Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 1

«Формы представления линейных динамических систем»

по дисциплине «Линейные системы автоматического управления»

Вариант 27

Студент: группа **R3338**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Пашенко Артем Витальевич*

Санкт-Петербург
2024

ДОБАВИТЬ СТРАНИЦУ СОДЕРЖАНИЕ

1 Задание. Одноканальная система в форме вход-выход

1.1 Математическая модель

Возьмем коэффициенты $a_2 = 9$, $a_1 = 23$, $a_0 = 15$, $b_2 = 14$, $b_1 = 6$ и $b_0 = 16$. Рассмотрим математическую модель в форме дифференциального уравнения

$$\dddot{y} + 9\ddot{y} + 23\dot{y} + 15y = 14\ddot{u} + 6\dot{u} + 16u \tag{1}$$

Перепишем с применением оператора дифференцирования

$$p^3[y] + 9p^2[y] + 23p[y] + 15y = 14p^2[u] + 6p[u] + 16u \tag{2}$$

Теперь выразим выходной сигнал y

$$\begin{aligned} p^3[y] &= 14p^2[u] + 6p[u] + 16u - 9p^2[y] - 23p[y] - 15y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{p^3}\left[14p^2[u] + 6p[u] + 16u - 9p^2[y] - 23p[y] - 15y\right] = \\ &= 14\frac{1}{p}[u] + 6\frac{1}{p^2}[u] + 16\frac{1}{p^3}[u] - 9\frac{1}{p}[y] - 23\frac{1}{p^2}[y] - 15\frac{1}{p^3}[y] \end{aligned} \tag{3}$$

Получим выражение с применением операторов интегрирования.

1.2 Структурная схема системы

В среде моделирования *Simulink* построим структурную схему системы. Будем использовать блоки элементарных операций: «интегратор», «сумматор», «усилитель».

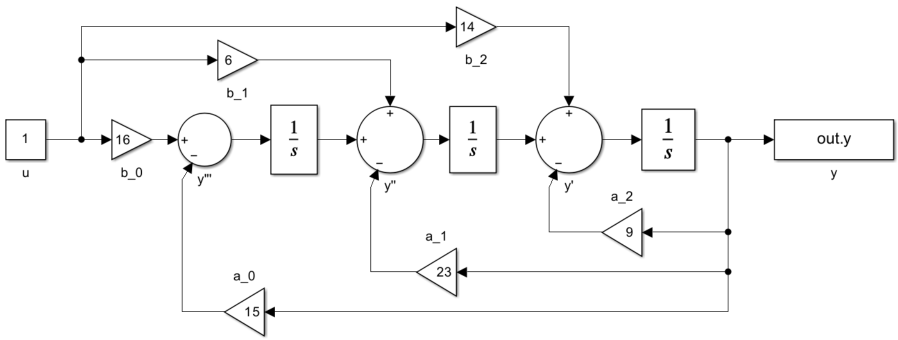

Рис. 1. Структурная схема первой системы.

1.3 Графики сигналов

Выполним моделирование при входном воздействии вида $u(t) = 1$ и нулевых начальных условиях $\ddot{y}(0)$, $\dot{y}(0)$, $y(0)$. Полученные графики выходных сигналов приведены на рисунке 2.

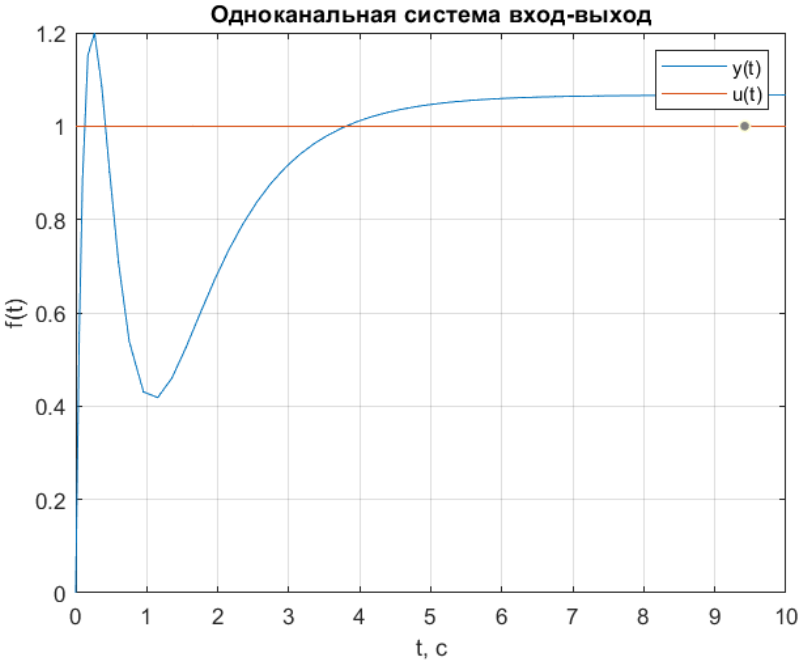

Рис. 2. Графики сигналов для одноканальной системы в форме вход-выход.

2 Задание. Переход от формы вход-выход к форме вход-состояние-выход

2.1 Математическая модель

Для системы из 1 задания определим передаточную функцию $W(p)$.

$$\dddot{y} + 9\ddot{y} + 23\dot{y} + 15y = 14\ddot{u} + 6\dot{u} + 16u \tag{4}$$

Перепишем с применением оператора дифференцирования

$$\begin{aligned} &p^3[y] + 9p^2[y] + 23p[y] + 15y = 14p^2[u] + 6p[u] + 16u \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(p^3 + 9p^2 + 23p + 15\right)[y] = \left(14p^2 + 6p + 16\right)[u] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \frac{14p^2 + 6p + 16}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15}[u] + 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Получим передаточную функцию

$$W(p) = \frac{14p^2 + 6p + 16}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} \tag{6}$$

2.1.1 Каноническая управляемая форма

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ &y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} 16 & 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

2.1.2 Каноническая наблюдаемая форма

$$
\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\\ \dot{x_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_0\\ b_1\\ b_2\end{bmatrix} u \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\\ \dot{x_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -15\\ 1 & 0 & -23\\ 0 & 1 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}16\\ 6\\ 14\end{bmatrix} u
$$

$$
y = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow y = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \tag{8}
$$

2.1.3 Каноническая диагональная форма

$$
\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\\ \dot{x_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix} u
$$

$$
y = \begin{bmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \tag{9}
$$

Запишем передаточную функцию

$$
W(p) = \frac{14p^2 + 6p + 16}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} \tag{10}
$$

Разложим знаменатель на произведение множителей. Заметим, что один из корней $p = -1$, после применения схемы Горнера останется квадратное уравнение, решение которого находится по теореме Виета

$$
(p+1)\left(p^2 + 8p + 15\right) = (p+1)(p+3)(p+5) \tag{11}
$$

Найдем разложение вида

$$\frac{14p^2+6p+16}{p^3+9p^2+23p+15} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p+5} =$$

$$= \frac{A\,(p+3)\,(p+5) + B\,(p+1)\,(p+5) + C\,(p+3)\,(p+1)}{p^3+9p^2+23p+15} =$$

$$= \frac{Ap^2+8Ap+15A+Bp^2+6Bp+5B+Cp^2+4Cp+3C}{p^3+9p^2+23p+15} =$$

$$= \frac{(A+B+C)\,p^2+(8A+6B+4C)\,p+15A+5B+3C}{p^3+9p^2+23p+15} =$$

$$= \frac{3}{p+1} - \frac{31}{p+3} + \frac{42}{p+5} \tag{12}$$

Теперь заметим, что

$$W(p) = \frac{\beta_1 \cdot \gamma_1}{p-\lambda_1} + \frac{\beta_2 \cdot \gamma_2}{p-\lambda_2} + \frac{\beta_3 \cdot \gamma_3}{p-\lambda_3} = \frac{3}{p+1} - \frac{31}{p+3} + \frac{42}{p+5} =$$
$$= \frac{3 \cdot 1}{p+1} + \frac{31 \cdot (-1)}{p+3} + \frac{6 \cdot 7}{p+5} \tag{13}$$

Наконец запишем систему в канонической диагональной форме.

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 31 \\ 6 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{14}$$