Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №1
"Интеграл Римана"

по дисциплине "Математический анализ"

вариант №20

Выполнила: студентка гр. **R3138**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Бойцев А. А.*

Санкт-Петербург, 2023

1 Аналитическая часть

1.1 Доказательство существование интеграла по Риману

$f(x) = cos(2x) \in C[0,\ \frac{\pi}{2}]$, следовательно, выполняется достаточное условие интегрируемости функции по Риману - непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.

1.2 Вычисление интеграла Римана по определению

Рассмотрим поведение функции $f(x) = cos(2x)$ на отрезке $[0,\ \frac{\pi}{2}]$
Разобьем интеграл на сумму двух

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} cos(2x)\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cos(2x)\,dx \tag{1}$$

Заметим, что поведение фунции на отрезках $[0, \frac{\pi}{4}]$ и $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ симметрично с точностью до знака. Поэтому вычислим интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} cos(2x)\,dx \tag{2}$$

Для этого введем равномерное разбиение τ отрезка $[0, \frac{\pi}{4}]$

$$0 = \frac{\pi 0}{4n}, \frac{\pi 1}{4n}, ..., \frac{\pi(n-1)}{4n}, \frac{\pi n}{4n} = \frac{\pi}{4} \tag{3}$$

Длинной отрезка разбиения является величина Δx_i

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{\pi}{4n} \tag{4}$$

В качестве оснащения ξ выберем правые границы отрезков разбиения

$$\xi_i = \frac{\pi i}{4n} \tag{5}$$

Запишем интегральную сумму $\sigma_\tau(f, \xi)$

$$\sigma_\tau(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(cos\frac{\pi i}{2n} \right) \cdot \frac{\pi}{4n} \tag{6}$$

Отдельно найдем значение S

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(cos \frac{\pi i}{2n} \right) \tag{7}$$

$2 \cdot cos \frac{\pi}{2n} \cdot S = 2cos \frac{\pi}{2n} \cdot cos \frac{\pi}{2n} + 2cos \frac{\pi}{2n} \cdot cos \frac{2\pi}{2n} + ... + 2cos \frac{\pi}{2n} \cdot cos \frac{n\pi}{2n} =$

$= 1 + cos \frac{2\pi}{2n} + cos \frac{\pi}{2n} + cos \frac{3\pi}{2n} + cos \frac{2\pi}{2n} + cos \frac{4\pi}{2n} + ... + cos \frac{(n-1)\pi}{2n} + cos \frac{(n+1)\pi}{2n} =$

$= 1 + 2 \cdot S - cos \frac{\pi}{2n} - cos \frac{\pi}{2} + cos \frac{(n+1)\pi}{2n} \rightarrow S = \frac{cos \frac{\pi}{2n} + sin \frac{\pi}{2n} - 1}{2\left(1 - cos \frac{\pi}{2n}\right)}$

Упрощая, получаем

$$S = \frac{1 - 2\left(sin \frac{\pi}{4n}\right)^2 + sin \frac{\pi}{2n} - 1}{4\left(sin \frac{\pi}{4n}\right)^2} = \frac{cos \frac{\pi}{4n}}{2sin \frac{\pi}{4n}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2tg \frac{\pi}{4n}} - \frac{1}{2} \tag{8}$$

Вычислим значение интеграла Римана по определению

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} cos(2x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \sigma_\tau(f, \xi) = \frac{\pi}{8} \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{ntg \frac{\pi}{4n}} - \frac{1}{n} \right) = \frac{\pi}{8} \lim_{n \to +\infty} \frac{4n}{n\pi} = \frac{1}{2} \tag{9}$$

1.3 Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница

Найдем соответствующий интеграл по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} cos(2x)\, dx = \frac{1}{2} sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \tag{10}$$

Значения, одно из которых получено по определению интеграла Римана, а второе - путем применения формулы Ньютона-Лейбница, совпадают.

Вернемся к исходному интегралу $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2x)\, dx$. Воспользовавшись симметрией площадей, ограниченных осью X и графиком функции $f(x) = cos(2x)$

на отрезках $[0, \frac{\pi}{4}]$ и $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ вычислим

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} cos(2x)\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cos(2x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \tag{11}$$

Соотвественно, значение, найденное по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2x)\,dx = \frac{1}{2} sin2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \tag{12}$$

1.4 Вывод формулы теоретической погрешности интеграла и его приближения для правых и левых точек

Запишем погрешность интеграла в общем виде

$$|R_n| = \left|\sigma_\tau(f,\xi) - \int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\sigma_\tau(f,\xi) - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx\right| \tag{13}$$

Рассмотрим случай оснащения правыми границами отрезков. Интегральную сумму представим в следующем виде

$$\sigma_\tau(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\,dx \tag{14}$$

Погрешность запишем

$$|R_n| = \left|\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\,dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - f(x_i)\right)\,dx\right| \tag{15}$$

Разложим $f(x)$ по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа в точке $x_0 = x_i$

$$f(x) = f(x_i) + f'(\phi_i)(x - x_i), \phi_i \in [x, x_i] \tag{16}$$

$$|R_n| = \left|\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\phi_i)(x - x_i)\,dx\right| \tag{17}$$

Заметим, что справедливо неравенство

$$|R_n| = \left| \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\phi_i)(x - x_i)\, dx \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(\phi_i)(x - x_i)|\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| f'(\phi_i)\ \frac{(x - x_i)^2}{2} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| f'(\phi_i) \frac{(x_i - x_i)^2 - (x_{i-1} - x_i)^2}{2} \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |f'(\phi_i)|\ \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} \qquad (18)$$

Оценим $|f'(\phi_i)| \leqslant \max\limits_{x \in [a,\, b]} |f'(x)|$ и получим выражение

$$|R_n| \leqslant \max_{x \in [a,\, b]} |f'(x)| \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} \qquad (19)$$

$$|R_n| \leqslant \max_{x \in [a,\, b]} |f'(x)| \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} = \max_{x \in [a,\, b]} |f'(x)|\, n \frac{(\frac{b-a}{n})^2}{2} \qquad (20)$$

Выражение выше аналогично данному в методических указаниях для оснащения левыми или правыми точками

$$|R_n| \leqslant \max_{x \in [a,\, b]} |f'(x)|\ \frac{(b - a)^2}{2n} \qquad (21)$$

Найдем значение погрешности для $f(x) = cos(2x)$ на отрезке $[0,\, \frac{\pi}{4}]$

$$|R_n| \leqslant \max_{x \in [0,\, \frac{\pi}{4}]} |-2sin(2x)|\ \frac{(\frac{\pi}{4})^2}{2n} = \frac{\pi^2}{16n} \qquad (22)$$

Вернемся к рассмотрению функции по полном отрезке и найдем значение погрешности для $f(x) = cos(2x)$ на отрезке $[0,\, \frac{\pi}{2}]$

$$|R_n| \leqslant \max_{x \in [0,\, \frac{\pi}{2}]} |-2sin(2x)|\ \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2n} = \frac{\pi^2}{4n} \qquad (23)$$

1.5 Вывод формулы теоретической погрешности интеграла и его приближения для центральных точек

Запишем интегральную сумму для случая оснащения центральными точками

$$\sigma_\tau(f,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)dx \quad (24)$$

Соотвественно, погрешность

$$|R_n|=\left|\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f(x)-f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\right)dx\right| \quad (25)$$

Разложим функцию $f(x)$ по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа $x_0=\frac{x_i+x_{i-1}}{2}$

$$f(x)=f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)+f'\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\left(x-\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)+ \\ +\frac{f''(\phi_i)}{2}\left(x-\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)^2 \quad (26)$$

Вернемся к погрешности

$$|R_n|=\left|\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f'\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\left(x-\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)+\frac{f''(\phi_i)}{2}\left(x-\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)^2\right)dx\right| \quad (27)$$

Вычислим значение интеграла, разбив его на сумму двух и посчитав их по отдельности

$$f'\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x-\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)dx=f'\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\left.\frac{\left(x-\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)^2}{2}\right|_{x_{i-1}}^{x_i}= \\ =f'\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\frac{\left(x_i-\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)^2-\left(x_{i-1}-\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)^2}{2}= \\ =f'\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\frac{\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\right)^2-\left(\frac{x_{i-1}-x_i}{2}\right)^2}{2}=0 \quad (28)$$

$$\frac{f''\left(\phi_i\right)}{2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x-\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)^2 dx=\frac{f''\left(\phi_i\right)}{2}\left.\frac{\left(x-\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)^3}{3}\right|_{x_{i-1}}^{x_i}=$$

$$=\frac{f''\left(\phi_i\right)}{6}\left(\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\right)^3-\left(\frac{x_{i-1}-x_i}{2}\right)^3\right)=\frac{f''\left(\phi_i\right)}{3}\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\right)^3 \quad (29)$$

В результате получаем

$$|R_n|=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|f''\left(\phi_i\right)\right|}{3}\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\right)^3 \quad (30)$$

Заметим, что $\left|f''\left(\phi_i\right)\right| \leqslant \max\limits_{x\in[a,\,b]}|f''(x)|$ и $x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$

Перейдем к оценке погрешности

$$|R_n| \leqslant \frac{\max\limits_{x\in[a,\,b]}|f''(x)|}{3}n\left(\frac{b-a}{2n}\right)^3=\max_{x\in[a,\,b]}|f''(x)|\,\frac{(b-a)^3}{24n^2} \quad (31)$$

Найдем значение погрешности для $f(x)=cos(2x)$ на отрезке $[0,\,\frac{\pi}{4}]$

$$|R_n| \leqslant \max_{x\in[0,\,\frac{\pi}{4}]}|-4cos(2x)|\,\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{24n^2}=\frac{\pi^3}{384n^2} \quad (32)$$

Вернемся к исходному отрезку и найдем значение погрешности для $f(x)=cos(2x)$ на отрезке $[0,\,\frac{\pi}{2}]$

$$|R_n| \leqslant \max_{x\in[0,\,\frac{\pi}{2}]}|-4cos(2x)|\,\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{24n^2}=\frac{\pi^3}{48n^2} \quad (33)$$

2 Практическая часть

Программа написана на языке Python (Python 3.9) с использованием библиотек Manim (Manim Community v0.17.3), Numpy, и Scipy. Репозиторий на GitHub по ссылке.

2.1 Запуск программы

Пример запуска программы через CMD Windows и выбора левых точек оснащения

```
C:\...\mathAn>manim -pql .\cos_integral.py Left
```

Для правых точек

```
C:\...\mathAn>manim -pql .\cos_integral.py Right
```

И центральных

```
C:\...\mathAn>manim -pql .\cos_integral.py Center
```

2.2 Результаты работы программы

В результате получены интегральные суммы для оснащения центральными, правыми и левыми точками при различном количестве точек разбиения. Для удобства интегральные суммы подсчитываются на отрезке $[0, \frac{\pi}{4}]$. Заметим, что значения погрешности $Real\,|R_n|$ не привышают значения теоретической $Theory\,|R_n|$, что подтверждает правдоподобность полученной оценки.

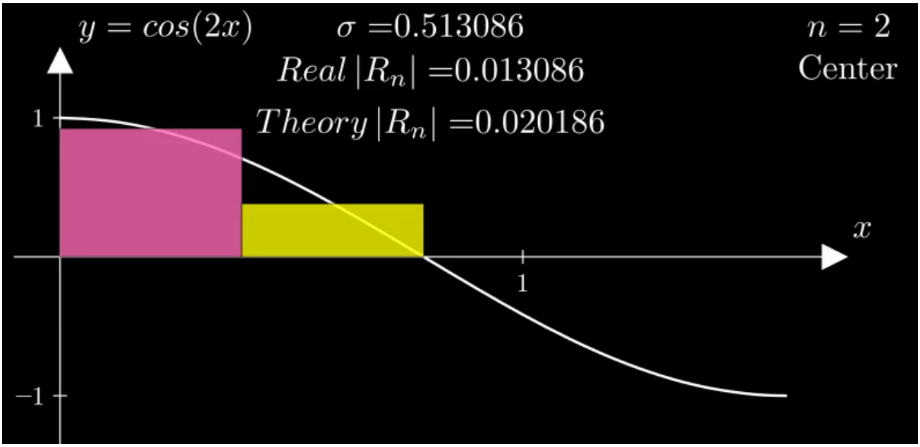

Рис. 1. Для центральных точек при $n = 2$

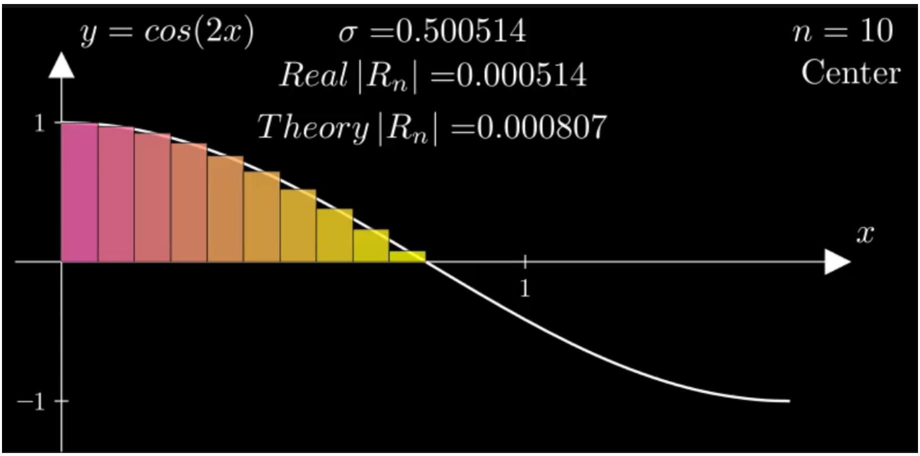

Рис. 2. Для центральных точек при $n = 10$

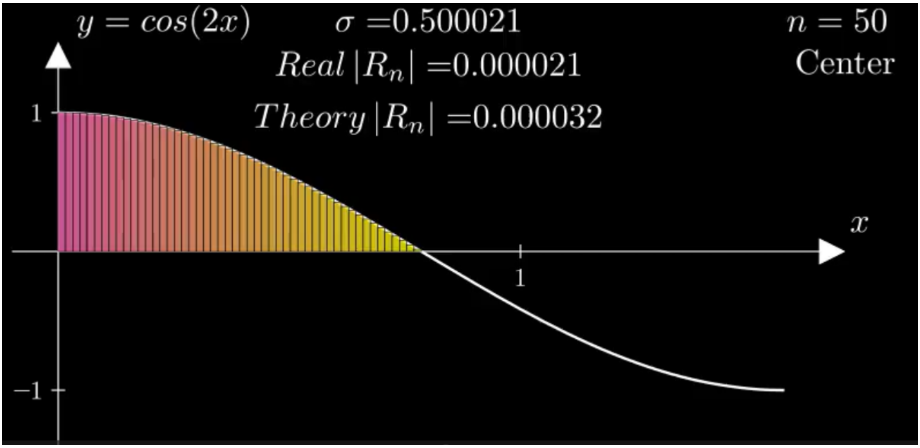

Рис. 3. Для центральных точек при $n = 50$

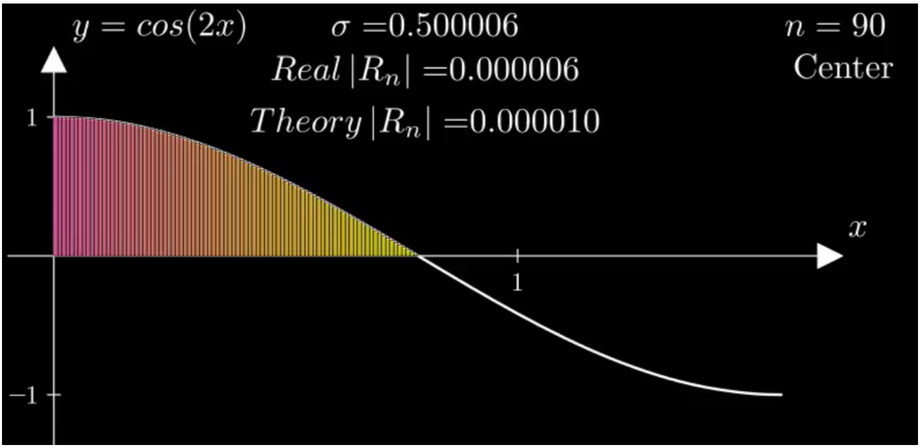

Рис. 4. Для центральных точек при $n = 90$

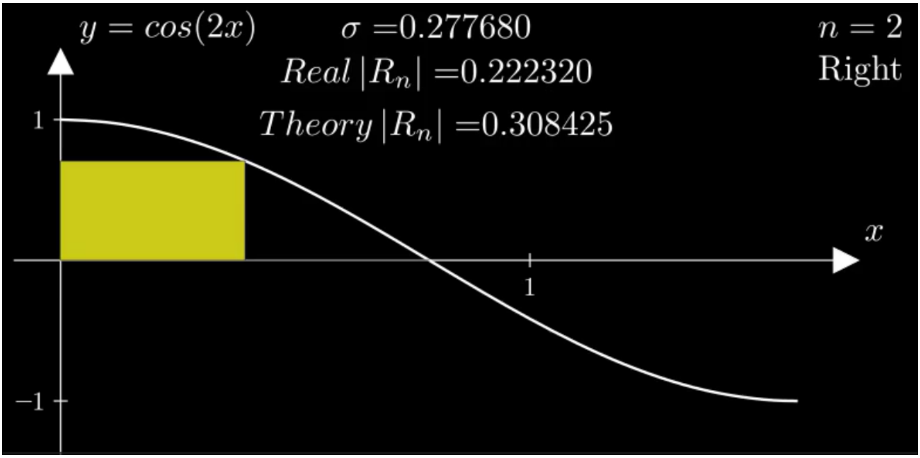

Рис. 5. Для правых точек при $n = 2$

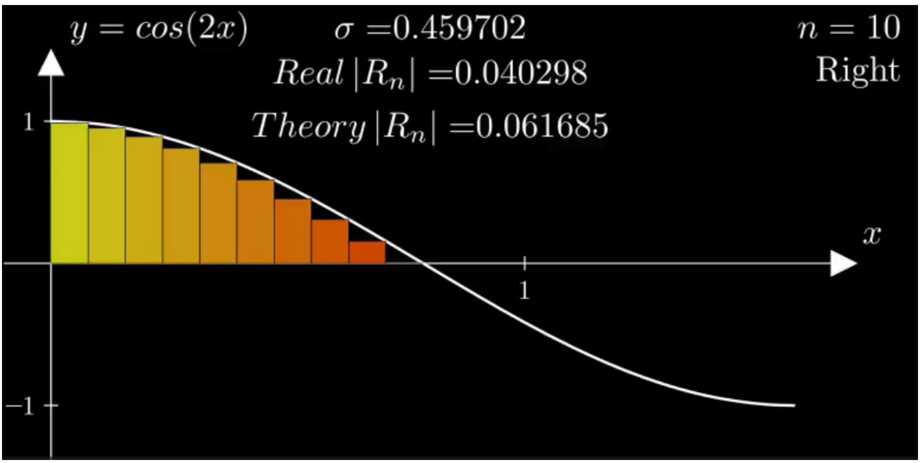

Рис. 6. Для правых точек при $n = 10$

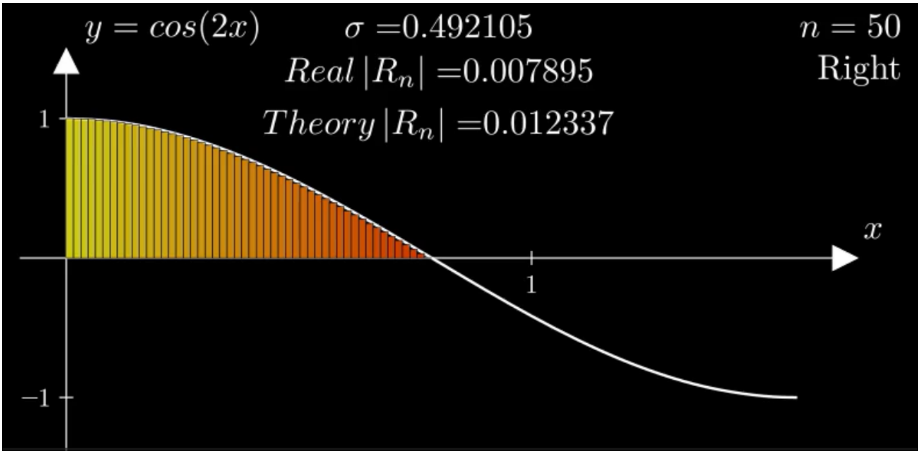

Рис. 7. Для правых точек при $n = 50$

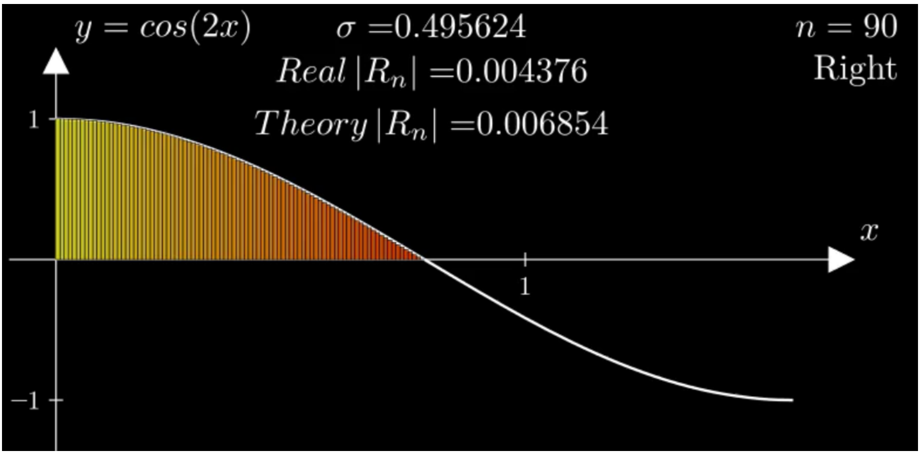

Рис. 8. Для правых точек при $n = 90$

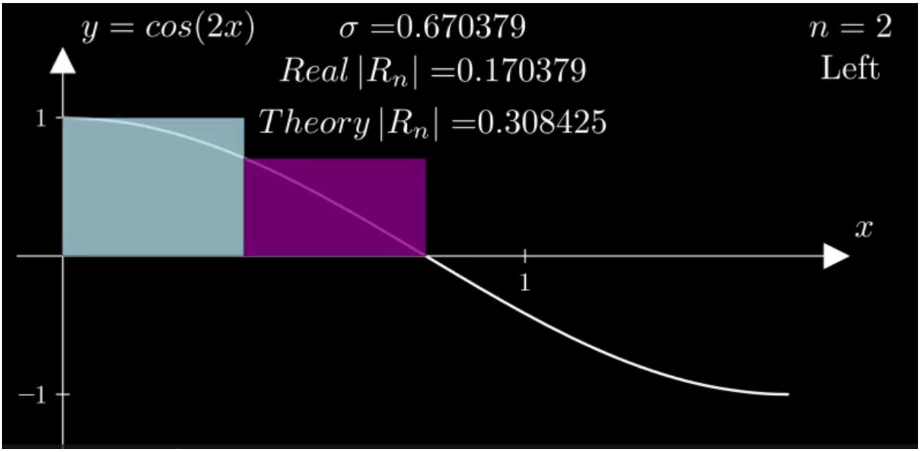

Рис. 9. Для левых точек при $n = 2$

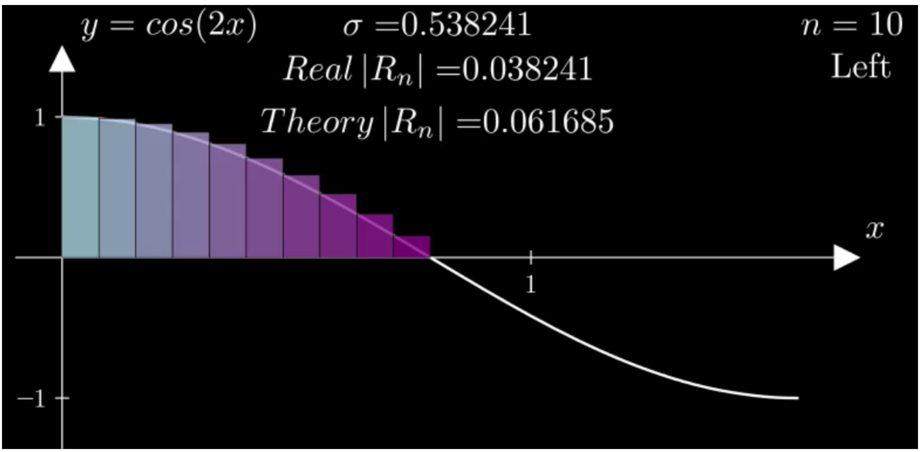

Рис. 10. Для левых точек при $n = 10$

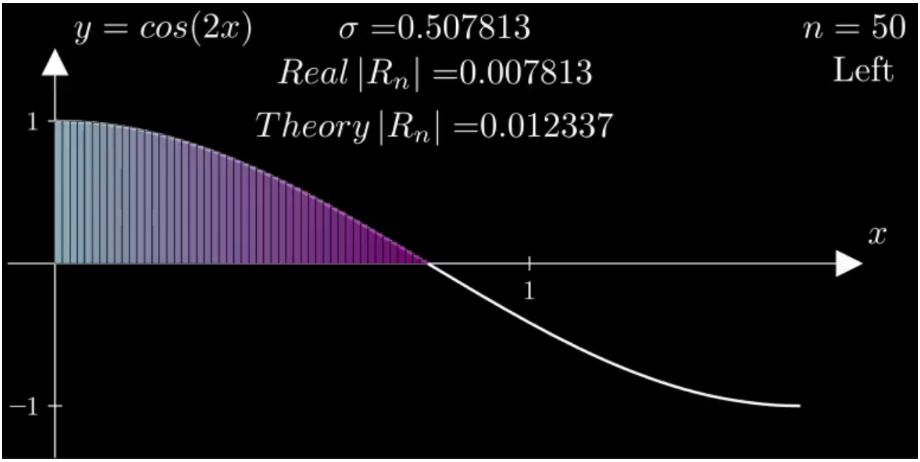

Рис. 11. Для левых точек при $n = 50$

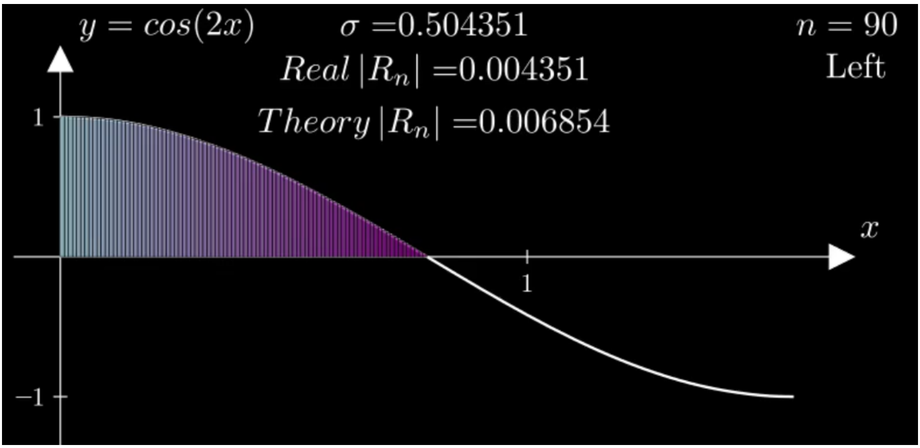

Рис. 12. Для левых точек при $n = 90$