

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Типовой расчет № 1
"Функции нескольких переменных "

по дисциплине Математический анализ

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Бойцев Антон Александрович*

Санкт-Петербург, 2023-2024

1 задание.

Найти частные производные данной функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$. Выяснить, является ли функция дифференцируемой в точке $(0, 0)$. Найти её дифференциал. Пункт 2.

$$f(x, y) = y + \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2} \quad (1)$$

1.1 Частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (2)$$

Производная по x в точке $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt[3]{(\Delta x)^2} - \cos 0}{\Delta x} = -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2}}{\Delta x} = \\ &= -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2} \sqrt[3]{\Delta x}}{4 \left(\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2} \right)^2} = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Производная по y в точке $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y + \cos \sqrt[3]{(\Delta y)^2} - \cos 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\cos \sqrt[3]{(\Delta y)^2} - 1}{\Delta y} \right) = \\ &= 1 - 2 \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2}}{\Delta y} = 1 - 2 \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2} \sqrt[3]{\Delta y}}{4 \left(\frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2} \right)^2} = 1 \quad (4) \end{aligned}$$

1.2 Дифференцируемость в точке $(0, 0)$

Функция будет дифференцируема в точке $(0, 0)$, если для ее приращения в этой точке выполняется равенство:

$$\Delta f(0; 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0; 0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0; 0) \cdot \Delta y + o(\rho), \quad (5)$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Запишем формулу, подставив в нее выше найденные производные:

$$\Delta f(0; 0) = 0 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \quad (6)$$

Ответ: функция дифференцируема в точке $(0, 0)$.

1.3 Дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (7)$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(y + \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2} \right)'_x = -\frac{2x \sin \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} \quad (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(y + \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2} \right)'_y = 1 - \frac{2y \sin \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} \quad (9)$$

Терерь запишем полный дифференциал:

$$df = -\frac{2x \sin \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{3 \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} dx + \left(1 - \frac{2y \sin \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{3 \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} \right) dy \quad (10)$$

2 задание

Найти производную данной функции в направлении данного вектора в заданной точке M . Пункт 8.

$$f(x, y, z) = \exp(x + 2xy + 3xyz) \quad (11)$$

по направлению внутренней нормали к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 1$, $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

Найдем уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 1$ в точке $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$:

$$F'_x(M) \cdot (x - x_0) + F'_y(M) \cdot (y - y_0) + F'_z(M) \cdot (z - z_0) = 0 \quad (12)$$

$$F'_x = (x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1)'_x = 2x \quad (13)$$

$$F'_y = (x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1)'_y = 2y \quad (14)$$

$$F'_z = (x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1)'_z = 2z + 2 \quad (15)$$

$$F'_x(M) = 2 \frac{1}{2} = 1 \quad (16)$$

$$F'_y(M) = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad (17)$$

$$F'_z(M) = 2 \quad (18)$$

Искомая плоскость:

$$x - \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot (y - \frac{\sqrt{3}}{2}) + 2z = 0 \quad (19)$$

$$x + \sqrt{3}y + 2z - 2 = 0 \quad (20)$$

Вектор нормали к плоскости $x + \sqrt{3}y + 2z - 2 = 0$ будет выглядеть $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, 2)$. Поверхность $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 1$ представляет собой сферу $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 2$ с центром $O = (0, 0, -1)$ и радиусом $R = \sqrt{2}$.

Так как точкой начала вектора \vec{n} является $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, а его координаты $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, 2)$, то точкой конца вектора будет $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 2\right)$. То есть вектор $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, 2)$ направлен наружу относительно поверхности.

Внутренняя нормаль $\vec{n}_{in} = (-1, -\sqrt{3}, -2)$.

Получим нормированный вектор, по направлению которого будем вычислять производную:

$$|\vec{n}_{in}| = \sqrt{1 + 3 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad (21)$$

$$l = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (22)$$

Вычислим частные производные от $f(x, y, z) = \exp(x + 2xy + 3xyz)$ в точке $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$:

$$f'_x = (1 + 2y + 3yz) \exp(x + 2xy + 3xyz) \quad (23)$$

$$f'_y = (2x + 3xz) \exp(x + 2xy + 3xyz) \quad (24)$$

$$f'_z = 3xy \exp(x + 2xy + 3xyz) \quad (25)$$

$$f'_x(M) = \left(1 + 2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (1 + \sqrt{3}) \exp\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) \quad (26)$$

$$f'_y(M) = \left(2\frac{1}{2}\right) \exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \exp\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) \quad (27)$$

$$f'_z(M) = 3\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \exp\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) \quad (28)$$

Вычислим производную по направлению l в точке M :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial l} &= \left(\left(1 + \sqrt{3}\right) e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}, e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}, \frac{3\sqrt{3}}{4} e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\
 &= -\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} - \frac{1.5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = -\frac{1 + 3.5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \quad (29)
 \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{1+3.5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$

3 задание

Произвести указанную замену в данном дифференциальном уравнении. Решить полученное дифференциальное уравнение в новых переменных. Показать, что найденное решение (в исходных переменных) удовлетворяет исходному уравнению. Пункт 3.

u и v – новые независимые переменные, w – новая функция. $u = x + y$, $v = x - y$, $w + z = xy$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (30)$$

$z = z(x, y)$, $w = w(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$

Для начала найдем все производные второго порядка функции w по переменным x и y :

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = w'_u + w'_v \quad (31)$$

$$w''_{ux} = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x = w''_{uu} + w''_{uv} \quad (32)$$

$$w''_{vx} = w''_{vu} \cdot u'_x + w''_{vv} \cdot v'_x = w''_{vu} + w''_{vv} \quad (33)$$

Вторая производная по x :

$$w''_{xx} = w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv} \quad (34)$$

$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = w'_u - w'_v \quad (35)$$

$$w''_{uy} = w''_{uu} \cdot u'_y + w''_{uv} \cdot v'_y = w''_{uu} - w''_{uv} \quad (36)$$

$$w''_{vy} = w''_{vu} \cdot u'_y + w''_{vv} \cdot v'_y = w''_{vu} - w''_{vv} \quad (37)$$

Вторая производная по y :

$$w''_{yy} = w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv} \quad (38)$$

Вторая производная по x и y :

$$w''_{yx} = w''_{xy} = w''_{uu} - w''_{vv} \quad (39)$$

Теперь выразим z''_{xx} , z''_{xy} и z''_{yy} из $w + z = xy$:

$$z = xy - w \quad (40)$$

$$z'_x = y - w'_x \quad (41)$$

$$z'_y = x - w'_y \quad (42)$$

$$z''_{xx} = -w''_{xx} = -(w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv}) \quad (43)$$

$$z''_{xy} = 1 - w''_{xy} = 1 - (w''_{uu} - w''_{vv}) \quad (44)$$

$$z''_{yy} = -w''_{yy} = -(w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv}) \quad (45)$$

Перепишем исходное уравнение в новых переменных и функции:

$$-(w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv}) + 2(1 - (w''_{uu} - w''_{vv})) - (w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv}) = 0 \quad (46)$$

$$-w''_{uu} - 2w''_{uv} - w''_{vv} + 2 - 2w''_{uu} + 2w''_{vv} - w''_{uu} + 2w''_{uv} - w''_{vv} = 0 \quad (47)$$

$$-w''_{uu} + 2 - 2w''_{uu} - w''_{vv} = 0 \quad (48)$$

$$4w''_{uu} = 2 \quad (49)$$

$$w''_{uu} = \frac{1}{2} \quad (50)$$

Решим полученное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d(w')}{du} = \frac{1}{2} \quad (51)$$

$$d(w') = \frac{1}{2} du \quad (52)$$

$$\int d(w') = \int \frac{1}{2} du \quad (53)$$

$$w' = \frac{u}{2} + C \quad (54)$$

$$dw = \left(\frac{u}{2} + C \right) du \quad (55)$$

$$\int dw = \int \left(\frac{u}{2} + C \right) du \quad (56)$$

$$w = \frac{u^2}{4} + Cu + A, \quad A = \text{const}, \quad C = \text{const} \quad (57)$$

Решение в новых переменных:

$$w = \frac{u^2}{4} + Cu + A \quad (58)$$

Выполним проверку: вернемся к старым переменным и подставим полученные выражения в исходное равенство:

$$u = x + y \quad (59)$$

$$z = xy - w = xy - \frac{u^2}{4} - Cu - A = xy - \frac{(x+y)^2}{4} - C(x+y) - A \quad (60)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (61)$$

$$z'_x = \left(xy - \frac{(x+y)^2}{4} - C(x+y) - A \right)'_x = y - \frac{x+y}{2} - C = \frac{y}{2} - \frac{x}{2} - C \quad (62)$$

$$z'_y = \left(xy - \frac{(x+y)^2}{4} - C(x+y) - A \right)'_y = x - \frac{x+y}{2} - C = \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - C \quad (63)$$

$$z''_{xx} = \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{2} - C \right)'_x = -\frac{1}{2} \quad (64)$$

$$z''_{xy} = \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{2} - C \right)'_y = \frac{1}{2} \quad (65)$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} - C \right)'_y = -\frac{1}{2} \quad (66)$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение уравнение:

$$-\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad (67)$$

Получили верное равенство.

Ответ: $w = \frac{u^2}{4} + Cu + A$

4 задание

Доказать, что уравнение $F(x, y) = 0$, $F = (F_1, F_2)$ задает неявно дифференцируемое отображение $y = f(x)$, $y = (y_1, y_2)$, $x = (x_1, x_2)$ в окрестности точки $M(x_1, x_2, y_1, y_2)$. Найти производную этого отображения в точке M (матрица Якоби) и одну (любую на выбор) из производных второго порядка $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ в точке M . Пункт 3.

$$\begin{cases} F_1(x, y) = x_1 + x_2 + y_1 + 2y_2 - 5, \\ F_2(x, y) = x_1^3 + x_2^2 + y_1^4 + y_2^4 - 4, \end{cases} \quad M(1, 1, 1, 1) \quad (68)$$

$$\begin{cases} F_1(M) = 1 + 1 + 1 + 2 - 5 = 0 \\ F_2(M) = 1 + 1 + 1 + 1 - 4 = 0 \end{cases} \quad (69)$$

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) = f_1(x_1, x_2) \\ y_2 = f_2(x) = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (70)$$

$$|F'_y| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4y_1^3 & 4y_2^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad (71)$$

Следовательно, уравнение $F(x, y) = 0$, $F = (F_1, F_2)$ задает неявно дифференцируемое отображение $y = f(x)$, $y = (y_1, y_2)$, $x = (x_1, x_2)$ в окрестности точки $M(x_1, x_2, y_1, y_2)$.

$$f'_x = -\frac{F'_x(M)}{F'_y(M)} \quad (72)$$

5 задание

С помощью метода Лагранжа исследовать функцию на условный экстремум при данном уравнении связи. Пункт 2.

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2, \quad x + 2y + 3z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (73)$$

Запишем вид функции Лагранжа:

$$L = u(x, y, z) + \lambda_1 \phi_1(x, y, z) + \lambda_2 \phi_2(x, y, z) \quad (74)$$

6 задание (старое)

С помощью метода Лагранжа исследовать функцию на условный экстремум при данном уравнении связи. Пункт 2.

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2, \quad x + 2y + 3z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (75)$$

Запишем вид функции Лагранжа:

$$L = u(x, y, z) + \lambda_1 \phi_1(x, y, z) + \lambda_2 \phi_2(x, y, z) \quad (76)$$

$$L = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \lambda_1(x + 2y + 3z) + \lambda_2(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \quad (77)$$

$$L'_x = 2x + \lambda_1 + 2x\lambda_2 \quad (78)$$

$$L'_y = 4y + 2\lambda_1 + 2y\lambda_2 \quad (79)$$

$$L'_z = 6z + 3\lambda_1 + 2z\lambda_2 \quad (80)$$

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (81)$$

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1 + 2x\lambda_2 = 0 \\ 4y + 2\lambda_1 + 2y\lambda_2 = 0 \\ 6z + 3\lambda_1 + 2z\lambda_2 = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2x\lambda_2 - 2x = -2x(\lambda_2 + 1) \\ 2y + \lambda_1 + y\lambda_2 = 0 \\ 6z + 3\lambda_1 + 2z\lambda_2 = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (82)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2x\lambda_2 - 2x = -2x(\lambda_2 + 1) \\ 2y - 2x(\lambda_2 + 1) + y\lambda_2 = 0 \\ 3z - 3x(\lambda_2 + 1) + z\lambda_2 = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (83)$$

$$2y - 2x(\lambda_2 + 1) + y\lambda_2 = 0 \rightarrow y(2 + \lambda_2) = 2x(\lambda_2 + 1) \rightarrow y = \frac{2x(\lambda_2 + 1)}{2 + \lambda_2} \quad (84)$$

$$3z - 3x(\lambda_2 + 1) + z\lambda_2 = 0 \rightarrow z(\lambda_2 + 3) = 3x(\lambda_2 + 1) \rightarrow z = \frac{3x(\lambda_2 + 1)}{\lambda_2 + 3} \quad (85)$$

После подстановки y и z , выраженных через x и λ_2 в уравнения связи, получаем:

$$\begin{cases} x + \frac{4x(\lambda_2+1)}{2+\lambda_2} + \frac{9x(\lambda_2+1)}{\lambda_2+3} = 0 \\ x^2 + \left(\frac{2x(\lambda_2+1)}{2+\lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{3x(\lambda_2+1)}{\lambda_2+3}\right)^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (86)$$

Выразим λ_2 из первого уравнения:

$$1 + \frac{4(\lambda_2 + 1)}{2 + \lambda_2} + \frac{9(\lambda_2 + 1)}{\lambda_2 + 3} = 0 \quad (87)$$

$$(2 + \lambda_2)(\lambda_2 + 3) + 4(\lambda_2 + 1)(\lambda_2 + 3) + 9(\lambda_2 + 1)(2 + \lambda_2) = 0 \quad (88)$$

$$6 + 5\lambda_2 + \lambda_2^2 + 4\lambda_2^2 + 16\lambda_2 + 12 + 9\lambda_2^2 + 27\lambda_2 + 18 = 0 \quad (89)$$

$$14\lambda_2^2 + 48\lambda_2 + 36 = 0 \quad (90)$$

$$7\lambda_2^2 + 24\lambda_2 + 18 = 0 \quad (91)$$

Либо $x = 0$, либо $\lambda_2 = -\frac{12}{7} \pm \frac{3\sqrt{2}}{7}$.

Рассмотрим $x = 0$:

$$\begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (92)$$

$$y = -\frac{3z}{2} \quad (93)$$

$$z^2 + \left(\frac{3z}{2}\right)^2 - 1 = 0 \quad (94)$$

$$\frac{13z^2}{4} = 1 \quad (95)$$

$$z = \pm \frac{2}{\sqrt{13}} \quad (96)$$

$$z_1 = \frac{2}{\sqrt{13}} \rightarrow y_1 = -\frac{3}{\sqrt{13}} \quad (97)$$

$$z_2 = -\frac{2}{\sqrt{13}} \rightarrow y_2 = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad (98)$$

ДРУГОЙ СПОСОБ!?

Выразим $x = -2y - 3z$ из первого уравнения связи и подставим во второе:

$$(2y + 3z)^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (99)$$

$$4y^2 + 12yz + 9z^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (100)$$