МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ
по лабораторной работе № 5:
ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

Вариант 27

по дисциплине
«Линейные системы автоматического управления»

Студент:
Группа № R3338 *А.А. Нечаева*

Предподаватель:
ассистент факультера СУиР, к. т. н. *А.В. Пашенко*

Санкт-Петербург 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1 ДПТ

Даны уравнения двигателя постоянного тока независимого возбуждения:

$$J\dot{\omega} = M, \;\; M = k_m I, \;\; I = \frac{U + \epsilon_i}{R}, \;\; \epsilon_i = -k_e\omega$$

Запишем в соответствии с вариантов значения следующих величин:

- $k_m = 0.3824$, Н $\cdot$ м/А– конструктивная постоянная по моменту;
- $k_e = 0.3824$, В $\cdot$ с– конструктивная постоянная по ЭДС;
- $J = 0.0019$, кг $\cdot$ м^2– момент инерции ротора;
- $R = 4.6296$, Ом – активное сопротивление обмоток ротора.

Преобразуем уравнения для двигателя постоянного тока:

$$J\dot{\omega} = M, \;\; M = k_m I, \;\; I = \frac{U + \epsilon_i}{R}, \;\; \epsilon_i = -k_e\omega \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow J\dot{\omega} = k_m I, \;\; I = \frac{U - k_e\omega}{R} \Leftrightarrow J\dot{\omega} = k_m\frac{U - k_e\omega}{R} \Leftrightarrow \dot{\omega} = \frac{k_m U}{RJ} - \frac{k_m k_e \omega}{RJ} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{RJ}\omega = \frac{k_m}{RJ}U$$

1.1 Передаточная функция через постоянные времени T и значения постоянных.

На основе полученного выше выражения запишем передаточную функцию системы:

$$W(s) = \frac{\frac{k_m}{RJ}}{s + \frac{k_m k_e}{RJ}} \tag{1}$$

Выразим через постоянную времени:

$$T = \frac{RJ}{k_m k_e} \tag{2}$$

$$W(s) = \frac{1/k_e}{Ts + 1} \tag{3}$$

Передаточная функцию представлена **реальным усилительным звеном**.

1.2 Временные характеристики

Запишем выражение для весовой функции

$$y_{i.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{W(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{k_m}{RJ}}{s+\frac{k_m k_e}{RJ}}\right\} = \frac{k_m}{RJ} \cdot exp\left\{-\frac{k_m k_e}{RJ}t\right\}$$

График весовой функции представлен на рисунке 1

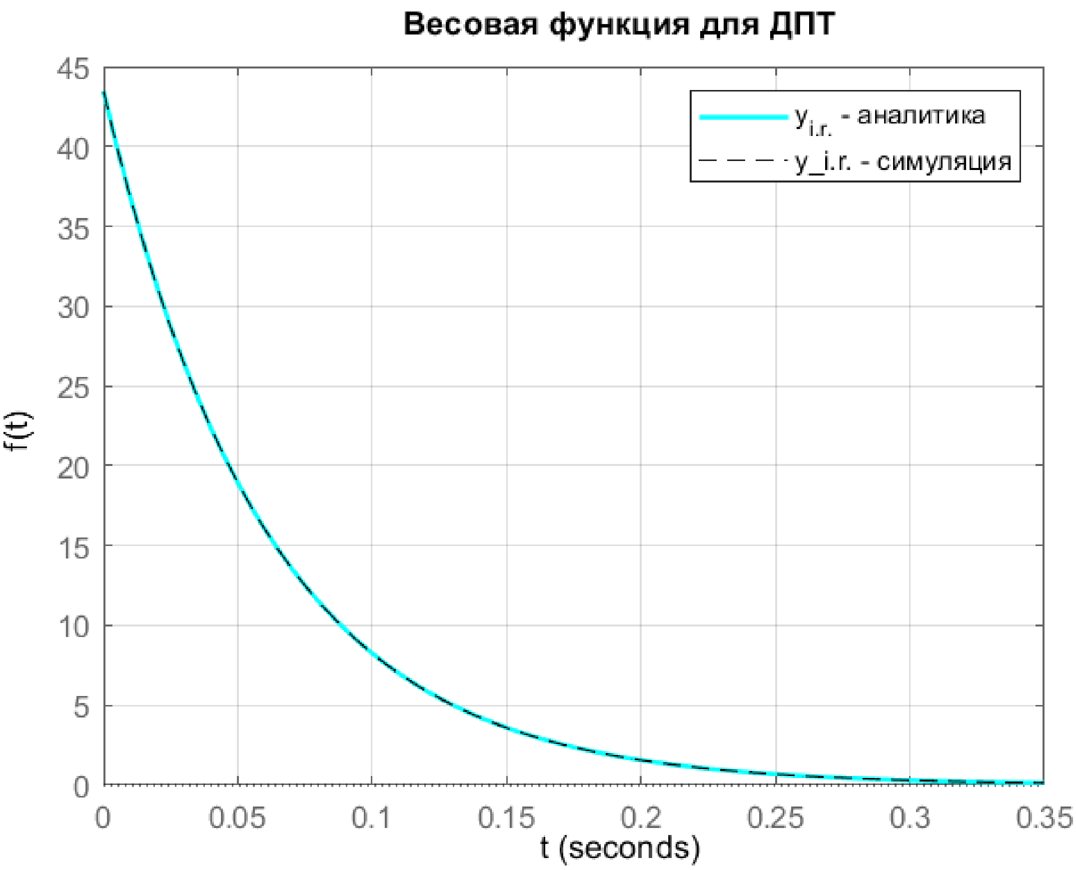

Рисунок 1 — График весовой функции.

Запишем выражение для переходной функции

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{k_m}{RJ}}{s(s+\frac{k_m k_e}{RJ})}\right\} \boxed{=}$$

Преобразуем выражение

$$\frac{\frac{k_m}{RJ}}{s(s+\frac{k_m k_e}{RJ})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{k_m k_e}{RJ}} = \frac{As + A\frac{k_m k_e}{RJ} + Bs}{s(s+\frac{k_m k_e}{RJ})} \Rightarrow A = \frac{1}{k_e},\ B = -\frac{1}{k_e}$$

$$\boxed{=}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{k_e s}+\frac{-\frac{1}{k_e}}{\left(s+\frac{k_m k_e}{RJ}\right)}\right\}=\frac{1}{k_e}-\frac{1}{k_e}exp\left\{-\frac{k_m k_e}{RJ}t\right\}=$$
$$=\frac{1}{k_e}\left(1-exp\left\{-\frac{k_m k_e}{RJ}t\right\}\right) \quad (4)$$

График переходной функции представлен на рисунке 2

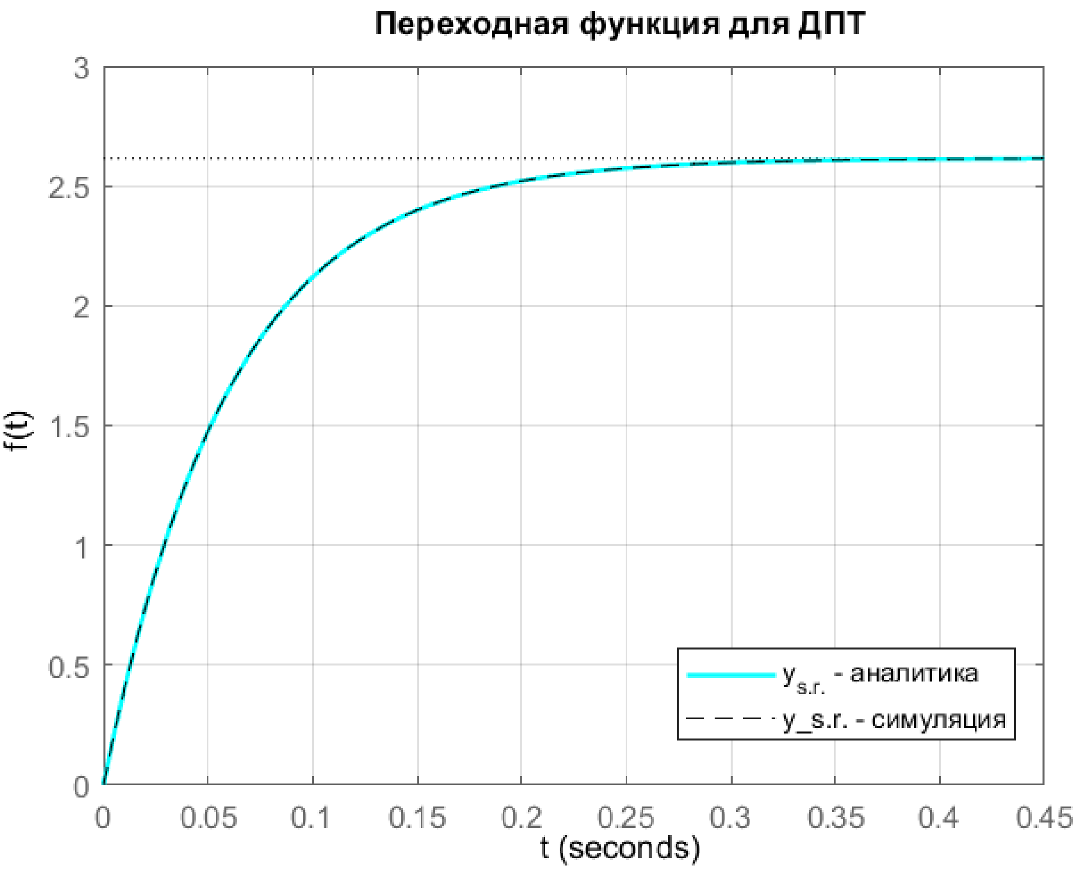

Рисунок 2 — График переходной функции.

1.3 Частотные характеристики

Перепишем передаточную функцию, заменив s на $i\omega$:

$$W(i\omega)=\frac{\frac{k_m}{RJ}}{i\omega+\frac{k_m k_e}{RJ}} \quad (5)$$

Преобразим полученное выражение:

$$W(i\omega) = \frac{\frac{k_m}{RJ}}{i\omega + \frac{k_m k_e}{RJ}} = \frac{\frac{k_m}{RJ}\left(\frac{k_m k_e}{RJ} - i\omega\right)}{\left(\frac{k_m k_e}{RJ} - i\omega\right)\left(\frac{k_m k_e}{RJ} + i\omega\right)} = \frac{\frac{k_m}{RJ}\left(\frac{k_m k_e}{RJ} - i\omega\right)}{\left(\frac{k_m k_e}{RJ}\right)^2 + \omega^2} =$$
$$= \frac{k_e\left(\frac{k_m}{RJ}\right)^2}{\left(\frac{k_m k_e}{RJ}\right)^2 + \omega^2} + i\frac{-\omega\frac{k_m}{RJ}}{\left(\frac{k_m k_e}{RJ}\right)^2 + \omega^2} \quad (6)$$

Отсюда получим

$$P(\omega) = \frac{k_e\left(\frac{k_m}{RJ}\right)^2}{\left(\frac{k_m k_e}{RJ}\right)^2 + \omega^2} \quad (7)$$

$$Q(\omega) = \frac{-\omega\frac{k_m}{RJ}}{\left(\frac{k_m k_e}{RJ}\right)^2 + \omega^2} \quad (8)$$

Теперь запишем формулы АЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\left(\frac{k_e\left(\frac{k_m}{RJ}\right)^2}{\left(\frac{k_m k_e}{RJ}\right)^2 + \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega\frac{k_m}{RJ}}{\left(\frac{k_m k_e}{RJ}\right)^2 + \omega^2}\right)^2} =$$
$$= \frac{\frac{k_m}{RJ}}{\left(\frac{k_m k_e}{RJ}\right)^2 + \omega^2}\sqrt{\left(\frac{k_e k_m}{RJ}\right)^2 + \omega^2} = \frac{\frac{k_m}{RJ}}{\sqrt{\left(\frac{k_e k_m}{RJ}\right)^2 + \omega^2}} = \frac{k_m}{\sqrt{(k_e k_m)^2 + (RJ\omega)^2}} \quad (9)$$

ФЧХ:

$$\phi(\omega) = atan2\left(Q(\omega), P(\omega)\right) = atan\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} =$$
$$= atan\frac{-\omega\frac{k_m}{RJ}\cdot\left(\left(\frac{k_m k_e}{RJ}\right)^2 + \omega^2\right)}{\left(\left(\frac{k_m k_e}{RJ}\right)^2 + \omega^2\right)\cdot k_e\left(\frac{k_m}{RJ}\right)^2} = atan\frac{-\omega RJ}{k_e k_m} \quad (10)$$

и ЛАХ:

$$L(\omega) = 20\lg(A(\omega)) = 20\lg\left(\frac{k_m}{\sqrt{(k_e k_m)^2 + (RJ\omega)^2}}\right) \quad (11)$$

Графики АЧХ, ФЧХ и ЛАФЧХ представлены на рисунках 3, 4 и 5 соответственно.

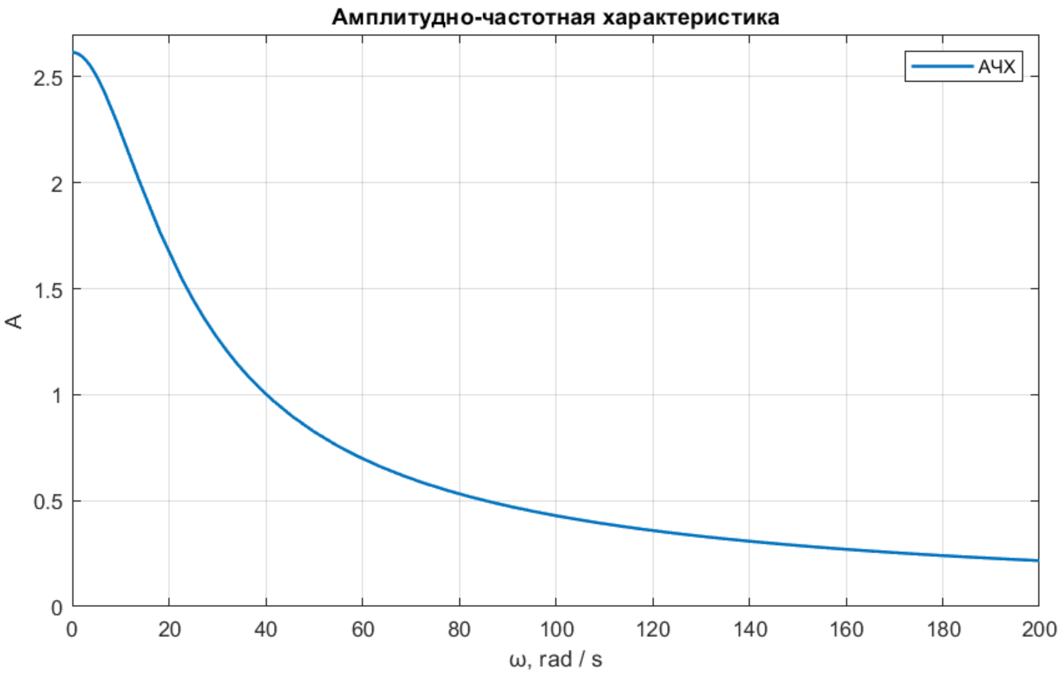

Рисунок 3 — График АЧХ.

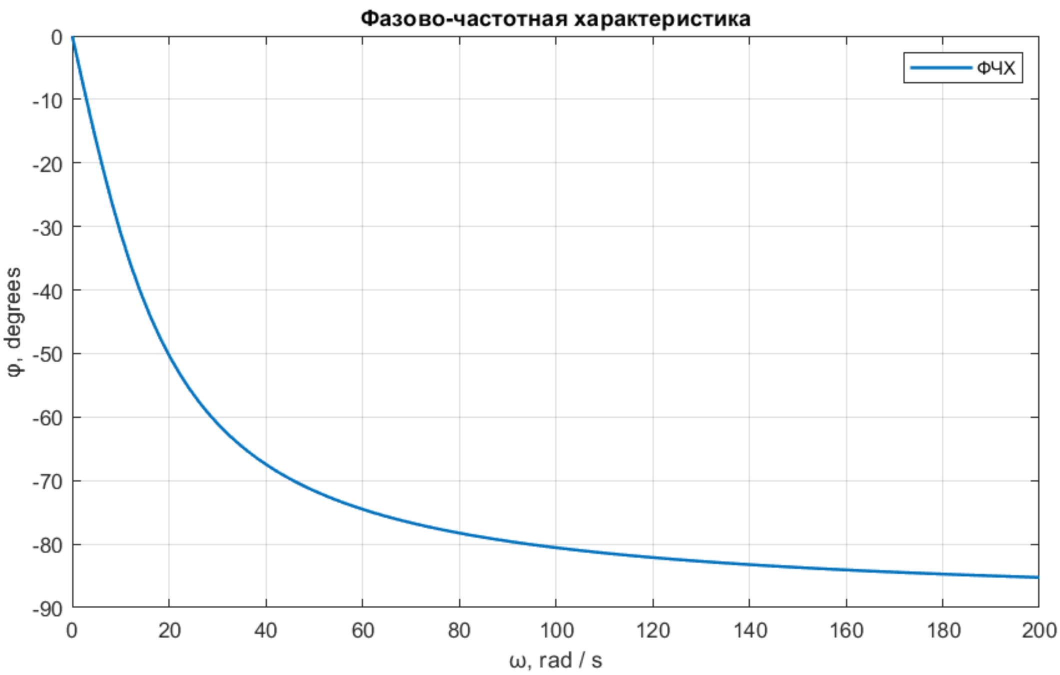

Рисунок 4 — График ФЧХ.

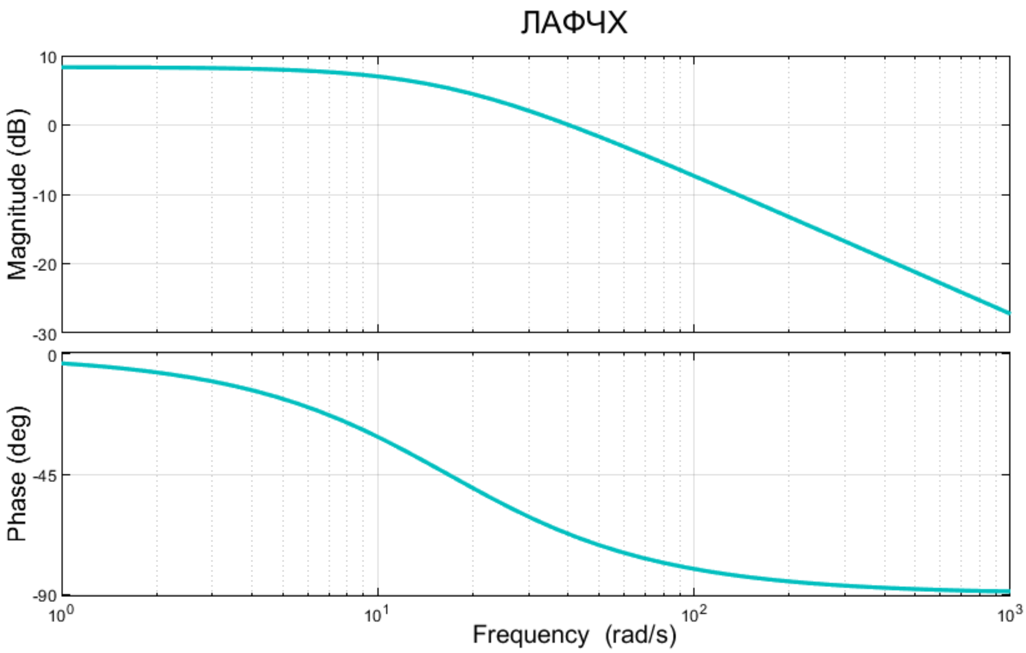

Рисунок 5 — Графики ЛАФЧХ.

2 ДПТ 2.0

Даны уравнения двигателя постоянного тока независимого возбуждения:

$$J\dot{\omega} = M, M = k_m I, I = \frac{U+\epsilon}{R}, \epsilon = \epsilon_i + \epsilon_s, \epsilon_i = -k_e\omega, \epsilon_s = -L\dot{I} \quad (12)$$

Преобразуем в единое уравнение

$$\begin{cases} J\dot{\omega} = k_m I, \\ I = \frac{U - k_e\omega - L\dot{I}}{R} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\omega} = \frac{k_m I}{J}, \\ \dot{I} = \frac{U}{L} - \frac{RI}{L} - \frac{k_e\omega}{L} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{\omega} = \frac{k_m}{J}\dot{I}, \\ \dot{I} = \frac{U}{L} - \frac{RI}{L} - \frac{k_e\omega}{L} \end{cases} \rightarrow$$
$$\rightarrow \ddot{\omega} = \frac{k_m}{J}\left(\frac{U}{L} - \frac{RI}{L} - \frac{k_e\omega}{L}\right) = \frac{k_m}{J}\left(\frac{U}{L} - \frac{R}{L}\frac{\dot{\omega}J}{k_m} - \frac{k_e\omega}{L}\right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \ddot{\omega} + \frac{R\dot{\omega}}{L} + \frac{k_m k_e \omega}{JL} = \frac{k_m U}{JL} \rightarrow \ddot{\omega}\frac{L}{R} + \dot{\omega} + \omega\frac{k_m k_e}{JR} = U\frac{k_m}{JR} \quad (13)$$

Запишем в соответствии с вариантов значения следующих величин:

- $k_m = 0.3824,$ Н · м/А– конструктивная постоянная по моменту;
- $k_e = 0.3824,$ В · с– конструктивная постоянная по ЭДС;
- $J = 0.0019,$ кг · м^2– момент инерции ротора;
- $R = 4.6296,$ Ом – активное сопротивление обмоток ротора;
- $L = 1.1194,$ Гн – индуктивность обмоток ротора.

2.1 Передаточная функция через постоянные времени T и значения постоянных.

Запишем передаточную функцию исследуемой системы:

$$W(s) = \frac{\frac{k_m}{JR}}{\frac{L}{R}s^2 + s + \frac{k_m k_e}{JR}} \quad (14)$$

$$D = J^2R^2 - 4JLk_m k_e =$$
$$= 0.0019^2 \cdot 4.6296^2 - 4 \cdot 0.0019 \cdot 1.1194 \cdot 0.3824^2 = -0.0012 \quad (15)$$

Можем сделать вывод: здесь мы рассматриваем **колебательное звено**.

Выразим передаточную функцию через постоянную времени:

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}, \tag{16}$$

где $k = \frac{1}{k_e}$, $\xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{J}{Lk_m k_e}}$, $T = \sqrt{\frac{JL}{k_m k_e}}$.

2.2 Временные характеристики.

Запишем выражение для весовой функции

$$y_{i.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{W(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}\right\}$$

Преобразуем передаточную функцию к более удобному виду. Для этого рассмотрим знаменатель и разложим его на множители.

$$T^2 s^2 + 2T\xi s + 1 \rightarrow$$

$$\begin{cases} D = 4T^2\left(\xi^2 - 1\right), \\ s_1 = \frac{-2T\xi - \sqrt{D}}{2T^2}, \\ s_2 = \frac{-2T\xi + \sqrt{D}}{2T^2}, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s_1 = \frac{-2T\xi - 2T\sqrt{\xi^2-1}}{2T^2}, \\ s_2 = \frac{-2T\xi + 2T\sqrt{\xi^2-1}}{2T^2}, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s_1 = \frac{-\xi - \sqrt{\xi^2-1}}{T}, \\ s_2 = \frac{-\xi + \sqrt{\xi^2-1}}{T}, \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rightarrow T^2 s^2 + 2T\xi s + 1 = T^2\left(s - \frac{-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}{T}\right)\left(s - \frac{-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{T}\right) = \\ = T^2\left(s + \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{T}\right)\left(s + \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}{T}\right) = \\ = \left(Ts + \xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\left(Ts + \xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

Теперь преобразуем дробь в сумму дробей:

$$\frac{k}{T^2s^2+2T\xi s+1}=\frac{k}{\left(Ts+\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\left(Ts+\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)}=$$

$$=\frac{k}{\left(Ts+\xi\right)^2+1-\xi^2}=\frac{\frac{k}{T^2}}{\left(s+\frac{\xi}{T}\right)^2+\frac{1-\xi^2}{T^2}}=\frac{\frac{k}{T^2}}{\left(s+\frac{\xi}{T}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\right)^2}=$$

$$=\frac{k}{T\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}}{\left(s+\frac{\xi}{T}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\right)^2}$$

К полученному выражению применим обратное преобразование Лапласа:

$$y_{i.r.}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{W(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{T^2s^2+2T\xi s+1}\right\}=$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{T\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}}{\left(s+\frac{\xi}{T}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\right)^2}\right\}=$$

$$=\frac{k}{T\sqrt{1-\xi^2}}\exp\left\{-\frac{\xi}{T}t\right\}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right) \quad (18)$$

График весовой функции представлен на рисунке 6.

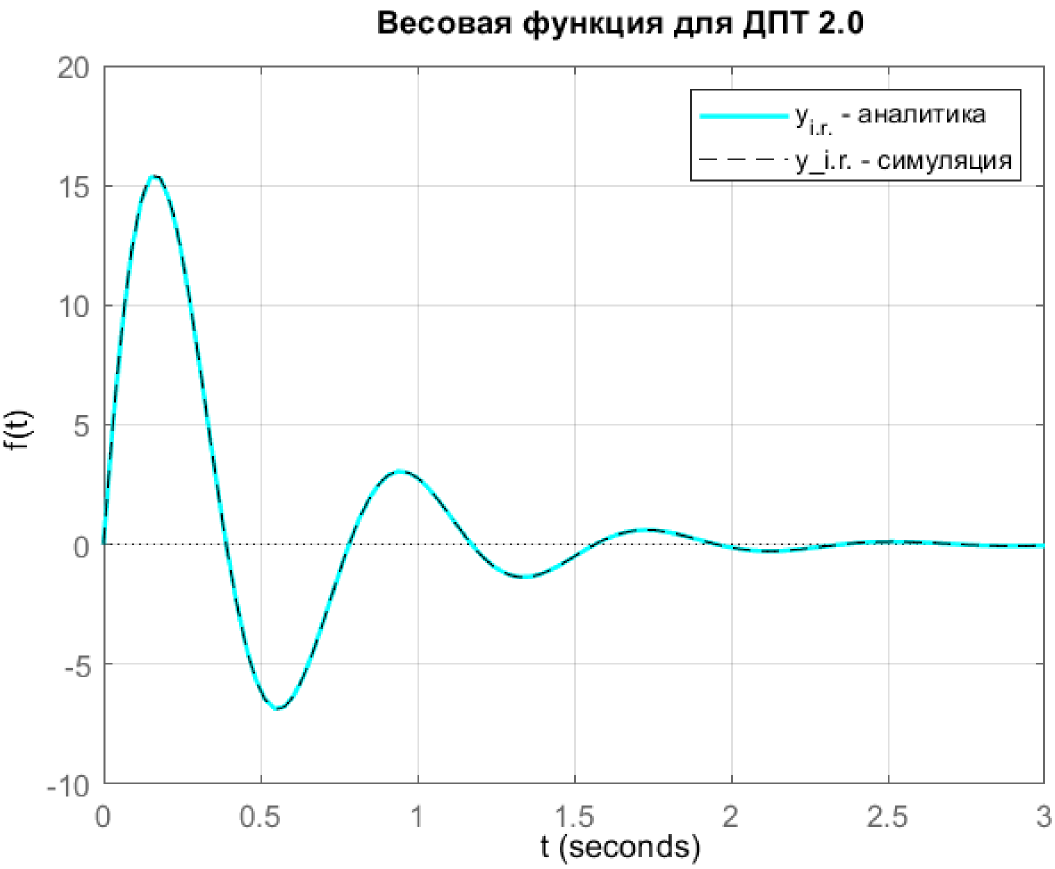

Рисунок 6 — График весовой функции.

Запишем выражение для переходной функции

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s\left(T^2s^2+2T\xi s+1\right)}\right\}$$

Преобразуем выражение образа переходной функции для того, чтобы было проще применить обратное преобразование Лапласа.

$$\begin{gathered}\frac{k}{s\left(T^2s^2+2T\xi s+1\right)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{T^2s^2+2T\xi s+1} = \\ = \frac{AT^2s^2+2AT\xi s+A+Bs^2+Cs}{s\left(T^2s^2+2T\xi s+1\right)} \to \\ \to \begin{cases} AT^2+B=0, \\ 2AT\xi+C=0, \\ A=k \end{cases} \to \begin{cases} kT^2+B=0, \\ 2kT\xi+C=0, \\ A=k \end{cases} \to \begin{cases} B=-kT^2, \\ C=-2kT\xi, \\ A=k \end{cases}\end{gathered} \tag{19}$$

$$\frac{k}{s\left(T^2s^2+2T\xi s+1\right)}=\frac{k}{s}-\frac{kT^2s+2kT\xi}{T^2s^2+2T\xi s+1}=$$

$$=\frac{k}{s}-\frac{kT^2s}{T^2s^2+2T\xi s+1}-\frac{2kT\xi}{T^2s^2+2T\xi s+1}=$$

$$=\frac{k}{s}-\frac{ks}{\left(s+\frac{\xi}{T}\right)^2+\frac{1-\xi^2}{T^2}}-\frac{\frac{2k\xi}{T}}{\left(s+\frac{\xi}{T}\right)^2+\frac{1-\xi^2}{T^2}}=$$

$$=\frac{k}{s}-\frac{ks}{\left(s+\frac{\xi}{T}\right)^2+\frac{1-\xi^2}{T^2}}-\frac{\frac{2k\xi}{T}}{\left(s+\frac{\xi}{T}\right)^2+\frac{1-\xi^2}{T^2}}=$$

$$=\frac{k}{s}-\frac{k\left(s+\frac{\xi}{T}\right)-k\frac{\xi}{T}}{\left(s+\frac{\xi}{T}\right)^2+\frac{1-\xi^2}{T^2}}-\frac{\frac{2k\xi}{T}}{\left(s+\frac{\xi}{T}\right)^2+\frac{1-\xi^2}{T^2}}=$$

$$=\frac{k}{s}-k\frac{s+\frac{\xi}{T}}{\left(s+\frac{\xi}{T}\right)^2+\frac{1-\xi^2}{T^2}}-\frac{k\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}}{\left(s+\frac{\xi}{T}\right)^2+\frac{1-\xi^2}{T^2}} \qquad (20)$$

$$y_{s.r.}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s\left(T^2s^2+2T\xi s+1\right)}\right\}=$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s}-k\frac{s+\frac{\xi}{T}}{\left(s+\frac{\xi}{T}\right)^2+\frac{1-\xi^2}{T^2}}-\frac{k\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}}{\left(s+\frac{\xi}{T}\right)^2+\frac{1-\xi^2}{T^2}}\right\}=$$

$$=k-k\exp\left\{-\frac{\xi}{T}t\right\}\cos\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right)-\frac{k\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\exp\left\{-\frac{\xi}{T}t\right\}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right) \qquad (21)$$

График переходной функции для полной модели ДПТ представлен на рисунке 7.

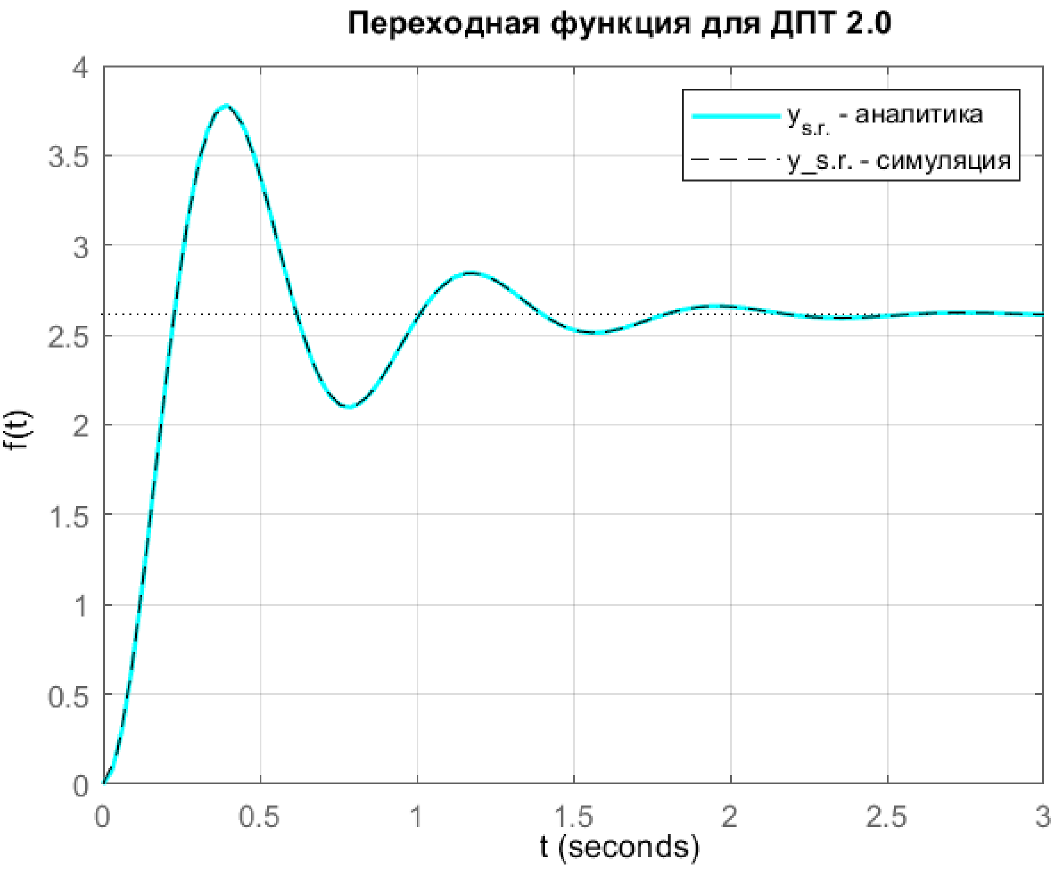

Рисунок 7 — График переходной функции.

2.3 Частотные характеристики.

Запишем передаточную функцию, заменив s на $i\omega$:

$$\begin{aligned} W(i\omega) = \frac{k}{T^2\left(i\omega\right)^2 + 2T\xi i\omega + 1} = \frac{k}{1 - T^2\omega^2 + 2T\xi i\omega} = \\ = \frac{k\left(1 - T^2\omega^2 - 2T\xi i\omega\right)}{\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + 4T^2\xi^2\omega^2} = \\ = \frac{k\left(1 - T^2\omega^2\right)}{\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + 4T^2\xi^2\omega^2} - \frac{2kT\xi i\omega}{\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + 4T^2\xi^2\omega^2} \end{aligned} \tag{22}$$

$$P(\omega) = \frac{k\left(1 - T^2\omega^2\right)}{\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + 4T^2\xi^2\omega^2} \tag{23}$$

$$Q(\omega) = -\frac{2kT\xi\omega}{\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + 4T^2\xi^2\omega^2} \tag{24}$$

Теперь запишем формулы АЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{k\left(1 - T^2\omega^2\right)}{\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + 4T^2\xi^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2kT\xi\omega}{\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + 4T^2\xi^2\omega^2}\right)^2} =$$
$$= \frac{k}{\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + 4T^2\xi^2\omega^2}\sqrt{\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + 4T^2\xi^2\omega^2} =$$
$$= \frac{k}{\sqrt{\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + 4T^2\xi^2\omega^2}} \quad (25)$$

ФЧХ:

$$\phi(\omega) = atan2\left(Q(\omega), P(\omega)\right) =$$
$$= atan2\left(-\frac{2kT\xi\omega}{\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + 4T^2\xi^2\omega^2}, \frac{k\left(1 - T^2\omega^2\right)}{\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + 4T^2\xi^2\omega^2}\right) \quad (26)$$

и ЛАХ:

$$L(\omega) = 20\lg(A(\omega)) = 20\lg\left(\frac{k}{\sqrt{\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + 4T^2\xi^2\omega^2}}\right) \quad (27)$$

Графики частотных характеристик приведены на рисунках 8-10.

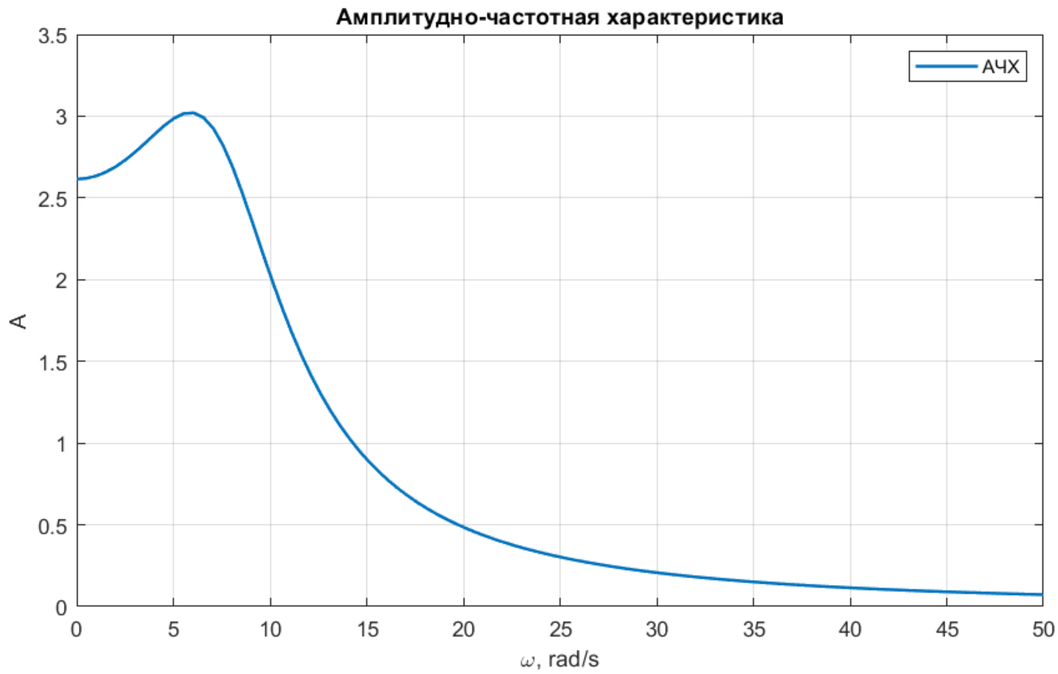

Рисунок 8 — График АЧХ.

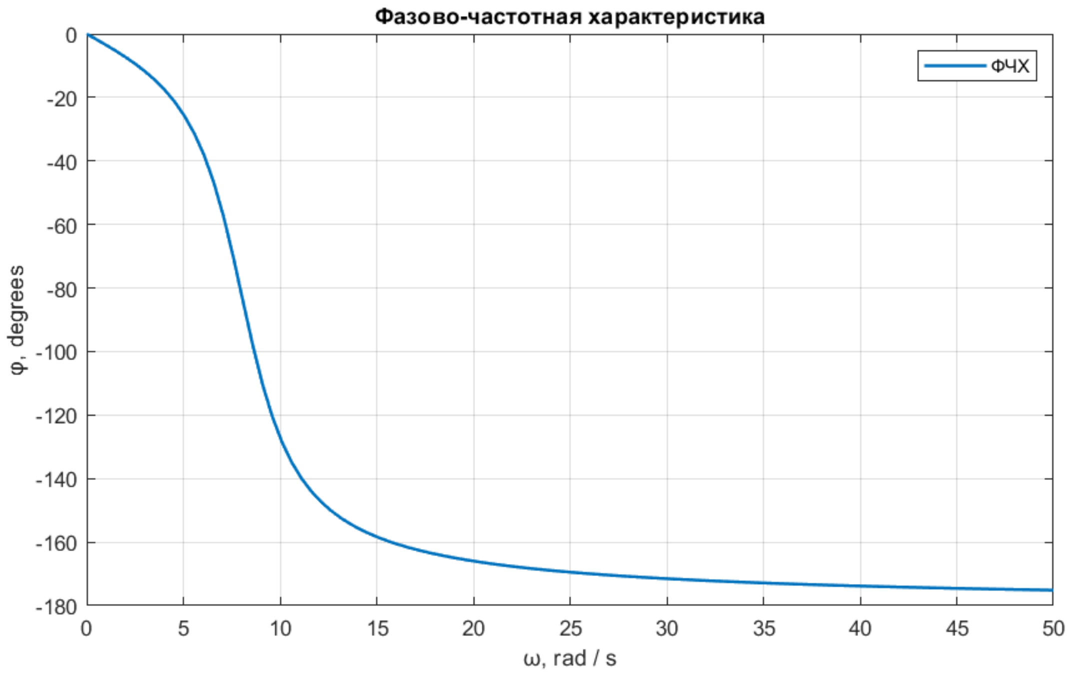

Рисунок 9 — График ФЧХ.

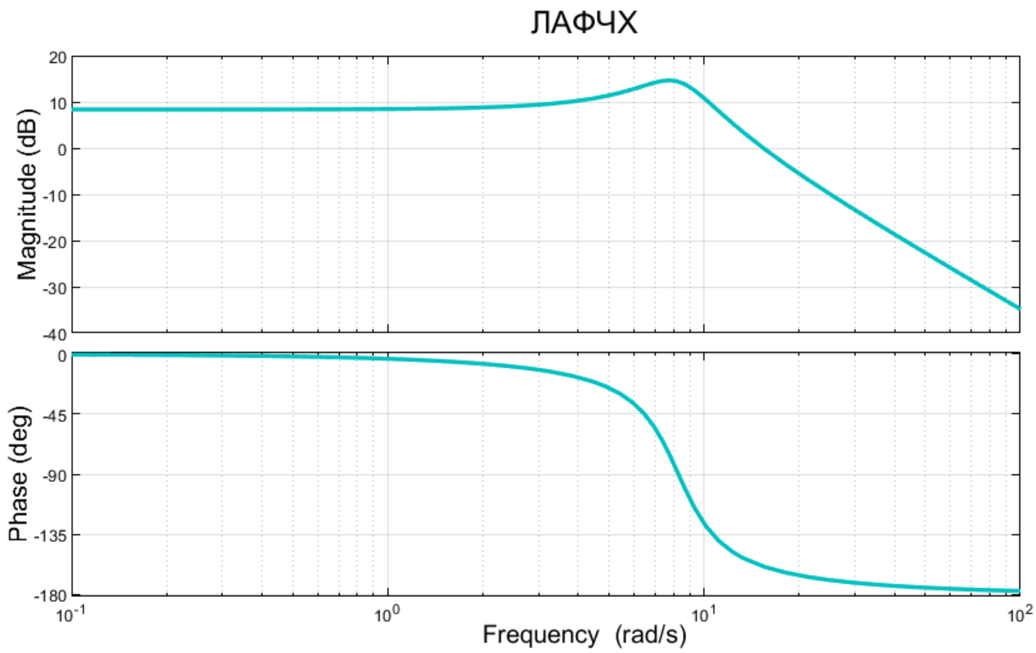

Рисунок 10 — Графики ЛАФЧХ.

3 КОНДЕНСИРУЙ-УМНОЖАЙ

Дано уравнение конденсатора:

$$I = C\frac{dU}{dt}, \tag{28}$$

где $C = 354$ мкФ. Входом объекта будем считать $I(t)$, а выходом $U(t)$.

3.1 Передаточная функция через постоянные времени T и значения постоянных.

Запишем уравнение в более привычной форме:

$$C\dot{U} = I \tag{29}$$

Передаточная функция будет иметь вид:

$$W(s) = \frac{1}{Cs} \tag{30}$$

или в записи через постоянную времени:

$$W(s) = \frac{1}{Ts}, \tag{31}$$

где $T = C$.

Функция описывает **идеальное интегрирующее звено**.

3.2 Временные характеристики

Запишем выражение для весовой функции

$$U_{i.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{W(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{Ts}\right\} = \frac{1}{T} = \frac{1}{C} \tag{32}$$

Запишем выражение для переходной функции

$$U_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{Ts^2}\right\} = \frac{1}{T}t = \frac{1}{C}t \tag{33}$$

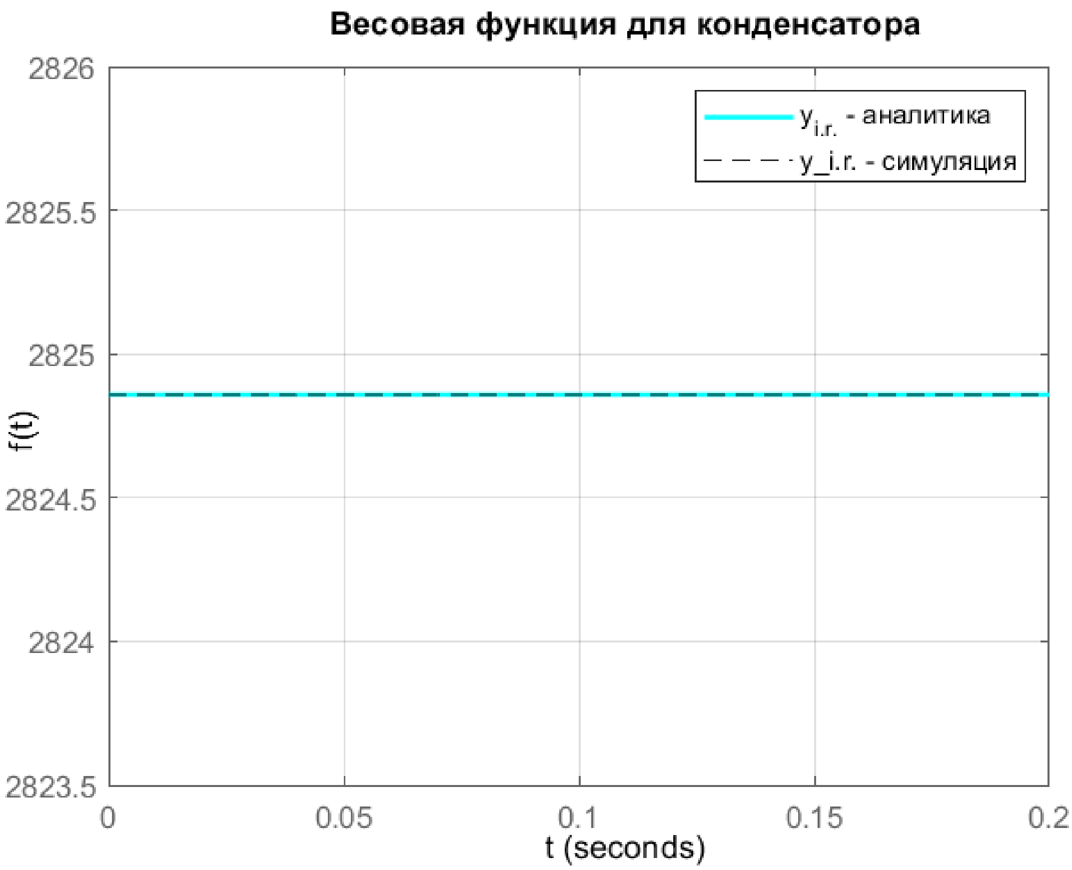

Рисунок 11 — График весовой функции.

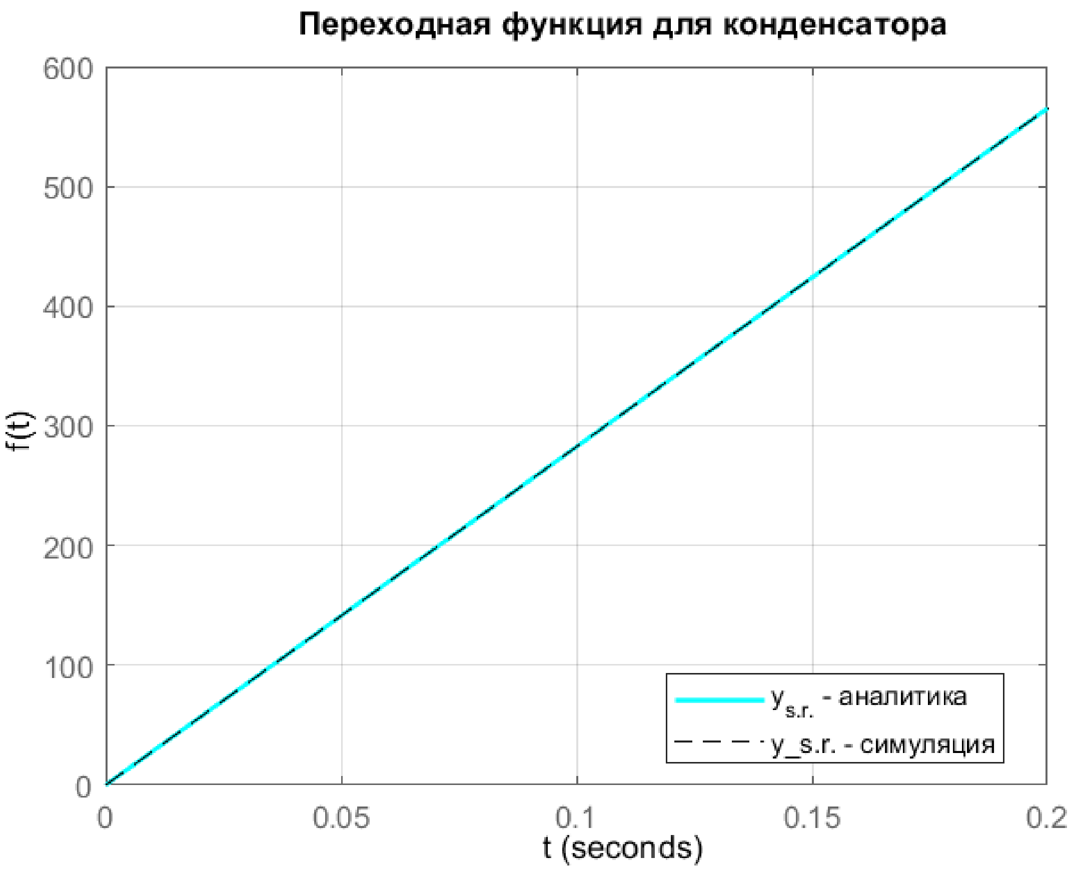

Рисунок 12 — График переходной функции.

3.3 Частотные характеристики

Запишем передаточную функцию, выполнив замену $s \to i\omega$

$$W(i\omega) = \frac{1}{Ci\omega} = -\frac{i}{C\omega} \tag{34}$$

Следовательно,

$$P(\omega) = 0 \tag{35}$$

$$Q(\omega) = -\frac{1}{C\omega} \tag{36}$$

Теперь запишем формулы АЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{1}{C\omega} \tag{37}$$

ФЧХ:

$$\phi(\omega) = atan2\left(Q(\omega), P(\omega)\right) = atan2\left(-\frac{1}{C\omega}, 0\right) = -\frac{\pi}{2} \tag{38}$$

и ЛАХ:

$$L(\omega) = 20\lg(A(\omega)) = 20\lg\left(\frac{1}{C\omega}\right) \tag{39}$$

Графики частотных характеристик приведены на рисунках 13-15.

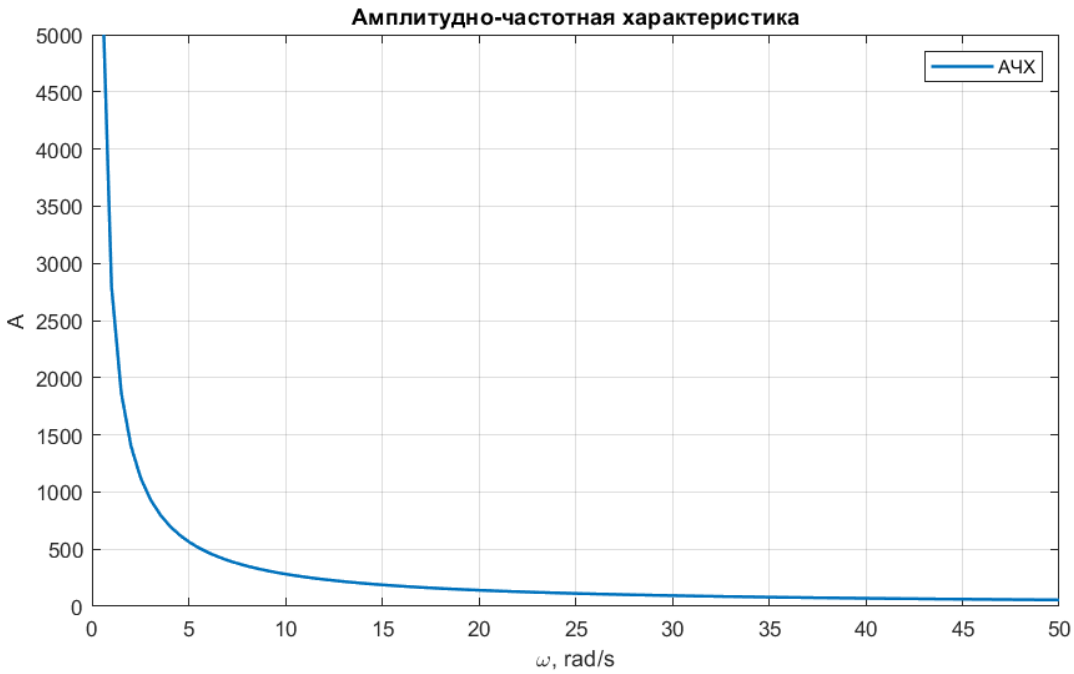

Рисунок 13 — График АЧХ.

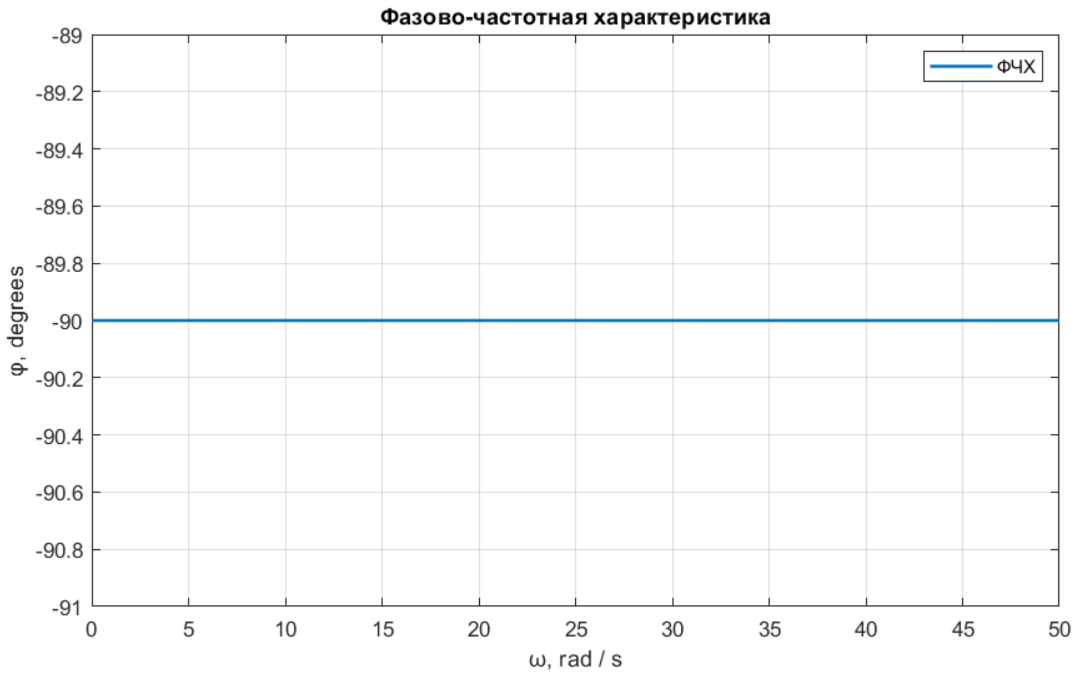

Рисунок 14 — График ФЧХ.

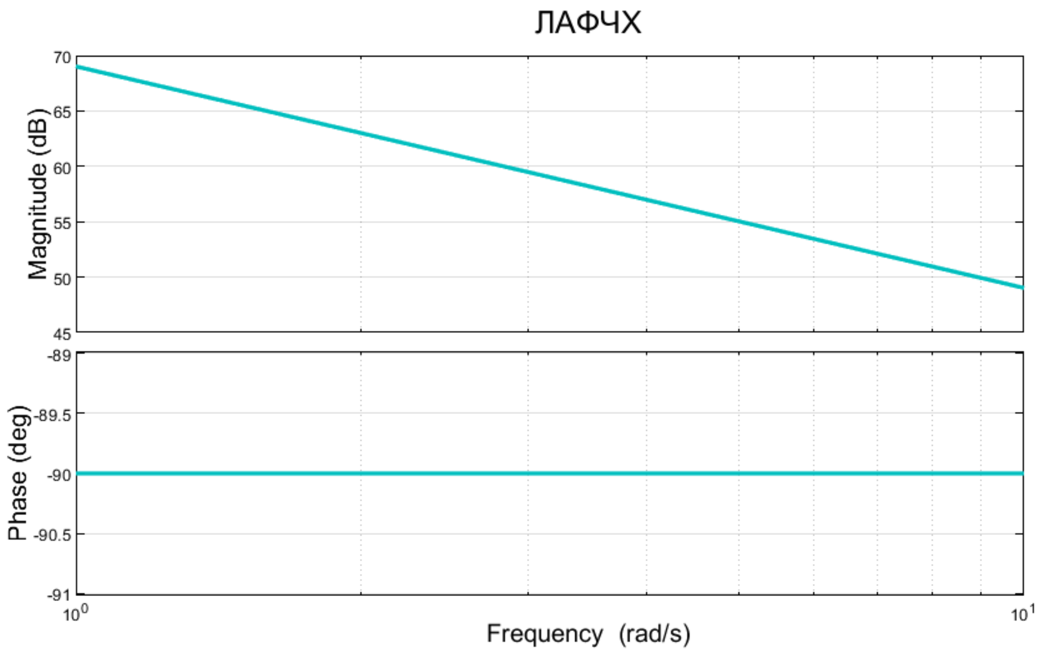

Рисунок 15 — Графики ЛАФЧХ.

4 ПРУЖИНКА

Даны уравнения пружинного маятника:

$$F_{\text{упр}} = -k \cdot x, \quad F = m \cdot a \tag{40}$$

Запишем также численные данные:

$M = 26$ кг, $k = 72$ Н/м.

Входом объекта считается $F_{ext}(t)$ – некая внешняя сила, направленная соосно движению маятника, а выходом $x(t)$. Маятник движется ортогонально силе тяжести.

Запишем уравнение системы

$$F_{ext} - F_{\text{упр}} = F \rightarrow ma + kx = F_{ext} \rightarrow m\ddot{x} + kx = F_{ext} \tag{41}$$

4.1 Передаточная функция через постоянные времени T и значения постоянных

Запишем передаточную функцию системы

$$W(s) = \frac{1}{ms^2 + k} \tag{42}$$

Так как $m > 0$ и $k > 0$, полюса системы чисто мнимые, следовательно, это **консервативное звено**.

Запишем передаточную функцию через T.

$$W(s) = \frac{A}{T^2s^2 + 1}, \tag{43}$$

где $A = \frac{1}{k}$, $T = \sqrt{\frac{m}{k}}$.

4.2 Временные характеристики

Запишем выражение для весовой функции

$$y_{i.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{W(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{T^2s^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{A}{T^2}}{s^2+\frac{1}{T^2}}\right\} = \\ = \frac{A}{T}\sin\left(\frac{t}{T}\right) \tag{44}$$

Запишем выражение для переходной функции

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s\left(T^2s^2+1\right)}\right\} = \tag{45}$$

$$\frac{A}{s\left(T^2s^2+1\right)} = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{T^2s^2+1} = \frac{aT^2s^2+a+bs^2+cs}{s\left(T^2s^2+1\right)} \to$$
$$\to \begin{cases} aT^2 = -b, \\ c = 0, \\ a = A \end{cases} \to \begin{cases} b = -AT^2, \\ c = 0, \\ a = A \end{cases} \to \frac{A}{s} - \frac{AT^2s}{T^2s^2+1} =$$
$$= \frac{A}{s} - A\frac{s}{s^2+\frac{1}{T^2}} \tag{46}$$

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s} - A\frac{s}{s^2+\frac{1}{T^2}}\right\} = A - A\cos\left(\frac{t}{T}\right) \tag{47}$$

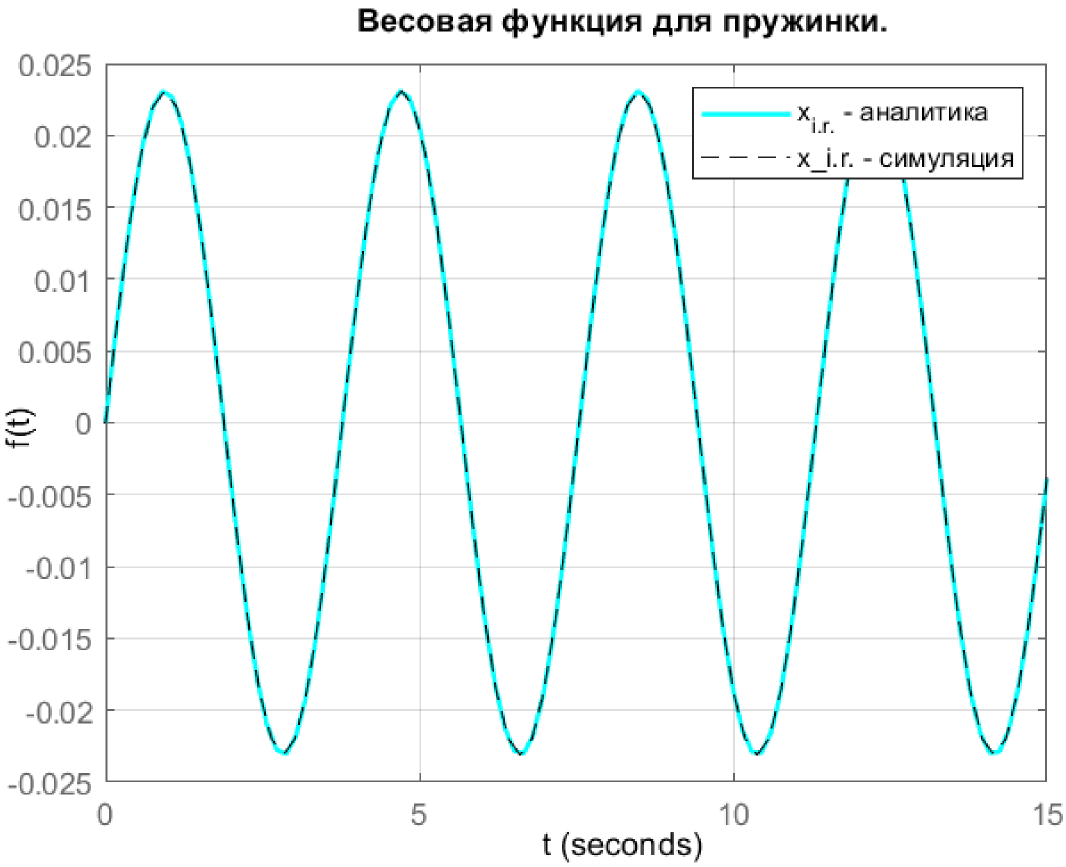

Рисунок 16 — График весовой функции.

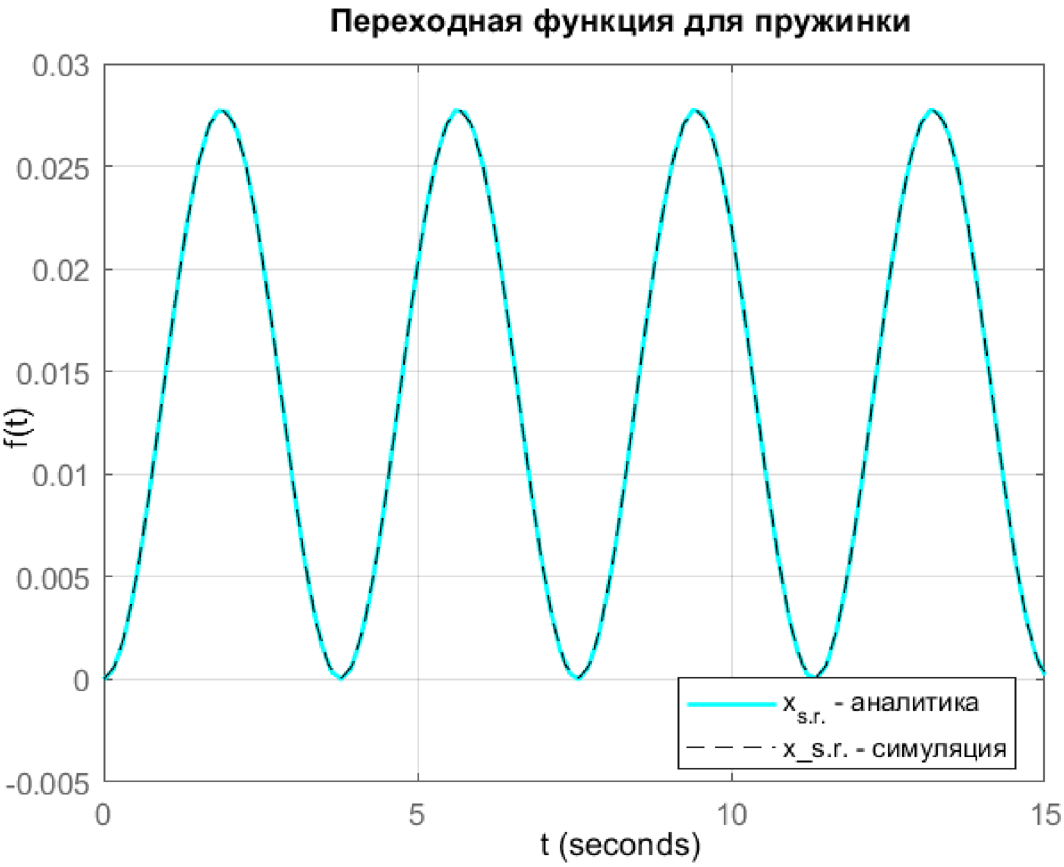

Рисунок 17 — График переходной функции.

4.3 Частотные характеристики

Запишем передаточную функцию, выполнив замену $s \to i\omega$

$$W(i\omega) = \frac{1}{m(i\omega)^2 + k} = \frac{1}{k - m\omega^2} \tag{48}$$

Следовательно,

$$P(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2} \tag{49}$$

$$Q(\omega) = 0 \tag{50}$$

Теперь запишем формулы АЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \left|\frac{1}{k - m\omega^2}\right| \tag{51}$$

ЛАХ:

$$L(\omega) = 20\lg(A(\omega)) = 20\lg\left(\left|\frac{1}{k - m\omega^2}\right|\right) \tag{52}$$

и ФЧХ:

$$\phi(\omega) = atan2\left(Q(\omega), P(\omega)\right) \tag{53}$$

Примечание. Вычисление значений ФЧХ по формуле (53) корректно только при $0 < \frac{1}{k-m\omega^2} < \infty$.

$$k - m\omega^2 > 0 \to k > m\omega^2 \to \omega < \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{72}{26}} \simeq 1.66 \tag{54}$$

При $\omega \in \left(0; \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$ $\phi(\omega) = atan2\left(0, \frac{1}{k-m\omega^2}\right) = 0$.

Так как $Q(\omega) = 0$, $\phi(\omega) = \pi m,\ m \in Z$, убывание амплитуды при $\omega > \sqrt{\frac{k}{m}} \simeq 1.66$, которое наблюдается на графике АЧХ (рисунок 18), позволяет сделать вывод: $m = -1$.

$$\phi(\omega) = \begin{cases} atan2\left(0, \frac{1}{k-m\omega^2}\right),\ \omega \in \left(0; \sqrt{\frac{k}{m}}\right), \\ -\pi,\ \omega > \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \tag{55}$$

Графики частотных характеристик приведены на рисунках 18-20.

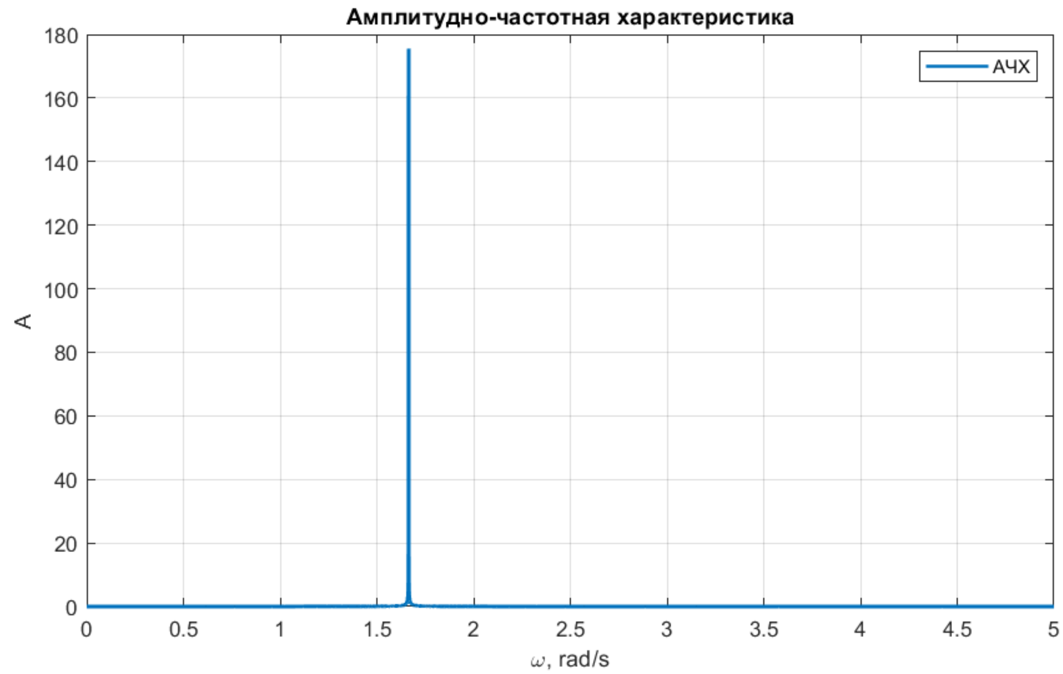

Рисунок 18 — График АЧХ.

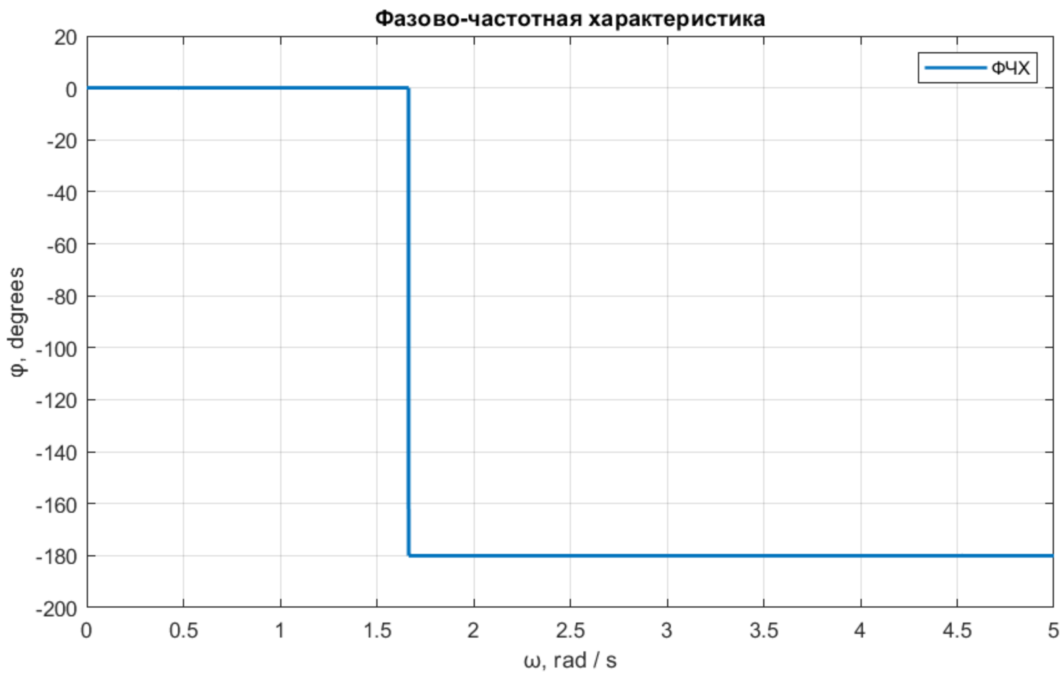

Рисунок 19 — График ФЧХ.

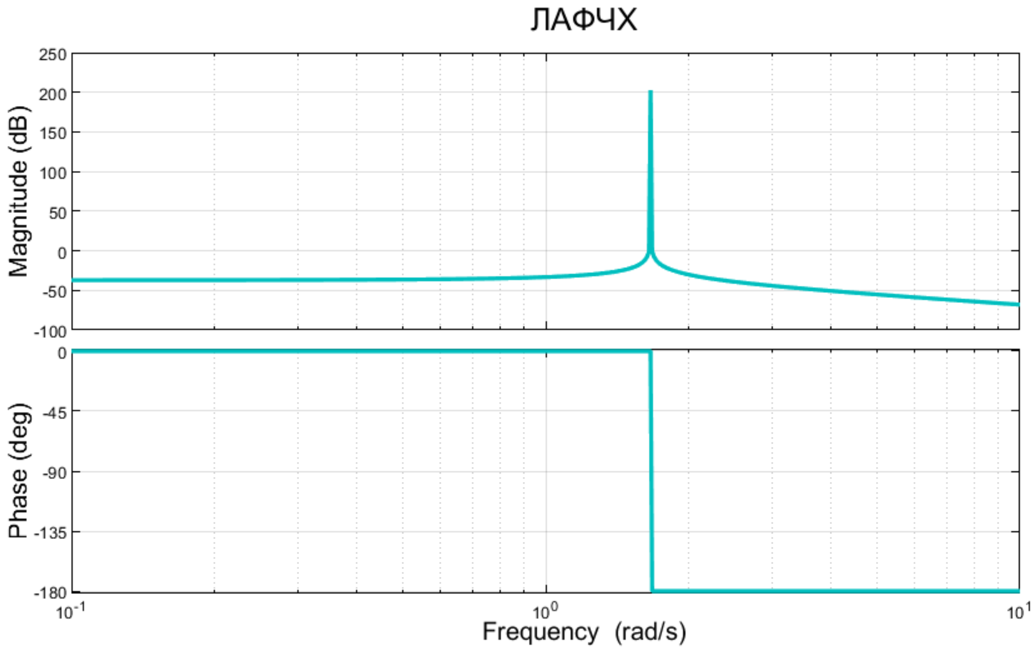

Рисунок 20 — Графики ЛАФЧХ.

5 ЧТО ТЫ ТАКОЕ?

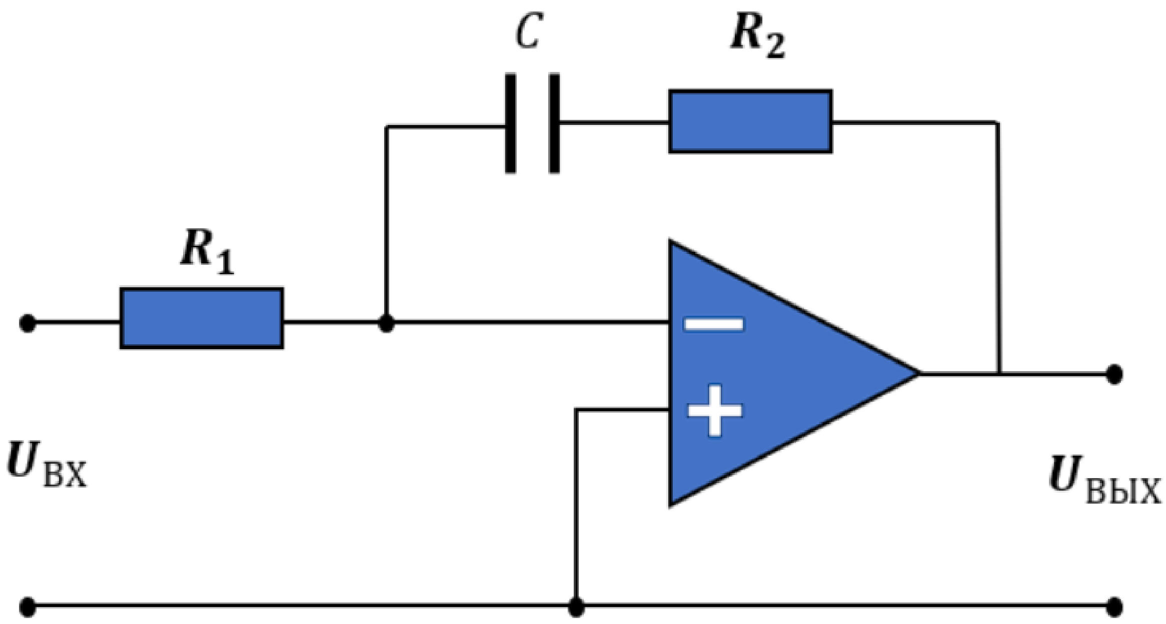

Рисунок 21 — Принципиальная схема регулятора на операционном усилителе.

На рисунке 21 представлена принципиальная схема регулятора на операционном усилителе.

- $R_1 = 2609$, Ом– сопротивление входного резистора;
- $R_2 = 13809$, Ом– сопротивление резистора отрицательной обратной связи;
- $C = 266$, мкФ – емкость конденсатора отрицательной обратной связи.

Входом объекта будем считать $U_{\text{ВХ}}(t)$, а выходом $U_{\text{ВЫХ}}(t)$.

5.1 Передаточная функция через постоянные времени T и значения постоянных.

Запишем передаточную функцию системы:

$$W(s) = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{CR_2 s + 1}{CR_2 s} = \frac{CR_2 s + 1}{CR_1 s} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{CR_1 s} \tag{56}$$

Данный регулятор является **пропорционально-интегральным**. Звено также является **пропорционально-интегральным** или по-другому **изодромным**.

Запишем передаточную функцию через постоянную времени T:

$$W(s) = \frac{1}{Ts} + k, \tag{57}$$

где $T = CR_1$, $k = \frac{R_2}{R_1}$.

5.2 Временные характеристики

Для этого случая начнем с нахождения переходной функции

$$U_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{Ts} + k}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{Ts^2} + \frac{k}{s}\right\} = \frac{t}{T} + k \tag{58}$$

Весовую функцию вычислим по формуле:

$$U_{i.r.}(t) = \dot{U}_{s.r.}(t) = \frac{1}{T} \tag{59}$$

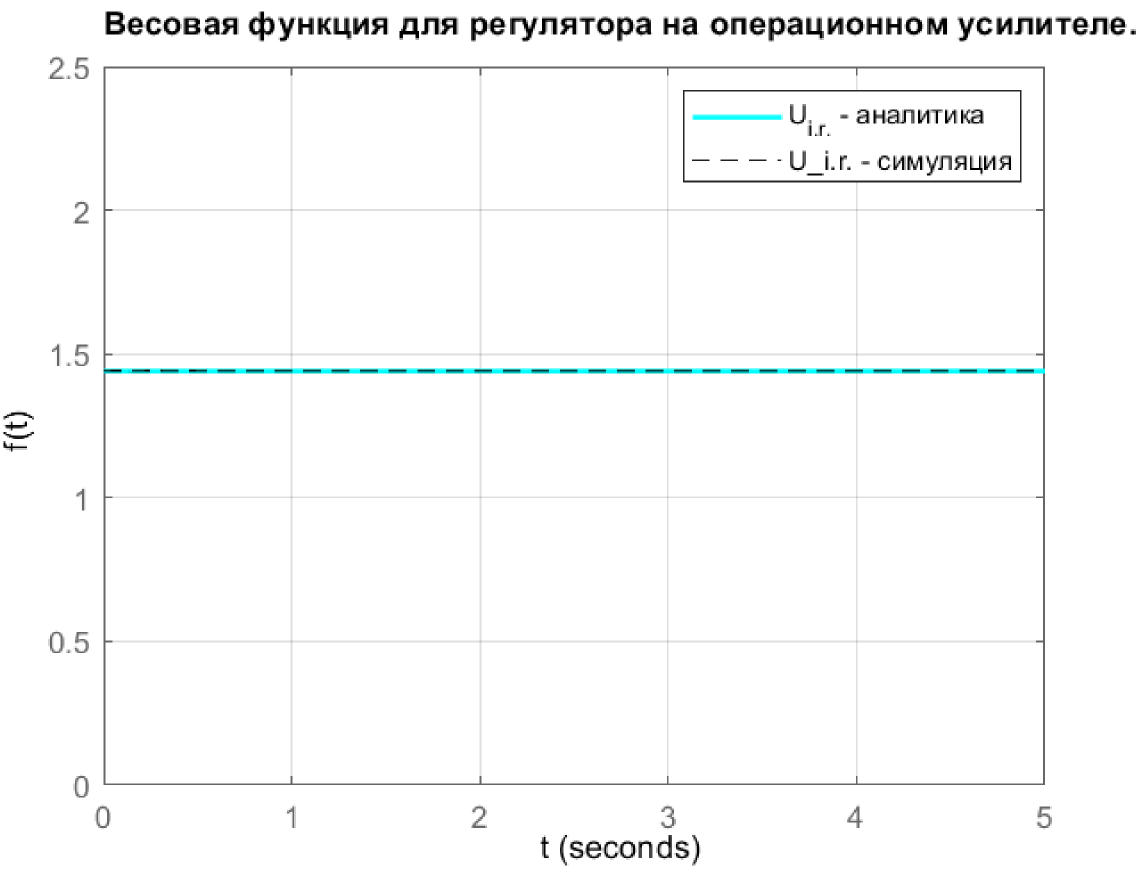

Рисунок 22 — График весовой функции.

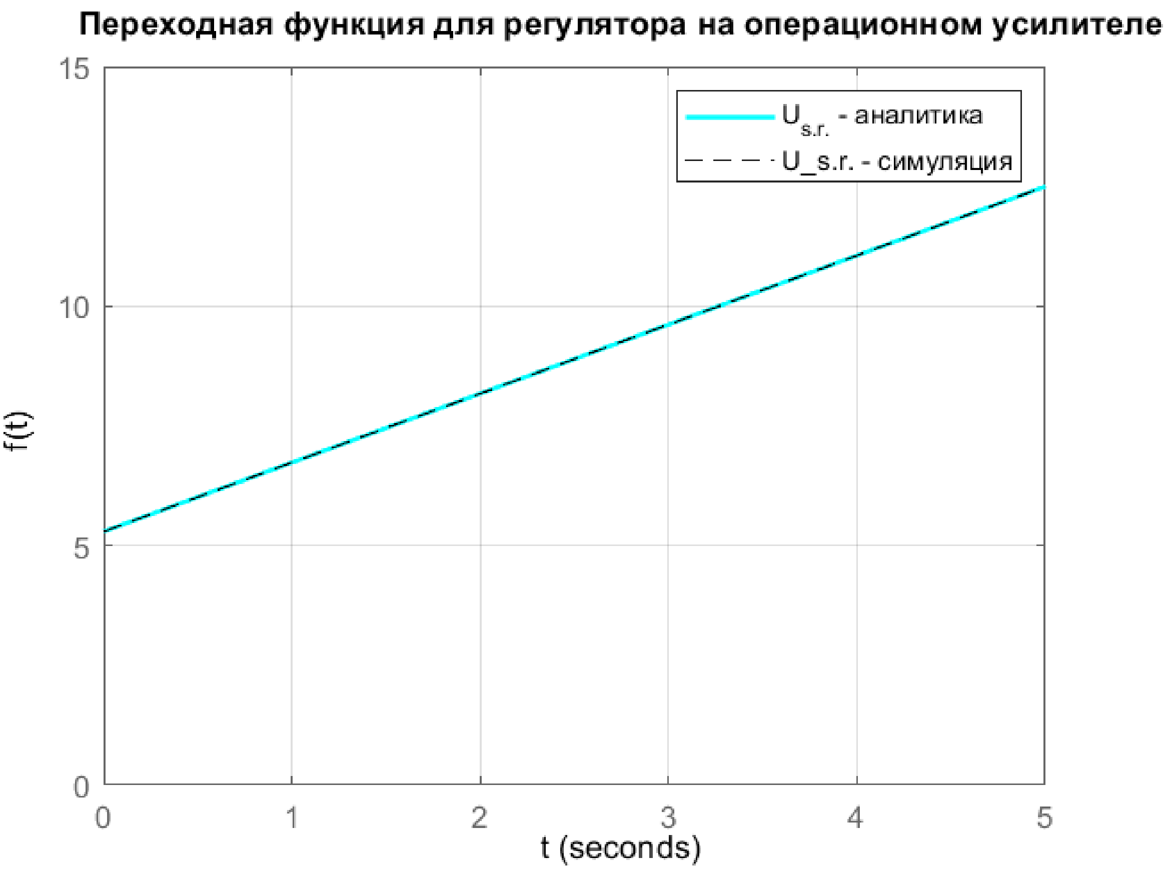

Рисунок 23 — График переходной функции.

5.3 Частотные характеристики

Запишем передаточную функцию, выполнив замену $s \to i\omega$

$$W(i\omega) = \frac{1}{Ti\omega} + k = k - i\frac{1}{T\omega} \tag{60}$$

Следовательно,

$$P(\omega) = k \tag{61}$$

$$Q(\omega) = -\frac{1}{T\omega} \tag{62}$$

Теперь запишем формулы АЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{k^2 + \frac{1}{T^2\omega^2}} \tag{63}$$

ЛАХ:

$$L(\omega) = 20\lg(A(\omega)) = 20\lg\left(\sqrt{k^2 + \frac{1}{T^2\omega^2}}\right) \tag{64}$$

и ФЧХ:

$$\phi(\omega) = atan2\left(Q(\omega), P(\omega)\right) = atan2\left(-\frac{1}{T\omega}, k\right) = -atan2\left(\frac{1}{T\omega}, k\right) \tag{65}$$

Графики частотных характеристик приведены на рисунках 24-26.

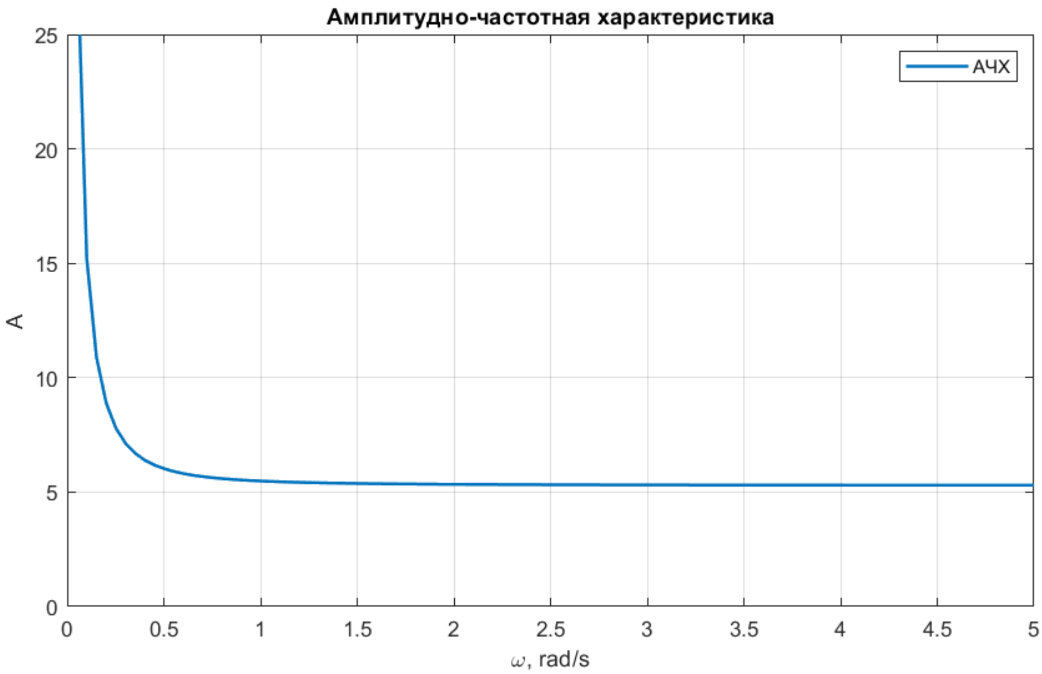

Рисунок 24 — График АЧХ.

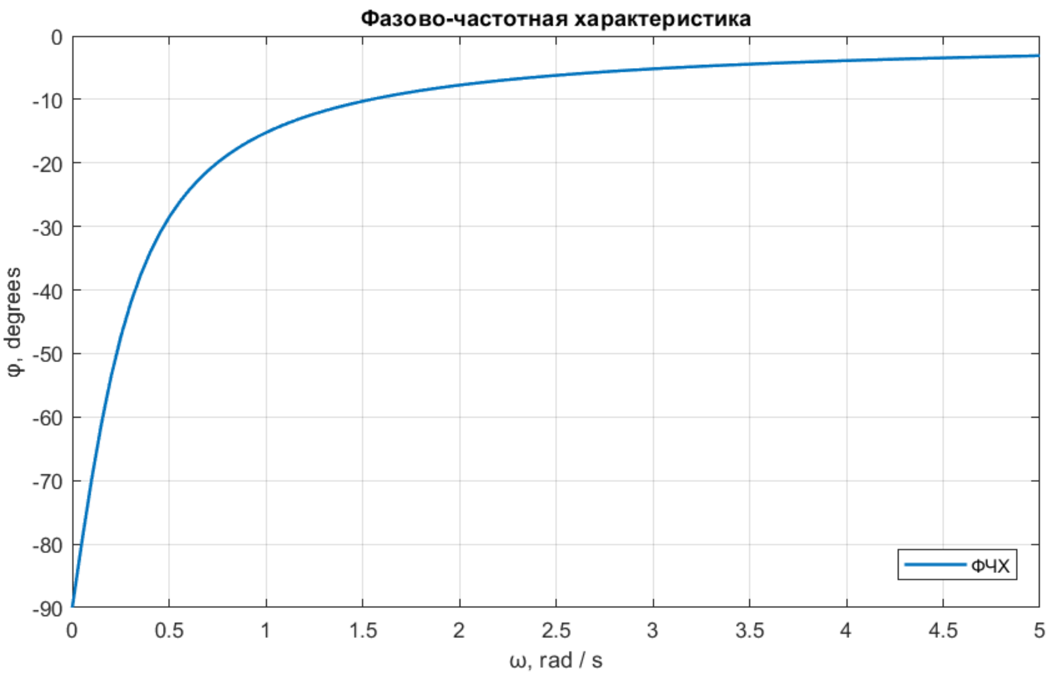

Рисунок 25 — График ФЧХ.

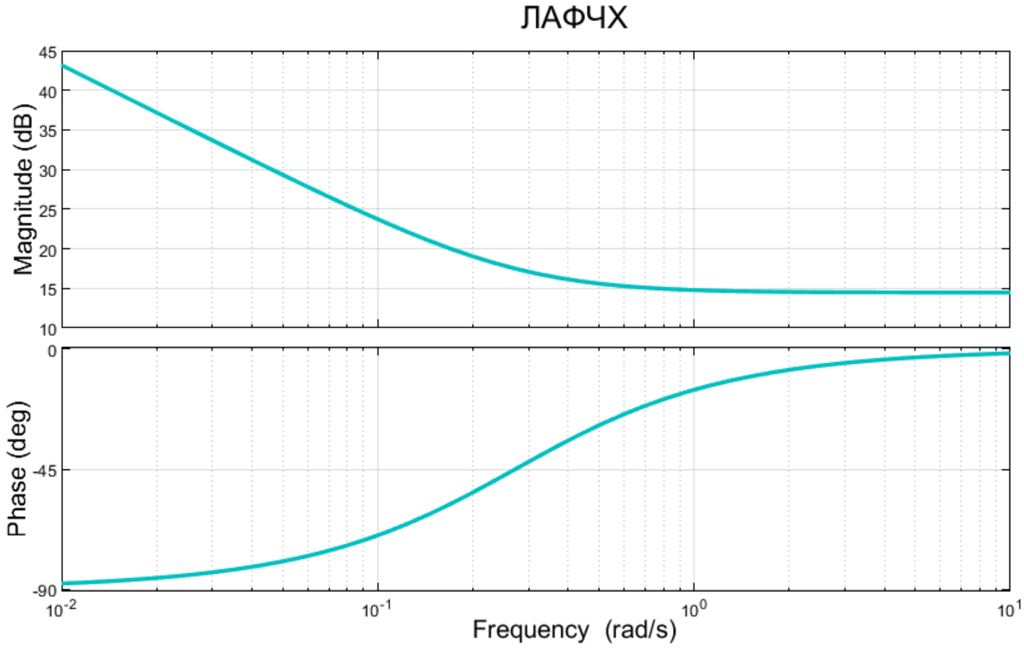

Рисунок 26 — Графики ЛАФЧХ.

6 ВЫВОД

В ходе выполнения лабораторной работы были применены на практике знания о типовых динамических звеньях. Исследовано пять объектов, для каждого из которых определена передаточная функция, тип звена, вычислены временные и частотные характеристики. Проведено сравнение графиков аналитически вычисленных весовых и переходных функций с их аналогами, полученными с использованием передаточных функций, соответствующих определенному типу звена.