

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 1
**«Формы представления линейных
динамических систем»**

по дисциплине «Линейные системы автоматического управления»

Вариант 27

Студент: группа **R3338**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Пашенко Артем Витальевич*

Санкт-Петербург
2024

ДОБАВИТЬ СТРАНИЦУ СОДЕРЖАНИЕ

1 Задание. Одноканальная система в форме ВХОД-ВЫХОД

1.1 Математическая модель

Возьмем коэффициенты $a_2 = 9$, $a_1 = 23$, $a_0 = 15$, $b_2 = 14$, $b_1 = 6$ и $b_0 = 16$. Рассмотрим математическую модель в форме дифференциального уравнения

$$\ddot{y} + 9\ddot{y} + 23\dot{y} + 15y = 14\ddot{u} + 6\dot{u} + 16u \quad (1)$$

Перепишем с применением оператора дифференцирования

$$p^3[y] + 9p^2[y] + 23p[y] + 15y = 14p^2[u] + 6p[u] + 16u \quad (2)$$

Теперь выразим выходной сигнал y

$$\begin{aligned} p^3[y] &= 14p^2[u] + 6p[u] + 16u - 9p^2[y] - 23p[y] - 15y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{p^3} [14p^2[u] + 6p[u] + 16u - 9p^2[y] - 23p[y] - 15y] = \\ &= 14\frac{1}{p}[u] + 6\frac{1}{p^2}[u] + 16\frac{1}{p^3}[u] - 9\frac{1}{p}[y] - 23\frac{1}{p^2}[y] - 15\frac{1}{p^3}[y] \quad (3) \end{aligned}$$

Получим выражение с применением операторов интегрирования.

1.2 Структурная схема системы

В среде моделирования *Simulink* построим структурную схему системы. Будем использовать блоки элементарных операций: «интегратор», «сумматор», «усилитель».

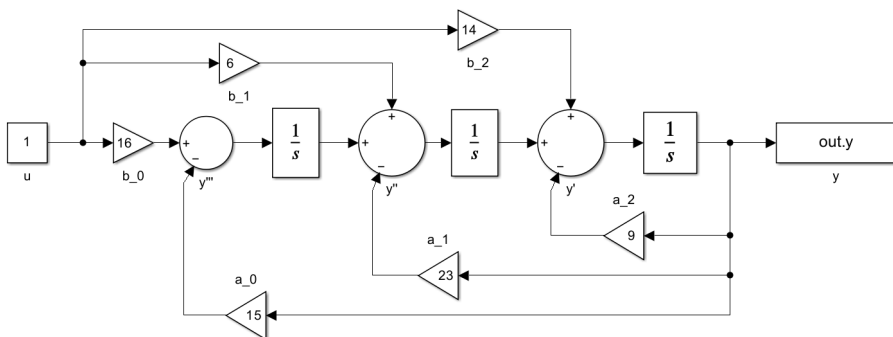


Рис. 1. Структурная схема первой системы.

1.3 Графики сигналов

Выполним моделирование при входном воздействии вида $u(t) = 1$ и нулевых начальных условиях $\ddot{y}(0)$, $\dot{y}(0)$, $y(0)$. Полученные графики выходных сигналов приведены на рисунке 2.

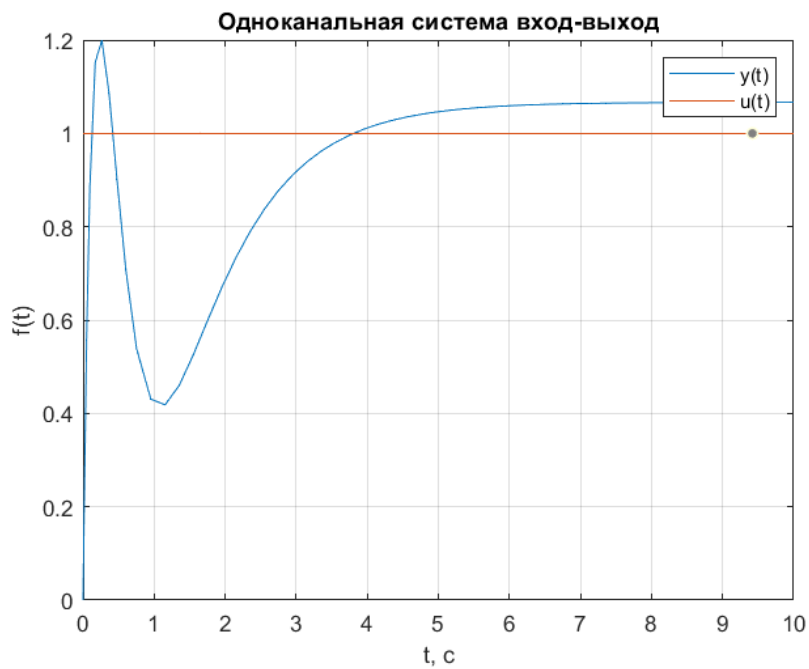


Рис. 2. Графики сигналов для одноканальной системы в форме вход-выход.

2 Задание. Переход от формы вход-выход к форме вход-состояние-выход

2.1 Математическая модель

2.1.1 Передаточная функция

Для системы из 1 задания определим передаточную функцию $W(p)$.

$$\ddot{y} + 9\dot{y} + 23y = 14\ddot{u} + 6\dot{u} + 16u \quad (4)$$

Перепишем с применением оператора дифференцирования

$$\begin{aligned} p^3[y] + 9p^2[y] + 23p[y] + 15y &= 14p^2[u] + 6p[u] + 16u \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (p^3 + 9p^2 + 23p + 15)[y] &= (14p^2 + 6p + 16)[u] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= \frac{14p^2 + 6p + 16}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15}[u] + 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Получим передаточную функцию

$$W(p) = \frac{14p^2 + 6p + 16}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} \quad (6)$$

2.1.2 Каноническая управляемая форма

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= [b_0 \quad b_1 \quad b_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = [16 \quad 6 \quad 14] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

2.1.3 Каноническая наблюдаемая форма

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -15 \\ 1 & 0 & -23 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix} u \\
 &\quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\
 &\quad \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (8)
 \end{aligned}$$

2.1.4 Каноническая диагональная форма

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u \\
 &\quad y = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Запишем передаточную функцию

$$W(p) = \frac{14p^2 + 6p + 16}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} \quad (10)$$

Разложим знаменатель на произведение множителей. Заметим, что один из корней $p = -1$, после применения схемы Горнера останется квадратное уравнение, решение которого находится по теореме Виета

$$(p + 1)(p^2 + 8p + 15) = (p + 1)(p + 3)(p + 5) \quad (11)$$

Найдем разложение вида

$$\begin{aligned}
 \frac{14p^2 + 6p + 16}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} &= \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p+5} = \\
 &= \frac{A(p+3)(p+5) + B(p+1)(p+5) + C(p+3)(p+1)}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} = \\
 &= \frac{Ap^2 + 8Ap + 15A + Bp^2 + 6Bp + 5B + Cp^2 + 4Cp + 3C}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} = \\
 &= \frac{(A+B+C)p^2 + (8A+6B+4C)p + 15A+5B+3C}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} = \\
 &= \frac{3}{p+1} - \frac{31}{p+3} + \frac{42}{p+5} \quad (12)
 \end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned}
 W(p) &= \frac{\beta_1 \cdot \gamma_1}{p - \lambda_1} + \frac{\beta_2 \cdot \gamma_2}{p - \lambda_2} + \frac{\beta_3 \cdot \gamma_3}{p - \lambda_3} = \frac{3}{p+1} - \frac{31}{p+3} + \frac{42}{p+5} = \\
 &= \frac{3 \cdot 1}{p+1} + \frac{31 \cdot (-1)}{p+3} + \frac{6 \cdot 7}{p+5} \quad (13)
 \end{aligned}$$

Наконец запишем систему в канонической диагональной форме.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 31 \\ 6 \end{bmatrix} u \\
 y &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (14)
 \end{aligned}$$

2.2 Структурные схемы системы для представления В-С-В и соответствующие графики

2.2.1 Передаточная функция

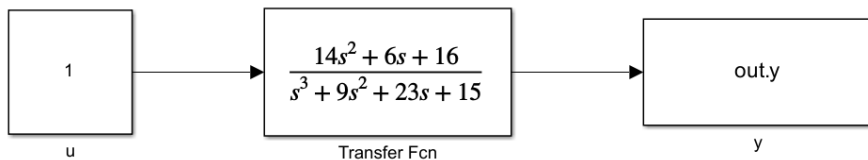


Рис. 3. Структурная схема с использованием передаточной функции.

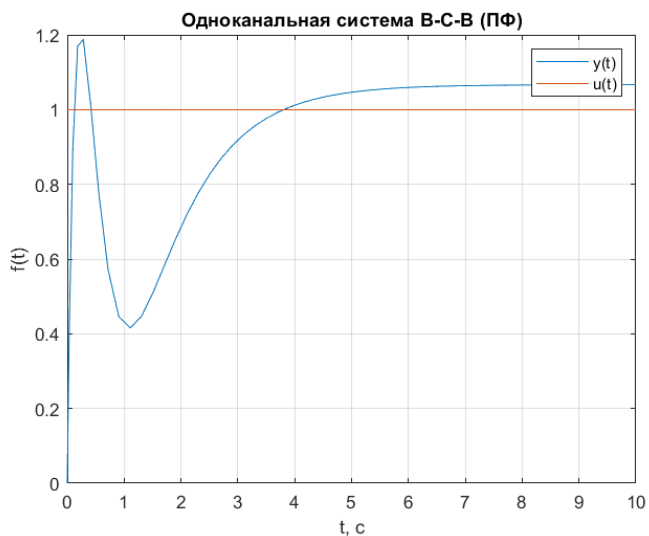


Рис. 4. График системы с использованием передаточной функции.

2.2.2 Каноническая управляемая форма

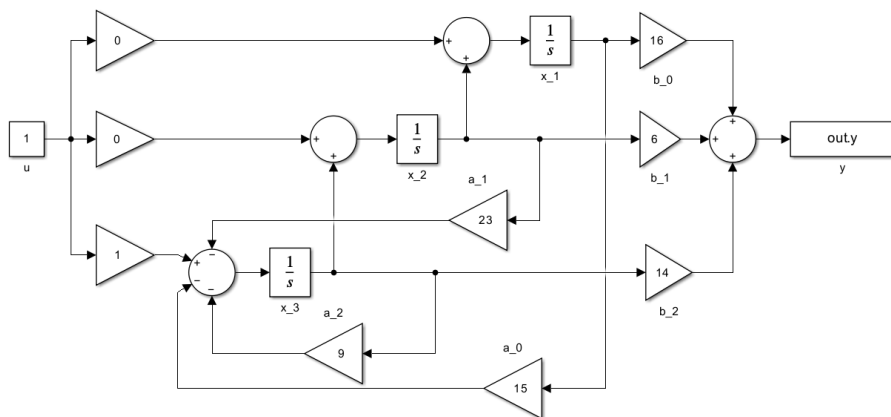


Рис. 5. Структурная схема системы в канонической управляемой форме.

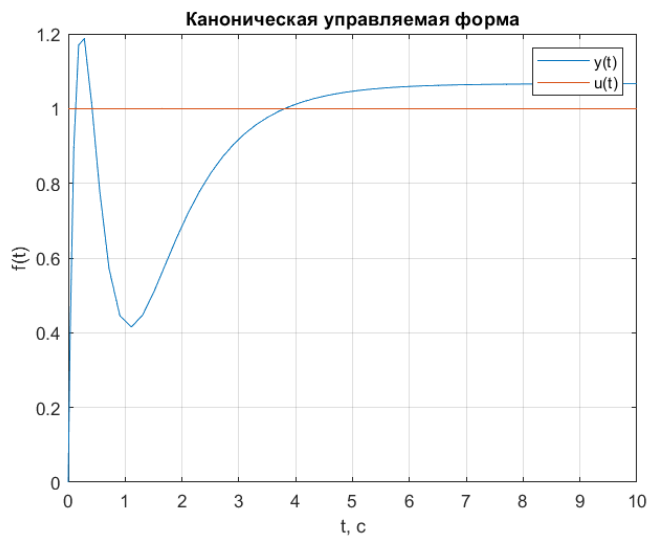


Рис. 6. График системы в канонической управляемой форме.

2.2.3 Каноническая наблюдаемая форма

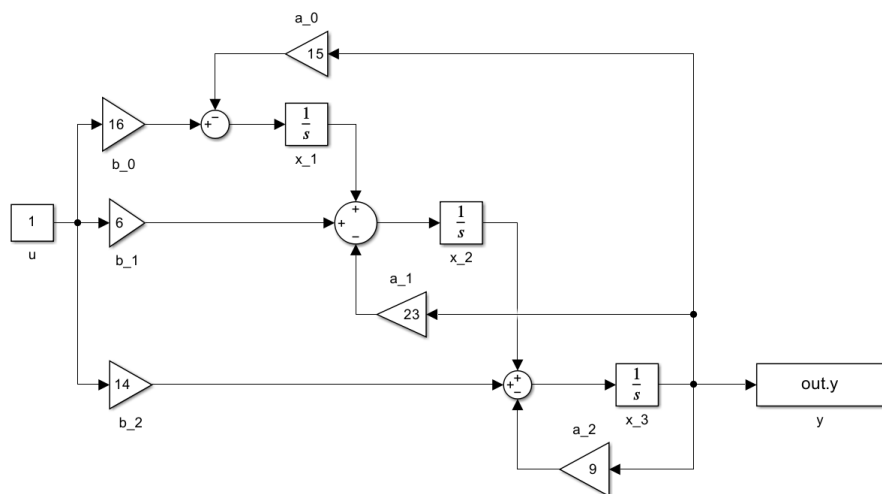


Рис. 7. Структурная схема системы в канонической наблюдаемой форме.

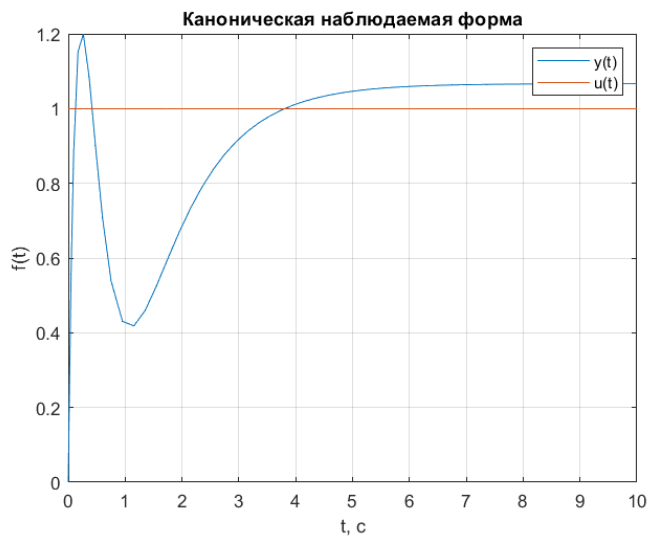


Рис. 8. График системы в канонической наблюдаемой форме.

2.2.4 Каноническая диагональная форма

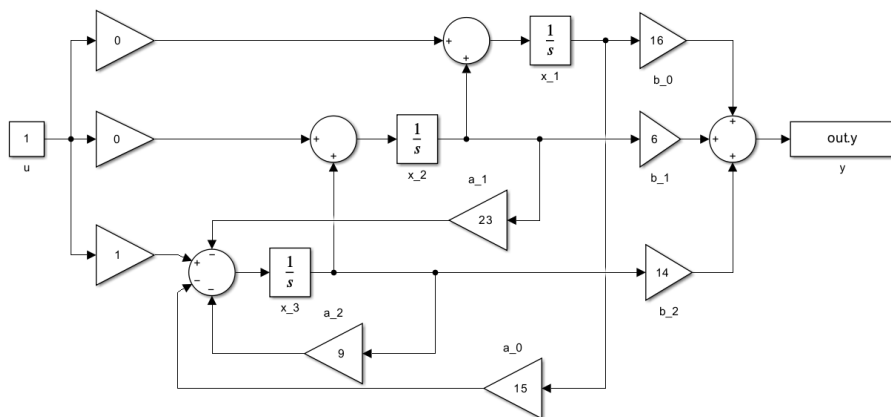


Рис. 9. Структурная схема системы в канонической диагональной форме.

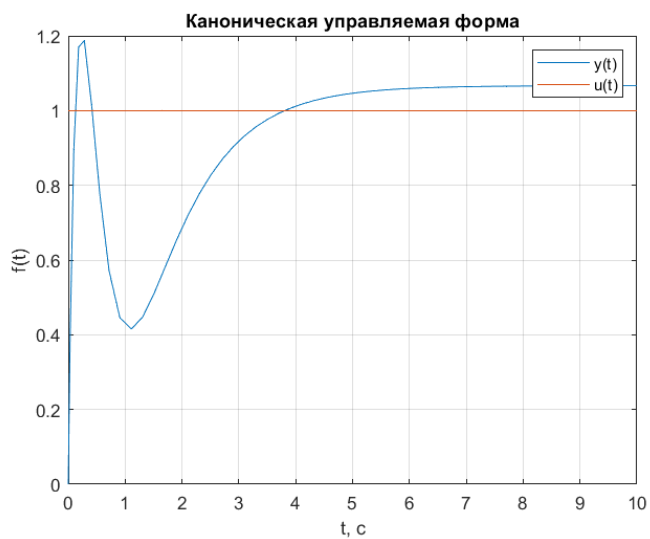


Рис. 10. График системы в канонической диагональной форме.