Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Отчет по проектной работе

по теме "Движение вращающегося мяча в воздухе с учетом эффекта Магнуса"

по дисциплине "Механика"

Выполнили: студенты

Нечаева А.А.
Попов В.?.

Преподаватель: *Смирнов Александр Витальевич*

Санкт-Петербург, 2023

1 Построение математической модели

1.1 Эффект Магнуса

Эффект Магнуса - физическое явление, возникающее при обтекании вращающегося тела потоком жидкости или газа. Возникающая сила - результат воздействия таких физических явлений, как *эффект Бернулли* и образования *пограничного слоя* в среде вокруг обтекаемого объекта, - действует на тело перпендикулярно направлению потока. Эффект описан немецким физиком *Генрихом Магнусом* в 1853 году.

Вращающийся объект создает вокруг себя вихревое движение, с одной стороны направление вихря совпадает с направлением обтекающего потока, с другой - противоположно, следовательно, скорость движения среды с одной стороны повышается, с другой - уменьшается. *Согласно уравнению Бернулл: чем меньше скорость, тем выше давление.* Возникающая разность давлений вызывает возникновение поперечной силы, вектор которой направлен от стороны, где направления вращения и потока противоположны, стороне с сонаправленными. Явление иллюстрирует рисунок 1.

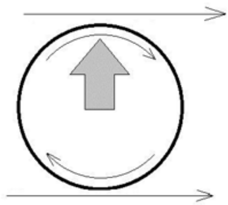

Рис. 1. Иллюстрация эффекта Магнуса

1.2 Вывод уравнений и формул

Обозначим начальные условия полета мяча:
1. Мяч - *абсолютно твёрдое тело*, то есть будем считать, что *взаимное расположение точек мяча не меняется с течением времени*, деформацией во время полета пренебрежем
2. Известные параметры мяча: радиус ($\boldsymbol{R}$) и масса ($\boldsymbol{m}$)
3. Также заданы начальные значения угловой ($\omega_{\mathbf{0}}$) и линейной скоростей ($\mathbf{v_0}$)
4. Задана некоторая плотность газа - среды, в которой происходит полет

мяча (ρ)

Запишем *закон Ньютона* в общем виде

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{1}$$

Далее распишем силы, действующие на мяч в процессе полета

$$\vec{F}_{\text{тяжести}} + \vec{F}_{\text{Магнуса}} = m \cdot \vec{a} \tag{2}$$

Пусть шар находится в потоке набегающего не него идеального газа. Скорость потока на бесконечности $\vec{u}_\infty$. Чтобы сымитировать вращение шара, введем циркуляцию скорости Γ вокруг него. Исходя из закона Бернулли, можно получить, что полная сила, действующая в таком случае на шар, равна:

$$\vec{R} = -\rho\vec{\Gamma} \times \vec{u}_\infty \,, \tag{3}$$

где $\vec{u}_\infty = -\vec{v}$ (v – линейная скорость мяча); Γ вычислим как

$$\Gamma = \oint\limits_L v_\tau dS \,, \tag{4}$$

v_τ – проекция скорости на касательную к этой кривой, dS – элемент длины кривой. В случае шара запишем Запишем формулу для вычисления силы Магнуса в общем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma = \int\limits_{-R}^{R} 2\pi\omega(R^2 - x^2)\,dx = 2\pi\omega \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \\ = 2\pi\omega \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = 4\pi\omega\frac{2R^3}{3} = \frac{8\pi\omega}{3}R^3 \,, \end{aligned} \tag{5}$$

где R – радиус шара, ω – заданная угловая скорость вращения мяча. Будем считать, что вектор угловой скорости задан вдоль 1 оси – оси Z.
Тогда запишем формулу для вычисления силы Магнуса:

$$\vec{F}_{\text{Магнуса}} = -\rho\vec{\Gamma} \times \vec{u}_\infty = -\rho\frac{8\pi\vec{\omega}}{3}R^3 \times -\vec{v} = \frac{8\pi}{3}\rho R^3\vec{\omega} \times \vec{v} \tag{6}$$

В общем случае будем рассматривать движение мяча в *Декартовой системе координат*, в *трехмерном пространстве*, тогда проекции на оси X,

Y и Z соотвественно

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{8\pi}{3}\rho R^3 \left(\vec{\omega} \times \vec{v}\right)_x \ , \\ m\ddot{y} = \frac{8\pi}{3}\rho R^3 \left(\vec{\omega} \times \vec{v}\right)_y \ , \\ \ddot{z} = g \end{cases} \tag{7}$$

Перейдем к уравнениям для угловой скорости вращения мяча ω, в частности, найдем выражения для разложения $(\vec{\omega} \times \vec{v})$ по единичным векторам, задающим оси координат, $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$

$$\begin{gathered} (\vec{\omega} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \omega_y & \omega_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \\ = \vec{i} \left(\omega_y v_z - \omega_z v_y\right) + \vec{j} \left(\omega_z v_x - \omega_x v_z\right) + \vec{k} \left(\omega_x v_y - \omega_y v_x\right) \to \\ \to \left(\vec{\omega} \times \vec{v}\right)_x = \omega_y v_z - \omega_z v_y = -\omega_z v_y \\ \left(\vec{\omega} \times \vec{v}\right)_y = \omega_z v_x - \omega_x v_z = \omega_z v_x \\ \left(\vec{\omega} \times \vec{v}\right)_z = \omega_x v_y - \omega_y v_x = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

Перейдем к дифференциальному виду уравнений проекций движения мяча на оси координат:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{8\pi}{3}\rho R^3 \omega_z v_y \ , \\ m\ddot{y} = \frac{8\pi}{3}\rho R^3 \omega_z v_x \ , \\ \ddot{z} = g \end{cases} \tag{9}$$

Запишем также начальные условия задачи, координаты мяча – положение его центра масс во времени

$$\begin{cases} (x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 0) \\ v_x(0) = v_{0x} \\ v_y(0) = v_{0y} \\ v_z(0) = v_{0z} \\ \omega_x(0) = 0 \\ \omega_y(0) = 0 \\ \omega_z(0) = \omega_0 \end{cases} \tag{10}$$

1.3 Решение дифференциальных уравнений

Для решения соотвествующей системы дифференциальных уравнений был применен *метод Эйлера* численного решения дифференциальных уравнений. Описание метода:
Пусть дана задача Коши для уравнения первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),\ y|_{x=x_0} = y_0\,,$$

где функция f определена на некоторой области $D \in R^2$. Решение ищется на полуинтервале $(x_0, b]$. На этом промежутке введем узлы $x_0 < x_1 < ... < x_n \leq b$. Приближенное решение в узлах x_i, которое обозначим через y_i, определяется по формуле

$$y_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}, y_{i-1}),\ \ i = 1, 2, 3, ..., n.$$

Эти формулы непосредственно обобщаются на случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений.
В данной работе для нахождения численного решения системы линейных однородных уравнений второго порядка метод Эйлера был применен последовательно: сначала для вычисления первой производной, а затем на основе полученного результата – второй производной.

1.4 Численный эксперимент. Огибание препятствия заданной ширины

Молуль силы, действующей на мяч, постоянен, а ее вектор перпендикулярен скорости мяча в любой момент времени и лежит в плоскости XY, следовательно, траектория мяча представляет собой фрагмент окружности в плоскости XY.
Запишем центростремительное ускорение:

$$a_n = \frac{F}{m} = \frac{8\pi}{3m}\rho\omega vR^3 = \frac{v^2}{r}, \tag{11}$$

где r – радиус кривизны дуги, по которой движется мяч. Тогда

$$\frac{v}{\omega} = \frac{8\pi}{3m}\rho rR^3 \rightarrow \omega(v) = \frac{v}{k},\ k = \frac{8\pi}{3m}\rho rR^3 \tag{12}$$

Пусть линейная скорость задана вдоль оси X, а препятствие представляет собой бесконечный цилиндр.

На основе геометрической модели (рисунок ?) составим выражения:

$$|Y_0| - R_{\text{пр}} = O'B \tag{13}$$

$$O'B = \sqrt{\left(Y_0 - Y_{\text{пр}}\right)^2 + X_{\text{пр}}^2} \tag{14}$$

Откуда выразим Y_0 – радиус траектории мяча при касании препятствия:

$$Y_0 = \frac{X_{\text{пр}}^2 + Y_{\text{пр}}^2 - R_{\text{пр}}^2}{2\left(Y_{\text{пр}} - R_{\text{пр}}\right)\frac{\sqrt{Y_{\text{пр}}^2}}{Y_{\text{пр}}}} \tag{15}$$

Пусть h – коэффициент отношения расстояния от центра координат до пересечения прямой, на которой лежит центр координат и центр препятствия, и траектории мяча к расстоянию от начала координат до центра препятствия.

$$OO' = \sqrt{X_{\text{пр}}^2 + Y_{\text{пр}}^2} \tag{16}$$

$$BC^2 = \left(X_{\text{пр}}h\right)^2 + \left(Y_0 - Y_{\text{пр}}h\right)^2 \tag{17}$$

$$BC^2 = Y_0^2 \tag{18}$$

$$h = \frac{2Y_0Y_{\text{пр}}}{X_{\text{пр}}^2 + Y_{\text{пр}}^2} \tag{19}$$

$$\phi = 2\alpha, \tag{20}$$

где $\phi = \angle OBC$, $\alpha = \angle OBK$

$$\sin\alpha = \frac{OO'h}{2Y_0} \tag{21}$$

$$\phi = 2\arcsin\alpha \tag{22}$$

Пусть S – длина траектории до пересечения объектом прямой, соединяющей центр координат и центр препятствия.

$$S = \phi Y_0 = Y_0 2\arcsin\alpha = Y_0 2\arcsin\frac{\sqrt{X_{\text{пр}}^2 + Y_{\text{пр}}^2}h}{2Y_0} \tag{23}$$

Мяч находится в поле тяжести, по оси Z ускорение равно g, соотвественно, время полета $t = 2\frac{v_z}{g}$, v_z – начальная скорость по вертикали.
Найдем угловую скорость, для которой выполняется нужное соотношение с минимальной линейной скоростью мяча, при которой он сможет преодолеть необходимое расстояние.

2 Моделирование процесса

2.1 Общие сведения

Исходные данные программы:
1. Масса мяча (по футбольным стандартам) $\mathbf{m = 0.430}$ **кг**
2. Радиус мяча (при длине окружности около 70 см) $\mathbf{R = 0.11}$ **м**
3. Плотность воздуха (при $T = 15C^o$) $\rho = 1.225\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
4. Координаты начальной точки запуска мяча $(0, 0, 0)$

Данные вводимые пользователем:
1. Проекции линейной скорости на оси x, y, z, *ограничение:* $v_{z_0} > 0$
2. Значение угловой скорости ω, *примечание: по умолчанию вектор угловой скорости направлен вдось оси z*
3*. Задание ширины препятствия

Выходные данные:
1. Для первой части эксперимента с заданными линейной и угловой скоростями выводится графическое представление полета на плоскости xy
2. Для эксперимента с заданным препятствием выводятся подходящие значения угловой и линейных скоростей, которые необходимо задать, чтобы обойти препятствие

2.2 Результаты работы программы

Программа написана на языке *Python 3* с использованием библиотеки *Matplotlib.*
Ниже представлены графики различных проекций траектории полета футбольного мяча при разных заданных значениях угловой скорости ω и одинаковых значениях линейной скорости.
Для $\omega = 30, 10, 0$ рад/с:

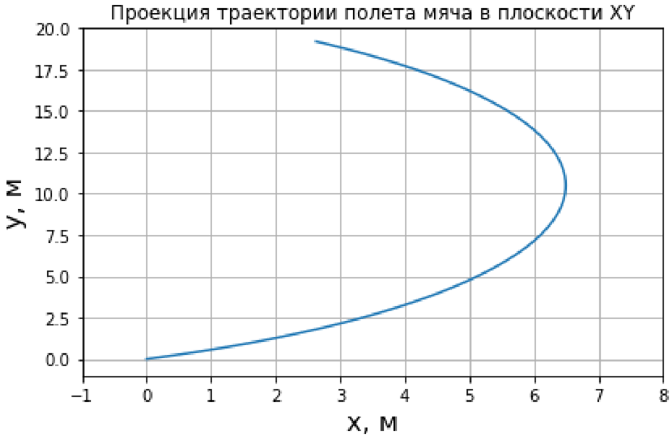

Рис. 2. При $v_x = 10$ *м/с*, $v_y = 5$ *м/с*, $v_z = 10$ *м/с*, $\omega = 30$ *рад/с пр.* XY

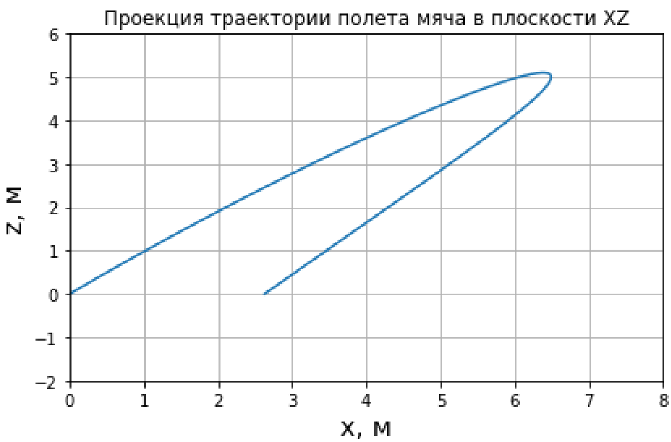

Рис. 3. При $v_x = 10$ *м/с*, $v_y = 5$ *м/с*, $v_z = 10$ *м/с*, $\omega = 30$ *рад/с пр.* XZ

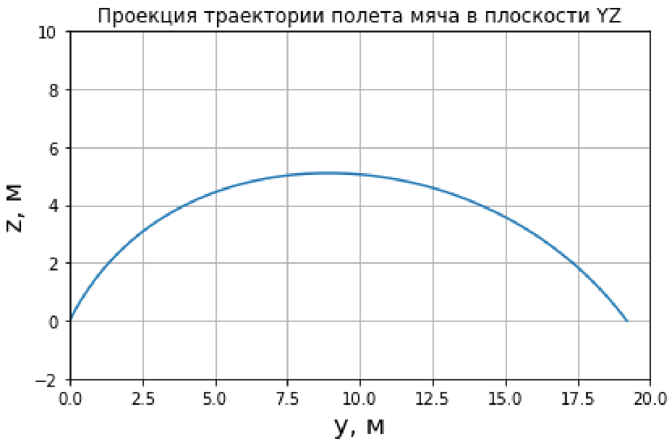

Рис. 4. При $v_x = 10$ м/с, $v_y = 5$ м/с, $v_z = 10$ м/с, $\omega = 30$ рад/с пр. YZ

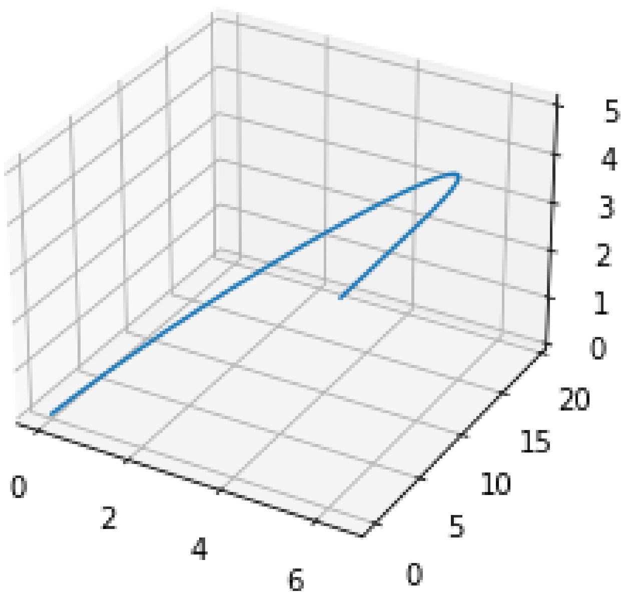

Рис. 5. При $v_x = 10$ м/с, $v_y = 5$ м/с, $v_z = 10$ м/с, $\omega = 30$ рад/с пр. XYZ

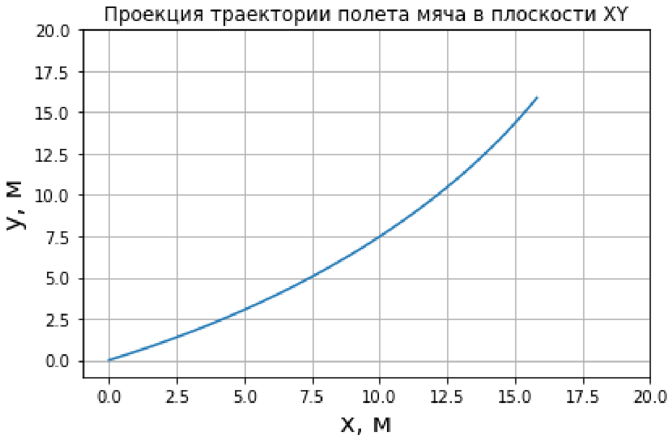

Рис. 6. При $v_x = 10$ *м/с*, $v_y = 5$ *м/с*, $v_z = 10$ *м/с*, $\omega = 10$ *рад/с пр.* XY

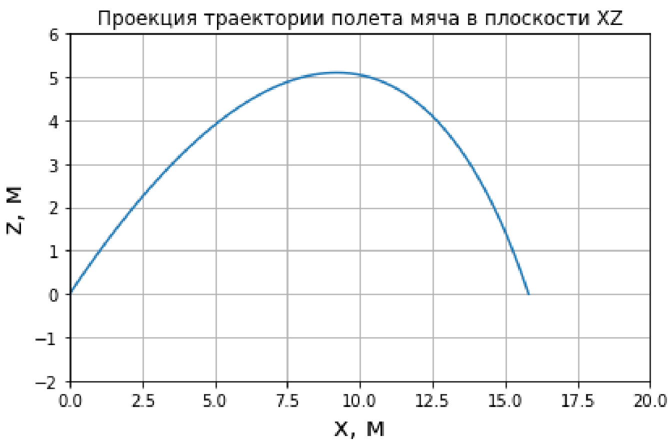

Рис. 7. При $v_x = 10$ *м/с*, $v_y = 5$ *м/с*, $v_z = 10$ *м/с*, $\omega = 10$ *рад/с пр.* XZ

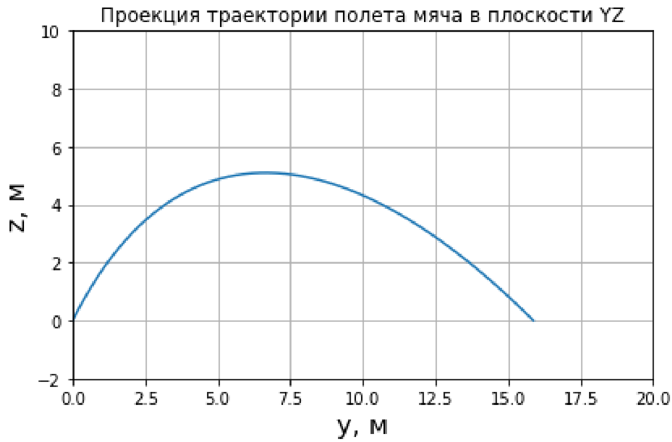

Рис. 8. При $v_x = 10$ м/с, $v_y = 5$ м/с, $v_z = 10$ м/с, $\omega = 10$ рад/с пр. YZ

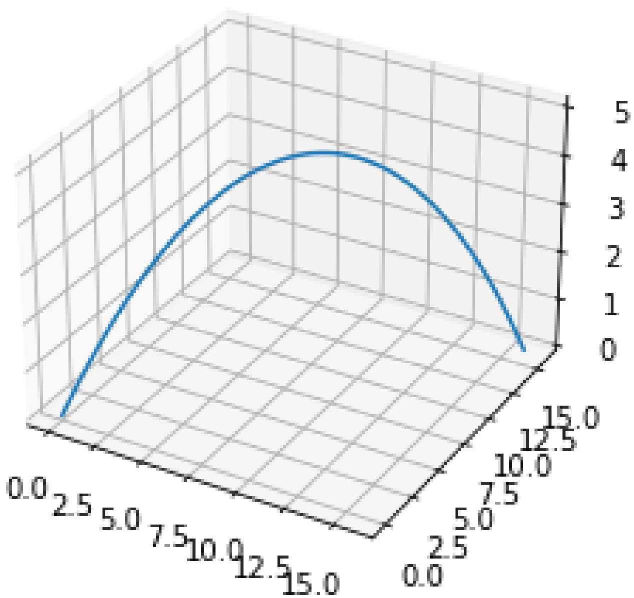

Рис. 9. При $v_x = 10$ м/с, $v_y = 5$ м/с, $v_z = 10$ м/с, $\omega = 10$ рад/с пр. XYZ

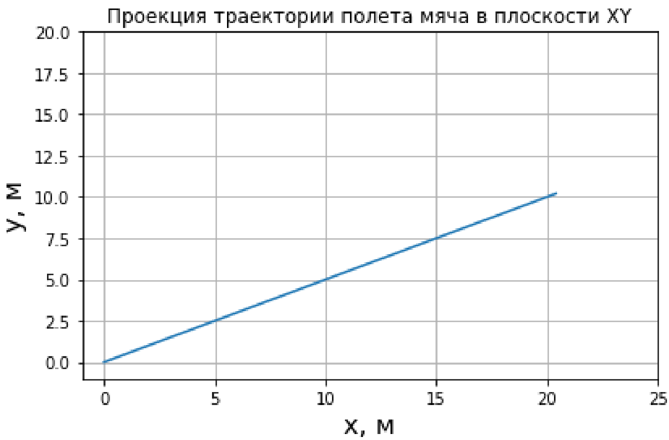

Рис. 10. При $v_x = 10$ *м/с*, $v_y = 5$ *м/с*, $v_z = 10$ *м/с*, $\omega = 0$ *рад/с пр.* XY

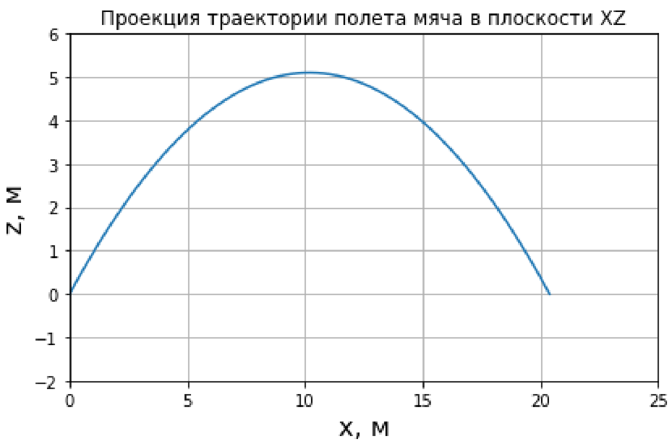

Рис. 11. При $v_x = 10$ *м/с*, $v_y = 5$ *м/с*, $v_z = 10$ *м/с*, $\omega = 0$ *рад/с пр.* XZ

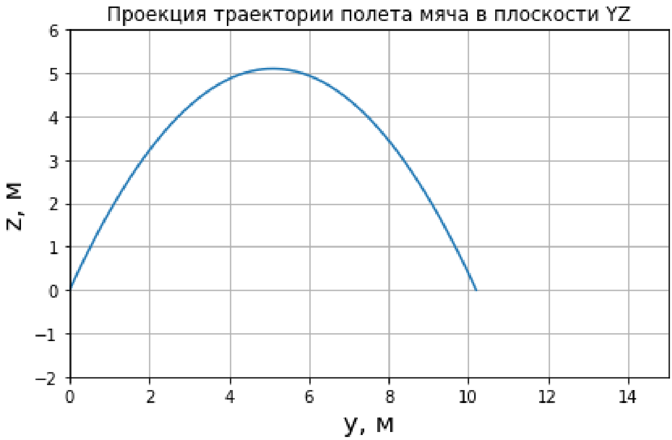

Рис. 12. При $v_x = 10$ *м/с,* $v_y = 5$ *м/с,* $v_z = 10$ *м/с,* $\omega = 0$ *рад/с пр.* YZ

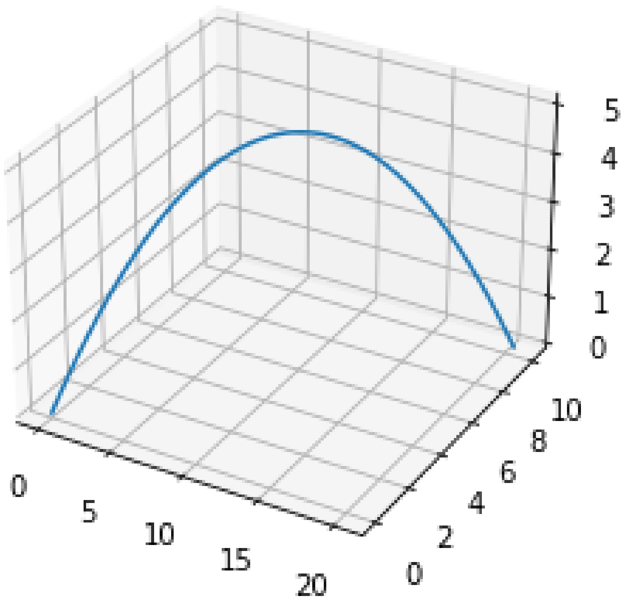

Рис. 13. При $v_x = 10$ *м/с,* $v_y = 5$ *м/с,* $v_z = 10$ *м/с,* $\omega = 0$ *рад/с пр.* XYZ