ИТМО

Линейные системы автоматического управления

Преобразование Лапласа

и вынужденное движение

Корневой критерий: В-С-В

То, что не было сказано на предыдущей практике…

Устойчивость: корневой критерий

$$e^{\lambda_j t}$$

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) = \alpha < 0$$
$$\lim_{t \to +\infty} e^{\alpha t} = 0$$

Устойчиво асимптотически

Все корни должны соответствовать

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) = \alpha = 0$$
$$\lim_{t \to +\infty} e^{\alpha t} = 1$$

На границе устойчивости

Без кратных корней, иначе ⇨

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) = \alpha > 0$$
$$\lim_{t \to +\infty} e^{\alpha t} = +\infty$$

Неустойчиво

Достаточно одного корня

По Ляпунову

Устойчивость: корневой критерий

$$a_n p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] + \cdots + a_1 p[y] + a_0[y] = R(p)[u]$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{R(p)}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}[u] = \frac{R(p)}{Q(p)}[u]$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{R(p)}{\prod_{i=1}^{n}(p - \lambda_i)}[u]$$

Устойчивость определяется **полюсами системы**

Устойчивость: корневой критерий

$$a_n p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] + \cdots + a_1 p[y] + a_0[y] = R(p)[u]$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{R(p)}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}[u] = \frac{R(p)}{Q(p)}[u]$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{R(p)}{\prod_{i=1}^{n}(p - \lambda_i)}[u]$$

Устойчивость определяется **полюсами системы**

Насколько **собственные числа** матрицы системы соответствуют **полюсам?**

Устойчивость: корневой критерий для В-С-В

Пример:

Система 1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Устойчивость: корневой критерий для В-С-В

Пример:

Система 1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - I\lambda\right) = 0$$

Устойчивость: корневой критерий для В-С-В

Пример:

Система 1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Устойчивость: корневой критерий для В-С-В

Пример:

Система 1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\lambda^2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = 0$$

Неустойчива по корневому критерию?

Устойчивость: корневой критерий для В-С-В

Пример:

Система 1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\lambda^2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = 0$$

Неустойчива по корневому критерию?

Система 2

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Устойчивость: корневой критерий для В-С-В

Пример:

Система 1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\lambda^2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = 0$$

Неустойчива по корневому критерию?

Система 2

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\lambda^2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = 0$$

Тоже неустойчива по корневому критерию?

Устойчивость: корневой критерий для В-С-В

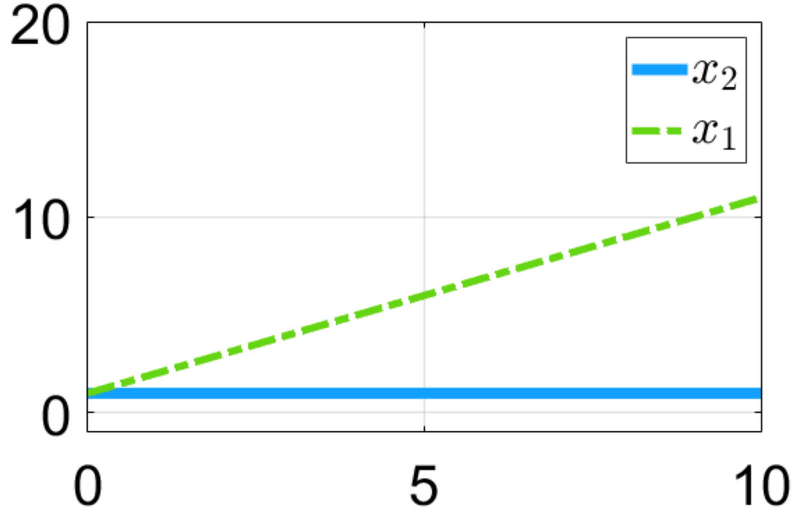
Пример:

Система 1

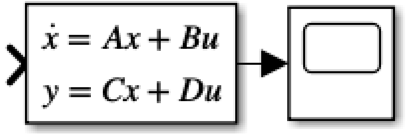
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\lambda^2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = 0$$

Неустойчива по корневому критерию?



$$u = 0,$$
$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

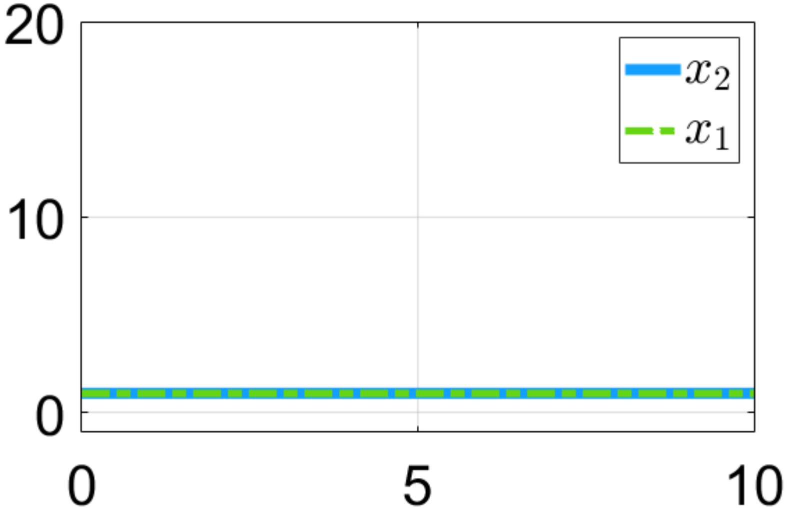


Система 2

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\lambda^2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = 0$$

Тоже неустойчива по корневому критерию?



Устойчивость: корневой критерий для В-С-В

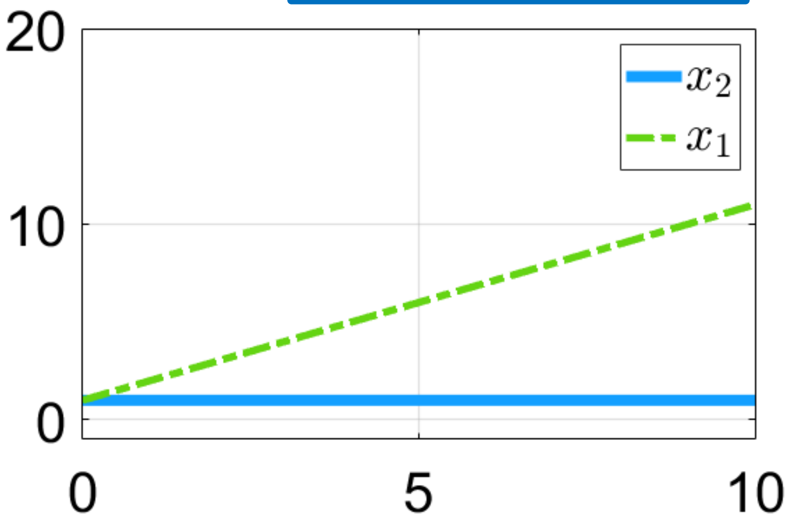
Пример:

Система 1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\lambda^2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = 0$$

Неустойчива по корневому критерию?

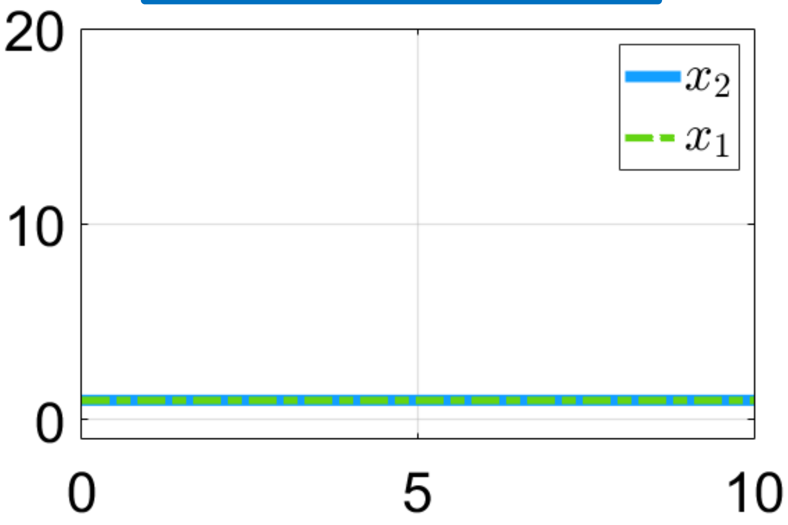


Система 2

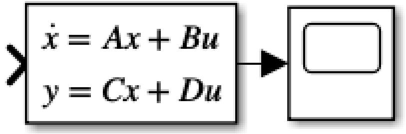
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\lambda^2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = 0$$

Тоже неустойчива по корневому критерию?



$$u = 0,$$
$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



В чем разница?

Устойчивость: корневой критерий для В-С-В

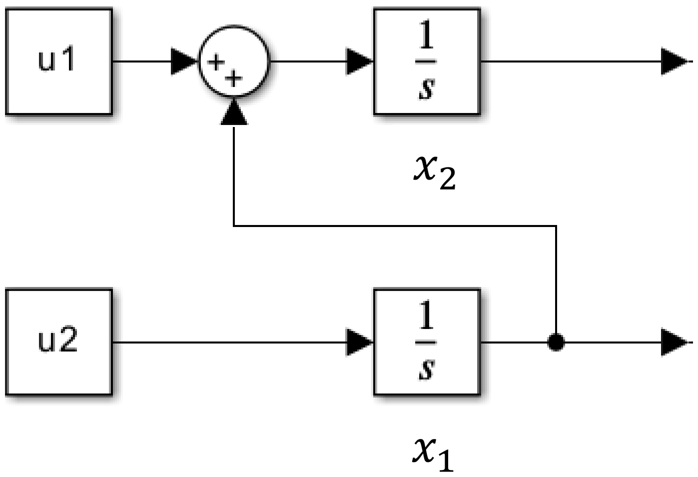
Пример:

Система 1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0$$

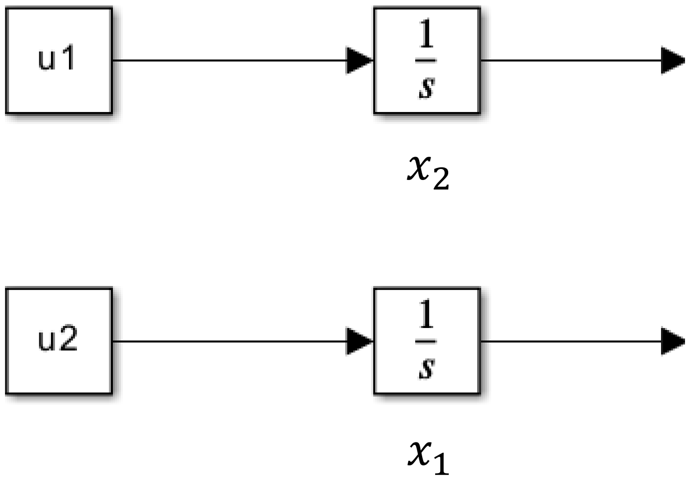


Система 2

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0$$



В чем разница?

Устойчивость: корневой критерий для В-С-В

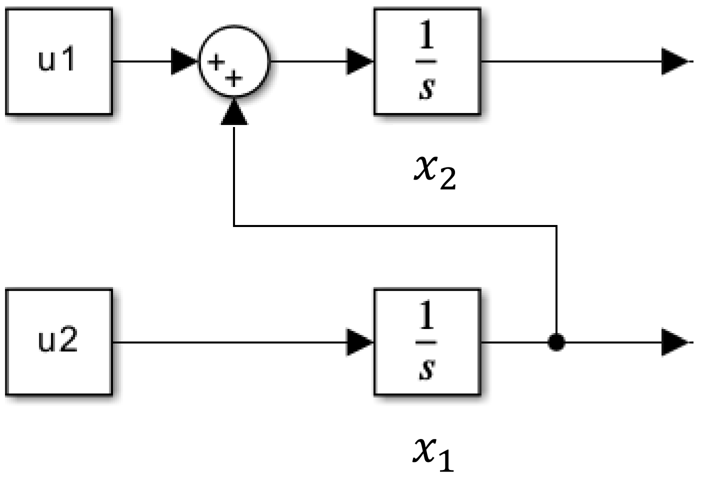
Пр

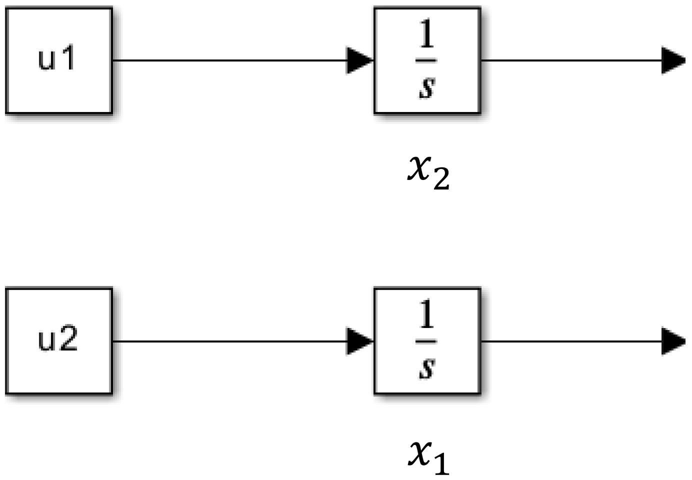
Если есть желание применять корневой критерий к собственным числам матрицы системы, то кратность корней с нулевой вещественной частью нужно рассматривать аккуратно, сопоставляя алгебраическую и геометрическую

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\lambda^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 0 \quad v_1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 0 \quad v_1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$$





Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$f(t)$ – **оригинал**, функция ***вещественного*** аргумента

$F(s)$ – **изображение**, функция ***комплексного*** аргумента

Функция $F(s)$ называется изображением для функции $f(t)$ (оригинала)

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Функция $F(s)$ называется изображением для функции $f(t)$ (оригинала)

Здесь s – это комплексная переменная, которая выбирается так, чтобы интеграл **сходился**

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для "чайников"»

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Функция $F(s)$ называется изображением для функции $f(t)$ (оригинала)

Здесь s – это комплексная переменная, которая выбирается так, чтобы интеграл **сходился**

Что это значит?

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Функция $F(s)$ называется изображением для функции $f(t)$ (оригинала)

Преобразование Лапласа определяется (*существует*) для функций ограниченного роста, таких что $f(t) \leq Me^{\alpha t}$, где M и α – постоянные и α называют показателем роста.
Для всех s, вещественная часть которых больше α, функция $f(t)e^{-st}$ затухает при $t \to \infty$ и интеграл сходится!

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Функция $F(s)$ называется изображением для функции $f(t)$ (оригинала)

Преобразование Лапласа определяется (*существует*) для функций ограниченного роста, таких что $f(t) \leq Me^{\alpha t}$, где M и α – постоянные и α называют показателем роста.
Для всех s, вещественная часть которых больше α, функция $f(t)e^{-st}$ затухает при $t \to \infty$ и интеграл сходится!

А системы у нас линейные и моды движения задаются как $e^{\lambda t}$

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Существует обратное:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}ds$$

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:
1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

Очень похоже на Фурье
(вспоминаем Частотные Методы)

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^{n} a_k F_k(s)$$

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(-0)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}(t)\} = s^2F(s) - sf(-0) - \dot{f}(-0)$$

$$\dots$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(-0)$$

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int_{0}^{t} f(x)dx\right\} = \frac{1}{s}F(s)}$$

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-\tau s}F(s)}$$

Преобразование Лапласа и его свойства

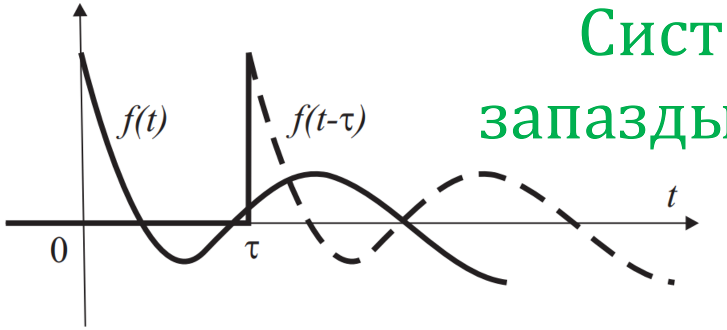
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-\tau s}F(s)}$$



Системы с запаздыванием?

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|}F\left(\frac{s}{\alpha}\right)}$$

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$$

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$f(t) * g(t) = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$$

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

Только если $F(s)$ – «асимптотически устойчивая система»!

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Некоторые изображения

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{(s-a)}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
e^{At} A – матрица	$(sI-A)^{-1}$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$e^{at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\phi)$	$\frac{s\cdot\sin(\phi)+\omega\cdot\cos(\phi)}{s^2+\omega^2}$

Генератор на основании изображения

Пример

$$Y(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \mathcal{L}\{y_{\text{св}}(t)\} + \mathcal{L}\{y_{\text{вын}}(t)\}$$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Генератор на основании изображения

Пример

$$Y(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \mathcal{L}\{y_{\text{св}}(t)\} + \underbrace{\mathcal{L}\{y_{\text{вын}}(t)\}}_{0}$$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Генератор на основании изображения

Пример

$$Y(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \mathcal{L}\{y_{\text{св}}(t)\}$$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Генератор на основании изображения

Пример

$$Y(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \left[\frac{\text{н/у}}{Q(s)}\right]$$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$s^2Y(s) - sy(-0) - \dot{y}(-0) + a_1 sY(s) - a_1 y(-0) + a_0 Y(s) = 0$$

Генератор на основании изображения

Пример

$$Y(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \left[\frac{\text{н/у}}{Q(s)}\right]$$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$s^2Y(s) + a_1 sY(s) + a_0 Y(s) = sy(-0) + \dot{y}(-0) + a_1 y(-0)$$

Генератор на основании изображения

Пример

$$Y(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} =$$

$$= \frac{sy(-0) + \dot{y}(-0) + a_1 y(-0)}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$s^2Y(s) + a_1 sY(s) + a_0 Y(s) = sy(-0) + \dot{y}(-0) + a_1 y(-0)$$

Генератор на основании изображения

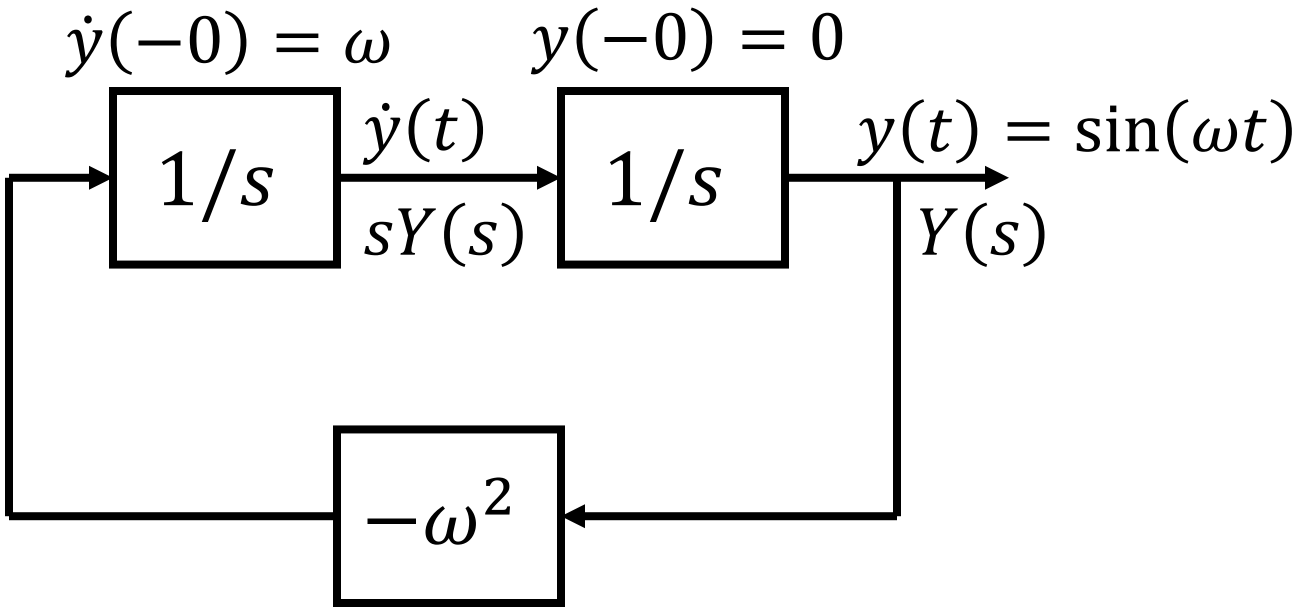
Пример

$$Y(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} =$$

$$= \frac{sy(-0) + \dot{y}(-0) + a_1 y(-0)}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_0 = \omega^2 \\ y(-0) = 0 \\ \dot{y}(-0) = \omega \end{cases}$$



Генератор на основании изображения

Пример

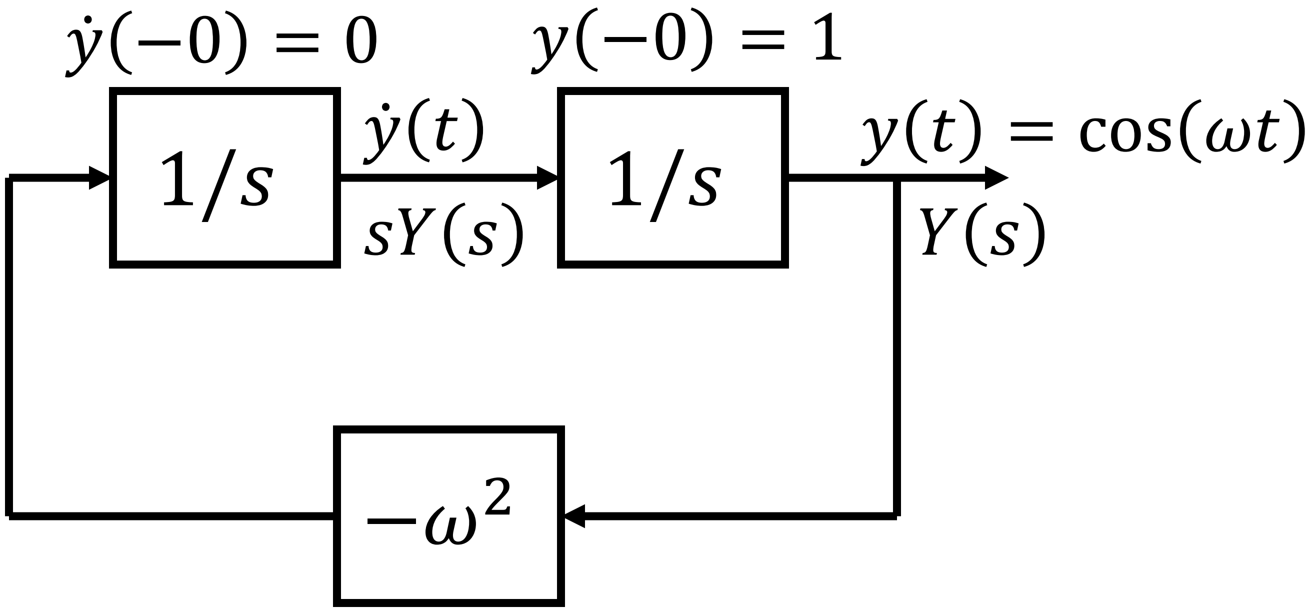
$\boxed{\text{Легко перейти к косинусу}}$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} =$$

$$= \frac{sy(-0) + \dot{y}(-0) + a_1 y(-0)}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_0 = \omega^2 \\ y(-0) = 1 \\ \dot{y}(-0) = 0 \end{cases}$$



Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

Позволяют использовать запись в образах Лапласа для ПФ

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Полная эквивалентность только при нулевых начальных условиях!

$$W(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \Leftrightarrow \quad W(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$$

$$y(t) = W(p)[u(t)]$$

Дифференциально-интегральный оператор

$$Y(s) = W(s)U(s)$$

Функция комплексной переменной

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$W(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$

$$W(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$y(t) = W(p)[u(t)]$$

Дифференциально-интегральный оператор

$$\mathcal{L}\{y_{\text{вын}}(t)\} = Y_{\text{вын}}(s)$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$$

$$Y_{\text{вын}}(s) = W(s)U(s)$$

Функция комплексной переменной

Преобразование Лапласа и его свойства

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$W(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

$$W(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$y(t) = W(p)[u(t)]$$

Дифференциально-интегральный оператор

$$\mathcal{L}\{y_{\text{вын}}(t)\} = Y_{\text{вын}}(s)$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$$

$$Y_{\text{вын}}(s) = W(s)U(s)$$

«Вынужденная составляющая переходного процесса зависит от входного воздействия и может быть аналитически определена только для ряда *частных случаев <...> типовых сигналов*»

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$\ddot{y}(t) + 9y(t) = 2\dot{u}(t)$

$u(t) = \sin 3t$

$y_{\text{вын}}(t) = ?$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + 9y(t) = 2\dot{u}(t)$$

$$u(t) = \sin 3t$$

$$y_{\text{вын}}(t) = ?$$

$$\Rightarrow \quad U(s) = \frac{3}{s^2 + 9}$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + 9y(t) = 2\dot{u}(t)$$
$$u(t) = \sin 3t$$
$$y_{\text{вын}}(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{3}{s^2 + 9},$$

$$s^2Y(s) + 9Y(s) + [\text{н/у}] = 2sU(s)$$

$Y_{\text{св}}(s)$

эта компонента нас сейчас не интересует

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$\ddot{y}(t) + 9y(t) = 2\dot{u}(t)$

$u(t) = \sin 3t$

$y_{\text{вын}}(t) = ?$

$$U(s) = \frac{3}{s^2 + 9}, \qquad s^2 Y_{\text{вын}}(s) + 9Y_{\text{вын}}(s) = 2sU(s)$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + 9y(t) = 2\dot{u}(t)$$

$$u(t) = \sin 3t$$

$$y_{\text{вын}}(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{3}{s^2 + 9}, \qquad s^2 Y_{\text{вын}}(s) + 9Y_{\text{вын}}(s) = 2sU(s)$$

$$\Downarrow$$

$$W(s) = \frac{Y_{\text{вын}}(s)}{U(s)} = \frac{2s}{s^2 + 9}$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + 9y(t) = 2\dot{u}(t)$$
$$u(t) = \sin 3t$$
$$y_{\text{вын}}(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{3}{s^2 + 9},$$

$$s^2 Y_{\text{вын}}(s) + 9Y_{\text{вын}}(s) = 2sU(s)$$

$$\Downarrow$$

$$W(s) = \frac{Y_{\text{вын}}(s)}{U(s)} = \frac{2s}{s^2 + 9}$$

$$Y_{\text{вын}}(s) = \frac{3}{s^2 + 9} \cdot \frac{2s}{s^2 + 9} = \frac{6s}{(s^2 + 9)^2}$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + 9y(t) = 2\dot{u}(t)$$
$$u(t) = \sin 3t$$
$$y_{\text{вын}}(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{3}{s^2+9}, \qquad s^2 Y_{\text{вын}}(s) + 9Y_{\text{вын}}(s) = 2sU(s)$$

$$\Downarrow$$

$$W(s) = \frac{Y_{\text{вын}}(s)}{U(s)} = \frac{2s}{s^2+9}$$

$$Y_{\text{вын}}(s) = \frac{6s}{(s^2+9)^2} = \frac{2\cdot 3\cdot s}{(s^2+3^2)^2}$$

$$y_{\text{вын}}(t) = t\sin(3t)$$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$t\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$
$$u(t) = 1(t)$$
$$y_{\text{вын}}(t) = ?$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

$$u(t) = 1(t)$$

$$y_{\text{вын}}(t) = ?$$

$$\Rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$
$$u(t) = 1(t)$$
$$y_{\text{вын}}(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{1}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$
$$u(t) = 1(t)$$
$$y_{\text{вын}}(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{1}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$$Y_{\text{вын}}(s) = \frac{1}{(s+1)^2 s}$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$
$$u(t) = 1(t)$$
$$y_{\text{вын}}(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{1}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$$Y_{\text{вын}}(s) = \frac{1}{(s+1)^2 s} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{(s+1)^2} + \frac{a_3}{s}$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \ \rightarrow e^{-t}, te^{-t}$$
$$\lambda_2 = 0 \ \rightarrow 1$$

Можно уже начать предполагать компоненты движения

Пример

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$
$$u(t) = 1(t)$$
$$y_{\text{вын}}(t) =?$$

$$U(s) = \frac{1}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$$Y_{\text{вын}}(s) = \frac{1}{(s+1)^2 s} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{(s+1)^2} + \frac{a_3}{s}$$
$$= \begin{bmatrix} a_1 = -1 \\ a_2 = -1 \\ a_3 = 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{s+1} - \frac{1!}{(s+1)^2} + \frac{1}{s}$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$
$$u(t) = 1(t)$$
$$y_{\text{вын}}(t) = ?$$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
1	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{(s-a)}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$$U(s) = \frac{1}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$$Y_{\text{вын}}(s) = \frac{1}{(s+1)^2 s} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{(s+1)^2} + \frac{a_3}{s}$$
$$= \begin{bmatrix} a_1 = -1 \\ a_2 = -1 \\ a_3 = 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{s+1} - \frac{1!}{(s+1)^2} + \frac{1}{s}$$

$$y_{\text{вын}}(t) = -e^{-t} - te^{-t} + 1$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = u(t)$$

$$u(t) = 2 \cdot 1(t)$$

$$\dot{y}(-0) = 0$$

$$y(-0) = -1$$

$$y(t) = y_{\text{св}}(t) + y_{\text{вын}}(t) = ?$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = u(t)$$
$$u(t) = 2 \cdot 1(t)$$
$$\dot{y}(-0) = 0$$
$$y(-0) = -1$$
$$y(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{2}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = u(t)$$
$$u(t) = 2 \cdot 1(t)$$
$$\dot{y}(-0) = 0$$
$$y(-0) = -1$$
$$y(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{2}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}$$

$$s^2Y(s) - sy(-0) - \dot{y}(-0) + sY(s) - y(-0) - 2Y(s) =$$
$$= U(s)$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = u(t)$$
$$u(t) = 2 \cdot 1(t)$$
$$\dot{y}(-0) = 0$$
$$y(-0) = -1$$
$$y(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{2}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}$$

$$(s^2 + s - 2)Y(s) = U(s) + sy(-0) + \dot{y}(-0) + y(-0)$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = u(t)$$
$$u(t) = 2 \cdot 1(t)$$
$$\dot{y}(-0) = 0$$
$$y(-0) = -1$$
$$y(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{2}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}$$

$$(s^2 + s - 2)Y(s) = \frac{2}{s} - s + 0 - 1$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = u(t)$$
$$u(t) = 2 \cdot 1(t)$$
$$\dot{y}(-0) = 0$$
$$y(-0) = -1$$
$$y(t) =?$$

$$U(s) = \frac{2}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}$$

$$(s^2 + s - 2)Y(s) = \frac{-s^2 - s + 2}{s}$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = u(t)$$
$$u(t) = 2 \cdot 1(t)$$
$$\dot{y}(-0) = 0$$
$$y(-0) = -1$$
$$y(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{2}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}$$

$$Y(s) = \frac{-s^2 - s + 1}{s(s^2 + s - 2)}$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = u(t)$
$u(t) = 2 \cdot 1(t)$
$\dot{y}(-0) = 0$
$y(-0) = -1$
$y(t) = ?$

$$U(s) = \frac{2}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}$$

$$Y(s) = \frac{-s^2 - s + 1}{s(s^2 + s - 2)} = -\frac{1}{s}$$

$$y(t) = -1$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = u(t)$$
$$u(t) = 2 \cdot 1(t)$$
$$\dot{y}(-0) = 0$$
$$y(-0) = -1$$
$$y(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{2}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}$$

$$Y(s) = \frac{-s^2 - s + 1}{s(s+2)(s-1)} = -\frac{1}{s}$$

$$y(t) = -1$$

Система осталась недвижима, будучи неустойчивой!

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = u(t)$$
$$u(t) = 2 \cdot 1(t)$$
$$\dot{y}(-0) = 0$$
$$y(-0) = -1$$
$$y(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{2}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}$$

$$Y(s) = \frac{-s^2 - s + 1}{s(s+2)(s-1)} = -\frac{1}{s}$$

$$y(t) = -1$$

$$Y_{\text{св}}(s) = \frac{-s-1}{(s+2)(s-1)}$$
$$Y_{\text{вын}}(s) = \frac{2}{s(s+2)(s-1)}$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = u(t)$$
$$u(t) = 2 \cdot 1(t)$$
$$\dot{y}(-0) = 0$$
$$y(-0) = -1$$
$$y(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{2}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}$$

$$Y(s) = \frac{-s^2 - s + 1}{s(s+2)(s-1)} = -\frac{1}{s}$$

$$y(t) = -1$$

$$Y_{\text{св}}(s) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s-1}$$
$$Y_{\text{вын}}(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s-1}$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = u(t)$$
$$u(t) = 2 \cdot 1(t)$$
$$\dot{y}(-0) = 0$$
$$y(-0) = -1$$
$$y(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{2}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}$$

$$Y(s) = \frac{-s^2 - s + 1}{s(s+2)(s-1)} = -\frac{1}{s}$$

$$y(t) = -1$$

$$y_{\text{св}}(t) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-2t} - \frac{2}{3} \cdot e^{t}$$

$$y_{\text{вын}}(s) = -1 + \frac{1}{3} \cdot e^{-2t} + \frac{2}{3} \cdot e^{t}$$

Движение: свободное, вынужденное, полное

Пример

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = u(t)$$
$$u(t) = 2 \cdot 1(t)$$
$$\dot{y}(-0) = 0$$
$$y(-0) = -1$$
$$y(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{2}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}$$

$$Y(s) = \frac{-s^2 - s + 1}{s(s+2)(s-1)} = -\frac{1}{s}$$

$$y(t) = -1$$

$$y_{\text{св}}(t) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-2t} - \frac{2}{3} \cdot e^{t}$$
$$y_{\text{вын}}(s) = -1 + \frac{1}{3} \cdot e^{-2t} + \frac{2}{3} \cdot e^{t}$$

Движение: В-С-В

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, x(0) \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
e^{At} A – матрица	$(sI - A)^{-1}$

$$y(t) = y_{\text{св}}(t) + y_{\text{вын}}(t)$$

$$Y_{\text{св}}(s) = C(sI - A)^{-1}x(0)$$

Движение: В-С-В

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, x(0) \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$y(t) = y_{\text{св}}(t) + y_{\text{вын}}(t)$$

$$Y_{\text{св}}(s) = C(sI - A)^{-1}x(0)$$

$$y_{\text{вын}}(t) = Ce^{At} * Bu(t) + Du(t)$$

$$\Downarrow$$

$$Y_{\text{вын}}(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

$$y_{\text{вын}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{\text{вын}}(s)\}$$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
e^{At} A – матрица	$(sI - A)^{-1}$

Движение: В-С-В

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
e^{At} A – матрица	$(sI - A)^{-1}$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, x(0) \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$y(t) = y_{\text{св}}(t) + y_{\text{вын}}(t)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

$$y_{\text{вын}}(t) = Ce^{At} * Bu(t) + Du(t)$$

$$\Downarrow$$

$$Y_{\text{вын}}(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

$$y_{\text{вын}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{\text{вын}}(s)\}$$

Движение: В-С-В

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u(t) = 1(t),$$

$$y(t) = ?$$

Движение: В-С-В

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u(t) = 1(t),$$

$$y(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{1}{s},$$

Движение: В-С-В

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u(t) = 1(t),$$

$$y(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{1}{s},$$

$$C(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \end{bmatrix},$$

Движение: В-С-В

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u(t) = 1(t),$$

$$y(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{1}{s},$$

$$C(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{(s+1)^2},$$

Пример

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0,$

$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u(t) = 1(t),$

$y(t) = ?$

$$U(s) = \frac{1}{s},$$

$$C(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{(s+1)^2},$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} x(0) + W(s)U(s)$$

Движение: В-С-В

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u(t) = 1(t),$$

$$y(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{1}{s},$$

$$C(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{(s+1)^2},$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{s(s+1)^2} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s+1)^2}$$

Движение: В-С-В

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0,$$
$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u(t) = 1(t),$$
$$y(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{1}{s},$$

$$C(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{(s+1)^2},$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{s(s+1)^2} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s+1)^2} =$$

$$= \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{(s+1)^2} + \frac{a_3}{s} = \begin{bmatrix} a_1 = -1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s}$$

Движение: В-С-В

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$C = [1 \quad 0], D = 0,$$
$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u(t) = 1(t),$$
$$y(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{1}{s},$$
$$C(sI - A)^{-1} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2} [s+3 \quad 2],$$
$$W(s) = C(sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{(s+1)^2},$$
$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} [s+3 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{s(s+1)^2} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s+1)^2} =$$
$$= \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{(s+1)^2} + \frac{a_3}{s} = \begin{bmatrix} a_1 = -1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s}$$
$$y(t) = -e^{-t} + 2 \cdot 1(t)$$

Движение: В-С-В

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 0], D = 0,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u(t) = 1(t),$$

$$y(t) = ?$$

Одна из мод движения, присущих системе, при данных н/у и управлении себя не проявляет

$$U(s) = \frac{1}{s},$$

$$C(sI - A)^{-1} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2}[s+3 \quad 2],$$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{(s+1)^2},$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}[s+3 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{s(s+1)^2} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s+1)^2} =$$

$$= \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{(s+1)^2} + \frac{a_3}{s} = \begin{bmatrix} a_1 = -1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s}$$

$$y(t) = -e^{-t} + 2 \cdot 1(t)$$

Регулярные сигналы

«Вынужденная составляющая переходного процесса зависит от входного воздействия и может быть аналитически определена только для ряда *частных случаев <…> типовых сигналов*»

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Регулярные сигналы

«Вынужденная составляющая переходного процесса зависит от входного воздействия и может быть аналитически определена только для ряда *частных случаев <…> типовых сигналов*»

«Наиболее распространенными сигналами являются *единичный скачок*, *дельта-функция* и *гармоническое входное воздействие*»

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Регулярные сигналы

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{(s-a)}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
e^{At} A – матрица	$(sI-A)^{-1}$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$e^{at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\phi)$	$\frac{s\cdot\sin(\phi)+\omega\cdot\cos(\phi)}{s^2+\omega^2}$

Регулярные сигналы

Полезны при исследовании систем входные воздействия

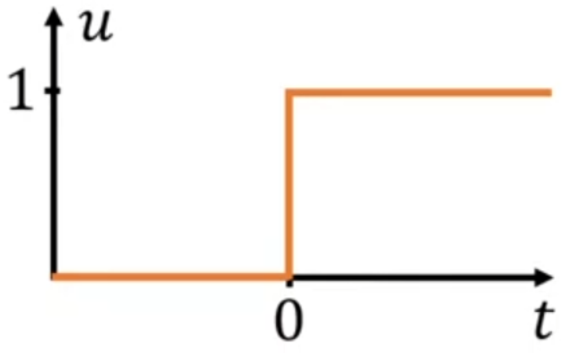
$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{(s-a)}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
e^{At} A – матрица	$(sI-A)^{-1}$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$e^{at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\phi)$	$\frac{s\cdot\sin(\phi)+\omega\cdot\cos(\phi)}{s^2+\omega^2}$

Регулярные сигналы

Функция Хевисайда

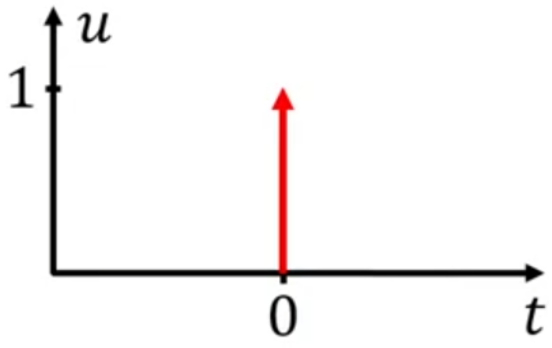
$$u(t) = 1(t)$$



$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Функция Дирака

$$u(t) = \delta(t)$$



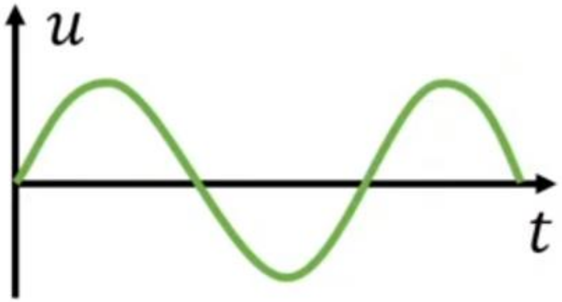
$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int \delta(t) dt = 1$$

$$\left(1(t)\right)' = \delta(t)$$

Гармонический сигнал

$$u(t) = a \sin(\omega t + \phi)$$

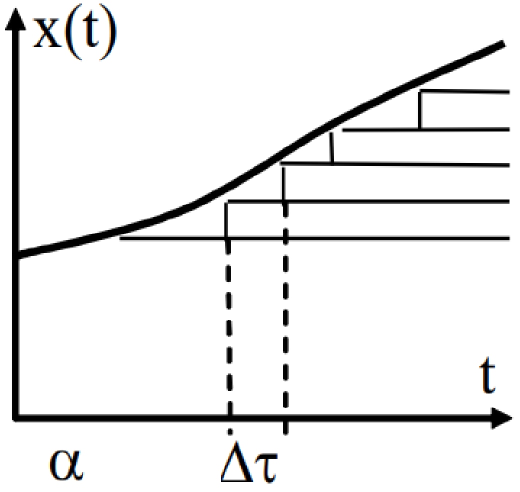


В электротехнике часто пишут $u(t) = Ae^{i(\omega t + \phi)}$

Регулярные сигналы

Функция Хевисайда

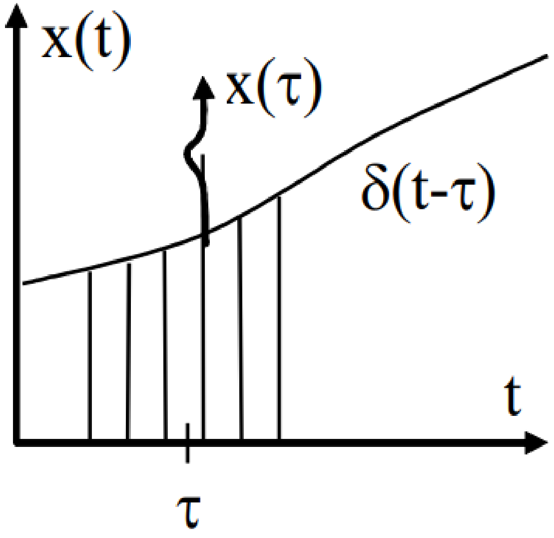
$$u(t) = 1(t)$$



$$x(t) = x(0)\cdot 1(t) + \\ + \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau}\cdot 1(t-\tau)d\tau$$

Функция Дирака

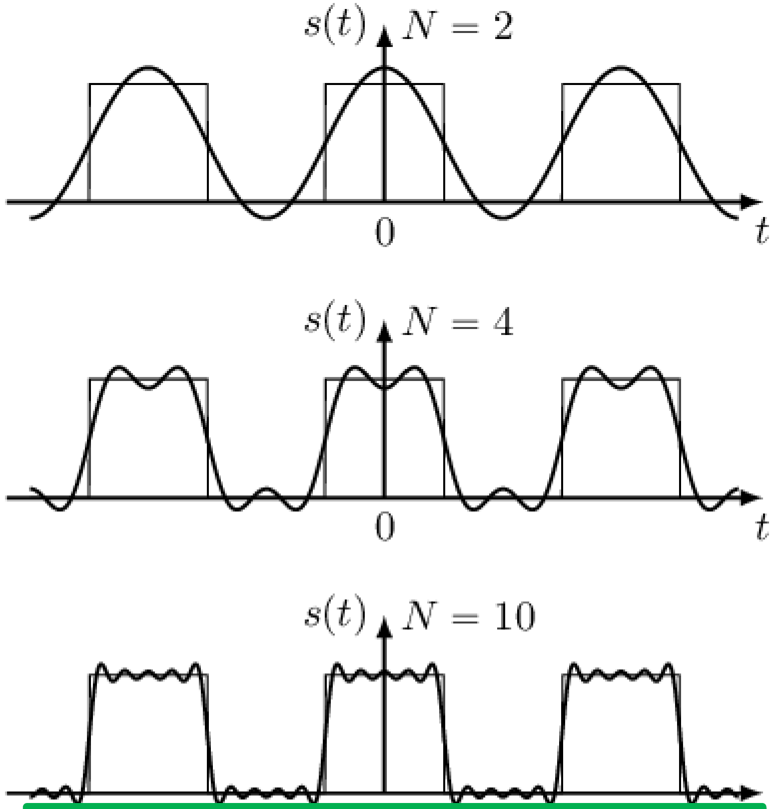
$$u(t) = \delta(t)$$



$$x(t) = \\ = \int_0^t x(\tau)\cdot 1(t-\tau)d\tau$$

Гармонический сигнал

$$u(t) = a\sin(\omega t + \phi)$$

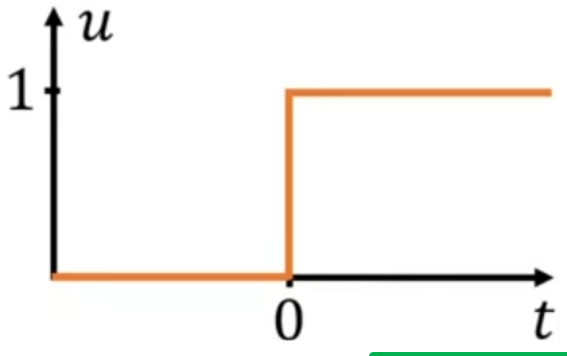


Ряды Фурье, вспоминаем ЧМ

Регулярные сигналы

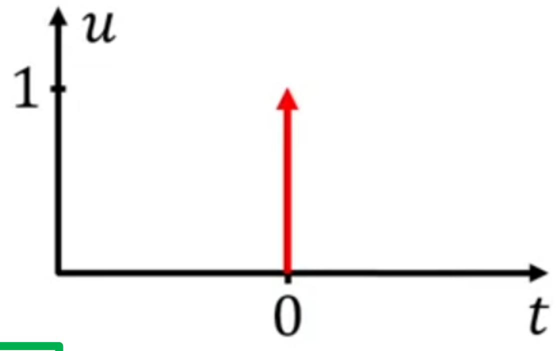
Функция Хевисайда

$$u(t) = 1(t)$$



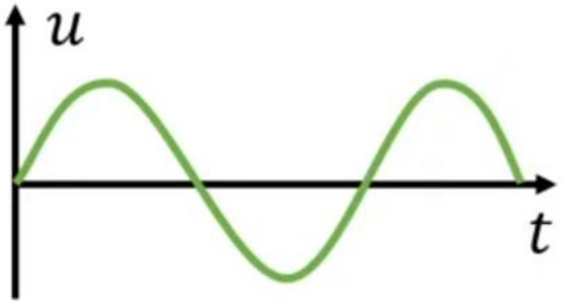
Функция Дирака

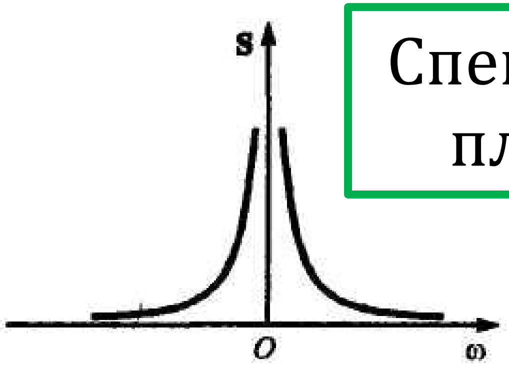
$$u(t) = \delta(t)$$



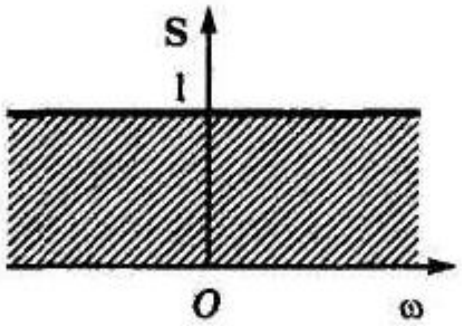
Гармонический сигнал

$$u(t) = a\sin(\omega t + \phi)$$





Спектральные плотности

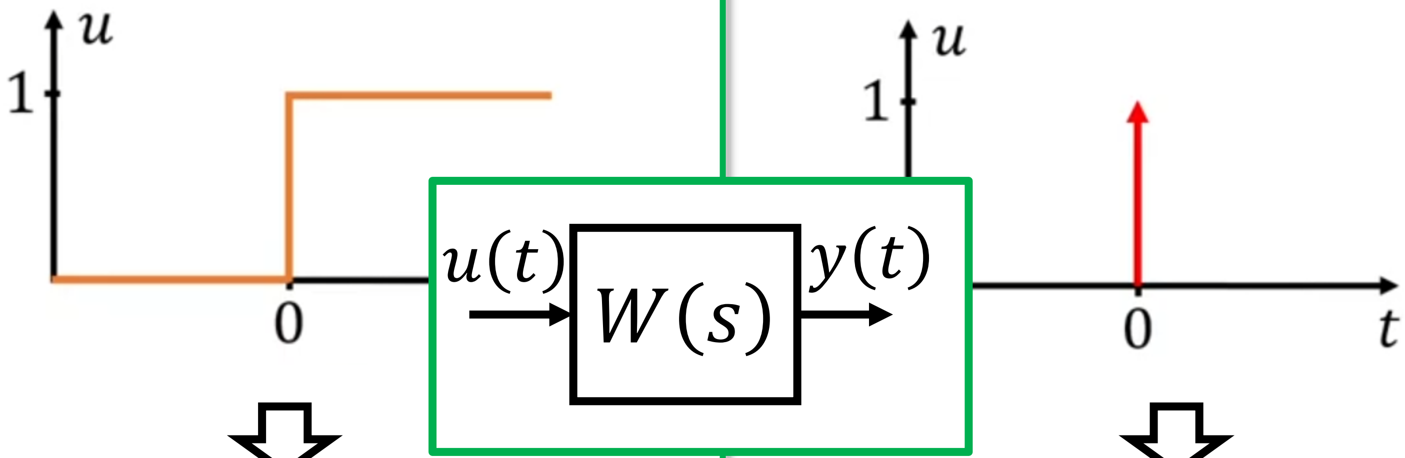


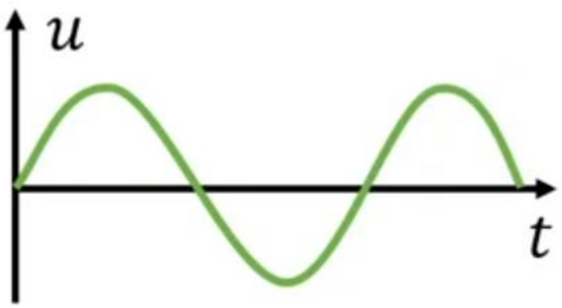
Частоты от самых малых до очень больших

Конкретная частота ω

Регулярные сигналы

Функция Хевисайда	Функция Дирака	Гармонический сигнал
$u(t) = 1(t)$	$u(t) = \delta(t)$	$u(t) = a\sin(\omega t + \phi)$





Переходная функция

$y(t) = h(t)\ \left(\text{или } y_{s.r.}(t)\right)$

$\mathcal{L}\{h(t)\} = W(s)/s$

Весовая функция

$y(t) = w(t)\ \left(\text{или } y_{i.r.}(t)\right)$

$\mathcal{L}\{w(t)\} = W(s)$

$\boxed{\dot{h}(t) = w(t)}$

Частотные характеристики

Регулярные сигналы

Переходной функцией (характеристикой) системы $y(t) = h(t)$ называется переходной процесс при нулевых начальных условиях и воздействию на ее вход единичной ступенчатой функции $u(t) = 1(t)$

Весовой функцией (характеристикой) системы $y(t) = w(t)$ называется переходной процесс при нулевых начальных условиях и воздействию на ее вход единичной импульсной функции $u(t) = \delta(t)$

Регулярные сигналы

Переходной функцией (характеристикой) системы $y(t) = h(t)$ называется переходной процесс при нулевых начальных условиях и воздействию на ее вход единичной ступенчатой функции $u(t) = 1(t)$

Весовой функцией (характеристикой) системы $y(t) = w(t)$ называется переходной процесс при нулевых начальных условиях и воздействию на ее вход единичной импульсной функции $u(t) = \delta(t)$

Иногда делают разницу:

- <…> функция – формула;
- <…> характеристика – график.

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Регулярные сигналы

Переходной функцией (характеристикой) системы $y(t) = h(t)$ называется переходной процесс при нулевых начальных условиях и воздействию на ее вход единичной ступенчатой функции $u(t) = 1(t)$

Весовой функцией (характеристикой) системы $y(t) = w(t)$ называется переходной процесс при нулевых начальных условиях и воздействию на ее вход единичной импульсной функции $u(t) = \delta(t)$

Иногда делают разницу:

- <...> функция – формула;
- <...> характеристика – график.

А частотные характеристики будем рассматривать через пару лекций (а что-то уже было изучено на Частотных методах)…

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Показатели качества систем управления

Показатели качества

1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. …

Продолжать можно, например **интегральными оценками качества**, но это более сложная тема, относящаяся к оптимальному управлению

Показатели качества систем управления

Показатели качества

1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. …

Качественно оценивают только асимптотически устойчивые системы!

Показатели качества систем управления

Показатели качества
1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. …

Качественно оценивают только асимптотически устойчивые системы!

Корневые (косвенные) показатели качества

1. Степень устойчивости – положительное число, соответствующее расстоянию от мнимой оси до ближайшего к ней корня (*полюса*)

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

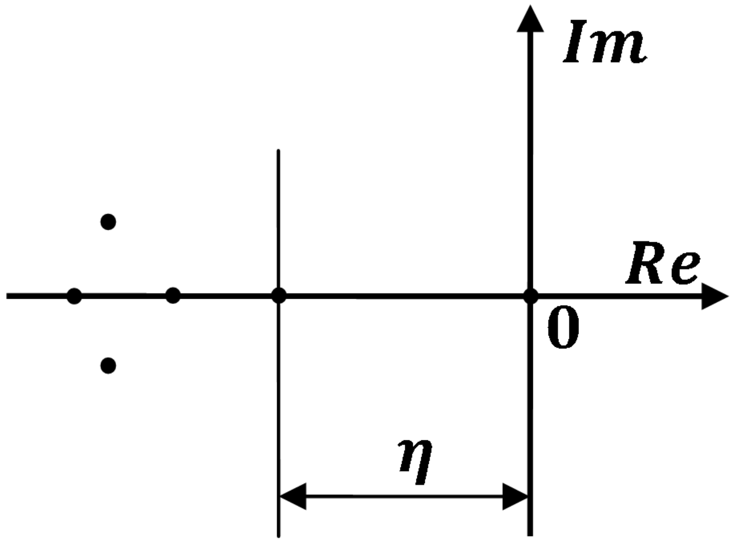
Показатели качества систем управления

Показатели качества
1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. …

Качественно оценивают только асимптотически устойчивые системы!

Корневые (косвенные) показатели качества
1. Степень устойчивость
2. Степень колебательности
3. …

$$W(s) = \frac{R(s)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\lambda_k)}$$



$$\eta = \min_k |Re(\lambda_k)|, \qquad k = \overline{1,n}$$

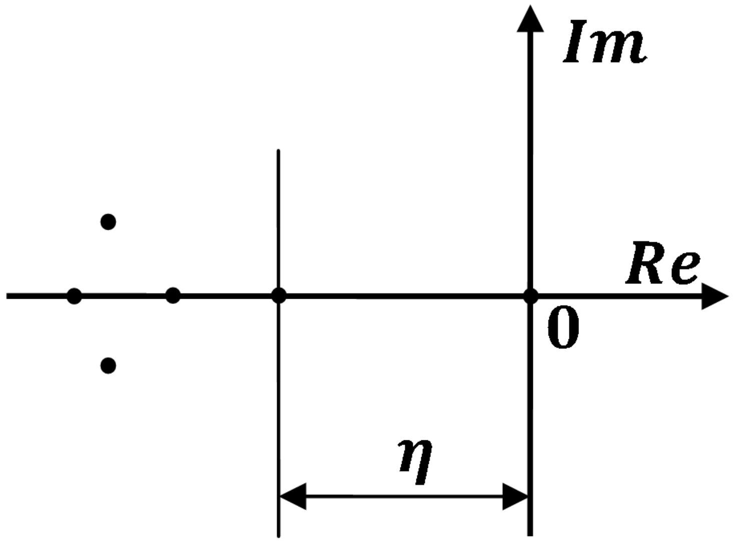
Показатели качества систем управления

Показатели качества
1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. …

Самая медленно сходящаяся мода, быстрее система не успокоится

Корневые (косвенные) показатели качества
1. Степень устойчивость
2. Степень колебательности
3. …

$$W(s) = \frac{R(s)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\lambda_k)}$$



$$\eta = \min_k |Re(\lambda_k)|, \qquad k = \overline{1,n}$$

Показатели качества систем управления

Показатели качества

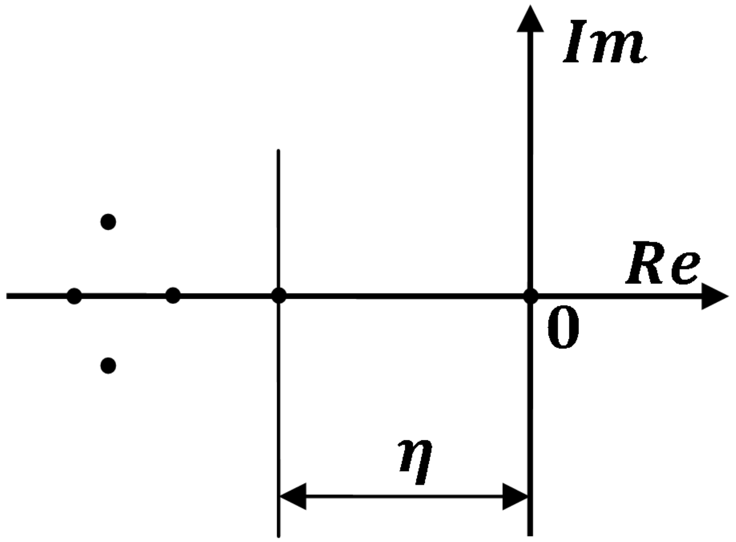
1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. …

Чем устойчивее система, тем менее она подвижна!

Корневые (косвенные) показатели качества

1. Степень устойчивость
2. Степень колебательности
3. …

$$W(s) = \frac{R(s)}{\prod_{k=1}^{n}(s - \lambda_k)}$$



$$\eta = \min_k |Re(\lambda_k)|, \qquad k = \overline{1,n}$$

Показатели качества систем управления

Показатели качества
1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. …

Корневые (косвенные) показатели качества
1. Степень устойчивость

2. Выделим сектор, в котором расположены полюса устойчивой системы и рассмотрим крайние корни (*полюса*), лежащие на границах сектора

Степень колебательности – положительное число, соответствующее отношению модуля мнимой части к модулю вещественной этих крайних корней (*полюсов*)

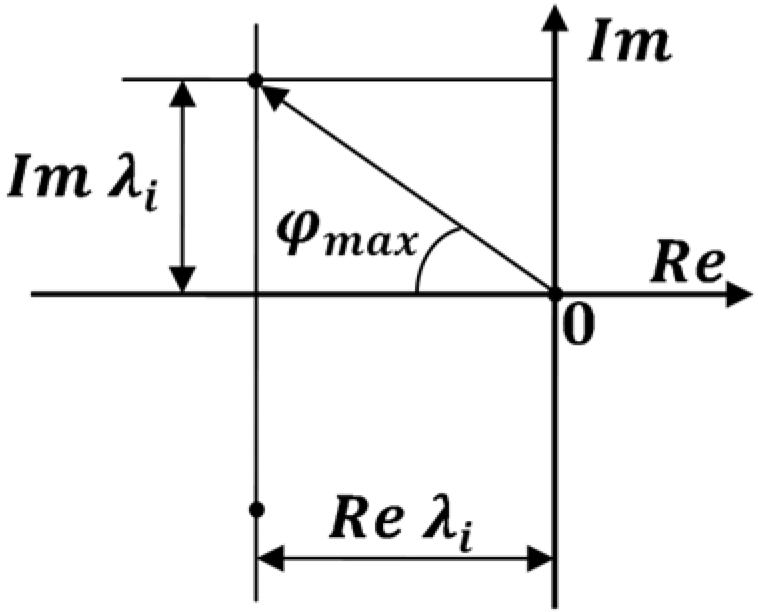
Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Показатели качества систем управления

Показатели качества
1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. …

Корневые (косвенные) показатели качества
1. Степень устойчивость
2. Степень колебательности
3. …

$$W(s) = \frac{R(s)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\lambda_k)}$$



$$\mu = \max_k \left|\frac{Im(\lambda_k)}{Re(\lambda_k)}\right| = \operatorname{tg}\varphi_{max}\,, \qquad k = \overline{1,n}$$

Показатели качества систем управления

Показатели качества

1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. …

Динамические (прямые) показатели качества (оцениваются по переходной характеристике)

1. Перерегулирование
2. Время переходного процесса
3. …

Есть еще «колебательность», «логарифмический декремент затухания» и т.д.

Показатели качества систем управления

Показатели качества

1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. …

«Мгновенное устранение начального рассогласования в реальных системах оказывается невозможным в силу ограничений, накладываемых на управляющие воздействия.»

Динамические (прямые) показатели качества (оцениваются по переходной характеристике)

1. Перерегулирование
2. Время переходного процесса
3. …

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Показатели качества систем управления

Показатели качества
1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. …

Динамические (прямые) показатели качества (оцениваются по переходной характеристике)

1. Перерегулирование – это относительное значение величины максимального выброса переходной характеристики

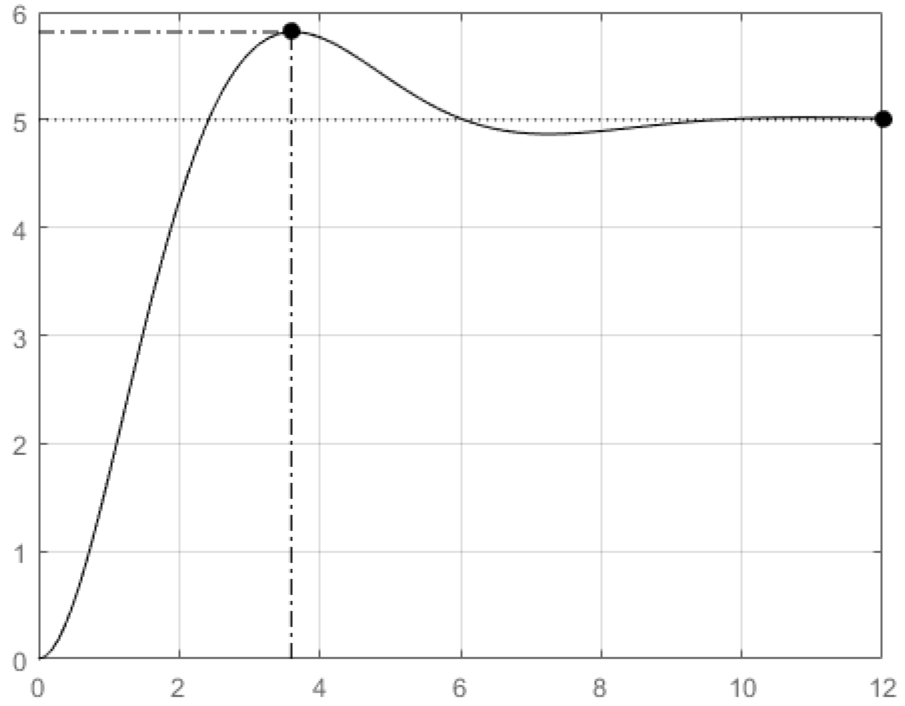
Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Показатели качества систем управления

Показатели качества
1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. …

Динамические (прямые) показатели качества (оцениваются по переходной характеристике)
1. Перерегулирование
2. Время переходного процесса
3. …

$$\sigma = \frac{|y_{max} - y_{\text{уст}}|}{|y_{\text{уст}}|}\%$$



Показатели качества систем управления

Показатели качества

1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. …

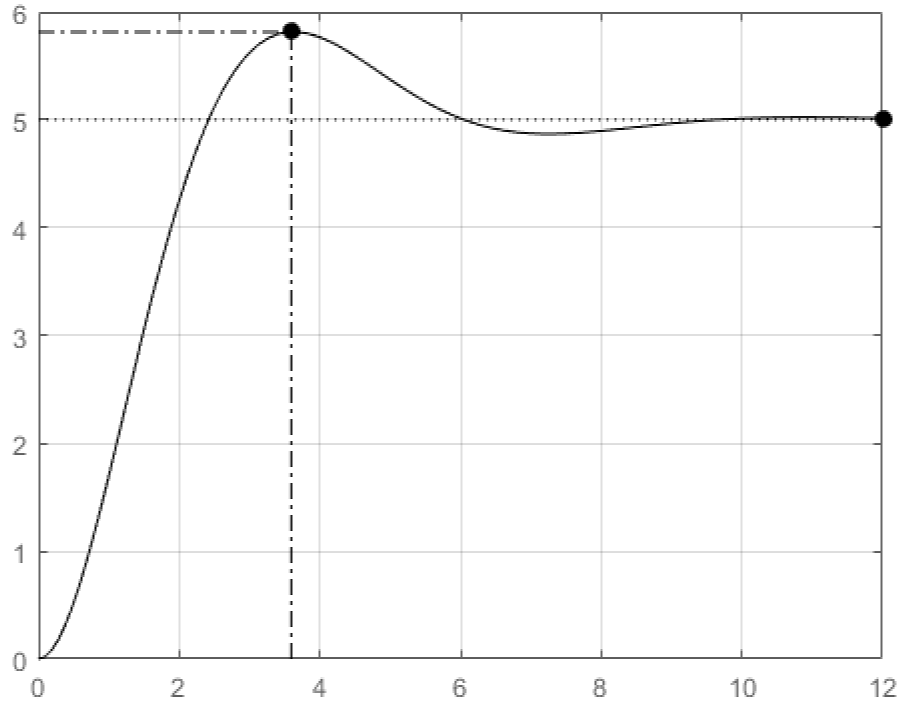
Связь со степенью колебательности

$$\sigma < \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{\mu}}$$

Динамические (прямые) показатели качества (оцениваются по переходной характеристике)

1. Перерегулирование
2. Время переходного процесса
3. …

$$\sigma = \frac{|y_{max} - y_{\text{уст}}|}{|y_{\text{уст}}|}\%$$



Показатели качества систем управления

Показатели качества
1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. …

Динамические (прямые) показатели качества (оцениваются по переходной характеристике)
1. Перерегулирование

2. Время переходного процесса – это интервал времени, после которого переходная характеристика попадает в заданную окрестность установившегося значения и не покидает ее

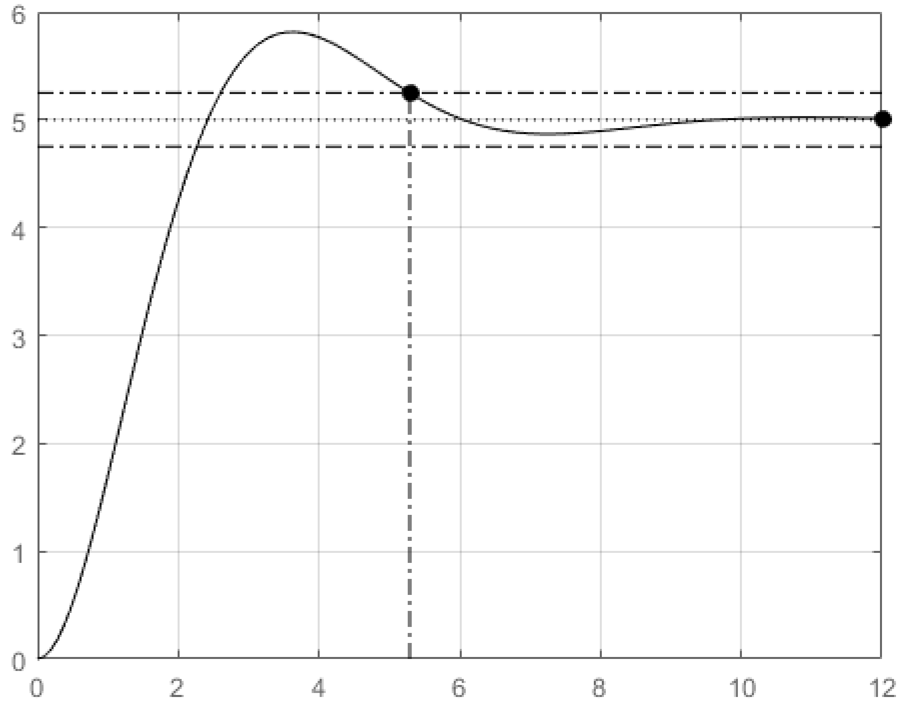
Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Показатели качества систем управления

Показатели качества
1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. …

Динамические (прямые) показатели качества (оцениваются по переходной характеристике)
1. Перерегулирование
2. Время переходного процесса
3. …

$$|y_{s.r.}(t) - y_{\text{уст}}| < \Delta_{\Pi} \text{ при } t_{\Pi} > t,$$
$$\Delta_{\Pi} = y_{\text{уст}}(2 \div 5)\%$$



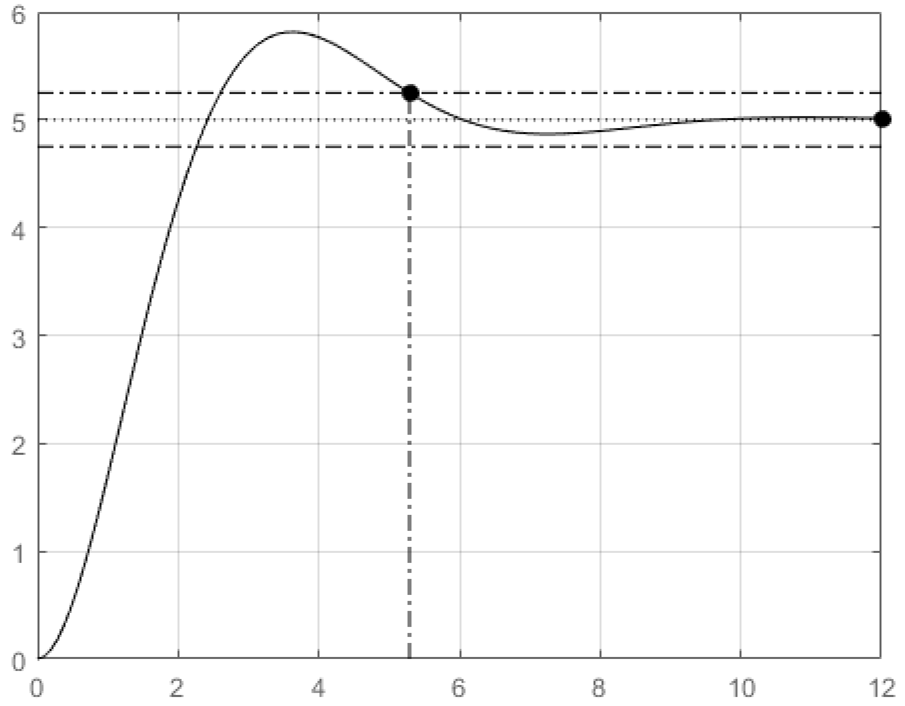
Показатели качества систем управления

Показатели качества
1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. …

Для разных задач используют различные окрестности

Динамические (прямые) показатели качества (оцениваются по переходной характеристике)
1. Перерегулирование
2. Время переходного процесса
3. …

$$\left|y_{s.r.}(t) - y_{\text{уст}}\right| < \Delta_{\Pi} \text{ при } t_{\Pi} > t,$$
$$\Delta_{\Pi} = y_{\text{уст}}(2 \div 5)\%$$

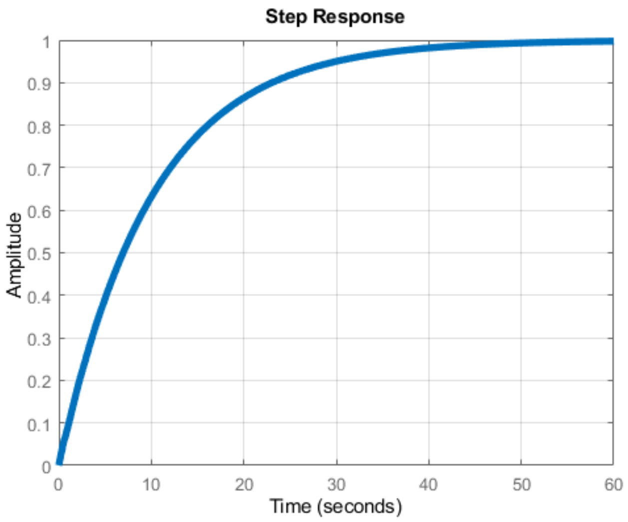


Переходная характеристика и расположение полюсов

Динамические (прямые) показатели качества (оцениваются по переходной характеристике)

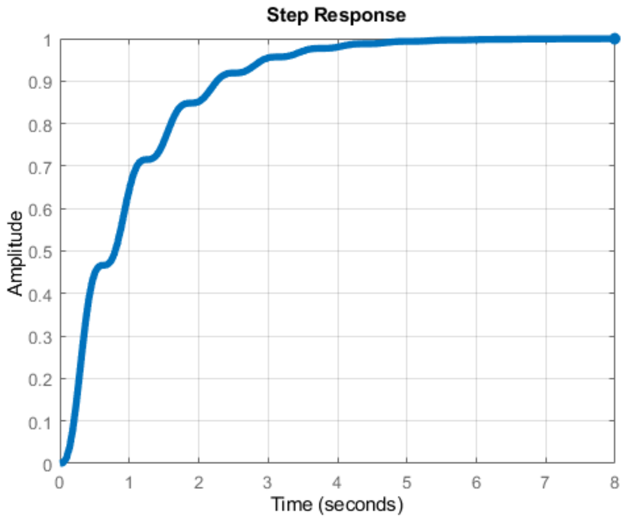
1. Перерегулирование
2. Время переходного процесса
3. …

$$W(s) = \frac{\prod_{k=1}^{3}|\lambda_k|}{\prod_{k=1}^{3}(s-\lambda_k)}$$



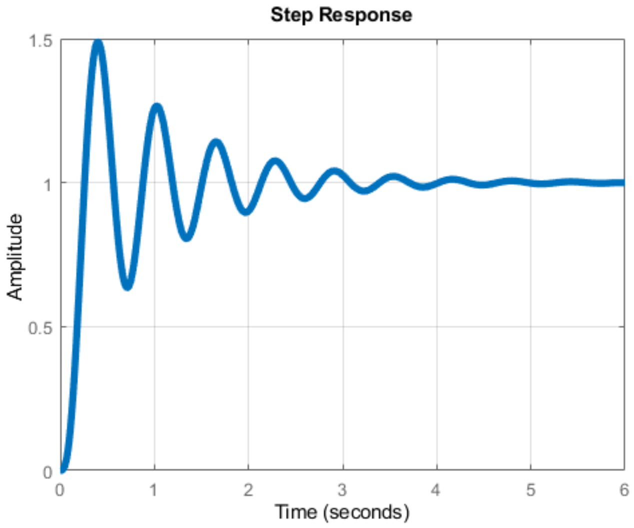
$\lambda_1 = -0.1$

$\lambda_{2,3} = -1 \pm 10i$



$\lambda_1 = -1$

$\lambda_{2,3} = -1 \pm 10i$



$\lambda_1 = -10$

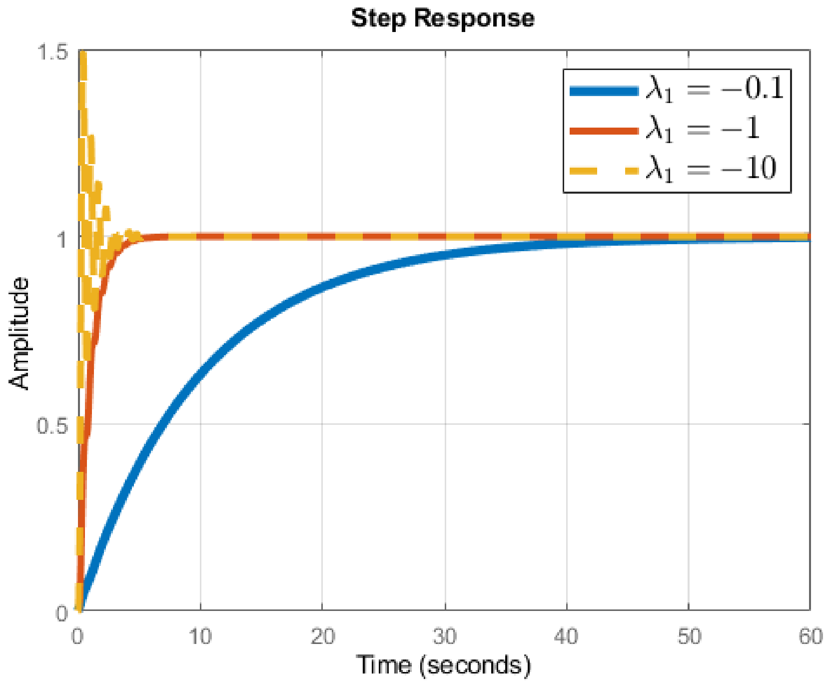
$\lambda_{2,3} = -1 \pm 10i$

Переходная характеристика и расположение полюсов

Динамические (прямые) показатели качества (оцениваются по переходной характеристике)

1. Перерегулирование
2. Время переходного процесса
3. …

$$W(s) = \frac{\prod_{k=1}^{3} |\lambda_k|}{\prod_{k=1}^{3} (s - \lambda_k)}$$



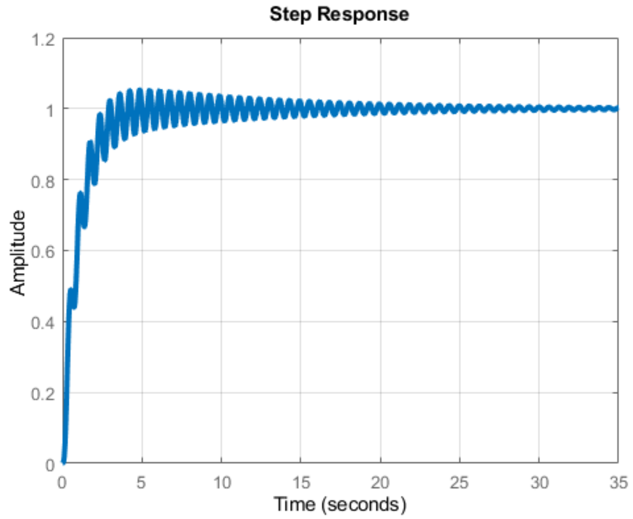
$$\lambda_{2,3} = -1 \pm 10i$$

Переходная характеристика и расположение полюсов

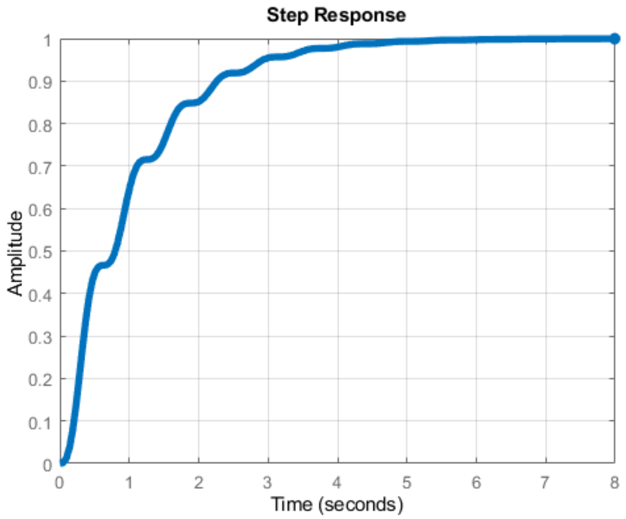
Динамические (прямые) показатели качества (оцениваются по переходной характеристике)

1. Перерегулирование
2. Время переходного процесса
3. …

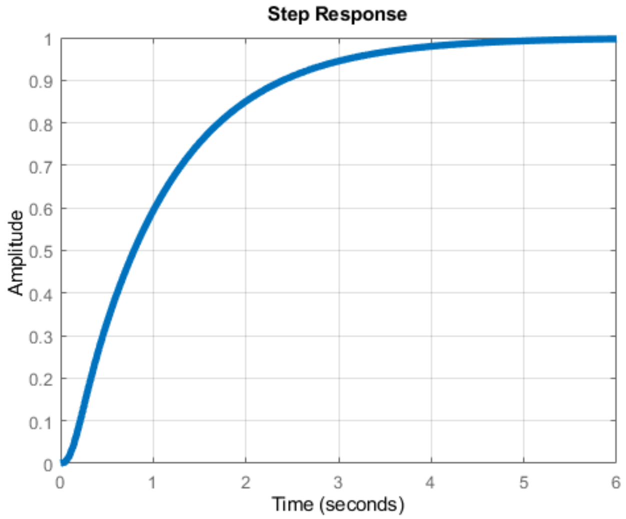
$$W(s) = \frac{\prod_{k=1}^{3}|\lambda_k|}{\prod_{k=1}^{3}(s-\lambda_k)}$$



$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_{2,3} = -0.1 \pm 10i$$



$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_{2,3} = -1 \pm 10i$$



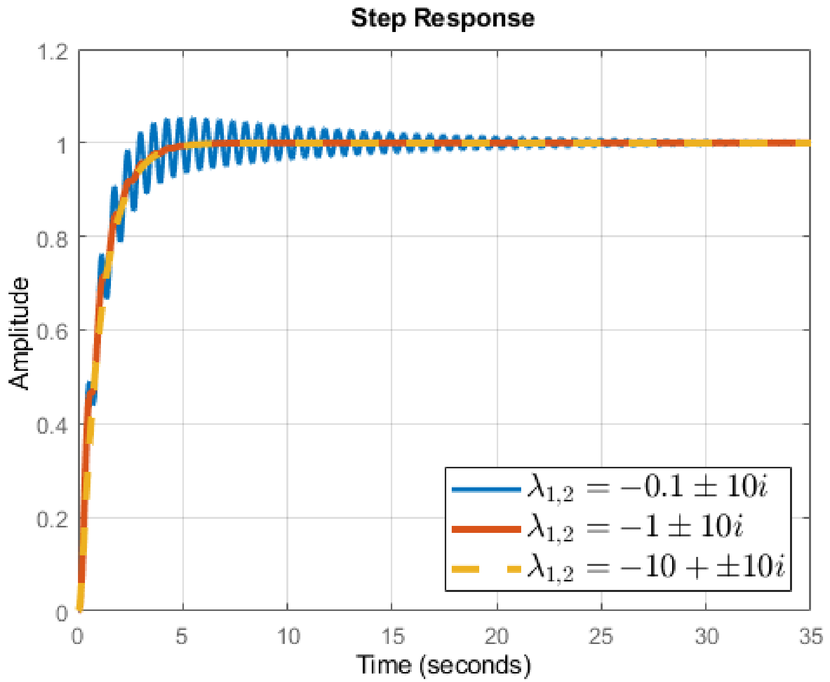
$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_{2,3} = -10 \pm 10i$$

Переходная характеристика и расположение полюсов

Динамические (прямые) показатели качества (оцениваются по переходной характеристике)

1. Перерегулирование
2. Время переходного процесса
3. …

$$W(s) = \frac{\prod_{k=1}^{3} |\lambda_k|}{\prod_{k=1}^{3} (s - \lambda_k)}$$



$$\lambda_1 = -1$$

Переходная характеристика и расположение полюсов

Динамические (прямые) показатели качества (оцениваются по переходной характеристике)

1. Перерегулирование
2. Время переходного процесса
3. …

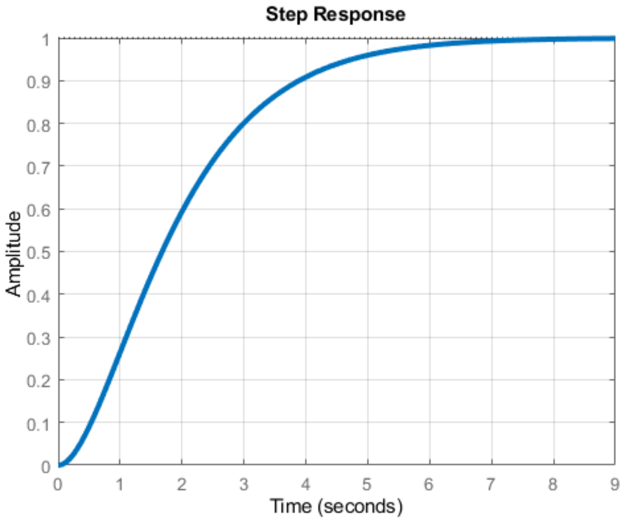
Зачем нужны комплексные корни?
Ведь это ведет к перерегулированию

Переходная характеристика и расположение полюсов

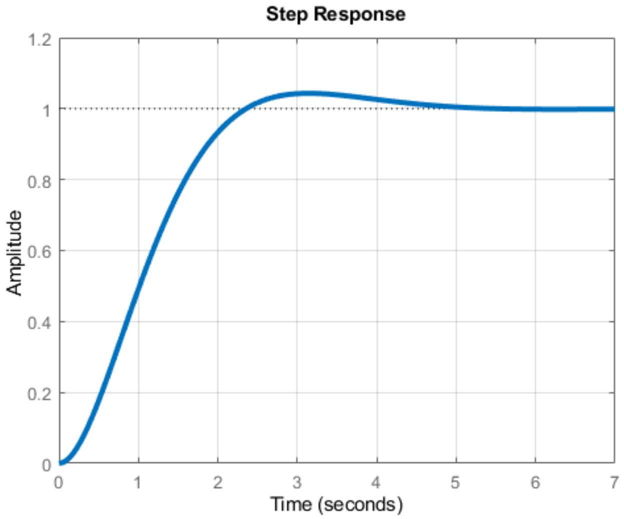
Динамические (прямые) показатели качества (оцениваются по переходной характеристике)

1. Перерегулирование
2. Время переходного процесса
3. …

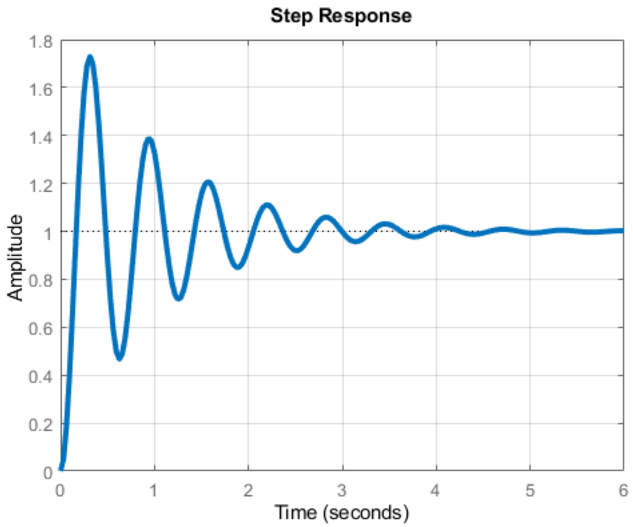
$$W(s) = \frac{\prod_{k=1}^{2} |\lambda_k|}{\prod_{k=1}^{2} (s - \lambda_k)}$$



$\lambda_{1,2} = -1$



$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$



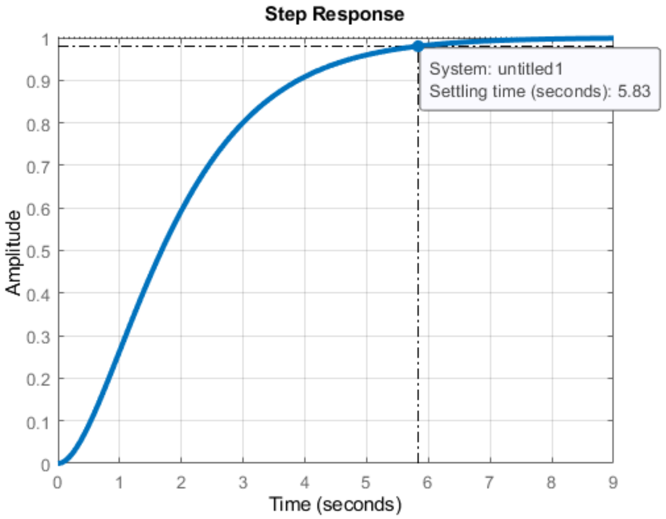
$\lambda_{1,2} = -1 \pm 10i$

Переходная характеристика и расположение полюсов

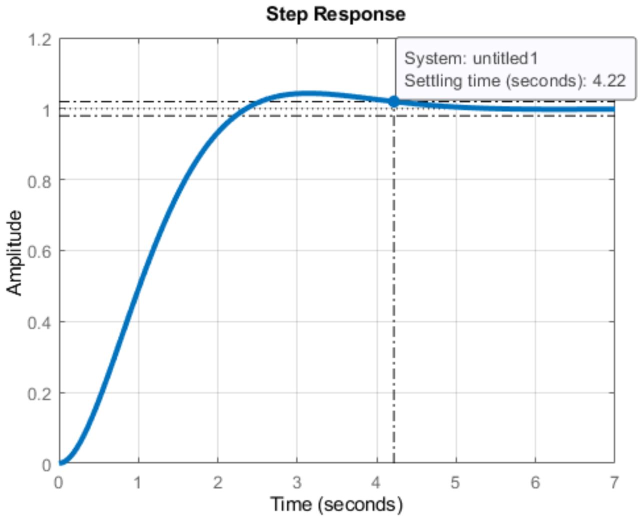
Динамические (прямые) показатели качества (оцениваются по переходной характеристике)

1. Перерегулирование
2. Время переходного процесса
3. …

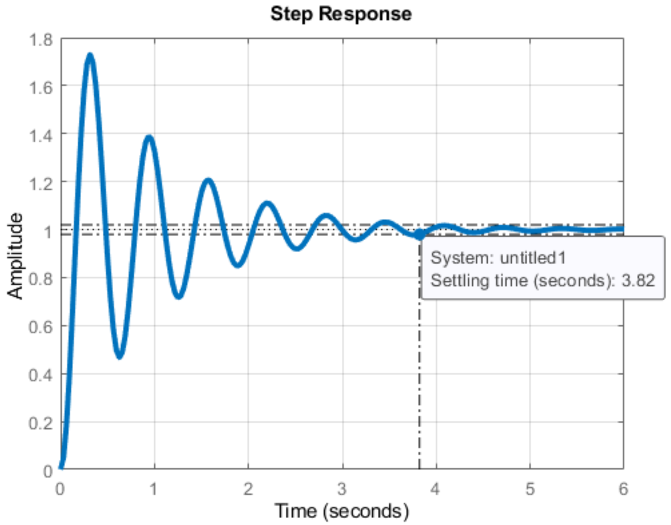
$$W(s) = \frac{\prod_{k=1}^{2}|\lambda_k|}{\prod_{k=1}^{2}(s-\lambda_k)}$$



$\lambda_{1,2} = -1$



$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$



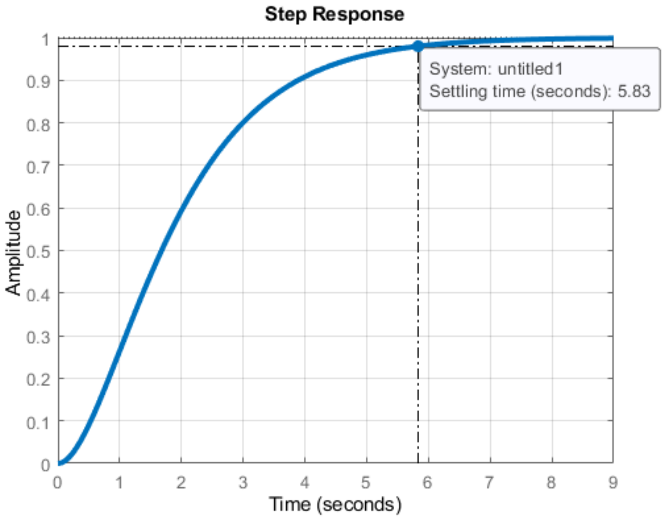
$\lambda_{1,2} = -1 \pm 10i$

Переходная характеристика и расположение полюсов

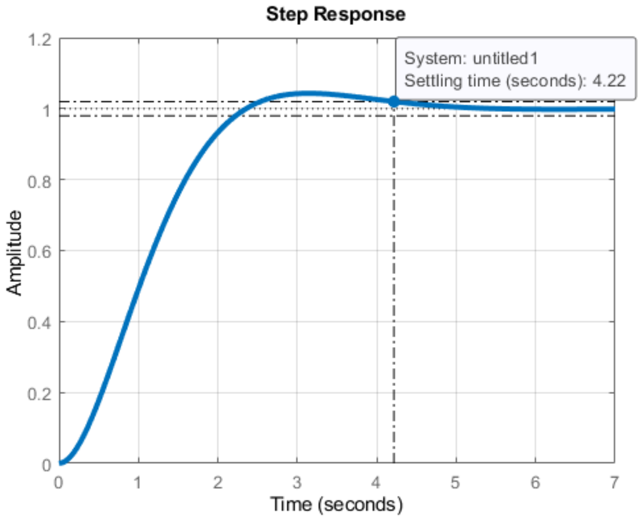
Динамические (прямые) показатели качества (оцениваются по переходной характеристике)

1. Перерегулирование
2. Время переходного процесса
3. …

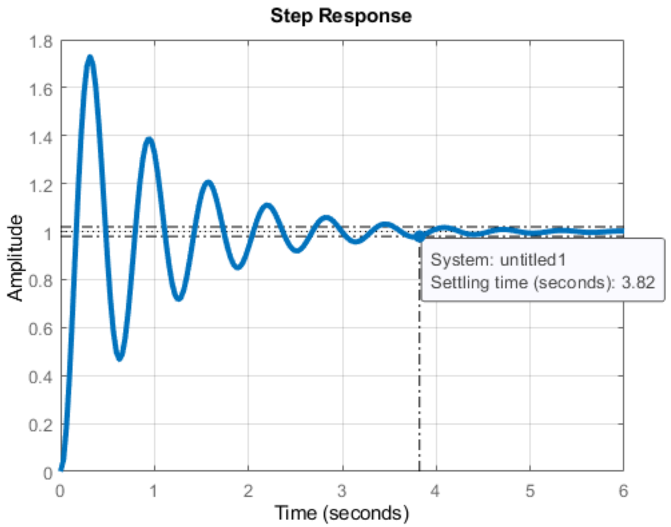
Мнимая компонента позволила «ускорить» систему при сохранении степени устойчивости!



$$\lambda_{1,2} = -1$$



$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$$



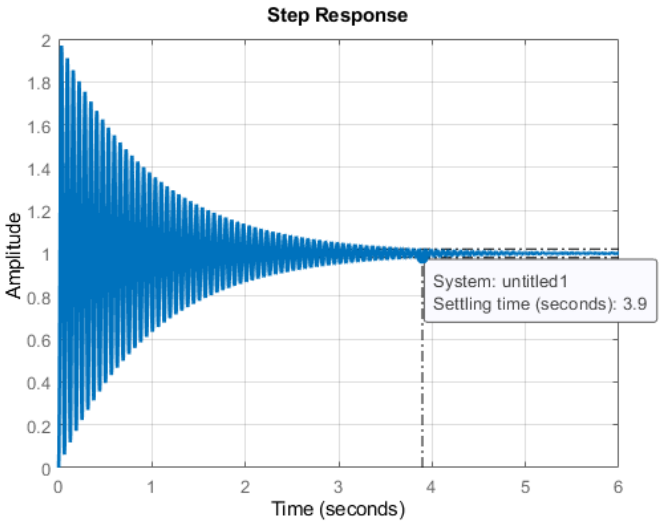
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 10i$$

Переходная характеристика и расположение полюсов

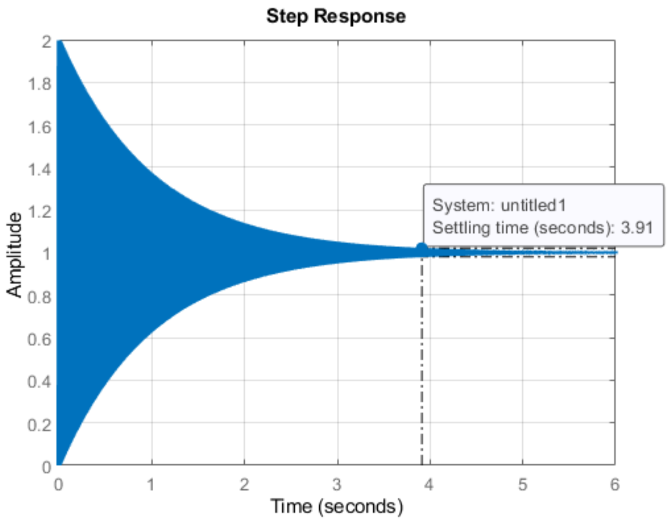
Динамические (прямые) показатели качества (оцениваются по переходной характеристике)

1. Перерегулирование
2. Время переходного процесса
3. …

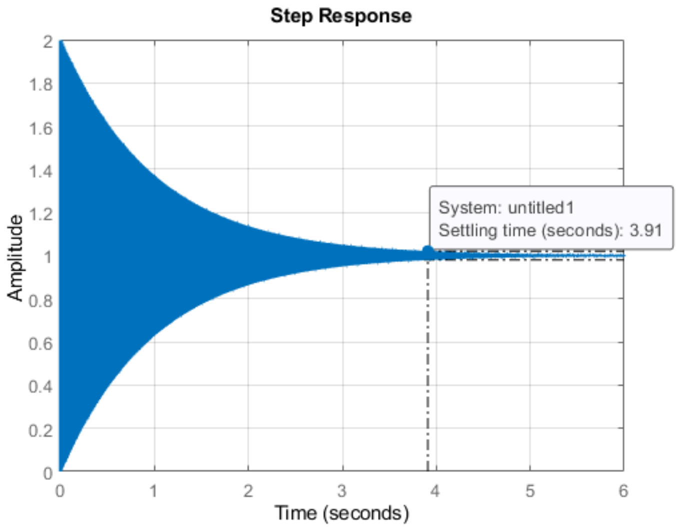
…но злоупотреблять этим тоже не стоит



$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 100i$$



$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 1000i$$



$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 10000i$$