

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ
по лабораторной работе № 3:
РЕГУЛЯТОРЫ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ

Вариант 17

по дисциплине
«Теория автоматического управления»

Студент:
Группа № R3338

А.А. Нечаева

Предподаватель:
ассистент факультета СУиР, к. т. н.

А.В. Пашенко

Санкт-Петербург 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1	СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ.....	4
1.1	Управляемость и стабилизируемость системы.....	6
1.2	Степень устойчивости	7
1.3	Схема моделирования	7
1.4	Значения α	7
1.5	Синтез регуляторов с заданной степенью устойчивости	8
1.5.1	Нахождение матрицы регулятора K_1	8
1.5.2	Нахождение матрицы регулятора K_2	9
1.5.3	Собственные числа матриц замкнутых систем.....	11
1.5.4	Компьютерное моделирование	12
1.5.5	Анализ результатов	17
1.6	Синтез регулятора при помощи матричного уравнения типа Риккати	17
1.6.1	Нахождение матрицы регулятора K_3	18
1.6.2	Нахождение матрицы регулятора K_4	18
1.6.3	Собственные числа матриц замкнутых систем.....	18
1.6.4	Компьютерное моделирование	20
1.7	Вывод	25
2	УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ.....	26
2.1	Управляемость и наблюдаемость собственных чисел и характеристики системы.....	28
2.2	Достигаемые степени устойчивости	30
2.3	Достигаемые степени сходимости	30
2.4	Схема моделирования	31
2.5	Значения α	31
2.6	Желаемые значения степени устойчивости.....	32
2.6.1	Наблюдатель и регулятор сопоставимы	32
2.6.2	Регулятор сильнее	32
2.6.3	Наблюдатель сильнее.....	32

2.7	Нахождение матрицы регулятора	32
2.8	Определение собственных чисел матриц замкнутых систем (регулятор).....	33
2.9	Нахождение матрицы наблюдателя.....	33
2.10	Определение собственных чисел матриц замкнутых систем (наблюдатель)	34
2.11	Компьютерное моделирование	35
2.11.1	Наблюдатель и регулятор сопоставимы	36
2.11.2	Регулятор сильнее	39
2.11.3	Наблюдатель сильнее.....	41
2.12	Сравнение полученных результатов	44
3	РЕГУЛЯТОР С КАЧЕСТВЕННОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ.....	45
3.1	Управляемость и стабилизируемость системы.....	46
3.2	Значения параметра β	47
3.3	Наборы параметров Q и R	47
3.4	Синтез регулятора	48
3.4.1	Нахождение матрицы регулятора	48
3.4.2	Определение собственных чисел матрицы замкнутой системы	48
3.5	Компьютерное моделирование	50
3.6	Анализ результатов	54
4	ВЫВОД	55

1 СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ

Возьмем матрицы A и B и рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Выполним следующие шаги:

- Найдём собственные числа матрицы A и определим управляемость каждого из них. Сделаем вывод об управляемости и стабилизируемости системы.
- Определим, любой ли желаемой степени устойчивости мы сможем добиться от данной системы при помощи регулятора вида $u = Kx$. Объясним, почему, и, если не любой, то определим максимальную возможную.
- Построим схему моделирования системы (1) замкнутой регулятором $u = Kx$.
- Зададимся не менее, чем парой значений желаемой степени устойчивости $\alpha > 0$. Если существуют ограничения на достижимые степени устойчивости, то одна из выбранных α должна быть максимально возможной, а другие достижимыми. Постараемся взять достаточно отличающиеся значения α .
- Для каждого из выбранных значений α синтезируем регулятор, обеспечивающий заданную степень устойчивости, при помощи матричного неравенства типа Ляпунова:

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0, \quad K = YP^{-1}$$

.

- Найдем соответствующую матрицу регулятора K_1 , обеспечивающую желаемую степень устойчивости α без ограничений на управление.
- Найдем соответствующую матрицу регулятора K_2 , обеспечивающую желаемую степень устойчивости α совместно с решением задачи минимизации управления.
- Определим собственные числа матриц замкнутых систем $(A + BK_1)$ и $(A + BK_2)$ и сравним с желаемой степенью устойчивости в подтверждение корректности синтеза регуляторов и между собой. Сделаем выводы.
- Для обеих замкнутых систем выполним компьютерное моделирование и построим графики формируемых регуляторами управлений $u(t)$ и векторов состояния замкнутых систем $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Сопоставим результаты моделирования.
- Для каждого из выбранных значений α синтезируем регулятор, обеспечивающий заданную степень устойчивости, при помощи матричного уравнения типа Риккати при $\nu = 2$ и $R = 1$:

$$A^T P + PA + Q - \nu P B R^{-1} B^T P + 2\alpha P = 0, K = -R^{-1} B^T P$$

- Найдем соответствующую матрицу регулятора K_3 , обеспечивающую желаемую степень устойчивости α при $Q = I$.
- Найдем соответствующую матрицу регулятора K_4 , обеспечивающую желаемую степень устойчивости α при $Q = 0$.
- Определим собственные числа матриц замкнутых систем $(A + BK_3)$ и $(A + BK_4)$ и сравним с желаемой степенью устойчивости в подтверждение корректности синтеза регуляторов, между собой и с полученными для регуляторов с матрицами K_1 и K_2 . Сделаем выводы.
- Для обеих замкнутых систем выполним компьютерное моделирование и построим графики формируемых регуляторами управлений $u(t)$ и векторов состояния замкнутых систем $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Сопоставим результаты моделирования между собой и с полученными для замкнутых систем с матрицами регуляторов K_1 и K_2 .

1.1 Управляемость и стабилизируемость системы

Найдем собственные числа матрицы A .

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 2 - 3i \\ \lambda_3 = 2 + 3i \end{cases}$$

Определим управляемость собственных чисел с помощью матриц Хатуса.

Для собственного числа $\lambda_1 = -3$:

$$U_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & -8 & 0 \\ 6 & 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_1) = 2 \quad (3)$$

Ранг U_1 меньше порядка системы, следовательно, собственное число λ_1 неуправляемо.

Для собственного числа $\lambda_2 = 2 - 3i$:

$$U_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 3i & 8 & 5 & 2 \\ -6 & -11 + 3i & -8 & 0 \\ 6 & 6 & 3 + 3i & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_2) = 3 \quad (4)$$

Ранг U_2 равно порядку системы, следовательно, собственное число λ_2 управляемо.

Для собственного числа $\lambda_3 = 2 + 3i$:

$$U_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3i & 8 & 5 & 2 \\ -6 & -11 - 3i & -8 & 0 \\ 6 & 6 & 3 - 3i & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_3) = 3 \quad (5)$$

Ранг U_3 равно порядку системы, следовательно, собственное число λ_3 управляемо.

Система в целом не является полностью управляемой, из-за того, что собственное число $\lambda_1 = -3$ неуправляемо. В то же время $\text{Re}(\lambda_1) < 0$, то есть данное собственное число устойчивое, следовательно, система стабилизируема.

1.2 Степень устойчивости

Определим, любой ли желаемой степени устойчивости мы сможем добиться от данной системы при помощи регулятора вида $u = Kx$. Объясним, почему, и, если не любой, то определим максимальную возможную.

Собственное число матрицы системы $\lambda_1 = -3$ не управляемо, следовательно, оно гарантированно будет содержаться в спектре системы, замкнутой регулятором $u = Kx$. Степень устойчивости системы определяется, как положительное число, равное наименьшему из расстояний от собственных чисел до мнимой оси, значит, для замкнутой системы максимальная степень устойчивости будет равна 3.

1.3 Схема моделирования

Построим схему моделирования системы (1), замкнутой регулятором $u = Kx$.

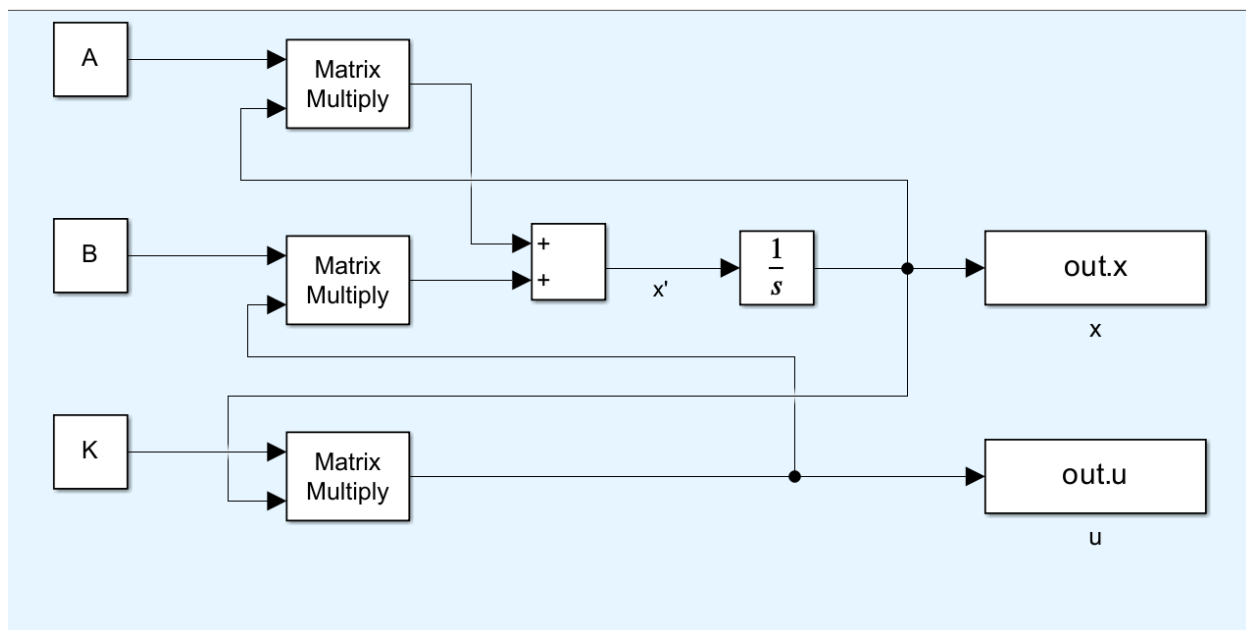


Рисунок 1 — Схема моделирования системы, замкнутой регулятором $u = Kx$.

1.4 Значения α

Зададимся не менее, чем парой значений желаемой степени устойчивости $\alpha > 0$. Если существуют ограничения на достижимые степени устойчиво-

сти, то одна из выбранных α должна быть максимально возможной, а другие достижимыми. Постараемся взять достаточно отличающиеся значения α .

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0.5 \\ \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_{max} &= 3\end{aligned}\tag{6}$$

1.5 Синтез регуляторов с заданной степенью устойчивости

Для каждого из выбранных значений α синтезируем регулятор, обеспечивающий заданную степень устойчивости, при помощи матричного неравенства типа Ляпунова:

$$\begin{cases} PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0, \\ K = YP^+ \end{cases}\tag{7}$$

Необходимые вычисления проводились с помощью *MATLAB* с использованием пакета *cvx*.

1.5.1 Нахождение матрицы регулятора K_1

Найдем соответствующую матрицу регулятора K_1 , обеспечивающую желаемую степень устойчивости α без ограничений на управление.

Для $\alpha_1 = 0.5$ при решении системы (7) были получены следующие результаты:

$$\begin{aligned}P(\alpha_1) &= \begin{bmatrix} 5.6694 & -0.7272 & -1.3079 \\ -0.7272 & 2.8523 & -2.1407 \\ -1.3079 & -2.1407 & 3.3738 \end{bmatrix}, \\ Y(\alpha_1) &= \begin{bmatrix} -10.6679 & 4.6284 & -7.5046 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{8}$$

$$K_1(\alpha_1) = \begin{bmatrix} -3.8752 & -4.1283 & -6.3461 \end{bmatrix}\tag{9}$$

Для $\alpha_2 = 1$ при решении системы (7) были получены следующие результаты:

$$P(\alpha_2) = \begin{bmatrix} 5.8222 & -0.8636 & -1.4719 \\ -0.8636 & 3.0583 & -2.0813 \\ -1.4719 & -2.0813 & 3.2246 \end{bmatrix},$$

$$Y(\alpha_2) = \begin{bmatrix} -11.5978 & 3.6854 & -5.7811 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$K_1(\alpha_2) = \begin{bmatrix} -4.4191 & -4.6998 & -6.8433 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Для $\alpha_{max} = 3$ при решении системы (7) были получены следующие результаты:

$$P(\alpha_{max}) = \begin{bmatrix} 8.6981 & -1.2046 & -1.8713 \\ -1.2046 & 4.8343 & -2.5359 \\ -1.8713 & -2.5359 & 3.1191 \end{bmatrix},$$

$$Y(\alpha_{max}) = \begin{bmatrix} -26.8972 & 6.8168 & -5.1645 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$K_1(\alpha_{max}) = \begin{bmatrix} -5.6018 & -4.5637 & -8.7269 \end{bmatrix} \quad (13)$$

1.5.2 Нахождение матрицы регулятора K_2

Найдем соответствующую матрицу регулятора K_2 , обеспечивающую желаемую степень устойчивости α совместно с решением задачи минимизации управления.

Помимо решения системы (7) добавлена еще задача минимизации управления, то есть условие

$$\begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \gamma \end{bmatrix} \succ 0 \quad (14)$$

Для $\alpha_1 = 0.5$ были получены следующие результаты:

$$P(\alpha_1) = \begin{bmatrix} 806.0803 & -798.5823 & -2.0148 \\ -798.5823 & 818.3881 & -18.0362 \\ -2.0148 & -18.0362 & 21.8716 \end{bmatrix},$$

$$Y(\alpha_1) = \begin{bmatrix} -18.6580 & -4.6125 & 1.0459 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\gamma(\alpha_1) = 55.8718 \quad (16)$$

$$K_2(\alpha_1) = \begin{bmatrix} -2.5028 & -2.4973 & -2.2421 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Для $\alpha_2 = 1$ были получены следующие результаты:

$$P(\alpha_2) = 10^3 \begin{bmatrix} 1.5543 & -1.5435 & -0.0045 \\ -1.5435 & 1.5621 & -0.0154 \\ -0.0045 & -0.0154 & 0.0199 \end{bmatrix},$$

$$Y(\alpha_2) = \begin{bmatrix} -25.0903 & -4.8339 & 1.4817 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\gamma(\alpha_2) = 85.4722 \quad (19)$$

$$K_2(\alpha_2) = \begin{bmatrix} -3.0017 & -2.9979 & -2.9247 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Для $\alpha_{max} = 3$ были получены следующие результаты:

$$P(\alpha_{max}) = 10^3 \begin{bmatrix} 2.6399 & -2.6146 & -0.0100 \\ -2.6146 & 2.6263 & -0.0088 \\ -0.0100 & -0.0088 & 0.0141 \end{bmatrix},$$

$$Y(\alpha_{max}) = \begin{bmatrix} -76.2670 & 11.1067 & 3.9692 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\gamma(\alpha_{max}) = 300.5294 \quad (22)$$

$$K_2(\alpha_{max}) = \begin{bmatrix} -5.0000 & -4.9948 & -6.3815 \end{bmatrix} \quad (23)$$

1.5.3 Собственные числа матриц замкнутых систем

Определим собственные числа матриц замкнутых систем $(A + BK_1)$ и $(A + BK_2)$ и сравним с желаемой степенью устойчивости в подтверждение корректности синтеза регуляторов и между собой.

Для $\alpha_1 = 0.5$

$$A + BK_1(\alpha_1) = \begin{bmatrix} -2.7505 & -0.2567 & -7.6923 \\ -6.0000 & -9.0000 & -8.0000 \\ 6.0000 & 6.0000 & 5.0000 \end{bmatrix},$$
$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -1.8752 \pm 6.6218i \\ \lambda_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1.8752 > \alpha_1 = 0.5 \quad (24)$$

$$A + BK_2(\alpha_1) = \begin{bmatrix} -0.0057 & 3.0054 & 0.5157 \\ -6.0000 & -9.0000 & -8.0000 \\ 6.0000 & 6.0000 & 5.0000 \end{bmatrix},$$
$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -0.5028 \pm 3.8328i \\ \lambda_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0.5028 \approx \alpha_1 = 0.5 \quad (25)$$

Для $\alpha_2 = 1$

$$A + BK_1(\alpha_2) = \begin{bmatrix} -3.8382 & -1.3996 & -8.6866 \\ -6.0000 & -9.0000 & -8.0000 \\ 6.0000 & 6.0000 & 5.0000 \end{bmatrix},$$
$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -2.4191 \pm 6.4582i \\ \lambda_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2.4191 > \alpha_2 = 1 \quad (26)$$

$$A + BK_2(\alpha_2) = \begin{bmatrix} -1.0034 & 2.0041 & -0.8494 \\ -6.0000 & -9.0000 & -8.0000 \\ 6.0000 & 6.0000 & 5.0000 \end{bmatrix},$$
$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -1.0017 \pm 4.1378i \\ \lambda_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1.0017 \approx \alpha_2 = 1 \quad (27)$$

Для $\alpha_{max} = 3$

$$A + BK_1(\alpha_{max}) = \begin{bmatrix} -6.2035 & -1.1274 & -12.4537 \\ -6.0000 & -9.0000 & -8.0000 \\ 6.0000 & 6.0000 & 5.0000 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -3.6018 \pm 7.8223i \\ \lambda_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3 = \alpha_{max} \quad (28)$$

$$A + BK_2(\alpha_{max}) = \begin{bmatrix} -5.0000 & -1.9896 & -7.7630 \\ -6.0000 & -9.0000 & -8.0000 \\ 6.0000 & 6.0000 & 5.0000 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -3.0000 \pm 5.5354i \\ \lambda_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3 = \alpha_{max} \quad (29)$$

Заметим, что для всех значений α наиболее близкие к желаемым результаты получаются при дополнительном решении задачи минимизации управления, то есть для матриц регуляторов K_2 . Для полученных регуляторов K_1 справедливо то, что при увеличении заданного α растет и значение степени устойчивости системы, но точно была достигнута только максимальная желаемая степень устойчивости, для остальных – полученная степень устойчивости превысила ожидаемую.

1.5.4 Компьютерное моделирование

Для обеих замкнутых систем выполним компьютерное моделирование и построим графики формируемых регуляторами управлений $u(t)$ и векторов состояния замкнутых систем $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

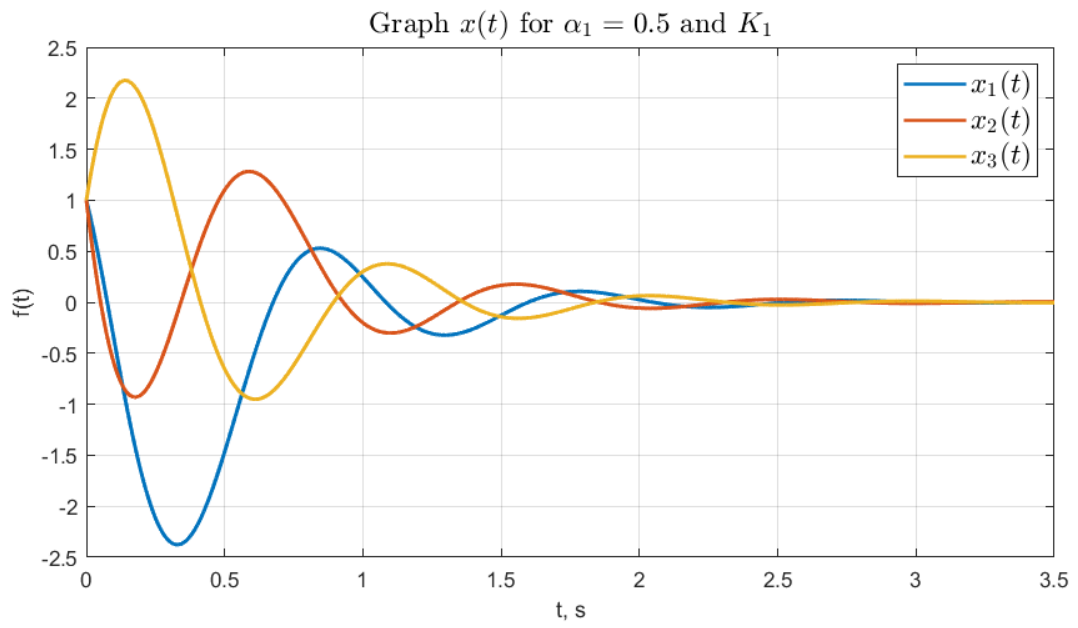


Рисунок 2 — График вектора состояния при $\alpha_1 = 0.5$ и K_1 .

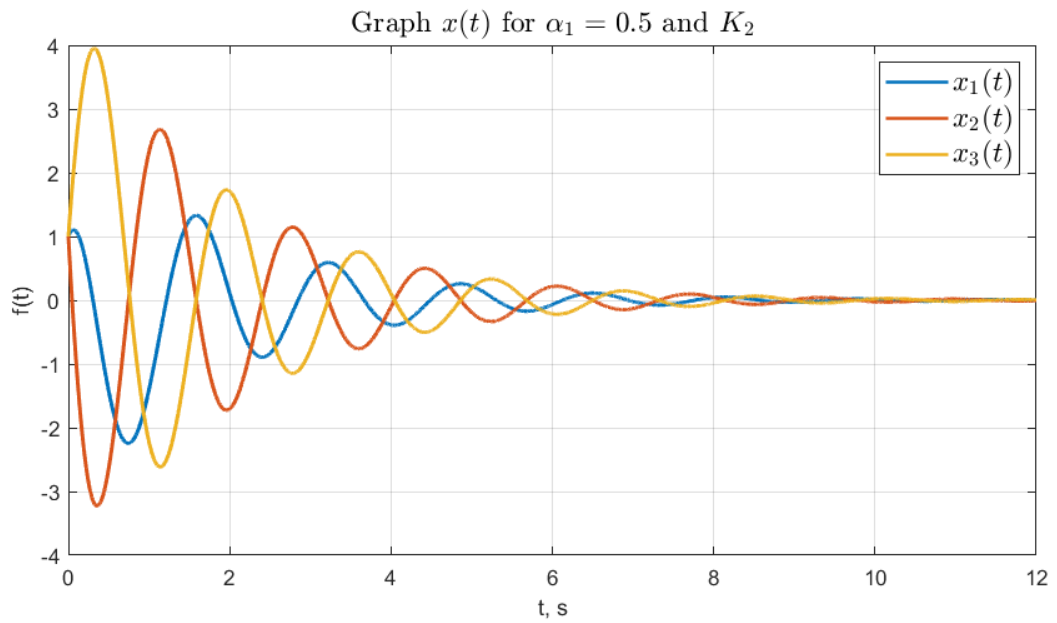


Рисунок 3 — График вектора состояния при $\alpha_1 = 0.5$ и K_2 .

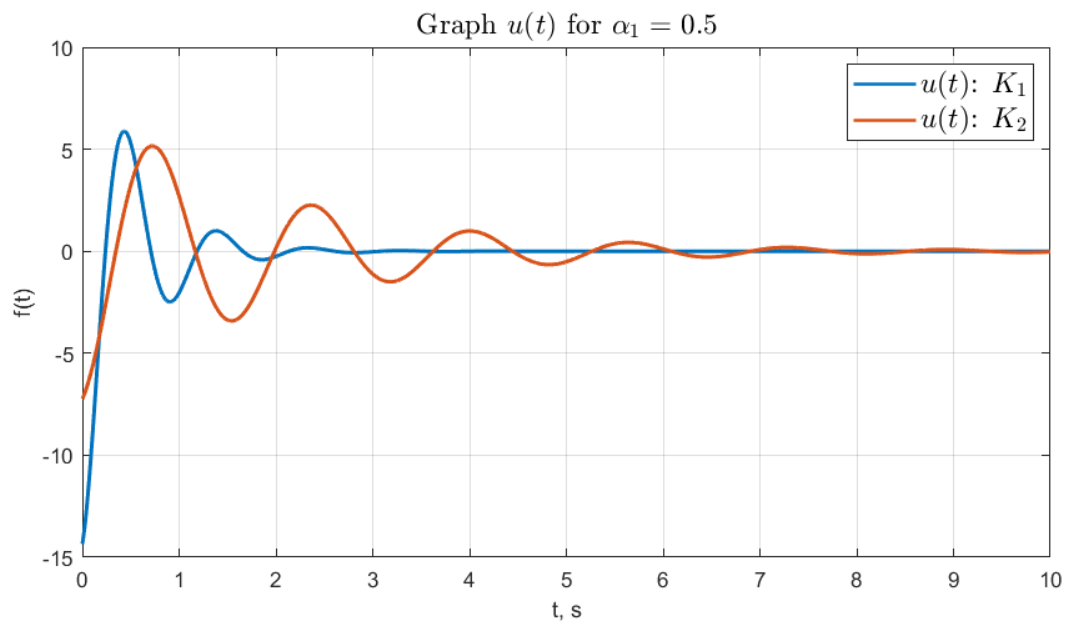


Рисунок 4 — График формируемых регуляторами управлений $u(t)$ при $\alpha_1 = 0.5$.

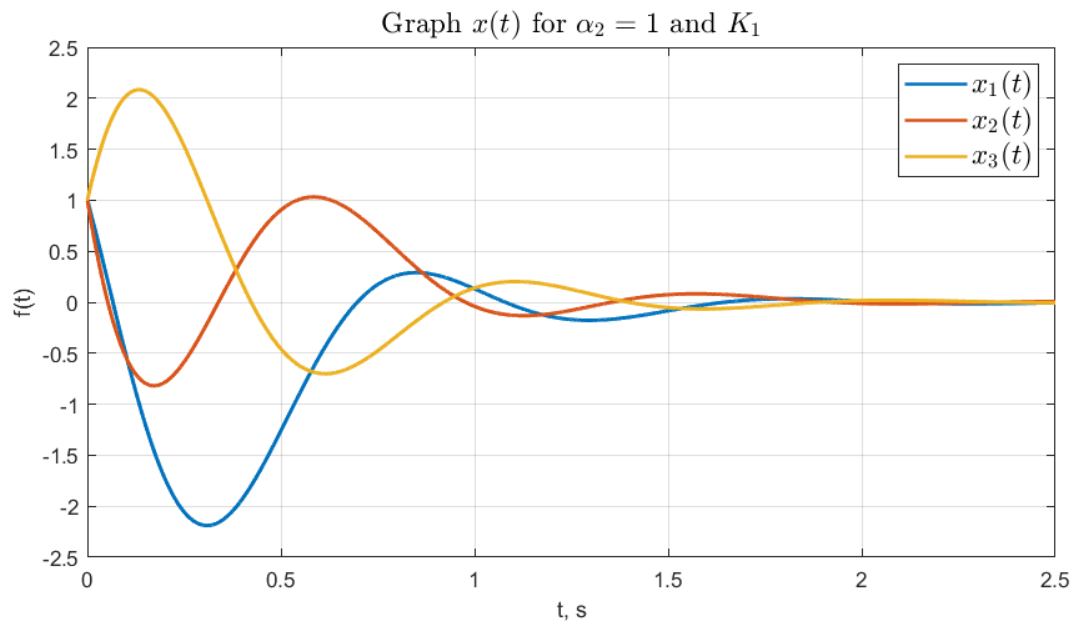


Рисунок 5 — График вектора состояния при $\alpha_2 = 1$ и K_1 .

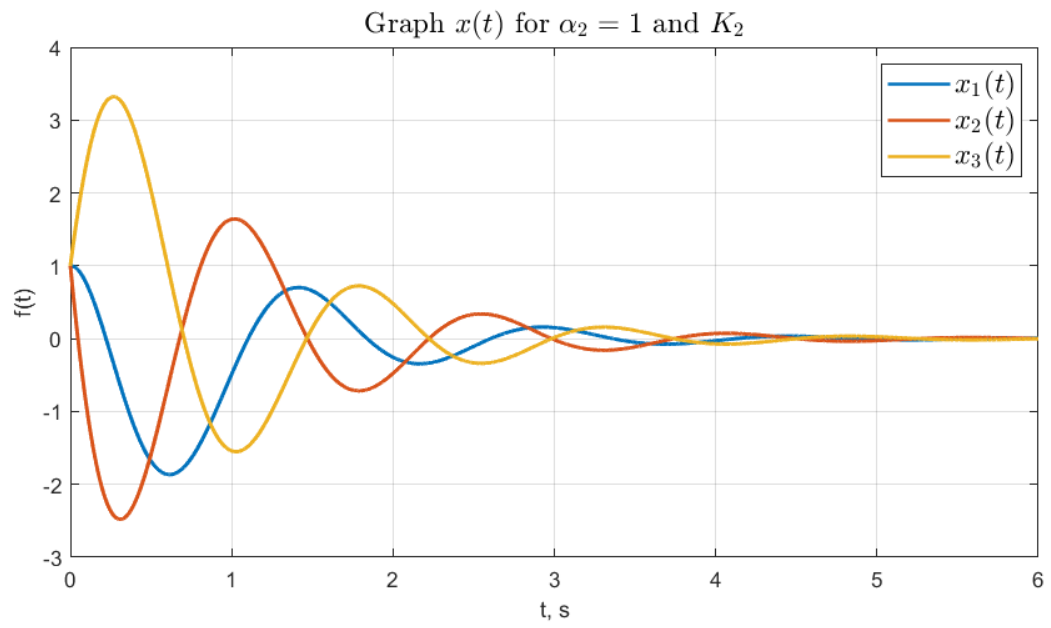


Рисунок 6 — График вектора состояния при $\alpha_2 = 1$ и K_2 .

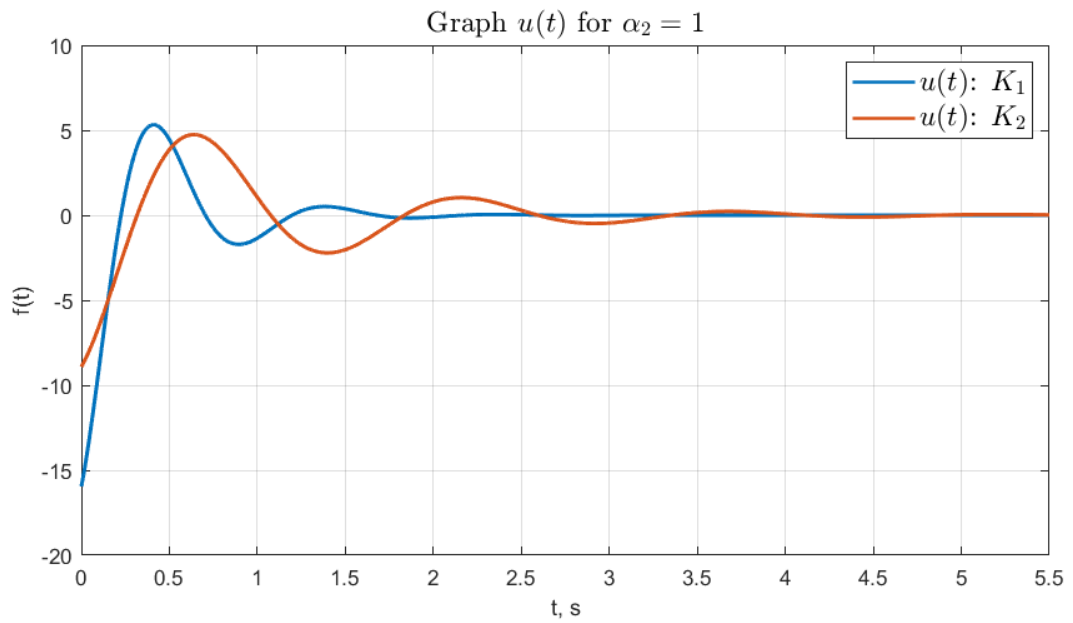


Рисунок 7 — График формируемых регуляторами управлений $u(t)$ при $\alpha_2 = 1$.

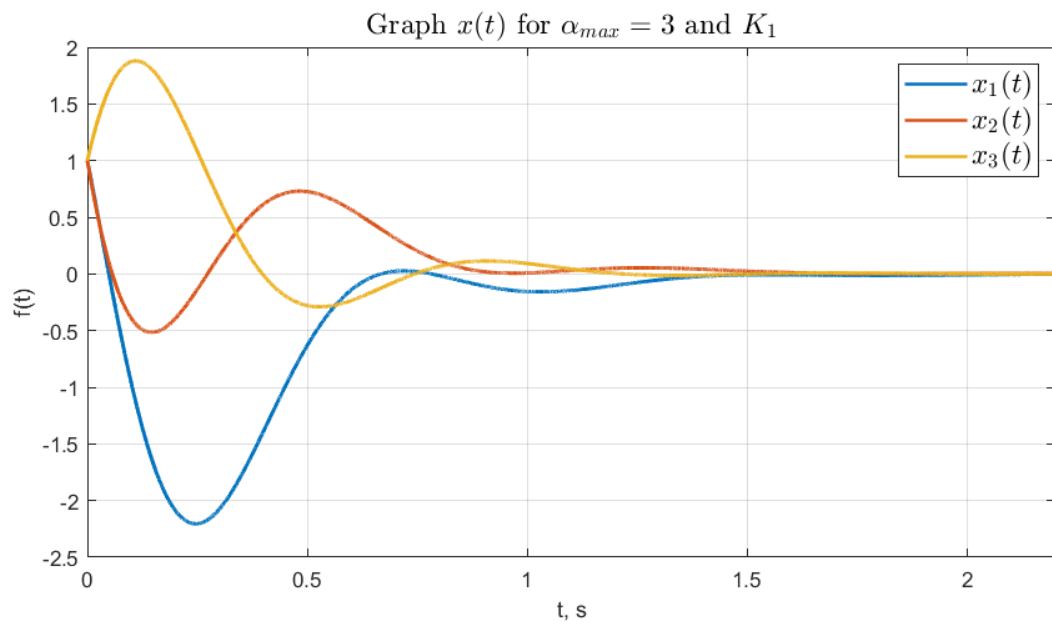


Рисунок 8 — График вектора состояния при $\alpha_{max} = 3$ и K_1 .

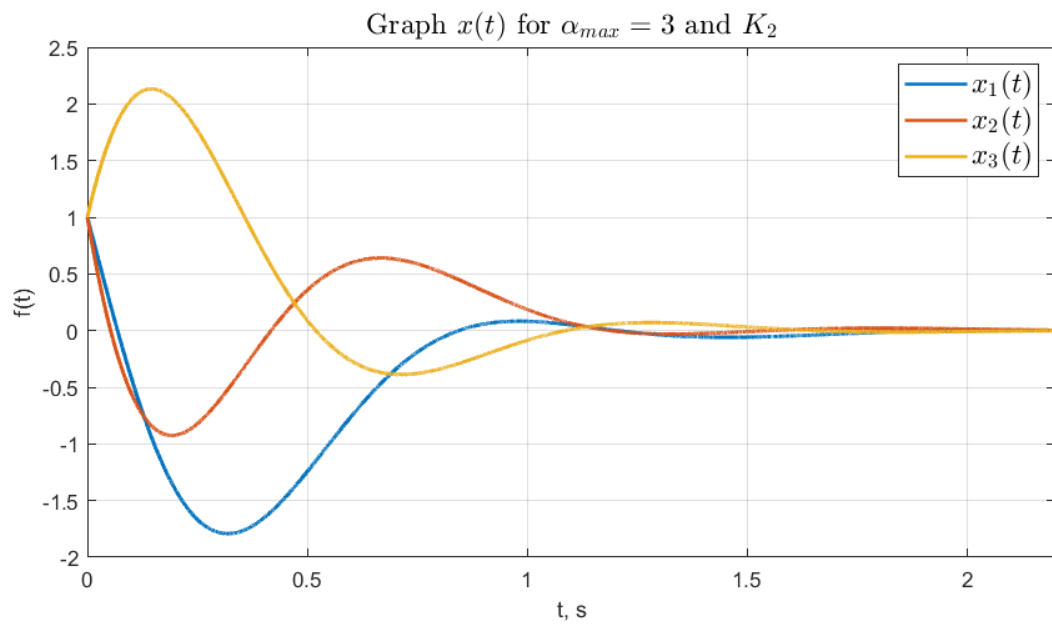


Рисунок 9 — График вектора состояния при $\alpha_{max} = 3$ и K_2 .

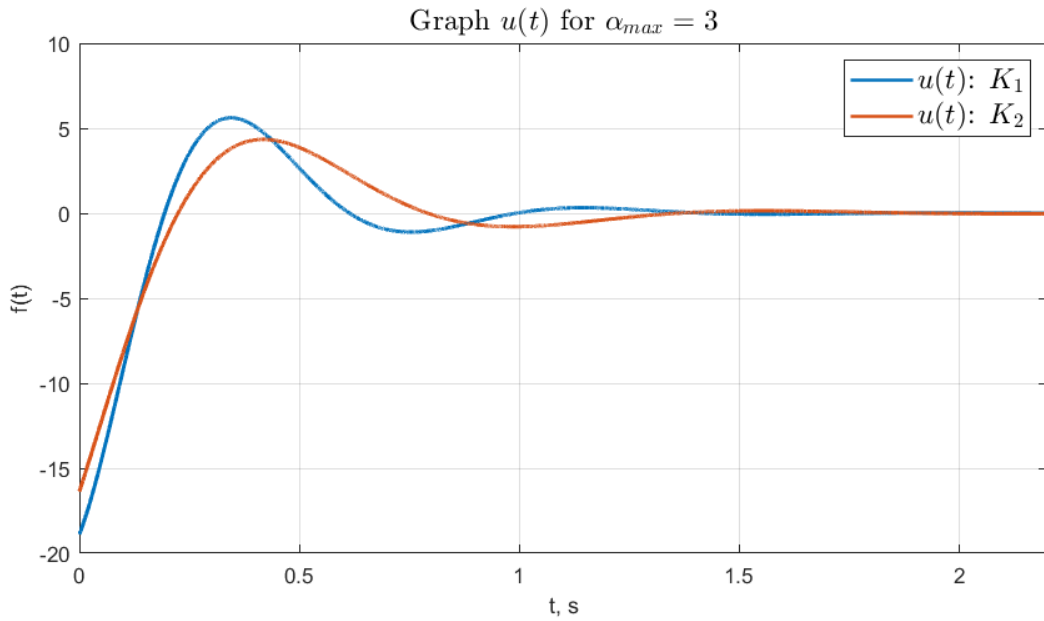


Рисунок 10 — График формируемых регуляторами управлений $u(t)$ при $\alpha_{max} = 3$.

1.5.5 Анализ результатов

При повышении значения степени устойчивости компоненты вектора состояния сходятся к нулю за меньшее время. Так же заметна существенная разница во времени стабилизации для регуляторов с решением задачи минимизации управления и без: в случае первых система медленнее приходит к состоянию устойчивости. На графиках управляющего воздействия (рисунки 4, 7) заметно, что в случае решения задачи минимизации управления, график $u(t)$ имеет меньшую амплитуду и дольше сходится к нулю. Однако при желаемой степени устойчивости α_{max} различия между результатами для K_1 и K_2 минимальны.

1.6 Синтез регулятора при помощи матричного уравнения типа Риккати

Для каждого из выбранных значений α синтезируем регулятор, обеспечивающий заданную степень устойчивости, при помощи матричного уравнения типа Риккати при $\nu = 2$ и $R = 1$:

$$\begin{cases} A^T P + P A + Q - \nu P B R^{-1} B^T P + 2\alpha P = 0, \\ K = -R^{-1} B^T P \end{cases} \quad (30)$$

1.6.1 Нахождение матрицы регулятора K_3

Найдем соответствующую матрицу регулятора K_3 , обеспечивающую желаемую степень устойчивости α при $Q = I$.

$$K_3(\alpha_1 = 0.5) = \begin{bmatrix} -3.1774 & -2.8441 & -3.1301 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$K_3(\alpha_2 = 1) = \begin{bmatrix} -3.5616 & -3.2447 & -3.7447 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$K_3(\alpha_{max} = 3) = \begin{bmatrix} -5.2839 & -5.0067 & -7.1013 \end{bmatrix} \quad (33)$$

1.6.2 Нахождение матрицы регулятора K_4

Найдем соответствующую матрицу регулятора K_4 , обеспечивающую желаемую степень устойчивости α при $Q = 0$.

$$K_4(\alpha_1 = 0.5) = \begin{bmatrix} -2.5000 & -2.5000 & -2.2917 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$K_4(\alpha_2 = 1) = \begin{bmatrix} -3.0000 & -3.0000 & -3.0000 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$K_4(\alpha_{max} = 3) = \begin{bmatrix} -5.0000 & -5.0000 & -6.6667 \end{bmatrix} \quad (36)$$

1.6.3 Собственные числа матриц замкнутых систем

Определим собственные числа матриц замкнутых систем $(A + BK_3)$ и $(A + BK_4)$ и сравним с желаемой степенью устойчивости в подтверждение корректности синтеза регуляторов, между собой и с полученными для регуляторов с матрицами K_1 и K_2 .

Для $\alpha_1 = 0.5$

$$A + BK_3(\alpha_1) = \begin{bmatrix} -1.3549 & 2.3118 & -1.2603 \\ -6.0000 & -9.0000 & -8.0000 \\ 6.0000 & 6.0000 & 5.0000 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -1.1774 \pm 4.6261i \\ \lambda_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1.1774 > \alpha_1 = 0.5 \quad (37)$$

$$A + BK_4(\alpha_1) = \begin{bmatrix} 0 & 3.0000 & 0.4167 \\ -6.0000 & -9.0000 & -8.0000 \\ 6.0000 & 6.0000 & 5.0000 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -0.5000 \pm 3.9051i \\ \lambda_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0.5 > \alpha_1 \quad (38)$$

Для $\alpha_2 = 1$

$$A + BK_3(\alpha_2) = \begin{bmatrix} -2.1231 & 1.5107 & -2.4893 \\ -6.0000 & -9.0000 & -8.0000 \\ 6.0000 & 6.0000 & 5.0000 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -1.5616 \pm 4.8667i \\ \lambda_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1.5616 > \alpha_2 = 1 \quad (39)$$

$$A + BK_4(\alpha_2) = \begin{bmatrix} -1.0000 & 2.0000 & -1.0000 \\ -6.0000 & -9.0000 & -8.0000 \\ 6.0000 & 6.0000 & 5.0000 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -1.0000 \pm 4.2426i \\ \lambda_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1 = \alpha_2 \quad (40)$$

Для $\alpha_{max} = 3$

$$A + BK_3(\alpha_{max}) = \begin{bmatrix} -5.5678 & -2.0134 & -9.2026 \\ -6.0000 & -9.0000 & -8.0000 \\ 6.0000 & 6.0000 & 5.0000 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -3.2839 \pm 6.1579i \\ \lambda_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3.2839 \approx \alpha_{max} = 3 \quad (41)$$

$$A + BK_4(\alpha_{max}) = \begin{bmatrix} -5.0000 & -2.0000 & -8.3333 \\ -6.0000 & -9.0000 & -8.0000 \\ 6.0000 & 6.0000 & 5.0000 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -3.0000 \pm 5.8310i \\ \lambda_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3 = \alpha_{max} \quad (42)$$

Заметим, что в случае $Q = 0$ степень устойчивости совпадает с желаемой, результаты точнее, чем при вычислении с помощью матричного неравенства Ляпунова (для матриц регуляторов K_1 и K_2).

1.6.4 Компьютерное моделирование

Для обеих замкнутых систем выполним компьютерное моделирование и построим графики формируемых регуляторами управлений $u(t)$ и векторов состояния замкнутых систем $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

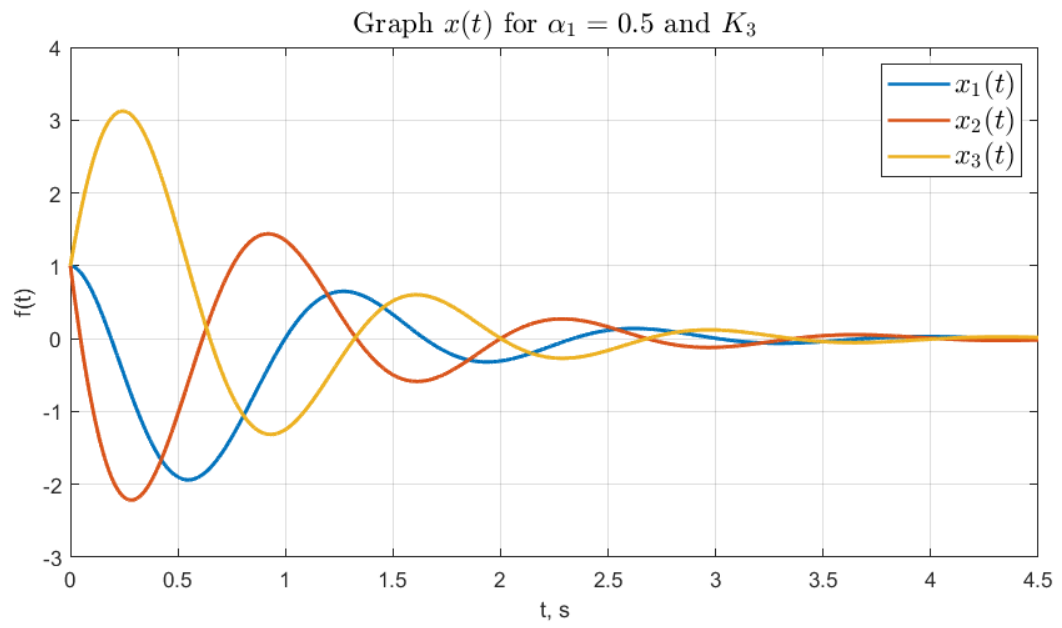


Рисунок 11 — График вектора состояния при $\alpha_1 = 0.5$ и K_3 .

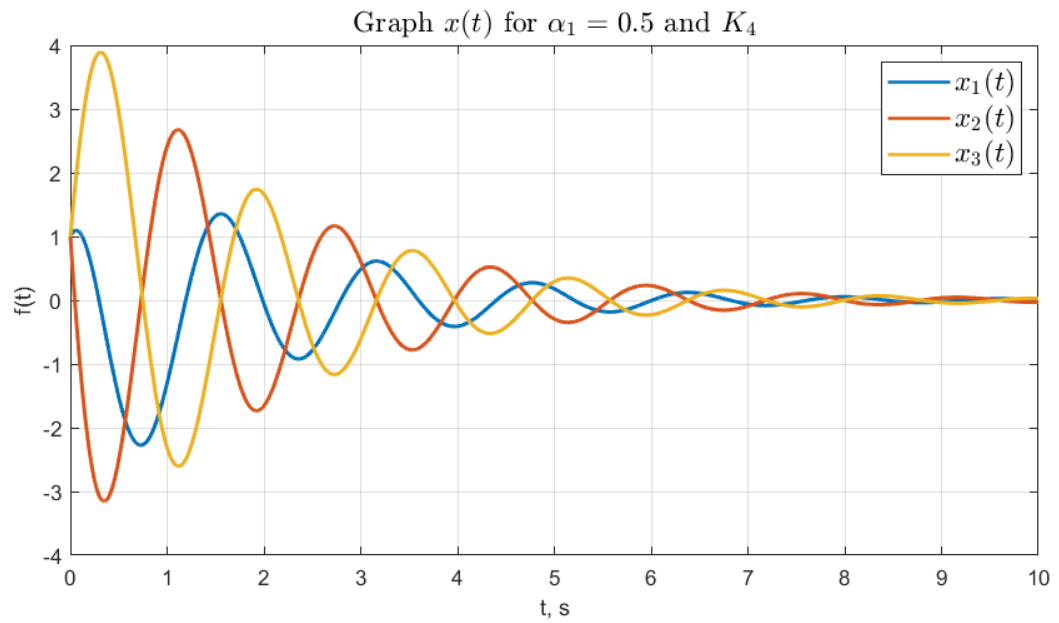


Рисунок 12 — График вектора состояния при $\alpha_1 = 0.5$ и K_4 .

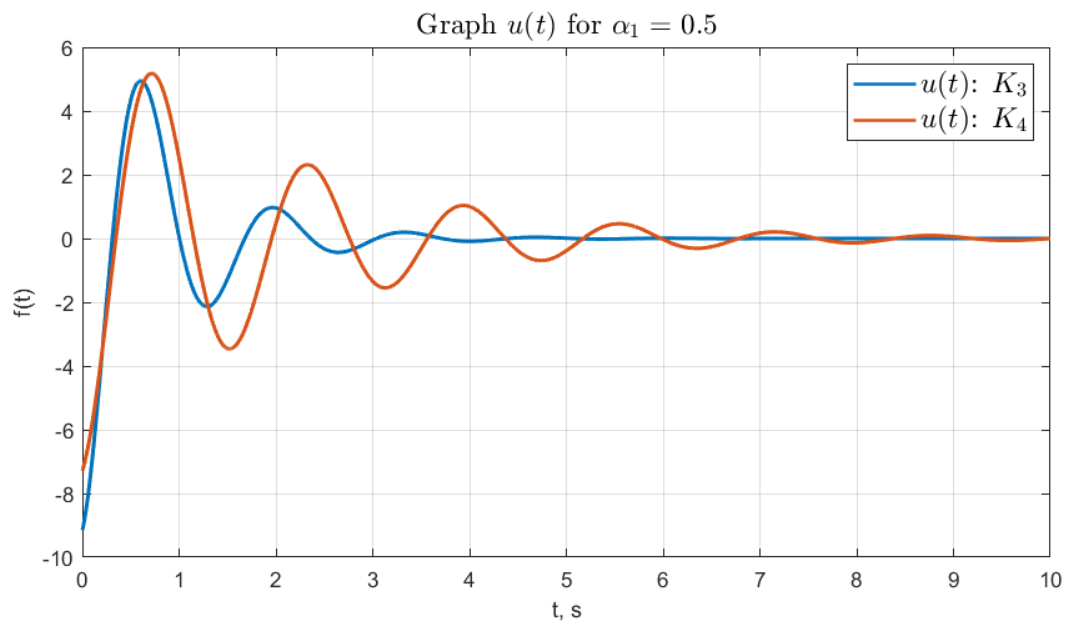


Рисунок 13 — График формируемых регуляторами управлений $u(t)$ при $\alpha_1 = 0.5$.

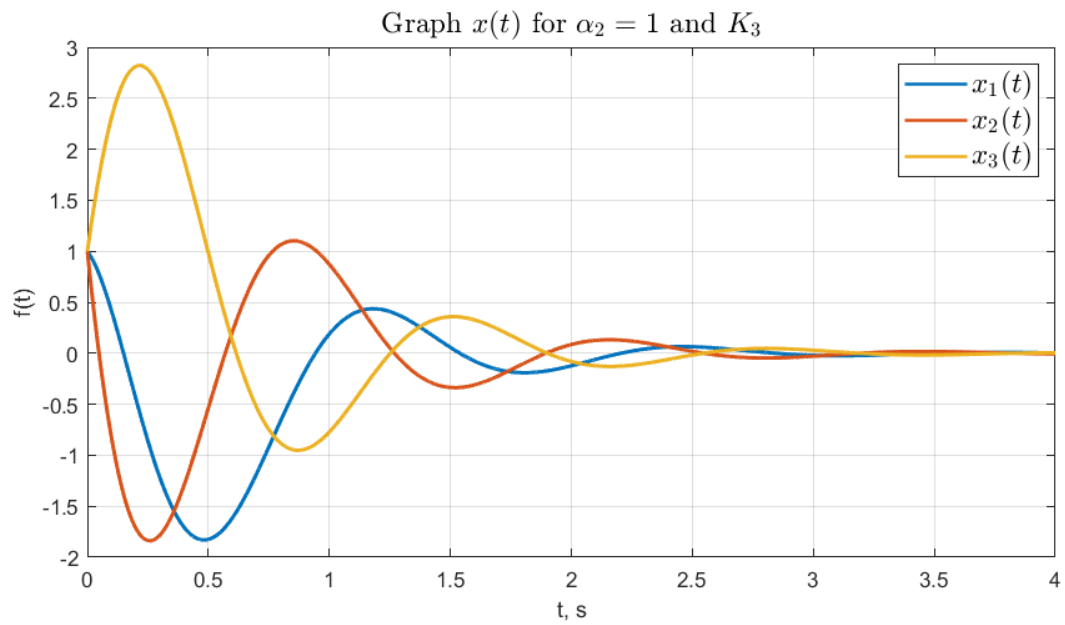


Рисунок 14 — График вектора состояния при $\alpha_2 = 1$ и K_3 .

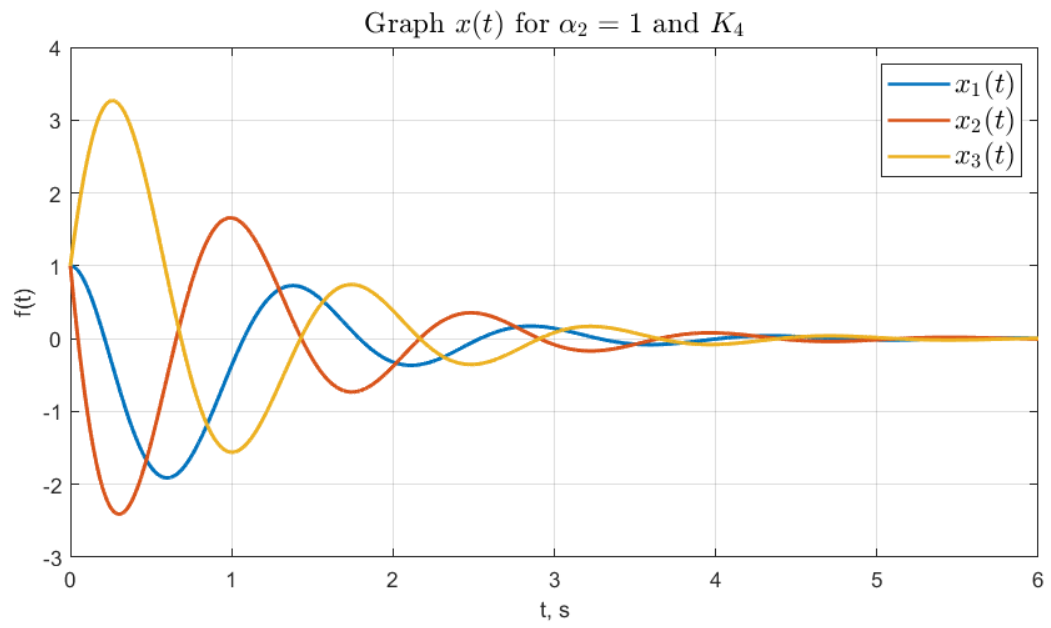


Рисунок 15 — График вектора состояния при $\alpha_2 = 1$ и K_4 .

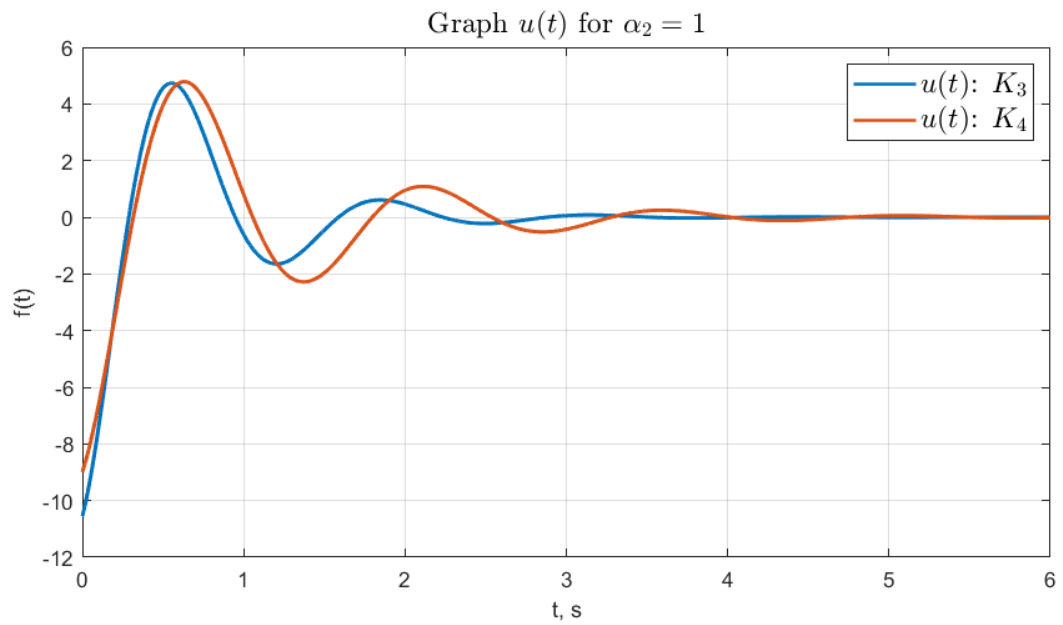


Рисунок 16 — График формируемых регуляторами управлений $u(t)$ при $\alpha_2 = 1$.

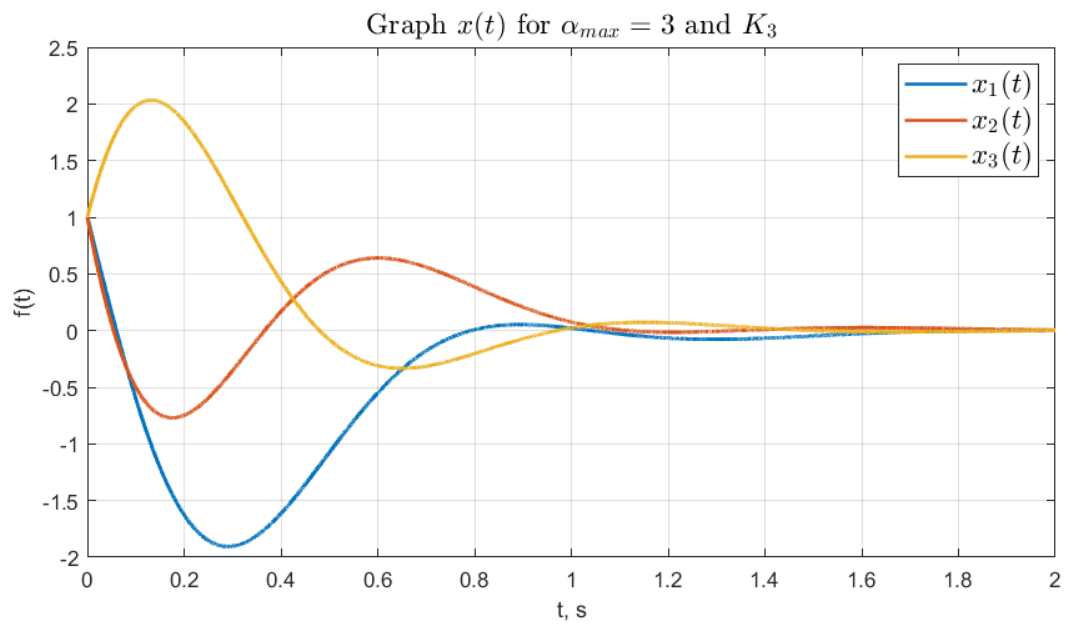


Рисунок 17 — График вектора состояния при $\alpha_{max} = 3$ и K_3 .

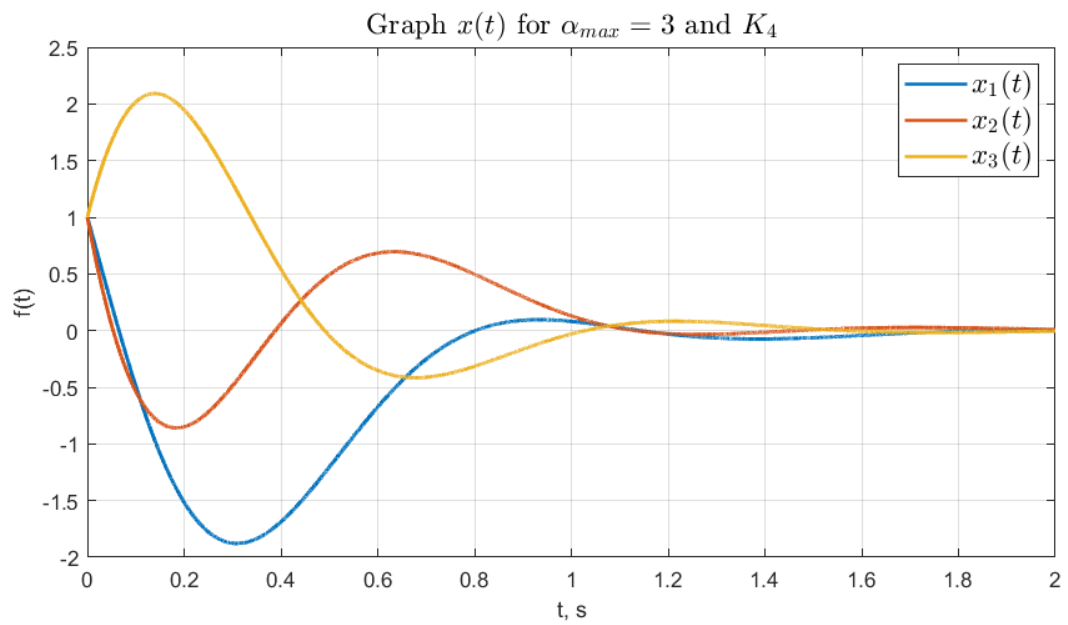


Рисунок 18 — График вектора состояния при $\alpha_{max} = 3$ и K_4 .

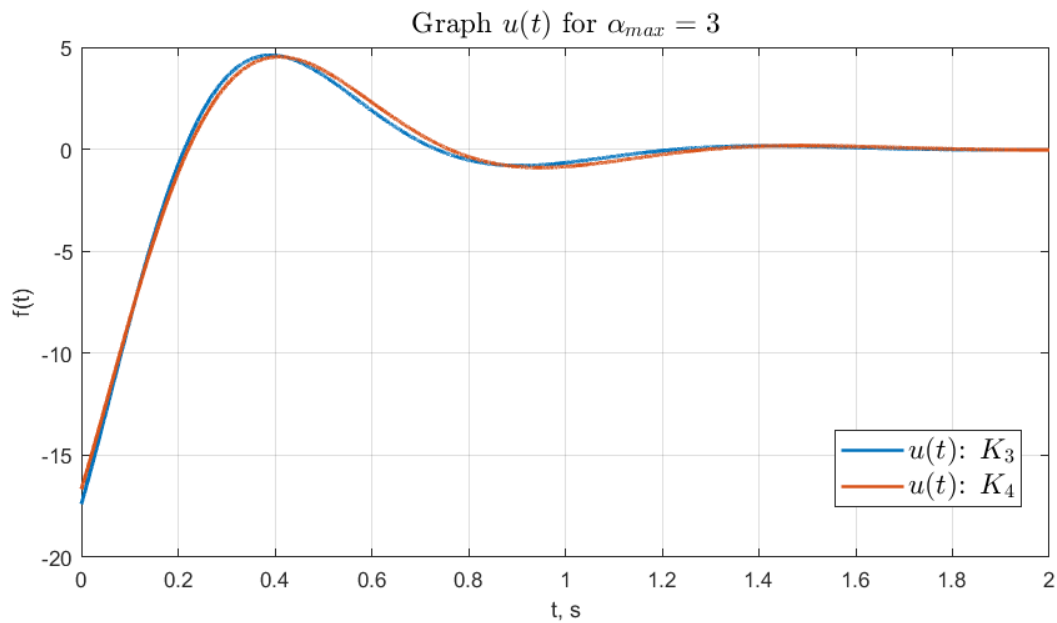


Рисунок 19 — График формируемых регуляторами управлений $u(t)$ при $\alpha_{max} = 3$.

1.7 Вывод

Сопоставим результаты моделирования между собой и с полученными для замкнутых систем с матрицами регуляторов K_1 и K_2 . Графики компонентов вектора состояния в случае с K_3 (при $Q = I$) за меньшее время становятся неотличимы от нуля по сравнению с K_4 ($Q = 0$), но при значении желаемой степени устойчивости α_{max} графики почти не имеют значительных различий во времени стабилизации системы. По сравнению с результатами, полученными с помощью уравнения типа Ляпунова, в случае Риккати система медленнее сходится к нулю (при сравнении результатов для матриц K_1 с K_3 и K_2 с K_4), кроме случая с α_{max} , при таком значении желаемой степени устойчивости различия минимальны. Графики управляющего воздействия $u(t)$ имеют меньшую амплитуду, но дольше сходятся к нулю для K_4 по сравнению с K_3 , в первом случае происходит минимизация управления.

2 УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ

Возьмем матрицы A , B , C и рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx, \end{cases} \quad (43)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad (44)$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Выполним следующие шаги:

- Найдём собственные числа матрицы A и определим управляемость и наблюдаемость каждого из них. Сделаем вывод об управляемости, стабилизируемости, наблюдаемости и обнаруживаемости системы.
- Определим, любой ли желаемой степени устойчивости мы сможем добиться от данной системы при помощи регулятора вида $u = Kx$. Объясним, почему, и, если не любой, то определим максимальную возможную.
- Определим, любой ли желаемой степени сходимости мы сможем добиться от наблюдателя полной размерности для данной системы. Объясним, почему, и, если не любой, то определим максимальную возможную.
- Построим схему моделирования системы (43), замкнутой регулятором, состоящем из наблюдателя состояния

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$$

и закона управления и $u = K\hat{x}$.

- Зададимся не менее чем парой значений $\alpha > 0$, все из которых могли бы быть использованы в качестве желаемой степени устойчивости для регулятора и желаемой степени сходимости для наблюдателя. Если существуют ограничения на достижимые степени устойчивости или сходимости, то одна из выбранных α должна быть максимально возможной, а другие достижимыми. Постараемся взять достаточно отличающиеся значения α .
- Используя выбранные значения α , составим не менее чем 3 набора значений желаемой степени устойчивости α_K и желаемой степени сходимости α_L , среди которых должны быть случаи:
 - $\alpha_K = \alpha_L$ (наблюдатель и регулятор имеют сопоставимые значения α);
 - $\alpha_K > \alpha_L$ (регулятор «сильнее»);
 - $\alpha_K < \alpha_L$ (наблюдатель «сильнее»).

Для каждого из выбранных наборов:

- Найдем соответствующую матрицу регулятора K , обеспечивающую желаемую степень устойчивости α_K . Разрешается пользоваться как методом матричных неравенств (2), так и методом уравнений Риккати (3), но отклонения фактических собственных чисел спектра замкнутой системы от желаемой степени устойчивости должны быть минимизированы.
- Определим собственные числа матриц замкнутых систем $(A + BK)$ и сравнить с желаемой степенью устойчивости в подтверждение корректности синтеза регулятора.
- Найдем соответствующую матрицу наблюдателя L , обеспечивающую желаемую степень сходимости α_L . Разрешается пользоваться как методом матричных неравенств, так и методом уравнений Риккати, но отклонения фактических собственных чисел спектра наблюдателя от желаемой степени сходимости должны быть минимизированы.
- Определим собственные числа матриц замкнутых систем $(A + LC)$ и сравним с желаемой степенью устойчивости в подтверждение корректности синтеза наблюдателя.

- Выполним компьютерное моделирование с начальными условиями системы $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ и наблюдателя $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Построим график формируемого регулятором управления $u(t)$, сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.
- Сравним полученные результаты для различных наборов α_K и α_L сделаем выводы о взаимном влиянии степени устойчивости регулятора и степени сходимости наблюдателя при управлении по выходу.

2.1 Управляемость и наблюдаемость собственных чисел и характеристики системы

Найдем собственные числа матрицы A и определим управляемость и наблюдаемость каждого из них. Сделаем вывод об управляемости, стабилизируемости, наблюдаемости и обнаруживаемости системы.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 4 \\ \lambda_4 = 8 \end{cases} \quad (46)$$

Матрицы Хаутуса для $\lambda_1 = -4$

$$U_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & 6 & -2 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(U_1) = 4 \quad (47)$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(V_1) = 3 \quad (48)$$

Так как ранг матрицы U_1 равен, а V_1 не равен размерности системы, собственное число λ_1 управляемо и не наблюдаемо.

Матрицы Хаутуса для $\lambda_2 = 0$

$$U_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(U_2) = 4 \quad (49)$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(V_2) = 4 \quad (50)$$

Так как ранги матриц U_2 и V_2 равны размерности системы, собственное число λ_2 управляемо и наблюдаемо.

Матрицы Хаутуса для $\lambda_3 = 4$

$$U_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(U_3) = 4 \quad (51)$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(V_3) = 4 \quad (52)$$

Так как ранги матриц U_3 и V_3 равны размерности системы, собственное число λ_3 управляемо и наблюдаемо.

Матрицы Хаутуса для $\lambda_4 = 8$

$$U_4 = \begin{bmatrix} A - \lambda_4 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -2 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & -6 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(U_4) = 4 \quad (53)$$

$$V_4 = \begin{bmatrix} A - \lambda_4 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(V_4) = 4 \quad (54)$$

Так как ранги матриц U_4 и V_4 равны размерности системы, собственное число λ_4 управляемо и наблюдаемо.

Так как все собственные числа управляемы, то система является в целом полностью управляемой и, следовательно, стабилизируемой. Ненаблюдаемым собственным числом является только $\lambda_1 = -4$, система не является полностью наблюдаемой, но так как $\lambda_1 < 0$, то система обнаруживаема.

2.2 Достигаемые степени устойчивости

Определим, любой ли желаемой степени устойчивости мы сможем добиться от данной системы при помощи регулятора вида $u = Kx$.

В данном случае все собственные числа системы являются управляемыми, следовательно, мы можем добиться от системы любой степени устойчивости.

2.3 Достигаемые степени сходимости

Определим, любой ли желаемой степени сходимости мы сможем добиться от наблюдателя полной размерности для данной системы.

Собственное число матрицы системы $\lambda_1 = -4$ не наблюдаемо, следовательно, оно гарантированно будет содержаться в спектре системы с наблюдателем. Степень сходимости системы определяется, как положительное

число, равное наименьшему из расстояний от собственных чисел до мнимой оси, значит, для замкнутой системы максимальная степень устойчивости будет равна 4.

2.4 Схема моделирования

Построим схему моделирования системы (43), замкнутой регулятором, состоящем из наблюдателя состояния

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$$

и закона управления и $u = K\hat{x}$.

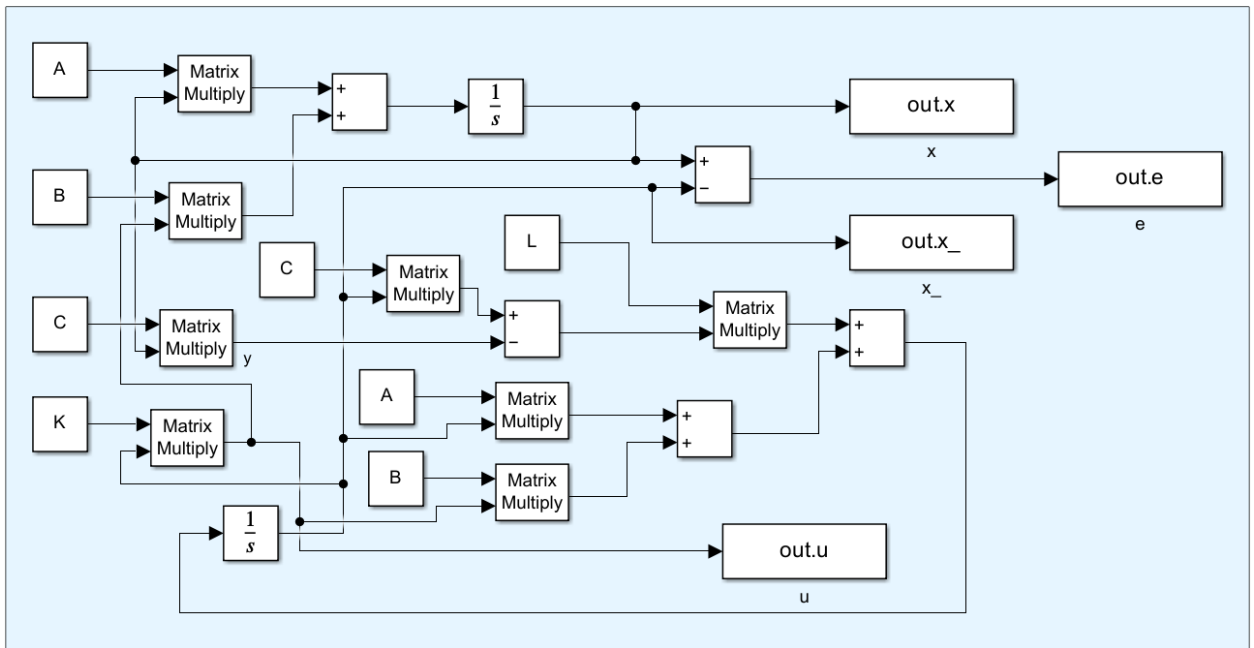


Рисунок 20 — Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящем из наблюдателя состояния $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$ и закона управления и $u = K\hat{x}$.

2.5 Значения α

Зададимся не менее чем парой значений $\alpha > 0$, все из которых могли бы быть использованы в качестве желаемой степени устойчивости для регулятора и желаемой степени сходимости для наблюдателя.

$$\begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \alpha_2 = 1.2 \end{cases} \quad (55)$$

2.6 Желаемые значения степени устойчивости

Используя выбранные значения α , составим не менее чем 3 набора значений желаемой степени устойчивости α_K и желаемой степени сходимости α_L , среди которых должны быть случаи:

2.6.1 Наблюдатель и регулятор сопоставимы

$$\begin{cases} \alpha_K = 4 \\ \alpha_L = 4 \end{cases} \quad (56)$$

2.6.2 Регулятор сильнее

$$\begin{cases} \alpha_K = 4 \\ \alpha_L = 1.2 \end{cases} \quad (57)$$

2.6.3 Наблюдатель сильнее

$$\begin{cases} \alpha_K = 1.2 \\ \alpha_L = 4 \end{cases} \quad (58)$$

2.7 Нахождение матрицы регулятора

Найдем соответствующую матрицу регулятора K , обеспечивающую желаемую степень устойчивости α_K . Для того, чтобы минимизировать отклонения фактических собственных чисел спектра замкнутой системы от желаемой степени устойчивости воспользуемся методом уравнений Риккати с $Q = 0$.

Для $\alpha_K = 4$

$$K = \begin{bmatrix} -43.0003 & 23.0002 & 37.0002 & 17.0001 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Для $\alpha_K = 1.2$

$$K = \begin{bmatrix} -11.3880 & 4.2120 & 10.7640 & 3.5880 \end{bmatrix} \quad (60)$$

2.8 Определение собственных чисел матриц замкнутых систем (регулятор)

Определим собственные числа матриц замкнутых систем $(A + BK)$ и сравнить с желаемой степенью устойчивости в подтверждение корректности синтеза регулятора.

Для $\alpha_K = 4$

$$A + BK = \begin{bmatrix} -342.0022 & 184.0014 & 292.0017 & 138.0009 \\ -258.0016 & 140.0011 & 220.0013 & 106.0007 \\ -176.0011 & 90.0007 & 150.0008 & 68.0005 \\ -84.0005 & 50.0004 & 74.0004 & 36.0002 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -4.0000 \pm 13.2665i \\ \lambda_{3,4} = -4.0000 \pm 0.0047i \end{cases} \Rightarrow \alpha = 4 = \alpha_K \quad (61)$$

Для $\alpha_K = 1.2$

$$A + BK = \begin{bmatrix} -89.1040 & 33.6960 & 82.1120 & 30.7040 \\ -68.3280 & 27.2720 & 62.5840 & 25.5280 \\ -49.5520 & 14.8480 & 45.0560 & 14.3520 \\ -20.7760 & 12.4240 & 21.5280 & 9.1760 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -1.2000 \pm 8.0697i \\ \lambda_3 = -4 \\ \lambda_{3,4} = -1.2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1.2 = \alpha_K \quad (62)$$

2.9 Нахождение матрицы наблюдателя

Найдем соответствующую матрицу наблюдателя L , обеспечивающую желаемую степень сходимости α_L . Разрешается пользоваться как методом матричных неравенств, так и методом уравнений Риккати, но отклонения

фактических собственных чисел спектра наблюдателя от желаемой степени сходимости должны быть минимизированы.

Для того, чтобы минимизировать отклонения фактических собственных чисел спектра наблюдателя от желаемой степени сходимости воспользуемся решением матричного неравенством типа Ляпунова (63), совместно с решением задачи минимизации наблюдения (64)

$$\begin{cases} A^T Q + Q A + 2\alpha Q + C^T Y^T + Y C \preceq 0, \\ L = Q^{-1} Y \end{cases} \quad (63)$$

$$\begin{cases} e_0 = x_0 - \hat{x}_0, \\ \begin{bmatrix} Q & e_0 \\ e_0^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0, \\ \begin{bmatrix} Q & Y \\ Y^T & \mu \end{bmatrix} \succ 0, \end{cases} \quad (64)$$

с условием минимизации следа матрицы μ .

Получим следующие матрицы наблюдателя:

$$L(\alpha_L = 1.2) = \begin{bmatrix} -2.5640 & 1.4086 \\ -3.1725 & -1.7716 \\ 3.1367 & -0.9369 \\ -2.6002 & -1.3001 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$L(\alpha_L = 4) = \begin{bmatrix} -3.9257 & 2.3376 \\ -7.0845 & -3.9522 \\ 7.0101 & -0.3855 \\ -4.0001 & -2.0001 \end{bmatrix} \quad (66)$$

2.10 Определение собственных чисел матриц замкнутых систем (наблюдатель)

Определим собственные числа матриц замкнутых систем $(A + LC)$ и сравним с желаемой степенью сходимости в подтверждение корректности синтеза наблюдателя.

Для $\alpha_L = 1.2$

$$A + LC = \begin{bmatrix} -4.5365 & 1.4086 & -2.5914 & -1.7193 \\ -4.5735 & 0.2284 & -3.7716 & -4.1167 \\ 3.2103 & -2.9369 & 1.0631 & 5.3365 \\ -1.9003 & 2.6999 & -1.3001 & -4.5005 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -1.2002 \pm 2.7940i \\ \lambda_3 = -4 \\ \lambda_4 = -1.3451 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1.2002 \approx \alpha_L = 1.2 \quad (67)$$

Для $\alpha_L = 4$

$$A + LC = \begin{bmatrix} -8.1889 & 2.3376 & -1.6624 & -3.5137 \\ -10.2168 & -1.9522 & -5.9522 & -14.1211 \\ 10.4057 & -2.3855 & 1.6145 & 13.6348 \\ -4.0000 & 1.9999 & -2.0001 & -8.0002 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -4.0001 \pm 5.8262i \\ \lambda_3 = -4 \\ \lambda_4 = -4.5266 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 4 = \alpha_L \quad (68)$$

Как можно заметить, в обоих случаях полученная степень сходимости оказалась крайне близкой к желаемой.

2.11 Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование с начальными условиями системы $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ и наблюдателя $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Построим график формируемого регулятором управления $u(t)$, сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

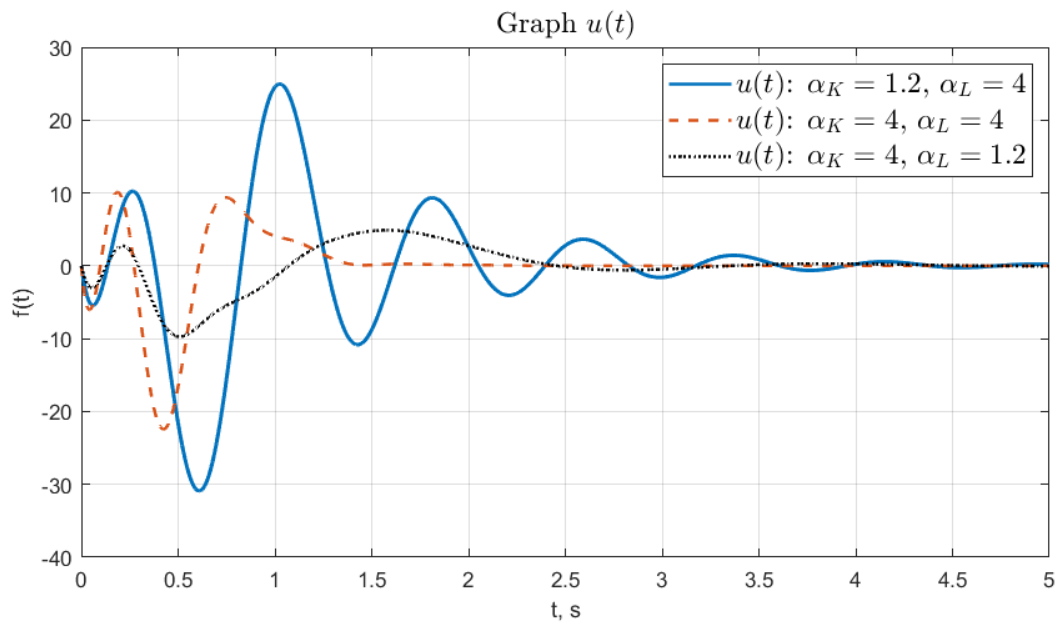


Рисунок 21 — График формируемого регулятором управления $u(t)$.

2.11.1 Наблюдатель и регулятор сопоставимы

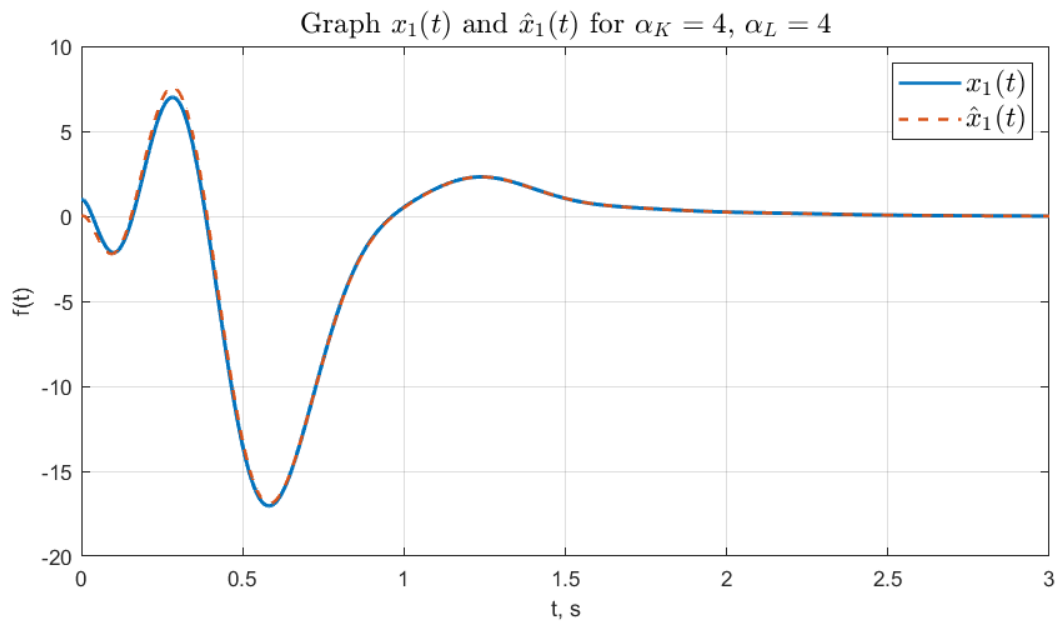


Рисунок 22 — Сравнительные графики $x_1(t)$ и $\hat{x}_1(t)$.

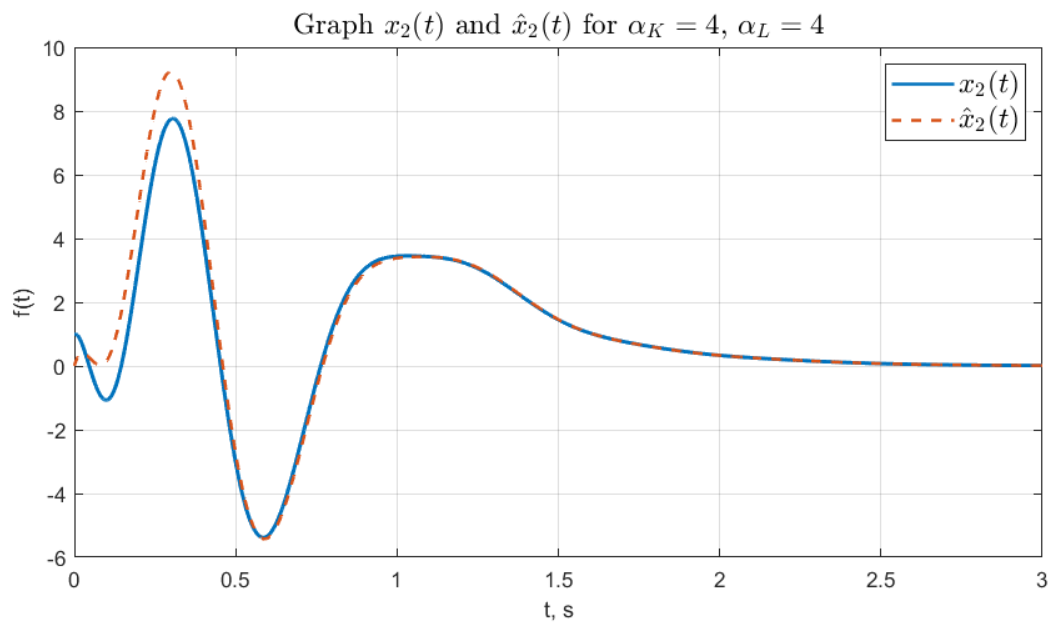


Рисунок 23 — Сравнительные графики $x_2(t)$ и $\hat{x}_2(t)$.

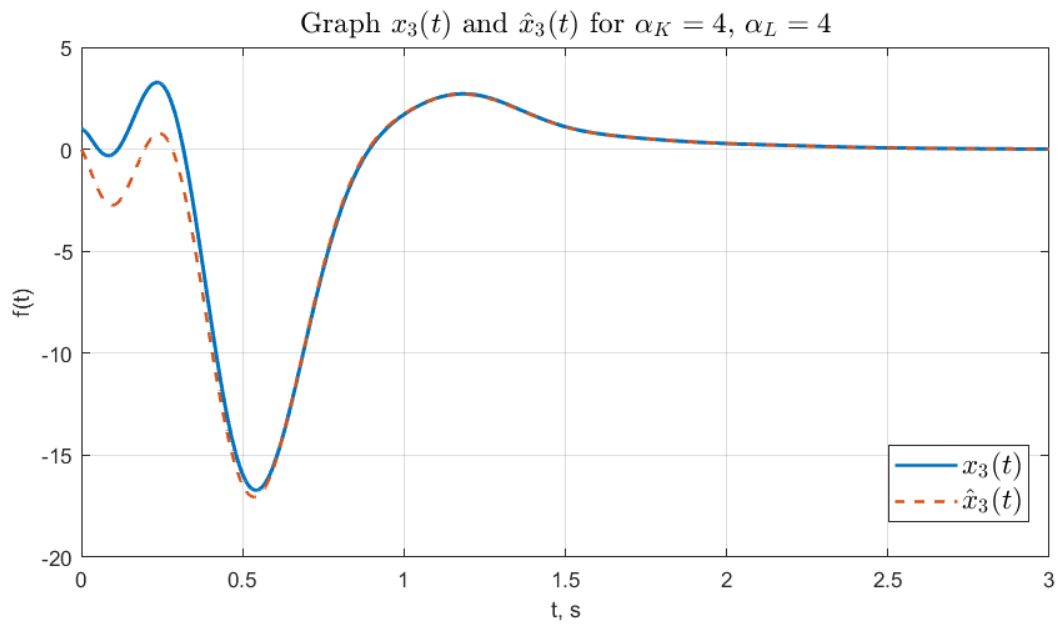


Рисунок 24 — Сравнительные графики $x_3(t)$ и $\hat{x}_3(t)$.

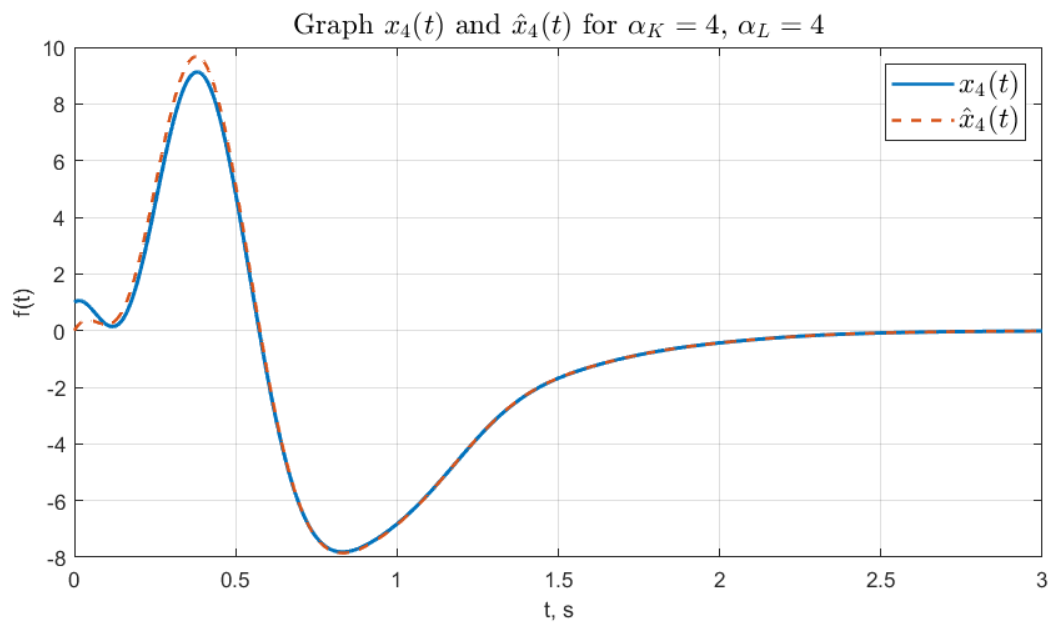


Рисунок 25 — Сравнительные графики $x_4(t)$ и $\hat{x}_4(t)$.

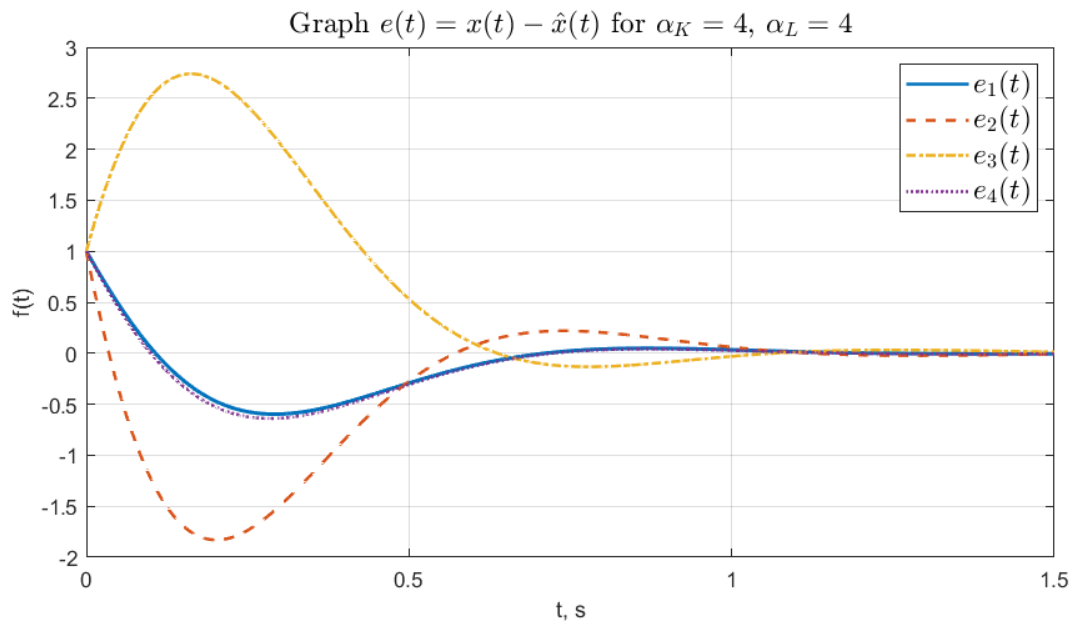


Рисунок 26 — График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

2.11.2 Регулятор сильнее

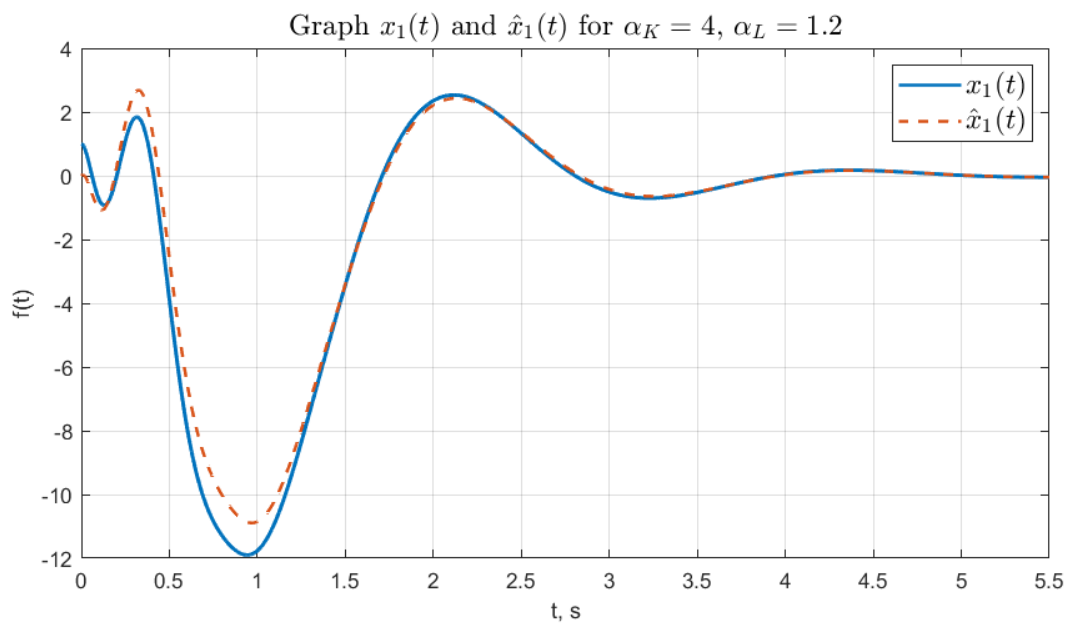


Рисунок 27 — Сравнительные графики $x_1(t)$ и $\hat{x}_1(t)$.

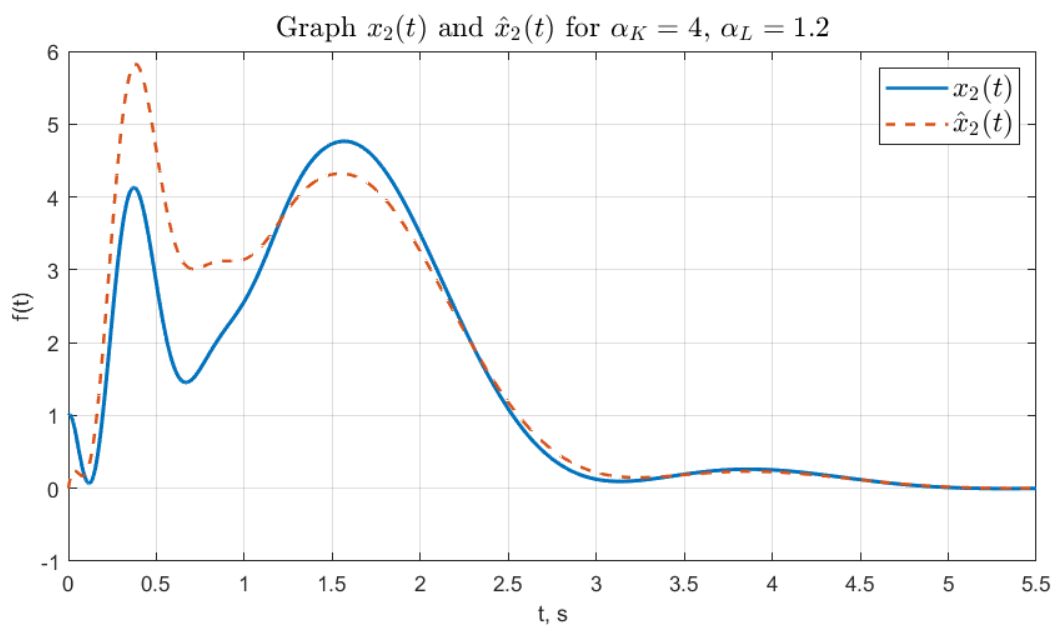


Рисунок 28 — Сравнительные графики $x_2(t)$ и $\hat{x}_2(t)$.

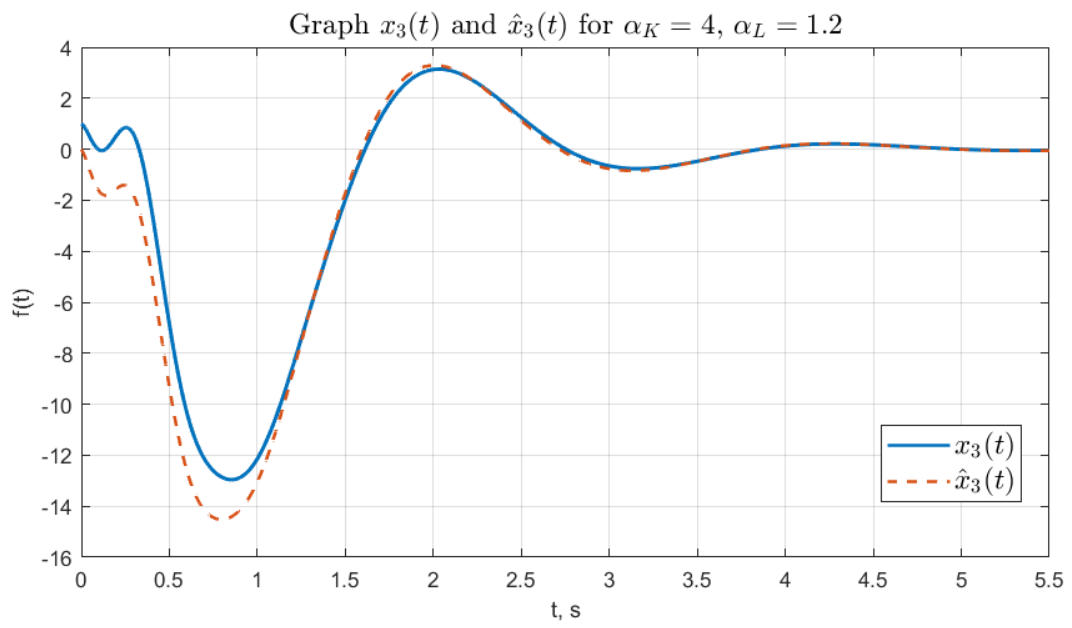


Рисунок 29 — Сравнительные графики $x_3(t)$ и $\hat{x}_3(t)$.

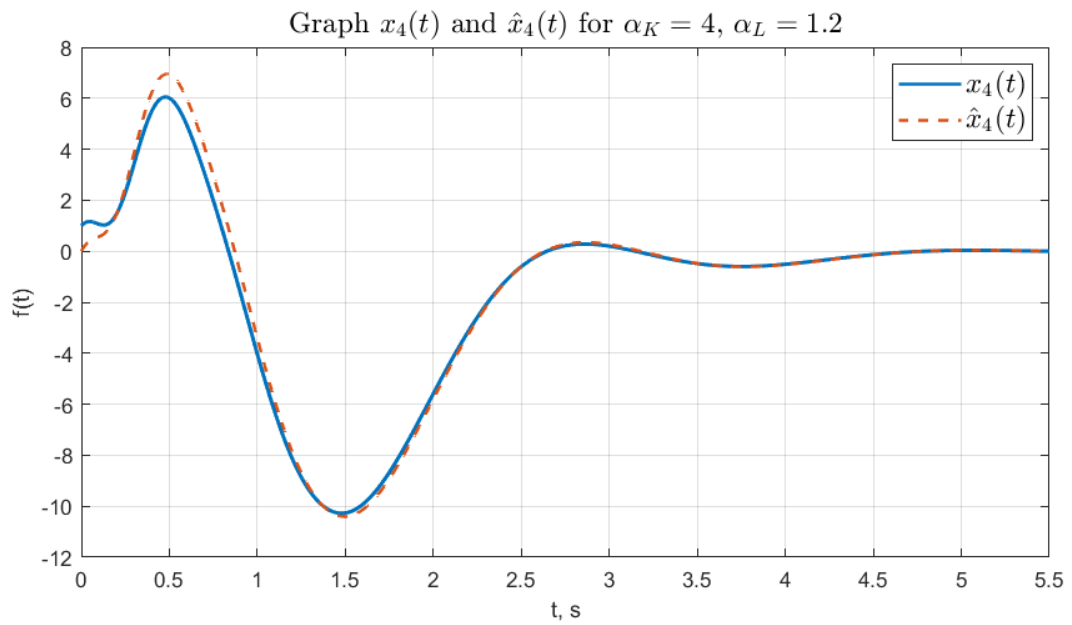


Рисунок 30 — Сравнительные графики $x_4(t)$ и $\hat{x}_4(t)$.

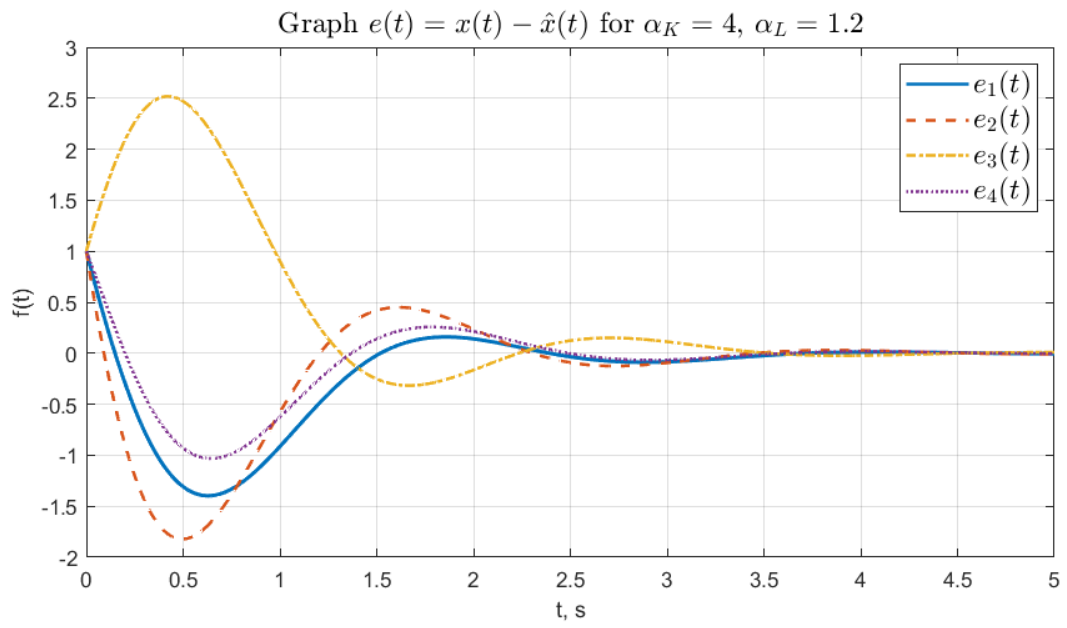


Рисунок 31 — График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

2.11.3 Наблюдатель сильнее

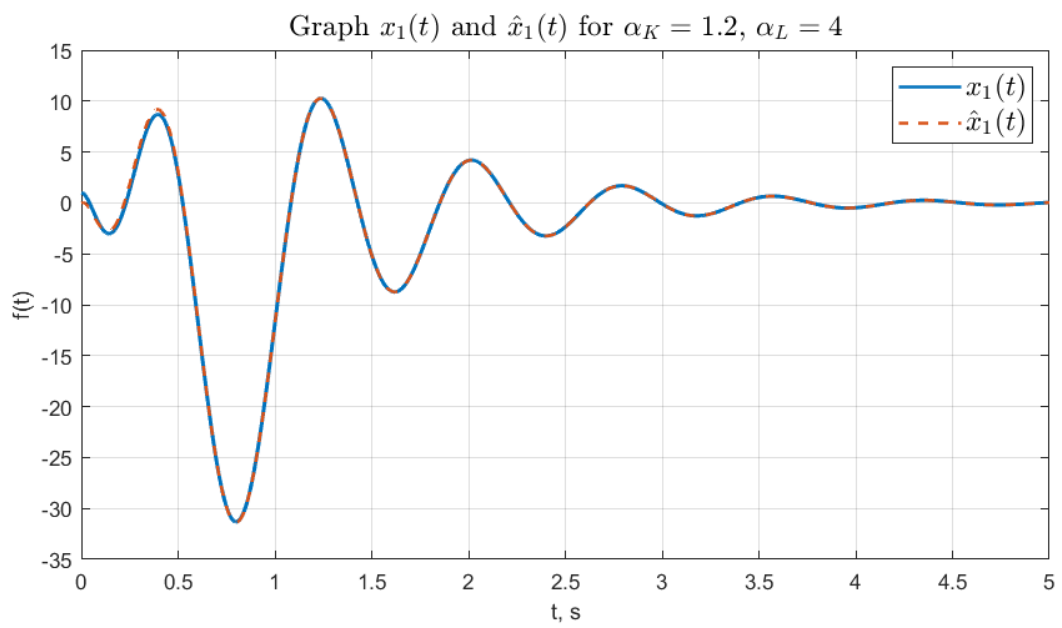


Рисунок 32 — Сравнительные графики $x_1(t)$ и $\hat{x}_1(t)$.

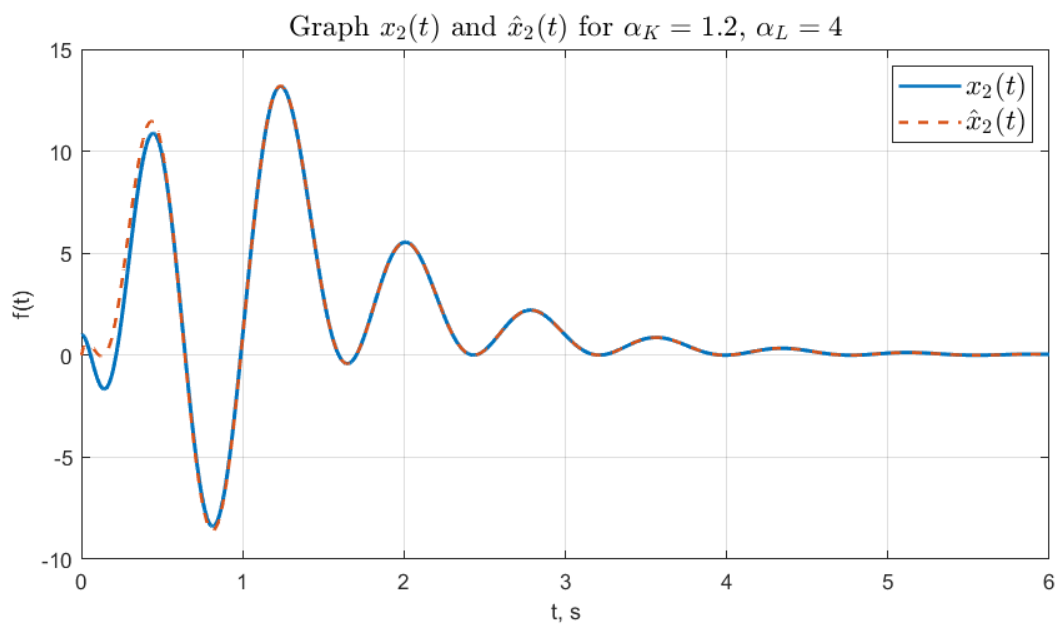


Рисунок 33 — Сравнительные графики $x_2(t)$ и $\hat{x}_2(t)$.

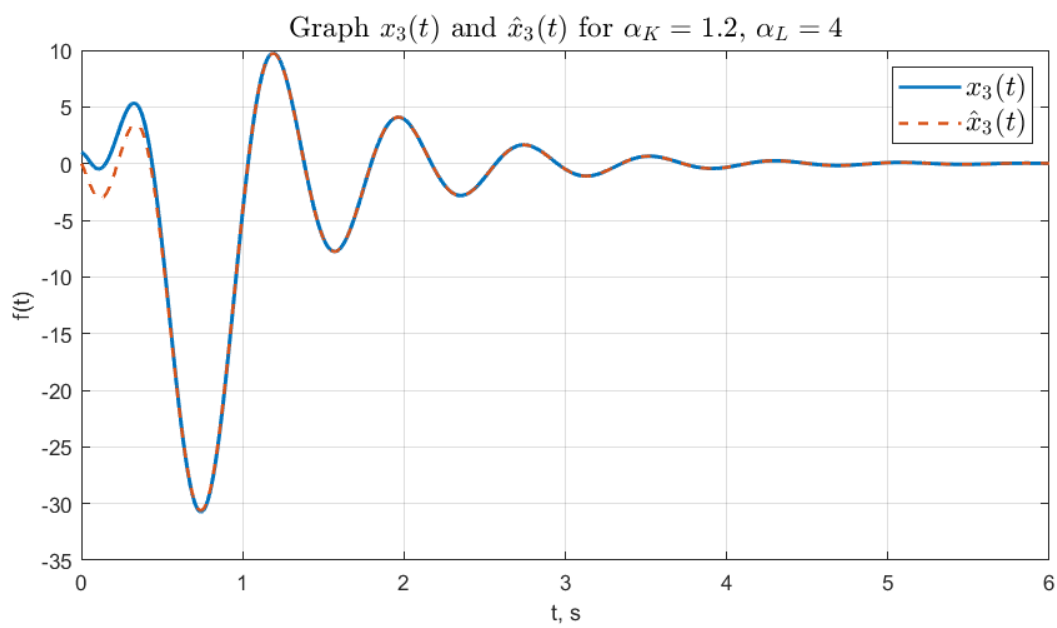


Рисунок 34 — Сравнительные графики $x_3(t)$ и $\hat{x}_3(t)$.

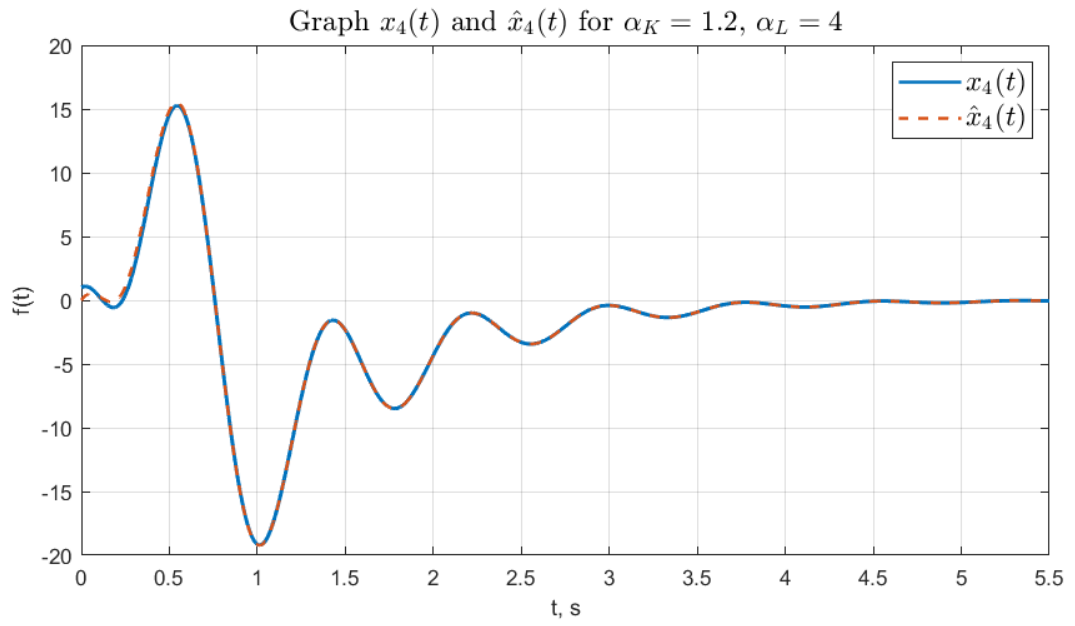


Рисунок 35 — Сравнительные графики $x_4(t)$ и $\hat{x}_4(t)$.

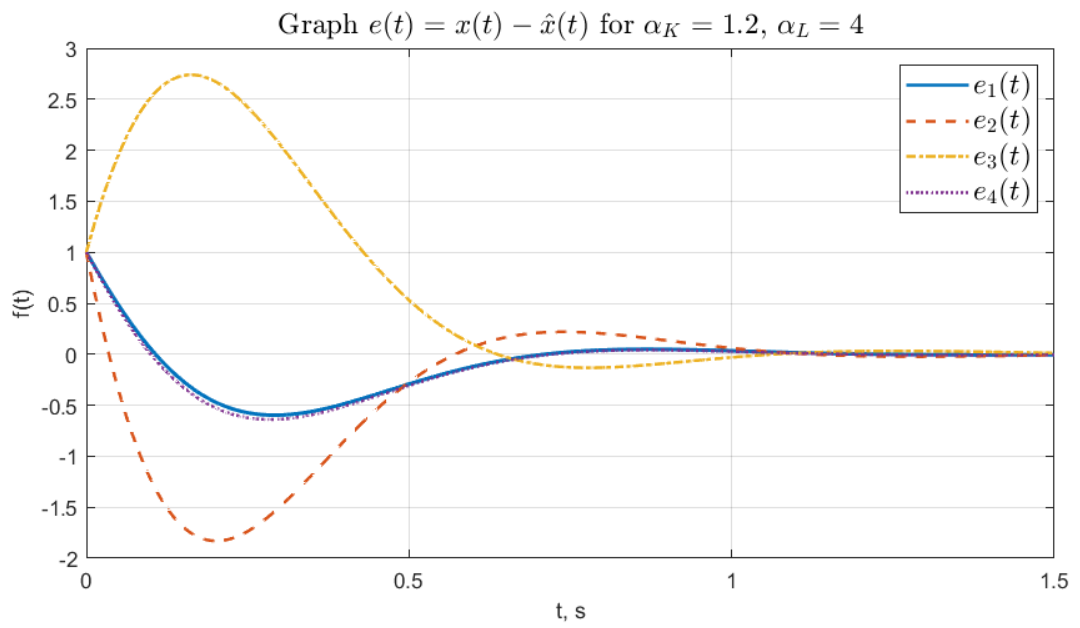


Рисунок 36 — График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

2.12 Сравнение полученных результатов

Сравним полученные результаты для различных наборов α_K и α_L сделаем выводы о взаимном влиянии степени устойчивости регулятора и степени сходимости наблюдателя при управлении по выходу.

Заметим, что управляющее воздействие $u(t)$ (рисунок 21) за меньшее время становится неотличимо от нуля при $\alpha_K = \alpha_L = 4$, то есть когда регулятор и наблюдатель «равносильны». Наибольшая амплитуда, частота колебаний и время сходимости к нулю соответствует $\alpha_K = 1.2$, $\alpha_L = 4$, то есть когда регулятор «слабее».

Также за наименьшее время к нулю приходит вектор состояния системы при «равносильных» регуляторе и наблюдателе. Ошибка между $x(t)$ и \hat{x} сходится к нулю за одинаковое время для наборов с $\alpha_L = 4$ (рисунки 36 и 26). При меньшем значении для наблюдателя $\alpha_L = 1.2$ ошибка за большее время сходится к нулю (рисунок 31). Для наборов с одинаковым значением α_K , но разными α_L вектор системы сходится к нулю за меньшее время при большем значении α_L . Значит, степень сходимости наблюдателя оказывает влияние на переходный процесс при одинаковых значениях степени устойчивости, большее значение первой обеспечивает более меньшее время стабилизации системы.

3 РЕГУЛЯТОР С КАЧЕСТВЕННОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ.

Возьмем матрицы A , B и рассмотрим систему (1). Выполним следующие шаги:

- Найдем собственные числа матрицы A и определим управляемость каждого из них. Сделаем вывод об управляемости и стабилизируемости системы. Допускается сослаться на результаты Задания 2.
- Зададимся значениями параметра $\beta < 0$, характеризующего среднее значение поведения траекторий ($|\beta|$ как «средняя степень устойчивости»), и параметра $r > 0$, $\beta + r < 0$, характеризующего разброс поведения траекторий относительно среднего значения β . Рекомендуется выбирать параметр r исходя из соотношения $r = \frac{|\beta|}{k}$, $1.5 \leq k \leq 4$. При этом, если система имеет неуправляемые собственные числа, они должны находиться на комплексной плоскости в пределах круга с центром в точке $(\beta; 0)$ и радиусом r .
- Зададимся четырьмя наборами параметров Q и R :
 - $Q = I$ и $R = 1$;
 - $Q = I$ и $R = 0$;
 - $Q = 0$ и $R = 1$;
 - $Q = 0$ и $R = 0$.

Для каждого из наборов параметров R и Q синтезируем регулятор, обеспечивающий качественную экспоненциальную устойчивость при помощи матричного уравнения типа Риккати:

$$(A - BK - \beta I)^T P (A - BK - \beta I) - r^2 P = -Q,$$

$$K = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P (A - \beta I)$$

- Найдем соответствующую матрицу K регулятора $u = Kx$.
- Определим собственные числа матрицы замкнутой системы $(A + BK)$ и выведем их на комплексную плоскость, проверив, находятся ли они в пределах круга с центром в точке $(-\beta; 0)$ и радиусом r в подтверждение корректности синтеза регулятора.

- Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы и построим графики формируемого регулятором управления $u(t)$ и вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

3.1 Управляемость и стабилизируемость системы

Найдем собственные числа матрицы A и определим управляемость каждого из них. Сделаем вывод об управляемости и стабилизируемости системы.

Найдем собственные числа матрицы A .

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 2 - 3i \\ \lambda_3 = 2 + 3i \end{cases}$$

Определим управляемость собственных чисел с помощью матриц Хатуса.

Для собственного числа $\lambda_1 = -3$:

$$U_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & -8 & 0 \\ 6 & 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_1) = 2 \quad (69)$$

Ранг U_1 меньше порядка системы, следовательно, собственное число λ_1 неуправляемо.

Для собственного числа $\lambda_2 = 2 - 3i$:

$$U_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 3i & 8 & 5 & 2 \\ -6 & -11 + 3i & -8 & 0 \\ 6 & 6 & 3 + 3i & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_2) = 3 \quad (70)$$

Ранг U_2 равно порядку системы, следовательно, собственное число λ_2 управляемо.

Для собственного числа $\lambda_3 = 2 + 3i$:

$$U_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3i & 8 & 5 & 2 \\ -6 & -11 - 3i & -8 & 0 \\ 6 & 6 & 3 - 3i & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_3) = 3 \quad (71)$$

Ранг U_3 равно порядку системы, следовательно, собственное число λ_3 управляемо.

Система в целом не является полностью управляемой, из-за того, что собственное число $\lambda_1 = -3$ неуправляемо. В то же время $Re(\lambda_1) < 0$, то есть данное собственное число устойчивое, следовательно, система стабилизируема.

3.2 Значения параметра β

Зададимся значениями параметра $\beta < 0$, характеризующего среднее значение поведения траекторий ($|\beta|$ как «средняя степень устойчивости»), и параметра $r > 0$, $\beta + r < 0$, характеризующего разброс поведения траекторий относительно среднего значения β . Рекомендуется выбирать параметр r исходя из соотношения $r = \frac{|\beta|}{k}$, $1.5 \leq k \leq 4$. При этом, если система имеет неуправляемые собственные числа, они должны находиться на комплексной плоскости в пределах круга с центром в точке $(\beta; 0)$ и радиусом r .

Пусть $\beta = -4$, $r = 2$. Проверим, что все требуемые соотношения выполнены:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = -4 < 0, \\ r = 2 > 0, \\ \beta + r = -2 < 0, \\ k = \frac{|\beta|}{r} = 2, \\ 1.5 \leq (k = 2) \leq 4, \\ (\lambda_1 = -3) \in C((-4, 0), 2) \end{array} \right. \quad (72)$$

3.3 Наборы параметров Q и R

Зададимся четырьмя наборами параметров Q и R :

- $Q = I$ и $R = 1$
- $Q = I$ и $R = 0$
- $Q = 0$ и $R = 1$
- $Q = 0$ и $R = 0$

3.4 Синтез регулятора

Для каждого из наборов параметров R и Q синтезируем регулятор, обеспечивающий качественную экспоненциальную устойчивость при помощи матричного уравнения типа Риккати:

$$(A - BK - \beta I)^T P (A - BK - \beta I) - r^2 P = -Q,$$

$$K = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P (A - \beta I)$$

.

3.4.1 Нахождение матрицы регулятора

Найдем соответствующую матрицу K регулятора $u = Kx$.

Для $Q = I$ и $R = 1$:

$$K \approx \begin{bmatrix} -5.6108 & -5.6108 & -4.7419 \end{bmatrix} \quad (73)$$

Для $Q = I$ и $R = 0$:

$$K \approx \begin{bmatrix} -5.7383 & -5.7383 & -4.8575 \end{bmatrix} \quad (74)$$

Для $Q = 0$ и $R = 1$:

$$K \approx \begin{bmatrix} -5.9999 & -5.9999 & -4.9166 \end{bmatrix} \quad (75)$$

Для $Q = 0$ и $R = 0$:

$$K \approx \begin{bmatrix} -6.1063 & -6.1063 & -5.4095 \end{bmatrix} \quad (76)$$

3.4.2 Определение собственных чисел матрицы замкнутой системы

Определим собственные числа матрицы замкнутой системы $(A + BK)$ и выведем их на комплексную плоскость, проверив, находятся ли они в пределах круга с центром в точке $(\beta; 0)$ и радиусом r в подтверждение корректности синтеза регулятора.

Для $Q = I$ и $R = 1$:

$$A + BK = \begin{bmatrix} -6.2216 & -3.2216 & -4.4838 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_{2,3} = -3.6108 \pm 0.8701i \end{cases} \quad (77)$$

Для $Q = I$ и $R = 0$:

$$A + BK = \begin{bmatrix} -6.4767 & -3.4767 & -4.7150 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = -3.4767 \\ \lambda_3 = -3.9999 \end{cases} \quad (78)$$

Для $Q = 0$ и $R = 1$:

$$A + BK = \begin{bmatrix} -6.9999 & -3.9999 & -4.8333 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2.0000 \\ \lambda_2 = -3.0 \\ \lambda_3 = -5.9999 \end{cases} \quad (79)$$

Для $Q = 0$ и $R = 0$:

$$A + BK = \begin{bmatrix} -7.2127 & -4.2127 & -5.8191 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3.0 \\ \lambda_2 = -4.0000 \\ \lambda_3 = -4.2127 \end{cases} \quad (80)$$

Graph of the target circle and eigenvalues of closed systems

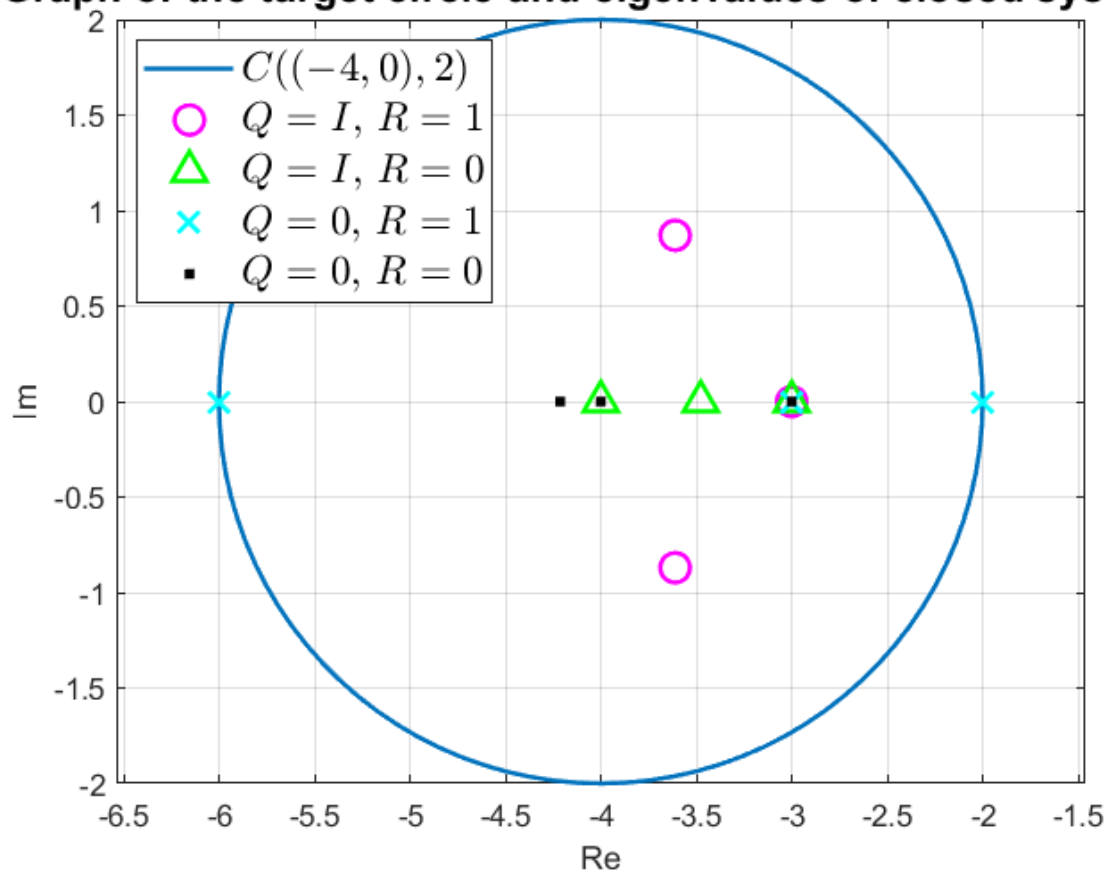


Рисунок 37 — Целевой круг и собственные числа замкнутых систем.

3.5 Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы и построим графики формируемого регулятором управления $u(t)$ и вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

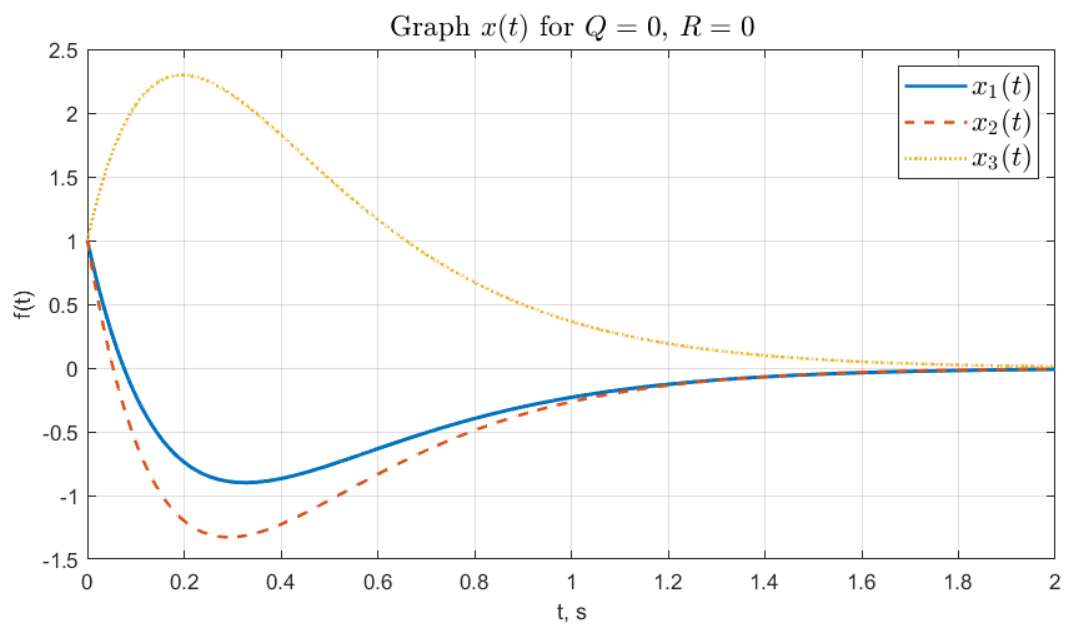


Рисунок 38 — График вектора состояния при $Q = 0$ и $R = 0$.

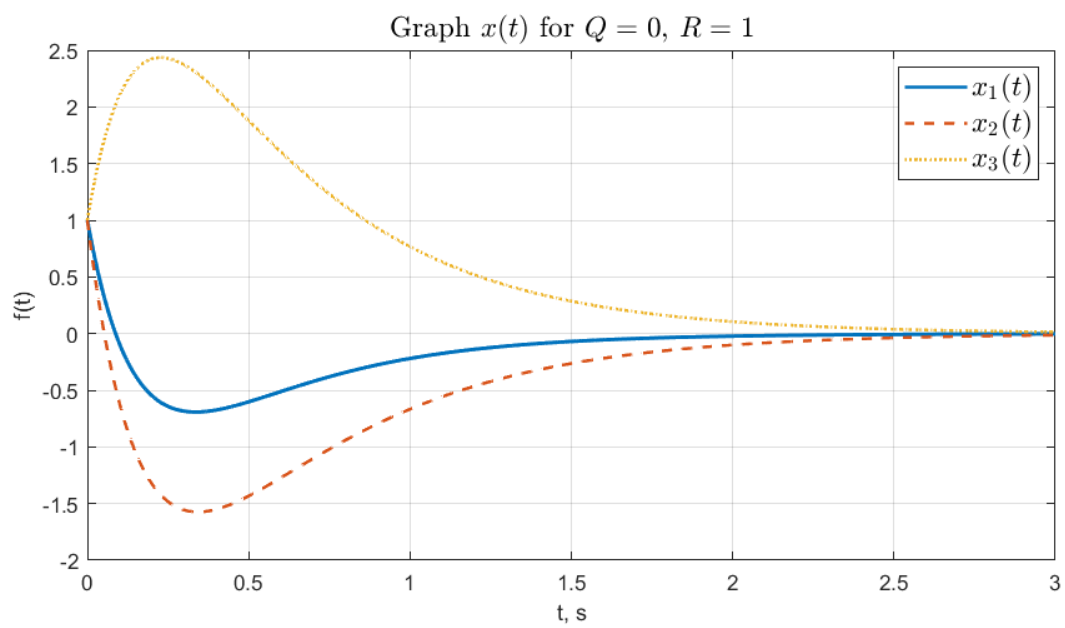


Рисунок 39 — График вектора состояния при $Q = 0$ и $R = 1$.

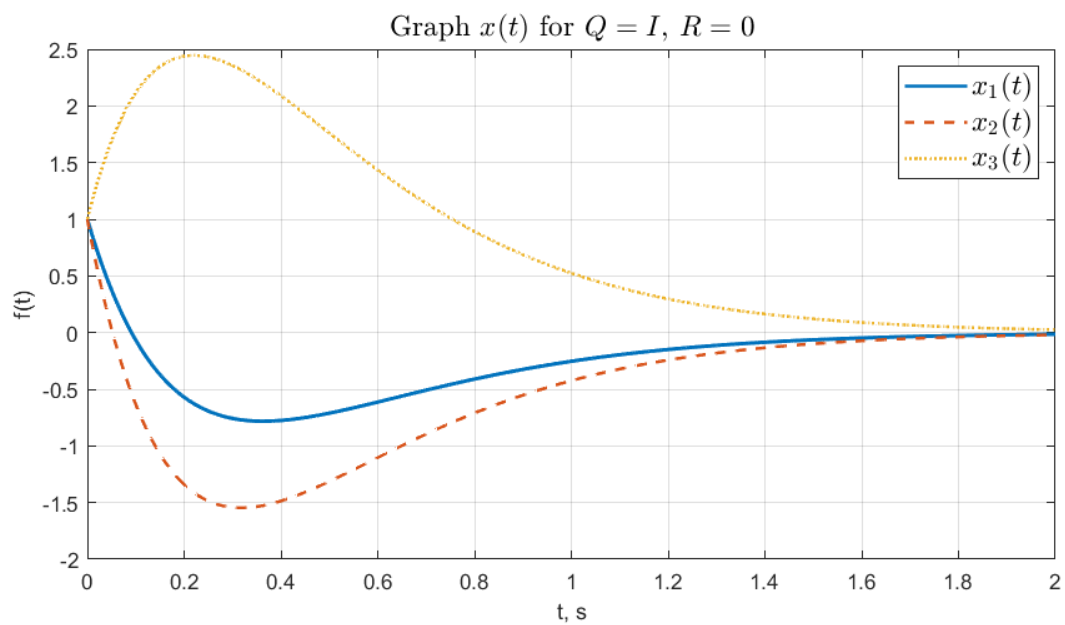


Рисунок 40 — График вектора состояния при $Q = I$ и $R = 0$.

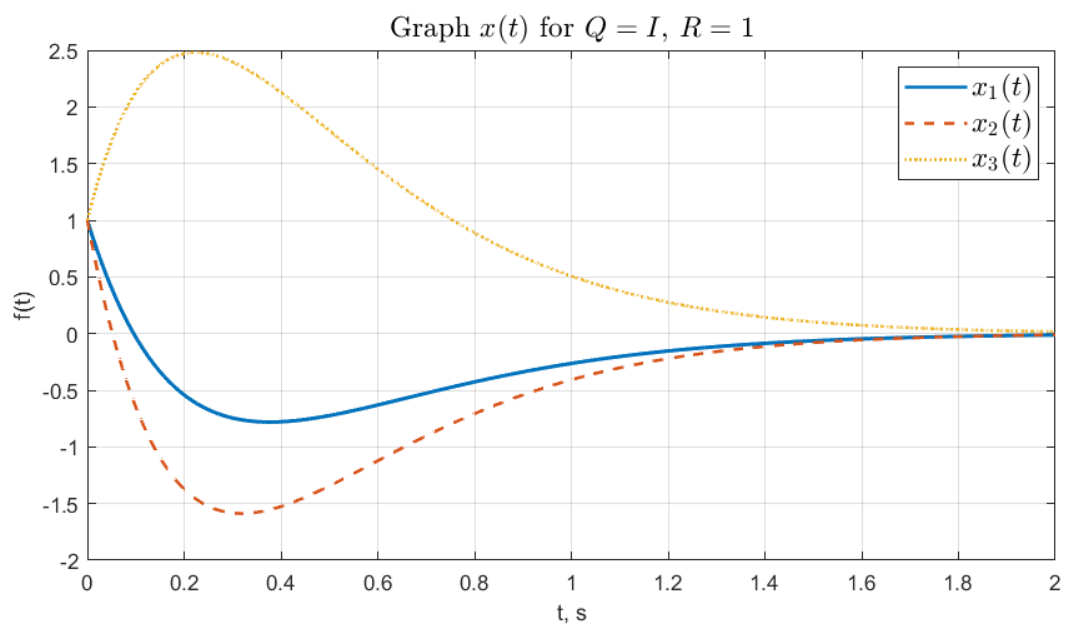


Рисунок 41 — График вектора состояния при $Q = I$ и $R = 1$.

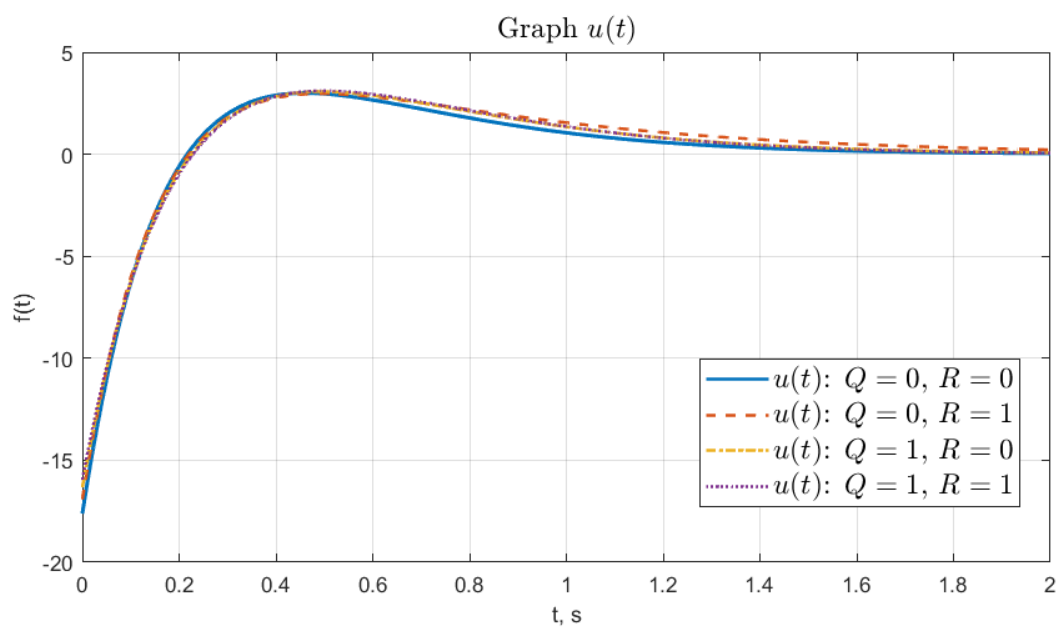


Рисунок 42 — График формируемых регуляторами управлений $u(t)$.

3.6 Анализ результатов

На графике управляющего воздействия (рисунок 42) видны незначительные различия для наборов, за большее время к нулю сходится $u(t)$ при $Q = 0$, $R = 1$, на рисунке 37 также заметно, что два собственных числа для этого набора находятся почти на целевого круга. Графики векторов состояний тем более схожи, чем ближе собственные числа замкнутых систем между собой, для набора $Q = 0$, $R = 1$ также характерно большее время переходного процесса (рисунок 39).

4 ВЫВОД

В ходе выполнения лабораторной работы были применены на практике знания о синтезе регуляторов с заданной степенью устойчивости и наблюдателей с заданной степенью сходимости. В первой части работы изучены способы получения регуляторов с желаемой степенью устойчивости с помощью решения систем уравнений типа Ляпунова и типа Риккати. В следующем задании проведен анализ взаимного влияния степени устойчивости регулятора и степени сходимости наблюдателя при управлении по выходу. В заключительной части работы синтезированы регуляторы с качественной экспоненциальной устойчивостью. В ходе выполнения каждого задания было проведено компьютерное моделирование, подтверждающее корректность выполненных расчетов.