ТИПОВОЙ РАСЧЕТ по математическому анализу
III семестр, модуль 6.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования.

1. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} fdx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} fdx.$

2. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} fdx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} fdx.$

3. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} fdx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y^2}} fdx.$

4. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} fdx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} fdx.$

5. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} fdy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} fdy.$

6. $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} fdx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} fdx.$

7. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} fdx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} fdx.$

8. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} fdx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} fdx.$

9. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} fdy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} fdy.$

10. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} fdy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} fdy.$

11. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} fdy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} fdy.$

12. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}} fdx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} fdx.$

13. $\int\limits_{0}^{\pi.4} dy \int\limits_{0}^{\sin y} fdx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_{0}^{\cos y} fdx.$

14. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} fdy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} fdy.$

15. $\int\limits_{0}^{\pi/4} dy \int\limits_{0}^{\sin y} fdx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_{0}^{\cos y} fdx.$

16. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} fdx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} fdx.$

17. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{0} fdx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} fdx.$

18. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^3} fdx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} fdx.$

19. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} fdy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} fdy.$

20. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} fdx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} fdx.$

21. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-0}^{y} fdx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} fdx.$

22. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} fdy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} fdy.$

23. $\int\limits_{0}^{\pi/4} dx \int\limits_{0}^{\sin x} fdy + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int\limits_{0}^{\cos x} fdy.$

24. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} fdx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} fdx.$

25. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^3} fdy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} fdy.$

26. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} fdy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} fdy.$

27. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} fdy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} fdy.$

28. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x fdy+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dx\int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} fdy.$

29. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}} fdx+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dy\int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} fdx.$

30. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} fdy+\int\limits_1^{2} dx\int\limits_0^{\sqrt{2-x}} fdy.$

31. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} fdy+\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx\int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} fdy.$

Задача 2. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями, с помощью двойного интеграла.

1. $y^2-2y+x^2=0, y^2-4y+x^2=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$
2. $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}.$
3. $y^2-6y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$
4. $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, y=0, y=x.$
5. $y^2-8y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$
6. $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=0, y=x.$
7. $y^2-4y+x^2=0, y^2-6y+x^2=0, y=x, x=0.$
8. $x^2-2x+y^2=0, x^2-10x+y^2=0, y=0, y=\sqrt{3}x.$
9. $y^2-6y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=x, x=0.$
10. $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$
11. $y^2-2y+x^2=0, y^2-4y+x^2=0, y=\sqrt{3}x, x=0.$
12. $x^2-2x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$
13. $y^2-4y+x^2=0, y^2-6y+x^2=0, y=\sqrt{3}x, x=0.$
14. $x^2-2x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$
15. $y^2-2y+x^2=0, y^2-6y+x^2=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}, x=0.$
16. $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, y=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}.$

17. $y^2-2y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$

18. $x^2-2x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=0, y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

19. $y^2-4y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$

20. $x^2-2x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=0, y=x.$

21. $y^2-2y+x^2=0, y^2-4y+x^2=0, y=x, x=0.$

22. $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, y=0, y=\sqrt{3}x.$

23. $y^2-6y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=x, x=0.$

24. $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=0, y=\sqrt{3}x.$

25. $y^2-4y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=x, x=0.$

26. $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$

27. $y^2-4y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=\sqrt{3}x, x=0.$

28. $x^2-4x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$

29. $y^2-2y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, x=0.$

30. $x^2-6x+y^2=0, x^2-10x+y^2=0, y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$

31. $y^2-4y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, x=0.$

Задача 3. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

1. $y=5x^2+2, y=7, z=3y^2-7x^2-2, z=3y^2-7x^2-5.$
2. $y=5x^2-2, y=-4x^2+7, z=4+9x^2+5y^2, z=-1+9x^2+5y^2.$
3. $x=-5y^2+2, x=-3, z=3x^2+y^2+1, z=3x^2+y^2-5.$
4. $x=2y^2-3, x=-7y^2+6, z=1+\sqrt{x^2+16y^2}, z=-3+\sqrt{x^2+16y^2}.$
5. $y=-6x^2+8, y=2, z=x-x^2-y^2-1, z=x-x^2-y^2-5.$
6. $y=5x^2-1, y=-3x^2+1, z=-2+\sqrt{3x^2+y^2}, z=-5+\sqrt{3x^2+y^2}.$
7. $x=5y^2-9, x=-4, z=x^2+4x-y^2-4, z=x^2+4x-y^2+2.$
8. $y=6x^2-1, y=5, z=2x^2+x-y^2, z=2x^2+x-y^2+4.$
9. $x=5y^2-1, x=-3y^2+1, z=2+\sqrt{x^2+6y^2}, z=-1+\sqrt{x^2+6y^2}.$
10. $x=-3y^2+7, x=4, z=2+\sqrt{6x^2+y^2}, z=3+\sqrt{6x^2+y^2}.$
11. $y=-5x^2+3, y=-2, z=2x^2-3y-6y^2-1, z=2x^2-3y-6y^2+2.$

12. $y = x^2 - 5, y = -x^2 + 3, z = 4 + \sqrt{5x^2 + 8y^2}, z = 1 + \sqrt{5x^2 + 8y^2}$.
13. $x = 3y^2 - 5, x = -2, z = 2 - \sqrt{x^2 + 16y^2}, z = 8 - \sqrt{x^2 + 16y^2}$.
14. $x = y^2 - 2, x = -4y^2 + 3, z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + 2, z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} - 1$.
15. $y = 2x^2 - 1, y = 1, z = x^2 - 5y^2 - 3, z = x^2 - 5y^2 - 6$.
16. $y = x^2 - 2, y = -4x^2 + 3, z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}, z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}$.
17. $x = -4y^2 + 1, x = -3, z = x^2 - 7y^2 - 1, z = x^2 - 7y^2 + 2$.
18. $x = 7y^2 - 6, x = -2y^2 + 3, z = 3 + 5x^2 - 8y^2, z = -2 + 5x^2 - 8y^2$.
19. $y = 1 - 2x^2, y = -1, z = x^2 + 2y + y^2 - 2, z = x^2 + 2y + y^2 + 1$.
20. $y = x^2 - 7, y = -8x^2 + 2, z = 3 - 12y^2 + 5x^2, z = -2 - 12y^2 + 5x^2$.
21. $x = 2y^2 + 3, x = 5, z = 1 + \sqrt{9x^2 + 4y^2}, z = 4 + \sqrt{9x^2 + 4y^2}$.
22. $y = 3x^2 + 4, y = 7, z = 5 - \sqrt{2x^2 + 3y^2}, z = 1 - \sqrt{2x^2 + 3y^2}$.
23. $x = 5y^2 - 2, x = -4y^2 + 7, z = 4 - \sqrt{2x^2 + 3y^2}, z = -1 - \sqrt{2x^2 + 3y^2}$.
24. $x = -2y^2 + 5, x = 3, z = 5 - \sqrt{x^2 + 25y^2}, z = 2 - \sqrt{x^2 + 25y^2}$.
25. $y = -3x^2 + 5, y = 2, x = 3 + \sqrt{5x^2 + y^2}, z = -1 + \sqrt{5x^2 + y^2}$.
26. $y = 3x^2 - 5, y = -6x^2 + 4, z = 2 + 10x^2 - y^2, z = -2 + 10x^2 - y^2$.
27. $x = 4y^2 + 2, x = 6, z = x^2 + 4y^2 + y + 1, z = x^2 + 4y^2 + y + 4$.
28. $x = 3y^2 - 2, x = -4y^2 + 5, z = 4 - 7x^2 - 9y^2, z = 1 - 7x^2 - 9y^2$.
29. $y = 2x^2 - 5, y = -3, z = 2 + \sqrt{x^2 + 4y^2}, z = -1 + \sqrt{x^2 + 4y^2}$.
30. $y = 2x^2 - 3, y = -7x^2 + 6, z = 1 - 5x^2 - 6y^2, z = -3 - 5x^2 - 6y^2$.
31. $y = -2x^2 + 7, y = 5, z = 1 - 2x^2 + 3y^2, z = 4 - 2x^2 + 3y^2$.

Задача 4. Ввести новые переменные *u* и *v* и вычислить интеграл (1 – 9 варианты):

1. $\iint\limits_D \frac{(x+y)^2}{x} dxdy,\ D = \{(x,y):\ 1 - x \le y \le 3 - x,\quad x/2 \le y \le 2x\}$

2. $\iint\limits_D \left(x^2y^2 + y^2\right) dxdy,\ D = \{(x,y):\ 1/x \le y \le 2/x,\quad x \le y \le 3x\}$

3. $\iint\limits_D xydxdy,\ D = \left\{(x,y):\ ax^3 \le y \le bx^3,\quad px \le y^2 \le qx\right\}$

4. $\iint\limits_D \frac{x^2 \sin xy}{y} dxdy,\ D = \left\{(x,y):\ ay \le x^2 \le by,\quad px \le y^2 \le qx\right\}$

5. $\iint\limits_D xydxdy,\ D = \left\{(x,y):\ ax^2 \le y^3 \le bx^2,\quad \alpha x \le y \le \beta x\right\}$

6. $\iint\limits_D \left(x^3 + y^3\right) dxdy,\ D = \left\{(x,y):\ x^2 \le y \le 3x^2,\quad 1/x \le 2y \le 3/x\right\}$

7. $\iint\limits_D xy(x+y)dxdy,\ D = \{(x,y):\ -1 \le x - y \le 1,\quad 1/x \le y \le 2/x\}$

8. $\iint\limits_D x^2dxdy,\ D = \left\{(x,y):\ x^3 \le y \le 2x^3,\quad x \le 2y \le 6x\right\}$

9. $\iint\limits_D xy(x+y)dxdy,\ D=\{(x,y):\ x-1\le y\le x+1,\ \ -x-1\le y\le -x+1\ \}$

Произведя надлежащую замену переменных, найти площадь фигуры, ограниченной кривыми (10 – 20 варианты):

10. $xy=p,\ xy=q,\ y^2=ax,\ y^2=bx,\ 0<p<q,\ 0<a<b$;

11. $x^2+y^2=ay,\ \ x^2+y^2=by,\ \ x=\alpha y,\ x=\beta y,\quad 0<a<b,\ 0<\alpha<\beta$;

12. $x^2=py,\ x^2=qy,\ y=\alpha x,\ \ y=\beta x,\ 0<p<q,\ 0<\alpha<\beta$;

13. $y=\dfrac{x^3}{a^2},\ y=\dfrac{x^3}{b^2},\ y=\dfrac{x^2}{c},\ y=\dfrac{x^2}{d},\quad 0<a<b,\ 0<c<d$;

14. $y=ax^3,\ y=bx^3,\ y^2=px,\ y^2=qx,\ 0<p<q,\ 0<a<b$;

15. $y^2=2p\left(x-p/2\right),\ y^2=2q\left(x-q/2\right),\ y^2=2r\left(x-r/2\right),\quad 0<p<q<r,\ x>0,\ y>0$;

16. $y=\dfrac{x^2}{a},\ y=\dfrac{x^2}{b},\ y^2=\dfrac{x^3}{c},\ y^2=\dfrac{x^3}{d},\quad 0<a<b,\ 0<c<d$;

17. $y=\dfrac{x^4}{a^3},\ y=\dfrac{x^4}{b^3},\ xy=c^2,\ xy=d^2,\ x>0,\ y>0,\ 0<a<b,\ 0<c<d$;

18. $xy=p,\ xy=q,\ y=\alpha x,\ y=\beta x,\ 0<p<q,\ 0<\alpha<\beta$;

19. $y=\dfrac{x^5}{a^4},\ y=\dfrac{x^5}{b^4},\ x=\dfrac{y^5}{c^4},\ x=\dfrac{y^5}{d^4},\ x>0,\ \ y>0,\ 0<a<b,\ 0<c<d$;

20. $\left(x+2y-1\right)^2+\left(2x+y-2\right)^2=9$.

Задача 5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

1. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2+\dfrac{z^4}{c^4}=\dfrac{x}{k}$.

2. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{xyz}{h^3}$.

3. $\left(\left(x^2+y^2\right)^2+z^4\right)^2=a^3z\left(x^2+y^2\right)^2$.

4. $\left(\left(x^2+y^2\right)^3+z^6\right)^2=a^6\left(x^2+y^2\right)^3$.

5. $\left(\dfrac{x^4}{k^4}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{p^2}$.

6. $\left(x^2+y^2\right)^2+z^4=a^3\left(y-x\right)$.

7. $\left(x^2+y^2\right)^3+z^6=a^3xyz$.

8. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=a^3z\left(x^2-y^2\right)$.

9. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=a^3\left(x^3+y^3\right)$.

10. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^4\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)=\dfrac{z^4}{k^4}$.

11. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=a^6\sin^2\left(\dfrac{\pi z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$.

12. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^3z\exp\left(-\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}\right)$.

13. $\left(x^2+y^2\right)^3+z^6=3a^3z^3$.

14. $\left(x^2+y^2\right)^2+z^4=a^3z$.

15. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=a^2y^2z^2$.

16. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=az\left(x^2+y^2\right)^2$.

17. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=a^2z^4$.

18. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=az\left(x^2+y^2\right)$.

19. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=axyz$.

20. $\left(x^2+z^2\right)^2+y^4=y$.

В задачах 6 и 7 криволинейные интегралы должны быть разных родов, то есть, если вы используете в задаче 6 криволинейный интеграл 1 рода, то в задаче 7 – второго, и наоборот.

Задача 6. Найти циркуляцию векторного поля a вдоль замкнутого контура Γ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t). Вычислить двумя способами.

1. $a=yi-xj+z^2k,\ \Gamma:\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t, y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \\ z=\sin t. \end{cases}$

2. $a=-x^2y^3i+j+zk,\ \Gamma:\begin{cases} x=\sqrt[3]{4}\cos t, y=\sqrt[3]{4}\sin t, \\ z=3. \end{cases}$

3. $a=(y-z)i+(z-x)j+(x-y)k,\ \Gamma:\begin{cases} x=\cos t, y=\sin t, \\ z=2(1-\cos t). \end{cases}$

4. $a=x^2i+yj-zk,\ \Gamma:\begin{cases} x=\cos t, y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \\ z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t. \end{cases}$

5. $a=(y-z)i+(z-x)j+(x-y)k,\ \Gamma:\begin{cases} x=4\cos t, y=4\sin t, \\ z=1-\cos t. \end{cases}$

6. $a=2yi-3xj+xk,\ \Gamma:\begin{cases} x=2\cos t, y=2\sin t, \\ z=2-2\cos t-2\sin t. \end{cases}$

7. $a=2zi-xj+yk,\ \Gamma:\begin{cases} x=2\cos t, y=2\sin t, \\ z=1. \end{cases}$

8. $a=yi-xj+zk,\ \Gamma:\begin{cases} x=\cos t, y=\sin t, \\ z=3. \end{cases}$

9. $a=xi+z^2j+yk,\ \Gamma:\begin{cases} x=\cos t, y=2\sin t, \\ z=2\cos t-2\sin t-1. \end{cases}$

10. $a=3yi-3xj+xk,\ \Gamma:\begin{cases} x=3\cos t, y=3\sin t, \\ z=3-3\cos t-3\sin t. \end{cases}$

11. $a=-x^2y^3i+2j+xzk,\ \Gamma:\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, y=\sqrt{2}\sin t, \\ z=1. \end{cases}$

12. $a=6zi-xj+xyk,\ \Gamma:\begin{cases} x=3\cos t, y=3\sin t, \\ z=3. \end{cases}$

13. $a=zi+y^2j-xk,\ \Gamma:\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, y=2\sin t, \\ z=\sqrt{2}\cos t. \end{cases}$

14. $a=xi+2z^2j+yk,\ \Gamma:\begin{cases} x=\cos t, y=3\sin t, \\ z=2\cos t-3\sin t-2. \end{cases}$

15. $a = yi - \frac{1}{3}z^2 j + yk,\ \Gamma : \begin{cases} x = \frac{\cos t}{2}, y = \frac{\sin t}{3}, \\ z = \cos t - \frac{\sin t}{3} - \frac{1}{4}. \end{cases}$

16. $a = 4yi - 3xj + xk,\ \Gamma : \begin{cases} x = 4\cos t, y = 4\sin t, \\ z = 4 - 4\cos t - 4\sin t. \end{cases}$

17. $a = -zi - 3xj + xk,\ \Gamma : \begin{cases} x = 5\cos t, y = 5\sin t, \\ z = 4. \end{cases}$

18. $a = zi + xj + yk,\ \Gamma : \begin{cases} x = 2\cos t, y = 2\sin t, \\ z = 0. \end{cases}$

19. $a = (y - z)i + (z - x)j + (x - y)k,\ \Gamma : \begin{cases} x = 3\cos t, y = 3\sin t, \\ z = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

20. $a = 2yi - zj + xk,\ \Gamma : \begin{cases} x = \cos t, y = \sin t, \\ z = 4 - csot - \sin t. \end{cases}$

Задача 7. Найти модуль циркуляции векторного поля a вдоль замкнутого контура Γ. Вычислить двумя способами.

1. $a = (x^2 - y)i + xj + k,\ \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$

2. $a = xzi - j + yk,\ \Gamma : \begin{cases} z = 5(x^2 + y^2) - 1, \\ z = 4. \end{cases}$

3. $a = yzi + 2xzj + xyk,\ \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9 (z > 0). \end{cases}$

4. $a = xi + 2xzj - xk,\ \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

5. $a = (x - y)i + xj - zk,\ \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$

6. $a = yi - xj + z^2 k,\ \Gamma : \begin{cases} z = 3(x^2 + y^2) + 1, \\ z = 4. \end{cases}$

7. $a = yzi + 2xzj + y^2 k,\ \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16 (z > 0). \end{cases}$

8. $a = xyi + yzj + zxk,\ \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

9. $a = yzi + (1 - x)j - zk,\ \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 1 (z > 0). \end{cases}$

10. $a = yi - xj + z^2 k,\ \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 4. \end{cases}$

11. $a = 4xi + 2j - xyk,\ \Gamma : \begin{cases} z = (x^2 + y^2) + 1, \\ z = 7. \end{cases}$

12. $a = 2yi - 3xj + z^2k,\ \Gamma:\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$

13. $a = -3zi + y^2 j + 2yk,\ \Gamma:\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$

14. $a = 2yi + 5zj + 3xk,\ \Gamma:\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 1, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

15. $a = 2yi + j - 2yzk,\ \Gamma:\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1, \\ z = 2. \end{cases}$

16. $a = (x - y)i + xj + z^2k,\ \Gamma:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 1. \end{cases}$

17. $a = xzi - j + yk,\ \Gamma:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 1. \end{cases}$

18. $a = 2yzi + xzj - x^2k,\ \Gamma:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9(z > 0). \end{cases}$

19. $a = 4xi - yzj + xk,\ \Gamma:\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

20. $a = -yi + 2j + k,\ \Gamma:\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$

В задачах 8 и 9 поверхностные интегралы должны быть разных родов, то есть, если вы используете в задаче 8 поверхностный интеграл 1 рода, то в задаче 9 – второго, и наоборот.

Задача 8. Найти поток векторного поля a через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя). Вычислить двумя способами.

1. $a = (x + z)i + (z + y)k,\quad S:\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = x, z = 0(z \geq 0). \end{cases}$

2. $a = 2xi + zk, S:\begin{cases} z = 3x^2 + 2y^2 + 1, \\ x^2 + y^2 = 4, z = 0. \end{cases}$

3. $a = 2xi + 2yj + zk,\ S:\begin{cases} y = x^2, y = 4x^2, y = 1(x \geq 0), \\ z = y, z = 0. \end{cases}$

4. $a = 3xi - zj,\ S:\begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z^2 = x^2 + y^2(z \geq 0). \end{cases}$

5. $a = (z + y)i + yj - xk,\ S:\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ z = 2,\ z = 0. \end{cases}$

6. $a = xi - (x + 2y)j + yk,\ S:\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, z = 0, \\ x + 2y + 3z = 6. \end{cases}$

7. $a = 2(z - y)i + (x - z)k,\ S:\begin{cases} z = x^2 + y^2 + 1, z = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

8. $a = xi + zj - yk,\ S:\begin{cases} z = 4 - 2(x^2 + y^2), \\ z = 2(x^2 + y^2). \end{cases}$

9. $a = zi - 4yj + 2xk,\ S:\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{cases}$

10. $a = 4xi - 2yj - zk,\ S:\begin{cases} 3x + 2y = 12, 3x + y = 6, y = 0, \\ x + y + z = 6, z = 0. \end{cases}$

11. $a = 8xi - 2yj + xk,\ S:\begin{cases} x + y = 1, x = 0, y = 0, \\ z = x^2 + y^2, z = 0. \end{cases}$

12. $a = zi + xj - zk,\ S:\begin{cases} 4z = x^2 + y^2, \\ z = 4. \end{cases}$

13. $a = 6xi - 2yj - zk,\ S:\begin{cases} z = 3 - 2(x^2 + y^2), \\ z^2 = x^2 + y^2 (z \ge 0). \end{cases}$

14. $a = (z + y)i + (x - z)j + zk,\ S:\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4, \\ 3x + 4y + z = 12, z = 1. \end{cases}$

15. $a = (y + 2z)i - yj + 3xk,\ S:\begin{cases} 3z = 27 - 2(x^2 + y^2), \\ z = x^2 + y^2 (z \ge 0). \end{cases}$

16. $a = (y + 6x)i + 5(x + z)j + 4yk,\ S:\begin{cases} y = x, y = 2x, y = 2, \\ z = x^2 + y^2, z = 0. \end{cases}$

17. $a = yi + 5yj + zk,\ S:\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = x, z = 0 (z \ge 0). \end{cases}$

18. $a = zi + (3y - x)j - zk,\ S:\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = x^2 + y^2 + 2, z = 0. \end{cases}$

19. $a = yi + (x + 2y)j + xk,\ S:\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ z = x^2 + y^2, \\ z = 0. \end{cases}$

20. $a = zi + xj - yk,\ S:\begin{cases} x = 4 - 2(z^2 + y^2), \\ x = 2(z^2 + y^2). \end{cases}$

Задача 9. Найти поток векторного поля a через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя). Вычислить двумя способами.

1. $a = x^2 i + xj + xzk,\ S:\begin{cases} z = x^2 + y^2, z = 1, \\ x = 0, y = 0, \\ (1\ \textit{октант}). \end{cases}$

2. $a = (x^2 + y^2)i + (y^2 + z^2)j + (y^2 + z^2)k,\ S:\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$

3. $a = x^2 i + y^2 j + z^2 k,\ S:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2 (z \ge 0). \end{cases}$

4. $a = x^2 i + yj + x \setminus zk,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0 (z \geq 0). \end{cases}$

5. $a = xzi + zj + yk,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - z, \\ z = 0. \end{cases}$

6. $a = 3xzi - 2xi + yk,\ S: \begin{cases} x + y + z = 2, x = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$

7. $a = x^2 i + y^2 j + z^2 k,\ S: \begin{cases} z = x^2 + y^2 + z^2, \\ z = 0 (z \geq 0). \end{cases}$

8. $a = x^3 i + y^3 j + z^3 k,\ S: x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

9. $a = (zx + y)i + (zy - x)j + (x^2 + y^2)k,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0 (z \geq 0). \end{cases}$

10. $a = y^2 xi + z^2 yj + x^2 zk,\ S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$

11. $a = x^2 i + y^2 j + z^2 k,\ S: \begin{cases} z = x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0 \\ (1\ \textit{октант}). \end{cases}$

12. $a = x^2 i + xyj + 3zk,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 4. \end{cases}$

13. $a = (zx + y)i + (xy - z)j + (x^2 + yz)k,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$

14. $a = xy^2 i + x^2 yj + zk,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1, \\ x = 0, y = 0, \\ (1\ \textit{октант}). \end{cases}$

15. $a = xyi + yzj + zxk,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0). \end{cases}$

16. $a = 3x^2 i - 2x^2 yj + (2x - 1)zk,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$

17. $a = x^2 i + y^2 j + 2zk,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}, \\ z = 0, z = 2. \end{cases}$

18. $a = xyi + yzj + xzk,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$

19. $a = xyi + yzj + zxk,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0, \\ (1\ \textit{октант}). \end{cases}$

20. $a = zi + yzj - xyk,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$

Задание 10: потенциал векторного поля

Проверьте, является ли данное векторное поле соленоидальным или потенциальным. Найдите его потенциал (если он существует) с помощью криволинейного интеграла. Проверьте результат.

1. $\vec{a} = (yz + y - 1)\vec{i} + (xz + x)\vec{j} + (xy + 2)\vec{k}$;

2. $\vec{a} = (e^x(z - 3x^2 - 6x) + 3x^2)\vec{i} + z^2\vec{j} + (e^x + 2yz)\vec{k}$;

3. $\vec{a} = (-4x + y)\vec{i} + (x + 2y + z)\vec{j} + (y + 2z)\vec{k}$;

4. $\vec{a} = (2xy - 6x)\vec{i} + (x^2 - 2yz)\vec{j} - y^2\vec{k}$;

5. $\vec{a} = (2 + \sin y)\vec{i} + (x\cos y + z)\vec{j} + (y + 2z)\vec{k}$;

6. $\vec{a} = (y^2 - 3x^2 + z)\vec{i} + 2xy\vec{j} + (x + 1)\vec{k}$;

7. $\vec{a} = 2x(y + z)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j} + (x^2 - z^2 + 3)\vec{k}$;

8. $\vec{a} = (z^2 - y^2)\sin x\vec{i} + (2y\cos x + 2)\vec{j} - 2z\cos x\vec{k}$.