

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Типовой расчет и лабораторная работа № 1 "Функции нескольких переменных "

по дисциплине Математический анализ

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Бойцев Антон Александрович*

Санкт-Петербург, 2023-2024

Текст...

1 Задание 1 (новое)

Найти частные производные данной функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$. Выяснить, является ли функция дифференцируемой в точке $(0, 0)$. Найти её дифференциал. **Пункт 2.**

$$f(x, y) = y + \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2} \quad (1)$$

1.1 Частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (2)$$

Производная по x в точке $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt[3]{(\Delta x)^2} - \cos 0}{\Delta x} = -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2}}{\Delta x} = \\ &= -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2} \sqrt[3]{\Delta x}}{4 \left(\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2} \right)^2} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Производная по y в точке $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y + \cos \sqrt[3]{(\Delta y)^2} - \cos 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\cos \sqrt[3]{(\Delta y)^2} - 1}{\Delta y} \right) = \\ &= 1 - 2 \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2}}{\Delta y} = 1 - 2 \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2} \sqrt[3]{\Delta y}}{4 \left(\frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2} \right)^2} = 1 \end{aligned} \quad (4)$$

1.2 Дифференцируемость в точке $(0, 0)$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

(5)

Функция будет дифференцируема в точке $(0; 0)$, если для ее приращения в этой точке выполняется равенство:

$$\Delta f(0; 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0; 0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0; 0) \cdot \Delta y + o(\rho), \quad (6)$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Запишем формулу, подставив в нее выше найденные производные:

$$\Delta f(0; 0) = 0 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \quad (7)$$

Ответ: функция дифференцируема в точке $(0, 0)$.

1.3 Дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (8)$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(y + \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2} \right)'_x = -\frac{2x \sin \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{3 \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} \quad (9)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(y + \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2} \right)'_y = 1 - \frac{2y \sin \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{3 \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} \quad (10)$$

Терерь запишем полный дифференциал:

$$df = -\frac{2x \sin \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{3 \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} dx + \left(1 - \frac{2y \sin \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{3 \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} \right) dy \quad (11)$$

2 Задание 3 (новое).

Произвести указанную замену в данном дифференциальном уравнении. Решить полученное дифференциальное уравнение в новых переменных. Показать, что найденное решение (в исходных переменных) удовлетворяет исходному уравнению. **Пункт 3.**

u и v – новые независимые переменные, w – новая функция. $u = x + y$, $v = x - y$, $w + z = xy$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

$z = z(x, y)$, $w = w(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$

Для начала найдем все производные второго порядка функции w по переменным x и y :

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = w'_u + w'_v \quad (13)$$

$$w''_{ux} = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x = w''_{uu} + w''_{uv} \quad (14)$$

$$w''_{vx} = w''_{vu} \cdot u'_x + w''_{vv} \cdot v'_x = w''_{vu} + w''_{vv} \quad (15)$$

Вторая производная по x :

$$w''_{xx} = w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv} \quad (16)$$

$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = w'_u - w'_v \quad (17)$$

$$w''_{uy} = w''_{uu} \cdot u'_y + w''_{uv} \cdot v'_y = w''_{uu} - w''_{uv} \quad (18)$$

$$w''_{vy} = w''_{vu} \cdot u'_y + w''_{vv} \cdot v'_y = w''_{vu} - w''_{vv} \quad (19)$$

Вторая производная по y :

$$w''_{yy} = w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv} \quad (20)$$

Вторая производная по x и y :

$$w''_{yx} = w''_{xy} = w''_{uu} - w''_{vv} \quad (21)$$

Теперь выразим z''_{xx} , z''_{xy} и z''_{yy} из $w + z = xy$:

$$z = xy - w \quad (22)$$

$$z'_x = y - w'_x \quad (23)$$

$$z'_y = x - w'_y \quad (24)$$

$$z''_{xx} = -w''_{xx} = -(w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv}) \quad (25)$$

$$z''_{xy} = 1 - w''_{xy} = 1 - (w''_{uu} - w''_{vv}) \quad (26)$$

$$z''_{yy} = -w''_{yy} = -(w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv}) \quad (27)$$

Перепишем исходное уравнение в новых переменных и функции:

$$-(w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv}) + 2(1 - (w''_{uu} - w''_{vv})) - (w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv}) = 0 \quad (28)$$

$$-w''_{uu} - 2w''_{uv} - w''_{vv} + 2 - 2w''_{uu} + 2w''_{vv} - w''_{uu} + 2w''_{uv} - w''_{vv} = 0 \quad (29)$$

$$-w''_{uu} + 2 - 2w''_{uu} - w''_{vv} = 0 \quad (30)$$

$$4w''_{uu} = 2 \quad (31)$$

$$w''_{uu} = \frac{1}{2} \quad (32)$$

Решим полученное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d(w'_u)}{du} = \frac{1}{2} \quad (33)$$

$$d(w'_u) = \frac{1}{2} du \quad (34)$$

$$\int d(w'_u) = \int \frac{1}{2} du \quad (35)$$

$$w'_u = \frac{u}{2} + C(v) \quad (36)$$

$$dw = \left(\frac{u}{2} + C(v)\right) du \quad (37)$$

$$\int dw = \int \left(\frac{u}{2} + C(v)\right) du \quad (38)$$

$$w = \frac{u^2}{4} + C(v)u + A(v) \quad (39)$$

Решение в новых переменных:

$$w = \frac{u^2}{4} + C(v)u + A(v) \quad (40)$$

Выполним проверку: вернемся к старым переменным и подставим полученные выражения в исходное равенство:

$$z = xy - w = xy - \frac{u^2}{4} - C(v)u - A(v) = xy - \frac{(x+y)^2}{4} - C(v)(x+y) - A(v) \quad (41)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (42)$$

$$z'_x = \left(xy - \frac{(x+y)^2}{4} - C(x+y) - A\right)'_x = \frac{y}{2} - \frac{x}{2} - C - (x+y)C' - A' \quad (43)$$

$$z'_y = \left(xy - \frac{(x+y)^2}{4} - C(x+y) - A\right)'_y = \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - C + (x+y)C' + A' \quad (44)$$

$$z''_{xx} = \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{2} - C - (x+y)C' - A'\right)'_x = -\frac{1}{2} - 2C' - (x+y)C'' - A'' \quad (45)$$

$$z''_{xy} = \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{2} - C - (x+y)C' - A'\right)'_y = \frac{1}{2} + (x+y)C'' + A'' \quad (46)$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} - C + (x+y)C' + A'\right)'_y = -\frac{1}{2} + 2C' - (x+y)C'' - A'' \quad (47)$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} - 2C' - (x+y)C'' - A'' + 2\left(\frac{1}{2} + (x+y)C'' + A''\right) - \\ & -\frac{1}{2} + 2C' - (x+y)C'' - A'' = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

Получили верное равенство.

Ответ: $w = \frac{u^2}{4} + C(v)u + A(v)$

3 Задание 1 (старое).

Найти частные производные данной функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$. Выяснить, является ли функция дифференцируемой в точке $(0, 0)$. Найти её дифференциал. **Пункт 2.**

$$f(x, y) = y + \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2} \quad (49)$$

3.1 Частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (50)$$

Производная по x в точке $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt[3]{(\Delta x)^2} - \cos 0}{\Delta x} = -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2}}{\Delta x} = \\ &= -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2} \sqrt[3]{\Delta x}}{4 \left(\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2} \right)^2} = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

Производная по y в точке $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y + \cos \sqrt[3]{(\Delta y)^2} - \cos 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\cos \sqrt[3]{(\Delta y)^2} - 1}{\Delta y} \right) = \\ &= 1 - 2 \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2}}{\Delta y} = 1 - 2 \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2} \sqrt[3]{\Delta y}}{4 \left(\frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2} \right)^2} = 1 \end{aligned} \quad (52)$$

3.2 Дифференцируемость в точке $(0, 0)$

Функция будет дифференцируема в точке $(0, 0)$, если для ее приращения в этой точке выполняется равенство:

$$\Delta f(0; 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0; 0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0; 0) \cdot \Delta y + o(\rho), \quad (53)$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Запишем формулу, подставив в нее выше найденные производные:

$$\Delta f(0; 0) = 0 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \quad (54)$$

Ответ: функция дифференцируема в точке $(0, 0)$.

3.3 Дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (55)$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(y + \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2} \right)'_x = -\frac{2x \sin \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} \quad (56)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(y + \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2} \right)'_y = 1 - \frac{2y \sin \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} \quad (57)$$

Терерь запишем полный дифференциал:

$$df = -\frac{2x \sin \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} dx + \left(1 - \frac{2y \sin \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} \right) dy \quad (58)$$

4 Задание 2

Найти производную данной функции в направлении данного вектора в заданной точке *М*. **Пункт 8.**

$$f(x, y, z) = \exp(x + 2xy + 3xyz) \quad (59)$$

по направлению внутренней нормали к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 1$, $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

Найдем уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 1$ в точке $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$:

$$F'_x(M) \cdot (x - x_0) + F'_y(M) \cdot (y - y_0) + F'_z(M) \cdot (z - z_0) = 0 \quad (60)$$

$$F'_x = (x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1)'_x = 2x \quad (61)$$

$$F'_y = (x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1)'_y = 2y \quad (62)$$

$$F'_z = (x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1)'_z = 2z + 2 \quad (63)$$

$$F'_x(M) = 2 \frac{1}{2} = 1 \quad (64)$$

$$F'_y(M) = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad (65)$$

$$F'_z(M) = 2 \quad (66)$$

Искомая плоскость:

$$x - \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot (y - \frac{\sqrt{3}}{2}) + 2z = 0 \quad (67)$$

$$x + \sqrt{3}y + 2z - 2 = 0 \quad (68)$$

Вектор нормали к плоскости $x + \sqrt{3}y + 2z - 2 = 0$ будет выглядеть $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, 2)$. Поверхность $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 1$ представляет собой сферу $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 2$ с центром $O = (0, 0, -1)$ и радиусом $R = \sqrt{2}$.

Так как точкой начала вектора \vec{n} является $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, а его координаты $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, 2)$, то точкой конца вектора будет $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 2\right)$. То есть вектор $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, 2)$ направлен наружу относительно поверхности.

Внутренняя нормаль $\vec{n}_{in} = (-1, -\sqrt{3}, -2)$.

Получим нормированный вектор, по направлению которого будем вычислять производную:

$$|\vec{n}_{in}| = \sqrt{1 + 3 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad (69)$$

$$l = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (70)$$

Вычислим частные производные от $f(x, y, z) = \exp(x + 2xy + 3xyz)$ в точке $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$:

$$f'_x = (1 + 2y + 3yz) \exp(x + 2xy + 3xyz) \quad (71)$$

$$f'_y = (2x + 3xz) \exp(x + 2xy + 3xyz) \quad (72)$$

$$f'_z = 3xy \exp(x + 2xy + 3xyz) \quad (73)$$

$$f'_x(M) = \left(1 + 2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (1 + \sqrt{3}) \exp\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) \quad (74)$$

$$f'_y(M) = \left(2\frac{1}{2}\right) \exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \exp\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) \quad (75)$$

$$f'_z(M) = 3\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \exp\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) \quad (76)$$

Вычислим производную по направлению l в точке M :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial l} &= \left(\left(1 + \sqrt{3}\right) e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}, e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}, \frac{3\sqrt{3}}{4} e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\
 &= -\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} - \frac{1.5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = -\frac{1 + 3.5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \quad (77)
 \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{1+3.5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$

5 Задание 3 (старое).

Произвести указанную замену в данном дифференциальном уравнении. Решить полученное дифференциальное уравнение в новых переменных. Показать, что найденное решение (в исходных переменных) удовлетворяет исходному уравнению. **Пункт 3.**

u и v – новые независимые переменные, w – новая функция. $u = x + y$, $v = x - y$, $w + z = xy$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (78)$$

$z = z(x, y)$, $w = w(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$

Для начала найдем все производные второго порядка функции w по переменным x и y :

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = w'_u + w'_v \quad (79)$$

$$w''_{ux} = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x = w''_{uu} + w''_{uv} \quad (80)$$

$$w''_{vx} = w''_{vu} \cdot u'_x + w''_{vv} \cdot v'_x = w''_{vu} + w''_{vv} \quad (81)$$

Вторая производная по x :

$$w''_{xx} = w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv} \quad (82)$$

$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = w'_u - w'_v \quad (83)$$

$$w''_{uy} = w''_{uu} \cdot u'_y + w''_{uv} \cdot v'_y = w''_{uu} - w''_{uv} \quad (84)$$

$$w''_{vy} = w''_{vu} \cdot u'_y + w''_{vv} \cdot v'_y = w''_{vu} - w''_{vv} \quad (85)$$

Вторая производная по y :

$$w''_{yy} = w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv} \quad (86)$$

Вторая производная по x и y :

$$w''_{yx} = w''_{xy} = w''_{uu} - w''_{vv} \quad (87)$$

Теперь выразим z''_{xx} , z''_{xy} и z''_{yy} из $w + z = xy$:

$$z = xy - w \quad (88)$$

$$z'_x = y - w'_x \quad (89)$$

$$z'_y = x - w'_y \quad (90)$$

$$z''_{xx} = -w''_{xx} = -(w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv}) \quad (91)$$

$$z''_{xy} = 1 - w''_{xy} = 1 - (w''_{uu} - w''_{vv}) \quad (92)$$

$$z''_{yy} = -w''_{yy} = -(w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv}) \quad (93)$$

Перепишем исходное уравнение в новых переменных и функции:

$$-(w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv}) + 2(1 - (w''_{uu} - w''_{vv})) - (w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv}) = 0 \quad (94)$$

$$-w''_{uu} - 2w''_{uv} - w''_{vv} + 2 - 2w''_{uu} + 2w''_{vv} - w''_{uu} + 2w''_{uv} - w''_{vv} = 0 \quad (95)$$

$$-w''_{uu} + 2 - 2w''_{uu} - w''_{vv} = 0 \quad (96)$$

$$4w''_{uu} = 2 \quad (97)$$

$$w''_{uu} = \frac{1}{2} \quad (98)$$

Решим полученное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d(w')}{du} = \frac{1}{2} \quad (99)$$

$$d(w') = \frac{1}{2} du \quad (100)$$

$$\int d(w') = \int \frac{1}{2} du \quad (101)$$

$$w' = \frac{u}{2} + C \quad (102)$$

$$dw = \left(\frac{u}{2} + C \right) du \quad (103)$$

$$\int dw = \int \left(\frac{u}{2} + C \right) du \quad (104)$$

$$w = \frac{u^2}{4} + Cu + A, \quad A = \text{const}, \quad C = \text{const} \quad (105)$$

Решение в новых переменных:

$$w = \frac{u^2}{4} + Cu + A \quad (106)$$

Выполним проверку: вернемся к старым переменным и подставим полученные выражения в исходное равенство:

$$u = x + y \quad (107)$$

$$z = xy - w = xy - \frac{u^2}{4} - Cu - A = xy - \frac{(x+y)^2}{4} - C(x+y) - A \quad (108)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (109)$$

$$z'_x = \left(xy - \frac{(x+y)^2}{4} - C(x+y) - A \right)'_x = y - \frac{x+y}{2} - C = \frac{y}{2} - \frac{x}{2} - C \quad (110)$$

$$z'_y = \left(xy - \frac{(x+y)^2}{4} - C(x+y) - A \right)'_y = x - \frac{x+y}{2} - C = \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - C \quad (111)$$

$$z''_{xx} = \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{2} - C \right)'_x = -\frac{1}{2} \quad (112)$$

$$z''_{xy} = \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{2} - C \right)'_y = \frac{1}{2} \quad (113)$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} - C \right)'_y = -\frac{1}{2} \quad (114)$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение уравнение:

$$-\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad (115)$$

Получили верное равенство.

Ответ: $w = \frac{u^2}{4} + Cu + A$

6 Задание 4

Доказать, что уравнение $F(x, y) = 0$, $F = (F_1, F_2)$ задает неявно дифференцируемое отображение $y = f(x)$, $y = (y_1, y_2)$, $x = (x_1, x_2)$ в окрестности точки $M(x_1, x_2, y_1, y_2)$. Найти производную этого отображения в точке M (матрица Якоби) и одну (любую на выбор) из производных второго порядка $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ в точке M . **Пункт 3.**

$$\begin{cases} F_1(x, y) = x_1 + x_2 + y_1 + 2y_2 - 5, \\ F_2(x, y) = x_1^3 + x_2^2 + y_1^4 + y_2^4 - 4, \end{cases} \quad M(1, 1, 1, 1) \quad (116)$$

$$\begin{cases} F_1(M) = 1 + 1 + 1 + 2 - 5 = 0 \\ F_2(M) = 1 + 1 + 1 + 1 - 4 = 0 \end{cases} \quad (117)$$

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) = f_1(x_1, x_2) \\ y_2 = f_2(x) = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (118)$$

$$|F'_y| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4y_1^3 & 4y_2^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad (119)$$

Следовательно, уравнение $F(x, y) = 0$, $F = (F_1, F_2)$ задает неявно дифференцируемое отображение $y = f(x)$, $y = (y_1, y_2)$, $x = (x_1, x_2)$ в окрестности точки $M(x_1, x_2, y_1, y_2)$.

$$f'_x(M) = -\frac{F'_x(M)}{F'_y(M)} \quad (120)$$

$$F'_x(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3x_1^2 & 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (121)$$

$$(F'_y)^{-1}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (122)$$

$$f'_x(M) = -F'_x(F'_y)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (123)$$

Найдем производную второго порядка $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}$

$$F'_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3x_1^2 & 2x_2 \end{pmatrix} \quad (124)$$

$$(F'_y)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4y_1^3 & 4y_2^3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4y_2^3 - 8y_1^3} \begin{pmatrix} 4y_2^3 & -2 \\ -4y_1^3 & 1 \end{pmatrix} \quad (125)$$

$$f'_x = -\frac{1}{4y_2^3 - 8y_1^3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3x_1^2 & 2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4y_2^3 & -2 \\ -4y_1^3 & 1 \end{pmatrix} \quad (126)$$

Значению $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ соответствует выражение, стоящее на позиции $[0, 0]$ в полученной матрице f'_x :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{y_1^3 - y_2^3}{y_2^3 - 2y_1^3} \quad (127)$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} = 0 \quad (128)$$

7 Задание 5

С помощью метода Лагранжа исследовать функцию на условный экстремум при данном уравнении связи. **Пункт 2.**

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2, \quad x + 2y + 3z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (129)$$

Запишем вид функции Лагранжа:

$$L = u(x, y, z) - \lambda_1 \phi_1(x, y, z) - \lambda_2 \phi_2(x, y, z) \quad (130)$$

$$L = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - \lambda_1 (x + 2y + 3z) - \lambda_2 (x^2 + y^2 + z^2 - 1) \quad (131)$$

$$\begin{cases} L'_x = 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 x = 0 \\ L'_y = 4y - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 y = 0 \\ L'_z = 6z - 3\lambda_1 - 2\lambda_2 z = 0 \\ L'_{\lambda_1} = x + 2y + 3z = 0 \\ L'_{\lambda_2} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (132)$$

$$L'_z - L'_y - L'_x = 6z - 4y - 2x - 2\lambda_2(z - y - x) = 0 \quad (133)$$

$$6z - 4y - 2x - 2\lambda_2(z - y - x) = 0 \Leftrightarrow 3z - 2y - x = \lambda_2(z - y - x) \quad (134)$$

$$\lambda_2 = \frac{3z - 2y - x}{z - y - x} \quad (135)$$

Воспользовавшись численным методом решения получаем следующие решения системы уравнений:

$$1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.959 \\ -0.233 \\ -0.164 \\ -0.207 \\ 1.108 \end{pmatrix} \quad (136)$$

$$2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.959 \\ 0.233 \\ 0.164 \\ 0.207 \\ 1.108 \end{pmatrix} \quad (137)$$

$$3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.099 \\ 0.813 \\ -0.575 \\ -0.260 \\ 2.320 \end{pmatrix} \quad (138)$$

$$4) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.099 \\ -0.813 \\ 0.575 \\ 0.260 \\ 2.320 \end{pmatrix} \quad (139)$$

Рассмотрим случай 1) :

$$\begin{aligned} L(x, y, z) &= x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 0.207(x + 2y + 3z) - 1.108(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = \\ &= -0.108x^2 + 0.892y^2 + 1.892z^2 + 0.207(x + 2y + 3z) + 1.108 \end{aligned} \quad (140)$$

$$d^2L = \begin{pmatrix} -0.216 & 0 & 0 \\ 0 & 1.784 & 0 \\ 0 & 0 & 3.784 \end{pmatrix} \Rightarrow d^2L = -0.216dx^2 + 1.784dy^2 + 3.784dz^2 \quad (141)$$

Из уравнений связи выразим dx и dy :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} dx + 2dy + 3dz = 0, \\ 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} dx = -2dy - 3dz, \\ dy = \frac{3x-z}{y-2x}dz \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} dx = -2\frac{3x-z}{y-2x}dz - 3dz, \\ dy = \frac{3x-z}{y-2x}dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{3y-2z}{2x-y}dz, \\ dy = \frac{3x-z}{y-2x}dz \end{cases} \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned} d^2L &= -0.216 \left(\frac{-3 \cdot 0.233 + 2 \cdot 0.164}{2 \cdot 0.959 + 0.233} \right)^2 dz^2 + 1.784 \left(\frac{3 \cdot 0.959 + 0.164}{-0.233 - 2 \cdot 0.959} \right)^2 dz^2 + \\ &+ 3.784dz^2 = 3.780dz^2 + 1.784 \left(\frac{3 \cdot 0.959 + 0.164}{-0.233 - 2 \cdot 0.959} \right)^2 dz^2 > 0 \end{aligned} \quad (143)$$

Следовательно, $(0.959, -0.233, -0.164)$ – **точка условного минимума.**

Рассмотрим случай 2) :

$$\begin{aligned} d^2L = & -0.216 \left(\frac{3 \cdot 0.233 - 2 \cdot 0.164}{-2 \cdot 0.959 - 0.233} \right)^2 dz^2 + 1.784 \left(\frac{-3 \cdot 0.959 - 0.164}{0.233 + 2 \cdot 0.959} \right)^2 dz^2 + \\ & + 3.784 dz^2 = 3.780 dz^2 + 1.784 \left(\frac{-3 \cdot 0.959 - 0.164}{0.233 + 2 \cdot 0.959} \right)^2 dz^2 > 0 \end{aligned} \quad (144)$$

Следовательно, $(-0.959, 0.233, 0.164)$ – **точка условного минимума**.

Рассмотрим случай 3) :

$$\begin{aligned} L(x, y, z) = & x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 0.260(x + 2y + 3z) - 2.320(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = \\ = & -1.320x^2 - 0.320y^2 + 0.680z^2 + 0.260(x + 2y + 3z) + 2.320 \end{aligned} \quad (145)$$

$$d^2L = \begin{pmatrix} -2.640 & 0 & 0 \\ 0 & -0.640 & 0 \\ 0 & 0 & 1.360 \end{pmatrix} \Rightarrow d^2L = -2.640 dx^2 - 0.640 dy^2 + 1.360 dz^2 \quad (146)$$

Из уравнений связи выразим dx и dy :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} dx + 2dy + 3dz = 0, \\ 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} dx = -2dy - 3dz, \\ dy = \frac{3x-z}{y-2x} dz \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} dx = -2\frac{3x-z}{y-2x} dz - 3dz, \\ dy = \frac{3x-z}{y-2x} dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{3y-2z}{2x-y} dz, \\ dy = \frac{3x-z}{y-2x} dz \end{cases} \end{aligned} \quad (147)$$

$$\begin{aligned} d^2L = & -2.640 \left(\frac{3 \cdot 0.813 + 2 \cdot 0.575}{2 \cdot 0.099 - 0.813} \right)^2 dz^2 - 0.640 \left(\frac{3 \cdot 0.813 + 0.575}{0.813 + 2 \cdot 0.575} \right)^2 dz^2 + \\ & + 1.360 dz^2 = -32.696 dz^2 - 0.640 \left(\frac{3 \cdot 0.813 + 0.575}{0.813 + 2 \cdot 0.575} \right)^2 dz^2 < 0 \end{aligned} \quad (148)$$

Следовательно, $(0.099, 0.813, -0.575)$ – **точка условного максимума**.

Рассмотрим случай 4) :

$$\begin{aligned} d^2L = & -2.640 \left(\frac{-3 \cdot 0.813 - 2 \cdot 0.575}{-2 \cdot 0.099 + 0.813} \right)^2 dz^2 - 0.640 \left(\frac{-3 \cdot 0.813 - 0.575}{-0.813 - 2 \cdot 0.575} \right)^2 dz^2 + \\ & + 1.360 dz^2 = -32.696 dz^2 - 0.640 \left(\frac{-3 \cdot 0.813 - 0.575}{-0.813 - 2 \cdot 0.575} \right)^2 dz^2 < 0 \quad (149) \end{aligned}$$

Следовательно, $(-0.099, -0.813, 0.575)$ – **точка условного максимума**.

8 Лабораторная работа Экстремумы ФНП

Вариант 2

Для данной функции

$$z(x, y) = x^3 y^2 (4 - x - y)$$

найти точки локальных экстремумов.

8.1 Аналитический метод

1. Найдём стационарные точки, т.е. точки, удовлетворяющие необходимому условию экстремума.

$$z'_x = (x^3 y^2 (4 - x - y))'_x = 3x^2 y^2 (4 - x - y) - x^3 y^2 = -x^2 y^2 (4x - 12 + 3y) \quad (150)$$

$$z'_y = (x^3 y^2 (4 - x - y))'_y = 2x^3 y (4 - x - y) - x^3 y^2 = x^3 y (8 - 2x - 3y) \quad (151)$$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 4x - 12 + 3y = 0 \\ 8 - 2x - 3y = 0 \end{cases} \quad (152)$$

$$\begin{cases} 4x - 12 + 3y = 0 \\ 8 - 2x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \quad (153)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = 2 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \quad (154)$$

2. Для каждой точки получить матрицу Гессе и проверить достаточное условие экстремума, сделать вывод.

Матрица Гессе для функции 2-х переменных:

$$H = \begin{pmatrix} z''_{xx}(M_0) & z''_{xy}(M_0) \\ z''_{yx}(M_0) & z''_{yy}(M_0) \end{pmatrix} \quad (155)$$

Производные второго порядка:

$$z''_{xx} = (-x^2y^2(4x - 12 + 3y))'_x = -6xy^2(2x + y - 4) \quad (156)$$

$$z''_{xy} = (-x^2y^2(4x - 12 + 3y))'_y = x^2y(24 - 8x - 9y) \quad (157)$$

$$z''_{yx} = (x^3y(8 - 2x - 3y))'_x = x^2y(24 - 8x - 9y) \quad (158)$$

$$z''_{yy} = (x^3y(8 - 2x - 3y))'_y = -2x^3(x + 3y - 4) \quad (159)$$

При $x = 0$

$$z''_{xx}(0, a) = 0 \quad (160)$$

$$z''_{xy}(0, a) = z''_{yx}(0, a) = 0 \quad (161)$$

$$z''_{yy}(0, a) = 0 \quad (162)$$

При $x = 0$ определитель матрицы Гессе равен нулю, следовательно, требуются дополнительные исследования для точек вида $(0, a)$.

При $y = 0$

$$z''_{xx}(b, 0) = 0 \quad (163)$$

$$z''_{xy}(b, 0) = z''_{yx}(b, 0) = 0 \quad (164)$$

$$z''_{yy}(b, 0) = -2b^3(b - 4) \quad (165)$$

При $y = 0$ определитель матрицы Гессе равен нулю, следовательно, требуются дополнительные исследования для точек вида $(b, 0)$.

В точке $(2, \frac{4}{3})$

$$z''_{xx}\left(2, \frac{4}{3}\right) = -6 \cdot 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(2 \cdot 2 + \frac{4}{3} - 4\right) = -\frac{2^8}{3^2} \quad (166)$$

$$z''_{xy}\left(2, \frac{4}{3}\right) = z''_{yx}\left(2, \frac{4}{3}\right) = 2^2 \cdot \frac{4}{3} \left(24 - 8 \cdot 2 - 9 \cdot \frac{4}{3}\right) = -\frac{2^6}{3} \quad (167)$$

$$z''_{yy}\left(2, \frac{4}{3}\right) = -2 \cdot 2^3 \left(2 + 3 \cdot \frac{4}{3} - 4\right) = -2^5 \quad (168)$$

$$\Delta H = \begin{pmatrix} -\frac{2^8}{3^2} & -\frac{2^6}{3} \\ -\frac{2^6}{3} & -2^5 \end{pmatrix} = \frac{2^{13}}{3^2} - \frac{2^{12}}{3^2} > 0 \quad (169)$$

Следовательно, в точке $(2, \frac{4}{3})$ есть экстремум, так как $z''_{xx}(2, \frac{4}{3}) < 0$, то это **максимум**.

3. В случае невыполнения достаточного условия проверить подозрительную точку, используя определение экстремума, сделать вывод.

Достаточное условие не выполнено в точках вида $(0, a)$ и $(b, 0)$.

$$z(0 + \Delta x, a + \Delta y) - z(0, a) = \Delta x^3 (\Delta y + a)^2 (4 - \Delta x - \Delta y - a) \quad (170)$$

Знак выражения выше не определен однозначно, следовательно, в $(0, a)$ нет экстремума.

$$z(b + \Delta x, 0 + \Delta y) - z(b, 0) = (\Delta x + b)^3 \Delta y^2 (4 - \Delta x - \Delta y - b) \quad (171)$$

Знак выражения выше также не определен однозначно, следовательно, в $(b, 0)$ нет экстремума.

Вывод: функция $z(x, y) = x^3 y^2 (4 - x - y)$ имеет только 1 экстремум (максимум) в точке $(2, \frac{4}{3})$.

4. Построить график данной функции и линии уровня.

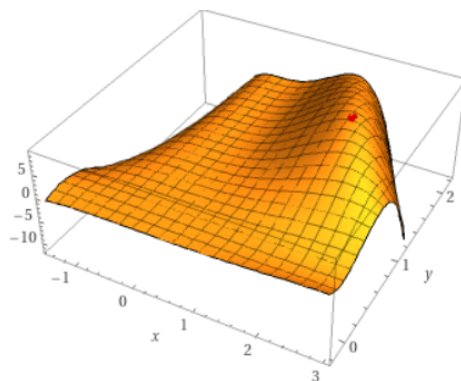


Рис. 1. График функции $z(x, y) = x^3 y^2 (4 - x - y)$ с экстремумом в точке $(2, \frac{4}{3})$.

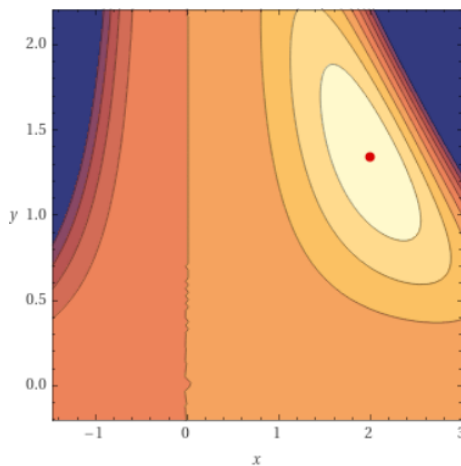


Рис. 2. Линии уровня $z(x, y) = x^3 y^2 (4 - x - y)$ с экстремумом в точке $(2, \frac{4}{3})$.

8.2 Численный метод

Численный метод поиска экстремума реализован на основе *градиентного спуска* со следующими заданными параметрами:

1. Целевая точка (точка экстремума) $(2, \frac{4}{3})$;
2. Точка старта (нулевое приближение) $(1, 1)$;
3. Формула для вычисления следующего шага:

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) + a_k \text{grad } f(x_k, y_k) \quad (172)$$

Результат работы программы 1:

1. Критерий останова: $|\Delta f| < \epsilon = 10^{-20}$
2. Число итераций: 1654, $a_k = 0.001$
3. Время выполнения: 0.39569736 с
4. Полученная точка: $(1.99999978, 1.33333354)$
5. Значение функции: $z = 9.48148148$

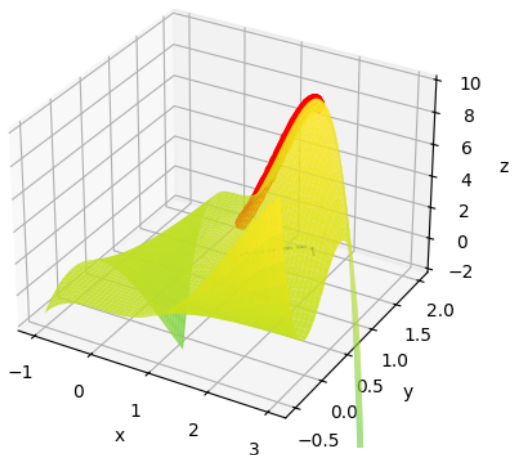


Рис. 3. Результат работы программы 1.

Результат работы программы 2:

1. Критерий останова: $\|(\Delta x_k, \Delta y_k)\| < \delta = 10^{-20}$
2. Число итераций: 3536, $a_k = 0.001$
3. Время выполнения: 0.35638070 с
4. Полученная точка: $(2., 1.33333333)$
5. Значение функции: $z = 9.48148148$

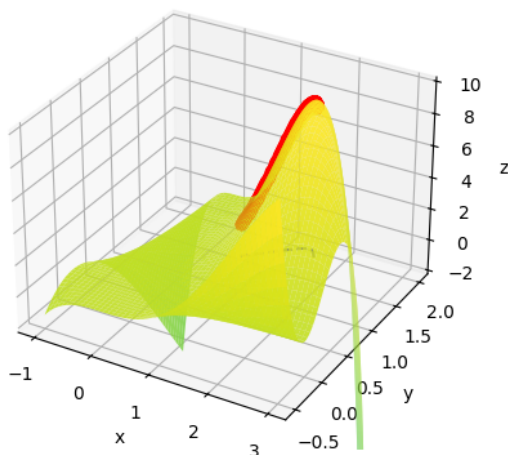


Рис. 4. Результат работы программы 2.

Вывод: по результатам выполнения программы с разными критериями останова можно сказать, что метод градиентного спуска дает одинаково хороший результат, как при условии малости приращения функции, так и при требовании малости приращения ее аргументов. Время выполнения отличается не сотые секунды, количество итераций во втором случае почти в 2 раза выше, но и результат поиска точки максимума точнее. Поэтому если говорить об эффективности, выбор критерия останова как $\|(\Delta x_k, \Delta y_k)\| < \delta$, демонстрирует лучшие результаты.