ИТМО

Линейные системы автоматического управления

Свободное движение

и устойчивость

Свободное движение
(Свободная составляющая движения)

Свободное движение
(Свободная составляющая движения)

– «переходной процесс автономной системы»

Переходной процесс – изменение во времени различных переменных системы

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Свободное движение
(Свободная составляющая движения)

– «переходной процесс автономной системы»

Зависит от **полюсов** системы и **начальных условий**

Переходной процесс – изменение во времени различных переменных системы

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Свободное движение: вход-выход

$$a_n p^n[y] + a_{n-1} p^{n-1}[y] + \cdots + a_1 p[y] + a_0[y] = R(p)[u]$$

$$\Downarrow$$

$$u = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] + \cdots + a_1 p[y] + a_0[y] = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

однородное
+
линейное

Свободная составляющая (движения) $y_{\text{св}}(t)$ соответствует решениям однородного дифференциального уравнения

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

Характеристическое уравнение

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса**!) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса!**) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{\text{св}}(t) =?$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса!**) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса**!) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{св}(t) =?$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса!**) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса!**) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\Rightarrow$$

$$y(t) = (c - di)e^{0t}(\cos 2t + i\sin 2\,t)$$
$$+(c + di)e^{0t}(\cos 2t - i\sin 2\,t)$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0 \pm 2i$$

$$e^{(\alpha+\beta i)t} =$$
$$= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса**!) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$\Rightarrow$

$$y(t) = 2c\cos 2t + 2d\sin 2t$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса!**) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$\Rightarrow$$

$$y(t) = 2c\cos 2t + 2d\sin 2t$$

$$\dot{y}(t) = 4c(-\sin 2t) + 4d\cos 2t$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса**!) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$\Rightarrow$

$$y(0) = 2c\cos 0 + 2d\sin 0$$

$$\dot{y}(0) = 4c(-\sin 0) + 4d\cos 0$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса!**) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$\Rightarrow$

$$y(0) = 2c = 1$$

$$\dot{y}(0) = 4d = 2$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса!**) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{св}(t) = ?$$

$$c = d = 0.5$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса!**) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\Rightarrow$$

$$c = d = 0.5$$

$$y(t) = \cos 2t + \sin 2t$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

$\boxed{\text{корни (}\textbf{полюса}\text{!) } \lambda_j \text{ и моды } e^{\lambda_j t}}$

Пример (через Лапласа)

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(-0)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}(t)\} = s^2F(s) - sf(-0) - \dot{f}(-0)$$

$$\dots$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(-0)$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса**!) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример (через Лапласа)

$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$
$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$
$y_{\text{св}}(t) = ?$

$$\Rightarrow \quad s^2 Y_{\text{СВ}}(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 4Y_{\text{СВ}}(s) = 0$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса**!) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример (через Лапласа)

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\Rightarrow \quad s^2 Y_{\text{СВ}}(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 4Y_{\text{СВ}}(s) = 0$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса**!) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример (через Лапласа)

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\Rightarrow \quad (s^2 + 4)Y_{\text{СВ}}(s) = sy(0) + \dot{y}(0)$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса!**) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример (через Лапласа)

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\Rightarrow \quad Y_{\text{СВ}}(s) = \frac{sy(0) + \dot{y}(0)}{(s^2 + 4)}$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса**!) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример (через Лапласа)

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\Rightarrow \quad Y_{\text{СВ}}(s) = \frac{s+2}{(s^2+4)}$$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса!**) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример (через Лапласа)

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\Rightarrow \quad Y_{\text{СВ}}(s) = \frac{2}{(s^2+4)} + \frac{s}{(s^2+4)}$$

$f(t)$ **оригинал**	$F(S)$ **изображение**
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Свободное движение: вход-выход

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$$

корни (**полюса!**) λ_j
и
моды $e^{\lambda_j t}$

Пример (через Лапласа)

$$\ddot{y} + 4y = 6\dot{u} - u,$$
$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$$
$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$\Rightarrow$ $y_{\text{св}}(t) = \sin(2t) + \cos(2t)$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$x(0)$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{array}$$

$$x(0)$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{св}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{св}(t) = ?$$

$$e^{\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} t} = ?$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad x(0)$$

$\Rightarrow$

$$x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0)$$
$$y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0)$$

Существуют правила возведения экспоненты в матричную степень **Жордановых клеток**

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$
$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$e^{\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} t} = ?$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{св}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Существуют правила возведения экспоненты в матричную степень **Жордановых клеток**

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{св}(t) = ?$$

$$S = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Для кратных корней

$$e^{St} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{(n-2)}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Существуют правила возведения экспоненты в матричную степень **Жордановых клеток**

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\lambda_i, \bar{\lambda}_i = \alpha_i \pm i\beta_i$$

$$S = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix} \Rightarrow e^{St} = e^{\alpha_i t} \begin{bmatrix} \cos \beta_i t & \sin \beta_i t \\ -\sin \beta_i t & \cos \beta_i t \end{bmatrix}$$

Для комплексно-сопряженных

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{array}$$

$$x(0)$$

Существуют правила возведения экспоненты в матричную степень **Жордановых клеток**

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

Нужно найти
Жорданово разложение
$A = PSP^{-1}$
и воспользоваться им
$\mathrm{e}^{At} = Pe^{St}P^{-1}$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Также просто возвести в степень **диагональной матрицы**

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Нужно найти
Спектральное разложение
$$A = PDP^{-1}$$
и воспользоваться им
$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Решение через диагональную матрицу: необходимо сначала найти спектральное разложение

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\det\left(I\lambda - \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0)\end{matrix}$$

$$x(0)$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}-2 & 4 \\ -2 & 2\end{bmatrix}x,$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\det\begin{bmatrix}\lambda + 2 & -4 \\ 2 & \lambda - 2\end{bmatrix} = 0$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) =?$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 2) + 8 = 0$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\lambda^2 = -4$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\lambda_1 = 2i$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 2i \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2i$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = -2i \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{св}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{св}(t) = ?$$

$$\lambda_1 = 2i$$

$$\begin{cases} -2a_1 + 4a_2 = 2ia_1 \\ -2a_1 + 2a_2 = 2ia_2 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = -2i$$

$$\begin{cases} -2a_1 + 4a_2 = -2ia_1 \\ -2a_1 + 2a_2 = -2ia_2 \end{cases}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{св}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{св}(t) = ?$$

$$\lambda_1 = 2i$$

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_1 + ia_1}{2} \\ a_1 = a_1 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = -2i$$

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_1 - ia_1}{2} \\ a_1 = a_1 \end{cases}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{св}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{св}(t) = ?$$

$$\lambda_1 = 2i$$

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_1 + ia_1}{2} \\ a_1 - \text{любое число} \end{cases}$$

$$\lambda_2 = -2i$$

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_1 - ia_1}{2} \\ a_1 - \text{любое число} \end{cases}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\lambda_1 = 2i$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 + i \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2i$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 - i \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}^{-1}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$e^{\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}t} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2it} & 0 \\ 0 & e^{-2it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}^{-1}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{св}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{св}(t) = ?$$

$$e^{\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2it} & 0 \\ 0 & e^{-2it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2-2i-2-2i} \begin{bmatrix} 1-i & -2 \\ -1-i & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-4i} \begin{bmatrix} 1-i & -2 \\ -1-i & 2 \end{bmatrix} = \frac{i}{4} \begin{bmatrix} 1-i & -2 \\ -1-i & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+i)/4 & -i/2 \\ (1-i)/4 & i/2 \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_{св}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{св}(t) = ?$$

$$e^{\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2it} & 0 \\ 0 & e^{-2it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+i)/4 & -i/2 \\ (1-i)/4 & i/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2-2i-2-2i} \begin{bmatrix} 1-i & -2 \\ -1-i & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-4i} \begin{bmatrix} 1-i & -2 \\ -1-i & 2 \end{bmatrix} = \frac{i}{4} \begin{bmatrix} 1-i & -2 \\ -1-i & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+i)/4 & -i/2 \\ (1-i)/4 & i/2 \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases} \quad x(0) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0)\end{aligned}$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}-2 & 4 \\ -2 & 2\end{bmatrix}x,$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$e^{\begin{bmatrix}-2 & 4 \\ -2 & 2\end{bmatrix}t} = \begin{bmatrix}2e^{2it} & 2e^{-2it} \\ (1+i)e^{2it} & (1-i)e^{-2it}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1+i)/4 & -i/2 \\ (1-i)/4 & i/2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 2 \\ 1+i & 1-i\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2-2i-2-2i}\begin{bmatrix}1-i & -2 \\ -1-i & 2\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-4i}\begin{bmatrix}1-i & -2 \\ -1-i & 2\end{bmatrix} = \frac{i}{4}\begin{bmatrix}1-i & -2 \\ -1-i & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(1+i)/4 & -i/2 \\ (1-i)/4 & i/2\end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad x(0) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$e^{\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} t} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{(1+i)e^{2it}}{2} + \dfrac{(1-i)e^{-2it}}{2} & -ie^{2it} + ie^{-2it} \\ \dfrac{(1+i)^2 e^{2it}}{4} + \dfrac{(1-i)^2 e^{-2it}}{4} & \dfrac{-i(1+i)e^{2it}}{2} + \dfrac{i(1-i)e^{-2it}}{2} \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$x_{\text{св}}(t) = e^{\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{(1+i)e^{2it}}{2} + \dfrac{(1-i)e^{-2it}}{2} \\ \dfrac{(1+i)^2 e^{2it}}{4} + \dfrac{(1-i)^2 e^{-2it}}{4} \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{св}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{св}(t) = ?$$

$$x_{св}(t) = e^{\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{(1+i)e^{2it}}{2} + \dfrac{(1-i)e^{-2it}}{2} \\ \dfrac{2ie^{2it}}{4} + \dfrac{-2ie^{-2it}}{4} \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases} \quad x(0) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{св}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) &= Ce^{At}x(0)\end{aligned}$$

$$\boxed{e^{(\alpha+\beta i)t} = \\ = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)}$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}-2 & 4\\ -2 & 2\end{bmatrix}x,$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$y_{св}(t) = ?$$

$$x_{св}(t) = e^{\begin{bmatrix}-2 & 4\\ -2 & 2\end{bmatrix}t}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\dfrac{(1+i)(\cos 2t + i\sin 2t)}{2} + \dfrac{(1-i)(\cos(-2t) + i\sin(-2t))}{2} \\ \dfrac{2i(\cos 2t + i\sin 2t)}{4} + \dfrac{-2i(\cos(-2t) + i\sin(-2t))}{4}\end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases} \quad x(0) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{св}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) &= Ce^{At}x(0)\end{aligned}$$

$$\boxed{e^{(\alpha+\beta i)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)}$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2\end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1\end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0\end{bmatrix},$$

$$y_{св}(t) = ?$$

$$x_{св}(t) = e^{\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2\end{bmatrix}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{(1+i)(\cos 2t + i\sin 2t)}{2} + \dfrac{(1-i)(\cos 2t - i\sin 2t)}{2} \\ \dfrac{2i\cos 2t - 2\sin 2t}{4} + \dfrac{-2i\cos 2t - 2\sin 2t}{4}\end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &e^{(\alpha+\beta i)t} = \\ &= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) \end{aligned}}$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$x_{\text{св}}(t) = e^{\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{(1+i)(\cos 2t + i\sin 2t) + (1-i)(\cos 2t - i\sin 2t)}{2} \\ \dfrac{-4\sin 2t}{4} \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

$$\boxed{\begin{matrix} e^{(\alpha+\beta i)t} = \\ = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) \end{matrix}}$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$x_{\text{св}}(t) = e^{\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{2\cos 2t - 2\sin 2t}{2} \\ -\sin 2t \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_{св}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &e^{(\alpha+\beta i)t} = \\ &= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) \end{aligned}}$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{св}(t) = ?$$

$$x_{св}(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t - \sin 2t \\ -\sin 2t \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad x(0) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & e^{(\alpha+\beta i)t} = \\ & = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) \end{aligned}}$$

Пример

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$x_{\text{св}}(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t - \sin 2t \\ -\sin 2t \end{bmatrix}$$

$$y_{\text{св}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2t - \sin 2t \\ -\sin 2t \end{bmatrix} = \cos 2t$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Пример

(Лаплас)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(-0)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}(t)\} = s^2F(s) - sf(-0) - \dot{f}(-0)$$

$$\dots$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(-0)$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (Лаплас)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$sX_{\text{CB}}(s) - x(0) = AX_{\text{CB}}(s)$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{array}$$

$$x(0)$$

Пример (Лаплас)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$(Is - A)X_{\text{СВ}}(s) = x(0)$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_{св}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (Лаплас)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{св}(t) = ?$$

$$X_{СВ}(s) = (Is - A)^{-1}x(0)$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{св}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (Лаплас)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{св}(t) = ?$$

$$X_{СВ}(s) = (Is - A)^{-1}x(0)$$

$$Y_{СВ}(s) = C(Is - A)^{-1}x(0)$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Пример (Лаплас)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$X_{\text{СВ}}(s) = \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_{\text{СВ}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} X_{\text{СВ}}(s)$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример
(Лаплас)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$X_{\text{CB}}(s) = \begin{bmatrix} s+2 & -4 \\ 2 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_{\text{CB}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} X_{\text{CB}}(s)$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases} \quad x(0) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{св}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) &= Ce^{At}x(0)\end{aligned}$$

Пример (Лаплас)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}-2 & 4 \\ -2 & 2\end{bmatrix}x,$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix},$$

$$y_{св}(t) = ?$$

$$X_{СВ}(s) = \frac{1}{(s+2)(s-2)+8}\begin{bmatrix}s-2 & 4 \\ -2 & s+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$Y_{СВ}(s) = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}X_{СВ}(s)$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (Лаплас)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$X_{\text{СВ}}(s) = \frac{1}{s^2+4}\begin{bmatrix} s-2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$Y_{\text{СВ}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} X_{\text{СВ}}(s)$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{array}$$

$$x(0)$$

Пример

(Лаплас)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$X_{\text{СВ}}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s-2}{s^2+4} \\ \dfrac{-2}{s^2+4} \end{bmatrix}$$

$$Y_{\text{СВ}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{s-2}{s^2+4} \\ \dfrac{-2}{s^2+4} \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{array}$$

$$x(0)$$

Пример
(Лаплас)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$X_{\text{СВ}}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s-2}{s^2+4} \\ \dfrac{-2}{s^2+4} \end{bmatrix}$$

$$Y_{\text{СВ}}(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad x(0) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

Пример (Лаплас)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$X_{\text{СВ}}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2+4} - \dfrac{2}{s^2+4} \\ -\dfrac{2}{s^2+4} \end{bmatrix}$$

$$Y_{\text{СВ}}(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Пример (Лаплас)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_{\text{св}}(t) = ?$$

$$x_{\text{CB}}(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t - \sin 2t \\ -\sin 2t \end{bmatrix}$$

$$y_{\text{CB}}(t) = \cos 2t$$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \Leftarrow \begin{array}{l} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{array}$$

$$x(0)$$

Автономный объект (нет входа)!

Командный генератор, автономный генератор…

Пример: Обратная задача!

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$A = ?$$
$$C = ?$$
$$x(0) = ?$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$A = ?$

$C = ?$

$x(0) = ?$

Какие собственные числа A нам нужны?

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax \\ y = Cx\end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0)\end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$$A = ? \qquad \lambda_1 = -1$$

$$C = ? \qquad \lambda_2 = -1$$

$$x(0) = ? \qquad \lambda_3 = i$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$A = ?$ $\qquad \lambda_1 = -1$

$C = ?$ $\qquad \lambda_2 = -1$

$x(0) = ?$ $\qquad \lambda_3 = i$

$\lambda_4 = -i$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \Leftarrow \begin{array}{l} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{array}$$

$$x(0)$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$$A = ? \qquad \lambda_1 = -1$$

$$C = ? \qquad \lambda_2 = -1$$

$$x(0) = ? \qquad \lambda_3 = i$$

$$\lambda_4 = -i$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{св}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$A =?$

$C =?$

$x(0) =?$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = i$

$\lambda_4 = -i$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{св}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} A &=? & \lambda_1 &= -1 \\ C &=? & \lambda_2 &= -1 \\ x(0) &=? & \lambda_3 &= i \\ & & \lambda_4 &= -i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad x(0) \qquad \Leftarrow \qquad \begin{aligned} x_{св}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$$A = ? \qquad \lambda_1 = -1$$

$$C = ? \qquad \lambda_2 = -1$$

$$x(0) = ? \qquad \lambda_3 = 0 + i$$

$$\lambda_4 = 0 - i$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax \\ y = Cx\end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0)\end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$$A = ? \qquad \lambda_1 = -1$$

$$C = ? \qquad \lambda_2 = -1$$

$$x(0) = ? \qquad \lambda_3 = i$$

$$\lambda_4 = -i$$

$$\Rightarrow \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{0}\cos t & e^{0}\sin t \\ 0 & 0 & -e^{0}\sin t & e^{0}\cos t \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$A = ?$ $\qquad \lambda_1 = -1$

$C = ?$ $\qquad \lambda_2 = -1$

$x(0) = ?$ $\qquad \lambda_3 = i$

$\lambda_4 = -i$

$$\Rightarrow \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$A = ?$ $\quad \lambda_1 = -1$

$C = ?$ $\quad \lambda_2 = -1$

$x(0) = ?$ $\quad \lambda_3 = i$

$\lambda_4 = -i$

$$\Rightarrow \quad e^{At}x(0) = \\ = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \Leftarrow \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$$A = ? \qquad \lambda_1 = -1$$

$$C = ? \qquad \lambda_2 = -1$$

$$x(0) = ? \qquad \lambda_3 = i$$

$$\lambda_4 = -i$$

$$\Rightarrow \quad e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} a_1 e^{-t} + a_2 t e^{-t} \\ a_2 e^{-t} \\ a_3 \cos t + a_4 \sin t \\ -a_3 \sin t + a_4 \cos t \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax \\ y = Cx\end{cases} \Leftarrow \begin{aligned} x_{св}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) &= Ce^{At}x(0)\end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$$A = ? \qquad \lambda_1 = -1$$

$$C = ? \qquad \lambda_2 = -1$$

$$x(0) = ? \qquad \lambda_3 = i$$

$$\lambda_4 = -i$$

$$\Rightarrow$$

$$Ce^{At}x(0) =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 e^{-t} + a_2 t e^{-t} \\ a_2 e^{-t} \\ a_3 \cos t + a_4 \sin t \\ -a_3 \sin t + a_4 \cos t \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \Leftarrow \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$$A = ? \qquad \lambda_1 = -1$$

$$C = ? \qquad \lambda_2 = -1$$

$$x(0) = ? \qquad \lambda_3 = i$$

$$\lambda_4 = -i$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &Ce^{At}x(0) = \\ &= a_1 c_1 e^{-t} + a_2 c_1 t e^{-t} + \\ &+ a_2 c_2 e^{-t} + \\ &+ a_3 c_3 \cos t + a_4 c_3 \sin t - \\ &- a_3 c_4 \sin t + a_4 c_4 \cos t \end{aligned}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{matrix} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$A = ?$ $\quad\quad$ $\lambda_1 = -1$

$C = ?$ $\quad\quad$ $\lambda_2 = -1$

$x(0) = ?$ $\quad\quad$ $\lambda_3 = i$

$\lambda_4 = -i$

$$\Rightarrow \quad Ce^{At}x(0) = (a_1c_1 + a_2c_2)e^{-t} + a_2c_1te^{-t} + \\ +(a_3c_3 + a_4c_4)\cos t + (a_4c_3 - a_3c_4)\sin t$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

$$x(0)$$

$$\Leftarrow$$

$$x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0)$$
$$y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0)$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$$A = ?$$
$$C = ?$$
$$x(0) = ?$$

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = -1$$
$$\lambda_3 = i$$
$$\lambda_4 = -i$$

$$\Rightarrow$$

$$Ce^{At}x(0) = (a_1c_1 + a_2c_2)e^{-t} + a_2c_1te^{-t} +$$
$$+(a_3c_3 + a_4c_4)\cos t + (a_4c_3 - a_3c_4)\sin t$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \Leftarrow \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$A =?$ $\quad\lambda_1 = -1$

$C =?$ $\quad\lambda_2 = -1$

$x(0) =?$ $\quad\lambda_3 = i$

$\lambda_4 = -i$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1c_1 + a_2c_2 = 1 \\ a_2c_1 = 1 \\ a_3c_3 + a_4c_4 = 0 \\ a_4c_3 - a_3c_4 = 1 \end{cases}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \Leftarrow \begin{matrix} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$$A = ? \qquad \lambda_1 = -1$$
$$C = ? \qquad \lambda_2 = -1$$
$$x(0) = ? \qquad \lambda_3 = i$$
$$\lambda_4 = -i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1c_1 + a_2c_2 = 1 \\ a_2c_1 = 1 \\ a_3c_3 + a_4c_4 = 0 \\ a_4c_3 - a_3c_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = ? \\ a_2 = ? \\ a_3 = ? \\ a_4 = ? \\ c_1 = ? \\ c_2 = ? \\ c_3 = ? \\ c_4 = ? \end{cases}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \Leftarrow \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Например

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$$A = ? \qquad C = ? \qquad x(0) = ?$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -1 \qquad \lambda_3 = i \qquad \lambda_4 = -i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1c_1 + a_2c_2 = 1 \\ a_2c_1 = 1 \\ a_3c_3 + a_4c_4 = 0 \\ a_4c_3 - a_3c_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = -1 \\ a_4 = 0 \\ c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 1 \end{cases}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$$\Downarrow$$

$A =?$

$C =?$

$x(0) =?$

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = -1$$
$$\lambda_3 = i$$
$$\lambda_4 = -i$$

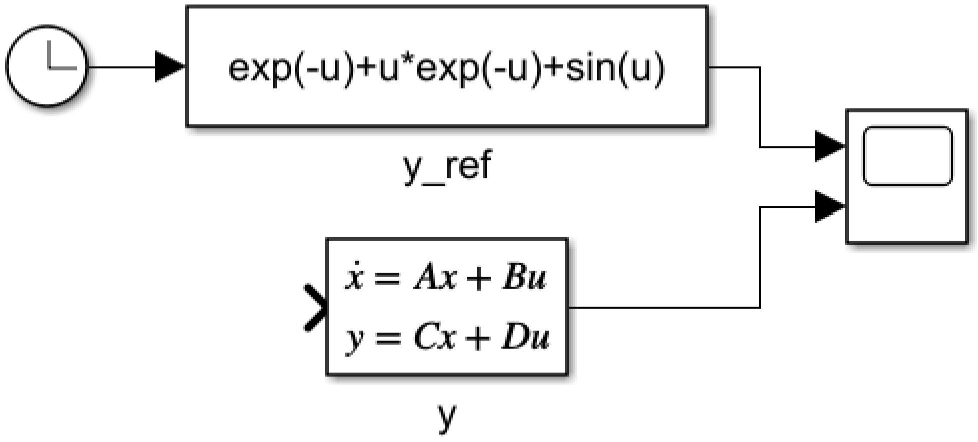
$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{св}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$



Пример (Жордан)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

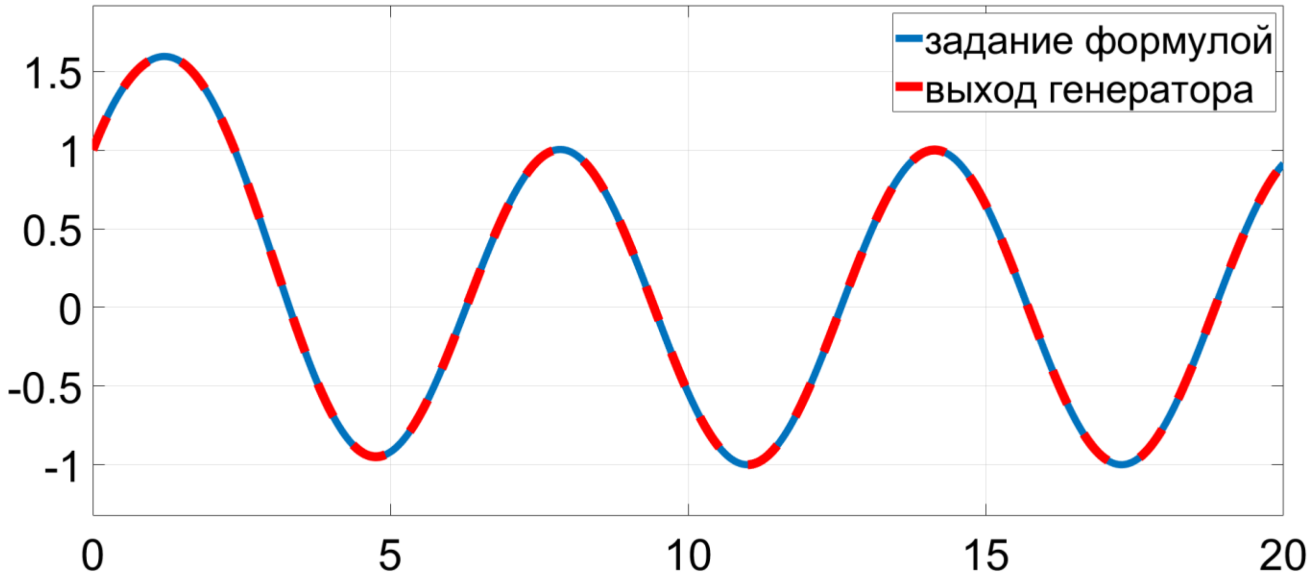
$$\Downarrow$$

$$A = ? \qquad \lambda_1 = -1$$

$$C = ? \qquad \lambda_2 = -1$$

$$x(0) = ? \qquad \lambda_3 = i$$

$$\lambda_4 = -i$$



Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \Leftarrow \begin{matrix} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{matrix}$$

$$x(0)$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$A = ?$

$C = ?$

$x(0) = ?$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} + \sin t$$

$A =?$
$C =?$
$x(0) =?$

Выделяем компоненты выхода разного рода

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$A =?$ $\qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$

$C =?$ $\qquad g_2(t) = \sin t$

$x(0) =?$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$A = ? \qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$$

$$C = ? \qquad g_2(t) = \sin t$$

$$x(0) = ?$$

$$g_1 = x_1 = e^{-t} + te^{-t}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \Leftarrow \begin{array}{l} x_{св}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) = Ce^{At}x(0) \end{array}$$

$$x(0)$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$A = ? \qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$$

$$C = ? \qquad g_2(t) = \sin t$$

$$x(0) = ?$$

$$g_1 = x_1 = e^{-t} + te^{-t}$$

Дифференцируем

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax \\ y = Cx\end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0)\end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$A = ?$ $\qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$

$C = ?$ $\qquad g_2(t) = \sin t$

$x(0) = ?$

$$g_1 = x_1 = e^{-t} + te^{-t}$$

$$\dot{x}_1 = -e^{-t} + (te^{-t})'$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$A = ? \qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$$
$$C = ? \qquad g_2(t) = \sin t$$
$$x(0) = ?$$

$$g_1 = x_1 = e^{-t} + te^{-t}$$
$$\dot{x}_1 = -e^{-t} + e^{-t} - te^{-t}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$A =?$ $\qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$

$C =?$ $\qquad g_2(t) = \sin t$

$x(0) =?$

$$g_1 = x_1 = e^{-t} + te^{-t}$$

$$\dot{x}_1 = -te^{-t}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$A = ? \qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$$
$$C = ? \qquad g_2(t) = \sin t$$
$$x(0) = ?$$

$$g_1 = x_1 = e^{-t} + te^{-t}$$
$$\dot{x}_1 = -te^{-t} = x_2$$

$\boxed{\text{Новая координата вектора состояния}}$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$A = ?$ $\qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$

$C = ?$ $\qquad g_2(t) = \sin t$

$x(0) = ?$

$$g_1 = x_1 = e^{-t} + te^{-t}$$
$$\dot{x}_1 = x_2 = -te^{-t}$$
$$\dot{x}_2 = -e^{-t} + te^{-t}$$

Дифференцируем

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$A = ? \qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$$

$$C = ? \qquad g_2(t) = \sin t$$

$$x(0) = ?$$

$$g_1 = x_1 = e^{-t} + te^{-t}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 = -te^{-t}$$

$$\dot{x}_2 = -e^{-t} + te^{-t} = -(e^{-t} + te^{-t}) - 2(-te^{-t})$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$A = ? \qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$$

$$C = ? \qquad g_2(t) = \sin t$$

$$x(0) = ?$$

$$g_1 = x_1 = e^{-t} + te^{-t}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 = -te^{-t}$$

$$\dot{x}_2 = -e^{-t} + te^{-t} = -x_1 - 2x_2$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$A =?$ $\qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$

$C =?$ $\qquad g_2(t) = \sin t$

$x(0) =?$

$$g_1 = x_1 = e^{-t} + te^{-t}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 = -te^{-t}$$

$$\dot{x}_2 = -e^{-t} + te^{-t} = -x_1 - 2x_2$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{св}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$A =?$ $\quad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$

$C =?$ $\quad g_2(t) = \sin t$

$x(0) =?$

$$g_1 = x_1 = e^{-t} + te^{-t}$$
$$\dot{x}_1 = x_2 = -te^{-t}$$
$$\dot{x}_2 = -e^{-t} + te^{-t} = -x_1 - 2x_2$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} =?$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$x(0)$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$A = ? \qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$$

$$C = ? \qquad g_2(t) = \sin t$$

$$x(0) = ?$$

$$\begin{aligned} g_1 &= x_1 = e^{-t} + te^{-t} \\ \dot{x}_1 &= x_2 = -te^{-t} \\ \dot{x}_2 &= -e^{-t} + te^{-t} = -x_1 - 2x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} g_1(0) &= x_1(0) = 1 + 0 \\ \dot{x}_1(0) &= x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = ?$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{l} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{array}$$

$$x(0)$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$A = ? \qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$$
$$C = ? \qquad g_2(t) = \sin t$$
$$x(0) = ?$$

$$g_1 = x_1 = e^{-t} + te^{-t}$$
$$\dot{x}_1 = x_2 = -te^{-t}$$
$$\dot{x}_2 = -e^{-t} + te^{-t} = -x_1 - 2x_2$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} g_1(0) = x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_1(0) = x_2(0) = 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

$$x(0)$$

$$\Leftarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$A = ? \qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$$

$$C = ? \qquad g_2(t) = \sin t$$

$$x(0) = ?$$

$$g_2 = x_3 = \sin t$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

$$x(0)$$

$$\Leftarrow \quad x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0)$$
$$y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0)$$

$$\begin{cases} g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$A = ? \qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$$
$$C = ? \qquad g_2(t) = \sin t$$
$$x(0) = ?$$

$$g_2 = x_3 = \sin t$$
$$\dot{x}_3 = x_4 = \cos t$$
$$\dot{x}_4 = -\sin t = -x_3$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

$$x(0)$$

$$\Leftarrow \quad x_{св}(t) = e^{At}x(0)$$
$$y_{св}(t) = Ce^{At}x(0)$$

$$\begin{cases} g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$A =?$ $\qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$

$C =?$ $\qquad g_2(t) = \sin t$

$x(0) =?$

$$g_2 = x_3 = \sin t$$
$$\dot{x}_3 = x_4 = \cos t$$
$$\dot{x}_4 = -\sin t = -x_3$$

$$\Rightarrow \quad g_2(0) = x_3(0) = 0$$
$$\dot{x}_3(0) = x_4(0) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{cases}, \begin{bmatrix} x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \Leftarrow \begin{array}{l} x_{св}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) = Ce^{At}x(0) \end{array}$$

$$x(0)$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$A = ? \qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$$
$$C = ? \qquad g_2(t) = \sin t$$
$$x(0) = ?$$

$$\begin{cases} y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{cases}, x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax \\ y = Cx\end{cases} \quad x(0) \qquad \Leftarrow \qquad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0)\end{aligned}$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$A = ? \qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$$

$$C = ? \qquad g_2(t) = \sin t$$

$$x(0) = ?$$

$$\begin{cases} y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4\end{bmatrix}\end{cases}, x(0) = \begin{bmatrix}1 \\ 0 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad x(0) \qquad \Leftarrow \qquad \begin{aligned} x_{св}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{св}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$A = ? \qquad g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$$

$$C = ? \qquad g_2(t) = \sin t$$

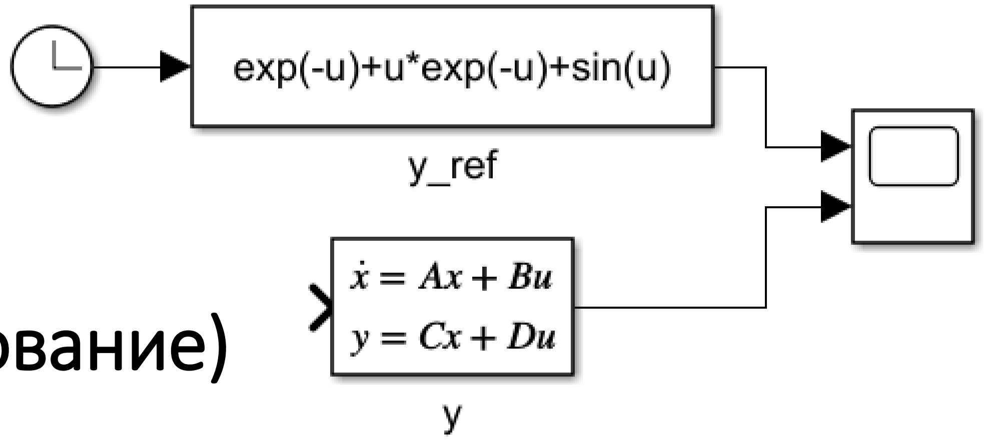
$$x(0) = ?$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Свободное движение: матрицы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad x(0) \qquad \Leftarrow \qquad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$



Пример (последовательное дифференцирование)

$$y(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

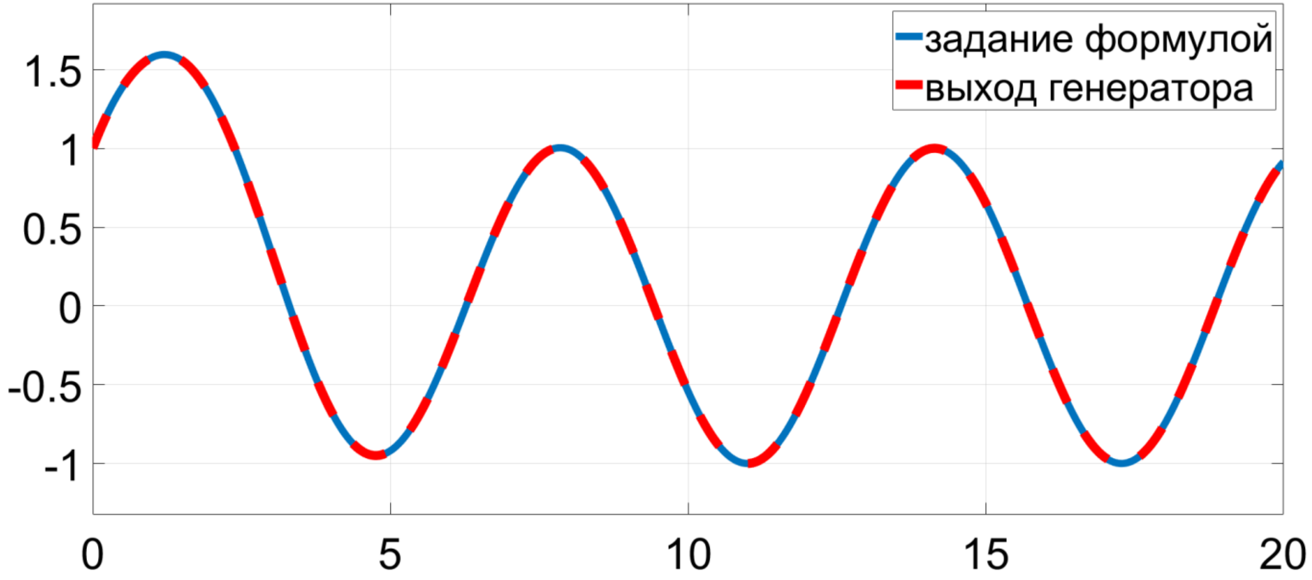
$A = ?$

$C = ?$

$x(0) = ?$

$$g_1(t) = e^{-t} + te^{-t}$$

$$g_2(t) = \sin t$$



Устойчивость систем управления

– способность динамической системы возвращаться в равновесное состояние (положение равновесия) после окончания действия внешних факторов

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Устойчивость систем управления

– способность динамической системы возвращаться в равновесное состояние (положение равновесия) после окончания действия внешних факторов

Устойчивость это про свободное движение!

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Устойчивость систем управления

– способность динамической системы возвращаться в равновесное состояние (положение равновесия) после окончания действия внешних факторов

Строго говоря устойчивость – не свойство системы, а свойство точки равновесия…

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Устойчивость систем управления

– способность динамической системы возвращаться в равновесное состояние (положение равновесия) после окончания действия внешних факторов

Строго говоря устойчивость – не свойство системы, а свойство точки равновесия…

…но системы линейные динамические!
Общая точка равновесия – 0 (т.к. линейные диффуры).
Это позволяет говорить об устойчивости системы в целом!

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Устойчивость систем управления

– способность динамической системы возвращаться в равновесное состояние (положение равновесия) после окончания действия внешних факторов

Различают:
Математическую устойчивость (по состоянию);
Техническую устойчивость (по выходу).

При определенных условиях они эквивалентны (см. Мирошника)

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Устойчивость: определения (мат. устойчивость)

Система … называется **устойчивой по Ляпунову**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех начальных значений $x(0)$ из области $\|x(0)\| < \delta$ и для любых $t > 0$ выполняется $\|x(t)\| < \varepsilon$

Система … называется **неустойчивой**, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любых сколь угодно малых $\delta > 0$ найдется $x(0)$ из области $\|x(0)\| < \delta$ для которого условие $\|x(t)\| < \varepsilon$ нарушается

Система … называется **асимптотически устойчивой**, если … устойчива по Ляпунова и выполняется условие аттрактивности (притяжения) … $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$

Система … называется **экспоненциально устойчивой**, если найдутся положительные числа $\beta > 0, \alpha > 0$ такие, что для любых $t > 0$ выполняется $\|x(t)\| \le \beta e^{-\alpha t}\|x(0)\|$

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Устойчивость: определения (мат. устойчивость)

Система … называется **устойчивой по Ляпунову**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех начальных значений $x(0)$ из области $\|x(0)\| < \delta$ и для любых $t > 0$ выполняется $\|x(t)\| < \varepsilon$

Система … называется **неустойчивой**, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любых сколь угодно малых $\delta > 0$ найдется $x(0)$ из области $\|x(0)\| < \delta$ для которого условие $\|x(t)\| < \varepsilon$ нарушается

Система … называется **асимптотически устойчивой**, если … устойчива по Ляпунова и выполняется условие аттрактивности (притяжения) … $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$

Система … называется **экспоненциально устойчивой**, если найдутся положительные числа $\beta > 0, \alpha > 0$ такие, что для любых $t > 0$ выполняется $\|x(t)\| \leq \beta e^{-\alpha t}\|x(0)\|$

Эквивалентны для линейных систем

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Устойчивость: определения (тех. устойчивость)

Система … называется **нейтрально устойчивой** … если для любых $t \geq 0$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что выполняется $|y(t)| < \varepsilon$ (т.е. система остается в некоторой окрестности положения равновесия)

Система … называется **неустойчивой** для любых $\varepsilon > 0$ найдется $t^* > 0$ такое, что при $t > t^*$ имеет место $|y(t)| > \varepsilon$

Система … называется **устойчивой** если с течением времени (при $t \to \infty$) она возвращается в положение равновесия $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Устойчивость: определения (тех. устойчивость)

Система … называется **нейтрально устойчивой** … если для любых $t \geq 0$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что выполняется $|y(t)| < \varepsilon$
(т.е. система остается в некоторой окрестности положения равновесия)

Система … называется **неустойчивой** для любых $\varepsilon > 0$ найдется $t^* > 0$ такое, что при $t > t^*$ имеет место $|y(t)| > \varepsilon$

Система … называется **устойчивой** если с течением времени (при $t \to \infty$) она возвращается в положение равновесия $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$

Видны соответствия с определениями для мат. устойчивости…

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Устойчивость: определения (тех. устойчивость)

Система … называется **нейтрально устойчивой** … если для любых $t \geq 0$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что выполняется $|y(t)| < \varepsilon$
(т.е. система остается в некоторой окрестности положения равновесия)

Система … называется **неустойчивой** для любых $\varepsilon > 0$ найдется $t^* > 0$ такое, что при $t > t^*$ имеет место $|y(t)| > \varepsilon$

Система … называется **устойчивой** если с течением времени (при $t \to \infty$) она возвращается в положение равновесия $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$

Видны соответствия с определениями для мат. устойчивости…

…но эти определения противоречивы при рассмотрении **не полностью наблюдаемых** и **нелинейных** систем!

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Устойчивость: определения (тех. устойчивость)

Система … называется **нейтрально устойчивой** … если для любых $t \geq 0$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что выполняется $|y(t)| < \varepsilon$
(т.е. система остается в некоторой окрестности положения равновесия)

Система … называется **неустойчивой** для любых $\varepsilon > 0$ найдется $t^* > 0$ такое, что при $t > t^*$ имеет место $|y(t)| > \varepsilon$

Система … называется **устойчивой** если с течением времени (при $t \to \infty$) она возвращается в положение равновесия $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$

Видны соответствия с определениями для мат. устойчивости…

…но эти определения противоречивы при рассмотрении **не полностью наблюдаемых** и **нелинейных** систем!

В дальнейшем ориентируемся на мат. устойчивость, а понятие **наблюдаемости** будет во втором семестре

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Устойчивость: корневой критерий

$$e^{\lambda_j t}$$

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) = \alpha < 0$$
$$\lim_{t \to +\infty} e^{\alpha t} = 0$$

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) = \alpha = 0$$
$$\lim_{t \to +\infty} e^{\alpha t} = 1$$

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) = \alpha > 0$$
$$\lim_{t \to +\infty} e^{\alpha t} = +\infty$$

Устойчивость: корневой критерий

$$e^{\lambda_j t}$$

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) = \alpha < 0$$
$$\lim_{t\to+\infty} e^{\alpha t} = 0$$

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) = \alpha = 0$$
$$\lim_{t\to+\infty} e^{\alpha t} = 1$$

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) = \alpha > 0$$
$$\lim_{t\to+\infty} e^{\alpha t} = +\infty$$

Речь про $\mathrm{Re}(\lambda_j)$!

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\lambda_j t} = 0$$

$e^{\lambda_j t}$ ограничено

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\lambda_j t} = +\infty$$

Устойчивость: корневой критерий

$$e^{\lambda_j t}$$

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) = \alpha < 0$$
$$\lim_{t\to+\infty} e^{\alpha t} = 0$$

Устойчиво асимптотически

Все корни должны соответствовать

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) = \alpha = 0$$
$$\lim_{t\to+\infty} e^{\alpha t} = 1$$

На границе устойчивости

Без кратных корней, иначе ⇨

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) = \alpha > 0$$
$$\lim_{t\to+\infty} e^{\alpha t} = +\infty$$

Неустойчиво

Достаточно одного корня

Устойчивость: корневой критерий

$$e^{\lambda_j t}$$

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) = \alpha < 0$$
$$\lim_{t\to+\infty} e^{\alpha t} = 0$$

Устойчиво асимптотически

Все корни должны соответствовать

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) = \alpha = 0$$
$$\lim_{t\to+\infty} e^{\alpha t} = 1$$

На границе устойчивости

Без кратных корней, иначе ⇨

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) = \alpha > 0$$
$$\lim_{t\to+\infty} e^{\alpha t} = +\infty$$

Неустойчиво

Достаточно одного корня

По Ляпунову

Устойчивость: корневой критерий

Пример

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} + \dot{y} + 3 = u$$

Какой тип устойчивости системы?

Устойчивость: корневой критерий

Пример

$\dddot{y} + 3\ddot{y} + \dot{y} + 3 = u,$

$\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 3 = 0$

Какой тип устойчивости системы?

Устойчивость: корневой критерий

Пример

$\dddot{y} + 3\ddot{y} + \dot{y} + 3 = u,$

$(\lambda^2 + 1)(\lambda + 3) = 0$

Какой тип устойчивости системы?

Устойчивость: корневой критерий

Пример

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} + \dot{y} + 3 = u,$$

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda + 3) = 0,$$

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$$

Какой тип устойчивости системы?

Устойчивость: корневой критерий

Пример

$\dddot{y} + 3\ddot{y} + \dot{y} + 3 = u,$

$(\lambda^2 + 1)(\lambda + 3) = 0,$

$\mathrm{Re}(\lambda_1) = -3 < 0$

$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$

$\mathrm{Re}(\lambda_2) = \mathrm{Re}(\lambda_3) = 0$

Какой тип устойчивости системы?

Устойчивость: корневой критерий

Пример

$\dddot{y} + 3\ddot{y} + \dot{y} + 3 = u,$

$(\lambda^2 + 1)(\lambda + 3) = 0,$

$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$

Какой тип устойчивости системы?

$$\mathrm{Re}(\lambda_1) = -3 < 0$$

$$\mathrm{Re}(\lambda_2) = \mathrm{Re}(\lambda_3) = 0$$

но не кратные, а
сопряженные

$$\Downarrow$$

по Ляпунову,
но не асимптотически
(граница устойчивости)

Устойчивость: корневой критерий

$$a_n p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] + \dots + a_1 p[y] + a_0[y] = R(p)[u]$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{R(p)}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}[u] = \frac{R(p)}{Q(p)}[u]$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{R(p)}{\prod_{i=1}^{n}(p - \lambda_i)}[u]$$

Устойчивость определяется **полюсами системы**

Устойчивость: критерий Гурвица

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0, \qquad a_n > 0.$$

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

Система асимптотически устойчива в том и только в том случае, если все ведущие угловые миноры этой матрицы положительны

Все **корни** *(характеристического)* полинома имеют отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда все *n* главных миноров матрицы (**определителей Гурвица**) положительны

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»

Устойчивость: критерий Гурвица

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0, \qquad a_n > 0.$$

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

Система асимптотически устойчива в том и только в том случае, если все ведущие угловые миноры этой матрицы положительны

$$a_{n-1} > 0 \qquad \det\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{bmatrix} > 0 \qquad \det\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix} > 0 \qquad \cdots$$

Устойчивость: критерий Гурвица

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0, \qquad a_n > 0.$$

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

Система асимптотически устойчива в том и только в том случае, если все ведущие угловые миноры этой матрицы положительны

Можно чуть проще

Устойчивость: критерий Гурвица

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0, \qquad a_n > 0.$$

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

Критерий устойчивости Льенара-Шипара:
Если все коэффициенты a_i характеристического полинома системы положительны, то необходимо и достаточно, чтобы среди определителей Гурвица были положительными все ведущие угловые миноры с четными индексами или все ведущие угловые миноры с нечетными индексами

Теорема Стодолы:
Если система устойчива, то все коэффициенты a_i характеристического полинома системы строго положительны. Обратное справедливо только для систем не выше 2-го порядка

Устойчивость: критерий Гурвица

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0, \qquad a_n > 0.$$

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

Система асимптотически устойчива в том и только в том случае, если все ведущие угловые миноры этой матрицы положительны

В противном случае система не устойчива?

Устойчивость: критерий Гурвица

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0, \qquad a_n > 0.$$

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

Система асимптотически устойчива в том и только в том случае, если все ведущие угловые миноры этой матрицы положительны

В противном случае система не устойчива?

Не обязательно, ведь есть еще граничный случай (по Ляпунову, но не асимптотически)!

Устойчивость: критерий Гурвица

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0, \qquad a_n > 0.$$

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

Система имеет корни на мнимой оси, если ее определитель (последний ведущий угловой минор) равен нулю

Устойчивость: критерий Гурвица

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0, \qquad a_n > 0.$$

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

Система имеет корни на мнимой оси, если ее определитель (последний ведущий угловой минор) равен нулю

$$\det_n = \det_{n-1} \cdot a_0 = 0$$

Если $\det_{n-1} = 0$, но $a_0 \neq 0$ то говорят о чисто мнимых корнях (колебательные консервативные)

Если $a_0 = 0$, но $\det_{n-1} \neq 0$ то есть «нейтральная мода» (нулевой корень)

Устойчивость: критерий Гурвица

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0, \qquad a_n > 0.$$

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

Система имеет корни на мнимой оси, если ее определитель (последний ведущий угловой минор) равен нулю

Можно ли однозначно говорить об устойчивости по Ляпунову?

$$= \det_{n-1} \cdot a_0 = 0$$

Если $\det_{n-1} = 0$, но $a_0 \neq 0$ то говорят о чисто мнимых корнях (колебательные консервативные)

Если $a_0 = 0$, но $\det_{n-1} \neq 0$ то есть «нейтральная мода» (нулевой корень)

Устойчивость: критерий Гурвица

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0, \qquad a_n > 0.$$

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

Система имеет корни на мнимой оси, если ее определитель (последний ведущий угловой минор) равен нулю

Можно ли однозначно говорить об устойчивости по Ляпунову?

$= \det_{n-1} \cdot a_0$

Снова нет, т.к. нет охвата кратности корней

Если $\det_{n-1} = 0$, но $a_0 \neq 0$ то говорят о чисто мнимых корнях (колебательные консервативные)

Если $a_0 = 0$, но $\det_{n-1} \neq 0$ то есть «нейтральная мода» (нулевой корень)

Устойчивость: критерий Гурвица

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0, \qquad a_n > 0.$$

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

Простое правило: Гурвица стоит использовать, когда из него можно сделать однозначный вывод!

1. Либо система асимптотически устойчива (см. выше);
2. Либо система однозначно неустойчива (есть отрицательные коэффициенты a_i).

Устойчивость: критерий Гурвица

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0, \qquad a_n > 0.$$

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

Простое правило: Гурвица стоит использовать, когда из него можно сделать однозначный вывод!

1. Либо система асимптотически устойчива (см. выше);
2. Либо система однозначно неустойчива (есть отрицательные коэффициенты a_i).

Если не выполняется ни одно из этих условий, то стоит воспользоваться другими критериями устойчивости (корневой, частотные и т.д.)!

Устойчивость: использование критериев

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0, \qquad a_n > 0.$$

Когда использовать какой критерий
(из моего обучения):

1. Если порядок $n \leq 4$, то рекомендуется использовать критерий Гурвица;
2. Если порядок $n \geq 4$, то рекомендуется использовать критерий **Рауса (1877г)**;
3. *Рекомендаций по корневому критерию не было.*

Устойчивость: использование критериев

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0, \qquad a_n > 0.$$

~~*Когда использовать какой критерий (из моего обучения):*~~

1. ~~Если порядок $n \le 4$, то рекомендуется использовать критерий Гурвица;~~
2. ~~Если порядок $n \ge 4$, то рекомендуется использовать критерий **Рауса (1877г)**;~~
3. ~~*Рекомендаций по корневому критерию не было.*~~

Архаика времен, когда корни характеристического уравнения считать было тяжело. Пользовались табличками на коэффициентах характеристических уравнений (Раус, Гурвиц)

Устойчивость: использование критериев

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0, \qquad a_n > 0.$$

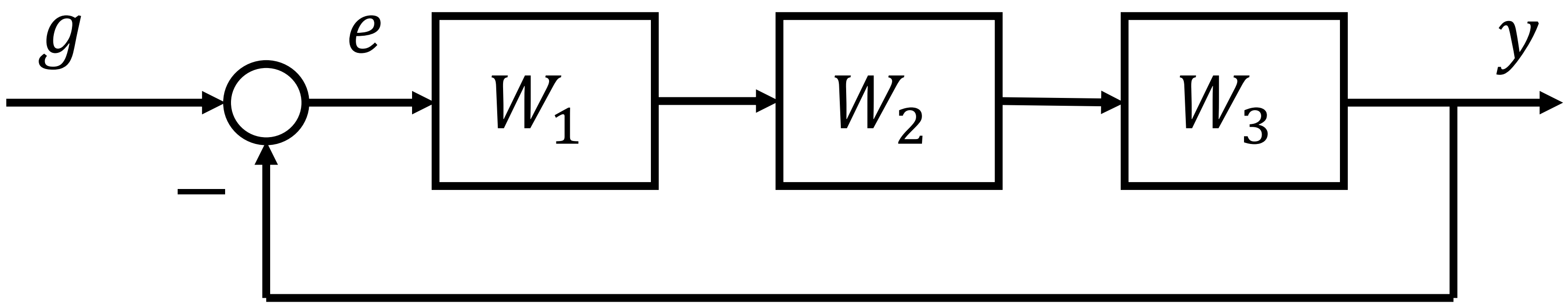
1. Корневой критерий прост и позволяет быстро и наглядно определить устойчивость системы;
2. Гурвиц в ряде случаев позволяет сразу увидеть, устойчива ли система (для малых порядков), не считая корни. Также Гурвиц полезен для определения параметрических зависимостей, влияющих на устойчивость систем (**границы устойчивости**).

Считаем, что средства к вычислению корней у нас есть!

Устойчивость: граница устойчивости

Пример:

Критический коэффициент усиления

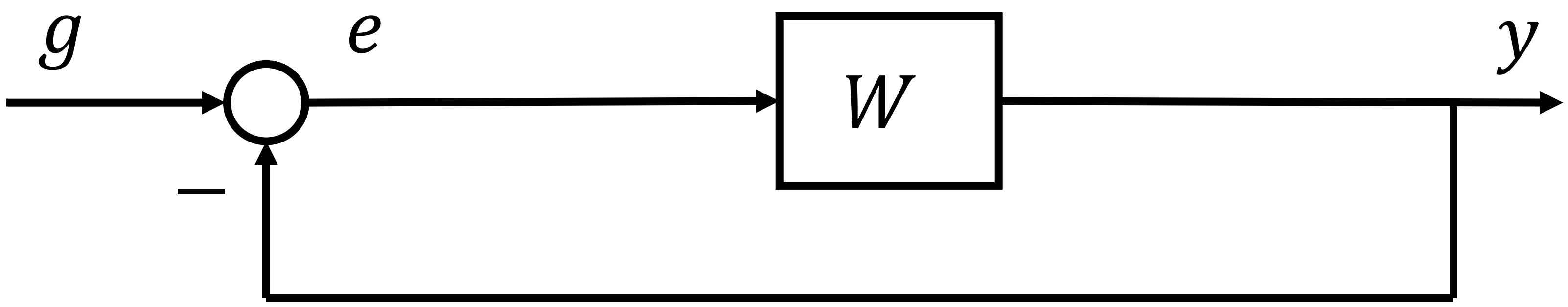


$$W_1 = \frac{K_1}{1 + pT_1},$$
$$W_2 = \frac{K_2}{1 + pT_2},$$
$$W_3 = \frac{K_3}{1 + pT_3},$$
$$T_i > 0, K_i > 0,$$
$$K_{\text{крит}} = K_1 K_2 K_3 = ?$$

при котором система останется асимптотически устойчивой

Устойчивость: граница устойчивости

Пример:
Критический коэффициент усиления



$$W = \frac{K_1 K_2 K_3}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3)},$$

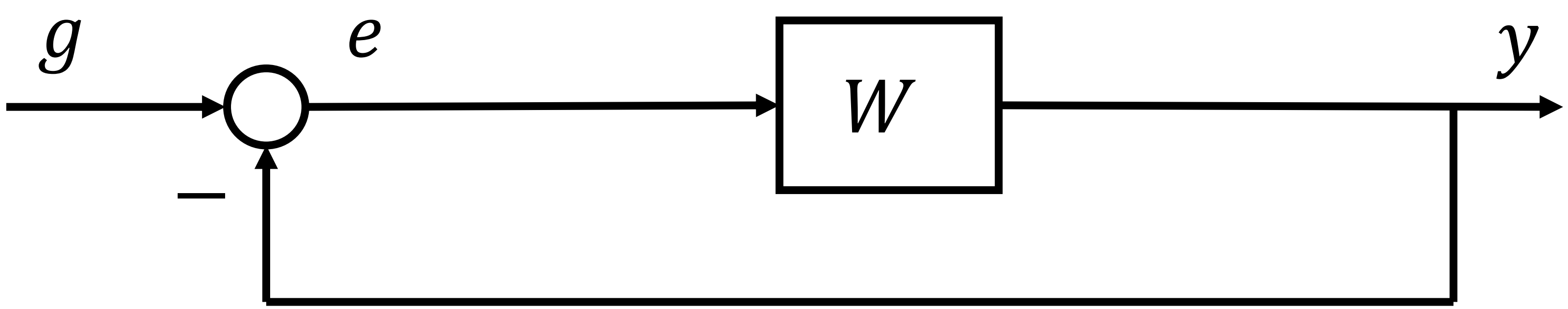
$$T_i > 0, K_i > 0,$$

$K_{\text{крит}} = K_1 K_2 K_3 = ?$
при котором система останется асимптотически устойчивой

Устойчивость: граница устойчивости

Пример:

Критический коэффициент усиления



$$W = \frac{K_1 K_2 K_3}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3)}, \quad W_з = \frac{\dots}{K_1 K_2 K_3 + (1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3)},$$

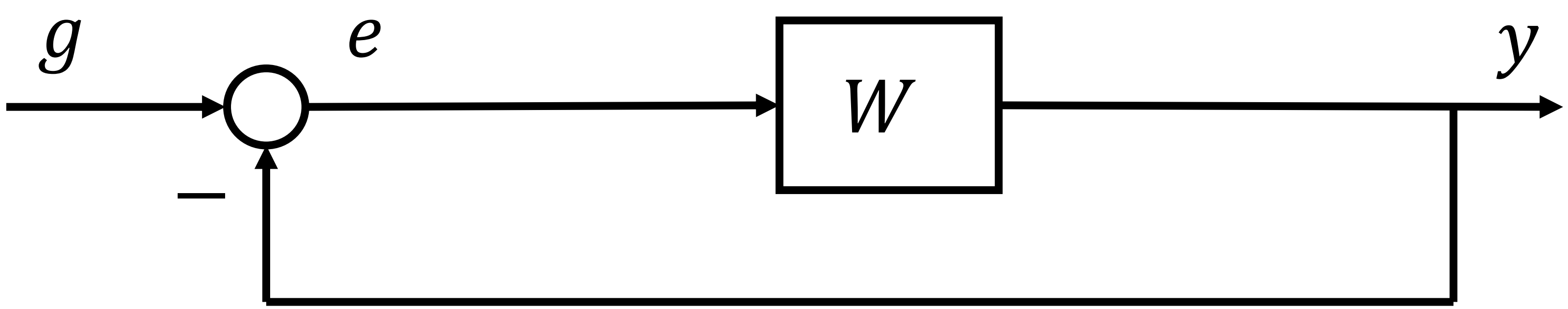
$T_i > 0, K_i > 0,$

$K_{\text{крит}} = K_1 K_2 K_3 = ?$

при котором система останется асимптотически устойчивой

Устойчивость: граница устойчивости

Пример:
Критический коэффициент усиления



$$W = \frac{K_1 K_2 K_3}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3)},$$

$$W_{\text{з}} = \frac{\dots}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0},$$

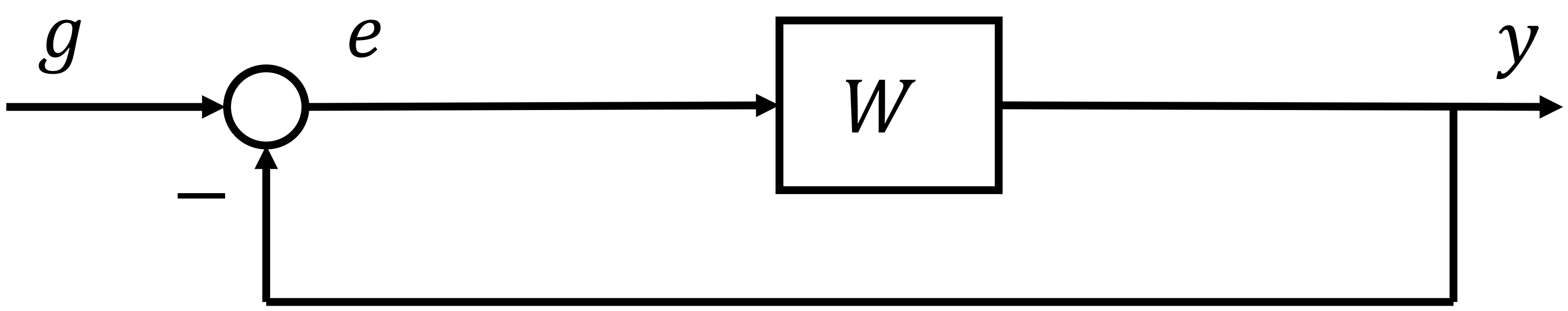
$$T_i > 0, K_i > 0,$$

$$\begin{cases} a_3 = T_1 T_2 T_3 \\ a_2 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 \\ a_1 = T_1 + T_2 + T_3 \\ a_0 = K_1 K_2 K_3 + 1 \end{cases}$$

$K_{\text{крит}} = K_1 K_2 K_3 = ?$
при котором система останется асимптотически устойчивой

Устойчивость: граница устойчивости

Пример:
Критический коэффициент усиления



$$W = \frac{K_1 K_2 K_3}{(1+pT_1)(1+pT_2)(1+pT_3)},$$

$$W_з = \frac{\dots}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0},$$

$T_i > 0, K_i > 0,$

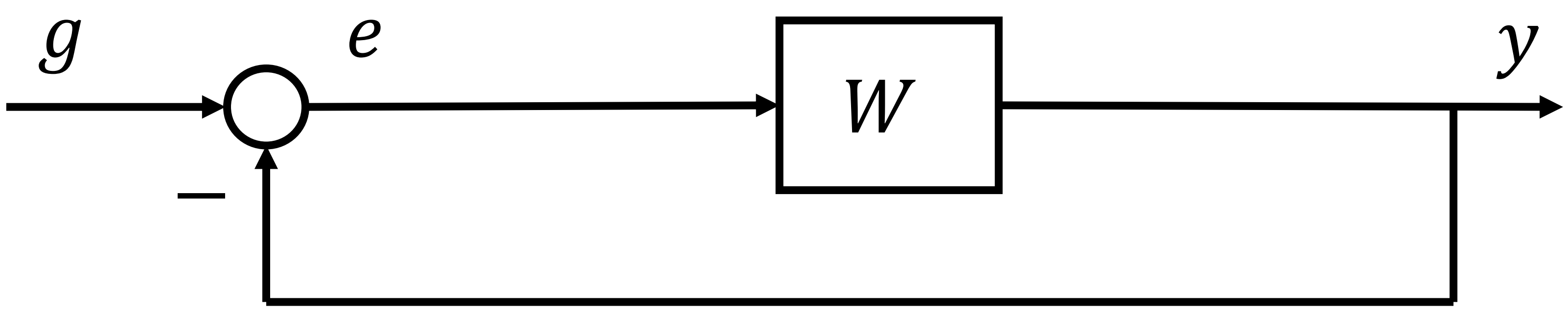
$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

Если аккуратно раскрутить критерий Гурвица…

$K_{\text{крит}} = K_1 K_2 K_3 = ?$
при котором система останется асимптотически устойчивой

Устойчивость: граница устойчивости

Пример:
 Критический
 коэффициент усиления



$$W = \frac{K_1 K_2 K_3}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3)},$$

$$W_з = \frac{\dots}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0},$$

$T_i > 0, K_i > 0,$

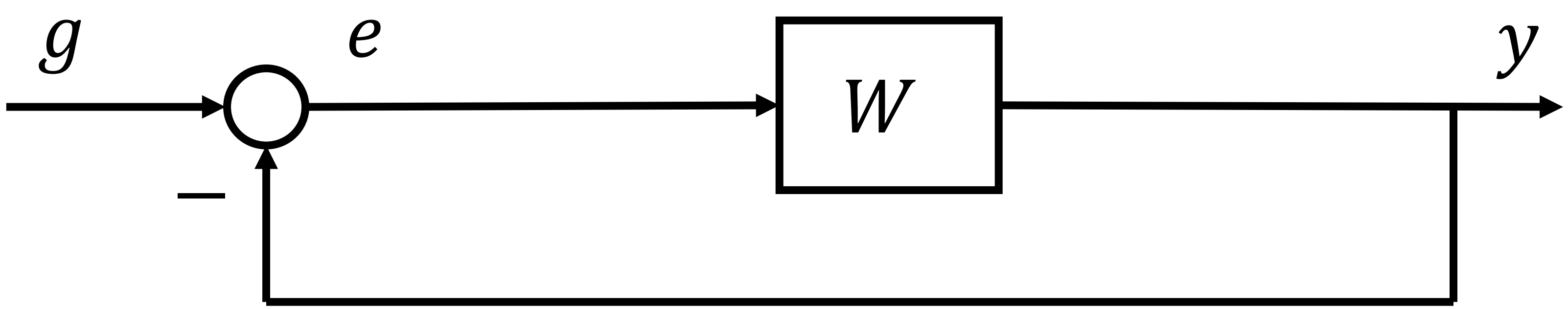
$$(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)(T_1 + T_2 + T_3) - \\ -T_1 T_2 T_3 (K_{крит} + 1) > 0$$

$K_{крит} = K_1 K_2 K_3 = ?$
при котором система останется асимптотически устойчивой

Устойчивость: граница устойчивости

Пример:

Критический коэффициент усиления



$$W = \frac{K_1 K_2 K_3}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3)},$$

$$W_з = \frac{\dots}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0},$$

$$T_i > 0, K_i > 0,$$

$$K_{крит} < \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}\right)(T_1 + T_2 + T_3) - 1$$

$K_{крит} = K_1 K_2 K_3 = ?$
при котором система останется асимптотически устойчивой

Фиксируя одни параметры системы можно смотреть диапазоны, в которых можно варьировать другие

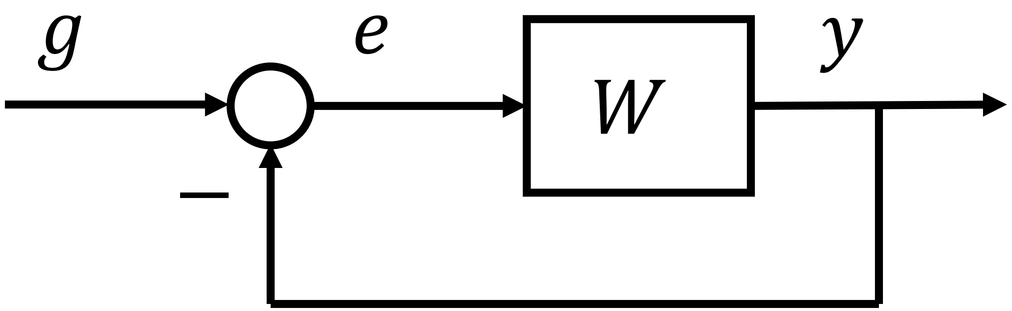
Структурная неустойчивость

... – структурное свойство замкнутой системы, при наличии которого она не может быть сделана устойчивой не при каких изменениях параметров

Структурная неустойчивость

... – структурное свойство замкнутой системы, при наличии которого она не может быть сделана устойчивой не при каких изменениях параметров

Примеры



$$W = \frac{K}{p^2 \sum_{i=1}^{n-2}(1+pT_i)},$$

Данная система не может быть сделана устойчивой не при каких изменениях параметров K и T_i.
Проверьте самостоятельно!