

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Отчет по проектной работе
по теме "Движение вращающегося мяча в
воздухе с учетом эффекта Магнуса"
по дисциплине "Механика"

Выполнили: студенты

Нечаева А.А.
Попов В.?.

Преподаватель: *Смирнов Александр Витальевич*

Санкт-Петербург, 2023

1 Построение математической модели

1.1 Эффект Магнуса

Эффект Магнуса - физическое явление, возникающее при обтекании вращающегося тела потоком жидкости или газа. Возникающая сила - результат воздействия таких физических явлений, как *эффект Бернулли* и образования *пограничного слоя* в среде вокруг обтекаемого объекта, - действует на тело перпендикулярно направлению потока. Эффект описан немецким физиком *Генрихом Магнусом* в 1853 году.

Вращающийся объект создает вокруг себя вихревое движение, с одной стороны направление вихря совпадает с направлением обтекающего потока, с другой - противоположно, следовательно, скорость движения среды с одной стороны повышается, с другой - уменьшается. *Согласно уравнению Бернулли: чем меньше скорость, тем выше давление.* Возникающая разность давлений вызывает возникновение поперечной силы, вектор которой направлен от стороны, где направления вращения и потока противоположны, стороне с сонаправленными. Явление иллюстрирует рисунок 1.

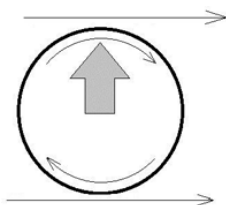


Рис. 1. Иллюстрация эффекта Магнуса

1.2 Вывод уравнений и формул

Обозначим начальные условия полета мяча:

1. Мяч - *абсолютно твёрдое тело*, то есть будем считать, что *взаимное расположение точек мяча не меняется с течением времени*, деформацией во время полета пренебрежем
2. Известные параметры мяча: радиус (R) и масса (m)
3. Также заданы начальные значения угловой (ω_0) и линейной скоростей (v_0)
4. Задана некоторая плотность газа - среды, в которой происходит полет

мяча (ρ)

Запишем закон Ньютона в общем виде

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (1)$$

Далее распишем силы, действующие на мяч в процессе полета

$$\vec{F}_{\text{тяжести}} + \vec{F}_{\text{Магнуса}} = m \cdot \vec{a} \quad (2)$$

Пусть шар находится в потоке набегающего не него идеального газа. Скорость потока на бесконечности \vec{u}_{∞} . Чтобы симитировать вращение шара, введем циркуляцию скорости Γ вокруг него. Исходя из закона Бернулли, можно получить, что полная сила, действующая в таком случае на шар, равна:

$$\vec{R} = -\rho \vec{\Gamma} \times \vec{u}_{\infty}, \quad (3)$$

где $\vec{u}_{\infty} = -\vec{v}$ (v – линейная скорость мяча); Γ вычислим как

$$\Gamma = \oint_L v_{\tau} dS, \quad (4)$$

v_{τ} – проекция скорости на касательную к этой кривой, dS – элемент длины кривой. В случае шара запишем Запишем формулу для вычисления силы Магнуса в общем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{-R}^R 2\pi\omega(R^2 - x^2) dx = 2\pi\omega \left(R^2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \\ &= 2\pi\omega \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = 4\pi\omega \frac{2R^3}{3} = \frac{8\pi\omega}{3} R^3, \end{aligned} \quad (5)$$

где R – радиус шара, ω – заданная угловая скорость вращения мяча. Будем считать, что вектор угловой скорости задан вдоль 1 оси – оси Z .

Тогда запишем формулу для вычисления силы Магнуса:

$$\vec{F}_{\text{Магнуса}} = -\rho \vec{\Gamma} \times \vec{u}_{\infty} = -\rho \frac{8\pi\vec{\omega}}{3} R^3 \times -\vec{v} = \frac{8\pi}{3} \rho R^3 \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (6)$$

В общем случае будем рассматривать движение мяча в *Декартовой системе координат, в трехмерном пространстве*, тогда проекции на оси X ,

Y и Z соответственно

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{8\pi}{3}\rho R^3 (\vec{\omega} \times \vec{v})_x, \\ m\ddot{y} = \frac{8\pi}{3}\rho R^3 (\vec{\omega} \times \vec{v})_y, \\ \ddot{z} = g \end{cases} \quad (7)$$

Перейдем к уравнениям для угловой скорости вращения мяча ω , в частности, найдем выражения для разложения $(\vec{\omega} \times \vec{v})$ по единичным векторам, задающим оси координат, \vec{i} , \vec{j} и \vec{k}

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{v}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \omega_y & \omega_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(\omega_y v_z - \omega_z v_y) + \vec{j}(\omega_z v_x - \omega_x v_z) + \vec{k}(\omega_x v_y - \omega_y v_x) \rightarrow \\ &\rightarrow (\vec{\omega} \times \vec{v})_x = \omega_y v_z - \omega_z v_y = -\omega_z v_y \\ &(\vec{\omega} \times \vec{v})_y = \omega_z v_x - \omega_x v_z = \omega_z v_x \\ &(\vec{\omega} \times \vec{v})_z = \omega_x v_y - \omega_y v_x = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Перейдем к дифференциальному виду уравнений проекций движения мяча на оси координат:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{8\pi}{3}\rho R^3 \omega_z v_y, \\ m\ddot{y} = \frac{8\pi}{3}\rho R^3 \omega_z v_x, \\ \ddot{z} = g \end{cases} \quad (9)$$

Запишем также начальные условия задачи, координаты мяча – положение его центра масс во времени

$$\begin{cases} (x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 0) \\ v_x(0) = v_{0x} \\ v_y(0) = v_{0y} \\ v_z(0) = v_{0z} \\ \omega_x(0) = 0 \\ \omega_y(0) = 0 \\ \omega_z(0) = \omega_0 \end{cases} \quad (10)$$

1.3 Решение дифференциальных уравнений

Для решения соответствующей системы дифференциальных уравнений был применен *метод Эйлера* численного решения дифференциальных уравнений. Описание метода:

Пусть дана задача Коши для уравнения первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y|_{x=x_0} = y_0,$$

где функция f определена на некоторой области $D \in R^2$. Решение ищется на полуинтервале $(x_0, b]$. На этом промежутке введем узлы $x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$. Приближенное решение в узлах x_i , которое обозначим через y_i , определяется по формуле

$$y_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Эти формулы непосредственно обобщаются на случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данной работе для нахождения численного решения системы линейных однородных уравнений второго порядка метод Эйлера был применен последовательно: сначала для вычисления первой производной, а затем на основе полученного результата – второй производной.

1.4 Численный эксперимент. Огибание препятствия заданной ширины

Молуль силы, действующей на мяч, постоянен, а ее вектор перпендикулярен скорости мяча в любой момент времени и лежит в плоскости XU , следовательно, траектория мяча представляет собой фрагмент окружности в плоскости XU .

Запишем центростремительное ускорение:

$$a_n = \frac{F}{m} = \frac{8\pi}{3m} \rho \omega v R^3 = \frac{v^2}{r}, \quad (11)$$

где r – радиус кривизны дуги, по которой движется мяч. Тогда

$$\frac{v}{\omega} = \frac{8\pi}{3m} \rho r R^3 \rightarrow \omega(v) = \frac{v}{k}, \quad k = \frac{8\pi}{3m} \rho r R^3 \quad (12)$$

Пусть линейная скорость задана вдоль оси X , а препятствие представляет собой бесконечный цилиндр.

На основе геометрической модели (рисунок ?) составим выражения:

$$|Y_0| - R_{\text{np}} = O'B \quad (13)$$

$$O'B = \sqrt{(Y_0 - Y_{\text{np}})^2 + X_{\text{np}}^2} \quad (14)$$

Откуда выразим Y_0 – радиус траектории мяча при касании препятствия:

$$Y_0 = \frac{X_{\text{np}}^2 + Y_{\text{np}}^2 - R_{\text{np}}^2}{2(Y_{\text{np}} - R_{\text{np}}) \frac{\sqrt{Y_{\text{np}}^2}}{Y_{\text{np}}}} \quad (15)$$

Пусть h – коэффициент отношения расстояния от центра координат до пересечения прямой, на которой лежит центр координат и центр препятствия, и траектории мяча к расстоянию от начала координат до центра препятствия.

$$OO' = \sqrt{X_{\text{np}}^2 + Y_{\text{np}}^2} \quad (16)$$

$$BC^2 = (X_{\text{np}}h)^2 + (Y_0 - Y_{\text{np}}h)^2 \quad (17)$$

$$BC^2 = Y_0^2 \quad (18)$$

$$h = \frac{2Y_0Y_{\text{np}}}{X_{\text{np}}^2 + Y_{\text{np}}^2} \quad (19)$$

$$\phi = 2\alpha, \quad (20)$$

где $\phi = \angle OBC$, $\alpha = \angle OBK$

$$\sin \alpha = \frac{OO'h}{2Y_0} \quad (21)$$

$$\phi = 2 \arcsin \alpha \quad (22)$$

Пусть S – длина траектории до пересечения объектом прямой, соединяющей центр координат и центр препятствия.

$$S = \phi Y_0 = Y_0 2 \arcsin \alpha = Y_0 2 \arcsin \frac{\sqrt{X_{\text{np}}^2 + Y_{\text{np}}^2} h}{2Y_0} \quad (23)$$

Мяч находится в поле тяжести, по оси Z ускорение равно g , соответственно, время полета $t = 2 \frac{v_z}{g}$, v_z – начальная скорость по вертикали.

Найдем угловую скорость, для которой выполняется нужное соотношение с минимальной линейной скоростью мяча, при которой он сможет преодолеть необходимое расстояние.

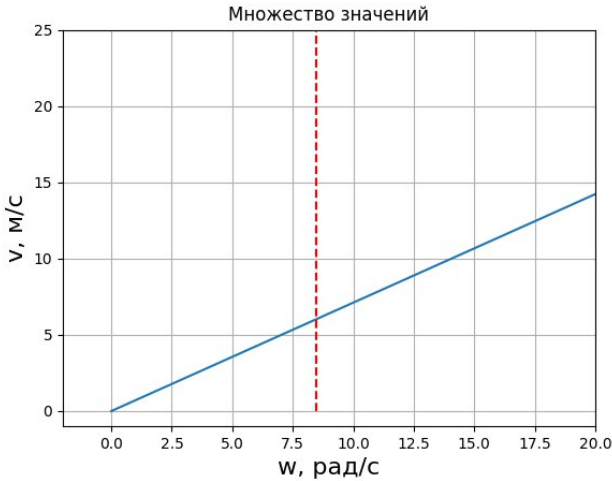


Рис. 2. Множество значений скоростей

В качестве результата проводится анализ графика (Рисунок ?), демонстрирующего поведение системы при заданных угловой и линейной скоростях. При нахождении левее пунктирной линии, тогда мячу не хватает времени полета для того, чтобы обогнуть препятствие, справа от пунктирной линии и ниже сплошной линии – обогнуть препятствие не удастся, если выше – мяч обогнул препятствие. Расположение на сплошной линии – касание препятствия при полете.

Рассчитанные значения соответствуют координатам точки пересечения сплошной и пунктирной линий.

2 Моделирование процесса

2.1 Общие сведения

Исходные данные программы:

1. Масса мяча (по футбольным стандартам) $m = 0.430 \text{ кг}$
2. Радиус мяча (при длине окружности около 70 см) $R = 0.11 \text{ м}$
3. Плотность воздуха (при $T = 15C^\circ$) $\rho = 1.225 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
4. Координаты начальной точки запуска мяча $(0, 0, 0)$

Данные вводимые пользователем:

1. Проекция линейной скорости на оси x, y, z , *ограничение:* $v_{z0} > 0$
2. Значение угловой скорости ω , *примечание:* по умолчанию вектор угловой скорости направлен вдоль оси z
- 3*. Задание ширины препятствия

Выходные данные:

1. Для первой части эксперимента с заданными линейной и угловой скоростями выводится графическое представление полета на плоскости xy
2. Для эксперимента с заданным препятствием выводятся подходящие значения угловой и линейных скоростей, которые необходимо задать, чтобы обойти препятствие

2.2 Результаты работы программы

Программа написана на языке *Python 3* с использованием библиотеки *Matplotlib*.

Ниже представлены графики различных проекций траектории полета футбольного мяча при разных заданных значениях угловой скорости ω и одинаковых значениях линейной скорости.

Для $\omega = 30, 10, 0$ рад/с:

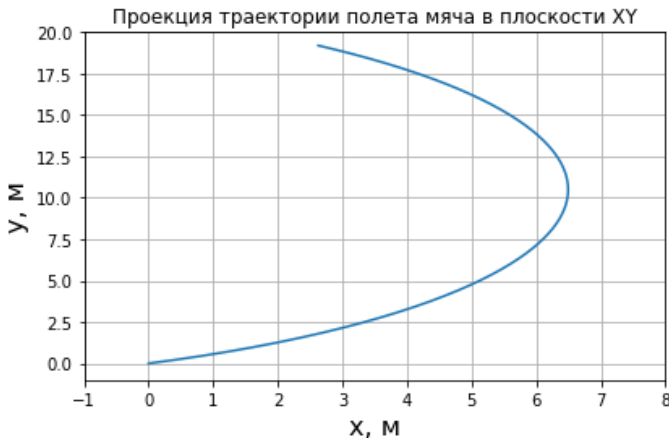


Рис. 3. При $v_x = 10$ м/с, $v_y = 5$ м/с, $v_z = 10$ м/с, $\omega = 30$ рад/с пр. XY

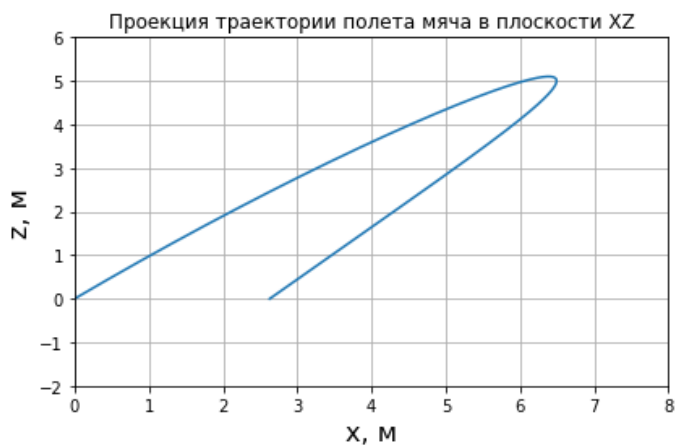


Рис. 4. При $v_x = 10$ м/с, $v_y = 5$ м/с, $v_z = 10$ м/с, $\omega = 30$ рад/с пр. XZ

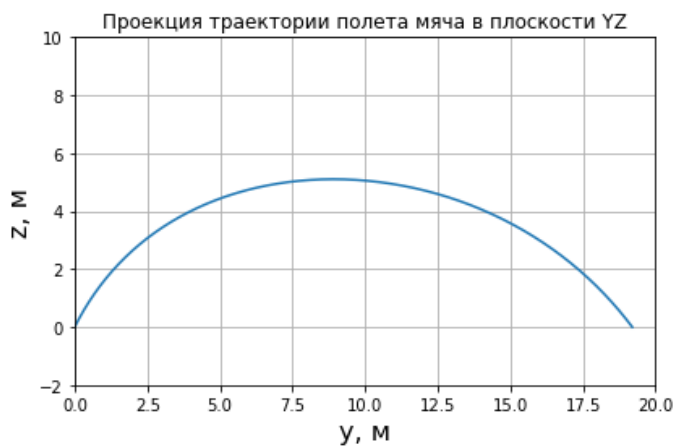


Рис. 5. При $v_x = 10$ м/с, $v_y = 5$ м/с, $v_z = 10$ м/с, $\omega = 30$ рад/с пр. YZ

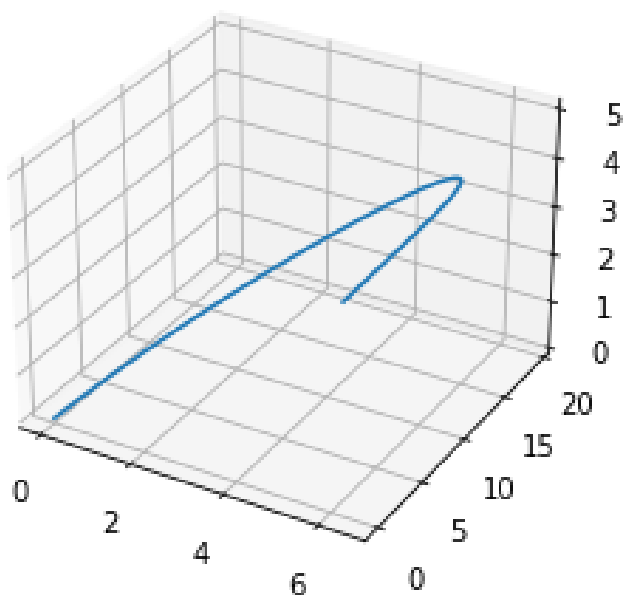


Рис. 6. При $v_x = 10$ м/с, $v_y = 5$ м/с, $v_z = 10$ м/с, $\omega = 30$ рад/с пр. XYZ

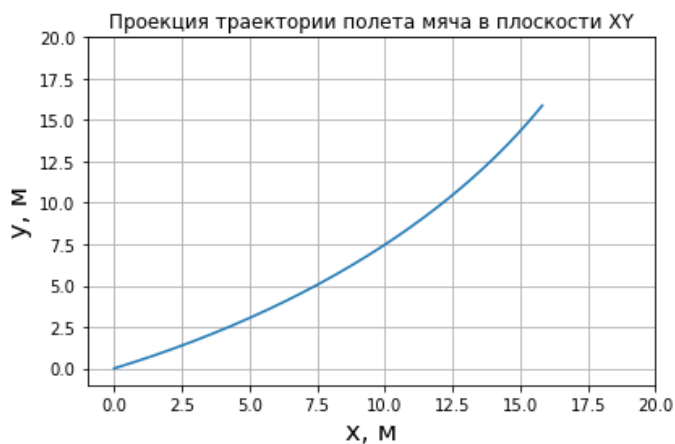


Рис. 7. При $v_x = 10$ м/с, $v_y = 5$ м/с, $v_z = 10$ м/с, $\omega = 10$ рад/с пр. XY

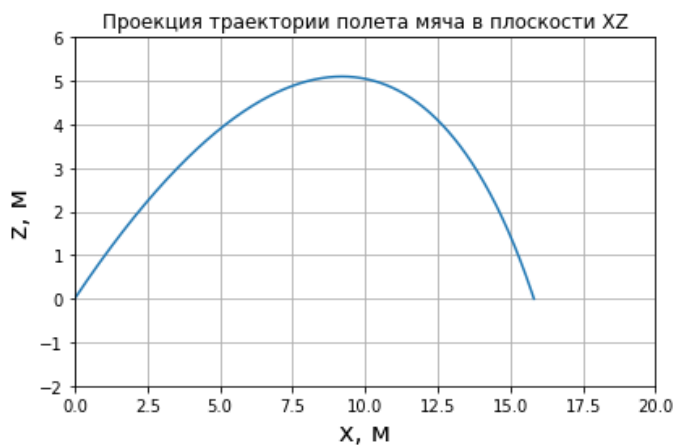


Рис. 8. При $v_x = 10$ м/с, $v_y = 5$ м/с, $v_z = 10$ м/с, $\omega = 10$ рад/с пр. XZ

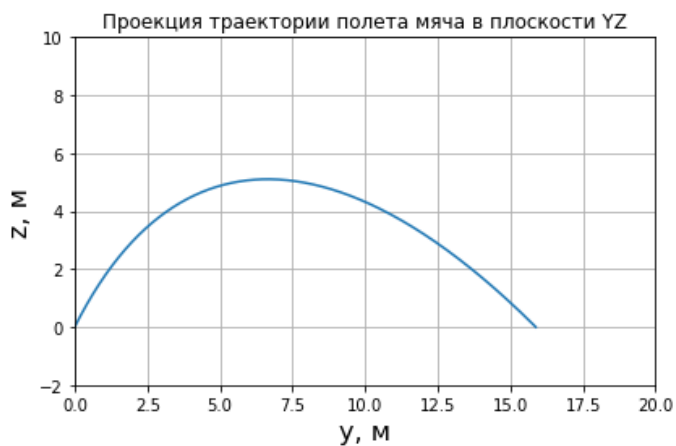


Рис. 9. При $v_x = 10$ м/с, $v_y = 5$ м/с, $v_z = 10$ м/с, $\omega = 10$ рад/с пр. YZ

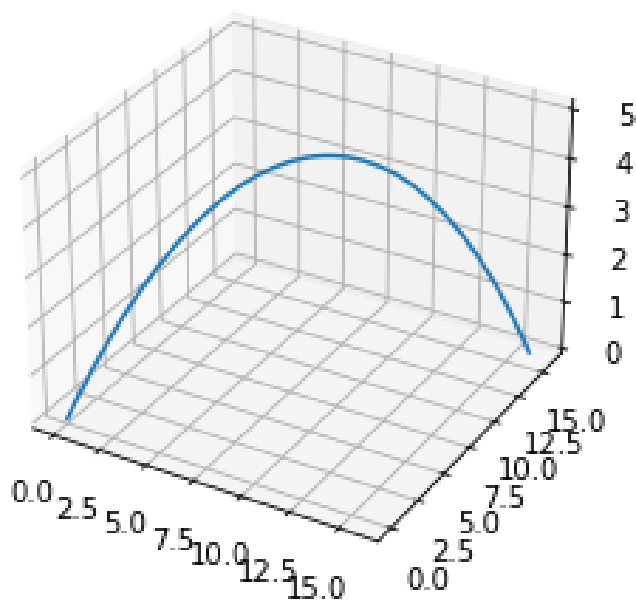


Рис. 10. При $v_x = 10$ м/с, $v_y = 5$ м/с, $v_z = 10$ м/с, $\omega = 10$ рад/с пр. XYZ

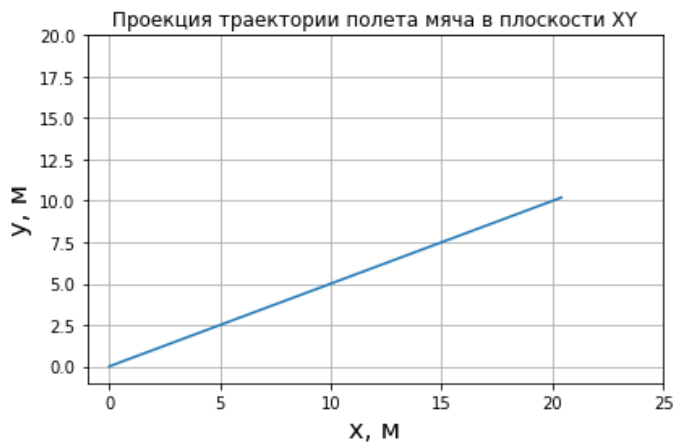


Рис. 11. При $v_x = 10$ м/с, $v_y = 5$ м/с, $v_z = 10$ м/с, $\omega = 0$ рад/с пр. XY

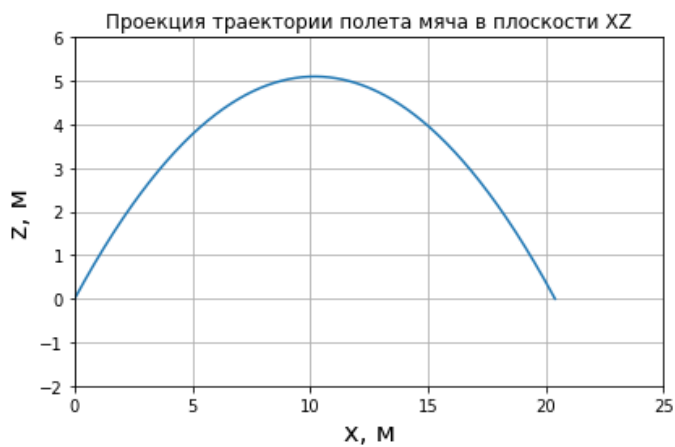


Рис. 12. При $v_x = 10$ м/с, $v_y = 5$ м/с, $v_z = 10$ м/с, $\omega = 0$ рад/с пр. XZ

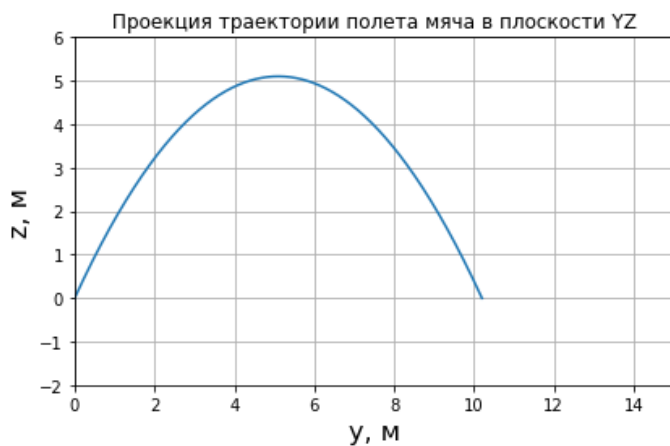


Рис. 13. При $v_x = 10$ м/с, $v_y = 5$ м/с, $v_z = 10$ м/с, $\omega = 0$ рад/с пр. YZ

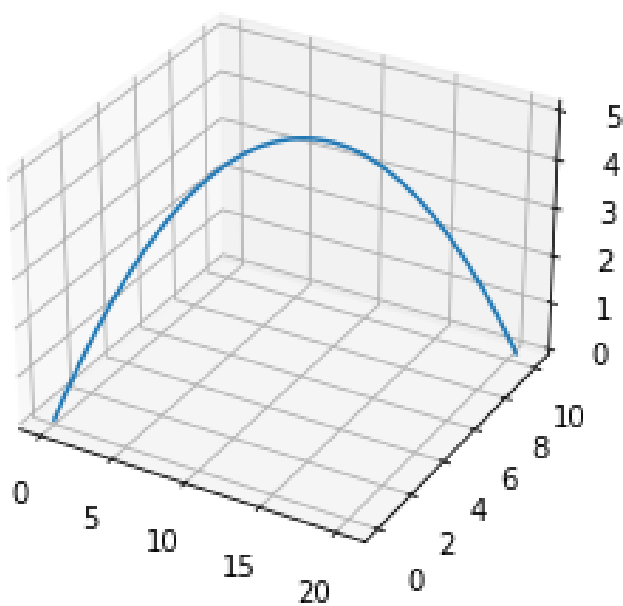


Рис. 14. При $v_x = 10$ м/с, $v_y = 5$ м/с, $v_z = 10$ м/с, $\omega = 0$ рад/с пр. XYZ