Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Отчет по проектной работе

по теме "Движение вращающегося мяча в воздухе с учетом эффекта Магнуса"

по дисциплине "Механика"

Выполнили: студенты

Нечаева А.А.
Попов В.?.

Преподаватель: *Смирнов Александр Витальевич*

Санкт-Петербург, 2023

1 Построение математической модели

1.1 Эффект Магнуса

Эффект Магнуса - физическое явление, возникающее при обтекании вращающегося тела потоком жидкости или газа. Возникающая сила - результат воздействия таких физических явлений, как *эффект Бернулли* и образования *пограничного слоя* в среде вокруг обтекаемого объекта, - действует на тело перпендикулярно направлению потока. Эффект описан немецким физиком *Генрихом Магнусом* в 1853 году.

Вращающийся объект создает вокруг себя вихревое движение, с одной стороны направление вихря совпадает с направлением обтекающего потока, с другой - противоположно, следовательно, скорость движения среды с одной стороны повышается, с другой - уменьшается. *Согласно уравнению Бернулл: чем меньше скорость, тем выше давление.* Возникающая разность давлений вызывает возникновение поперечной силы, вектор которой направлен от стороны, где направления вращения и потока противоположны, стороне с сонаправленными. Явление иллюстрирует рисунок 1.

рисунок 1

1.2 Вывод уравнений и формул

Обозначим начальные условия полета мяча:
1. Мяч - *абсолютно твёрдое тело*, то есть будем считать, что *взаимное расположение точек мяча не меняется с течением времени*, деформацией во время полета пренебрежем
2. Известные параметры мяча: радиус ($\boldsymbol{R}$) и масса ($\boldsymbol{m}$)
3. Также заданы начальные значения угловой ($\omega_{\mathbf{0}}$) и линейной скоростей ($\mathbf{v_0}$)
4. Задана некоторая плотность газа - среды, в которой происходит полет мяча (ρ)

Запишем *закон Ньютона* в общем виде

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{1}$$

Далее распишем силы, действующие на мяч в процессе полета

$$\vec{F}_{\text{тяжести}} + \vec{F}_{\text{Магнуса}} = m \cdot \vec{a} \tag{2}$$

Пусть шар находится в потоке набегающего не него идеального газа. Скорость потока на бесконечности $\vec{u}_\infty$. Чтобы сымитировать вращение шара, введем циркуляцию скорости Γ вокруг него. Исходя из закона Бернулли, можно получить, что полная сила, действующая в таком случае на шар, равна:

$$\vec{R} = -\rho\vec{\Gamma} \times \vec{u}_\infty\,, \tag{3}$$

где $\vec{u}_\infty = -\vec{v}$ (v – линейная скорость мяча); Γ вычислим как

$$\Gamma = \oint\limits_L v_\tau dS\,, \tag{4}$$

v_τ – проекция скорости на касательную к этой кривой, dS – элемент длины кривой. В случае шара запишем Запишем формулу для вычисления силы Магнуса в общем виде:

$$\Gamma = \int\limits_{-R}^{R} 2\pi\omega(R^2 - x^2)\,dx = 2\pi\omega\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} =$$

$$= 2\pi\omega\left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = 4\pi\omega\frac{2R^3}{3} = \frac{8\pi\omega}{3}R^3\,, \tag{5}$$

где R – радиус шара, ω – заданная угловая скорость вращения мяча. Будем считать, что вектор угловой скорости задан вдоль 1 оси – оси Z.
Тогда запишем формулу для вычисления силы Магнуса:

$$\vec{F}_{\text{Магнуса}} = -\rho\vec{\Gamma} \times \vec{u}_\infty = -\rho\frac{8\pi\vec{\omega}}{3}R^3 \times -\vec{v} = \frac{8\pi}{3}\rho R^3\vec{\omega} \times \vec{v} \tag{6}$$

Выведем формулу для силы Магнуса, пусть Δp - возникающая разность давлений на стороны шара, S - площадь половины шара, k - коэффициент подъемной силы (*для шара около 0.6*), тогда

$$F_{\text{Магнуса}} = \Delta p \cdot S \cdot k = 2\pi \cdot R^2 \cdot \Delta p \cdot k \tag{7}$$

Применим следствие из уравнения Бернулли $\Delta p = \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right)$ и обозначим за v линейную скорость тела относительно среды, $v_{\text{п}}$ - набегающего потока, получим

$$F_{\text{Магнуса}} = 2\pi \cdot R^2 \cdot \frac{\rho}{2} v v_{\text{п}} \cdot k = 0.6\pi\rho R^2 v v_{\text{п}} \tag{8}$$

Запишем формулу для силы, создаваемой эффектом Магнуса в векторной форме

$$\vec{F}_{\text{Магнуса}} = 0.6\pi\rho R^2 v v_{\text{п}} \cdot \frac{\vec{v}_{\text{п}} \times \vec{\omega}}{v_{\text{п}} \cdot \omega} = 0.6\pi\rho R^2 v \cdot \frac{\vec{v}_{\text{п}} \times \vec{\omega}}{\omega} \tag{9}$$

Получим уравнение, описывающее движение мяча

$$m\vec{g} + 0.6\pi\rho R^2 v \cdot \frac{\vec{v}_{\text{п}} \times \vec{\omega}}{\omega} = m\vec{a} \tag{10}$$

В общем случае будем рассматривать движение мяча в *Декартовой системе координат*, в *трехмерном пространстве*, тогда проекции на оси X, Y и Z соотвественно

$$0.6\pi\rho R^2 v \cdot \frac{(\vec{v}_{\text{п}} \times \vec{\omega})_x}{\omega} = ma_x \ , v_x = v_0 sin\,(\alpha) \cdot cos\,(\beta) \tag{11}$$

$$0.6\pi\rho R^2 v \cdot \frac{(\vec{v}_{\text{п}} \times \vec{\omega})_y}{\omega} = ma_y \ , v_y = v_0 sin\,(\alpha) \cdot sin\,(\beta) \tag{12}$$

$$mg + 0.6\pi\rho R^2 v \cdot \frac{(\vec{v}_{\text{п}} \times \vec{\omega})_z}{\omega} = ma_z \ , v_z = v_0 cos\,(\alpha) \tag{13}$$

Перейдем к уравнениям для угловой скорости вращения мяча ω, в частности, найдем выражения для разложения $(\vec{v}_{\text{п}} \times \vec{\omega})$ по единичным векторам, задающим оси координат, $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$

$$\begin{gathered}
(\vec{v}_{\text{п}} \times \vec{\omega}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_{\text{п}_x} & v_{\text{п}_y} & v_{\text{п}_z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} v_{\text{п}_y} & v_{\text{п}_z} \\ \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} v_{\text{п}_x} & v_{\text{п}_z} \\ \omega_x & \omega_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} v_{\text{п}_x} & v_{\text{п}_y} \\ \omega_x & \omega_y \end{vmatrix} = \\
= \vec{i}\left(v_{\text{п}_y}\omega_z - \omega_y v_{\text{п}_z}\right) + \vec{j}\left(\omega_x v_{\text{п}_z} - v_{\text{п}_x}\omega_z\right) + \vec{k}\left(v_{\text{п}_x}\omega_y - \omega_x v_{\text{п}_y}\right) \rightarrow \\
\rightarrow (\vec{v}_{\text{п}} \times \vec{\omega})_x = v_{\text{п}_y}\omega_z - \omega_y v_{\text{п}_z} \\
(\vec{v}_{\text{п}} \times \vec{\omega})_y = \omega_x v_{\text{п}_z} - v_{\text{п}_x}\omega_z \\
(\vec{v}_{\text{п}} \times \vec{\omega})_z = v_{\text{п}_x}\omega_y - \omega_x v_{\text{п}_y}
\end{gathered} \tag{14}$$

Перейдем к дифференциальному виду уравнений проекций движения мяча на оси координат

$$0.6\pi\rho R^2 v \cdot \frac{v_{\text{п}_y}\omega_z - \omega_y v_{\text{п}_z}}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}} = mx'' \tag{15}$$

$$0.6\pi\rho R^2 v \cdot \frac{\omega_x v_{\text{п}_z} - v_{\text{п}_x}\omega_z}{\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}} = my'' \tag{16}$$

$$mg_z + 0.6\pi\rho R^2 v \cdot \frac{v_{\text{п}_x}\omega_y - \omega_x v_{\text{п}_y}}{\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}} = mz'' \tag{17}$$

Запишем также начальные условия задачи, координаты мяча – положение его центра масс во времени

$$\begin{cases} (x(0), y(0), z(0)) = (0,0,0) \\ v_x(0) = v_{0x} \\ v_y(0) = v_{0y} \\ v_z(0) = v_{0z} \\ \omega_x(0) = 0 \\ \omega_y(0) = 0 \\ \omega_z(0) = \omega_0 \end{cases} \tag{18}$$

1.3 Решение дифференциальных уравнений

Найдем зависимости $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, решив соотвествующую систему дифференциальных уравнений.
Будем считать, что ветра нет, поэтому скорость потока противоположна по направлению изменению линейной координаты мяча вдоль соответствующей оси $v_{\text{п}_i} = -i'$.

$$\begin{cases} -0.6\pi\rho R^2 v \cdot y' = mx'' \\ 0.6\pi\rho R^2 v \cdot x' = my'' \\ -mg = mz'' \end{cases} \tag{19}$$

Тогда элементарно

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2 \tag{20}$$

Будем считать, что мяч запускается с земли, то есть $z(0) = C_2 = 0$. Несложно заметить, что коэффициент C_1 соотвествует проекции линейной скорости мяча на ось z, так $C_1 = v_0 cos\,(\alpha)$. Тогда зависимости координаты $z(t)$ будет соотвествовать выражение

$$z(t) = v_0 cos\,(\alpha) \cdot t - \frac{gt^2}{2} = v_{0_z} \cdot t - \frac{gt^2}{2} \tag{21}$$

Решение системы дифференциальных уравнений найдем, выразив поочередно x через y и соотвественно наоборот.

$$\begin{cases} -0.6\pi\rho R^2 v \cdot y' = mx'' \\ 0.6\pi\rho R^2 v \cdot x' = my'' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y' = -\frac{mx''}{0.6\pi\rho R^2 v} \\ \left(0.6\pi\rho R^2 v\right)^2 \cdot x' = -m^2 x'' \end{cases} \tag{22}$$

Отсюда получаем

$$x(t) = C_2 \sin\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) + C_1 \cos\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) + C \tag{23}$$

Аналогичное выражение получаем для y

$$y(t) = C_5 \sin\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) + C_4 \cos\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) + C_3 \tag{24}$$

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C = 0 \rightarrow x(t) = C_2 \sin\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) - C \cos\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) + C \\ y(0) = C_4 + C_3 = 0 \rightarrow y(t) = C_5 \sin\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) - C_3 \cos\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) + C_3 \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} x'(t) = C_2 \frac{0.6\pi\rho R^2 v}{m} \cos\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) + C \frac{0.6\pi\rho R^2 v}{m} \sin\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) \\ y'(t) = C_5 \frac{0.6\pi\rho R^2 v}{m} \cos\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) + C_3 \frac{0.6\pi\rho R^2 v}{m} \sin\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} x'(0) = C_2 \frac{0.6\pi\rho R^2 v}{m} = v_{x_0} \rightarrow C_2 = \frac{v_{x_0} m}{0.6\pi\rho R^2 v} \\ y'(0) = C_5 \frac{0.6\pi\rho R^2 v}{m} = v_{y_0} \rightarrow C_5 = \frac{v_{y_0} m}{0.6\pi\rho R^2 v} \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} x''(t) = -C_2 \left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v}{m}\right)^2 \sin\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) + C \left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v}{m}\right)^2 \cos\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) \\ y''(t) = -C_5 \left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v}{m}\right)^2 \sin\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) + C_3 \left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v}{m}\right)^2 \cos\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} x''(0) = C \left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v}{m}\right)^2 = \omega^2 \cdot R \\ y''(0) = C_3 \left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v}{m}\right)^2 = -\omega^2 \cdot R \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C = \frac{\omega^2}{\left(\frac{0.6\pi\rho v}{m}\right)^2 R^3} \\ C_3 = -\frac{\omega^2}{\left(\frac{0.6\pi\rho v}{m}\right)^2 R^3} \end{cases} \tag{29}$$

Для упрощения рассчета будем считать, что $v = v_0$, $\omega = \omega_0$

Запишем, полученные функции для координат x и y

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_{x_0} m}{0.6\pi\rho R^2 v} \sin\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) - \frac{\omega^2}{\left(\frac{0.6\pi\rho v}{m}\right)^2 R^3} \cos\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) + \frac{\omega^2}{\left(\frac{0.6\pi\rho v}{m}\right)^2 R^3} \\ y(t) = \frac{v_{y_0} m}{0.6\pi\rho R^2 v} \sin\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) + \frac{\omega^2}{\left(\frac{0.6\pi\rho v}{m}\right)^2 R^3} \cos\left(\frac{0.6\pi\rho R^2 v \cdot t}{m}\right) - \frac{\omega^2}{\left(\frac{0.6\pi\rho v}{m}\right)^2 R^3} \end{cases} \tag{30}$$

2 Моделирование процесса

2.1 Общие сведения

Исходные данные программы:

1. Масса мяча (по футбольным стандартам) $\mathbf{m = 0.450}$ **кг**
2. Радиус мяча (при длине окружности около 70 см) $\mathbf{R = 0.11}$ **м**
3. Плотность воздуха (при $T = 15C^{o}$) $\rho = 1.225\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
4. Координаты начальной точки запуска мяча $(0, 0, 0)$

Данные вводимые пользователем:

1. Проекции линейной скорости на оси x, y, z, *ограничение:* $v_{z_0} > 0$
2. Значение угловой скорости ω, *примечание: по умолчанию вектор угловой скорости направлен вдось оси z*

3*. Задание ширины препятствия(?)

Выходные данные:

1. Для первой части эксперимента с заданными линейной и угловой скоростями выводится графическое представление полета на плоскости xy
2. Для эксперимента с заданным препятствием выводятся подходящие значения угловой и линейных скоростей, которые необходимо задать, чтобы обойти препятствие

2.2 Написание программы

Программа написана на языке *Python 3* с использованием библиотеки *Manim*.