

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Отчет по проектной работе
по теме "Движение вращающегося мяча в
воздухе с учетом эффекта Магнуса"
по дисциплине "Механика"

Выполнили: студенты

Нечаева А.А.
Попов В.?.

Преподаватель: *Смирнов Александр Витальевич*

Санкт-Петербург, 2023

1 Построение математической модели

1.1 Эффект Магнуса

Эффект Магнуса - физическое явление, возникающее при обтекании вращающегося тела потоком жидкости или газа. Возникающая сила - результат воздействия таких физических явлений, как *эффект Бернулли* и образования *пограничного слоя* в среде вокруг обтекаемого объекта, - действует на тело перпендикулярно направлению потока. Эффект описан немецким физиком *Генрихом Магнусом* в 1853 году.

Вращающийся объект создает вокруг себя вихревое движение, с одной стороны направление вихря совпадает с направлением обтекающего потока, с другой - противоположно, следовательно, скорость движения среды с одной стороны повышается, с другой - уменьшается. *Согласно уравнению Бернулли: чем меньше скорость, тем выше давление.* Возникающая разность давлений вызывает возникновение поперечной силы, вектор которой направлен от стороны, где направления вращения и потока противоположны, стороне с сонаправленными. Явление иллюстрирует рисунок 1.

рисунок 1

1.2 Вывод уравнений и формул

Обозначим начальные условия полета мяча:

1. Мяч - *абсолютно твёрдое тело*, то есть будем считать, что *взаимное расположение точек мяча не меняется с течением времени*, деформацией во время полета пренебрежем
2. Известные параметры мяча: радиус (R) и масса (m)
3. Также заданы начальные значения угловой (ω_0) и линейной скоростей (v_0)
4. Задана некоторая плотность газа - среды, в которой происходит полет мяча (ρ)

Запишем закон *Ньютона* в общем виде

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (1)$$

Далее распишем силы, действующие на мяч в процессе полета

$$\vec{F}_{\text{тяжести}} + \vec{F}_{\text{Магнуса}} = m \cdot \vec{a} \quad (2)$$

Пусть шар находится в потоке набегающего не него идеального газа. Скорость потока на бесконечности \vec{u}_{∞} . Чтобы симитировать вращение шара, введем циркуляцию скорости Γ вокруг него. Исходя из закона Бернулли, можно получить, что полная сила, действующая в таком случае на шар, равна:

$$\vec{R} = -\rho \vec{\Gamma} \times \vec{u}_{\infty}, \quad (3)$$

где $\vec{u}_{\infty} = -\vec{v}$ (v – линейная скорость мяча); Γ вычислим как

$$\Gamma = \oint_L v_{\tau} dS, \quad (4)$$

v_{τ} – проекция скорости на касательную к этой кривой, dS – элемент длины кривой. В случае шара запишем Запишем формулу для вычисления силы Магнуса в общем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{-R}^R 2\pi\omega(R^2 - x^2) dx = 2\pi\omega \left(R^2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \\ &= 2\pi\omega \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = 4\pi\omega \frac{2R^3}{3} = \frac{8\pi\omega}{3} R^3, \end{aligned} \quad (5)$$

где R – радиус шара, ω – заданная угловая скорость вращения мяча. Будем считать, что вектор угловой скорости задан вдоль 1 оси – оси Z .

Тогда запишем формулу для вычисления силы Магнуса:

$$\vec{F}_{\text{Магнуса}} = -\rho \vec{\Gamma} \times \vec{u}_{\infty} = -\rho \frac{8\pi\vec{\omega}}{3} R^3 \times -\vec{v} = \frac{8\pi}{3} \rho R^3 \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (6)$$

В общем случае будем рассматривать движение мяча в *Декартовой системе координат, в трехмерном пространстве*, тогда проекции на оси X , Y и Z соответственно

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{8\pi}{3} \rho R^3 (\vec{\omega} \times \vec{v})_x, \\ m\ddot{y} = \frac{8\pi}{3} \rho R^3 (\vec{\omega} \times \vec{v})_y, \\ \ddot{z} = g \end{cases} \quad (7)$$

Перейдем к уравнениям для угловой скорости вращения мяча ω , в частности, найдем выражения для разложения $(\vec{\omega} \times \vec{v})$ по единичным векторам, задающим оси координат, \vec{i} , \vec{j} и \vec{k}

$$\begin{aligned}
 (\vec{\omega} \times \vec{v}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \omega_y & \omega_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \\
 &= \vec{i}(\omega_y v_z - \omega_z v_y) + \vec{j}(\omega_z v_x - \omega_x v_z) + \vec{k}(\omega_x v_y - \omega_y v_x) \rightarrow \\
 &\rightarrow (\vec{\omega} \times \vec{v})_x = \omega_y v_z - \omega_z v_y = -\omega_z v_y \\
 &(\vec{\omega} \times \vec{v})_y = \omega_z v_x - \omega_x v_z = \omega_z v_x \\
 &(\vec{\omega} \times \vec{v})_z = \omega_x v_y - \omega_y v_x = 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

Перейдем к дифференциальному виду уравнений проекций движения мяча на оси координат:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{8\pi}{3}\rho R^3\omega_z v_y, \\ m\ddot{y} = \frac{8\pi}{3}\rho R^3\omega_z v_x, \\ \ddot{z} = g \end{cases} \tag{9}$$

Запишем также начальные условия задачи, координаты мяча – положение его центра масс во времени

$$\begin{cases} (x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 0) \\ v_x(0) = v_{0x} \\ v_y(0) = v_{0y} \\ v_z(0) = v_{0z} \\ \omega_x(0) = 0 \\ \omega_y(0) = 0 \\ \omega_z(0) = \omega_0 \end{cases} \tag{10}$$

1.3 Решение дифференциальных уравнений

Для решения соответствующей системы дифференциальных уравнений был применен *метод Эйлера* численного решения дифференциальных уравнений. Описание метода:

Пусть дана задача Коши для уравнения первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y|_{x=x_0} = y_0,$$

где функция f определена на некоторой области $D \in R^2$. Решение ищется на полуинтервале $(x_0, b]$. На этом промежутке введем узлы $x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$. Приближенное решение в узлах x_i , которое обозначим через y_i , определяется по формуле

$$y_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Эти формулы непосредственно обобщаются на случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данной работе для нахождения численного решения системы линейных однородных уравнений второго порядка метод Эйлера был применен последовательно: сначала для вычисления первой производной, а затем на основе полученного результата – второй производной.

1.4 Численный эксперимент. Огибание препятствия заданной ширины

Момент силы, действующей на мяч, постоянен, а ее вектор перпендикулярен скорости мяча в любой момент времени и лежит в плоскости XU , следовательно, траектория мяча представляет собой фрагмент окружности в плоскости XU .

Запишем центростремительное ускорение:

$$a_n = \frac{F}{m} = \frac{8\pi}{3m} \rho \omega v R^3 \quad (11)$$

2 Моделирование процесса

2.1 Общие сведения

Исходные данные программы:

1. Масса мяча (по футбольным стандартам) $m = 0.450$ кг
2. Радиус мяча (при длине окружности около 70 см) $R = 0.11$ м
3. Плотность воздуха (при $T = 15C^\circ$) $\rho = 1.225 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
4. Координаты начальной точки запуска мяча $(0, 0, 0)$

Данные вводимые пользователем:

1. Проекция линейной скорости на оси x, y, z , ограничение: $v_{z0} > 0$
2. Значение угловой скорости ω , примечание: по умолчанию вектор угловой скорости направлен вдоль оси z
- 3*. Задание ширины препятствия(?)

Выходные данные:

1. Для первой части эксперимента с заданными линейной и угловой скоростями выводится графическое представление полета на плоскости xy
2. Для эксперимента с заданным препятствием выводятся подходящие значения угловой и линейных скоростей, которые необходимо задать, чтобы обойти препятствие

2.2 Написание программы

Программа написана на языке *Python 3* с использованием библиотеки *Manim*.