

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И  
ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

## Лабораторная работа № 2 "Тригонометрические ряды Фурье"

по дисциплине "Математический анализ"

Вариант № 20

Выполнила: студентка гр. **R3138**

**Нечаева А. А.**

Преподаватель: *Бойцев А. А.*

Санкт-Петербург, 2023

# 1 Аналитическая часть

Заданная функция:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1); \\ 2 - x, & x \in [1, 2]. \end{cases} \quad (1)$$

## 1.1 Построение общего тригонометрического ряда

$f(x)$  определена на  $[0, 2]$ . Преобразуем:

$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow 0 \leq \pi x \leq 2\pi \rightarrow -\pi \leq \pi(x-1) \leq \pi$$

Новая переменная  $t = \pi(x-1)$ . Выразим  $x = \frac{t}{\pi} + 1$  и запишем новую функцию  $\phi(t) = f(\frac{t}{\pi} + 1)$ .  $\phi(t)$  определена на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

Функция  $\phi(t)$  удовлетворяет условию теоремы Дирихле о разложении периодической функции в ряд Фурье.

$$\phi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)),$$

где  $a_0, a_n, b_n$  – коэффициенты Фурье:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \cos(nt) dt, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \sin(nt) dt. \end{aligned}$$

Проведем обратную замену  $t = \pi(x-1)$ :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi n(x-1)) + b_n \sin(\pi n(x-1))),$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^2 f(x) \pi dx = \int_0^2 f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^2 f(x) \cos(\pi n(x-1)) \pi dx = \int_0^2 f(x) \cos(\pi n(x-1)) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^2 f(x) \sin(\pi n(x-1)) \pi dx = \int_0^2 f(x) \sin(\pi n(x-1)) dx.$$

Вычислим значения коэффициентов:

$$a_0 = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 0 dx + \int_1^2 2-x dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \int_0^2 f(x) \cos(\pi n(x-1)) dx = \int_1^2 (2-x) \cos(\pi n(x-1)) dx \quad \square$$

Вычислим неопределенный интеграл:

$$\begin{aligned} \int (2-x) \cos(\pi n(x-1)) dx &= \left\| \begin{array}{l} v = 2-x \\ du = \cos(\pi n(x-1)) dx \end{array} \quad u = \frac{dv = -dx}{\frac{\sin(\pi n(x-1))}{\pi n}} \right\| = \\ &= \frac{(2-x) \sin(\pi n(x-1))}{\pi n} + \frac{1}{\pi n} \int \sin(\pi n(x-1)) dx = \\ &= \frac{(2-x) \sin(\pi n(x-1))}{\pi n} - \frac{\cos(\pi n(x-1))}{(\pi n)^2} + C \\ \square &= -\frac{\cos(\pi n)}{(\pi n)^2} + \frac{\cos(0)}{(\pi n)^2} = \frac{1}{(\pi n)^2} - \frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} \end{aligned}$$

$$b_n = \int_0^2 f(x) \sin(\pi n(x-1)) dx = \int_1^2 (2-x) \sin(\pi n(x-1)) dx \quad \square$$

Вычислим неопределенный интеграл:

$$\begin{aligned} \int (2-x) \sin(\pi n(x-1)) dx &= \left\| \begin{array}{l} v = 2-x \\ du = \sin(\pi n(x-1)) dx \end{array} \quad u = -\frac{dv = -dx}{\frac{\cos(\pi n(x-1))}{\pi n}} \right\| = \\ &= -\frac{(2-x) \cos(\pi n(x-1))}{\pi n} - \frac{1}{\pi n} \int \cos(\pi n(x-1)) dx = \\ &= -\frac{(2-x) \cos(\pi n(x-1))}{\pi n} - \frac{\sin(\pi n(x-1))}{(\pi n)^2} + C \end{aligned}$$

$$\boxed{=} \frac{1}{\pi n}$$

Запишем итоговую формулу для разложения в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{(\pi n)^2} - \frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} \right) \cos(\pi n(x-1)) + \left( \frac{1}{\pi n} \right) \sin(\pi n(x-1)) \right)$$

## 1.2 Построение ряда Фурье по синусам

Доопределим функцию  $f(x)$  на отрезке  $[-2, 0]$  четным образом, то есть  $f(x) = -f(-x)$ ,  $x \in [-2, 0]$ . Для полученной четной функции на отрезке  $[-2, 2]$  строим ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{2},$$

где

$$b_n = \int_0^2 f(x) \sin \frac{\pi n x}{2} dx$$

Рассматриваем сумму этого ряда только на отрезке  $[0, 2]$  и получаем разложение исходной функции  $f(x)$  на отрезке  $[0, 2]$  в ряд Фурье по синусам. Вычислим значение коэффициента:

$$b_n = \int_1^2 (2-x) \sin \frac{\pi n x}{2} dx \quad \square$$

Вычислим неопределенный интеграл:

$$\begin{aligned} \int (2-x) \sin \frac{\pi n x}{2} dx &= \left\| \begin{array}{ll} v = 2-x & dv = -dx \\ du = \sin \frac{\pi n x}{2} dx & u = -\frac{2 \cos(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n} \end{array} \right\| = \\ &= -\frac{2(2-x) \cos(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n} - \int \frac{2 \cos(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n} dx = -\frac{2(2-x) \cos(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n} - \frac{4 \sin(\frac{\pi n x}{2})}{(\pi n)^2} + C \\ &\quad \square = \frac{4 \sin(\frac{\pi n}{2})}{(\pi n)^2} + \frac{2 \cos(\frac{\pi n}{2})}{\pi n} \end{aligned}$$

Запишем итоговое разложение функции в ряд Фурье по синусам:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4 \sin(\frac{\pi n}{2})}{(\pi n)^2} + \frac{2 \cos(\frac{\pi n}{2})}{\pi n} \right) \sin \frac{\pi n x}{2}$$

### 1.3 Построение ряда Фурье по косинусам

Непериодическая функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[0, 2]$ . Доопределим функцию  $f(x)$  на отрезке  $[-2, 0]$  четным образом, то есть  $f(x) = f(-x)$ ,  $x \in [-2, 0]$ . Для полученной четной функции на отрезке  $[-2, 2]$  строим ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{2},$$

где

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx$$

$$a_n = \int_0^2 f(x) \cos \frac{\pi n x}{2} dx$$

Рассматриваем сумму этого ряда только на отрезке  $[0, 2]$  и получаем разложение исходной функции  $f(x)$  на отрезке  $[0, 2]$  в ряд Фурье по косинусам. Вычислим значения коэффициентов:

$$a_0 = \int_0^2 f(x) dx = \int_1^2 (2-x) dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \int_0^2 f(x) \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \int_1^2 (2-x) \cos \frac{\pi n x}{2} dx \quad \square$$

Вычислим неопределенный интеграл:

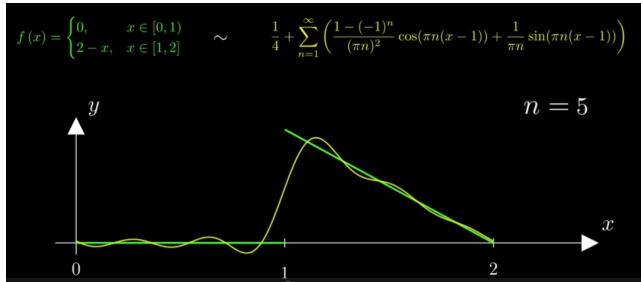
$$\begin{aligned} \int (2-x) \cos \frac{\pi n x}{2} dx &= \left\| \begin{array}{ll} v = 2-x & dv = -dx \\ du = \cos \frac{\pi n x}{2} dx & u = \frac{2 \sin(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n} \end{array} \right\| = \\ &= \frac{2(2-x) \sin(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n} + \int \frac{2 \sin(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n} dx = \frac{2(2-x) \sin(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n} - \frac{4 \cos(\frac{\pi n x}{2})}{(\pi n)^2} + C \\ \square &= -\frac{4 \cos(\pi n x)}{(\pi n)^2} - \frac{2 \sin(\frac{\pi n}{2})}{\pi n} + \frac{4 \cos(\frac{\pi n}{2})}{(\pi n)^2} = -\frac{4(-1)^n}{(\pi n)^2} - \frac{2 \sin(\frac{\pi n}{2})}{\pi n} + \frac{4 \cos(\frac{\pi n}{2})}{(\pi n)^2} \end{aligned}$$

Запишем итоговое разложение функции в ряд Фурье по косинусам:

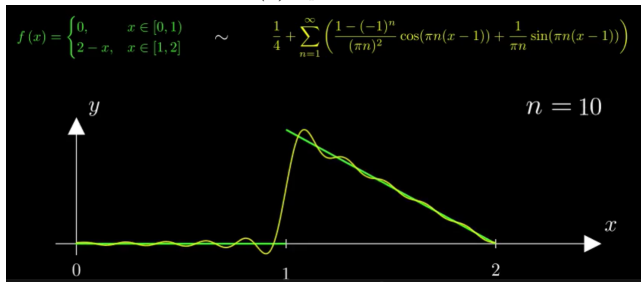
$$f(x) \sim \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{4(-1)^n}{(\pi n)^2} - \frac{2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n} + \frac{4 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{(\pi n)^2} \right) \cos \frac{\pi n x}{2}$$

## 2 Работа программы

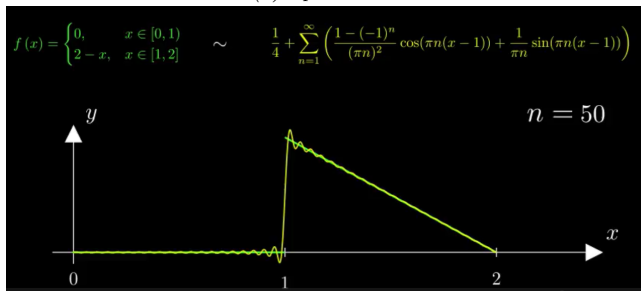
Программа написана на языке *Python 3.9* с использованием библиотеки *Manim*.



(a) при  $n = 5$



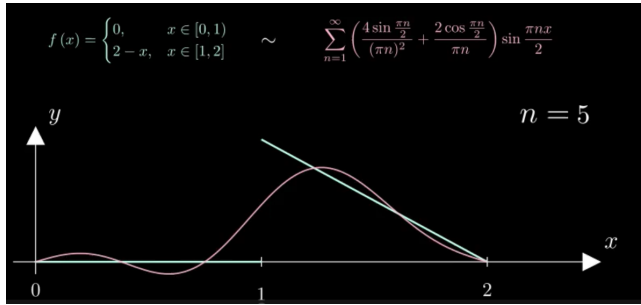
(b) при  $n = 10$



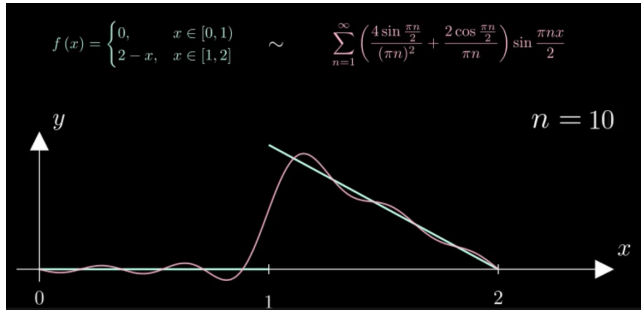
(c) при  $n = 50$

Рис. 1. Результаты работы программы при различных  $n$  для общего тригонометрического ряда Фурье

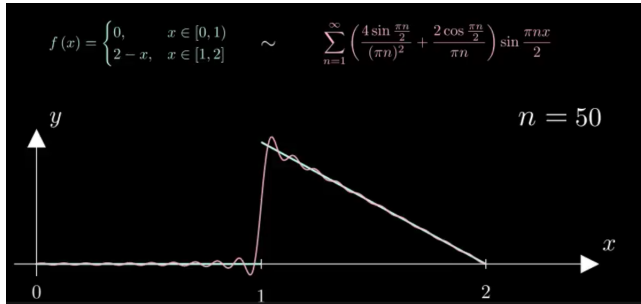




(a) при  $n = 5$

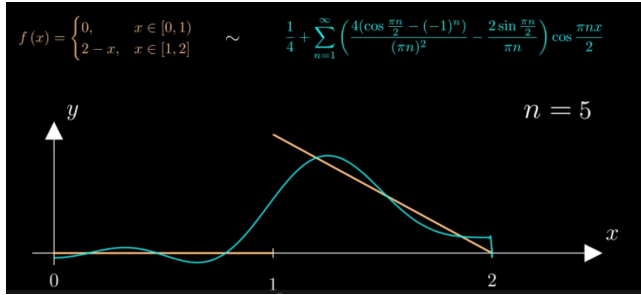


(b) при  $n = 10$

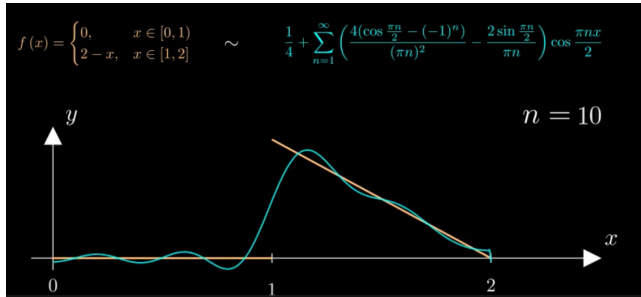


(c) при  $n = 50$

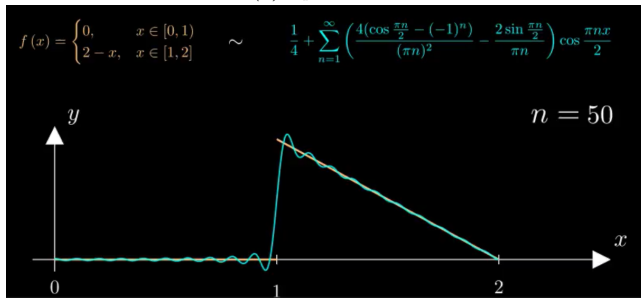
Рис. 2. Результаты работы программы при различных  $n$  для разложения в ряд Фурье по синусам



(a) при  $n = 5$



(b) при  $n = 10$



(c) при  $n = 50$

Рис. 3. Результаты работы программы при различных  $n$  для разложения в ряд Фурье по косинусам

При увеличении  $n$  заметно приближение исходной функции во всех трех случаях разложения в ряд Фурье. Образующиеся при больших  $n$  "выбросы" около точки 1 обусловлены неравномерной сходимостью ряда Фурье в точках разрыва (Рис. 4).

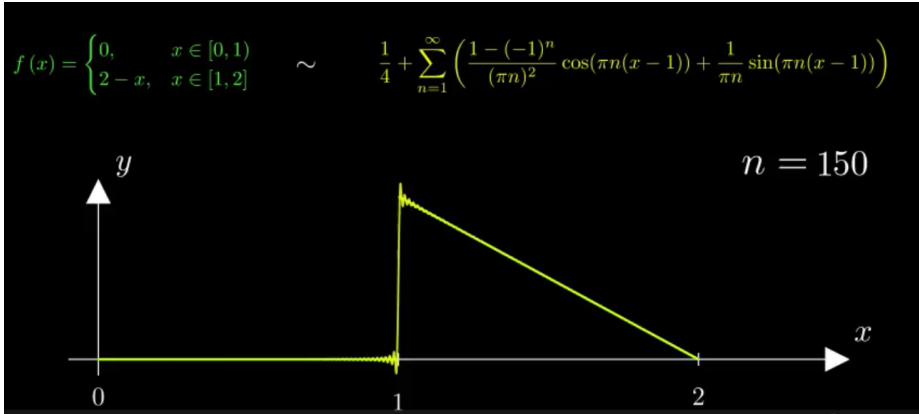


Рис. 4. Результаты работы программы при  $n = 150$  для общего тригонометрического ряда Фурье

### 3 Нахождение суммы для каждого разложения в ряд Фурье