Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Типовой расчет № 1
"Функции нескольких переменных "

по дисциплине Математический анализ

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Бойцев Антон Александрович*

Санкт-Петербург, 2023-2024

1 задание.

Найти частные производные данной функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$. Выяснить, является ли функция дифференцируемой в точке $(0, 0)$. Найти её дифференциал. Пункт 2.

$$f(x, y) = y + \cos\sqrt[3]{x^2 + y^2} \tag{1}$$

1.1 Частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{2}$$

Производная по x в точке $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\sqrt[3]{(\Delta x)^2} - \cos 0}{\Delta x} = -2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2}}{\Delta x} = \\ = -2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2} \sqrt[3]{\Delta x}}{4\left(\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2}\right)^2} = 0 \tag{3}$$

Производная по y в точке $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y + \cos\sqrt[3]{(\Delta y)^2} - \cos 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(1 + \frac{\cos\sqrt[3]{(\Delta y)^2} - 1}{\Delta y}\right) = \\ = 1 - 2 \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2}}{\Delta y} = 1 - 2 \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2} \sqrt[3]{\Delta y}}{4\left(\frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2}\right)^2} = 1 \tag{4}$$

1.2 Дифференцируемость в точке $(0, 0)$

1.3 Дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \tag{5}$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(y + \cos\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)'_x = -\frac{2x}{3}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}} \tag{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(y + \cos\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)'_y = 1 - \frac{2y}{3}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}} \tag{7}$$

Тереръ запишем полный дифференциал:

$$df = -\frac{2x}{3}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}}dx + \left(1 - \frac{2y}{3}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}}\right)dy \tag{8}$$

2 задание

Найти производную данной функции в направлении данного вектора в заданной точке M. Пункт 8.

$$f(x, y, z) = \exp(x + 2xy + 3xyz) \tag{9}$$

по направлению внутренней нормали к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 1$, $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

Найдем уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2+y^2+z^2+2z = 1$ в точке $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$:

$$F'_x(M) \cdot (x - x_0) + F'_y(M) \cdot (y - y_0) + F'_z(M) \cdot (z - z_0) = 0 \tag{10}$$

$$F'_x = \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1\right)'_x = 2x \tag{11}$$

$$F'_y = \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1\right)'_y = 2y \tag{12}$$

$$F'_z = \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1\right)'_z = 2z + 2 \tag{13}$$

$$F'_x(M) = 2\frac{1}{2} = 1 \tag{14}$$

$$F'_y(M) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \tag{15}$$

$$F'_z(M) = 2 \tag{16}$$

Искомая плоскость:

$$x - \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot (y - \frac{\sqrt{3}}{2}) + 2z = 0 \tag{17}$$

$$x + \sqrt{3}y + 2z - 2 = 0 \tag{18}$$

Вектор нормали к плоскости $x + \sqrt{3}y + 2z - 2 = 0$ будет выглядеть $\vec{n} = \left(1, \sqrt{3}, 2\right)$. Поверхность $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 1$ представляет собой сферу $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2$ с центром $O = (0, 0, -1)$ и радиусом $R = \sqrt{2}$.

Так как точкой начала вектора $\vec{n}$ является $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, а его координаты $\vec{n} = \left(1, \sqrt{3}, 2\right)$, то точкой конца вектора будет $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 2\right)$. То есть вектор $\vec{n} = \left(1, \sqrt{3}, 2\right)$ направлен наружу относительно поверхности.

Внутренняя нормаль $\vec{n}_{in} = \left(-1, -\sqrt{3}, -2\right)$.
Получим нормированный вектор, по направлению которого будем вычислять производную:

$$|\vec{n}_{in}| = \sqrt{1+3+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \tag{19}$$

$$l = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{20}$$

Вычислим частные производные от $f(x, y, z) = \exp(x + 2xy + 3xyz)$ в точке $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$:

$$f'_x = (1 + 2y + 3yz)\exp(x + 2xy + 3xyz) \tag{21}$$

$$f'_y = (2x + 3xz)\exp(x + 2xy + 3xyz) \tag{22}$$

$$f'_z = 3xy\exp(x + 2xy + 3xyz) \tag{23}$$

$$f'_x(M) = \left(1 + 2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(1 + \sqrt{3}\right)\exp\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \tag{24}$$

$$f'_y(M) = \left(2\frac{1}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \exp\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \tag{25}$$

$$f'_z(M) = 3\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\exp\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \tag{26}$$

Вычислим производную по направлению l в точке M:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \left(\left(1+\sqrt{3}\right)e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}, e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}, \frac{3\sqrt{3}}{4}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}\right)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} - \frac{1.5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = -\frac{1+3.5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \quad (27)$$

Ответ: $-\frac{1+3.5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$

3 задание

Произвести указанную замену в данном дифференциальном уравнении. Решить полученное дифференциальное уравнение в новых переменных. Показать, что найденное решение (в исходных переменных) удовлетворяет исходному уравнению. Пункт 3.

u и v – новые независимые переменные, w – новая функция. $u = x + y$, $v = x - y$, $w + z = xy$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{28}$$

$z = z(x, y)$, $w = w(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$

Для начала найдем все производные второго порядка функции w по переменным x и y:

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = w'_u + w'_v \tag{29}$$

$$w''_{ux} = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x = w''_{uu} + w''_{uv} \tag{30}$$

$$w''_{vx} = w''_{vu} \cdot u'_x + w''_{vv} \cdot v'_x = w''_{vu} + w''_{vv} \tag{31}$$

Вторая производная по x:

$$w''_{xx} = w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv} \tag{32}$$

$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = w'_u - w'_v \tag{33}$$

$$w''_{uy} = w''_{uu} \cdot u'_y + w''_{uv} \cdot v'_y = w''_{uu} - w''_{uv} \tag{34}$$

$$w''_{vy} = w''_{vu} \cdot u'_y + w''_{vv} \cdot v'_y = w''_{vu} - w''_{vv} \tag{35}$$

Вторая производная по y:

$$w''_{yy} = w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv} \tag{36}$$

Вторая производная по x и y:

$$w''_{yx} = w''_{xy} = w''_{uu} - w''_{vv} \tag{37}$$

Теперь выразим z''_{xx}, z''_{xy} и z''_{yy} из $w + z = xy$:

$$z = xy - w \tag{38}$$

$$z'_x = y - w'_x \tag{39}$$

$$z'_y = x - w'_y \tag{40}$$

$$z''_{xx} = -w''_{xx} = -(w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv}) \tag{41}$$

$$z''_{xy} = 1 - w''_{xy} = 1 - (w''_{uu} - w''_{vv}) \tag{42}$$

$$z''_{yy} = -w''_{yy} = -(w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv}) \tag{43}$$

Перепишем исходное уравнение в новых переменных и функции:

$$-(w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv}) + 2(1 - (w''_{uu} - w''_{vv})) - (w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv}) = 0 \tag{44}$$

$$-w''_{uu} - 2w''_{uv} - w''_{vv} + 2 - 2w''_{uu} + 2w''_{vv} - w''_{uu} + 2w''_{uv} - w''_{vv} = 0 \tag{45}$$

$$-w''_{uu} + 2 - 2w''_{uu} - w''_{uu} = 0 \tag{46}$$

$$4w''_{uu} = 2 \tag{47}$$

$$w''_{uu} = \frac{1}{2} \tag{48}$$

Решим полученное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d(w')}{du} = \frac{1}{2} \tag{49}$$

$$d(w') = \frac{1}{2}du \tag{50}$$

$$\int d(w') = \int \frac{1}{2}du \tag{51}$$

$$w' = \frac{u}{2} + C \tag{52}$$

$$dw = \left(\frac{u}{2} + C\right) du \tag{53}$$

$$\int dw = \int \left(\frac{u}{2} + C\right) du \tag{54}$$

$$w = \frac{u^2}{4} + Cu + A,\ A = const,\ C = const \tag{55}$$

Решение в новых переменных:

$$w = \frac{u^2}{4} + Cu + A \tag{56}$$

Выполним проверку: вернемся к старым переменным и подставим полученные выражения в исходное равенство:

$$u = x + y \tag{57}$$

$$z = xy - w = xy - \frac{u^2}{4} - Cu - A = xy - \frac{(x+y)^2}{4} - C(x+y) - A \tag{58}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{59}$$

$$z'_x = \left(xy - \frac{(x+y)^2}{4} - C(x+y) - A\right)'_x = y - \frac{x+y}{2} - C = \frac{y}{2} - \frac{x}{2} - C \tag{60}$$

$$z'_y = \left(xy - \frac{(x+y)^2}{4} - C(x+y) - A\right)'_y = x - \frac{x+y}{2} - C = \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - C \tag{61}$$

$$z''_{xx} = \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{2} - C\right)'_x = -\frac{1}{2} \tag{62}$$

$$z''_{xy} = \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{2} - C\right)'_y = \frac{1}{2} \tag{63}$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} -\right)'_y = -\frac{1}{2} \tag{64}$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение уравнение:

$$-\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \tag{65}$$

Получили верное равенство.

Ответ: $w = \frac{u^2}{4} + Cu + A$

4 задание

Доказать, что уравнение $F(x, y) = 0$, $F = (F_1, F_2)$ задает неявно дифференцируемое отображение $y = f(x)$, $y = (y_1, y_2)$, $x = (x_1, x_2)$ в окрестности точки $M(x_1, x_2, y_1, y_2)$. Найти производную этого отображения в точке M (матрица Якоби) и одну (любую на выбор) из производных второго порядка $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ в точке M. Пункт 3.

$$\begin{cases} F_1(x, y) = x_1 + x_2 + y_1 + 2y_2 - 5, \\ F_2(x, y) = x_1^3 + x_2^2 + y_1^4 + y_2^4 - 4, \end{cases} \qquad M(1, 1, 1, 1) \tag{66}$$

5 задание

С помощью метода Лагранжа исследовать функцию на условный экстремум при данном уравнении связи. Пункт 2.

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2,\ x + 2y + 3z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{67}$$

Запишем вид функции Лагранжа:

$$L = u(x,y,z) + \lambda_1\phi_1(x,y,z) + \lambda_2\phi_2(x,y,z) \tag{68}$$

$$L = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \lambda_1(x + 2y + 3z) + \lambda_2(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \tag{69}$$

$$L'_x = 2x + \lambda_1 + 2x\lambda_2 \tag{70}$$

$$L'_y = 4y + 2\lambda_1 + 2y\lambda_2 \tag{71}$$

$$L'_z = 6z + 3\lambda_1 + 2z\lambda_2 \tag{72}$$

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ \phi_1(x,y,z) = 0 \\ \phi_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{73}$$

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1 + 2x\lambda_2 = 0 \\ 4y + 2\lambda_1 + 2y\lambda_2 = 0 \\ 6z + 3\lambda_1 + 2z\lambda_2 = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2x\lambda_2 - 2x = -2x(\lambda_2 + 1) \\ 2y + \lambda_1 + y\lambda_2 = 0 \\ 6z + 3\lambda_1 + 2z\lambda_2 = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{74}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2x\lambda_2 - 2x = -2x(\lambda_2 + 1) \\ 2y - 2x(\lambda_2 + 1) + y\lambda_2 = 0 \\ 3z - 3x(\lambda_2 + 1) + z\lambda_2 = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{75}$$

$$2y - 2x(\lambda_2+1) + y\lambda_2 = 0 \to y(2+\lambda_2) = 2x(\lambda_2+1) \to y = \frac{2x(\lambda_2+1)}{2+\lambda_2} \quad (76)$$

$$3z - 3x(\lambda_2+1) + z\lambda_2 = 0 \to z(\lambda_2+3) = 3x(\lambda_2+1) \to z = \frac{3x(\lambda_2+1)}{\lambda_2+3} \quad (77)$$

После подстановки y и z, выраженных через x и λ_2 в уравнения связи, получаем:

$$\begin{cases} x + \frac{4x(\lambda_2+1)}{2+\lambda_2} + \frac{9x(\lambda_2+1)}{\lambda_2+3} = 0 \\ x^2 + \left(\frac{2x(\lambda_2+1)}{2+\lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{3x(\lambda_2+1)}{\lambda_2+3}\right)^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (78)$$

Выразим λ_2 из первого уравнения:

$$1 + \frac{4(\lambda_2+1)}{2+\lambda_2} + \frac{9(\lambda_2+1)}{\lambda_2+3} = 0 \quad (79)$$

$$(2+\lambda_2)(\lambda_2+3) + 4(\lambda_2+1)(\lambda_2+3) + 9(\lambda_2+1)(2+\lambda_2) = 0 \quad (80)$$

$$6 + 5\lambda_2 + \lambda_2^2 + 4\lambda_2^2 + 16\lambda_2 + 12 + 9\lambda_2^2 + 27\lambda_2 + 18 = 0 \quad (81)$$

$$14\lambda_2^2 + 48\lambda_2 + 36 = 0 \quad (82)$$

$$7\lambda_2^2 + 24\lambda_2 + 18 = 0 \quad (83)$$

Либо $x = 0$, либо $\lambda_2 = -\frac{12}{7} \pm \frac{3\sqrt{2}}{7}$.

Рассмотрим $x = 0$:

$$\begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (84)$$

$$y = -\frac{3z}{2} \quad (85)$$

$$z^2 + \left(\frac{3z}{2}\right)^2 - 1 = 0 \quad (86)$$

$$\frac{13z^2}{4} = 1 \quad (87)$$

$$z = \pm\frac{2}{\sqrt{13}} \tag{88}$$

$$z_1 = \frac{2}{\sqrt{13}} \to y_1 = -\frac{3}{\sqrt{13}} \tag{89}$$

$$z_2 = -\frac{2}{\sqrt{13}} \to y_2 = \frac{3}{\sqrt{13}} \tag{90}$$

ДРУГОЙ СПОСОБ!?

Выразим $x = -2y - 3z$ из первого уравнения связи и подставим во второе:

$$(2y + 3z)^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{91}$$

$$4y^2 + 12yz + 9z^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{92}$$