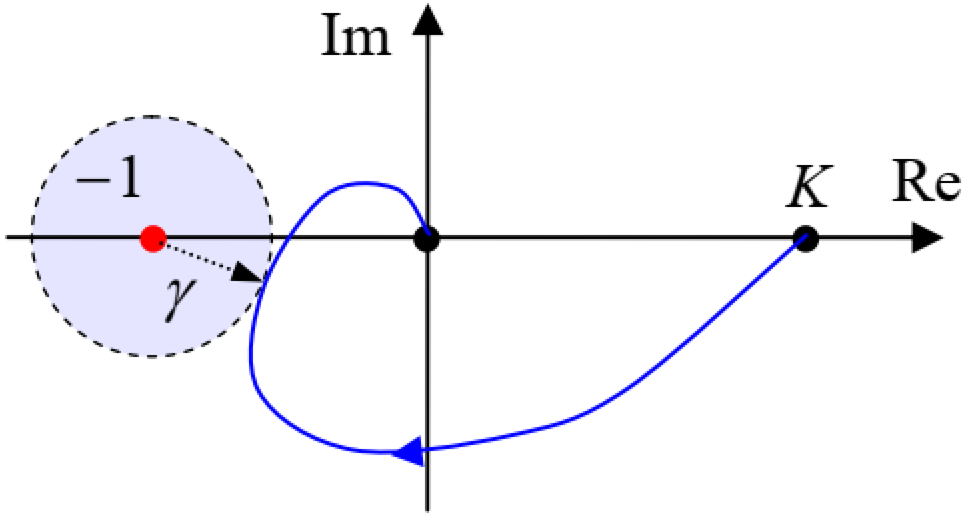
К сожалению, в некоторых случаях классические запасы устойчивости (по амплитуде и фазе) дают не совсем верное представление о том, насколько система действительно близка к границе устойчивости. Поэтому в качестве единой характеристики иногда используют кратчайшее расстояние γ от годографа до точки (−1; 0).

2. Показателем к

3а. Частота среза (фильтрация)

3б. Частота среза (*частотные характеристики*)

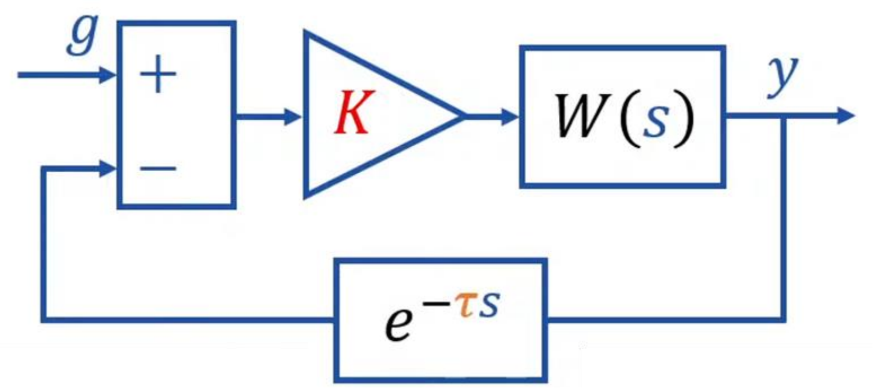
4. Полосой пропускания



5. **Запасы устойчивости**
   - 5а. **Запас по фазе**
   - 5б. **Запас по амплитуде**
   - 5в. **Обобщенный запас устойчивости**

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»
6.7 Частотные оценки качества

Запасы устойчивости: задачи



Пример:

$$\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$$

$$\hat{y}(t) = y(t-\tau)$$

$$u(t) = 8e(t)$$

$$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$$

$$\tau_{\max} = ?$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

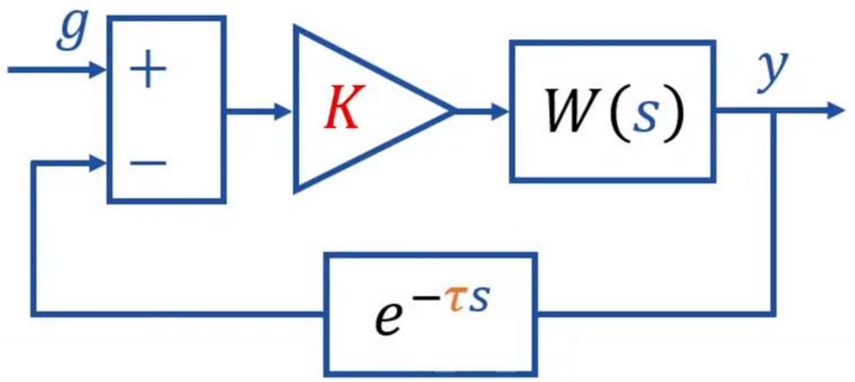
$\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$ — Объект управления

$\hat{y}(t) = y(t - \tau)$ — Датчик (в ОС)

$u(t) = 8e(t)$ — Регулятор

$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$ — Ошибка

$\tau_{\max} =?$



Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$$\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$$

$$\hat{y}(t) = y(t-\tau)$$

$$u(t) = 8e(t)$$

$$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$$

$$\tau_{\max} = ?$$

При $\tau = 0$ (без задержек):

$$W(s) = \frac{8}{s+4}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\varphi_{з}}{\omega_{ср}}$$

$$\varphi_{з} = \pi + \varphi(\omega_{ср})$$

$$A(\omega_{ср}) = 1$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$

$\hat{y}(t) = y(t - \tau)$

$u(t) = 8e(t)$

$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$

$\tau_{\max} =?$

При $\tau = 0$ (без задержек):

$$W(s) = \frac{8}{s+4}$$

$$W(j\omega) = \frac{32 - 8j\omega}{16 + \omega^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\varphi_з}{\omega_{ср}}$$

$$\varphi_з = \pi + \varphi(\omega_{ср})$$

$$A(\omega_{ср}) = 1$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$

$\hat{y}(t) = y(t-\tau)$

$u(t) = 8e(t)$

$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$

$\tau_{\max} = ?$

При $\tau = 0$ (без задержек):

$$W(s) = \frac{8}{s+4}$$

$$W(j\omega) = \frac{32 - 8j\omega}{16 + \omega^2}$$

$$A(\omega) = \frac{8}{\sqrt{16 + \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan2}\left(\frac{-8\omega}{16+\omega^2}, \frac{32}{16+\omega^2}\right)$$

$$\tau_{\max} = \frac{\varphi_з}{\omega_{ср}}$$

$$\varphi_з = \pi + \varphi(\omega_{ср})$$

$$A(\omega_{ср}) = 1$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$

$\hat{y}(t) = y(t-\tau)$

$u(t) = 8e(t)$

$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$

$\tau_{\max} = ?$

При $\tau = 0$ (без задержек):

$$W(s) = \frac{8}{s+4}$$

$$W(j\omega) = \frac{32 - 8j\omega}{16+\omega^2}$$

$$A(\omega) = \frac{8}{\sqrt{16+\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan2}\left(\frac{-8\omega}{16+\omega^2}, \frac{32}{16+\omega^2}\right)$$

$$\tau_{\max} = \frac{\varphi_з}{\omega_{ср}}$$

$$\varphi_з = \pi + \varphi(\omega_{ср})$$

$$A(\omega_{ср}) = 1$$

Звено апериодическое, сдвиг фазы от 0 до $-\frac{\pi}{2}$, можем записать через arctg

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$

$\hat{y}(t) = y(t - \tau)$

$u(t) = 8e(t)$

$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$

$\tau_{\max} = ?$

При $\tau = 0$ (без задержек):

$$W(s) = \frac{8}{s+4}$$

$$W(j\omega) = \frac{32 - 8j\omega}{16 + \omega^2}$$

$$A(\omega) = \frac{8}{\sqrt{16 + \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

$$\tau_{\max} = \frac{\varphi_{з}}{\omega_{ср}}$$

$$\varphi_{з} = \pi + \varphi\left(\omega_{ср}\right)$$

$$A\left(\omega_{ср}\right) = 1$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$$\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$$

$$\hat{y}(t) = y(t - \tau)$$

$$u(t) = 8e(t)$$

$$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$$

$$\tau_{\max} = ?$$

При $\tau = 0$ (без задержек):

$$W(s) = \frac{8}{s+4}$$

$$W(j\omega) = \frac{32 - 8j\omega}{16 + \omega^2}$$

$$A(\omega) = \frac{8}{\sqrt{16 + \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{\varphi_з}{\omega_{ср}} \qquad \varphi_з = \pi + \varphi(\omega_{ср}) \qquad A(\omega_{ср}) = 1}$$

$$\frac{8}{\sqrt{16 + \omega_{ср}^2}} = 1$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$

$\hat{y}(t) = y(t-\tau)$

$u(t) = 8e(t)$

$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$

$\tau_{\max} = ?$

При $\tau = 0$ (без задержек):

$$W(s) = \frac{8}{s+4}$$

$$W(j\omega) = \frac{32 - 8j\omega}{16 + \omega^2}$$

$$A(\omega) = \frac{8}{\sqrt{16+\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

$$\boxed{\begin{gathered}\tau_{\max} = \frac{\varphi_з}{\omega_{ср}} \\ \varphi_з = \pi + \varphi(\omega_{ср}) \\ A(\omega_{ср}) = 1\end{gathered}}$$

$$\frac{8}{\sqrt{16+\omega_{ср}^2}} = 1 \quad \rightarrow \quad \omega_{ср} = 4\sqrt{3}$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$$\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$$

$$\hat{y}(t) = y(t-\tau)$$

$$u(t) = 8e(t)$$

$$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$$

$$\tau_{\max} = ?$$

При $\tau = 0$ (без задержек):

$$W(s) = \frac{8}{s+4}$$

$$W(j\omega) = \frac{32 - 8j\omega}{16 + \omega^2}$$

$$A(\omega) = \frac{8}{\sqrt{16 + \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

$$\boxed{\begin{gathered}\tau_{\max} = \frac{\varphi_з}{\omega_{ср}} \\ \varphi_з = \pi + \varphi(\omega_{ср}) \\ A(\omega_{ср}) = 1\end{gathered}}$$

$$\frac{8}{\sqrt{16 + \omega_{ср}^2}} = 1 \quad \rightarrow \quad \omega_{ср} = 4\sqrt{3}$$

$$\varphi_з = \pi - \operatorname{arctg}(\sqrt{3})$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$$\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$$

$$\hat{y}(t) = y(t-\tau)$$

$$u(t) = 8e(t)$$

$$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$$

$$\tau_{\max} = ?$$

При $\tau = 0$ (без задержек):

$$W(s) = \frac{8}{s+4}$$

$$W(j\omega) = \frac{32 - 8j\omega}{16+\omega^2}$$

$$A(\omega) = \frac{8}{\sqrt{16+\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{\varphi_з}{\omega_{ср}} \qquad \varphi_з = \pi + \varphi(\omega_{ср}) \qquad A(\omega_{ср}) = 1}$$

$$\frac{8}{\sqrt{16+\omega_{ср}^2}} = 1 \quad \rightarrow \quad \omega_{ср} = 4\sqrt{3}$$

$$\varphi_з = \pi - \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$$\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$$

$$\hat{y}(t) = y(t-\tau)$$

$$u(t) = 8e(t)$$

$$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$$

$$\tau_{\max} = ?$$

При $\tau = 0$ (без задержек):

$$W(s) = \frac{8}{s+4}$$

$$W(j\omega) = \frac{32 - 8j\omega}{16+\omega^2}$$

$$A(\omega) = \frac{8}{\sqrt{16+\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{\varphi_з}{\omega_{ср}} \qquad \varphi_з = \pi + \varphi(\omega_{ср}) \qquad A(\omega_{ср}) = 1}$$

$$\frac{8}{\sqrt{16+\omega_{ср}^2}} = 1 \quad \rightarrow \quad \omega_{ср} = 4\sqrt{3}$$

$$\varphi_з = \pi - \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$$\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$$

$$\hat{y}(t) = y(t - \tau)$$

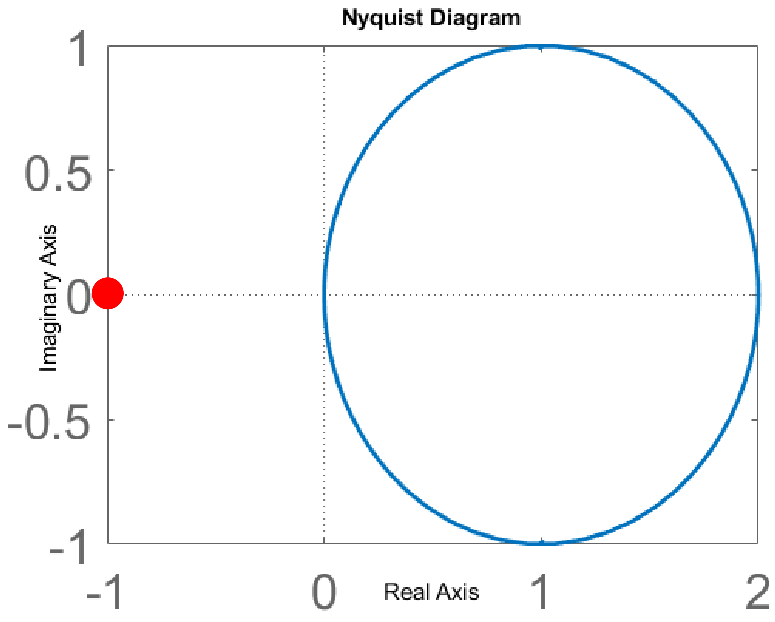
$$u(t) = 8e(t)$$

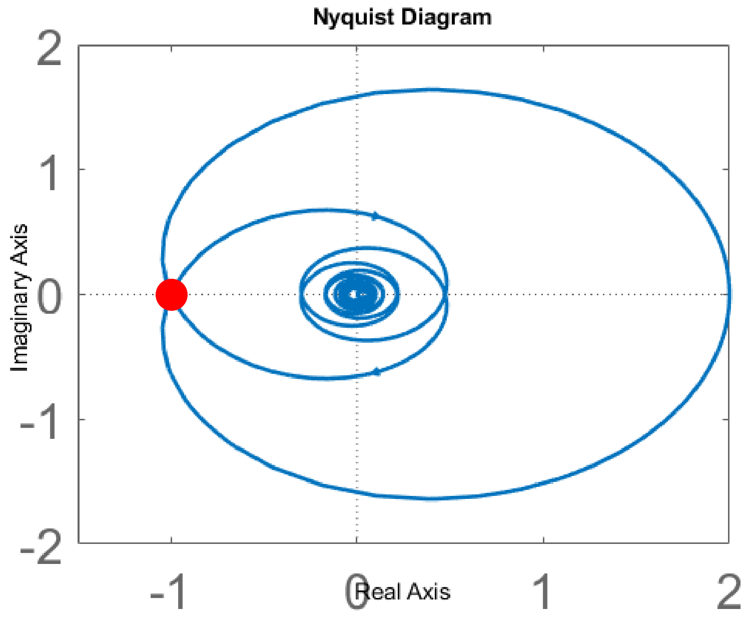
$$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$$

$$\tau_{\max} = ?$$

При $\tau = 0$ (без задержек):

$$W(s) = \frac{8}{s + 4}$$





$$\tau_{\max} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$\dot{y}(t) = 2u(t)$

$\hat{y}(t) = y(t-6)$

$u(t) = Ke(t)$

$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$

$K_{\max} = ?$

При $K = 1$ (без усиления):

$$W(s) = \frac{2}{s} \cdot e^{-6s}$$

$$\boxed{\begin{aligned} K_{\max} &= A_{з} = A^{-1}(\omega_{кр}) \\ \varphi(\omega_{кр}) &= -180^\circ = -\pi \end{aligned}}$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$\dot{y}(t) = 2u(t)$

$\hat{y}(t) = y(t-6)$

$u(t) = Ke(t)$

$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$

$K_{\max} = ?$

При $K = 1$ (без усиления):

$$W(s) = \frac{2}{s} \cdot e^{-6s}$$

$$W(j\omega) = \frac{-j2\omega}{\omega^2} \cdot e^{-j6\omega}$$

$$\boxed{\begin{gathered} K_{\max} = A_з = A^{-1}(\omega_{кр}) \\ \varphi(\omega_{кр}) = -180° = -\pi \end{gathered}}$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$\dot{y}(t) = 2u(t)$

$\hat{y}(t) = y(t-6)$

$u(t) = Ke(t)$

$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$

$K_{\max} = ?$

При $K = 1$ (без усиления):

$$W(s) = \frac{2}{s} \cdot e^{-6s}$$

$$W(j\omega) = \frac{-j2\omega}{\omega^2} \cdot e^{-j6\omega}$$

$$A(\omega) = \left|\frac{-j2\omega}{\omega^2}\right| \cdot \left|e^{-j6\omega}\right|$$

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{-j2}{\omega}\right) + \arg\left(e^{-j6\omega}\right)$$

$$K_{\max} = A_{з} = A^{-1}(\omega_{кр})$$

$$\varphi(\omega_{кр}) = -180° = -\pi$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$\dot{y}(t) = 2u(t)$

$\hat{y}(t) = y(t-6)$

$u(t) = Ke(t)$

$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$

$K_{\max} =?$

При $K = 1$ (без усиления):

$$W(s) = \frac{2}{s} \cdot e^{-6s}$$

$$W(j\omega) = \frac{-j2\omega}{\omega^2} \cdot e^{-j6\omega}$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\omega} \cdot 1$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan2}\left(\frac{-2}{\omega}, 0\right) + (-6\omega)$$

$$K_{\max} = A_з = A^{-1}(\omega_{кр})$$

$$\varphi(\omega_{кр}) = -180° = -\pi$$

Звено интегрирующее,
сдвиг фазы $-\frac{\pi}{2}$,
можем записать через arctg
(или сразу табличное значение)

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$$\dot{y}(t) = 2u(t)$$

$$\hat{y}(t) = y(t-6)$$

$$u(t) = Ke(t)$$

$$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$$

$$K_{\max} = ?$$

При $K = 1$ (без усиления):

$$W(s) = \frac{2}{s} \cdot e^{-6s}$$

$$W(j\omega) = \frac{-j2\omega}{\omega^2} \cdot e^{-j6\omega}$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\omega}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{\omega \cdot 0}\right) - 6\omega$$

$$K_{\max} = A_з = A^{-1}(\omega_{кр})$$

$$\varphi(\omega_{кр}) = -180° = -\pi$$

Звено интегрирующее,
сдвиг фазы $-\frac{\pi}{2}$,
можем записать через arctg
(или сразу табличное значение)

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$\dot{y}(t) = 2u(t)$

$\hat{y}(t) = y(t-6)$

$u(t) = Ke(t)$

$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$

$K_{\max} = ?$

При $K = 1$ (без усиления):

$$W(s) = \frac{2}{s} \cdot e^{-6s}$$

$$W(j\omega) = \frac{-j2\omega}{\omega^2} \cdot e^{-j6\omega}$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\omega}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(-\infty) - 6\omega$$

$$K_{\max} = A_з = A^{-1}(\omega_{кр})$$

$$\varphi(\omega_{кр}) = -180° = -\pi$$

Звено интегрирующее,
сдвиг фазы $-\frac{\pi}{2}$,
можем записать через arctg
(или сразу табличное значение)

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$\dot{y}(t) = 2u(t)$

$\hat{y}(t) = y(t-6)$

$u(t) = Ke(t)$

$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$

$K_{\max} = ?$

При $K = 1$ (без усиления):

$$W(s) = \frac{2}{s} \cdot e^{-6s}$$

$$W(j\omega) = \frac{-j2\omega}{\omega^2} \cdot e^{-j6\omega}$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\omega}$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 6\omega$$

$$K_{\max} = A_з = A^{-1}(\omega_{кр})$$

$$\varphi(\omega_{кр}) = -180° = -\pi$$

Звено интегрирующее,
сдвиг фазы $-\frac{\pi}{2}$,
можем записать через arctg
(или сразу табличное значение)

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$\dot{y}(t) = 2u(t)$

$\hat{y}(t) = y(t-6)$

$u(t) = Ke(t)$

$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$

$K_{\max} =?$

При $K = 1$ (без усиления):

$$W(s) = \frac{2}{s} \cdot e^{-6s}$$

$$W(j\omega) = \frac{-j2\omega}{\omega^2} \cdot e^{-j6\omega}$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\omega}$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 6\omega$$

$$\boxed{\begin{aligned} K_{\max} &= A_{з} = A^{-1}(\omega_{кр}) \\ \varphi(\omega_{кр}) &= -180° = -\pi \end{aligned}}$$

$$-\frac{\pi}{2} - 6\omega_{кр} = -\pi$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$$\dot{y}(t) = 2u(t)$$

$$\hat{y}(t) = y(t-6)$$

$$u(t) = Ke(t)$$

$$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$$

$$K_{\max} = ?$$

При $K = 1$ (без усиления):

$$W(s) = \frac{2}{s} \cdot e^{-6s}$$

$$W(j\omega) = \frac{-j2\omega}{\omega^2} \cdot e^{-j6\omega}$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\omega}$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 6\omega$$

$$\boxed{\begin{gathered} K_{\max} = A_з = A^{-1}(\omega_{кр}) \\ \varphi(\omega_{кр}) = -180^\circ = -\pi \end{gathered}}$$

$$-\frac{\pi}{2} - 6\omega_{кр} = -\pi \;\; \rightarrow \;\; \omega_{кр} = \frac{\pi}{12}$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$$\dot{y}(t) = 2u(t)$$

$$\hat{y}(t) = y(t-6)$$

$$u(t) = Ke(t)$$

$$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$$

$$K_{\max} = ?$$

При $K = 1$ (без усиления):

$$W(s) = \frac{2}{s} \cdot e^{-6s}$$

$$W(j\omega) = \frac{-j2\omega}{\omega^2} \cdot e^{-j6\omega}$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\omega}$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 6\omega$$

$$K_{\max} = A_з = A^{-1}(\omega_{кр})$$

$$\varphi(\omega_{кр}) = -180° = -\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} - 6\omega_{кр} = -\pi \quad \rightarrow \quad \omega_{кр} = \frac{\pi}{12}$$

$$K_{\max} = A^{-1}(\omega_{кр})$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$\dot{y}(t) = 2u(t)$

$\hat{y}(t) = y(t-6)$

$u(t) = Ke(t)$

$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$

$K_{\max} = ?$

При $K = 1$ (без усиления):

$$W(s) = \frac{2}{s} \cdot e^{-6s}$$

$$W(j\omega) = \frac{-j2\omega}{\omega^2} \cdot e^{-j6\omega}$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\omega}$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 6\omega$$

$$\boxed{\begin{gathered} K_{\max} = A_з = A^{-1}(\omega_{кр}) \\ \varphi(\omega_{кр}) = -180° = -\pi \end{gathered}}$$

$$-\frac{\pi}{2} - 6\omega_{кр} = -\pi \quad \to \quad \omega_{кр} = \frac{\pi}{12}$$

$$K_{\max} = A^{-1}(\omega_{кр}) = \frac{\omega_{кр}}{2} = \frac{\pi}{24}$$

Запасы устойчивости: задачи

Пример:

$$\dot{y}(t) = 2u(t)$$

$$\hat{y}(t) = y(t-6)$$

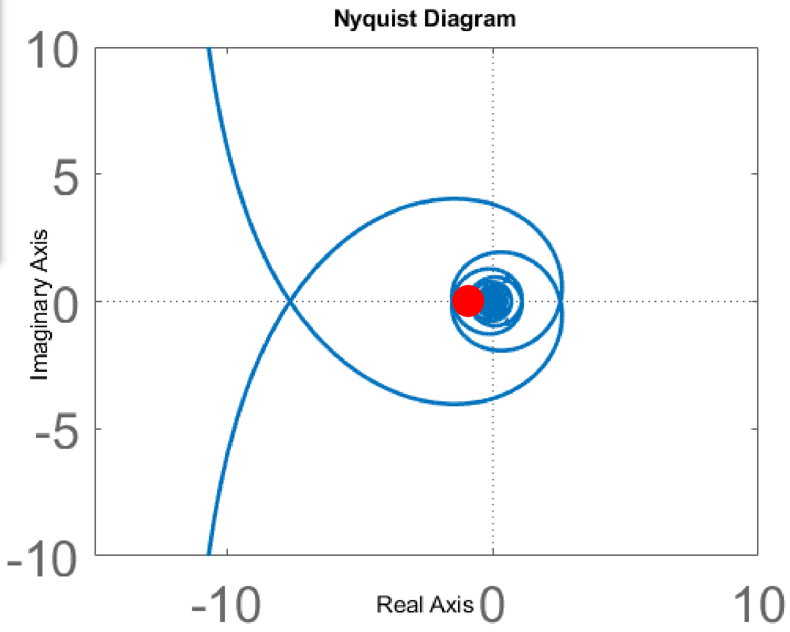
$$u(t) = Ke(t)$$

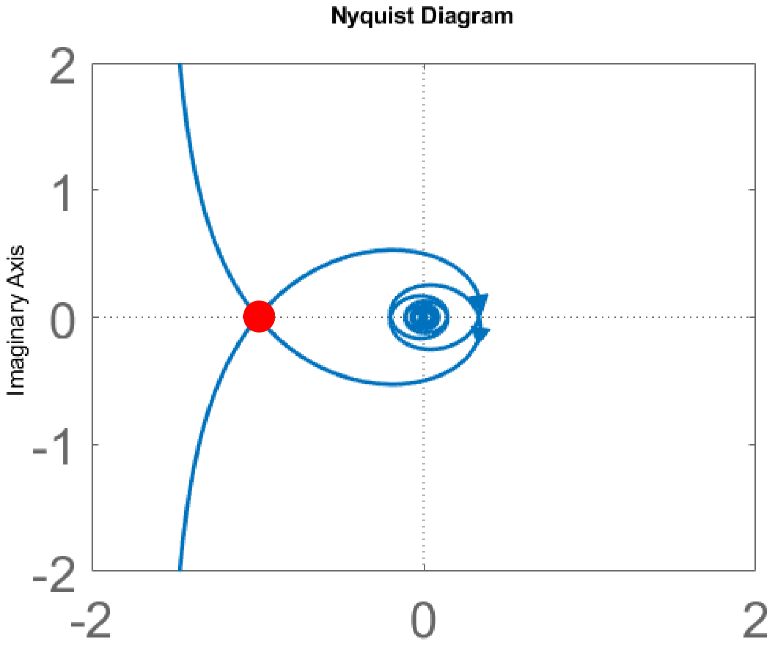
$$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$$

$$K_{\max} = ?$$

При $K = 1$ (без усиления):

$$W(s) = \frac{2}{s} \cdot e^{-6s}$$





$$K_{\max} = A^{-1}(\omega_{кр}) = \frac{\omega_{кр}}{2} = \frac{\pi}{24}$$

Запасы устойч

Пример изначально неустойчивой системы. «Запаса» по сути нет, $A_з < 1$. Но посчитав его, мы смогли узнать, насколько необходимо «ослабить» усиление системы, чтобы она стала устойчивой!

Пример:

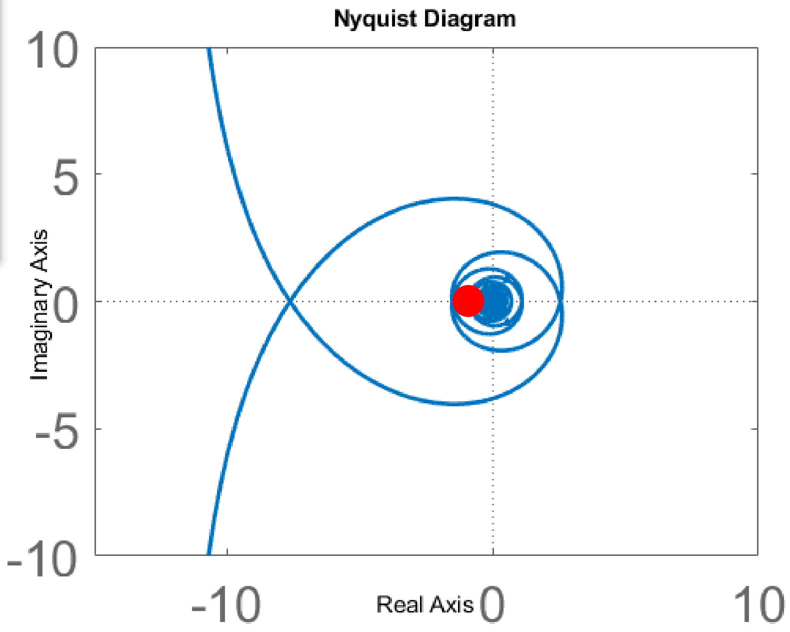
$$\dot{y}(t) = 2u(t)$$

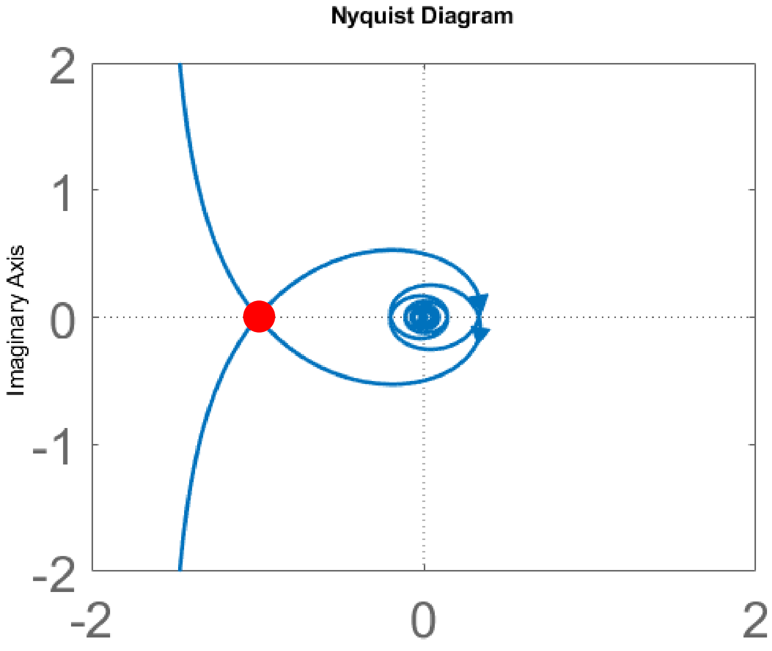
$$\hat{y}(t) = y(t-6)$$

$$u(t) = Ke(t)$$

$$e(t) = g(t) - \hat{y}(t)$$

$$K_{\max} = ?$$





$$K_{\max} = A^{-1}(\omega_{кр}) = \frac{\omega_{кр}}{2} = \frac{\pi}{24}$$