

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Типовой расчет № 1
"Функции нескольких переменных "

по дисциплине Математический анализ

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Бойцев Антон Александрович*

Санкт-Петербург, 2023-2024

1 задание.

Найти частные производные данной функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$. Выяснить, является ли функция дифференцируемой в точке $(0, 0)$. Найти её дифференциал. Пункт 2.

$$f(x, y) = y + \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2} \quad (1)$$

1.1 Частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (2)$$

Производная по x в точке $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt[3]{(\Delta x)^2} - \cos 0}{\Delta x} = -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2}}{\Delta x} = \\ &= -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2} \sqrt[3]{\Delta x}}{4 \left(\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2} \right)^2} = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Производная по y в точке $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y + \cos \sqrt[3]{(\Delta y)^2} - \cos 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\cos \sqrt[3]{(\Delta y)^2} - 1}{\Delta y} \right) = \\ &= 1 - 2 \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2}}{\Delta y} = 1 - 2 \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2} \sqrt[3]{\Delta y}}{4 \left(\frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2} \right)^2} = 1 \quad (4) \end{aligned}$$

1.2 Дифференцируемость в точке $(0, 0)$

1.3 Дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (5)$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(y + \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2} \right)'_x = -\frac{2x}{3} \frac{\sin \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} \quad (6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(y + \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2} \right)'_y = 1 - \frac{2y}{3} \frac{\sin \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} \quad (7)$$

Терерь запишем полный дифференциал:

$$df = -\frac{2x}{3} \frac{\sin \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} dx + \left(1 - \frac{2y}{3} \frac{\sin \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} \right) dy \quad (8)$$

2 задание

Найти производную данной функции в направлении данного вектора в заданной точке M . Пункт 8.

$$f(x, y, z) = \exp(x + 2xy + 3xyz) \quad (9)$$

по направлению внутренней нормали к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 1$,
 $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

Найдем уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 1$ в точке $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$:

$$F'_x(M) \cdot (x - x_0) + F'_y(M) \cdot (y - y_0) + F'_z(M) \cdot (z - z_0) = 0 \quad (10)$$

$$F'_x = (x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1)'_x = 2x \quad (11)$$

$$F'_y = (x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1)'_y = 2y \quad (12)$$

$$F'_z = (x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1)'_z = 2z + 2 \quad (13)$$

$$F'_x(M) = 2 \frac{1}{2} = 1 \quad (14)$$

$$F'_y(M) = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad (15)$$

$$F'_z(M) = 2 \quad (16)$$

Искомая плоскость:

$$x - \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot (y - \frac{\sqrt{3}}{2}) + 2z = 0 \quad (17)$$

$$x + \sqrt{3}y + 2z - 2 = 0 \quad (18)$$

Вектор нормали к плоскости $x + \sqrt{3}y + 2z - 2 = 0$ будет выглядеть $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, 2)$. Поверхность $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 1$ представляет собой сферу $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 2$ с центром $O = (0, 0, -1)$ и радиусом $R = \sqrt{2}$.

Так как точкой начала вектора \vec{n} является $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, а его координаты $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, 2)$, то точкой конца вектора будет $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 2\right)$. То есть вектор $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, 2)$ направлен наружу относительно поверхности.

Внутренняя нормаль $\vec{n}_{in} = (-1, -\sqrt{3}, -2)$.

Получим нормированный вектор, по направлению которого будем вычислять производную:

$$|\vec{n}_{in}| = \sqrt{1 + 3 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad (19)$$

$$l = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (20)$$

Вычислим частные производные от $f(x, y, z) = \exp(x + 2xy + 3xyz)$ в точке $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$:

$$f'_x = (1 + 2y + 3yz) \exp(x + 2xy + 3xyz) \quad (21)$$

$$f'_y = (2x + 3xz) \exp(x + 2xy + 3xyz) \quad (22)$$

$$f'_z = 3xy \exp(x + 2xy + 3xyz) \quad (23)$$

$$f'_x(M) = \left(1 + 2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (1 + \sqrt{3}) \exp\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) \quad (24)$$

$$f'_y(M) = \left(2\frac{1}{2}\right) \exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \exp\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) \quad (25)$$

$$f'_z(M) = 3\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \exp\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) \quad (26)$$

Вычислим производную по направлению l в точке M :

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \left((1 + \sqrt{3}) e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}, e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}, \frac{3\sqrt{3}}{4} e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \quad (27)$$

3 задание

Произвести указанную замену в данном дифференциальном уравнении. Решить полученное дифференциальное уравнение в новых переменных. Показать, что найденное решение (в исходных переменных) удовлетворяет исходному уравнению. Пункт 3.

u и v – новые независимые переменные, w – новая функция. $u = x + y$, $v = x - y$, $w + z = xy$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (28)$$

$z = z(x, y)$, $w = w(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$

Для начала найдем все производные второго порядка функции w по переменным x и y :

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = w'_u + w'_v \quad (29)$$

$$w''_{ux} = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x = w''_{uu} + w''_{uv} \quad (30)$$

$$w''_{vx} = w''_{vu} \cdot u'_x + w''_{vv} \cdot v'_x = w''_{vu} + w''_{vv} \quad (31)$$

Вторая производная по x :

$$w''_{xx} = w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv} \quad (32)$$

$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = w'_u - w'_v \quad (33)$$

$$w''_{uy} = w''_{uu} \cdot u'_y + w''_{uv} \cdot v'_y = w''_{uu} - w''_{uv} \quad (34)$$

$$w''_{vy} = w''_{vu} \cdot u'_y + w''_{vv} \cdot v'_y = w''_{vu} - w''_{vv} \quad (35)$$

Вторая производная по y :

$$w''_{yy} = w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv} \quad (36)$$

Вторая производная по x и y :

$$w''_{yx} = w''_{xy} = w''_{uu} - w''_{vv} \quad (37)$$

Теперь выразим z''_{xx} , z''_{xy} и z''_{yy} из $w + z = xy$: