Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Типовой расчет № 1
"Функции нескольких переменных "

по дисциплине Математический анализ

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Бойцев Антон Александрович*

Санкт-Петербург, 2023-2024

1 задание.

Найти частные производные данной функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$. Выяснить, является ли функция дифференцируемой в точке $(0, 0)$. Найти её дифференциал. Пункт 2.

$$f(x, y) = y + \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2} \tag{1}$$

1.1 Частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{2}$$

Производная по x в точке $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \sqrt[3]{(\Delta x)^2} - \cos 0}{\Delta x} = -2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2}}{\Delta x} = \\ = -2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2} \sqrt[3]{\Delta x}}{4 \left(\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2} \right)^2} = 0 \tag{3}$$

Производная по y в точке $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y + \cos \sqrt[3]{(\Delta y)^2} - \cos 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(1 + \frac{\cos \sqrt[3]{(\Delta y)^2} - 1}{\Delta y} \right) = \\ = 1 - 2 \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2}}{\Delta y} = 1 - 2 \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2} \sqrt[3]{\Delta y}}{4 \left(\frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2} \right)^2} = 1 \tag{4}$$

1.2 Дифференцируемость в точке $(0, 0)$

1.3 Дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \tag{5}$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(y + \cos\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)'_x = -\frac{2x}{3}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}} \tag{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(y + \cos\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)'_y = 1 - \frac{2y}{3}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}} \tag{7}$$

Тереръ запишем полный дифференциал:

$$df = -\frac{2x}{3}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}}dx + \left(1 - \frac{2y}{3}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}}\right)dy \tag{8}$$

2 задание

Найти производную данной функции в направлении данного вектора в заданной точке M. Пункт 8.

$$f(x, y, z) = \exp(x + 2xy + 3xyz) \tag{9}$$

по направлению внутренней нормали к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 1$, $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

Найдем уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2+y^2+z^2+2z = 1$ в точке $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$:

$$F'_x(M) \cdot (x - x_0) + F'_y(M) \cdot (y - y_0) + F'_z(M) \cdot (z - z_0) = 0 \tag{10}$$

$$F'_x = \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1\right)'_x = 2x \tag{11}$$

$$F'_y = \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1\right)'_y = 2y \tag{12}$$

$$F'_z = \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1\right)'_z = 2z + 2 \tag{13}$$

$$F'_x(M) = 2\frac{1}{2} = 1 \tag{14}$$

$$F'_y(M) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \tag{15}$$

$$F'_z(M) = 2 \tag{16}$$

Искомая плоскость:

$$x - \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot (y - \frac{\sqrt{3}}{2}) + 2z = 0 \tag{17}$$

$$x + \sqrt{3}y + 2z - 2 = 0 \tag{18}$$

Вектор нормали к плоскости $x + \sqrt{3}y + 2z - 2 = 0$ будет выглядеть $\vec{n} = \left(1, \sqrt{3}, 2\right)$. Поверхность $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 1$ представляет собой сферу $x^2 + y^2 + \left(z + 1\right)^2 = 2$ с центром $O = (0, 0, -1)$ и радиусом $R = \sqrt{2}$.

Так как точкой начала вектора $\vec{n}$ является $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, а его координаты $\vec{n} = \left(1, \sqrt{3}, 2\right)$, то точкой конца вектора будет $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 2\right)$. То есть вектор $\vec{n} = \left(1, \sqrt{3}, 2\right)$ направлен наружу относительно поверхности.

Внутренняя нормаль $\vec{n}_{in} = \left(-1, -\sqrt{3}, -2\right)$.
Получим нормированный вектор, по направлению которого будем вычислять производную:

$$|\vec{n}_{in}| = \sqrt{1+3+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \tag{19}$$

$$l = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{20}$$

Вычислим частные производные от $f(x, y, z) = \exp(x + 2xy + 3xyz)$ в точке $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$:

$$f'_x = (1 + 2y + 3yz)\exp(x + 2xy + 3xyz) \tag{21}$$

$$f'_y = (2x + 3xz)\exp(x + 2xy + 3xyz) \tag{22}$$

$$f'_z = 3xy\exp(x + 2xy + 3xyz) \tag{23}$$

$$f'_x(M) = \left(1 + 2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(1 + \sqrt{3}\right)\exp\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \tag{24}$$

$$f'_y(M) = \left(2\frac{1}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \exp\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \tag{25}$$

$$f'_z(M) = 3\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\exp\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \tag{26}$$

Вычислим производную по направлению l в точке M:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \left(\left(1+\sqrt{3}\right)e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}, e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}, \frac{3\sqrt{3}}{4}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}\right)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} - \frac{1.5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = -\frac{1+3.5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \quad (27)$$

Ответ: $-\frac{1+3.5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$

3 задание

Произвести указанную замену в данном дифференциальном уравнении. Решить полученное дифференциальное уравнение в новых переменных. Показать, что найденное решение (в исходных переменных) удовлетворяет исходному уравнению. Пункт 3.

u и v – новые независимые переменные, w – новая функция. $u = x + y$, $v = x - y$, $w + z = xy$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{28}$$

$z = z(x, y)$, $w = w(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$

Для начала найдем все производные второго порядка функции w по переменным x и y:

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = w'_u + w'_v \tag{29}$$

$$w''_{ux} = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x = w''_{uu} + w''_{uv} \tag{30}$$

$$w''_{vx} = w''_{vu} \cdot u'_x + w''_{vv} \cdot v'_x = w''_{vu} + w''_{vv} \tag{31}$$

Вторая производная по x:

$$w''_{xx} = w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv} \tag{32}$$

$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = w'_u - w'_v \tag{33}$$

$$w''_{uy} = w''_{uu} \cdot u'_y + w''_{uv} \cdot v'_y = w''_{uu} - w''_{uv} \tag{34}$$

$$w''_{vy} = w''_{vu} \cdot u'_y + w''_{vv} \cdot v'_y = w''_{vu} - w''_{vv} \tag{35}$$

Вторая производная по y:

$$w''_{yy} = w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv} \tag{36}$$

Вторая производная по x и y:

$$w''_{yx} = w''_{xy} = w''_{uu} - w''_{vv} \tag{37}$$

Теперь выразим z''_{xx}, z''_{xy} и z''_{yy} из $w + z = xy$: