Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Типовой расчет и лабораторная работа № 1 "Функции нескольких переменных "

по дисциплине Математический анализ

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Бойцев Антон Александрович*

Санкт-Петербург, 2023-2024

Исправленные задания вынесены в начало и отмечены зелеными рамками.

1 Задание 1 (новое)

Найти частные производные данной функции $f(x, y)$ *в точке* $(0, 0)$. *Выяснить, является ли функция дифференцируемой в точке* $(0, 0)$. *Найти её дифференциал.* ***Пункт 2.***

$$f(x, y) = y + \cos\sqrt[3]{x^2 + y^2} \tag{1}$$

1.1 Частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{2}$$

Производная по x в точке $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\sqrt[3]{(\Delta x)^2} - \cos 0}{\Delta x} = -2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2}}{\Delta x} = \\ = -2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2} \sqrt[3]{\Delta x}}{4\left(\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2}\right)^2} = 0 \tag{3}$$

Производная по y в точке $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y + \cos\sqrt[3]{(\Delta y)^2} - \cos 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0}\left(1 + \frac{\cos\sqrt[3]{(\Delta y)^2} - 1}{\Delta y}\right) = \\ = 1 - 2 \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2}}{\Delta y} = 1 - 2 \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2} \sqrt[3]{\Delta y}}{4\left(\frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2}\right)^2} = 1 \tag{4}$$

1.2 Дифференцируемость в точке $(0, 0)$

Функция будет дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, если для ее приращения в этой точке выполняется равенство:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}) \tag{5}$$

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y)-f(0,0)=\Delta y+\cos\sqrt[3]{\Delta x^2+\Delta y^2}-1 \tag{6}$$

Докажем, что равенство ниже верное:

$$\lim_{\Delta x\to 0\ \Delta y\to 0}\cos\sqrt[3]{\Delta x^2+\Delta y^2}-1=o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}) \tag{7}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0\ \Delta y\to 0}\frac{\cos\sqrt[3]{\Delta x^2+\Delta y^2}-1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=o(1) \tag{8}$$

$$\Delta x^2+\Delta y^2=t \tag{9}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos\sqrt[3]{t}-1}{\sqrt{t}}=-\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos\sqrt[3]{t}}{\frac{\sqrt[3]{t}^2}{2}}\right)\frac{\sqrt[3]{t}^2}{2\sqrt{t}}=-\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t}^2}{2\sqrt{t}}=-\lim_{t\to 0}t^{\frac{1}{6}}=0 \tag{10}$$

Следовательно, функция дифференцируема в точке $(0,0)$.

Ответ: функция дифференцируема в точке $(0,0)$.

1.3 Дифференциал

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{11}$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(y+\cos\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)'_x=-\frac{2x}{3}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} \tag{12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(y+\cos\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)'_y=1-\frac{2y}{3}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} \tag{13}$$

Терерь запишем полный дифференциал:

$$df = -\frac{2x}{3}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}}dx + \left(1 - \frac{2y}{3}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}}\right)dy \qquad (14)$$

2 Задание 3 (новое).

Произвести указанную замену в данном дифференциальном уравнении. Решить полученное дифференциальное уравнение в новых переменных. Показать, что найденное решение (в исходных переменных) удовлетворяет исходному уравнению. ***Пункт 3****.*

u и v – новые независимые переменные, w – новая функция. $u = x + y$, $v = x - y$, $w + z = xy$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{15}$$

$z = z(x, y)$, $w = w(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$

Для начала найдем все производные второго порядка функции w по переменным x и y:

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = w'_u + w'_v \tag{16}$$

$$w''_{ux} = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x = w''_{uu} + w''_{uv} \tag{17}$$

$$w''_{vx} = w''_{vu} \cdot u'_x + w''_{vv} \cdot v'_x = w''_{vu} + w''_{vv} \tag{18}$$

Вторая производная по x:

$$w''_{xx} = w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv} \tag{19}$$

$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = w'_u - w'_v \tag{20}$$

$$w''_{uy} = w''_{uu} \cdot u'_y + w''_{uv} \cdot v'_y = w''_{uu} - w''_{uv} \tag{21}$$

$$w''_{vy} = w''_{vu} \cdot u'_y + w''_{vv} \cdot v'_y = w''_{vu} - w''_{vv} \tag{22}$$

Вторая производная по y:

$$w''_{yy} = w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv} \tag{23}$$

Вторая производная по x и y:

$$w''_{yx} = w''_{xy} = w''_{uu} - w''_{vv} \tag{24}$$

Теперь выразим z''_{xx}, z''_{xy} и z''_{yy} из $w + z = xy$:

$$z = xy - w \tag{25}$$

$$z'_x = y - w'_x \tag{26}$$

$$z'_y = x - w'_y \tag{27}$$

$$z''_{xx} = -w''_{xx} = -(w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv}) \tag{28}$$

$$z''_{xy} = 1 - w''_{xy} = 1 - (w''_{uu} - w''_{vv}) \tag{29}$$

$$z''_{yy} = -w''_{yy} = -(w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv}) \tag{30}$$

Перепишем исходное уравнение в новых переменных и функции:

$$-(w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv}) + 2(1 - (w''_{uu} - w''_{vv})) - (w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv}) = 0 \tag{31}$$

$$-w''_{uu} - 2w''_{uv} - w''_{vv} + 2 - 2w''_{uu} + 2w''_{vv} - w''_{uu} + 2w''_{uv} - w''_{vv} = 0 \tag{32}$$

$$-w''_{uu} + 2 - 2w''_{uu} - w''_{uu} = 0 \tag{33}$$

$$4w''_{uu} = 2 \tag{34}$$

$$w''_{uu} = \frac{1}{2} \tag{35}$$

Решим полученное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d(w'_u)}{du} = \frac{1}{2} \tag{36}$$

$$d(w'_u) = \frac{1}{2}du \tag{37}$$

$$\int d(w'_u) = \int \frac{1}{2}du \tag{38}$$

$$\boxed{w'_u = \tfrac{u}{2} + C(v)} \tag{39}$$

$$\boxed{dw = \left(\tfrac{u}{2} + C(v)\right) du} \tag{40}$$

$$\boxed{\int dw = \int \left(\tfrac{u}{2} + C(v)\right) du} \tag{41}$$

$$\boxed{w = \tfrac{u^2}{4} + C(v)u + A(v)} \tag{42}$$

Решение в новых переменных:

$$\boxed{w = \tfrac{u^2}{4} + C(v)u + A(v)} \tag{43}$$

Выполним проверку: вернемся к старым переменным и подставим полученные выражения в исходное равенство:

$$\boxed{z = xy - w = xy - \tfrac{u^2}{4} - C(v)u - A(v) = xy - \tfrac{(x+y)^2}{4} - C(v)(x+y) - A(v)} \tag{44}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{45}$$

$$\boxed{z'_x = \Big(xy - \tfrac{(x+y)^2}{4} - C(x+y) - A\Big)'_x = \tfrac{y}{2} - \tfrac{x}{2} - C - (x+y)C' - A'} \tag{46}$$

$$\boxed{z'_y = \Big(xy - \tfrac{(x+y)^2}{4} - C(x+y) - A\Big)'_y = \tfrac{x}{2} - \tfrac{y}{2} - C + (x+y)C' + A'} \tag{47}$$

$$\boxed{z''_{xx} = \left(\tfrac{y}{2} - \tfrac{x}{2} - C - (x+y)C' - A'\right)'_x = -\tfrac{1}{2} - 2C' - (x+y)C'' - A''} \tag{48}$$

$$\boxed{z''_{xy} = \left(\tfrac{y}{2} - \tfrac{x}{2} - C - (x+y)C' - A'\right)'_y = \tfrac{1}{2} + (x+y)C'' + A''} \tag{49}$$

$$\boxed{z''_{yy} = \left(\tfrac{x}{2} - \tfrac{y}{2} - C + (x+y)C' + A'\right)'_y = -\tfrac{1}{2} + 2C' - (x+y)C'' - A''} \tag{50}$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение уравнение:

$$\boxed{-\frac{1}{2} - 2C' - (x+y)C'' - A'' + 2\left(\frac{1}{2} + (x+y)C'' + A''\right) -} \\ \boxed{-\frac{1}{2} + 2C' - (x+y)C'' - A'' = 0} \quad (51)$$

Получили верное равенство.

Ответ: $\boxed{w = \frac{u^2}{4} + C(v)u + A(v)}$

3 Задание 1 (старое).

Найти частные производные данной функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$. Выяснить, является ли функция дифференцируемой в точке $(0, 0)$. Найти её дифференциал. ***Пункт 2.***

$$f(x, y) = y + \cos\sqrt[3]{x^2 + y^2} \tag{52}$$

3.1 Частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{53}$$

Производная по x в точке $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\sqrt[3]{(\Delta x)^2} - \cos 0}{\Delta x} = -2\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2}}{\Delta x} = \\ = -2\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2}\sqrt[3]{\Delta x}}{4\left(\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{2}\right)^2} = 0 \tag{54}$$

Производная по y в точке $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y + \cos\sqrt[3]{(\Delta y)^2} - \cos 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0}\left(1 + \frac{\cos\sqrt[3]{(\Delta y)^2} - 1}{\Delta y}\right) = \\ = 1 - 2\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2}}{\Delta y} = 1 - 2\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sin^2 \frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2}\sqrt[3]{\Delta y}}{4\left(\frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^2}}{2}\right)^2} = 1 \tag{55}$$

3.2 Дифференцируемость в точке $(0, 0)$

Функция будет дифференцируема в точке $(0; 0)$, если для ее приращения в этой точке выполняется равенство:

$$\Delta f(0; 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0; 0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0; 0) \cdot \Delta y + o(\rho)\,, \tag{56}$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.
Запишем формулу, подставив в нее выше найденные производные:

$$\Delta f(0;0) = 0 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \quad (57)$$

Ответ: функция дифференцируема в точке $(0,0)$.

3.3 Дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (58)$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(y + \cos\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)'_x = -\frac{2x}{3}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}} \quad (59)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(y + \cos\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)'_y = 1 - \frac{2y}{3}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}} \quad (60)$$

Тererь запишем полный дифференциал:

$$df = -\frac{2x}{3}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}} dx + \left(1 - \frac{2y}{3}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}}\right) dy \quad (61)$$

4 Задание 2

Найти производную данной функции в направлении данного вектора в заданной точке M. ***Пункт 8.***

$$f(x, y, z) = \exp(x + 2xy + 3xyz) \tag{62}$$

по направлению внутренней нормали к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 1$, $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

Найдем уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2+y^2+z^2+2z = 1$ в точке $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$:

$$F'_x(M) \cdot (x - x_0) + F'_y(M) \cdot (y - y_0) + F'_z(M) \cdot (z - z_0) = 0 \tag{63}$$

$$F'_x = \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1\right)'_x = 2x \tag{64}$$

$$F'_y = \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1\right)'_y = 2y \tag{65}$$

$$F'_z = \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1\right)'_z = 2z + 2 \tag{66}$$

$$F'_x(M) = 2\frac{1}{2} = 1 \tag{67}$$

$$F'_y(M) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \tag{68}$$

$$F'_z(M) = 2 \tag{69}$$

Искомая плоскость:

$$x - \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot (y - \frac{\sqrt{3}}{2}) + 2z = 0 \tag{70}$$

$$x + \sqrt{3}y + 2z - 2 = 0 \tag{71}$$

Вектор нормали к плоскости $x + \sqrt{3}y + 2z - 2 = 0$ будет выглядеть $\vec{n} = \left(1, \sqrt{3}, 2\right)$. Поверхность $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 1$ представляет собой сферу $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 2$ с центром $O = (0, 0, -1)$ и радиусом $R = \sqrt{2}$.

Так как точкой начала вектора $\vec{n}$ является $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, а его координаты $\vec{n} = \left(1, \sqrt{3}, 2\right)$, то точкой конца вектора будет $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 2\right)$. То есть вектор $\vec{n} = \left(1, \sqrt{3}, 2\right)$ направлен наружу относительно поверхности.

Внутренняя нормаль $\vec{n}_{in} = \left(-1, -\sqrt{3}, -2\right)$.
Получим нормированный вектор, по направлению которого будем вычислять производную:

$$|\vec{n}_{in}| = \sqrt{1+3+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \tag{72}$$

$$l = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{73}$$

Вычислим частные производные от $f(x, y, z) = \exp(x + 2xy + 3xyz)$ в точке $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$:

$$f'_x = (1 + 2y + 3yz)\exp(x + 2xy + 3xyz) \tag{74}$$

$$f'_y = (2x + 3xz)\exp(x + 2xy + 3xyz) \tag{75}$$

$$f'_z = 3xy\exp(x + 2xy + 3xyz) \tag{76}$$

$$f'_x(M) = \left(1 + 2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(1 + \sqrt{3}\right)\exp\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \tag{77}$$

$$f'_y(M) = \left(2\frac{1}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \exp\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \tag{78}$$

$$f'_z(M) = 3\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\exp\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\exp\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \tag{79}$$

Вычислим производную по направлению l в точке M:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \left(\left(1+\sqrt{3}\right)e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}, e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}, \frac{3\sqrt{3}}{4}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}\right)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} - \frac{1.5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = -\frac{1+3.5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \qquad (80)$$

Ответ: $-\frac{1+3.5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$

5 Задание 3 (старое).

Произвести указанную замену в данном дифференциальном уравнении. Решить полученное дифференциальное уравнение в новых переменных. Показать, что найденное решение (в исходных переменных) удовлетворяет исходному уравнению. ***Пункт 3****.*

u и v – новые независимые переменные, w – новая функция. $u = x + y$, $v = x - y$, $w + z = xy$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{81}$$

$z = z(x, y)$, $w = w(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$

Для начала найдем все производные второго порядка функции w по переменным x и y:

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = w'_u + w'_v \tag{82}$$

$$w''_{ux} = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x = w''_{uu} + w''_{uv} \tag{83}$$

$$w''_{vx} = w''_{vu} \cdot u'_x + w''_{vv} \cdot v'_x = w''_{vu} + w''_{vv} \tag{84}$$

Вторая производная по x:

$$w''_{xx} = w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv} \tag{85}$$

$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = w'_u - w'_v \tag{86}$$

$$w''_{uy} = w''_{uu} \cdot u'_y + w''_{uv} \cdot v'_y = w''_{uu} - w''_{uv} \tag{87}$$

$$w''_{vy} = w''_{vu} \cdot u'_y + w''_{vv} \cdot v'_y = w''_{vu} - w''_{vv} \tag{88}$$

Вторая производная по y:

$$w''_{yy} = w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv} \tag{89}$$

Вторая производная по x и y:

$$w''_{yx} = w''_{xy} = w''_{uu} - w''_{vv} \tag{90}$$

Теперь выразим z''_{xx}, z''_{xy} и z''_{yy} из $w + z = xy$:

$$z = xy - w \tag{91}$$

$$z'_x = y - w'_x \tag{92}$$

$$z'_y = x - w'_y \tag{93}$$

$$z''_{xx} = -w''_{xx} = -(w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv}) \tag{94}$$

$$z''_{xy} = 1 - w''_{xy} = 1 - (w''_{uu} - w''_{vv}) \tag{95}$$

$$z''_{yy} = -w''_{yy} = -(w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv}) \tag{96}$$

Перепишем исходное уравнение в новых переменных и функции:

$$-(w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv}) + 2(1 - (w''_{uu} - w''_{vv})) - (w''_{uu} - 2w''_{uv} + w''_{vv}) = 0 \tag{97}$$

$$-w''_{uu} - 2w''_{uv} - w''_{vv} + 2 - 2w''_{uu} + 2w''_{vv} - w''_{uu} + 2w''_{uv} - w''_{vv} = 0 \tag{98}$$

$$-w''_{uu} + 2 - 2w''_{uu} - w''_{uu} = 0 \tag{99}$$

$$4w''_{uu} = 2 \tag{100}$$

$$w''_{uu} = \frac{1}{2} \tag{101}$$

Решим полученное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d(w')}{du} = \frac{1}{2} \tag{102}$$

$$d(w') = \frac{1}{2}du \tag{103}$$

$$\int d(w') = \int \frac{1}{2}du \tag{104}$$

$$w' = \frac{u}{2} + C \tag{105}$$

$$dw = \left(\frac{u}{2} + C\right) du \tag{106}$$

$$\int dw = \int \left(\frac{u}{2} + C\right) du \tag{107}$$

$$w = \frac{u^2}{4} + Cu + A,\ A = const,\ C = const \tag{108}$$

Решение в новых переменных:

$$w = \frac{u^2}{4} + Cu + A \tag{109}$$

Выполним проверку: вернемся к старым переменным и подставим полученные выражения в исходное равенство:

$$u = x + y \tag{110}$$

$$z = xy - w = xy - \frac{u^2}{4} - Cu - A = xy - \frac{(x+y)^2}{4} - C(x+y) - A \tag{111}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{112}$$

$$z'_x = \left(xy - \frac{(x+y)^2}{4} - C(x+y) - A\right)'_x = y - \frac{x+y}{2} - C = \frac{y}{2} - \frac{x}{2} - C \tag{113}$$

$$z'_y = \left(xy - \frac{(x+y)^2}{4} - C(x+y) - A\right)'_y = x - \frac{x+y}{2} - C = \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - C \tag{114}$$

$$z''_{xx} = \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{2} - C\right)'_x = -\frac{1}{2} \tag{115}$$

$$z''_{xy} = \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{2} - C\right)'_y = \frac{1}{2} \tag{116}$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} -\right)'_y = -\frac{1}{2} \tag{117}$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение уравнение:

$$-\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \tag{118}$$

Получили верное равенство.

Ответ: $w = \frac{u^2}{4} + Cu + A$

6 Задание 4

Доказать, что уравнение $F(x, y) = 0$, $F = (F_1, F_2)$ *задает неявно дифференцируемое отображение* $y = f(x)$, $y = (y_1, y_2)$, $x = (x_1,\, x_2)$ *в окрестности точки* $M(x_1, x_2, y_1, y_2)$. *Найти производную этого отображения в точке* M *(матрица Якоби) и одну (любую на выбор) из производных второго порядка* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *в точке* M. ***Пункт 3.***

$$\begin{cases} F_1(x, y) = x_1 + x_2 + y_1 + 2y_2 - 5, \\ F_2(x, y) = x_1^3 + x_2^2 + y_1^4 + y_2^4 - 4, \end{cases} \qquad M(1, 1, 1, 1) \tag{119}$$

$$\begin{cases} F_1(M) = 1 + 1 + 1 + 2 - 5 = 0 \\ F_2(M) = 1 + 1 + 1 + 1 - 4 = 0 \end{cases} \tag{120}$$

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) = f_1(x_1, x_2) \\ y_2 = f_2(x) = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{121}$$

$$|F'_y| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4y_1^3 & 4y_2^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \tag{122}$$

Следовательно, уравнение $F(x, y) = 0$, $F = (F_1, F_2)$ задает неявно дифференцируемое отображение $y = f(x)$, $y = (y_1, y_2)$, $x = (x_1,\, x_2)$ в окрестности точки $M(x_1, x_2, y_1, y_2)$.

$$f'_x(M) = -\frac{F'_x(M)}{F'_y(M)} \tag{123}$$

$$F'_x(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3x_1^2 & 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{124}$$

$$(F'_y)^{-1}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \tag{125}$$

$$f'_x(M) = -F'_x(F'_y)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{126}$$

Найдем производную второго порядка $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}$

$$F'_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3x_1^2 & 2x_2 \end{pmatrix} \tag{127}$$

$$(F'_y)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4y_1^3 & 4y_2^3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4y_2^3 - 8y_1^3} \begin{pmatrix} 4y_2^3 & -2 \\ -4y_1^3 & 1 \end{pmatrix} \tag{128}$$

$$f'_x = -\frac{1}{4y_2^3 - 8y_1^3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3x_1^2 & 2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4y_2^3 & -2 \\ -4y_1^3 & 1 \end{pmatrix} \tag{129}$$

Значению $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ соответствует выражение, стоящее на позиции $[0, 0]$ в полученной матрице f'_x:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{y_1^3 - y_2^3}{y_2^3 - 2y_1^3} \tag{130}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} = 0 \tag{131}$$

7 Задание 5

С помощью метода Лагранжа исследовать функцию на условный экстремум при данном уравнении связи. ***Пункт 2.***

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2,\ x + 2y + 3z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{132}$$

Запишем вид функции Лагранжа:

$$L = u(x,y,z) - \lambda_1\phi_1(x,y,z) - \lambda_2\phi_2(x,y,z) \tag{133}$$

$$L = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - \lambda_1\left(x + 2y + 3z\right) - \lambda_2\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right) \tag{134}$$

$$\begin{cases} L'_x = 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 x = 0 \\ L'_y = 4y - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 y = 0 \\ L'_z = 6z - 3\lambda_1 - 2\lambda_2 z = 0 \\ L'_{\lambda_1} = x + 2y + 3z = 0 \\ L'_{\lambda_2} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{135}$$

$$L'_z - L'_y - L'_x = 6z - 4y - 2x - 2\lambda_2(z - y - x) = 0 \tag{136}$$

$$6z - 4y - 2x - 2\lambda_2(z - y - x) = 0 \Leftrightarrow 3z - 2y - x = \lambda_2(z - y - x) \tag{137}$$

$$\lambda_2 = \frac{3z - 2y - x}{z - y - x} \tag{138}$$

Воспользовавшись численным методом решения получаем следующие решения системы уравнений:

$$1)\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.959 \\ -0.233 \\ -0.164 \\ -0.207 \\ 1.108 \end{pmatrix} \tag{139}$$

$$2)\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.959 \\ 0.233 \\ 0.164 \\ 0.207 \\ 1.108 \end{pmatrix} \tag{140}$$

$$3)\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.099 \\ 0.813 \\ -0.575 \\ -0.260 \\ 2.320 \end{pmatrix} \tag{141}$$

$$4)\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.099 \\ -0.813 \\ 0.575 \\ 0.260 \\ 2.320 \end{pmatrix} \tag{142}$$

Рассмотрим случай 1) :

$$\begin{aligned} L(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2+0.207\,(x+2y+3z)-1.108\left(x^2+y^2+z^2-1\right) = \\ = -0.108x^2+0.892y^2+1.892z^2+0.207\,(x+2y+3z)+1.108 \end{aligned} \tag{143}$$

$$d^2L = \begin{pmatrix} -0.216 & 0 & 0 \\ 0 & 1.784 & 0 \\ 0 & 0 & 3.784 \end{pmatrix} \Rightarrow d^2L = -0.216dx^2+1.784dy^2+3.784dz^2 \tag{144}$$

Из уравнений связи выразим dx и dy:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx+2dy+3dz=0, \\ 2xdx+2ydy+2zdz=0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} dx=-2dy-3dz, \\ dy=\frac{3x-z}{y-2x}dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=-2\frac{3x-z}{y-2x}dz-3dz, \\ dy=\frac{3x-z}{y-2x}dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=\frac{3y-2z}{2x-y}dz, \\ dy=\frac{3x-z}{y-2x}dz \end{cases} \tag{145}$$

$$\begin{aligned} d^2L = -0.216\left(\frac{-3\cdot0.233+2\cdot0.164}{2\cdot0.959+0.233}\right)^2 dz^2 + 1.784\left(\frac{3\cdot0.959+0.164}{-0.233-2\cdot0.959}\right)^2 dz^2 + \\ + 3.784dz^2 = 3.780dz^2 + 1.784\left(\frac{3\cdot0.959+0.164}{-0.233-2\cdot0.959}\right)^2 dz^2 > 0 \end{aligned} \tag{146}$$

Следовательно, $(0.959, -0.233, -0.164)$ – ***точка условного минимума.***

Рассмотрим случай 2) :

$$d^2L = -0.216\left(\frac{3\cdot 0.233 - 2\cdot 0.164}{-2\cdot 0.959 - 0.233}\right)^2 dz^2 + 1.784\left(\frac{-3\cdot 0.959 - 0.164}{0.233 + 2\cdot 0.959}\right)^2 dz^2 + \\ + 3.784dz^2 = 3.780dz^2 + 1.784\left(\frac{-3\cdot 0.959 - 0.164}{0.233 + 2\cdot 0.959}\right)^2 dz^2 > 0 \quad (147)$$

Следовательно, $(-0.959, 0.233, 0.164)$ – ***точка условного минимума.***

Рассмотрим случай 3) :

$$L(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 0.260\,(x + 2y + 3z) - 2.320\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right) = \\ = -1.320x^2 - 0.320y^2 + 0.680z^2 + 0.260\,(x + 2y + 3z) + 2.320 \quad (148)$$

$$d^2L = \begin{pmatrix} -2.640 & 0 & 0 \\ 0 & -0.640 & 0 \\ 0 & 0 & 1.360 \end{pmatrix} \Rightarrow d^2L = -2.640dx^2 - 0.640dy^2 + 1.360dz^2 \quad (149)$$

Из уравнений связи выразим dx и dy:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx + 2dy + 3dz = 0, \\ 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} dx = -2dy - 3dz, \\ dy = \frac{3x-z}{y-2x}dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -2\frac{3x-z}{y-2x}dz - 3dz, \\ dy = \frac{3x-z}{y-2x}dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{3y-2z}{2x-y}dz, \\ dy = \frac{3x-z}{y-2x}dz \end{cases} \quad (150)$$

$$d^2L = -2.640\left(\frac{3\cdot 0.813 + 2\cdot 0.575}{2\cdot 0.099 - 0.813}\right)^2 dz^2 - 0.640\left(\frac{3\cdot 0.813 + 0.575}{0.813 + 2\cdot 0.575}\right)^2 dz^2 + \\ + 1.360dz^2 = -32.696dz^2 - 0.640\left(\frac{3\cdot 0.813 + 0.575}{0.813 + 2\cdot 0.575}\right)^2 dz^2 < 0 \quad (151)$$

Следовательно, $(0.099, 0.813, -0.575)$ – ***точка условного максимума.***

Рассмотрим случай 4) :

$$d^2L = -2.640\left(\frac{-3\cdot 0.813 - 2\cdot 0.575}{-2\cdot 0.099 + 0.813}\right)^2 dz^2 - 0.640\left(\frac{-3\cdot 0.813 - 0.575}{-0.813 - 2\cdot 0.575}\right)^2 dz^2 + \\ + 1.360dz^2 = -32.696dz^2 - 0.640\left(\frac{-3\cdot 0.813 - 0.575}{-0.813 - 2\cdot 0.575}\right)^2 dz^2 < 0 \quad (152)$$

Следовательно, $(-0.099, -0.813, 0.575)$ – ***точка условного максимума***.

8 Лабораторная работа Экстремумы ФНП

Вариант 2

Для данной функции

$$z(x, y) = x^3y^2(4 - x - y)$$

найти точки локальных экстремумов.

8.1 Аналитический метод

1. Найдем стационарные точки, т.е. точки, удовлетворяющие неоходимому условию экстремума.

$$z'_x = \left(x^3y^2(4 - x - y)\right)'_x = 3x^2y^2(4-x-y)-x^3y^2 = -x^2y^2(4x-12+3y) \quad (153)$$

$$z'_y = \left(x^3y^2(4 - x - y)\right)'_y = 2x^3y(4 - x - y) - x^3y^2 = x^3y(8 - 2x - 3y) \quad (154)$$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \\ \begin{cases} 4x - 12 + 3y = 0 \\ 8 - 2x - 3y = 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad (155)$$

$$\begin{cases} 4x - 12 + 3y = 0 \\ 8 - 2x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \quad (156)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \end{array}\right. \quad (157)$$

2. Для каждой точки получить матрицу Гессе и проверить достаточное условие экстремума, сделать вывод.

Матрица Гессе для функции 2-х переменных:

$$H = \begin{pmatrix} z''_{xx}\,(M_0) & z''_{xy}\,(M_0) \\ z''_{yx}\,(M_0) & z''_{yy}\,(M_0) \end{pmatrix} \quad (158)$$

Производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \left(-x^2y^2(4x-12+3y)\right)'_x = -6xy^2(2x+y-4) \tag{159}$$

$$z''_{xy} = \left(-x^2y^2(4x-12+3y)\right)'_y = x^2y(24-8x-9y) \tag{160}$$

$$z''_{yx} = \left(x^3y(8-2x-3y)\right)'_x = x^2y(24-8x-9y) \tag{161}$$

$$z''_{yy} = \left(x^3y(8-2x-3y)\right)'_y = -2x^3(x+3y-4) \tag{162}$$

При $x = 0$

$$z''_{xx}(0,a) = 0 \tag{163}$$

$$z''_{xy}(0,a) = z''_{yx}(0,a) = 0 \tag{164}$$

$$z''_{yy}(0,a) = 0 \tag{165}$$

При $x = 0$ *определитель матрицы Гессе равен нулю, следовательно, требуются дополнительные исследования для точек вида* $(0,a)$.

При $y = 0$

$$z''_{xx}(b,0) = 0 \tag{166}$$

$$z''_{xy}(b,0) = z''_{yx}(b,0) = 0 \tag{167}$$

$$z''_{yy}(b,0) = -2b^3(b-4) \tag{168}$$

При $y = 0$ *определитель матрицы Гессе равен нулю, следовательно, требуются дополнительные исследования для точек вида* $(b,0)$.

В точке $\left(2, \frac{4}{3}\right)$

$$z''_{xx}\left(2, \frac{4}{3}\right) = -6 \cdot 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 (2 \cdot 2 + \frac{4}{3} - 4) = -\frac{2^8}{3^2} \tag{169}$$

$$z''_{xy}\left(2, \frac{4}{3}\right) = z''_{yx}\left(2, \frac{4}{3}\right) = 2^2 \cdot \frac{4}{3}\left(24 - 8 \cdot 2 - 9 \cdot \frac{4}{3}\right) = -\frac{2^6}{3} \tag{170}$$

$$z''_{yy}\left(2, \frac{4}{3}\right) = -2 \cdot 2^3 \left(2 + 3 \cdot \frac{4}{3} - 4\right) = -2^5 \tag{171}$$

$$\Delta H = \begin{pmatrix} -\frac{2^8}{3^2} & -\frac{2^6}{3} \\ -\frac{2^6}{3} & -2^5 \end{pmatrix} = \frac{2^{13}}{3^2} - \frac{2^{12}}{3^2} > 0 \tag{172}$$

Следовательно, в точке $\left(2, \frac{4}{3}\right)$ *есть экстремум, так как* $z''_{xx}\left(2, \frac{4}{3}\right) < 0$, *то это* ***максимум.***

3. В случае невыполнения достаточного условия проверить подозрительную точку, используя определение экстремума, сделать вывод.

Достаточное условие не выполнено в точках вида $(0, a)$ и $(b, 0)$.

$$z\left(0 + \Delta x, a + \Delta y\right) - z\left(0, a\right) = \Delta x^3 \left(\Delta y + a\right)^2 \left(4 - \Delta x - \Delta y - a\right) \tag{173}$$

Знак выражения выше не определен однозначно, следовательно, в $(0, a)$ нет экстремума.

$$z\left(b + \Delta x, 0 + \Delta y\right) - z\left(b, 0\right) = \left(\Delta x + b\right)^3 \Delta y^2 (4 - \Delta x - \Delta y - b) \tag{174}$$

Знак выражения выше также не определен однозначно, следовательно, в $(b, 0)$ нет экстремума.

Вывод: функция $z(x, y) = x^3 y^2 (4 - x - y)$ имееет только 1 экстремум (максимум) в точке $\left(2, \frac{4}{3}\right)$.

4. Построить график данной функции и линии уровня.

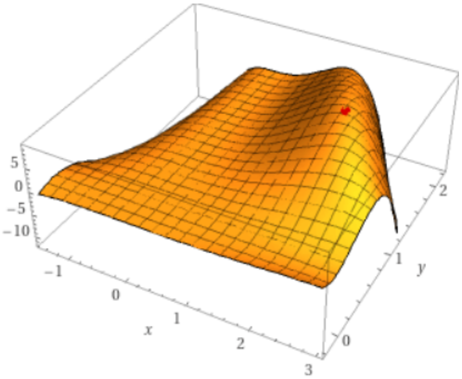

Рис. 1. График функции $z(x,y) = x^3y^2(4-x-y)$ *с экстремумом в точке* $\left(2, \frac{4}{3}\right)$.

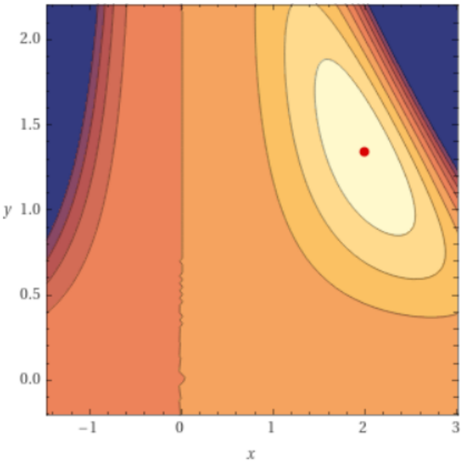

Рис. 2. Линии уровня $z(x,y) = x^3y^2(4-x-y)$ *с экстремумом в точке* $\left(2, \frac{4}{3}\right)$.

8.2 Численный метод

Численный метод поиска экстремума реализован на основе *градиентного спуска* со следующими заданными параметрами:

1. Целевая точка (точка экстремума) $\left(2, \frac{4}{3}\right)$;
2. Точка старта (нулевое приближение) $(1, 1)$;
3. Формула для вычисления следующего шага:

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) + a_k\ grad\ f(x_k, y_k) \tag{175}$$

Результат работы программы 1:

1. Критерий останова: $|\Delta f| < \epsilon = 10^{-20}$
2. Число итериций: 1654, $a_k = 0.001$
3. Время выполнения: 0.39569736 с
4. Полученная точка: $(1.99999978, 1.33333354)$
5. Значение функции: $z = 9.48148148$

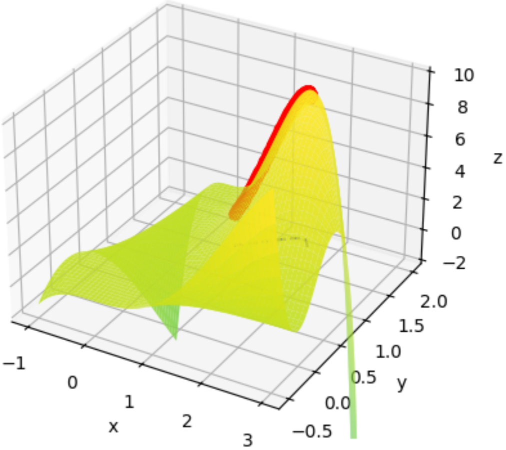

Рис. 3. Результат работы программы 1.

Результат работы программы 2:

1. Критерий останова: $\|(\Delta x_k, \Delta y_k)\| < \delta = 10^{-20}$
2. Число итериций: 3536, $a_k = 0.001$
3. Время выполнения: 0.35638070 с
4. Полученная точка: $(2., 1.33333333)$
5. Значение функции: $z = 9.48148148$

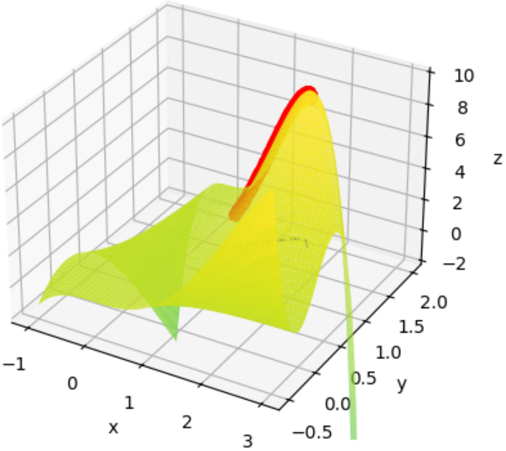

Рис. 4. Результат работы программы 2.

Вывод: по результатам выполнения программы с разными критериями останова можно сказать, что метод градиентного спуска дает одинаково хороший результат, как при условии малости приращения функции, так и при требовании малости приращения ее аргументов. Время выполнения отличается не сотые секунды, количество итериций во втором случае почти в 2 раза выше, но и результат поиска точки максимума точнее. Поэтому если говорить об эффективности, выбор критерия останова как $\|(\Delta x_k, \Delta y_k)\| < \delta$, демонстрирует лучшие результаты.