

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

**Отчет по проектной работе**  
**по теме "Движение вращающегося мяча в**  
**воздухе с учетом эффекта Магнуса"**  
**по дисциплине "Механика"**

Выполнили: студенты

**Нечаева А.А.**  
**Попов В.?.**

Преподаватель: *Смирнов Александр Витальевич*

Санкт-Петербург, 2023

# 1 Построение математической модели

## 1.1 Эффект Магнуса

*Эффект Магнуса* - физическое явление, возникающее при обтекании вращающегося тела потоком жидкости или газа. Возникающая сила - результат воздействия таких физических явлений, как *эффект Бернулли* и образования *пограничного слоя* в среде вокруг обтекаемого объекта, - действует на тело перпендикулярно направлению потока. Эффект описан немецким физиком *Генрихом Магнусом* в 1853 году.

Вращающийся объект создает вокруг себя вихревое движение, с одной стороны направление вихря совпадает с направлением обтекающего потока, с другой - противоположно, следовательно, скорость движения среды с одной стороны повышается, с другой - уменьшается. *Согласно уравнению Бернулли: чем меньше скорость, тем выше давление.* Возникающая разность давлений вызывает возникновение поперечной силы, вектор которой направлен от стороны, где направления вращения и потока противоположны, стороне с сонаправленными. Явление иллюстрирует рисунок 1.

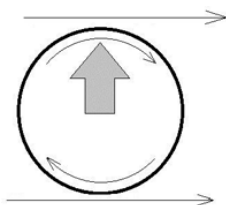


Рис. 1. Иллюстрация эффекта Магнуса

## 1.2 Вывод уравнений и формул

Обозначим начальные условия полета мяча:

1. Мяч - *абсолютно твёрдое тело*, то есть будем считать, что *взаимное расположение точек мяча не меняется с течением времени*, деформацией во время полета пренебрежем
2. Известные параметры мяча: радиус ( $R$ ) и масса ( $m$ )
3. Также заданы начальные значения угловой ( $\omega_0$ ) и линейной скоростей ( $v_0$ )
4. Задана некоторая плотность газа - среды, в которой происходит полет

мяча ( $\rho$ )

Запишем закон Ньютона в общем виде

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (1)$$

Далее распишем силы, действующие на мяч в процессе полета

$$\vec{F}_{\text{тяжести}} + \vec{F}_{\text{Магнуса}} = m \cdot \vec{a} \quad (2)$$

Пусть шар находится в потоке набегающего не него идеального газа. Скорость потока на бесконечности  $\vec{u}_{\infty}$ . Чтобы симитировать вращение шара, введем циркуляцию скорости  $\Gamma$  вокруг него. Исходя из закона Бернулли, можно получить, что полная сила, действующая в таком случае на шар, равна:

$$\vec{R} = -\rho \vec{\Gamma} \times \vec{u}_{\infty}, \quad (3)$$

где  $\vec{u}_{\infty} = -\vec{v}$  ( $v$  – линейная скорость мяча);  $\Gamma$  вычислим как

$$\Gamma = \oint_L v_{\tau} dS, \quad (4)$$

$v_{\tau}$  – проекция скорости на касательную к этой кривой,  $dS$  – элемент длины кривой. В случае шара запишем Запишем формулу для вычисления силы Магнуса в общем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{-R}^R 2\pi\omega(R^2 - x^2) dx = 2\pi\omega \left( R^2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \\ &= 2\pi\omega \left( R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = 4\pi\omega \frac{2R^3}{3} = \frac{8\pi\omega}{3} R^3, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $R$  – радиус шара,  $\omega$  – заданная угловая скорость вращения мяча. Будем считать, что вектор угловой скорости задан вдоль 1 оси – оси  $Z$ .

Тогда запишем формулу для вычисления силы Магнуса:

$$\vec{F}_{\text{Магнуса}} = -\rho \vec{\Gamma} \times \vec{u}_{\infty} = -\rho \frac{8\pi\vec{\omega}}{3} R^3 \times -\vec{v} = \frac{8\pi}{3} \rho R^3 \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (6)$$

В общем случае будем рассматривать движение мяча в *Декартовой системе координат, в трехмерном пространстве*, тогда проекции на оси  $X$ ,

$Y$  и  $Z$  соответственно

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{8\pi}{3}\rho R^3 (\vec{\omega} \times \vec{v})_x, \\ m\ddot{y} = \frac{8\pi}{3}\rho R^3 (\vec{\omega} \times \vec{v})_y, \\ \ddot{z} = g \end{cases} \quad (7)$$

Перейдем к уравнениям для угловой скорости вращения мяча  $\omega$ , в частности, найдем выражения для разложения  $(\vec{\omega} \times \vec{v})$  по единичным векторам, задающим оси координат,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{v}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \omega_y & \omega_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(\omega_y v_z - \omega_z v_y) + \vec{j}(\omega_z v_x - \omega_x v_z) + \vec{k}(\omega_x v_y - \omega_y v_x) \rightarrow \\ &\rightarrow (\vec{\omega} \times \vec{v})_x = \omega_y v_z - \omega_z v_y = -\omega_z v_y \\ &(\vec{\omega} \times \vec{v})_y = \omega_z v_x - \omega_x v_z = \omega_z v_x \\ &(\vec{\omega} \times \vec{v})_z = \omega_x v_y - \omega_y v_x = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Перейдем к дифференциальному виду уравнений проекций движения мяча на оси координат:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{8\pi}{3}\rho R^3 \omega_z v_y, \\ m\ddot{y} = \frac{8\pi}{3}\rho R^3 \omega_z v_x, \\ \ddot{z} = g \end{cases} \quad (9)$$

Запишем также начальные условия задачи, координаты мяча – положение его центра масс во времени

$$\begin{cases} (x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 0) \\ v_x(0) = v_{0x} \\ v_y(0) = v_{0y} \\ v_z(0) = v_{0z} \\ \omega_x(0) = 0 \\ \omega_y(0) = 0 \\ \omega_z(0) = \omega_0 \end{cases} \quad (10)$$

### 1.3 Решение дифференциальных уравнений

Для решения соответствующей системы дифференциальных уравнений был применен *метод Эйлера* численного решения дифференциальных уравнений. Описание метода:

*Пусть дана задача Коши для уравнения первого порядка:*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y|_{x=x_0} = y_0,$$

где функция  $f$  определена на некоторой области  $D \in R^2$ . Решение ищется на полуинтервале  $(x_0, b]$ . На этом промежутке введем узлы  $x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ . Приближенное решение в узлах  $x_i$ , которое обозначим через  $y_i$ , определяется по формуле

$$y_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Эти формулы непосредственно обобщаются на случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данной работе для нахождения численного решения системы линейных однородных уравнений второго порядка метод Эйлера был применен последовательно: сначала для вычисления первой производной, а затем на основе полученного результата – второй производной.

### 1.4 Численный эксперимент. Огибание препятствия заданной ширины

Момент силы, действующей на мяч, постоянен, а ее вектор перпендикулярен скорости мяча в любой момент времени и лежит в плоскости  $XU$ , следовательно, траектория мяча представляет собой фрагмент окружности в плоскости  $XU$ .

Запишем центростремительное ускорение:

$$a_n = \frac{F}{m} = \frac{8\pi}{3m} \rho \omega v R^3 \quad (11)$$

## 2 Моделирование процесса

### 2.1 Общие сведения

Исходные данные программы:

1. Масса мяча (по футбольным стандартам)  $m = 0.430$  кг

2. Радиус мяча (при длине окружности около 70 см)  $R = 0.11$  м
3. Плотность воздуха (при  $T = 15C^{\circ}$ )  $\rho = 1.225 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
4. Координаты начальной точки запуска мяча  $(0, 0, 0)$

Данные вводимые пользователем:

1. Проекция линейной скорости на оси  $x, y, z$ , *ограничение:*  $v_{z_0} > 0$
2. Значение угловой скорости  $\omega$ , *примечание:* по умолчанию вектор угловой скорости направлен вдоль оси  $z$
- 3\*. Задание ширины препятствия

Выходные данные:

1. Для первой части эксперимента с заданными линейной и угловой скоростями выводится графическое представление полета на плоскости  $xy$
2. Для эксперимента с заданным препятствием выводятся подходящие значения угловой и линейных скоростей, которые необходимо задать, чтобы обойти препятствие

## 2.2 Результаты работы программы

Программа написана на языке *Python 3* с использованием библиотеки *Matplotlib*.

Ниже представлены графики различных проекций траектории полета футбольного мяча при разных заданных значениях угловой скорости  $\omega$  и одинаковых значениях линейной скорости.

Для  $\omega = 30, 10, 0$  рад/с:

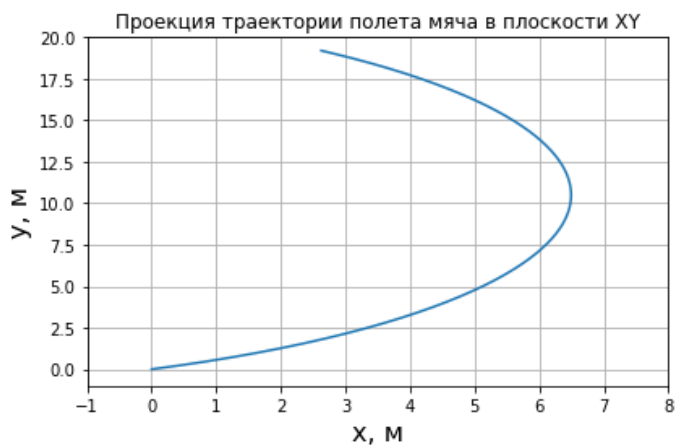


Рис. 2. При  $v_x = 10$  м/с,  $v_y = 5$  м/с,  $v_z = 10$  м/с,  $\omega = 30$  рад/с пр. XY

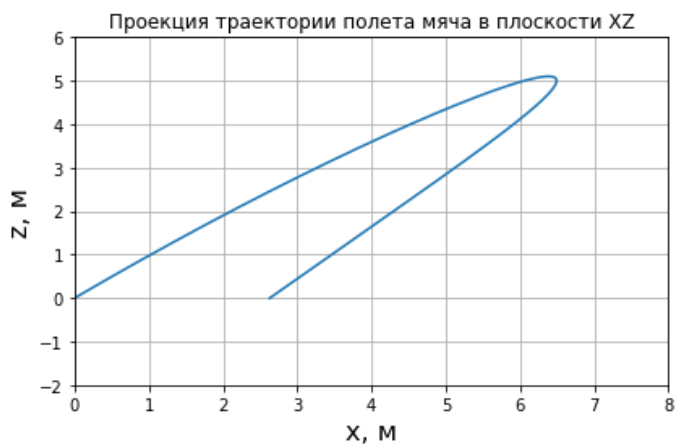


Рис. 3. При  $v_x = 10$  м/с,  $v_y = 5$  м/с,  $v_z = 10$  м/с,  $\omega = 30$  рад/с пр. XZ

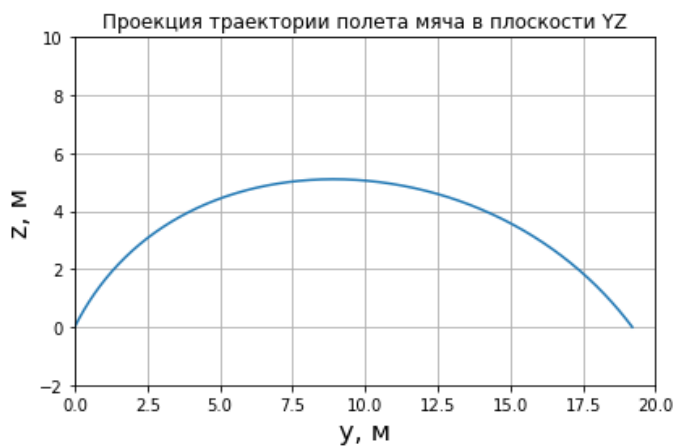


Рис. 4. При  $v_x = 10$  м/с,  $v_y = 5$  м/с,  $v_z = 10$  м/с,  $\omega = 30$  рад/с пр. YZ

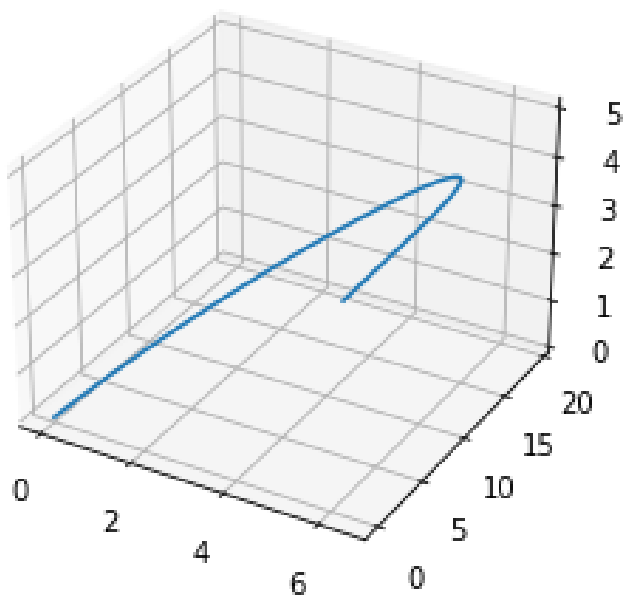


Рис. 5. При  $v_x = 10$  м/с,  $v_y = 5$  м/с,  $v_z = 10$  м/с,  $\omega = 30$  рад/с пр. XYZ



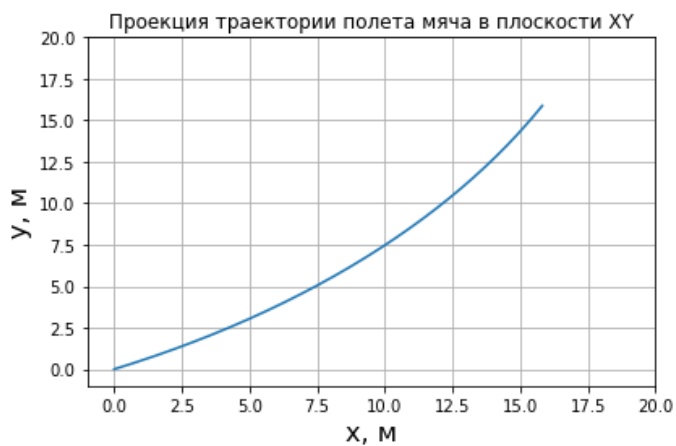


Рис. 6. При  $v_x = 10$  м/с,  $v_y = 5$  м/с,  $v_z = 10$  м/с,  $\omega = 10$  рад/с пр. XY

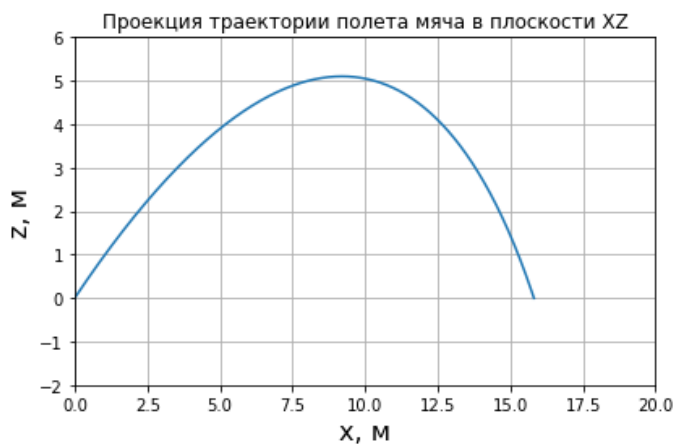


Рис. 7. При  $v_x = 10$  м/с,  $v_y = 5$  м/с,  $v_z = 10$  м/с,  $\omega = 10$  рад/с пр. XZ

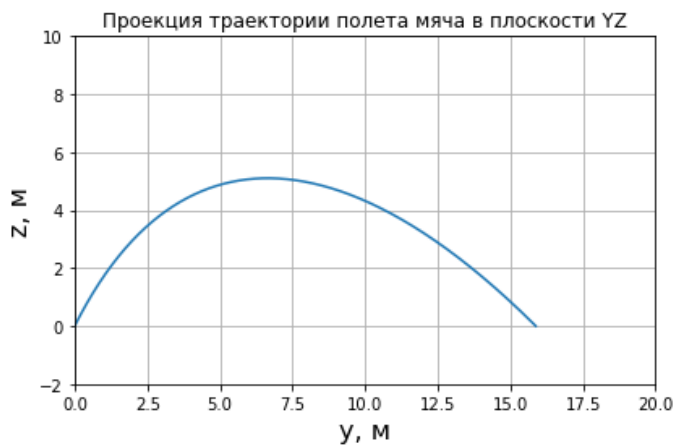


Рис. 8. При  $v_x = 10$  м/с,  $v_y = 5$  м/с,  $v_z = 10$  м/с,  $\omega = 10$  рад/с пр. YZ

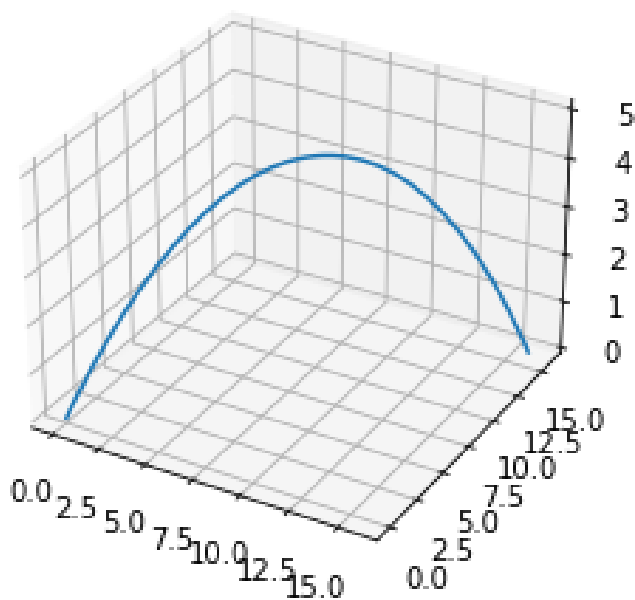


Рис. 9. При  $v_x = 10$  м/с,  $v_y = 5$  м/с,  $v_z = 10$  м/с,  $\omega = 10$  рад/с пр. XYZ

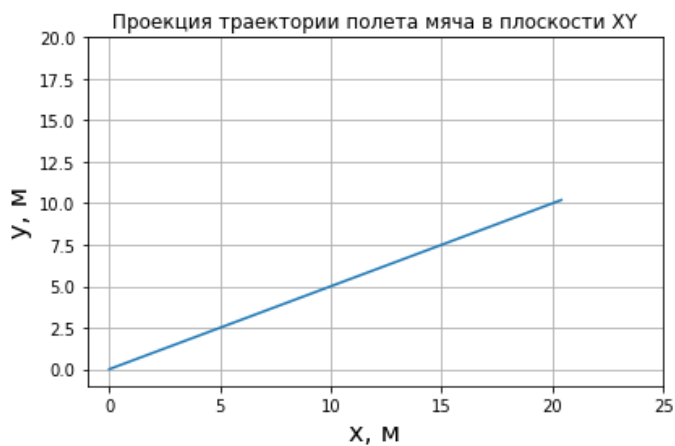


Рис. 10. При  $v_x = 10$  м/с,  $v_y = 5$  м/с,  $v_z = 10$  м/с,  $\omega = 0$  рад/с пр. XY

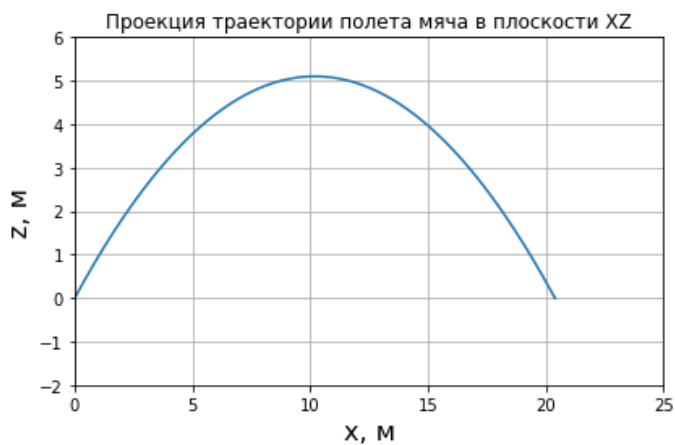


Рис. 11. При  $v_x = 10$  м/с,  $v_y = 5$  м/с,  $v_z = 10$  м/с,  $\omega = 0$  рад/с пр. XZ

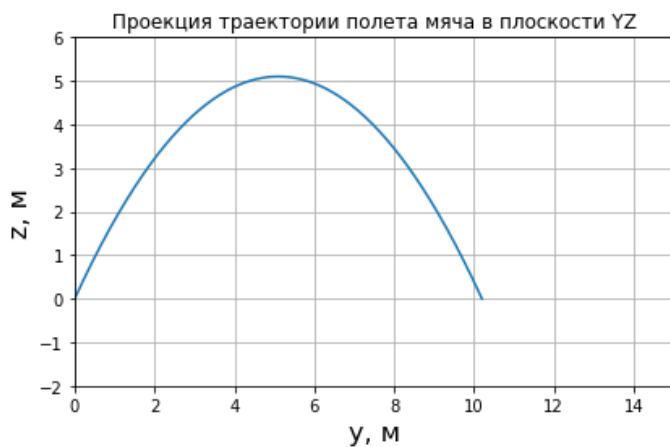


Рис. 12. При  $v_x = 10$  м/с,  $v_y = 5$  м/с,  $v_z = 10$  м/с,  $\omega = 0$  рад/с пр. YZ

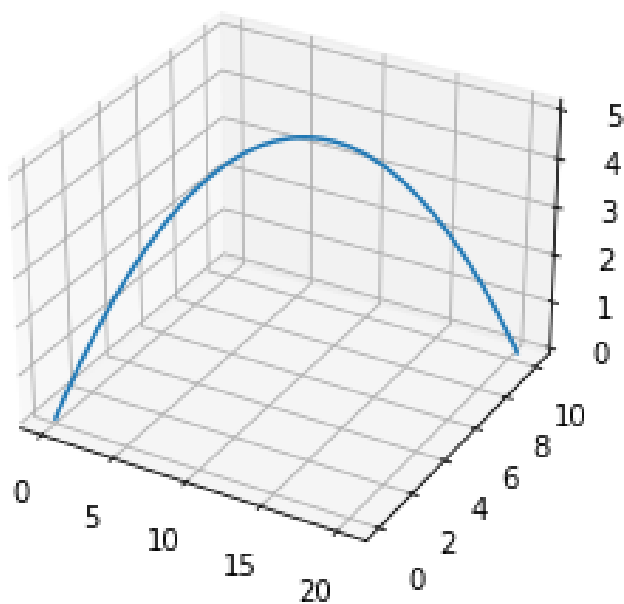


Рис. 13. При  $v_x = 10$  м/с,  $v_y = 5$  м/с,  $v_z = 10$  м/с,  $\omega = 0$  рад/с пр. XYZ