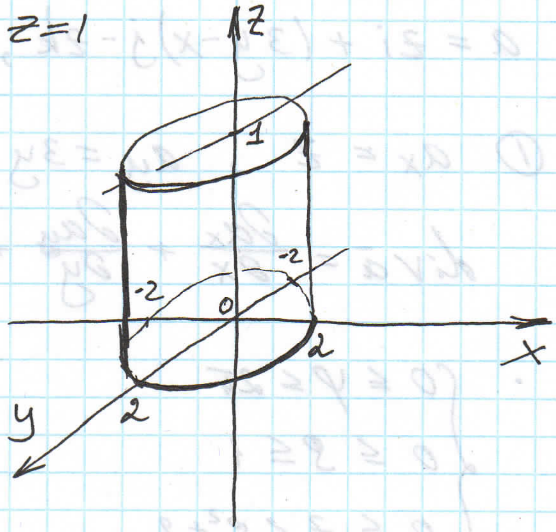
Найти поток векторного поля a через замкнутую поверхность (S) нормаль внешняя. Вычислить 2-мя способами

$$a = xyi + yzj + xzk, \quad S: \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0;\ z=1 \end{cases}$$



① $\dfrac{\partial a_x}{\partial x} = y$; $\dfrac{\partial a_y}{\partial y} = z$; $\dfrac{\partial a_z}{\partial z} = x$

$$\operatorname{div} \bar{a} = y + z + x$$

$$\Pi = \iiint_V \operatorname{div} a\, dx\,dy\,dz$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad V: \begin{cases} 0 \le \rho \le 2 \\ 0 \le z \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\, d\rho \int_0^1 (\rho\cos\varphi + z + \rho\sin\varphi)\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\, d\rho \left(z\rho\cos\varphi + \frac{z^2}{2} + \right.$$

$$\left. + z\rho\sin\varphi\right)\Big|_0^1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(\rho^2\cos\varphi + \frac{\rho}{2} + \rho^2\sin\varphi\right) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^3}{3}\cos\varphi + \frac{\rho^2}{4} + \frac{\rho^3}{3}\sin\varphi\right)\Big|_0^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3}(\cos\varphi + \sin\varphi) + 1\right) d\varphi = 2\pi$$

② $$\Pi = \iint_S xy\,dy\,dz + yz\,dx\,dz + xz\,dx\,dy$$

1) $$\iint_{S_{OYZ}} xy\,dy\,dz = \int_{-2}^{2} dy \int_0^1 xy\,dz = \int_{-2}^{2} xy\,dy = \frac{xy^2}{2}\Big|_{-2}^{2} = 2x - 2x = 0$$

2) $$\iint_{S_{OXZ}} yz\,dx\,dz = \int_{-2}^{2} dx \int_0^1 yz\,dz = \int_{-2}^{2} dx\, \frac{yz^2}{2}\Big|_0^1 = \int_{-2}^{2} \frac{y}{2}\,dx = \frac{yx}{2}\Big|_{-2}^{2} = 2y = 0$$

3) $$\iint_{S_{OXY}} xz\,dx\,dy = \int_{-2}^{2} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} z\,dy = 1\cdot\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\arcsin\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= 2\arcsin 1 - 2\arcsin(-1) = \pi + \pi = 2\pi$$

Ответ: 2π

№10 (пункт № 2)

Проверить, является ли данное векторное поле соленоидальным или потенциальным. Найти потенциал (если $\exists$).

$\bar{a} = \left(e^x(z-3x^2-6x)+3x^2\right)\vec{i} + z^2\vec{j} + (e^x+2yz)\vec{k}$

• Для того, чтобы заданное поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы ротор векторного поля был равен нулю $\operatorname{rot}(\bar{a}) = 0$.

• $P = P(x,y,z) = e^x(z-3x^2-6x)+3x^2$

$Q = Q(x,y,z) = z^2$

$R = R(x,y,z) = e^x+2yz$

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k =$$

$$= (2z-2z)i + (e^x - e^x)j + (0-0)k = 0$$

$\Rightarrow$ поле потенциальное (выч. через криволин. инт. после слова „Ответ")

• найдём потенциал $u = u(x,y,z)$ поля $\bar{a}$

$\bar{a} = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$

• $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(z-3x^2-6x)+3x^2$

$\frac{\partial u}{\partial y} = z^2$

$\frac{\partial u}{\partial z} = e^x + 2yz$

$$\int \frac{\partial u}{\partial x}dx = \int\left(e^x(z-3x^2-6x)+3x^2\right)dx = z\int e^x dx - 3\int x^2e^x dx - 6\int xe^x dx + 3\int x^2 dx =$$

$$= ze^x - 3x^2e^x + x^3 + C(y,z)$$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial y} = z^2 \Rightarrow C = z^2y + A(z)$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2yz + \frac{\partial A}{\partial z} + e^x = e^x + 2yz \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \Rightarrow A = const$$

- $u(x,y,z) = ze^x - 3x^2e^x + x^3 + z^2y + A$ – потенциал поля

Проверка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ze^x - 6xe^x - 3x^2e^x + 3x^2 = e^x(z - 3x^2 - 6x) + 3x^2 \ \checkmark$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z^2 \ \checkmark$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^x + 2yz \ \checkmark$$

- чтобы поле было соленоидным необх. и дост., чтобы $div\,\bar{a} = 0$

$$div\,\bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = e^x(z - 3x^2 - 6x) + e^x(-6x - 6) + 0 + 2y \neq 0$$

Не соленоидное

<u>Ответ</u>: поле потенциальное;
$u = ze^x - 3x^2e^x + x^3 + z^2y + A$

*к 10-му номеру (вычисление потенциала поля через криволинейный интеграл):

$$u = \int_\Gamma (e^x(z - 3x^2 - 6x) + 3x^2)dx + z^2dy + (e^x + 2yz)dz =$$

$$= \int_{x_0=0}^{x} (e^x(z_0 - 3x^2 - 6x) + 3x^2)dx + \int_{y_0=0}^{y} z_0^2\,dy + \int_{z_0=0}^{z} (e^x + 2yz)\,dz + C =$$

$$= x^3 - 3x^2e^x + e^xz + yz^2 + C$$ – <u>потенциал</u> поля