МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ
по лабораторной работе № 6:
КРИТЕРИЙ НАЙКВИСТА И СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Вариант 27

по дисциплине
«Линейные системы автоматического управления»

Студент:
Группа № R3338 *А.А. Нечаева*

Предподаватель:
ассистент факультера СУиР, к. т. н. *А.В. Пашенко*

Санкт-Петербург 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1 ГОДОГРАФ НАЙКВИСТА

Придумаем 3 объекта пятого порядка $p = 1$ полюс передаточной функции которых вещественный, а $q = 4$ – комплексно-сопряженные.

1.1 Объект 1

Передаточная функция имеет $n = 4$ неустойчивых полюсов у разомкнутой системы и $m = 2$ неустойчивых полюсов у замкнутой.

$$W_{\text{раз.}} = \frac{R(s)}{Q(s)} \tag{1}$$

Воспользуемся теоремой декарта, чтобы получить $n = 4$ неустойчивых полюса, необходимо две или четыре смены знаков у коэффициентов знаменателя

$$\begin{multline} Q(s) = (s+1)(s-1-i)(s-1+i)(s-1-2i)(s-1+2i) = \\ = s^5 - 3s^4 + 7s^3 - 3s^2 - 4s + 10 \end{multline} \tag{2}$$

Теперь подберем так часть $R(s)$, чтобы соответствовать условию $m = 2$ неустойчивых полюсов у замкнутой

$$R(s) = -6s^3 + 3s^2 + 4s \tag{3}$$

$$W_{\text{зам.}} = \frac{W_{\text{раз.}}}{1 + W_{\text{раз.}}} = \frac{R(s)}{Q(s) + R(s)} \tag{4}$$

тогда получим полюса замкнутой системы:

$$\begin{multline} Q(s) + R(s) = s^5 - 3s^4 + s^3 + 10 \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} s_1 \simeq -1.18745 < 0, \\ s_{2,3} \simeq -0.06223 \pm 1.33317i, & Re(s_{2,3}) < 0, \\ s_{4,5} \simeq 2.1560 \pm 0.2824i, & Re(s_{4,5}) > 0 \end{cases} \end{multline} \tag{5}$$

$$W_{\text{раз.}} = \frac{-6s^3 + 3s^2 + 4s}{s^5 - 3s^4 + 7s^3 - 3s^2 - 4s + 10} \tag{6}$$

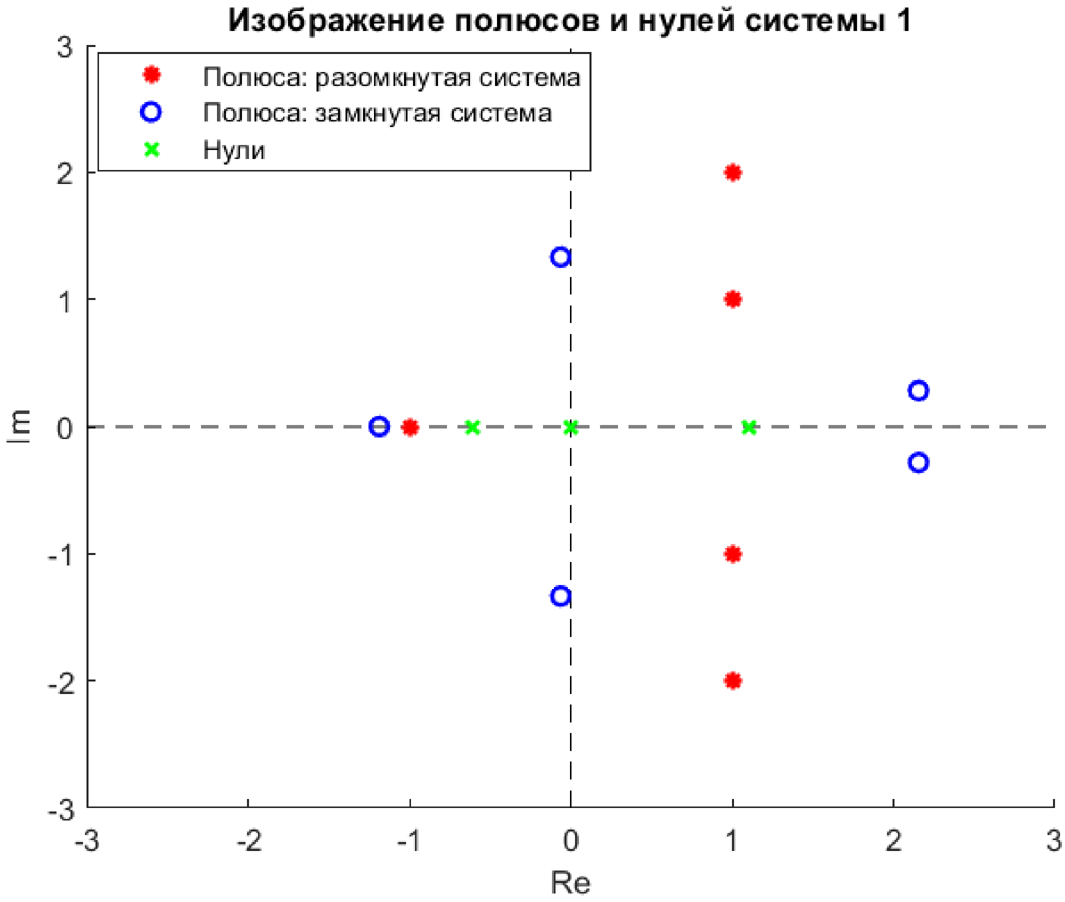

Рисунок 1 — Карта полюсов и нулей для первой системы.

$$W_{\text{зам.}} = \frac{-6s^3 + 3s^2 + 4s}{s^5 - 3s^4 + s^3 + 10} \tag{7}$$

Приведем переходные характеристики разомкнутой и замкнутой систем.

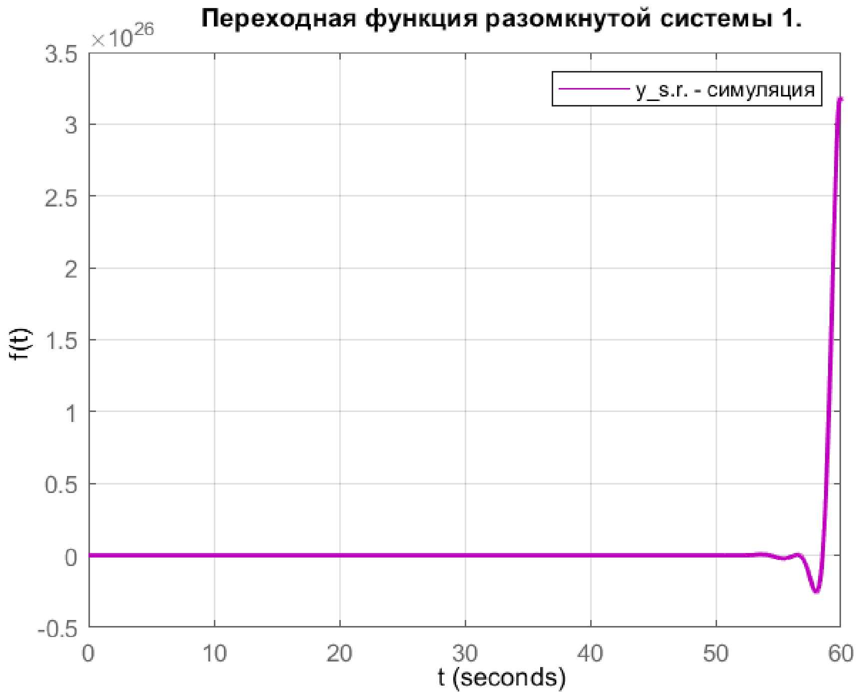

Рисунок 2 — Переходная функция разомкнутой первой системы.

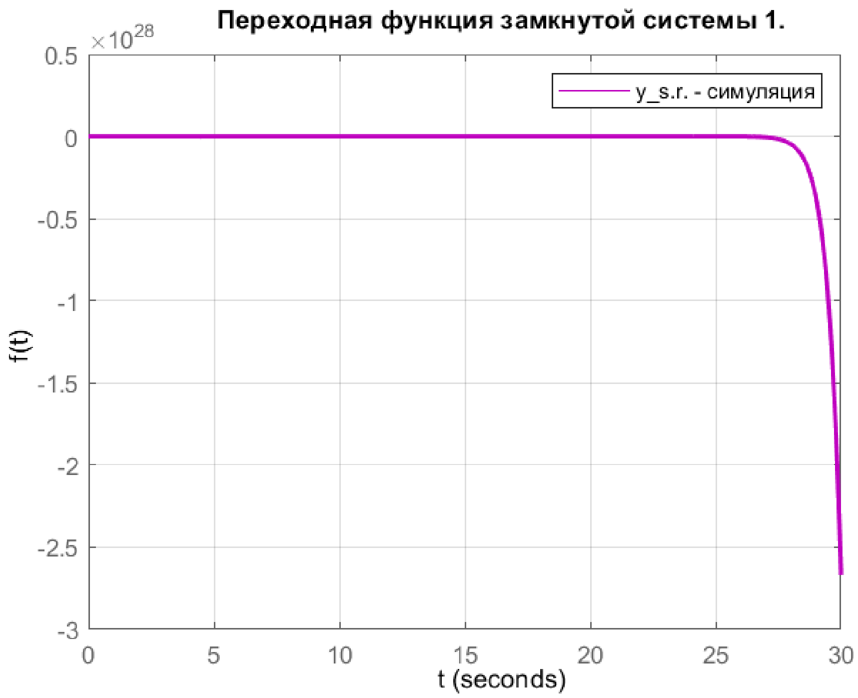

Рисунок 3 — Переходная функция замкнутой первой системы.

Приведем график годографа Найквиста.

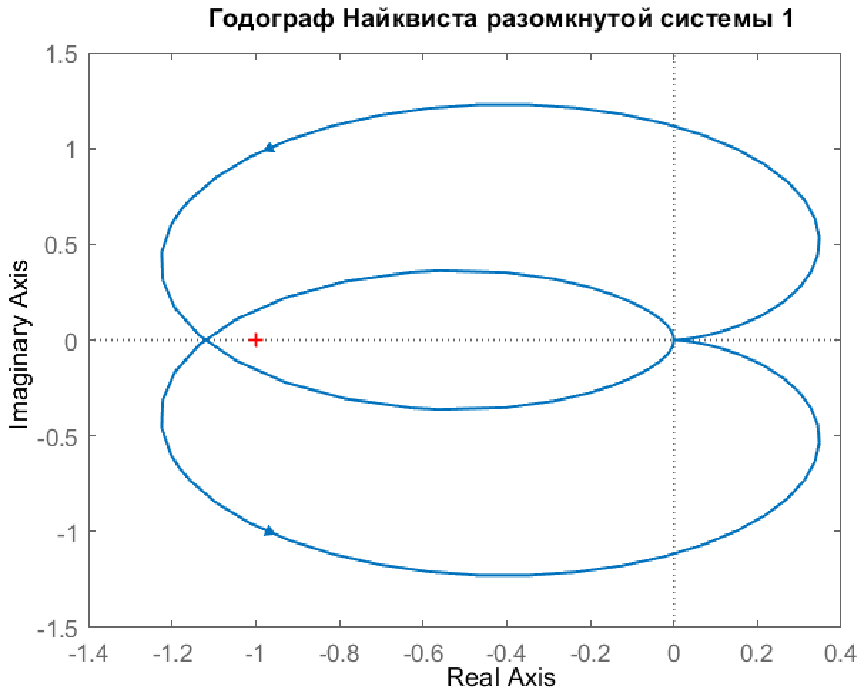

Рисунок 4 — Годограф Найквиста первой системы.

Согласно критерию Найквиста, количество оборотов годографа вокруг точки $(-1, 0)$ по часовой стрелке равно разнице количеств неустойчивых полюсов замкнутой и разомкнутой систем.

Для первой системы количество оборотов годографа вокруг точки $(-1, 0)$ по часовой стрелке равно -2, что подтверждается графиком годографа.

Построим ЛАФЧХ для разомкнутой системы

У разомкнутой системы 4 неустойчивых полюса. Для того,чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между положительными и отрицательными переходами ЛФЧХ прямой $\phi(\omega) = \pm(2k+1)\pi,\ k = (0, 1, 2, ..)$ при частотах, когда $L(\omega) > 0$, была равна половине числа неустойчивых полюсов разомкнутой системы.

По графику ЛАФЧХ (рисунок 5), видно, что имеет место **положительный** переход один, что подтверждает неустойчивость замкнутой системы.

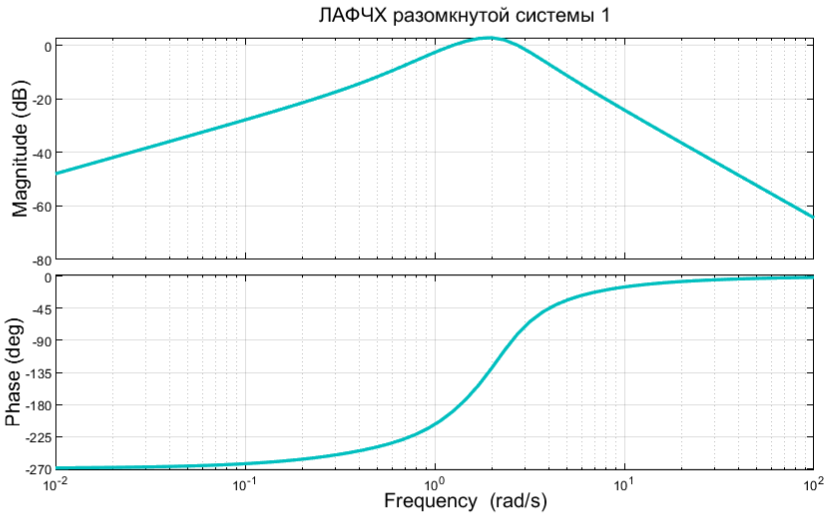

Рисунок 5 — ЛАФЧХ первой системы.

1.2 Объект 2

Передаточная функция имеет 0 неустойчивых полюсов у разомкнутой системы и $m = 2$ неустойчивых полюсов у замкнутой.

$$Q(s) = (s+1)(s+1-i)(s+1+i)(s+1-2i)(s+1+2i) = \\ = s^5 + 5s^4 + 15s^3 + 25s^2 + 24s + 10 \quad (8)$$

Теперь подберем так часть $R(s)$, чтобы соответствовать условию $m = 2$ неустойчивых полюсов у замкнутой

$$R(s) = -26s^2 \quad (9)$$

тогда получим полюса замкнутой системы:

$$Q(s) + R(s) = s^5 + 5s^4 + 15s^3 - s^2 + 24s + 10 \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} s_1 \simeq -0.380292 < 0, \\ s_{2,3} \simeq -2.7558 \pm 2.9963i, \quad Re(s_{2,3}) < 0, \\ s_{4,5} \simeq 0.44597 \pm 1.17805i, \quad Re(s_{4,5}) > 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$W_{\text{раз.}} = \frac{-26s^2}{s^5 + 5s^4 + 15s^3 + 25s^2 + 24s + 10} \quad (11)$$

$$W_{\text{зам.}} = \frac{-26s^2}{s^5 + 5s^4 + 15s^3 - s^2 + 24s + 10} \quad (12)$$

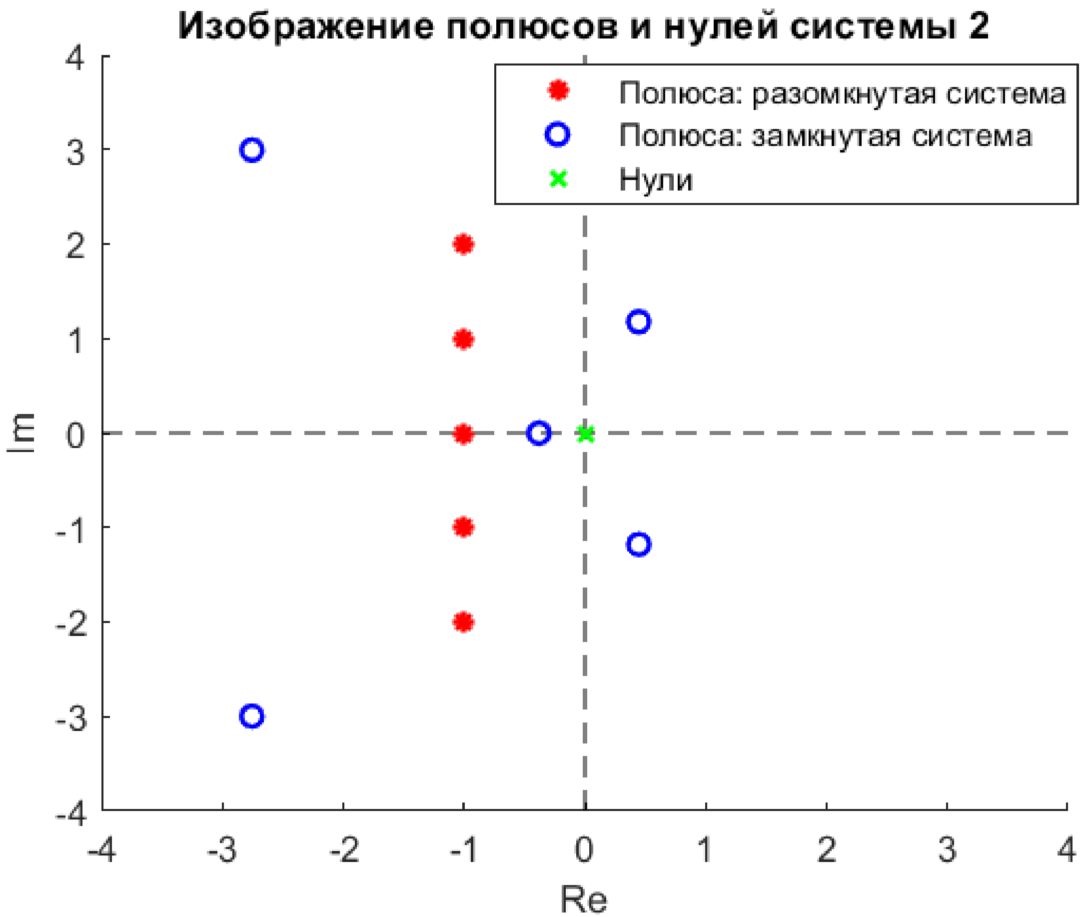

Рисунок 6 — Карта полюсов и нулей для второй системы.

Приведем переходные характеристики разомкнутой и замкнутой систем.

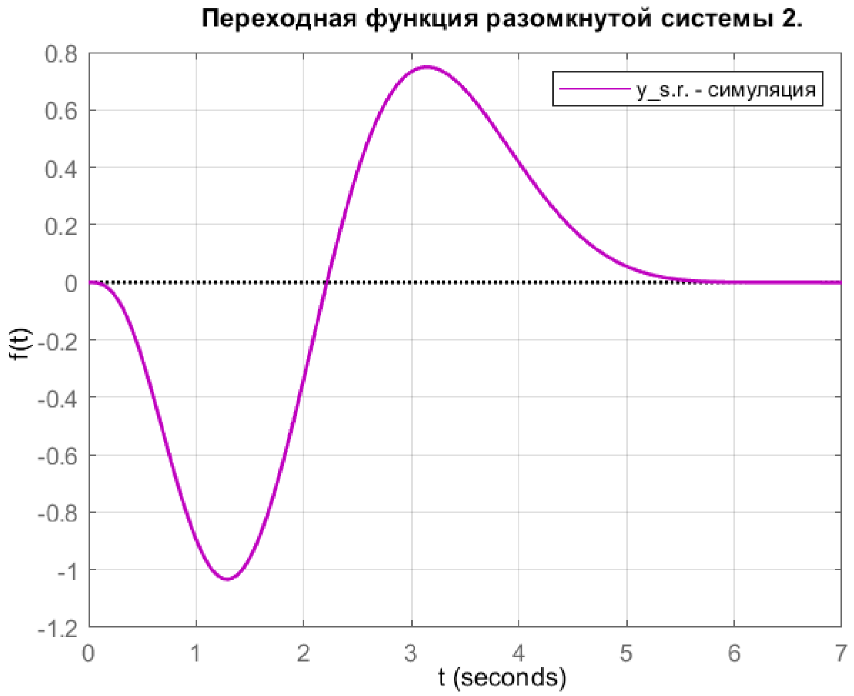

Рисунок 7 — Переходная функция разомкнутой второй системы.

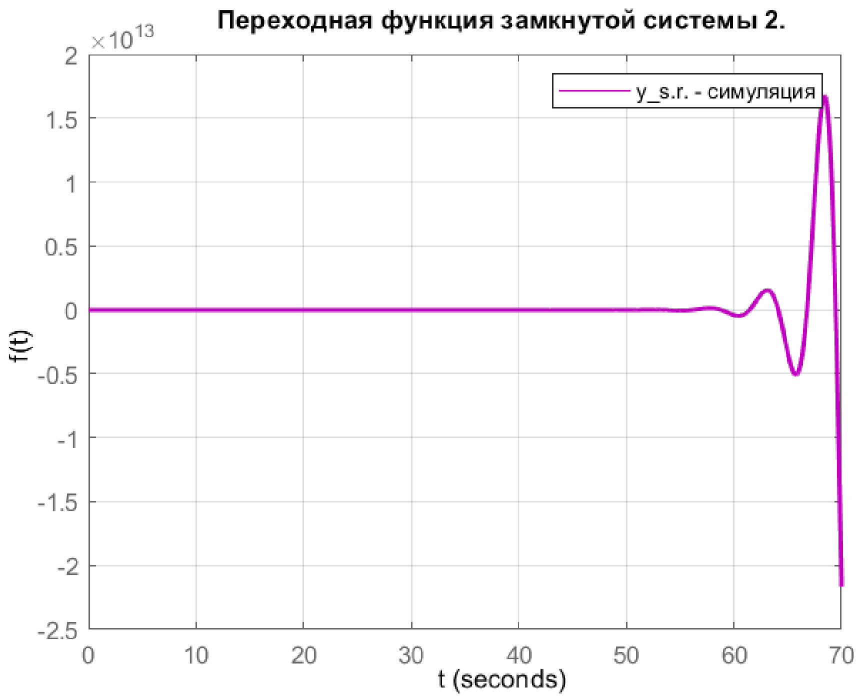

Рисунок 8 — Переходная функция замкнутой второй системы.

Приведем график годографа Найквиста.

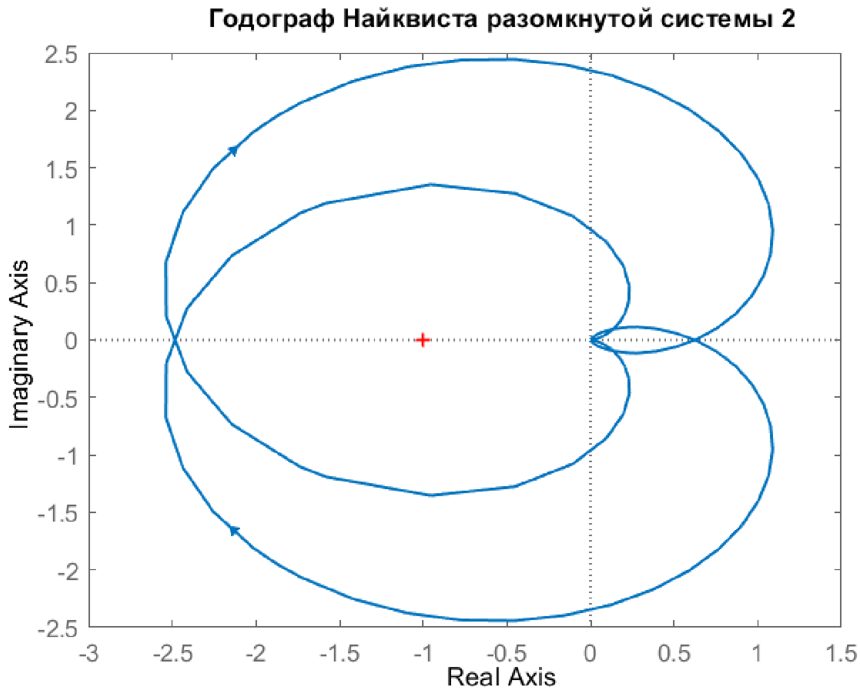

Рисунок 9 — Годограф Найквиста разомкнутой второй системы.

Согласно критерию Найквиста, количество оборотов годографа вокруг точки $(-1, 0)$ по часовой стрелке равно разнице количеств неустойчивых полюсов замкнутой и разомкнутой систем.

Для второй системы количество оборотов годографа вокруг точки $(-1, 0)$ по часовой стрелке равно 2, что подтверждается графиком годографа.

Построим ЛАФЧХ для разомкнутой системы

У разомкнутой системы 0 неустойчивых полюса. Для того,чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между положительными и отрицательными переходами ЛФЧХ прямой $\phi(\omega) = \pm(2k+1)\pi,\ k = (0, 1, 2, ..)$ при частотах, когда $L(\omega) > 0$, была равна половине числа неустойчивых полюсов разомкнутой системы.

По графику ЛАФЧХ (рисунок 10), видно, что имеет место один **отрицательный** переход, что подтверждает неустойчивость замкнутой системы.

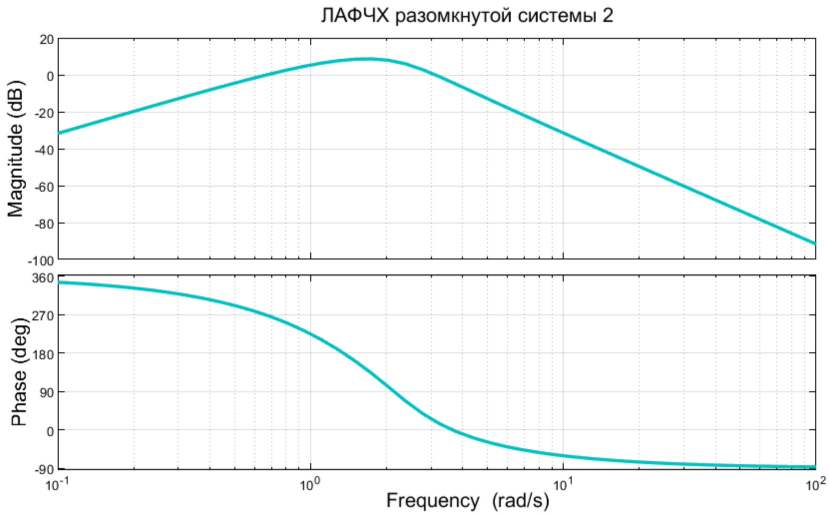

Рисунок 10 — ЛАФЧХ второй системы.

1.3 Объект 3

Передаточная функция имеет $n = 4$ неустойчивых полюсов у разомкнутой системы и 0 неустойчивых полюсов у замкнутой.

$$Q(s) = (s+2)(s-1-i)(s-1+i)(s-1-2i)(s-1+2i) = \\ = s^5 - 2s^4 + 3s^3 + 8s^2 - 18s + 20 \quad (13)$$

Теперь подберем так часть $R(s)$, чтобы соответствовать условию $m = 0$ неустойчивых полюсов у замкнутой

$$R(s) = 7s^4 + 12s^3 + 18s^2 + 52s - 1 \quad (14)$$

тогда получим полюса замкнутой системы:

$$Q(s) + R(s) = s^5 + 5s^4 + 15s^3 + 26s^2 + 34s + 10 \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} s_1 \simeq -0.385471 < 0, \\ s_{2,3} \simeq -1.9391 \pm 1.5432i, \quad Re(s_{2,3}) < 0, \\ s_{4,5} \simeq -0.3682 \pm 2.0220i, \quad Re(s_{4,5}) < 0 \end{cases} \quad (15)$$

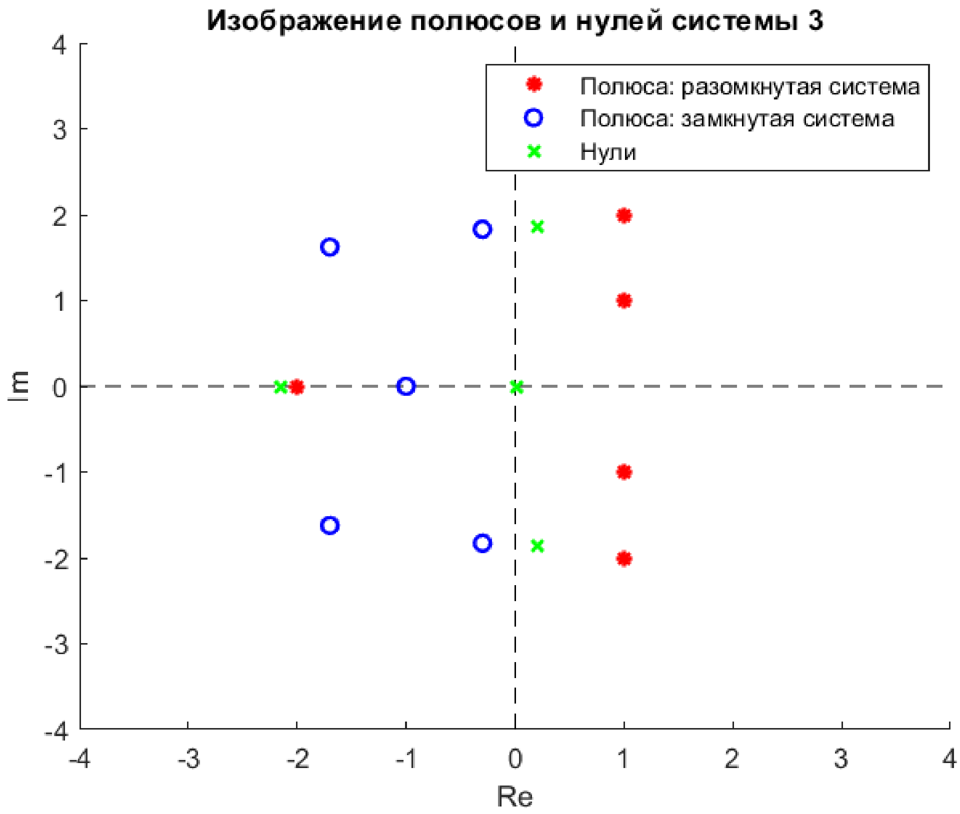

Рисунок 11 — Карта полюсов и нулей для третьей системы.

Приведем переходные характеристики разомкнутой и замкнутой систем.

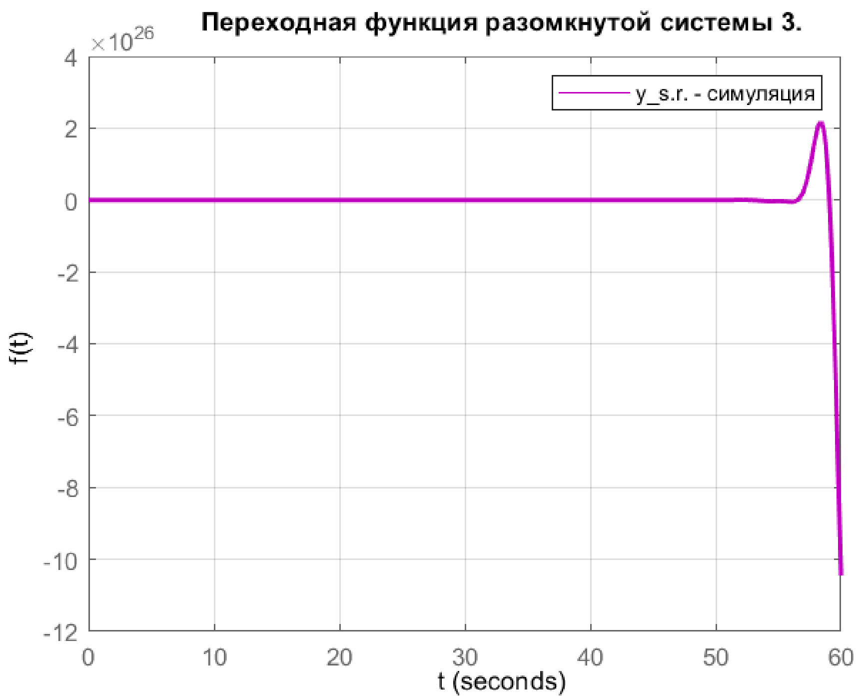

Рисунок 12 — Переходная функция разомкнутой третьей системы.

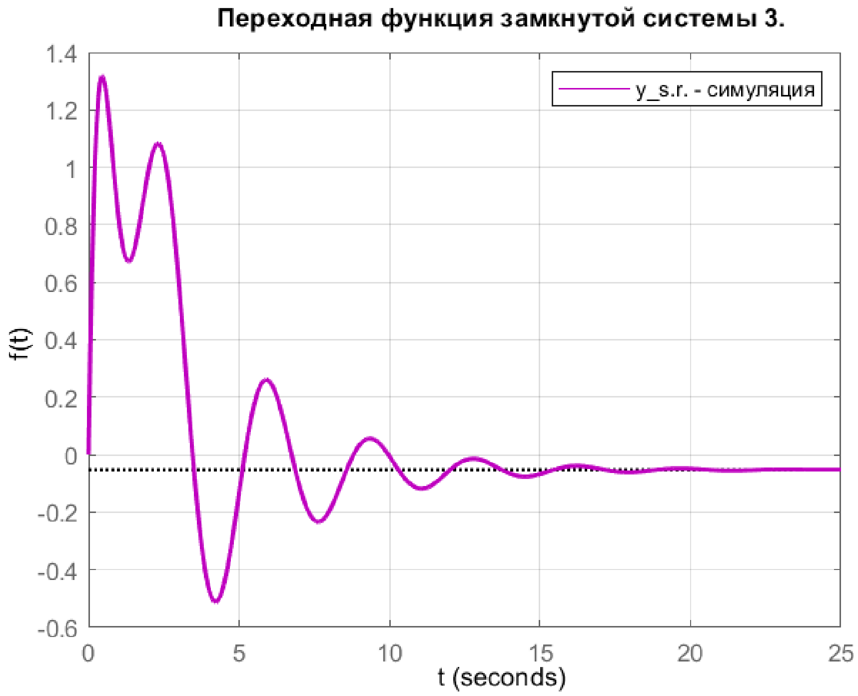

Рисунок 13 — Переходная функция замкнутой третьей системы.

Приведем график годографа Найквиста.

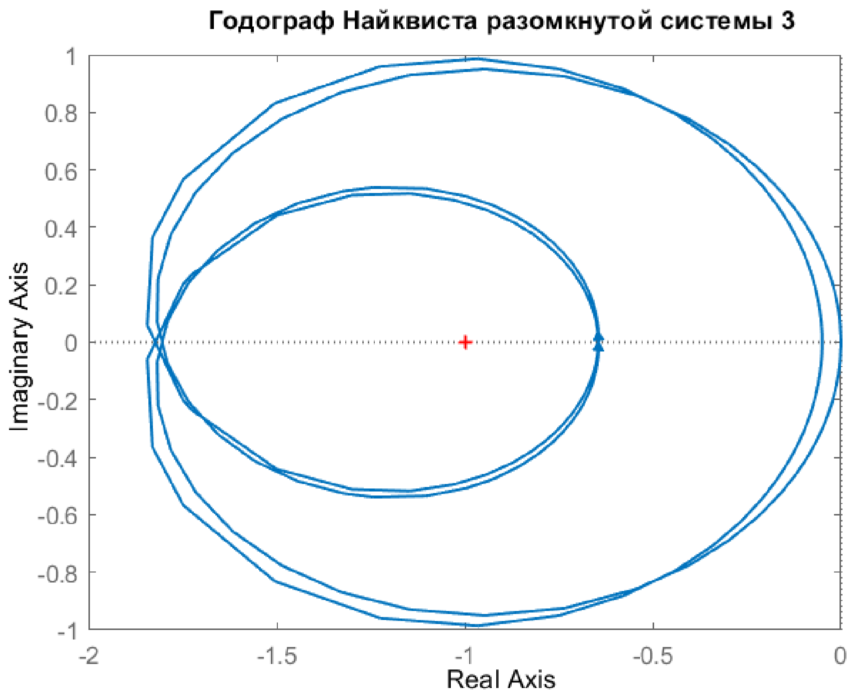

Рисунок 14 — Годограф Найквиста третьей системы.

Согласно критерию Найквиста, количество оборотов годографа вокруг точки $(-1, 0)$ по часовой стрелке равно разнице количеств неустойчивых полюсов замкнутой и разомкнутой систем.

Для третьей системы количество оборотов годографа вокруг точки $(-1, 0)$ по часовой стрелке равно -4, что подтверждается графиком годографа.

Построим ЛАФЧХ для разомкнутой системы

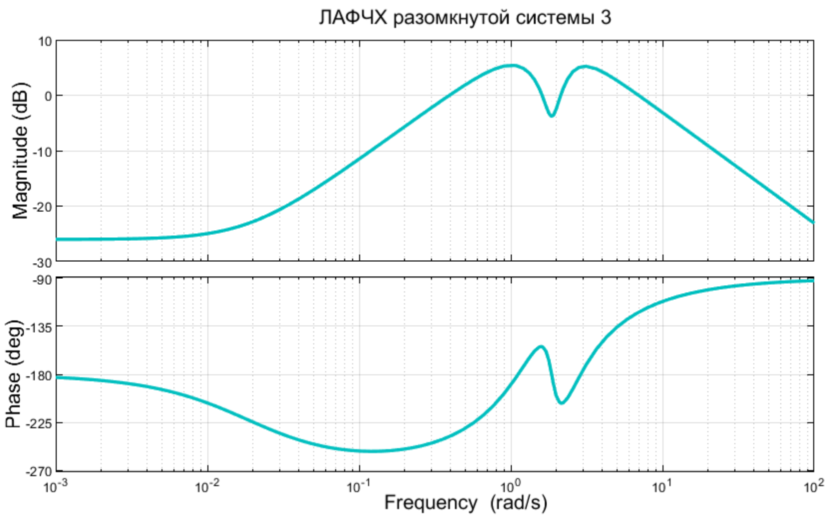

Рисунок 15 — ЛАФЧХ третьей системы.

У разомкнутой системы 4 неустойчивых полюса. Для того,чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между положительными и отрицательными переходами ЛФЧХ прямой $\phi(\omega) = \pm(2k+1)\pi,\ k = (0, 1, 2, ..)$ при частотах, когда $L(\omega) > 0$, была равна половине числа неустойчивых полюсов разомкнутой системы.

По графику ЛАФЧХ (рисунок 15), видно, что имеет место 2 **положительных** перехода, что подтверждает устойчивость замкнутой системы.

2 КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ

Возьмем значение $i = 13$ и соответствующие ему передаточные функции

$$W_1(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+1} \tag{16}$$

$$W_2(s) = \frac{10s^3-3s^2+13s-2}{10s^3+8s^2-5s+4} \tag{17}$$

Добавим к каждой функции коэффициент усиления k. Будем считать k положительным.

$$W_1(s) = k\frac{s-1}{s^2+3s+1} \tag{18}$$

$$W_2(s) = k\frac{10s^3-3s^2+13s-2}{10s^3+8s^2-5s+4} \tag{19}$$

2.1 Построение годографа Найквиста для $k = 1$

Система 1

$$W_1(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+1} \tag{20}$$

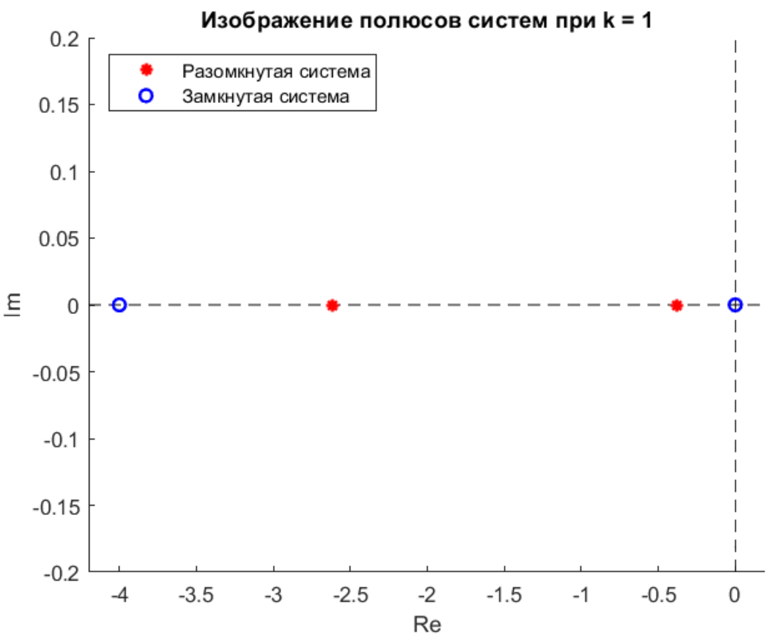

Рисунок 16 — Полюса на комплесной плоскости первой системы при $k = 1$.

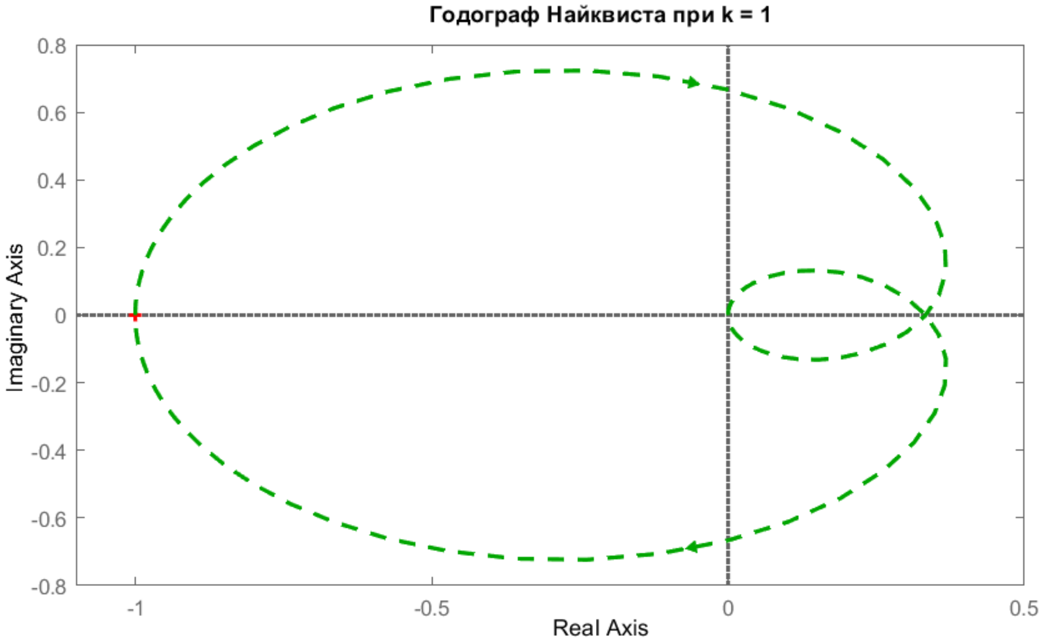

Рисунок 17 — Годограф Найквиста для первой системы при $k = 1$.

Система 2

$$W_2(s) = \frac{10s^3 - 3s^2 + 13s - 2}{10s^3 + 8s^2 - 5s + 4} \tag{21}$$

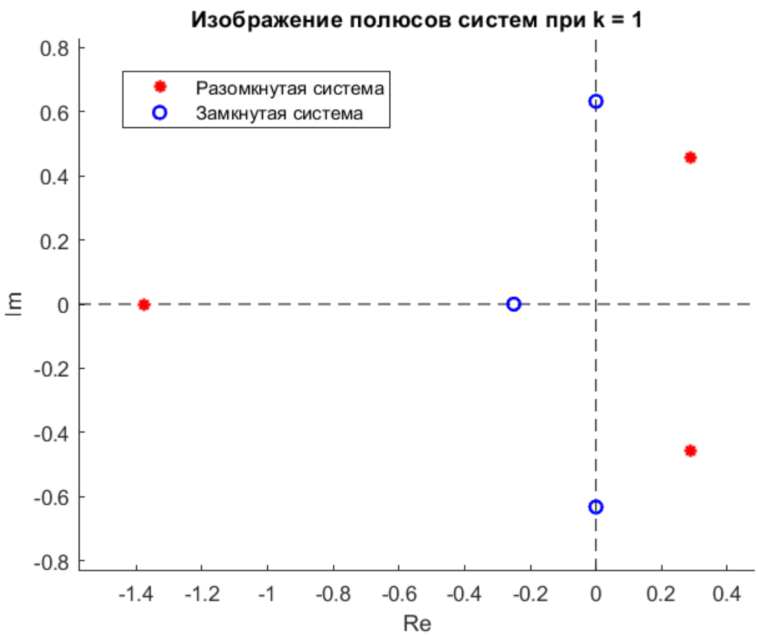

Рисунок 18 — Полюса на комплесной плоскости второй системы при $k = 1$.

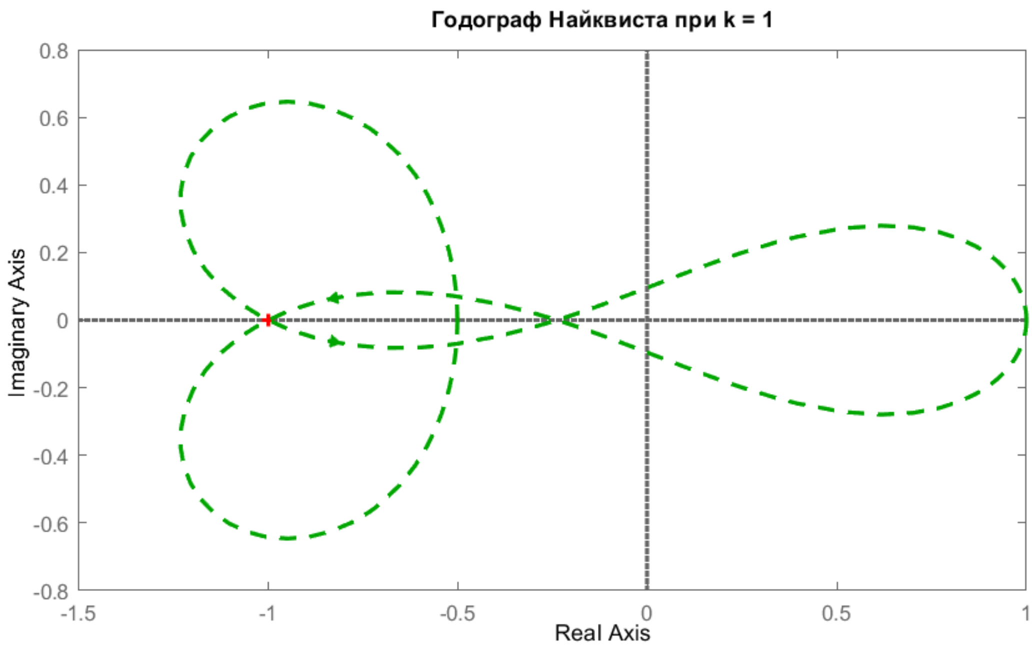

Рисунок 19 — Годограф Найквиста для второй системы при $k = 1$.

2.2 Влияние k на кривую годографа

Зададимся тремя значениями $k = 0.5, 5, 15$ и построим годографы Наквиста аналогично предудущему пункту.

2.2.1 $k = 0.5$

Система 1

$$W_1(s) = \frac{0.5s - 0.5}{s^2 + 3s + 1} \tag{22}$$

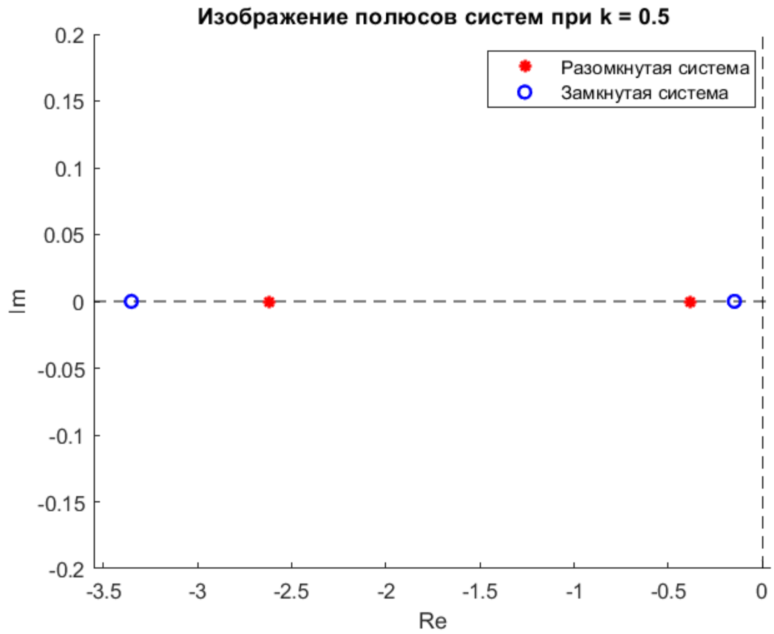

Рисунок 20 — Полюса на комплесной плоскости первой системы при $k = 0.5$.

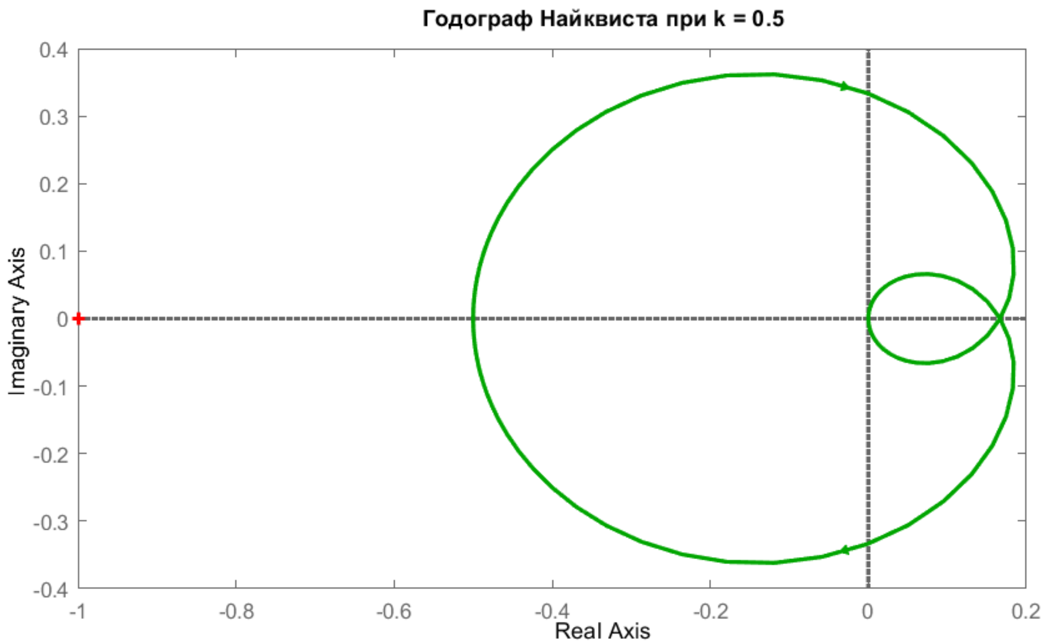

Рисунок 21 — Годограф Найквиста для первой системы при $k = 0.5$.

Система 2

$$W_2(s) = \frac{5s^3 - 1.5s^2 + 6.5s - 1}{10s^3 + 8s^2 - 5s + 4} \tag{23}$$

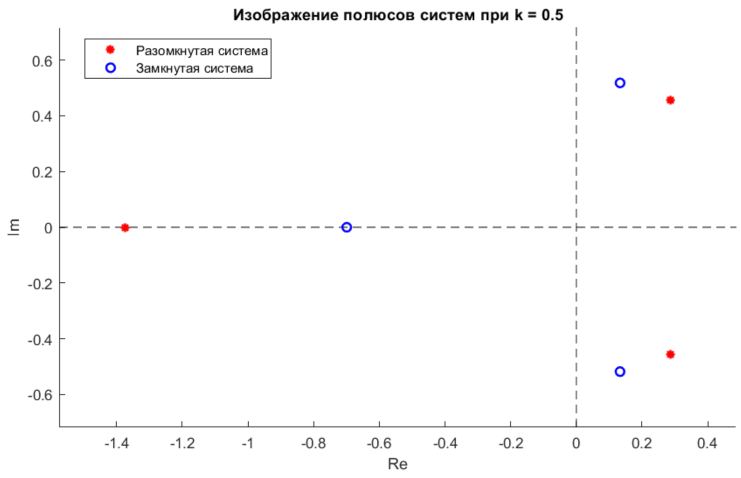

Рисунок 22 — Полюса на комплесной плоскости второй системы при $k = 0.5$.

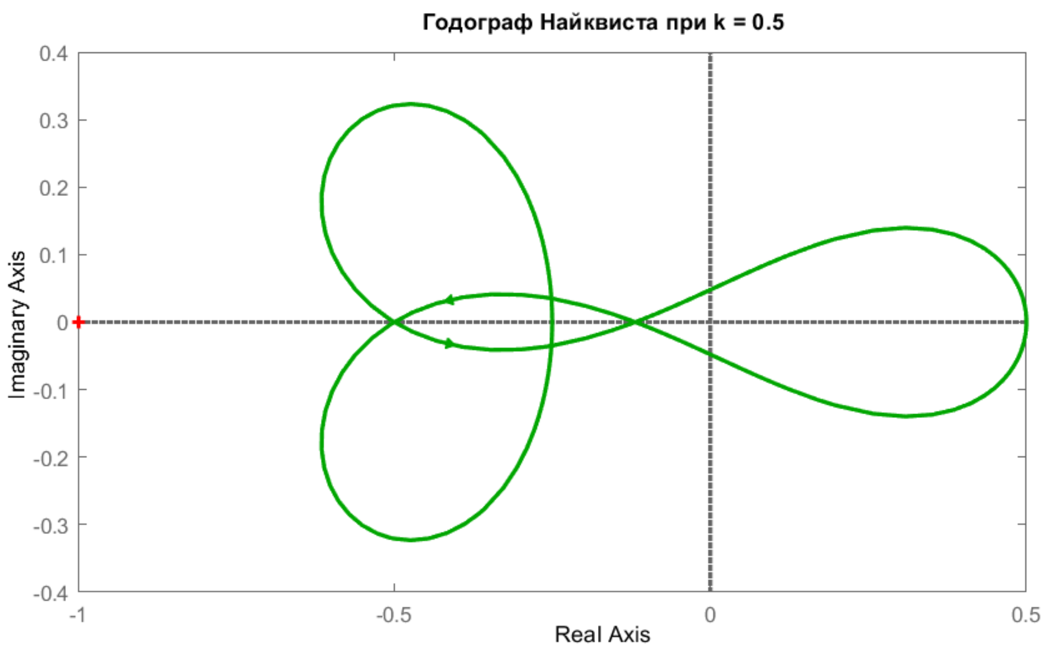

Рисунок 23 — Годограф Найквиста для второй системы при $k = 0.5$.

2.2.2 $k = 5$

Система 1

$$W_1(s) = \frac{5s - 5}{s^2 + 3s + 1} \tag{24}$$

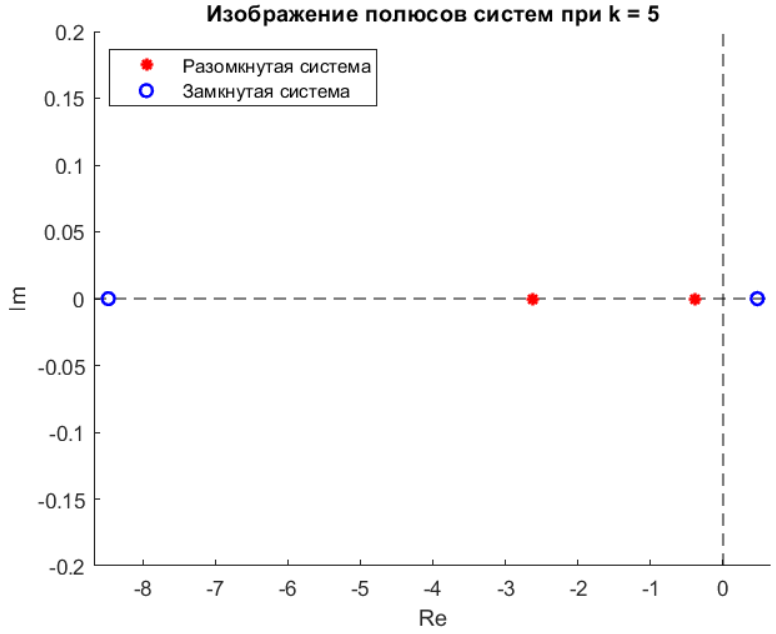

Рисунок 24 — Полюса на комплесной плоскости первой системы при $k = 5$.

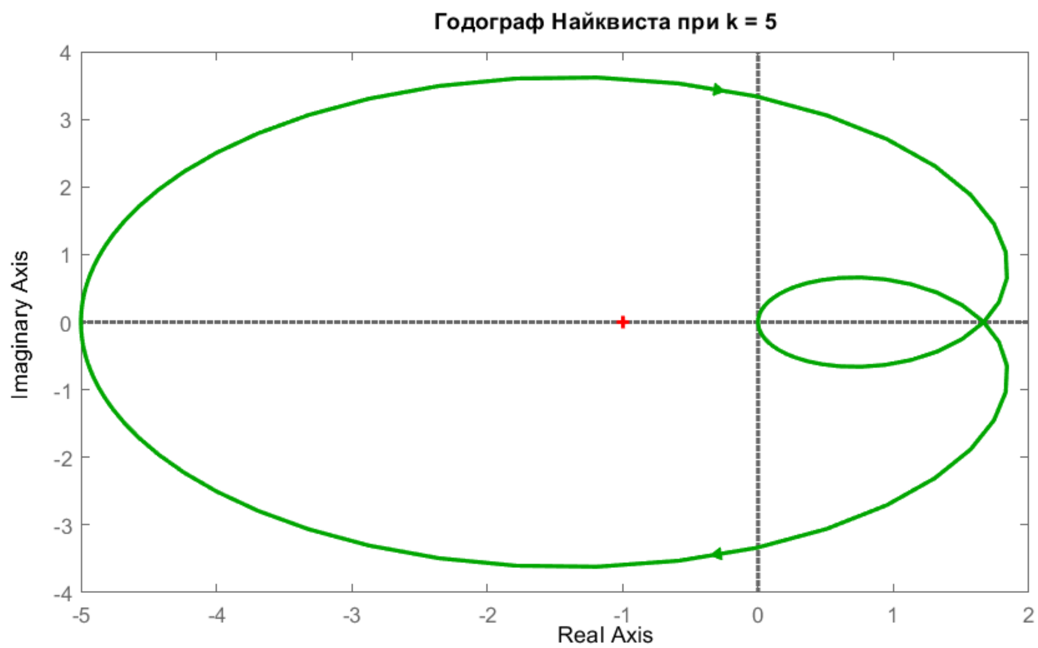

Рисунок 25 — Годограф Найквиста для первой системы при $k = 5$.

Система 2

$$W_2(s) = \frac{50s^3 - 15s^2 + 65s - 10}{10s^3 + 8s^2 - 5s + 4} \tag{25}$$

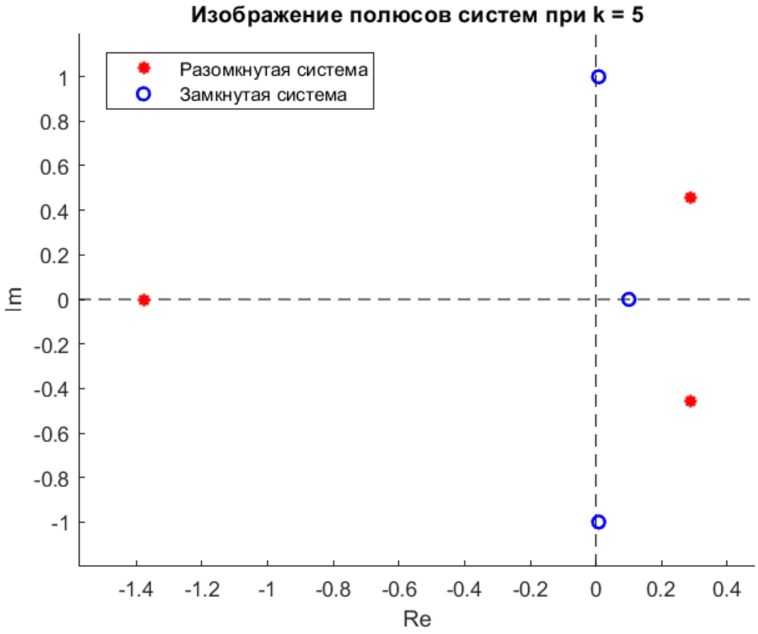

Рисунок 26 — Полюса на комплесной плоскости второй системы при $k = 5$.

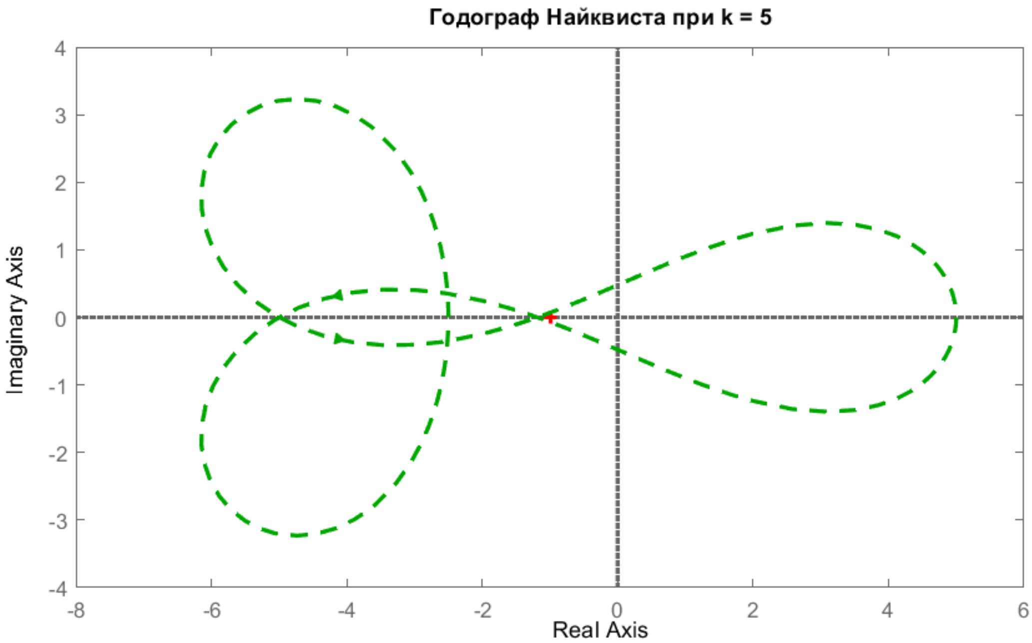

Рисунок 27 — Годограф Найквиста для второй системы при $k = 5$.

2.2.3 $k = 15$

Система 1

$$W_1(s) = \frac{15s - 15}{s^2 + 3s + 1} \tag{26}$$

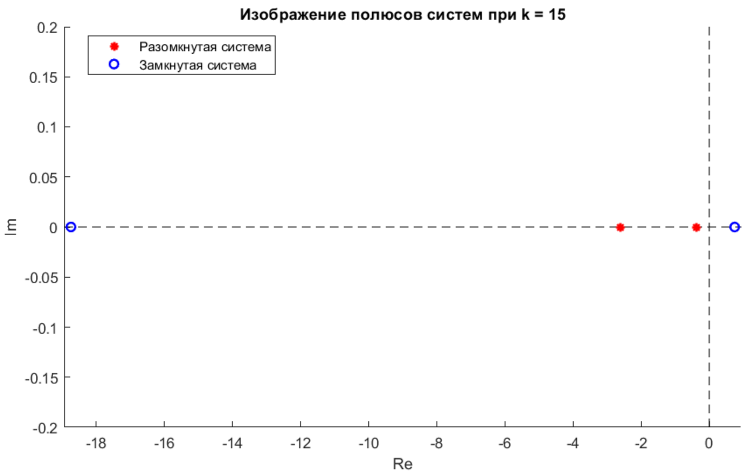

Рисунок 28 — Полюса на комплесной плоскости первой системы при $k = 15$.

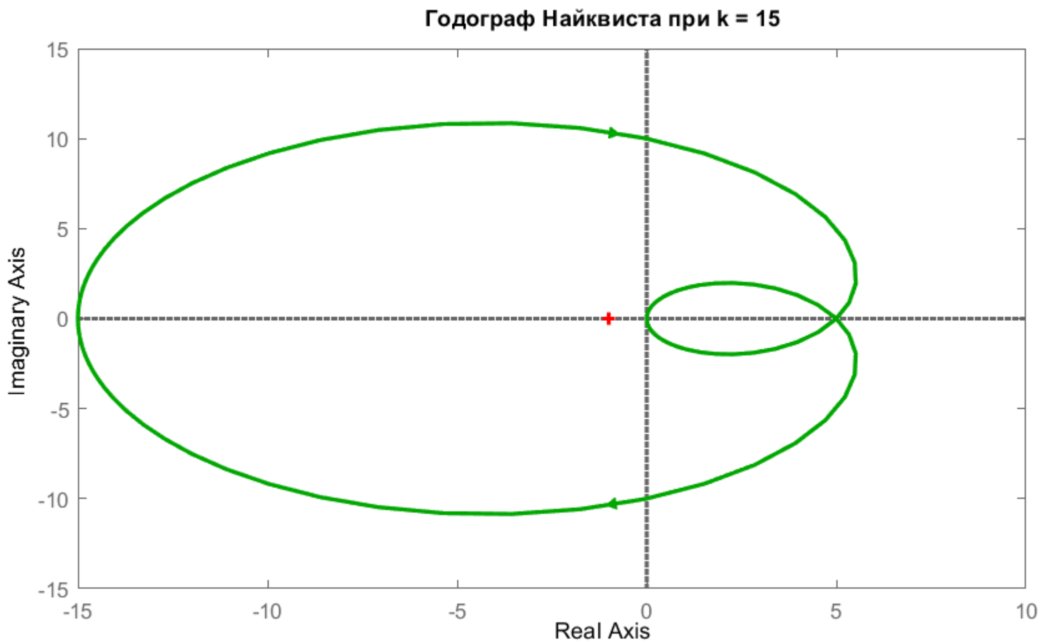

Рисунок 29 — Годограф Найквиста для первой системы при $k = 15$.

Система 2

$$W_2(s) = \frac{150s^3 - 45s^2 + 195s - 30}{10s^3 + 8s^2 - 5s + 4} \tag{27}$$

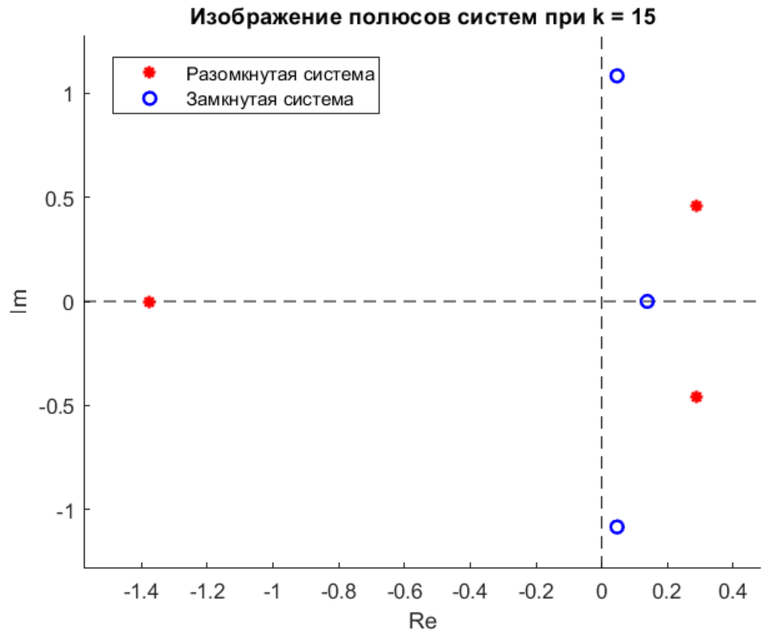

Рисунок 30 — Полюса на комплесной плоскости второй системы при $k = 15$.

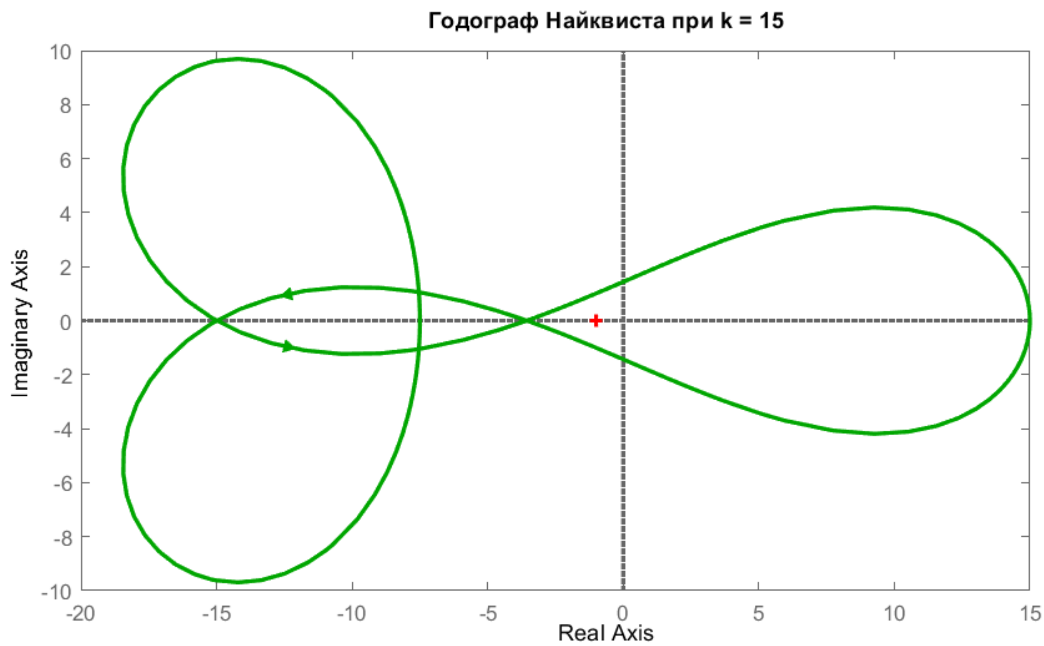

Рисунок 31 — Годограф Найквиста для второй системы при $k = 15$.

Вывод

Заметим, что при малом значении коэффициента $k = 0.5$, годограф Найквиста как первой, так и второй системы несовершает оборотов вокруг точки $(-1, 0)$ и графики находятся полностью правее этой точки. При увеличении до $k = 5$ годографы Найквиста для обеих систем описывают 1 оборот вокруг точки $(-1, 0)$, графики увеличивают масштаб, относительно меньшего значения k. При $k = 15$ количество оборотов годографов около $(-1, 0)$ также равняется 1, графики становятся еще более масштабными.

2.3 Зависимость устойчивости замкнутой системы от k

2.3.1 Система 1

$$W_1(s) = k\frac{s-1}{s^2+3s+1} \tag{28}$$

Найдем значения полюсов разомкнутой системы:

$$\begin{cases} s_1 = -1.5 - \frac{\sqrt{5}}{2} \simeq -2.62 < 0, \\ s_2 = -1.5 + \frac{\sqrt{5}}{2} \simeq -0.382 < 0 \end{cases} \tag{29}$$

Заметим, что разомкнутая система *асимптотически устойчива*.

Найдем значения полюсов замкнутой системы:

$$Q(s) + R(s) = s^2 + 3s + 1 + k(s-1) = s^2 + s(3+k) + 1 - k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{D} = \sqrt{(3+k)^2 - 4(1-k)}, \\ s_1 = \frac{-3-k-\sqrt{D}}{2}, \\ s_2 = \frac{-3-k+\sqrt{D}}{2} \end{cases} \tag{30}$$

Устойчивость системы будет достигаться при $Re(s_{1,2}) < 0$. Так как мы рассматриваем $k > 0$, то при $Re(s_{1,2}) = -3 - k$ то есть ($D <= 0$), система будет устойчивой.

$$D = (3+k)^2 - 4(1-k) = k^2 + 6k + 9 - 4 + 4k = k^2 + 10k + 5 <= 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} k >= -5 - 2\sqrt{5}, \\ k <= -5 + 2\sqrt{5} \end{cases} \tag{31}$$

Рассмотрим случай $D > 0$, следовательно, $Re(s_{1,2}) = s_{1,2}$.

$$\begin{cases} \sqrt{D} = \sqrt{(3+k)^2 - 4(1-k)}, \\ s_1 = \frac{-3-k-\sqrt{D}}{2} < 0, \\ s_2 = \frac{-3-k+\sqrt{D}}{2} < 0 \end{cases} \qquad (32)$$

Либо найдем значения k, при которых система неустойчива:

$$\frac{-3-k+\sqrt{D}}{2} > 0 \Rightarrow \frac{-3-k+\sqrt{k^2+10k+5}}{2} > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -3-k+\sqrt{k^2+10k+5} > 0 \Rightarrow \sqrt{k^2+10k+5} > 3+k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k^2+10k+5 > k^2+6k+9 \Rightarrow 4k > 4 \Rightarrow k > 1 \qquad (33)$$

Вывод

Замкнутая система устойчива при $k \in (0,1)$ и неустойчива (имеет один неустойчивый полюс) при $k > 1$.

2.3.2 Система 2

$$W_2(s) = k\frac{10s^3 - 3s^2 + 13s - 2}{10s^3 + 8s^2 - 5s + 4} \qquad (34)$$

Найдем значения полюсов разомкнутой системы:

$$\begin{cases} s_1 \simeq -1.3751, \\ s_2 \simeq 0.28757 - 0.45628i \Rightarrow Re(s_2) > 0, \\ s_3 \simeq 0.28757 + 0.45628i \Rightarrow Re(s_3) > 0 \end{cases} \qquad (35)$$

Заметим, что разомкнутая система неустойчива.

Найдем значения k, при которых замкнутая система является устойчивой:

$$Q(s) + R(s) = 10s^3 + 8s^2 - 5s + 4 + k(10s^3 - 3s^2 + 13s - 2) =$$
$$= (10+10k)s^3 + (8-3k)s^2 + (13k-5)s + 4 - 2k \qquad (36)$$

Воспользуемся критерием Гурвица:

$$\begin{cases} a_3 > 0, \\ a_2 > 0, \\ a_1 > 0, \\ a_0 > 0, \\ a_2 a_1 > a_3 a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 + 10k > 0, \\ 8 - 3k > 0, \\ 13k - 5 > 0, \\ 4 - 2k > 0, \\ (8 - 3k)(13k - 5) > (10 + 10k)(4 - 2k) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k > -1, \\ k < \frac{8}{3}, \\ k > \frac{5}{13}, \\ k < 2, \\ 1 < k < \frac{80}{19} \end{cases} \Rightarrow k \in (1, 2) \quad (37)$$

Вывод

При $k \in (1, 2)$ система устойчива.

Следующие зависимости были получены графическим путем:

при $k \in (0, 1)$ система имеет 2 неустойчивых полюса, при $k \in (2, \frac{80}{19})$ система имеет 1 неустойчивый полюс, при $k > \frac{80}{19}$ система имеет 3 неустойчивых полюса.

Дополнительное обоснование

Кроме того, для случаев с неустойчивыми полюсами можно провести исследование количества смен знака (правило Декарта):

– при $k \in (0, 1)$ в выражении

$$Q(s) + R(s) = 10s^3 + 8s^2 - 5s + 4 + k(10s^3 - 3s^2 + 13s - 2) = \\ = (10 + 10k)s^3 + (8 - 3k)s^2 + (13k - 5)s + 4 - 2k \quad (38)$$

будет 0 переходов через знак при $k \in [\frac{5}{13}; 1)$ все коэффициенты окажутся положительными (либо равные нулю), либо 2 перехода через знак при $k \in (0, \frac{5}{13})$, так как все коэффиценты будут положительными, а коэффициент при s – отрицательным. Следовательно, на исследуемом промежутке либо 0 неустойчивых полюсов, либо 2 и так как устойчивая зона уже найдена ранее и не имеет пересечений с $k \in (0, 1)$, на этом промежутке 2 неустойчивых полюса;

– при $k \in (2, \frac{80}{19})$ в выражении

$$Q(s) + R(s) = 10s^3 + 8s^2 - 5s + 4 + k(10s^3 - 3s^2 + 13s - 2) =$$
$$= (10 + 10k)s^3 + (8 - 3k)s^2 + (13k - 5)s + 4 - 2k \quad (39)$$

будет 1 переход через знак, все коэффициенты, кроме a_0 окажутся положительными (либо равные нулю), а a_0 – отрицательным при $k \in (2, \frac{8}{3}]$, следовательно, один неустойчивый полюс. В случае $k \in (\frac{8}{3}, \frac{80}{19})$ будет 3 смены знака, что говорит нам о наличии либо 1, либо 3 неустойчивых полюсов, здесь решение было принято на основе анализа графических данных. В итоге, при $k \in (2, \frac{80}{19})$ один неустойчивый полюс (рисунок 32).

– при $k > \frac{80}{19}$ в выражении

$$Q(s) + R(s) = 10s^3 + 8s^2 - 5s + 4 + k(10s^3 - 3s^2 + 13s - 2) =$$
$$= (10 + 10k)s^3 + (8 - 3k)s^2 + (13k - 5)s + 4 - 2k \quad (40)$$

будет 3 смены знака, что говорит нам о наличии либо 1, либо 3 неустойчивых полюсов, здесь решение было принято на основе анализа графических данных. При $k > \frac{80}{19}$ три неустойчивых полюса (рисунок 33 - пограничное значение и рисунок 34).

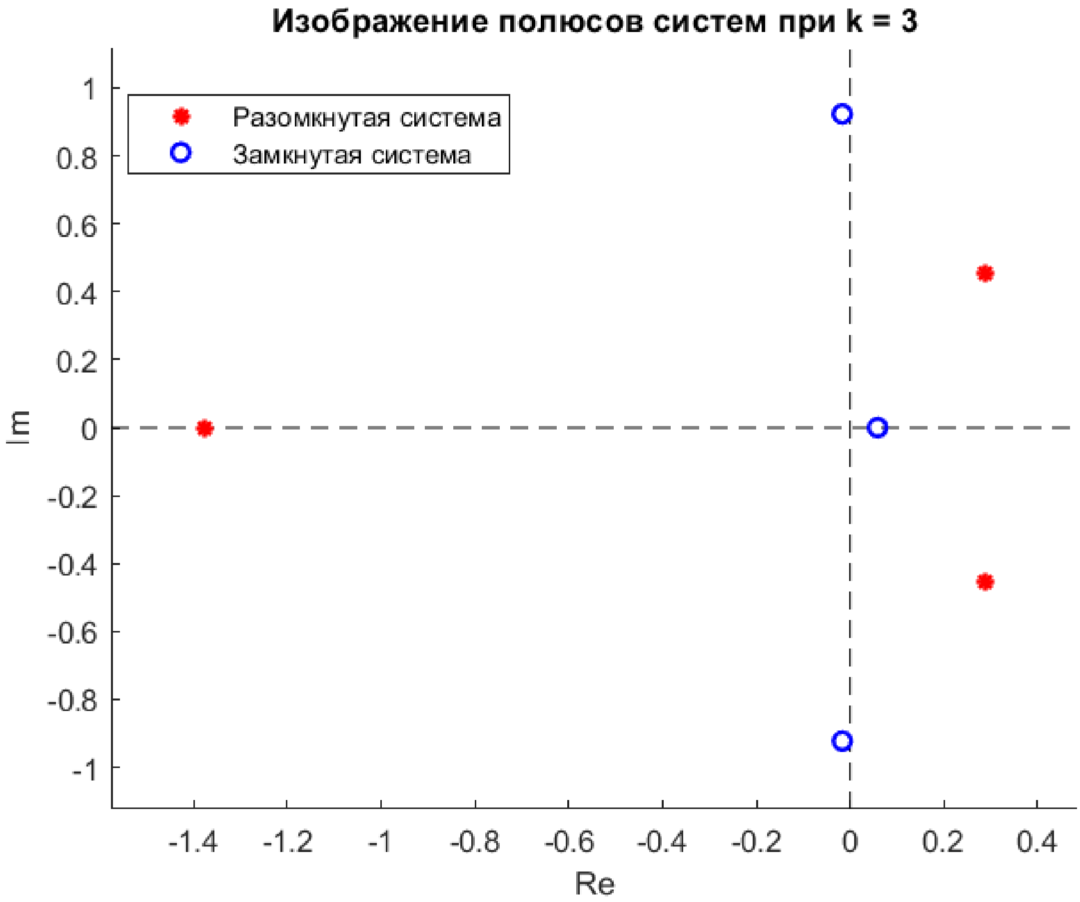

Рисунок 32 — Карта полюсов второй системы при $k = 3$.

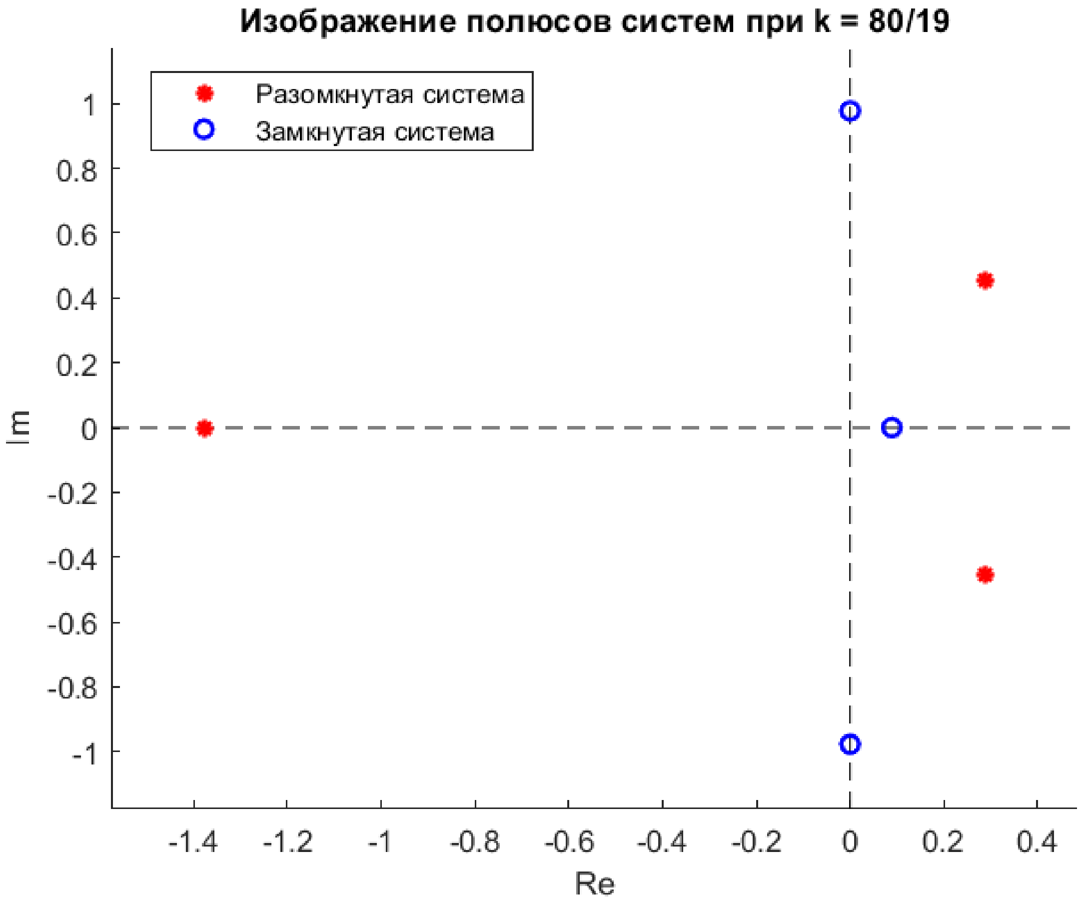

Рисунок 33 — Карта полюсов второй системы при $k = \frac{80}{19}$.

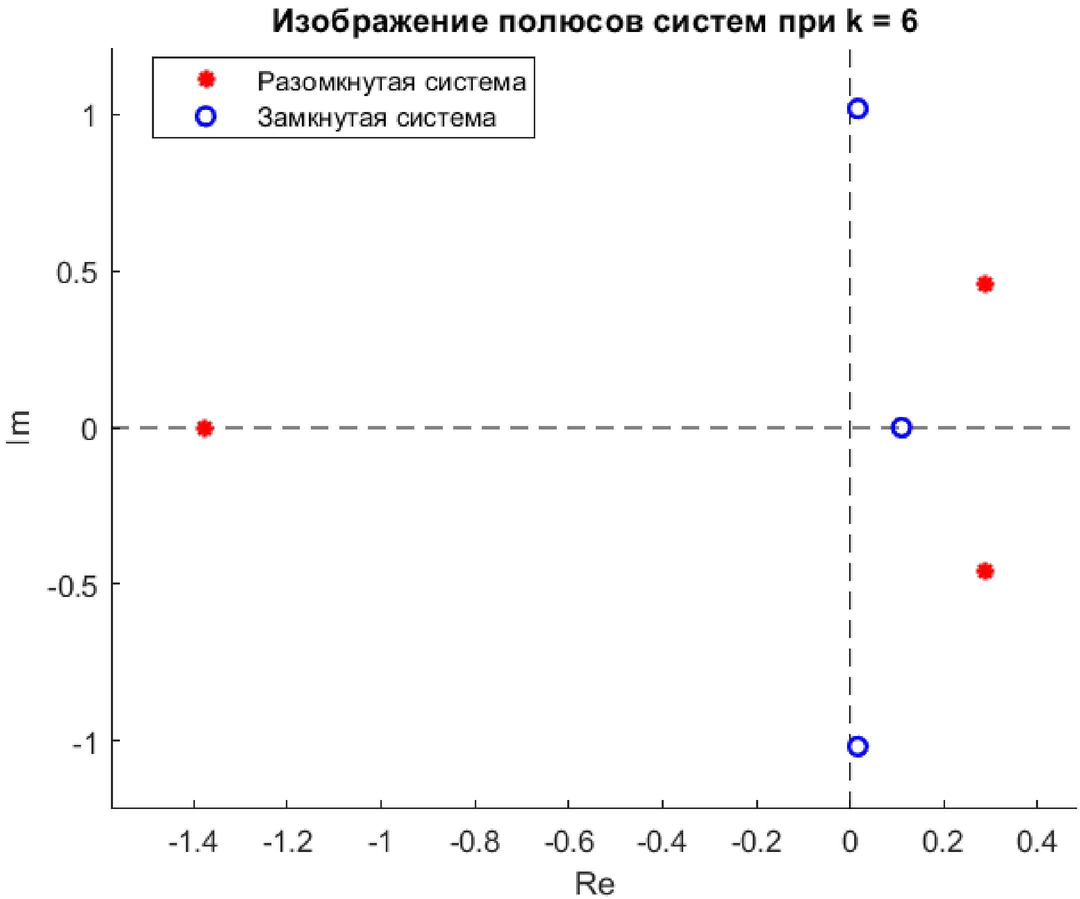

Рисунок 34 — Карта полюсов второй системы при $k = 6$.

2.4 Определение запаса устойчивости

2.4.1 Система 1

$$W_1(s) = k\frac{s-1}{s^2+3s+1} \tag{41}$$

Запас устойчивости по амплитуде не может быть вычислен, так как система не является устойчивой при $k = 1$.

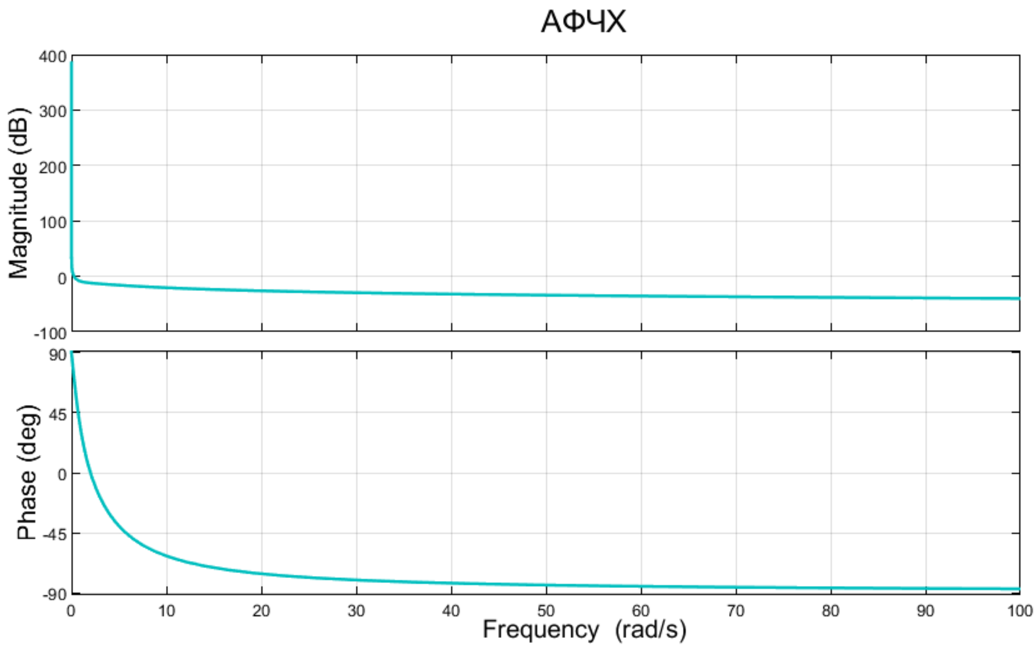

Рисунок 35 — АФЧХ замкнутой системы.

2.4.2 Система 2

$$W_2(s) = \frac{10s^3 - 3s^2 + 13s - 2}{10s^3 + 8s^2 - 5s + 4} \tag{42}$$

Запас устойчивости по амплитуде не может быть вычислен, так как система не является устойчивой при $k = 1$.

2.5 Выполнение моделирования

2.5.1 Система 1

$$W_1(s) = k\frac{s - 1}{s^2 + 3s + 1} \tag{43}$$

Проведем моделирование при $k = 0.5$, что соответствует устойчивой системе, при $k = 1$ – на границе устойчивости, и при $k = 1.5$, при котором система неустойчива (имеет один неустойчивый полюс).

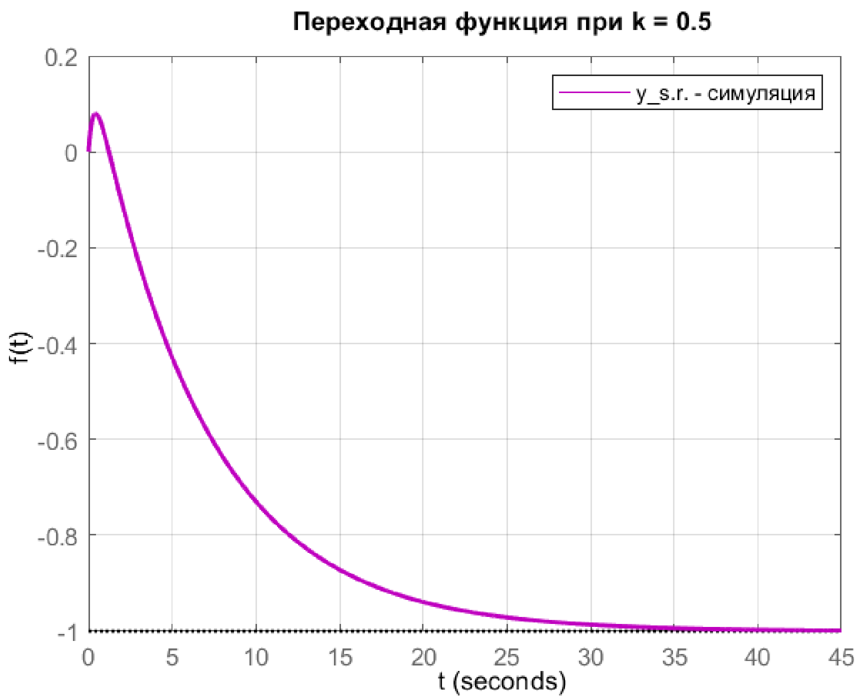

Рисунок 36 — Переходная функция при $k = 0.5$.

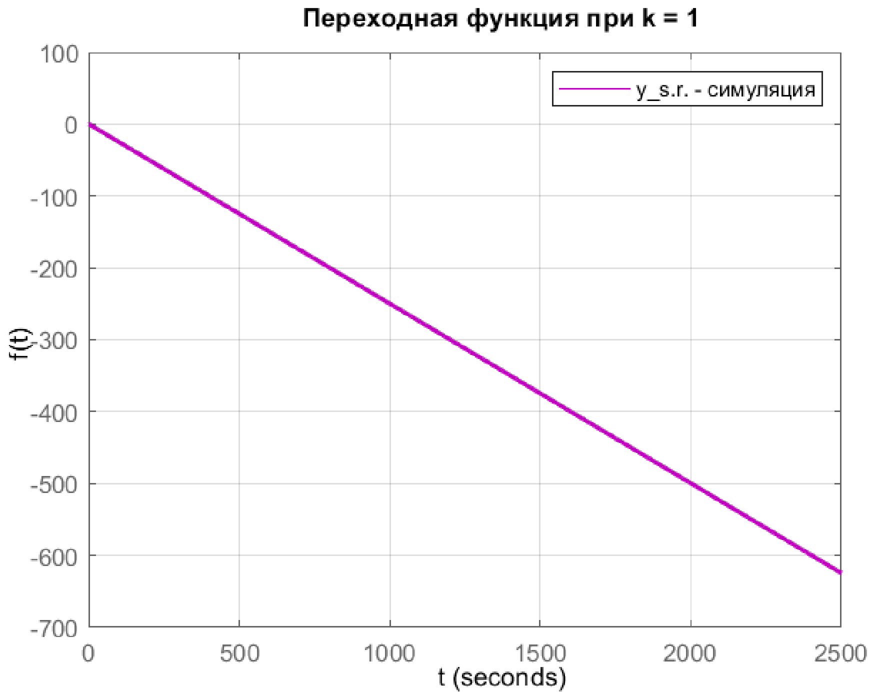

Рисунок 37 — Переходная функция при $k = 1$.

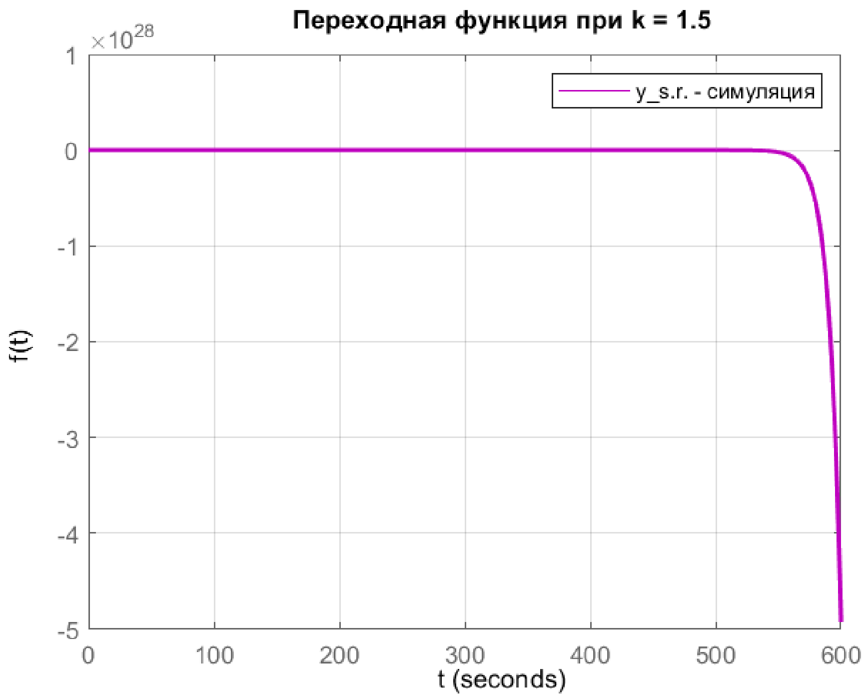

Рисунок 38 — Переходная функция при $k = 1.5$.

2.5.2 Система 2

Проведем моделирование для $k = 0.5$ (система имеет два неустойчивых полюса), $k = 1.5$ (система устойчива), $k = 3$ (система имеет один неустойчивый полюс), $k = 6$ (система имеет три неустойчивых полюса).

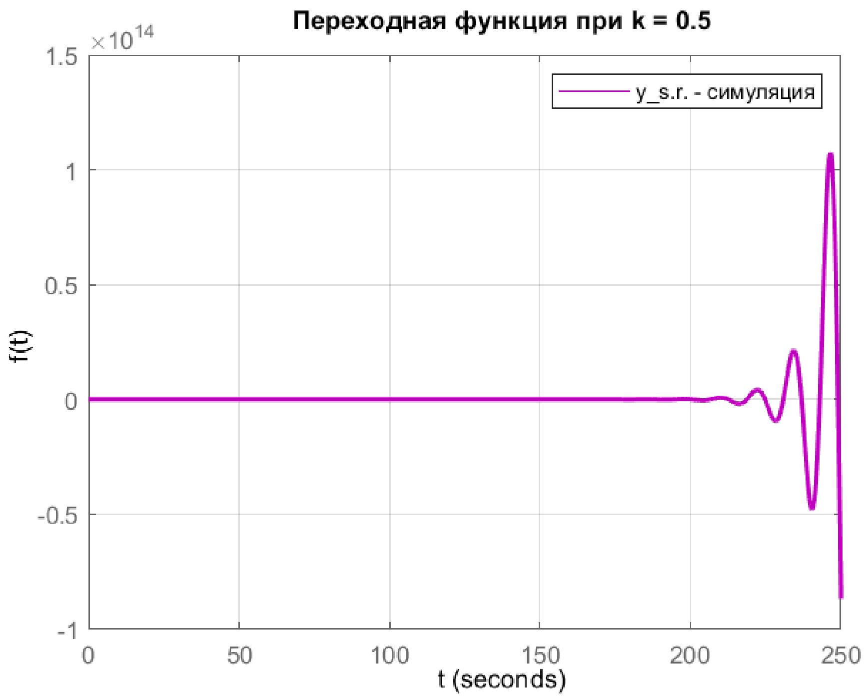

Рисунок 39 — Переходная функция при $k = 0.5$.

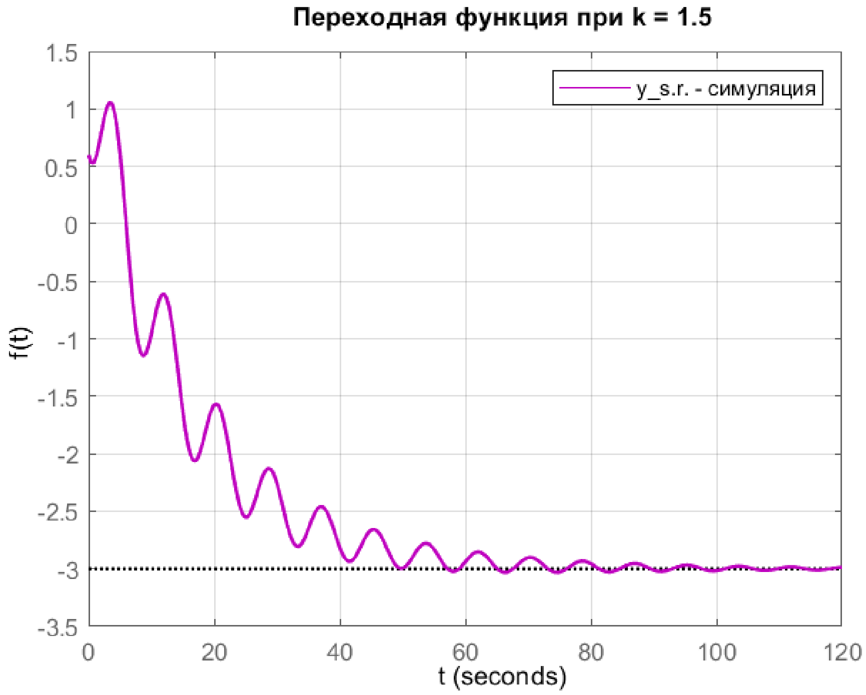

Рисунок 40 — Переходная функция при $k = 1.5$.

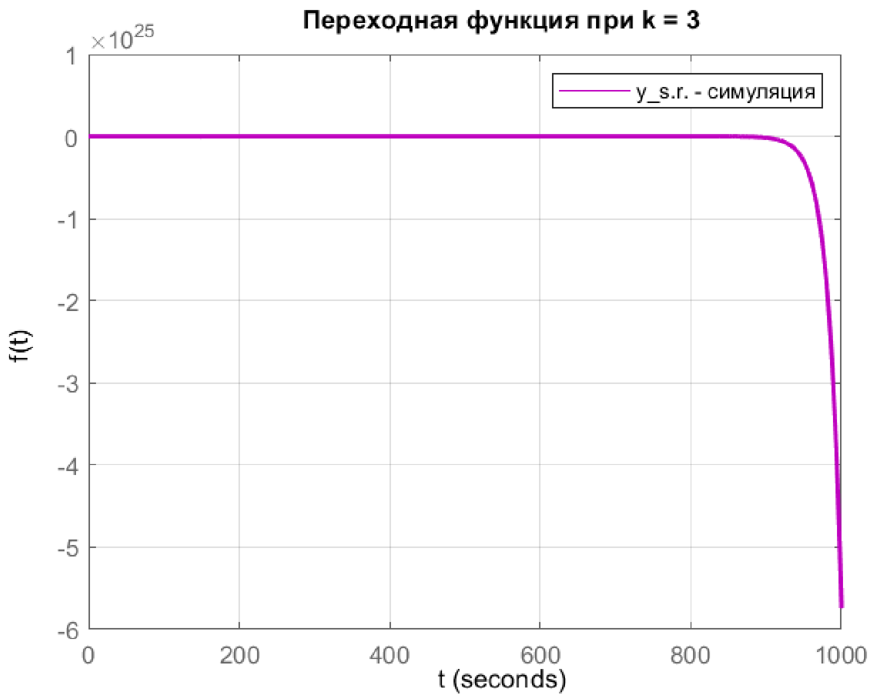

Рисунок 41 — Переходная функция при $k = 3$.

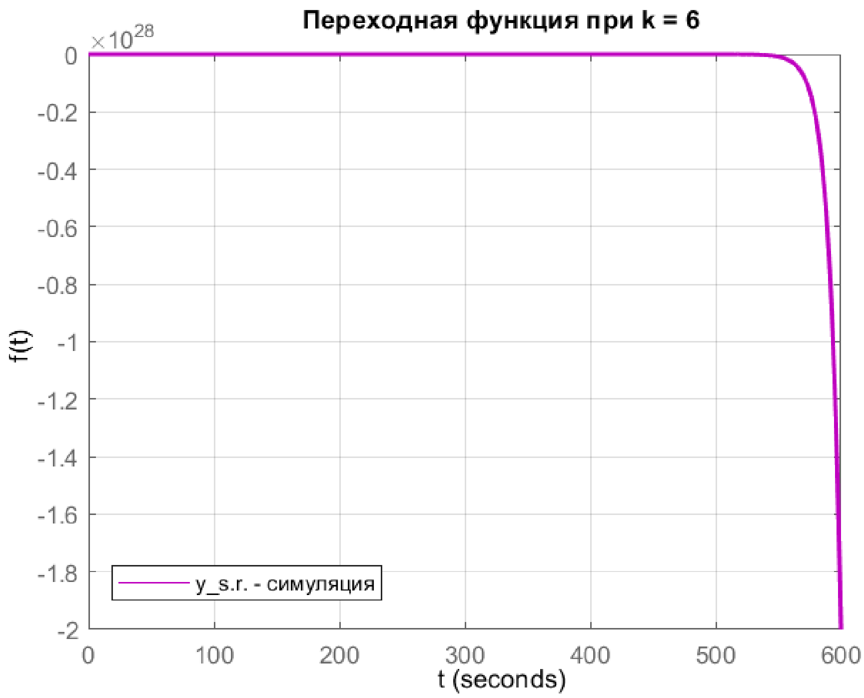

Рисунок 42 — Переходная функция при $k = 6$.

3 ЗАПАЗДЫВАНИЕ

В нашем случае $j = 3$, что соответствует следующим передаточным функциям.

$$W_3(s) = \frac{2s+9}{s^2+s+9} \tag{44}$$

$$W_4(s) = \frac{10s^2-10s+13}{10s^3+37s+25} \tag{45}$$

К каждой функции добавим звено чистого запаздывания e^{-rs}

$$W_3(s) = \frac{2s+9}{s^2+s+9}e^{-rs} \tag{46}$$

$$W_4(s) = \frac{10s^2-10s+13}{10s^3+37s+25}e^{-rs} \tag{47}$$

3.1 Построение годографа Найквиста

Построим годограф Найквиста для значений коэффициента запаздывания $r = 0$ и $r = 0.5$

3.1.1 Система 1

При $r = 0$

$$W_3(s) = \frac{2s+9}{s^2+s+9} \tag{48}$$

При $r = 0.5$

$$W_3(s) = \frac{2s+9}{s^2+s+9}e^{-0.5s} \tag{49}$$

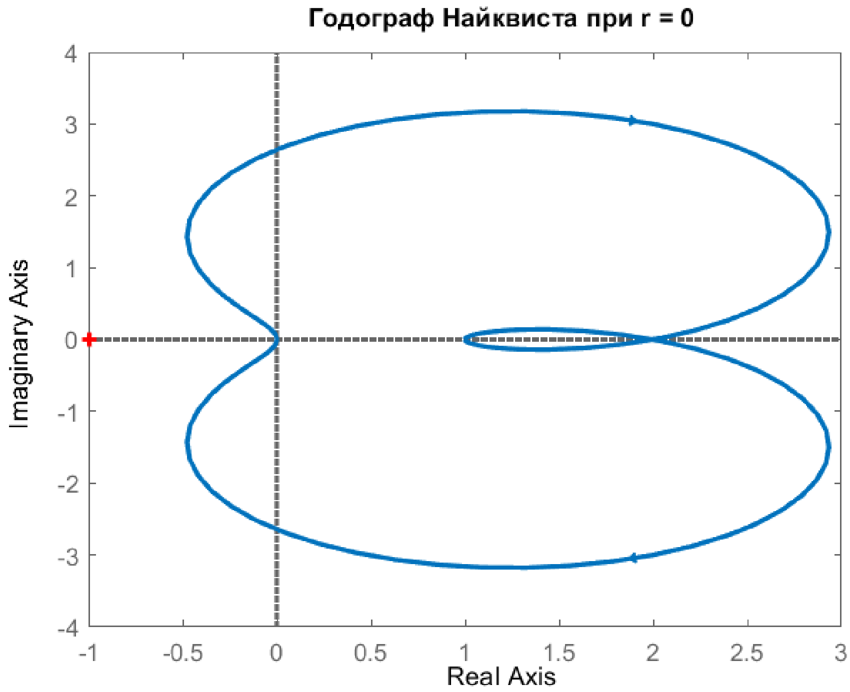

Рисунок 43 — Годограф Найквиста для $W_3(s)$ при $r = 0$.

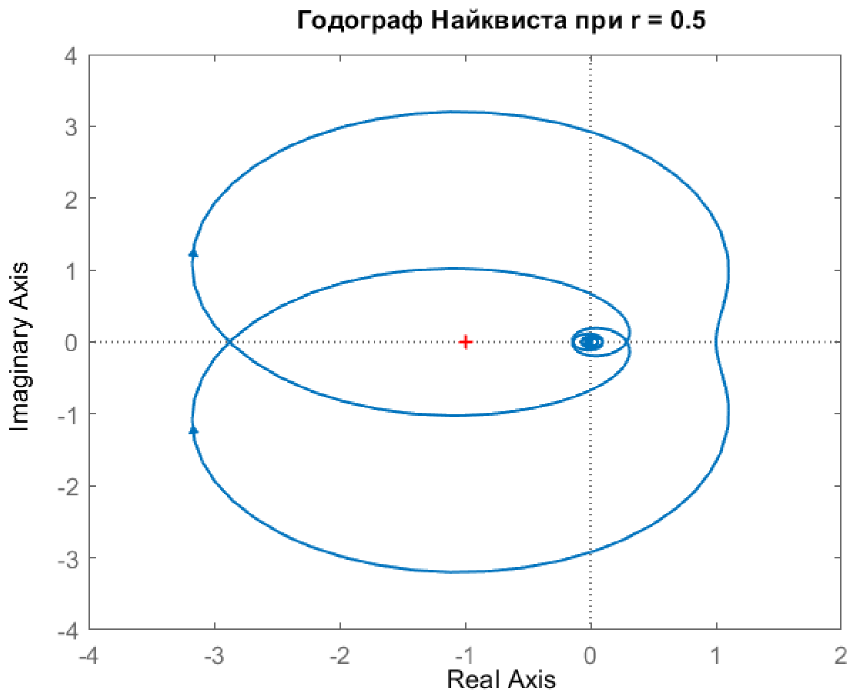

Рисунок 44 — Годограф Найквиста для $W_3(s)$ при $r = 0.5$.

3.1.2 Система 2

При $r = 0$

$$W_4(s) = \frac{10s^2 - 10s + 13}{10s^3 + 37s + 25} \tag{50}$$

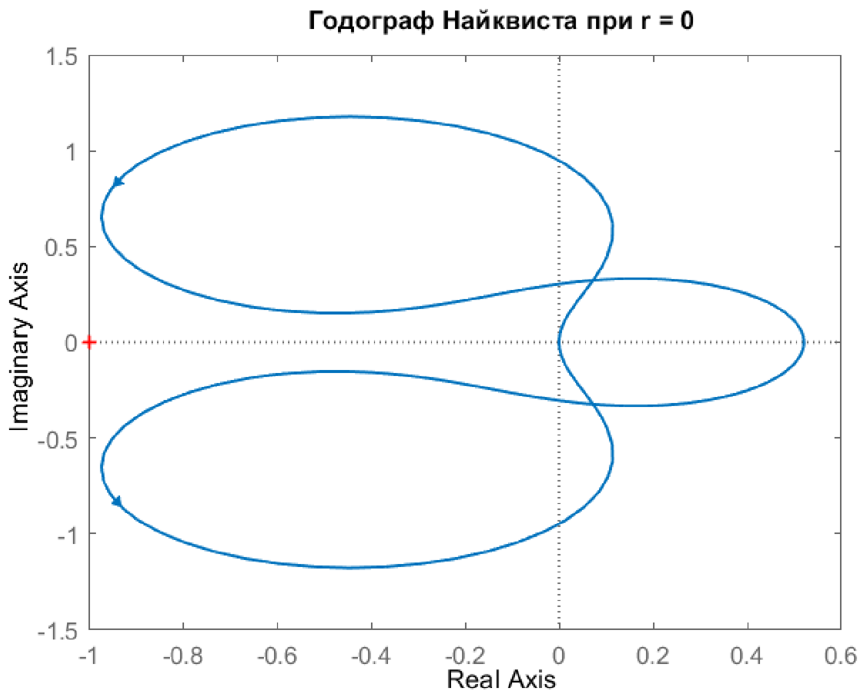

Рисунок 45 — Годограф Найквиста для $W_4(s)$ при $r = 0$.

При $r = 0.5$

$$W_4(s) = \frac{10s^2 - 10s + 13}{10s^3 + 37s + 25} e^{-0.5s} \tag{51}$$

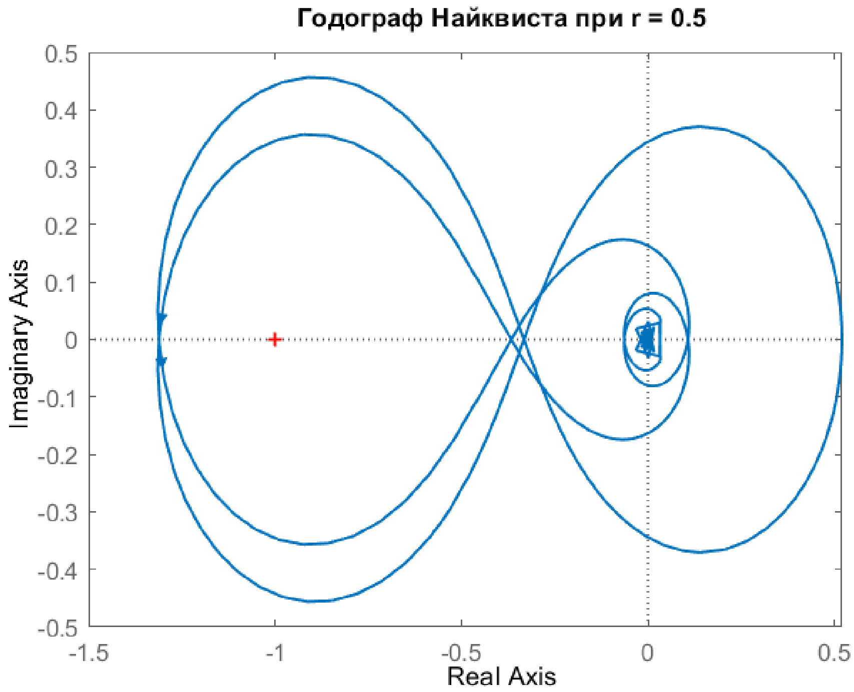

Рисунок 46 — Годограф Найквиста для $W_4(s)$ при $r = 0.5$.

3.2 Влияние коэффициента запаздывания на кривую годографа

Рассмотрим влияние коэффициента запаздывания на кривую годографа при $r = 0.2, 1, 5$

3.2.1 Система 1

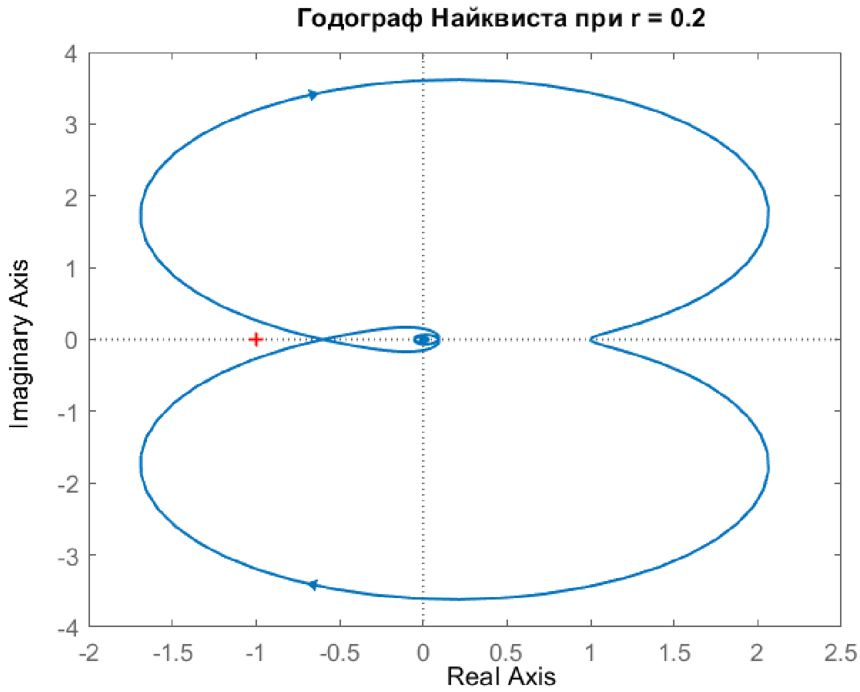

Рисунок 47 — Годограф Найквиста для $W_3(s)$ при $r = 0.2$.

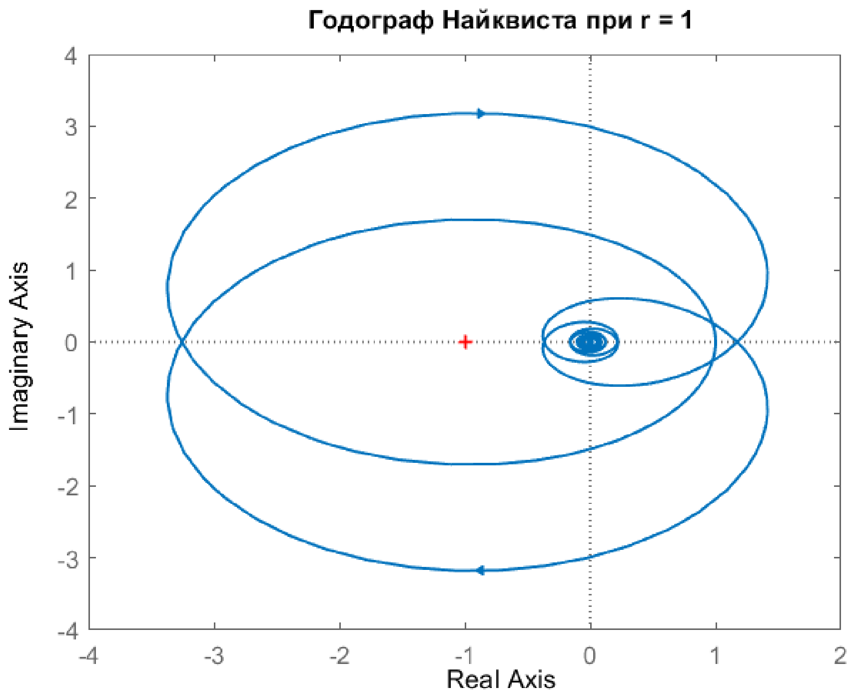

Рисунок 48 — Годограф Найквиста для $W_3(s)$ при $r = 1$.

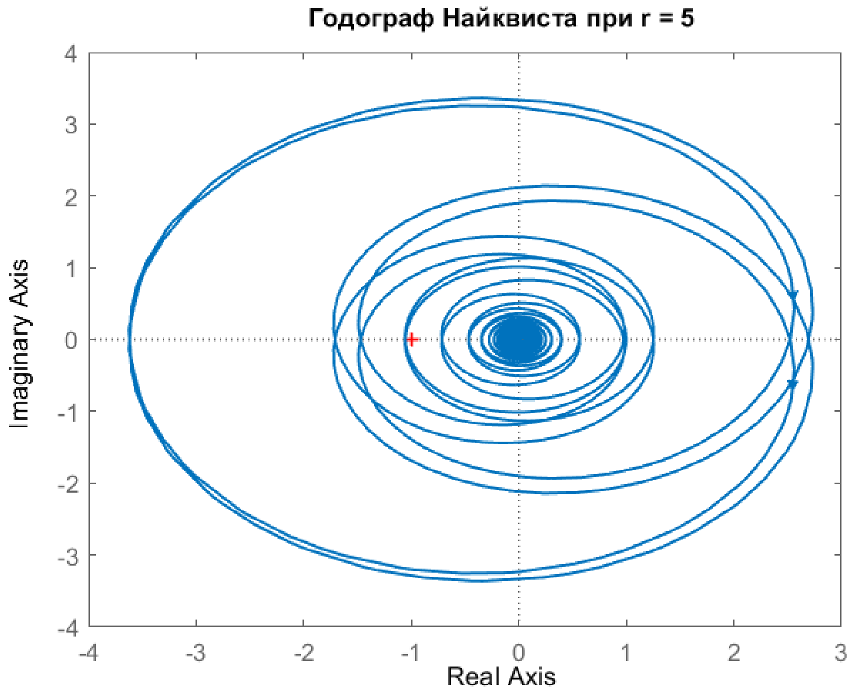

Рисунок 49 — Годограф Найквиста для $W_3(s)$ при $r = 5$.

3.2.2 Система 2

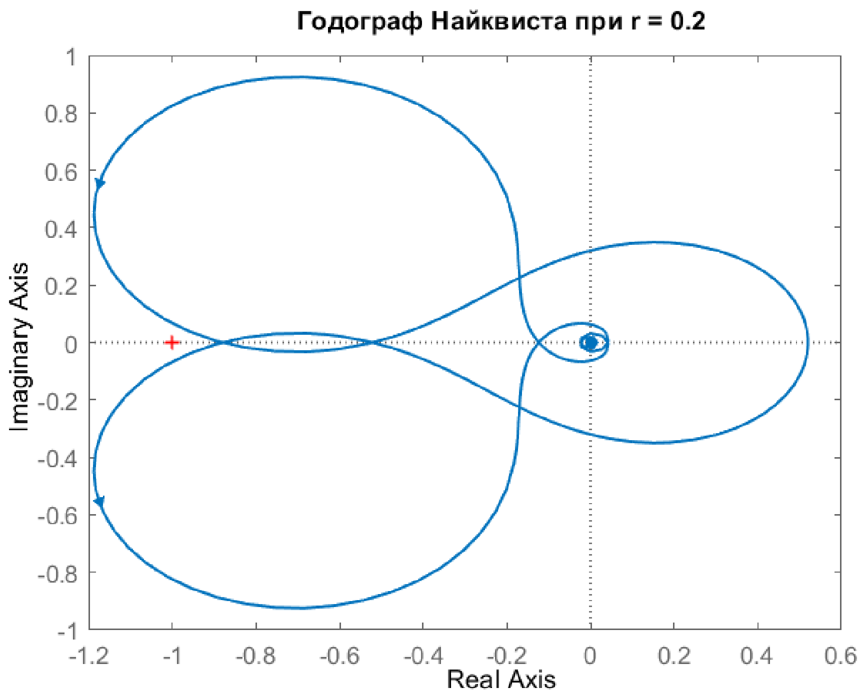

Рисунок 50 — Годограф Найквиста для $W_4(s)$ при $r = 0.2$.

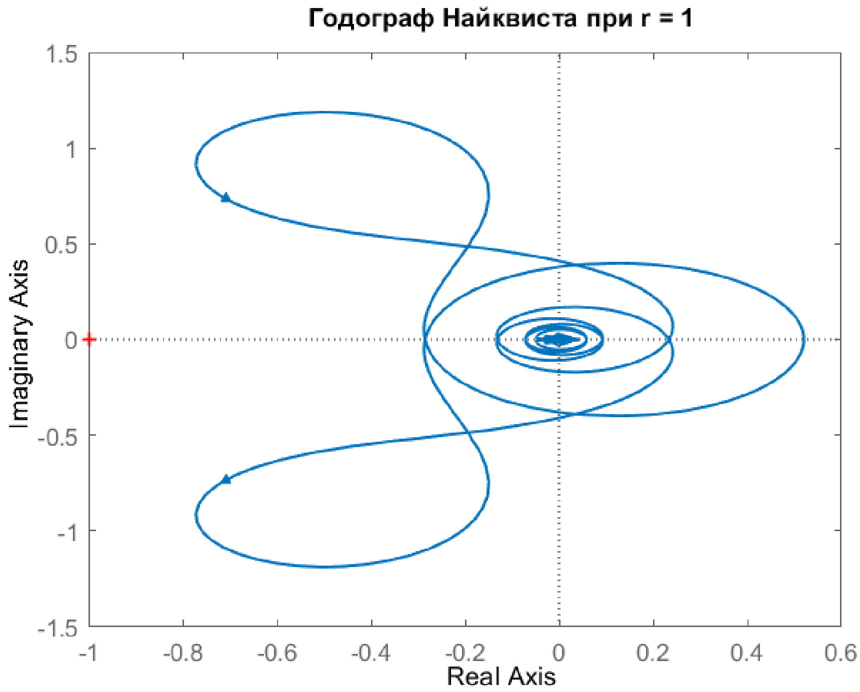

Рисунок 51 — Годограф Найквиста для $W_4(s)$ при $r = 1$.

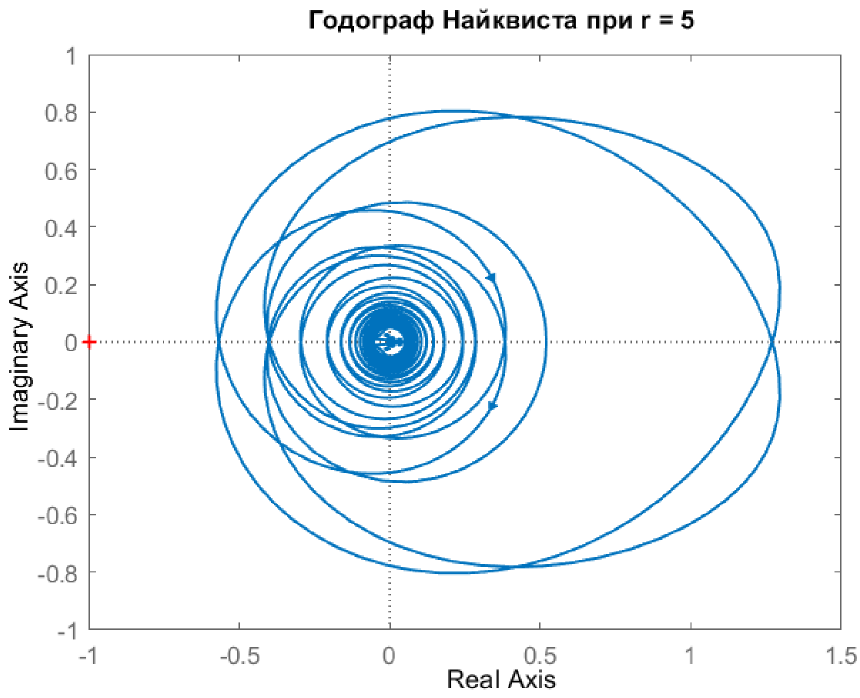

Рисунок 52 — Годограф Найквиста для $W_4(s)$ при $r = 5$.

Вывод

Для обеих систем справедливо: при увеличении значения коэффициента запаздывания график годографа Найквиста совершает больше оборотов около точки начала координат.

3.3 Нахождение значений r, при которых система устойчива

3.3.1 Система 1

$$W_3(s) = \frac{2s+9}{s^2+s+9} \tag{52}$$

Полюса разомкнутой системы устойчивы, так как $Re(s_{1,2}) < 0$:

$$s_{1,2} = -0.5 \pm \frac{i\sqrt{35}}{2} \tag{53}$$

Построим ЛАФЧХ разомкнутой системы

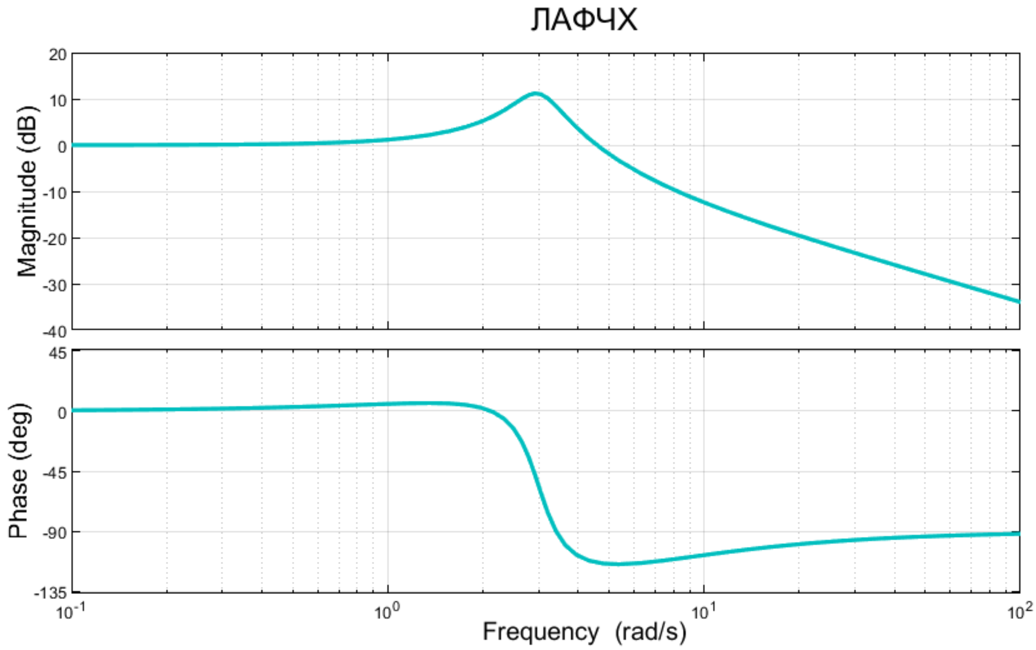

Рисунок 53 — ЛАФЧХ для $W_3(s)$.

Нас интересует значение частоты, при котором амплитуда $A = 1$, то есть на графике ЛФЧХ это точка пересечения с осью абсцисс, то есть $\omega(Magnitude = 0) \simeq 4.591\ rad/s$, фаза при данной частоте $\phi(4.591) \simeq -113.35^o$, соответственно, r, при котором будет меняться тип устойчивости системы:

$$r = \frac{(180 - 113.35)\pi}{180 \cdot 4.591} \simeq 0.08\pi \simeq 0.25 \tag{54}$$

Система устойчива при $r \in [0, 0.25)$ и неустойчива при $r > 0.25$.

Запас устойчивости по фазе $\simeq \frac{66.65\pi}{180} \simeq 1.16$.

3.3.2 Система 2

$$W_4(s) = \frac{10s^2 - 10s + 13}{10s^3 + 37s + 25} \tag{55}$$

Полюса системы:

$$\begin{cases} s_1 \simeq -0.61332 \Rightarrow Re(s_1) < 0, \\ s_{2,3} \simeq 0.3067 \pm 1.9955i \Rightarrow Re(s_1) > 0 \end{cases} \tag{56}$$

Один устойчивый полюс и два неустойчивых. Годограф не совершает оборотов вокруг $(-1{,}0)$.

Построим ЛАФЧХ разомкнутой системы

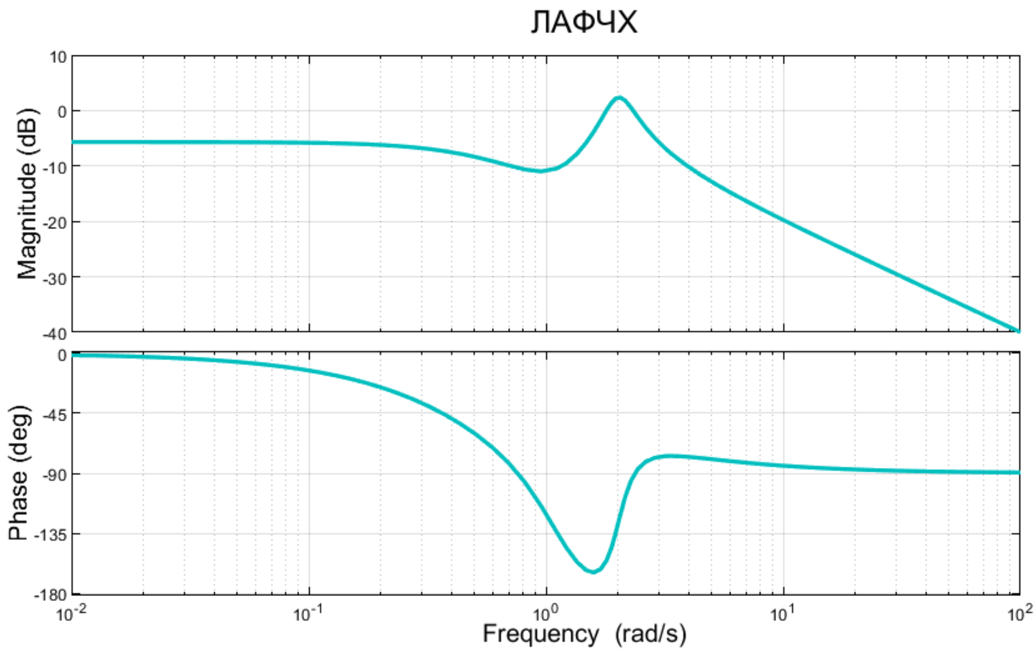

Рисунок 54 — ЛАФЧХ для $W_4(s)$.

Нас интересует значение частоты, при котором амплитуда $A = 1$, то есть на графике ЛФЧХ это точка пересечения с осью абсцисс, то есть $\omega_{1,2}(Magnitude = 0) \simeq 1.7978, 2.3296\ rad/s$, фаза при данной частоте $\phi_1(1.7978) \simeq -155.58^o$, $\phi_2(2.3296) \simeq -92.9346^o$, соответственно, $r_{1,2}$, при которых будет меняться тип устойчивости системы:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{(180-155.58)\pi}{180 \cdot 1.7978} \simeq 0.0755\pi \simeq 0.237, \\ r_2 = \frac{(180-92.9346)\pi}{180 \cdot 2.3296} \simeq 0.2076\pi \simeq 0.652 \end{cases} \tag{57}$$

Замкнутая система устойчива при $r \in (0.237, 0.652)$

Запаса устойчивости по фазе нет, так как система изначально не была устойчивой.

3.4 Моделирование

3.4.1 Система 1

Проведем моделирование при $r = 0.15, 0.25, 0.5$, что соответствует случаям устойчивости, граничного значения и неустойчивости.

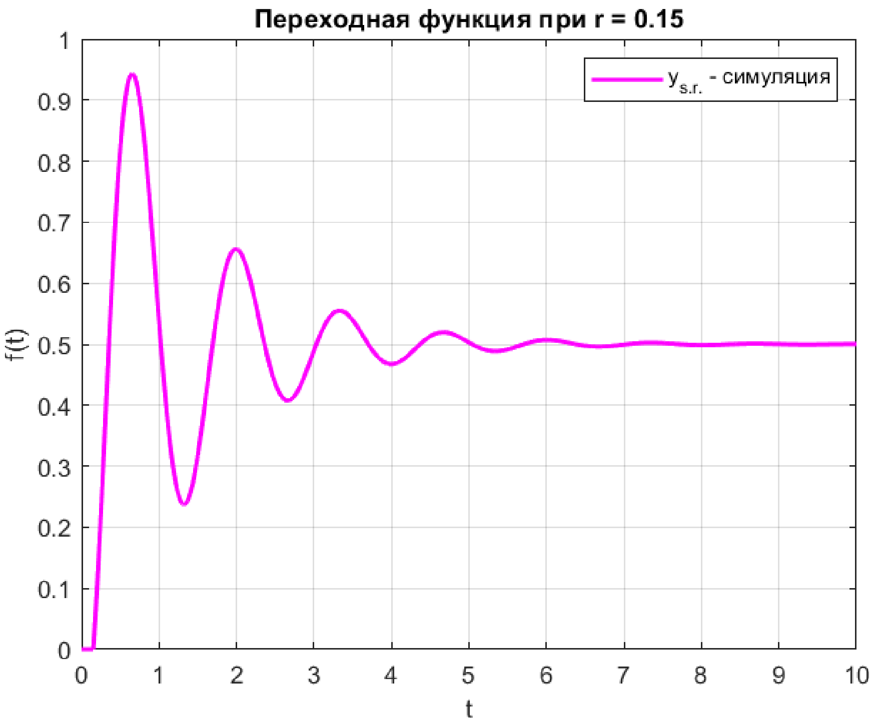

Рисунок 55 — Переходная функция для первой системы при $r = 0.15$.

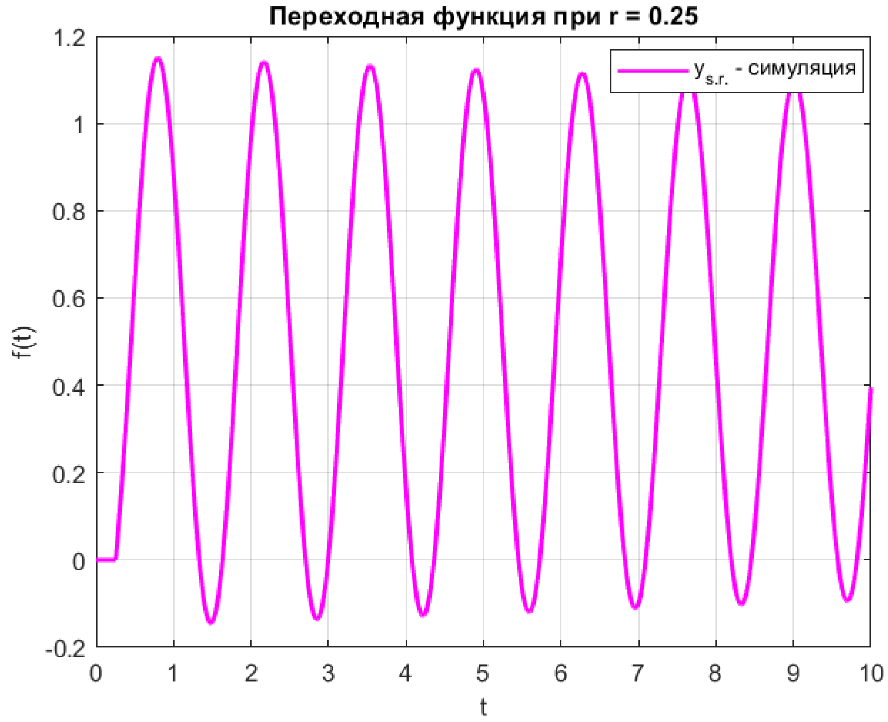

Рисунок 56 — Переходная функция для первой системы при $r = 0.25$.

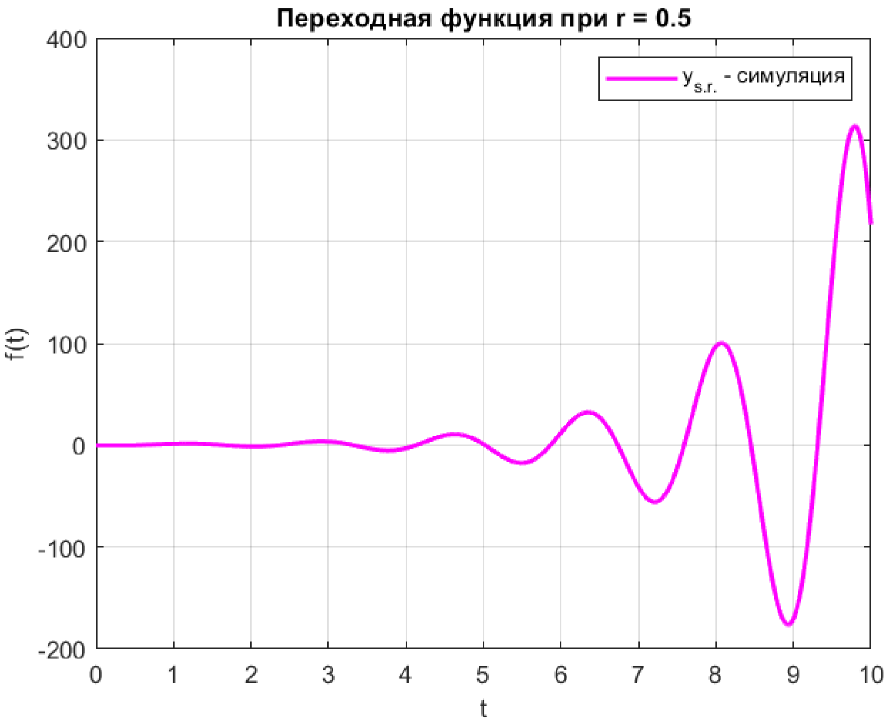

Рисунок 57 — Переходная функция для первой системы при $r = 0.5$.

3.4.2 Система 2

Проведем моделирование при $r = 0.1, 0.4, 0.8$, что соответствует случаям нейстойчивости, устойчивости и вновь неустойчивости.

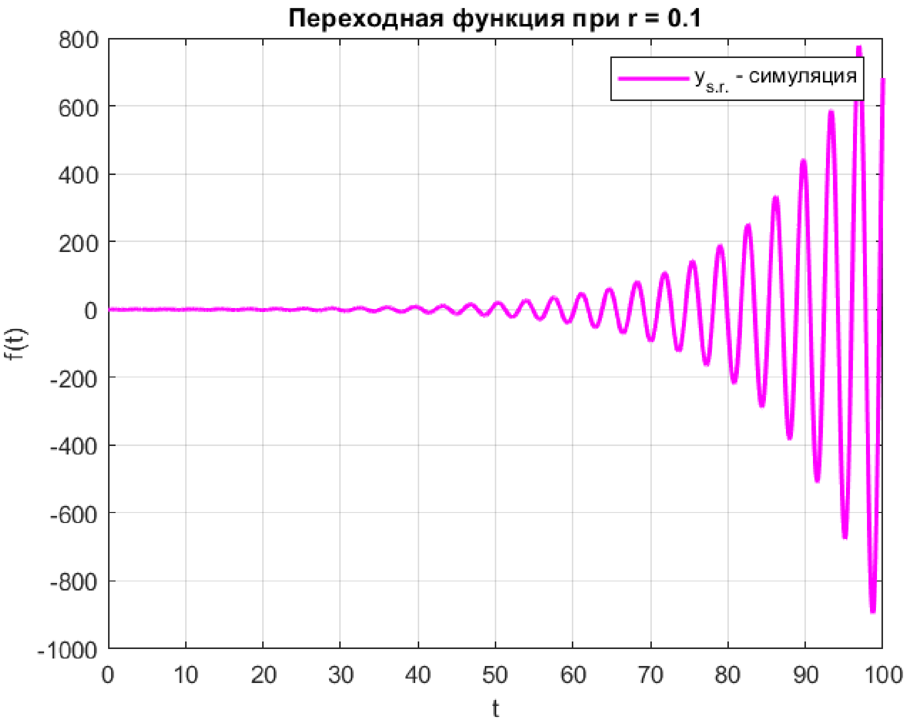

Рисунок 58 — Переходная функция для второй системы при $r = 0.1$.

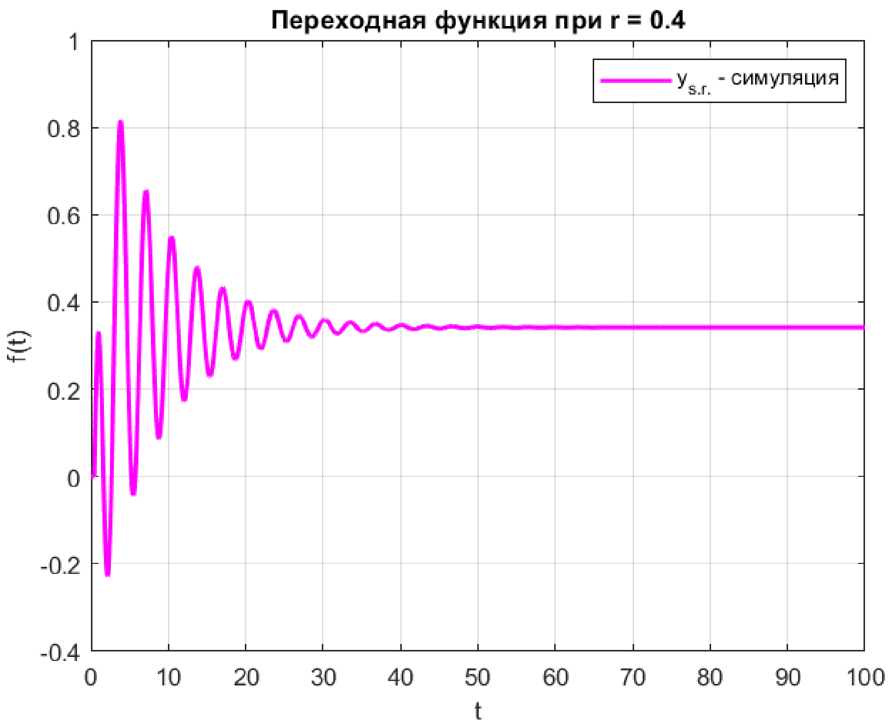

Рисунок 59 — Переходная функция для второй системы при $r = 0.4$.

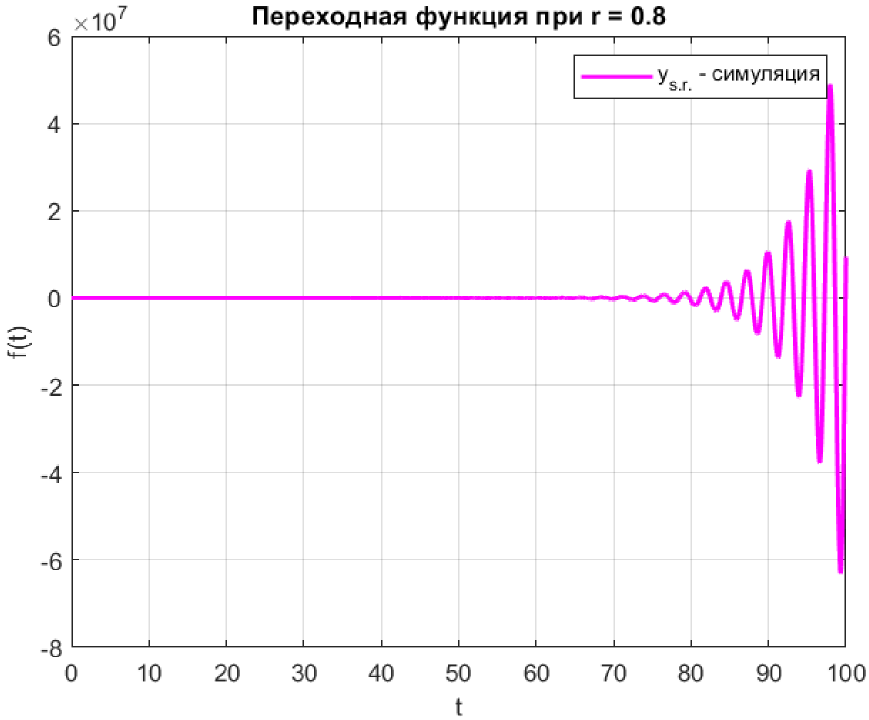

Рисунок 60 — Переходная функция для второй системы при $r = 0.8$.

4 ВЫВОД

В ходе выполнения лабораторной работы были применены на практике знания о критерии Найквиста и системах с запаздыванием. В первой части работы, рассмотрены три объекта с разными количествами неустойчивых полюсов в замкнутом и разомкнутом виде. Здесь наглядно продемонстрирована теория по критерию Найквиста и логарифмическому критерию Найквиста. Во второй части было изучено влияние коэффициента усиления на количество неустойчивых полюсов системы и на годограф Найквиста. В последней части была изучена взаимосвязь между устойчивостью системы и коэффициентом запаздывания.