Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 2
"Тригонометрические ряды Фурье"

по дисциплине "Математический анализ"

Вариант № 20

Выполнила: студентка гр. **R3138**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Бойцев А. А.*

Санкт-Петербург, 2023

1 Аналитическая часть

Заданная функция:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,\, 1); \\ 2 - x, & x \in [1, 2]. \end{cases} \tag{1}$$

1.1 Построение общего тригонометрического ряда

$f(x)$ определена на $[0, 2]$. Преобразуем:

$$0 \le x \le 2 \;\to\; 0 \le \pi x \le 2\pi \;\to\; -\pi \le \pi(x-1) \le \pi$$

Новая переменная $t = \pi(x-1)$. Выразим $x = \frac{t}{\pi} + 1$ и запишем новую функцию $\phi(t) = f(\frac{t}{\pi} + 1)$. $\phi(t)$ определена на отрезке $[-\pi,\, \pi]$ и имеет период $T = 2\pi$.
Функция $\phi(t)$ удовлетворяет условию теоремы Дирихле о разложении периодической функции в ряд Фурье.

$$\phi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right),$$

где a_0, a_n, b_n – коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t)\, dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \cos(nt)\, dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \sin(nt)\, dt.$$

Проведем обратную замену $t = \pi(x-1)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\pi n(x-1)) + b_n \sin(\pi n(x-1))\right),$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^2 f(x)\pi\,dx = \int\limits_0^2 f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^2 f(x)\cos(\pi n(x-1))\pi\,dx = \int\limits_0^2 f(x)\cos(\pi n(x-1))\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^2 f(x)\sin(\pi n(x-1))\pi\,dx = \int\limits_0^2 f(x)\sin(\pi n(x-1))\,dx.$$

Вычислим значения коэффициетов:

$$a_0 = \int\limits_0^2 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 0\,dx + \int\limits_1^2 2-x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \int\limits_0^2 f(x)\cos(\pi n(x-1))\,dx = \int\limits_1^2 (2-x)\cos(\pi n(x-1))\,dx \boxed{=}$$

Вычислим неопределенный интеграл:

$$\int (2-x)\cos(\pi n(x-1))\,dx = \left\| \begin{matrix} v = 2-x & dv = -dx \\ du = \cos(\pi n(x-1))\,dx & u = \frac{\sin(\pi n(x-1))}{\pi n} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{(2-x)\sin(\pi n(x-1))}{\pi n} + \frac{1}{\pi n}\int \sin(\pi n(x-1))\,dx =$$

$$= \frac{(2-x)\sin(\pi n(x-1))}{\pi n} - \frac{\cos(\pi n(x-1))}{(\pi n)^2} + C$$

$$\boxed{=} - \frac{\cos(\pi n)}{(\pi n)^2} + \frac{\cos(0)}{(\pi n)^2} = \frac{1}{(\pi n)^2} - \frac{(-1)^n}{(\pi n)^2}$$

$$b_n = \int\limits_0^2 f(x)\sin(\pi n(x-1))\,dx = \int\limits_1^2 (2-x)\sin(\pi n(x-1))\,dx \boxed{=}$$

Вычислим неопределенный интеграл:

$$\int (2-x)\sin(\pi n(x-1))\,dx = \left\| \begin{matrix} v = 2-x & dv = -dx \\ du = \sin(\pi n(x-1))\,dx & u = -\frac{\cos(\pi n(x-1))}{\pi n} \end{matrix} \right\| =$$

$$= -\frac{(2-x)\cos(\pi n(x-1))}{\pi n} - \frac{1}{\pi n}\int \cos(\pi n(x-1))\,dx =$$

$$= -\frac{(2-x)\cos(\pi n(x-1))}{\pi n} - \frac{\sin(\pi n(x-1))}{(\pi n)^2} + C$$

$$\boxed{=}\frac{1}{\pi n}$$

Запишем итоговую формулу для разложения в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{(\pi n)^2} - \frac{(-1)^n}{(\pi n)^2}\right)\cos(\pi n(x-1)) + \left(\frac{1}{\pi n}\right)\sin(\pi n(x-1))\right)$$

1.2 Построение ряда Фурье по синусам

Доопределим функцию $f(x)$ на отрезке $[-2,0]$ четным образом, то есть $f(x) = -f(-x)$, $x \in [-2,0]$. Для полученной четной функции на отрезке $[-2,2]$ строим ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{2},$$

где

$$b_n = \int\limits_0^2 f(x) \sin \frac{\pi n x}{2}\, dx$$

Рассматриваем сумму этого ряда только на отрезке $[0,2]$ и получаем разложение исходной функции $f(x)$ на отрезке $[0,2]$ в ряд Фурье по синусам. Вычислим значение коэффициента:

$$b_n = \int\limits_1^2 (2-x) \sin \frac{\pi n x}{2}\, dx \boxed{=}$$

Вычислим неопределенный интеграл:

$$\int (2-x) \sin \frac{\pi n x}{2}\, dx = \left\| \begin{matrix} v = 2-x & dv = -dx \\ du = \sin \frac{\pi n x}{2}\, dx & u = -\frac{2\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi n} \end{matrix} \right\| =$$

$$= -\frac{2(2-x)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi n} - \int \frac{2\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi n}\, dx = -\frac{2(2-x)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi n} - \frac{4\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{(\pi n)^2} + C$$

$$\boxed{=} \frac{4\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{(\pi n)^2} + \frac{2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}$$

Запишем итоговое разложение функции в ряд Фурье по синусам:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{(\pi n)^2} + \frac{2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n} \right) \sin \frac{\pi n x}{2}$$

1.3 Построение ряда Фурье по косинусам

Непериодическая функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, 2]$. Доопределим функцию $f(x)$ на отрезке $[-2, 0]$ четным образом, то есть $f(x) = f(-x)$, $x \in [-2, 0]$. Для полученной четной функции на отрезке $[-2, 2]$ строим ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{2},$$

где

$$a_0 = \frac{2}{2}\int\limits_0^2 f(x)\,dx = \int\limits_0^2 f(x)\,dx$$

$$a_n = \int\limits_0^2 f(x)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx$$

Рассматриваем сумму этого ряда только на отрезке $[0, 2]$ и получаем разложение исходной функции $f(x)$ на отрезке $[0, 2]$ в ряд Фурье по косинусам. Вычислим значения коэффициентов:

$$a_0 = \int\limits_0^2 f(x)\,dx = \int\limits_1^2 (2-x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \int\limits_0^2 f(x)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx = \int\limits_1^2 (2-x)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx \boxed{=}$$

Вычислим неопределенный интеграл:

$$\int (2-x)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx = \left\| \begin{matrix} v = 2-x & dv = -dx \\ du = \cos\frac{\pi n x}{2}\,dx & u = \frac{2\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi n} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{2(2-x)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi n} + \int \frac{2\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi n}\,dx = \frac{2(2-x)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi n} - \frac{4\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{(\pi n)^2} + C$$

$$\boxed{=} - \frac{4\cos(\pi n x)}{(\pi n)^2} - \frac{2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n} + \frac{4\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{(\pi n)^2} = -\frac{4(-1)^n}{(\pi n)^2} - \frac{2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n} + \frac{4\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{(\pi n)^2}$$

Запишем итоговое разложение функции в ряд Фурье по косинусам:

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4\left(-1\right)^{n}}{(\pi n)^2} - \frac{2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n} + \frac{4\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{(\pi n)^2} \right) \cos\frac{\pi n x}{2}$$