ИТМО

Линейные системы автоматического управления

Формы представления линейных систем

Математическая модель

– совокупность математических символов, однозначно определяющих развитие процессов в системе

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Математическая модель

– совокупность математических символов, однозначно определяющих развитие процессов в системе

Классификация систем с вводного занятия по сути классификация математических моделей систем

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Виды математических моделей

Математические модели линейных систем

Аналитические

Строятся с помощью буквенных символов

Графоаналитические

Буквенные символы и графические обозначения

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Виды математических моделей

Математические модели линейных систем

Аналитические

Вход-Выход:
дифференциальные уравнения, передаточные функции

Вход-состояние-выход

Графоаналитические

Структурные схемы

Виды математических моделей

Математические модели линейных систем

Аналитические

В-В:
ДУ, ПФ

ВСВ

Привыкаем к сокращениям

Графоаналитические

Структурные схемы

Вход-выход

Линейное ДУ

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u$$

Вход-выход

Линейное ДУ

$\boxed{n \geq m!}$

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0 u$$

Вход-выход

Линейное ДУ

$n \geq m!$

Громоздко

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u$$

Вход-выход

Линейное ДУ

$n \geq m!$

Громоздко

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u$$

$\Downarrow$

Введем в рассмотрение оператор дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

$$p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] + \cdots + a_1 p[y] + a_0 y = b_m p^m[u] + \cdots + b_1 p[u] + b_0 u$$

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0)[y] = (b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0)[u]$$

$$Q(p)[y] = R(p)[u]$$

$Q(p)$ и $R(p)$ – операторные характеристические полиномы

Вход-выход

Линейное ДУ

$n \geq m!$

Громоздко

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u$$

$\Downarrow$

Введем в рассмотрение оператор дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

$$p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] + \cdots + a_1 p[y] + a_0 y = b_m p^m[u] + \cdots + b_1 p[u] + b_0 u$$

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0)[y] = (b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0)[u]$$

$$Q(p)[y] = R(p)[u]$$

Корни $Q(p)$ называются **полюсами системы,**
а $R(p)$ – **нулями системы**

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Вход-выход

Линейное ДУ

$n \geq m!$

Громоздко

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0 u$$

⇩

Введем в рассмотрение оператор дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

$$p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] + \dots + a_1 p[y] + a_0 y = b_m p^m[u] + \dots + b_1 p[u] + b_0 u$$

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0)[y] = (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0)[u]$$

$$\mathrm{Q}(p)[y] = R(p)[u]$$

⇩

Дифференциально-интегральный оператор $W(p)$ – ПФ системы

ПФ $\quad y = \dfrac{R(p)}{\mathrm{Q}(p)}[u] = W(p)[u]$

Мирошник И. В. «Теория автоматического управления. Линейные системы.»

Линейное ДУ

$n \geq m!$

Громоздко

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u$$

$\Downarrow$

Введем в рассмотрение оператор дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

$$p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] + \cdots + a_1 p[y] + a_0 y = b_m p^m[u] + \cdots + b_1 p[u] + b_0 u$$

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0)[y] = (b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0)[u]$$

$$Q(p)[y] = R(p)[u]$$

$\Downarrow$

ПФ $y = \dfrac{R(p)}{Q(p)}[u] = W(p)[u]$

Удобно, компактно, позволяет сделать выводы о динамике системы, неочевидные из ДУ

Вход-выход

Пример

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = \ddot{u} + 2\dot{u} + 6u$$

$\boxed{\text{ПФ?}}$

Вход-выход

Пример

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = \ddot{u} + 2\dot{u} + 6u$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{p^2 + 2p + 1}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}[u]$$

Пример

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = \ddot{u} + 2\dot{u} + 6u$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{p^2 + 2p + 1}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}[u]$$

Абсолютный динамический порядок будто бы 3…

Вход-выход

Пример

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = \ddot{u} + 2\dot{u} + 6u$$

$$y = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p^2+5p+6)}[u]$$

Абсолютный динамический порядок будто бы 3…

Вход-выход

Пример

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = \ddot{u} + 2\dot{u} + 6u$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{(p+1)}{(p^2 + 5p + 6)}[u]$$

Относительный порядок тот же,
но абсолютный ниже т.к. **нуль** и **полюс** совпали
и часть динамики системы компенсировалась

Вход-выход

Линейное ДУ

$n \geq m!$

Громоздко

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0 u$$

Введем в рассмотрение оператор дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

В литературе можно встретить и иное обозначение….

$$p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] \dots$$

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0)[y] = (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0)[u]$$

$$Q(p)[y] = R(p)[u]$$

ПФ $y = \dfrac{R(p)}{Q(p)}[u] = W(p)[u]$

Удобно, компактно, позволяет сделать выводы о динамике системы, неочевидные из ДУ

Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

В отечественной и зарубежной научной литературе можно встретить использование символа s в качестве оператора дифференцирования…

…или ввода обозначения p в качестве переменной Лапласа.

На нашем курсе условимся, что p – оператор дифференцирования, а s – переменная Лапласа, но будем держать в уме возможные разночтения в учебной и научной литературе!

Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

Преобразование Лапласа ⇨ $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

$f(t)$ – **оригинал**, функция ***вещественного*** аргумента

$F(s)$ – **изображение**, функция ***комплексного*** аргумента

Преобразование Лапласа – полезный инструмент для работы с линейными системами!

Абстрактный оператор

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

Комплексное число

$$s = \sigma + j\omega$$

Разница!

Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Обратное:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}ds$$

Абстрактный оператор

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

Комплексное число

$$s = \sigma + j\omega$$

Разница!

Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Обратное:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}ds$$

А в чем эквивалентность p и s?

Абстрактный оператор

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

Комплексное число

$$s = \sigma + j\omega$$

Разница!

Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(-0)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}(t)\} = s^2F(s) - sf(-0) - \dot{f}(-0)$$

$$\dots$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(-0)$$

Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^{n} a_k F_k(s)$$

Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

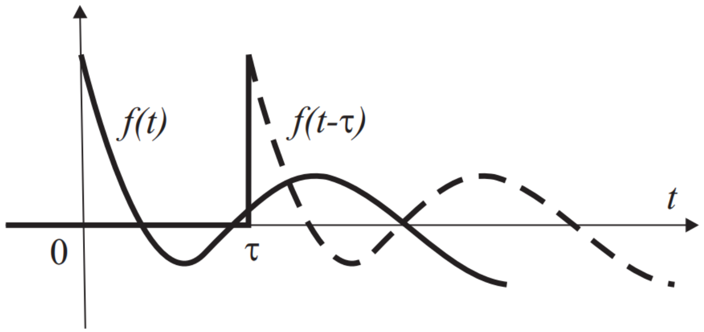
1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\} = \frac{1}{s}F(s)}$$

Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$



Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-\tau s}F(s)$$

Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right\} = \alpha F(\alpha s)}$$

Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$f(t) * g(t) = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$$

Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

Применимо не всегда!

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

Некоторые изображения

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{(s-a)}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
e^{At} A – матрица	$(sI-A)^{-1}$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$e^{at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\phi)$	$\frac{s\cdot\sin(\phi)+\omega\cdot\cos(\phi)}{s^2+\omega^2}$

Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

Позволяют использовать запись в образах Лапласа для ПФ

Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$W(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} \quad \Leftrightarrow \quad W(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Полная эквивалентность только при нулевых начальных условиях!

$$W(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \Leftrightarrow W(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$$

$$y(t) = W(p)[u(t)]$$

Дифференциально-интегральный оператор

$$Y(s) = W(s)U(s)$$

Функция комплексной переменной

Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Полная эквивалентность только при нулевых начальных условиях!

$$W(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} \Leftrightarrow W(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$$

$$y(t) = W(p)[u(t)]$$

$$Y(s) = W(s)U(s)$$

Дифференциально-интегральный оператор

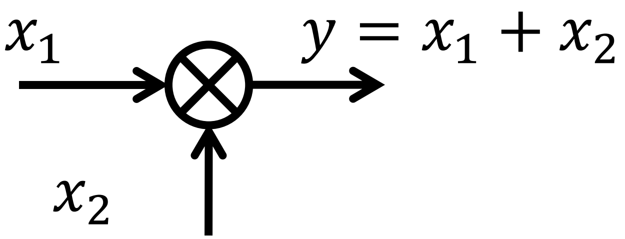
Передаточная функция системы в изображениях Лапласа равна отношению изображений по Лапласу выхода и входа при нулевых начальных условиях

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»

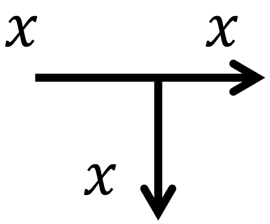
Структурные схемы

Элементы:

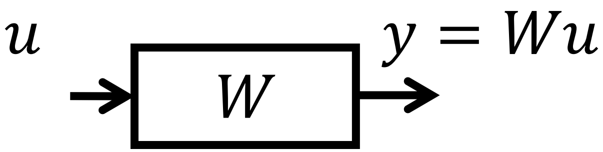
1. Узел суммирования



2. Точка ветвления



3. Звено



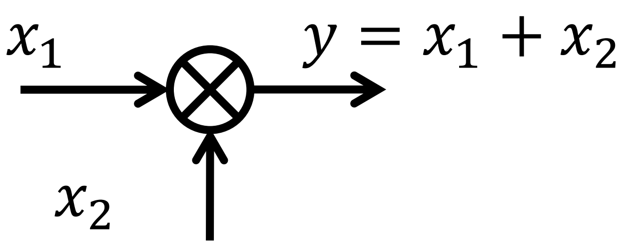
<…> структурная схема – разновидность направленного графа

Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления. Линейные системы.»

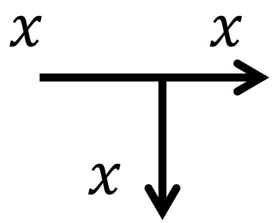
Структурные схемы

Элементы:

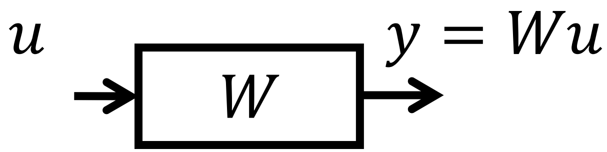
1. Узел суммирования



2. Точка ветвления

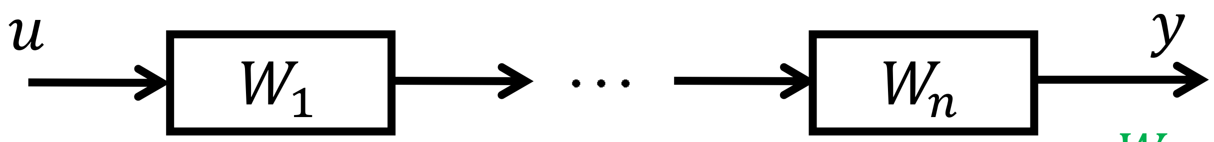


3. Звено

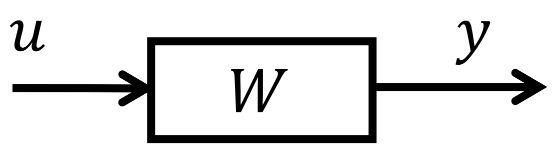


Типы соединения звеньев:

1. Последовательное



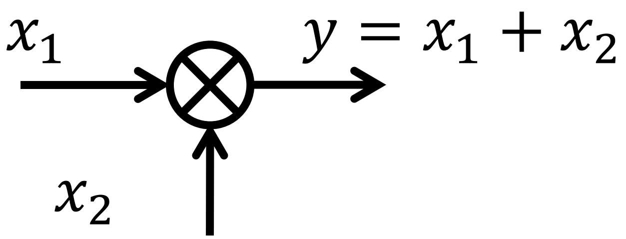
$$W = \prod_{i=1}^{n} W_i$$



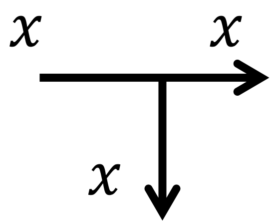
Структурные схемы

Элементы:

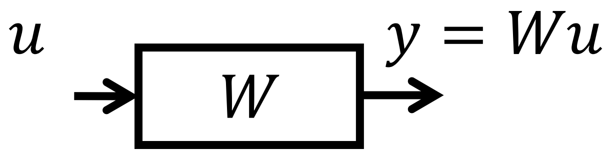
1. Узел суммирования



2. Точка ветвления

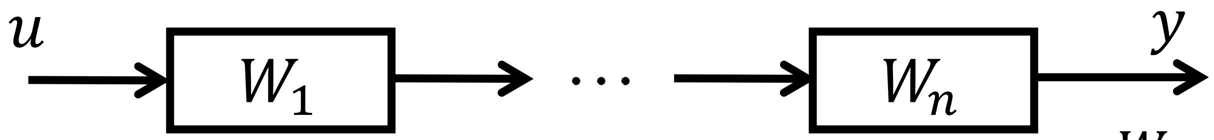


3. Звено



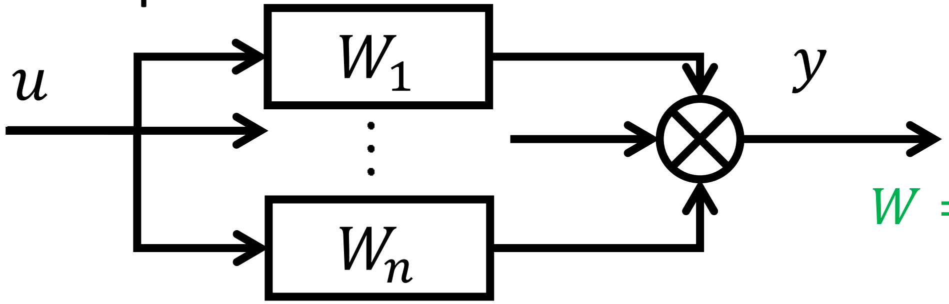
Типы соединения звеньев:

1. Последовательное

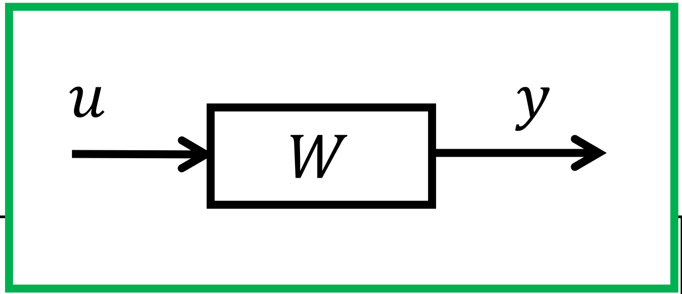


$$W = \prod_{i=1}^{n} W_i$$

2. Параллельное



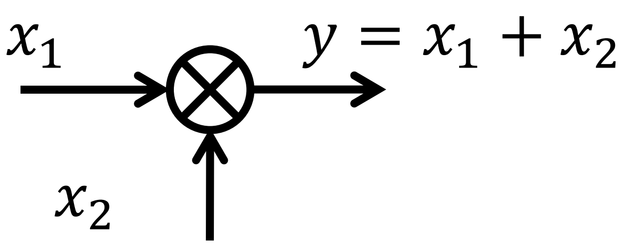
$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i$$



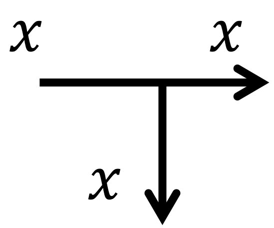
Структурные схемы

Элементы:

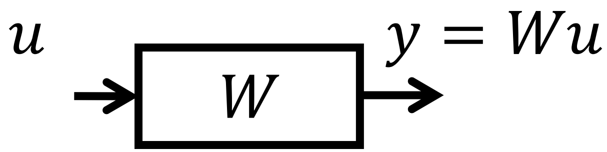
1. Узел суммирования



2. Точка ветвления

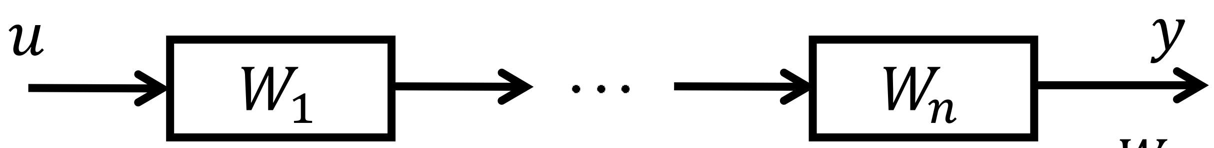


3. Звено



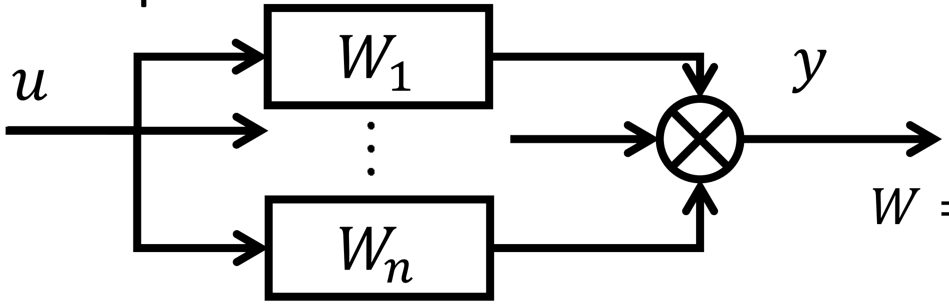
Типы соединения звеньев:

1. Последовательное



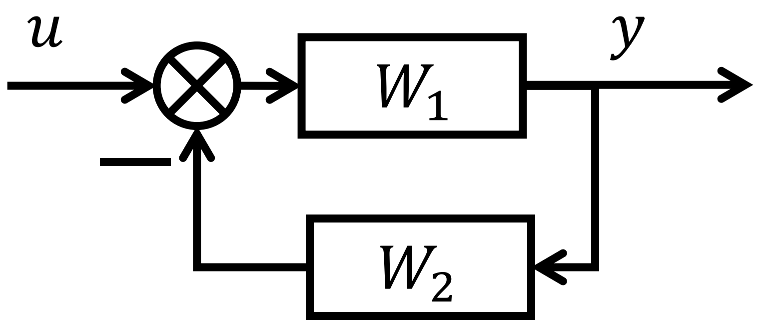
$$W = \prod_{i=1}^{n} W_i$$

2. Параллельное

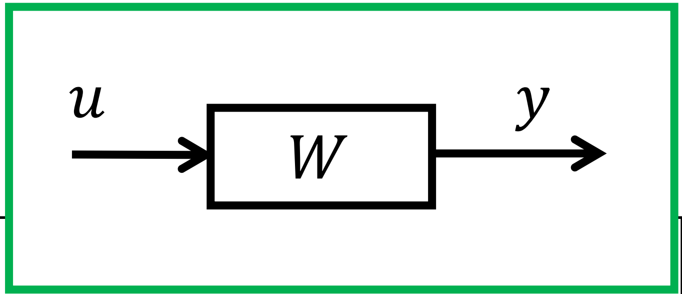


$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

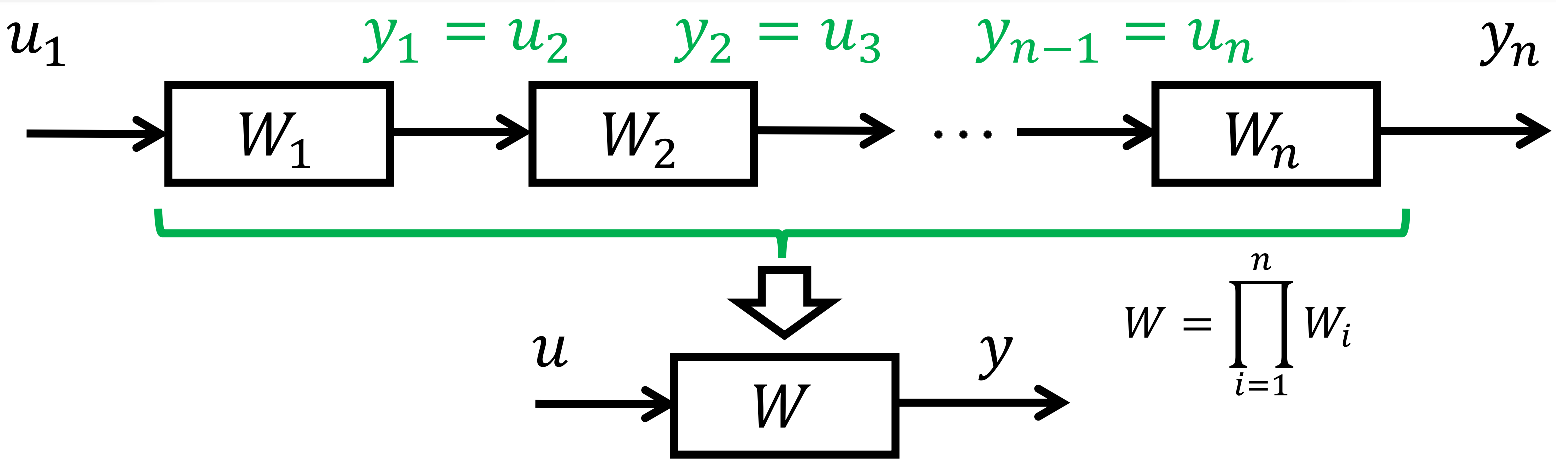
3. Встречно-параллельное



$$W = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2}$$

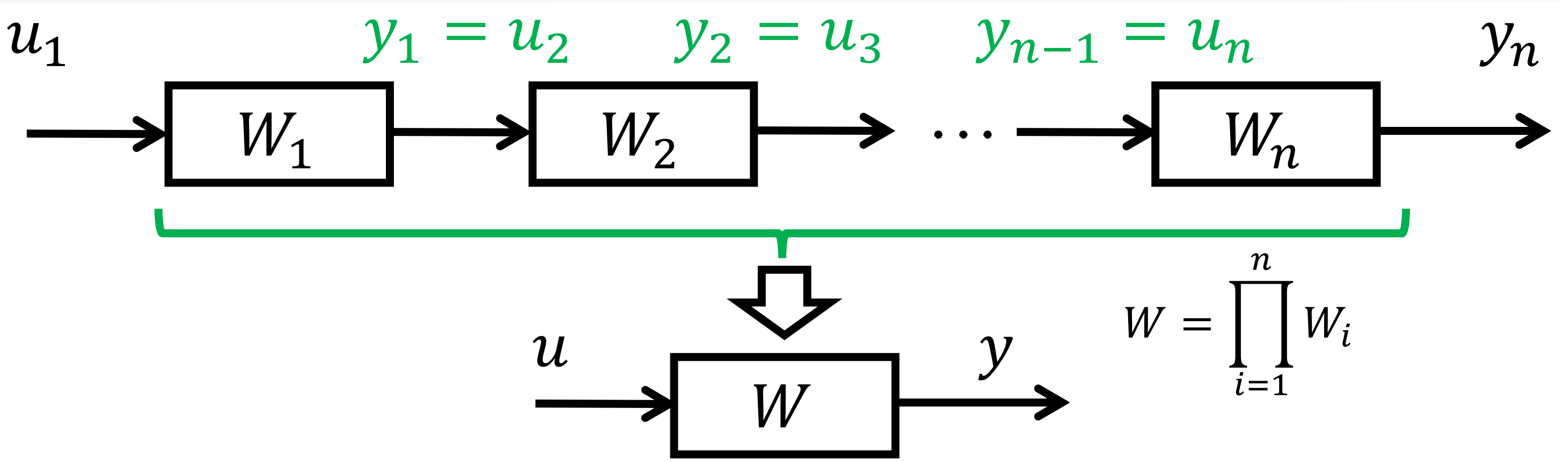


Структурные схемы: Последовательное соединение



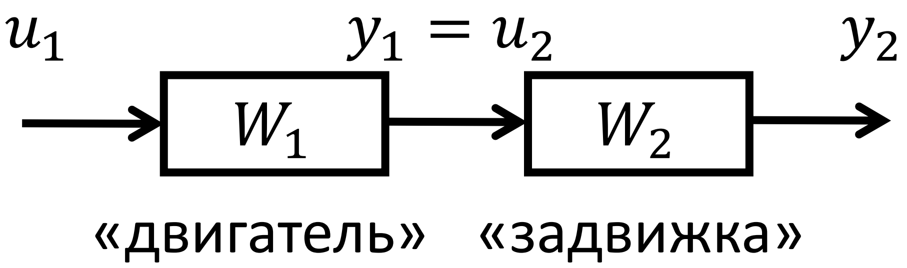
$$W = \prod_{i=1}^{n} W_i$$

Структурные схемы: Последовательное соединение



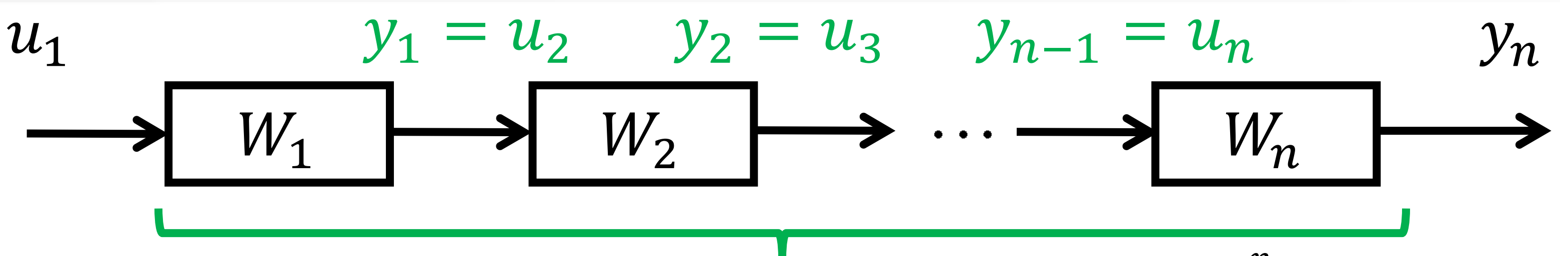
$$W = \prod_{i=1}^{n} W_i$$

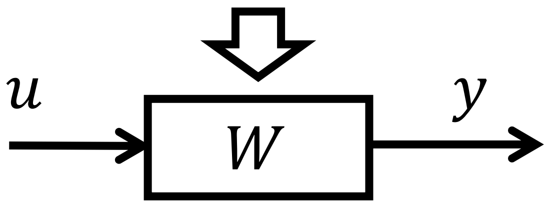
Пример



$$W_1(p) = \frac{p+3}{p+2}, W_2(p) = \frac{p+2}{p+3}$$

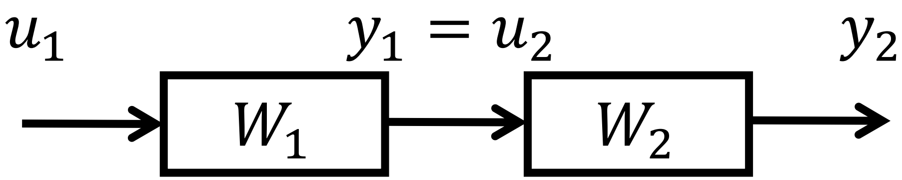
Структурные схемы: Последовательное соединение





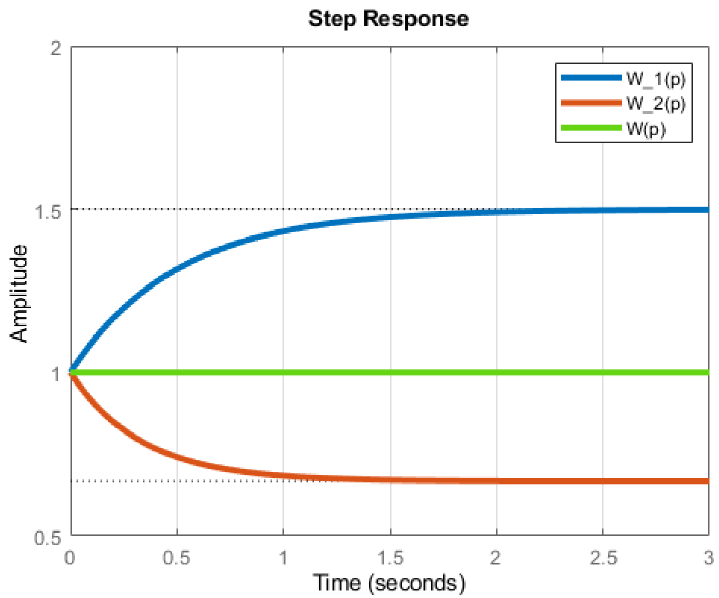
$$W = \prod_{i=1}^{n} W_i$$

Пример

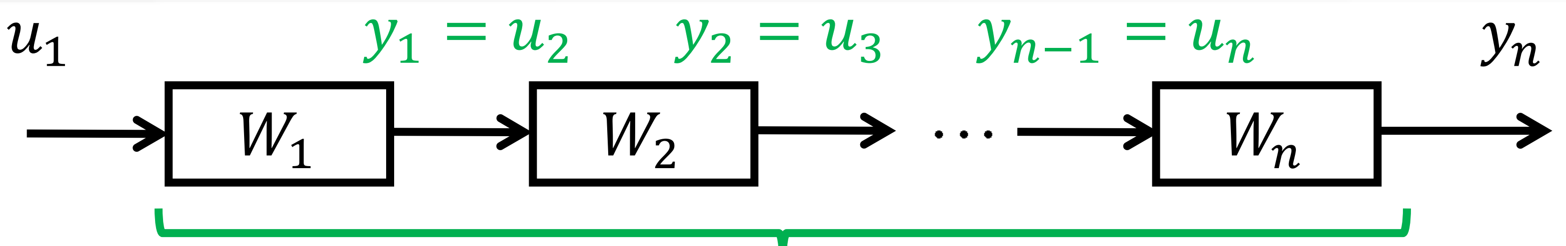


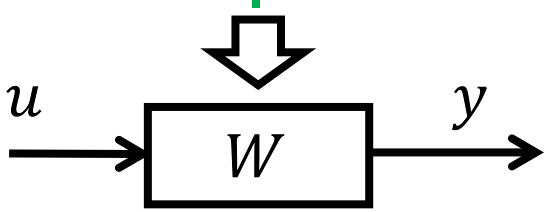
«двигатель» «задвижка»

$$W_1(p) = \frac{p+3}{p+2}, W_2(p) = \frac{p+2}{p+3}, W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) = 1$$



Структурные схемы: Последовательное соединение

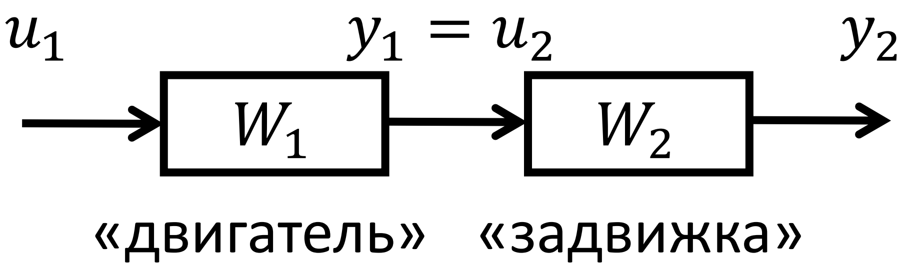




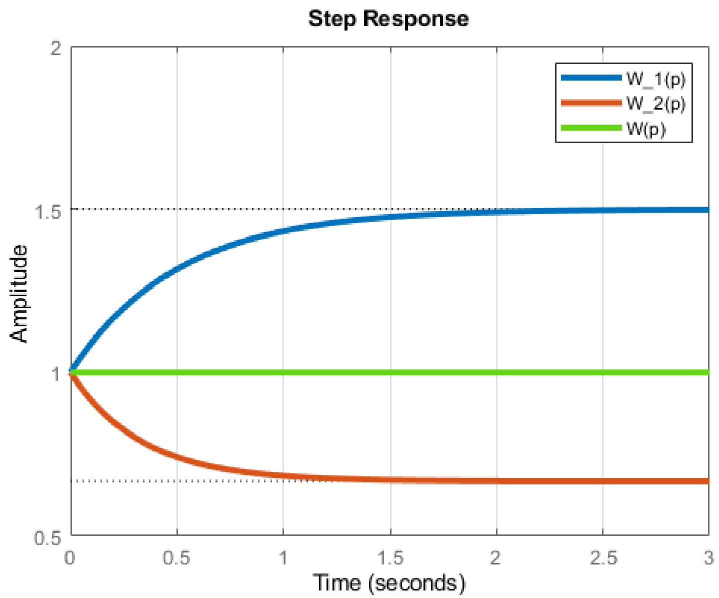
$$W = \prod_{i=1}^{n} W_i = \frac{\prod_{i=1}^{n} R_i}{\prod_{i=1}^{n} Q_i}$$

Эквивалентная ПФ вбирает в себя все **нули** и **полюса** от отдельных ПФ в цепи, при этом они могут скомпенсировать друг друга

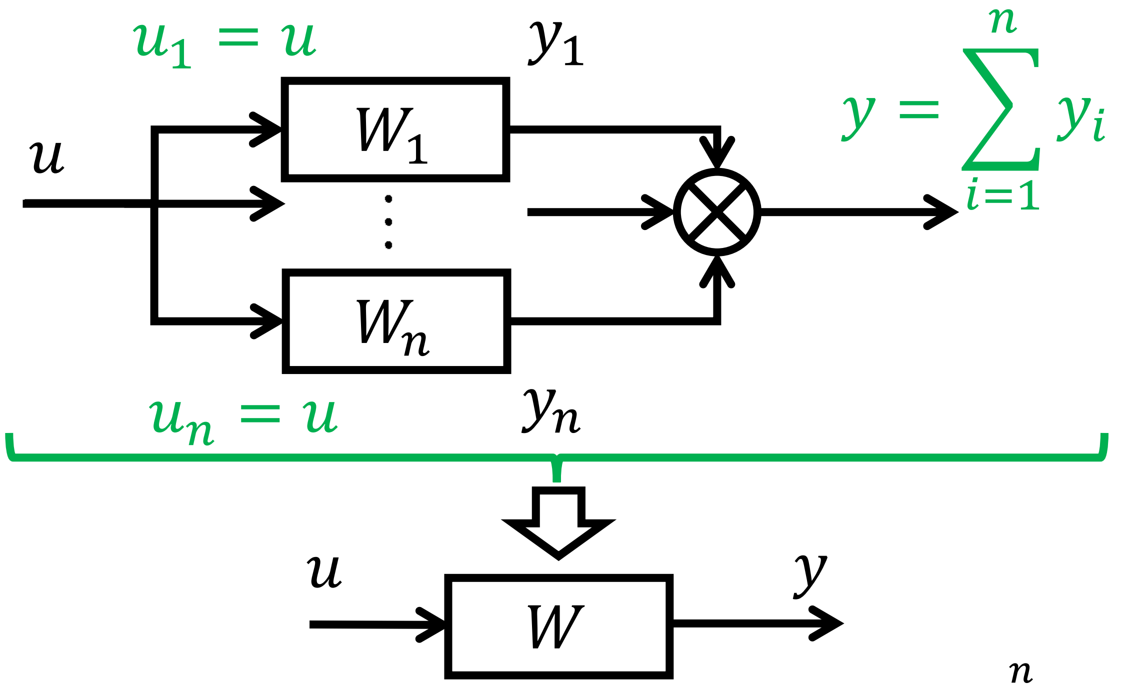
Пример



$$W_1(p) = \frac{p+3}{p+2}, W_2(p) = \frac{p+2}{p+3}, W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) = 1$$

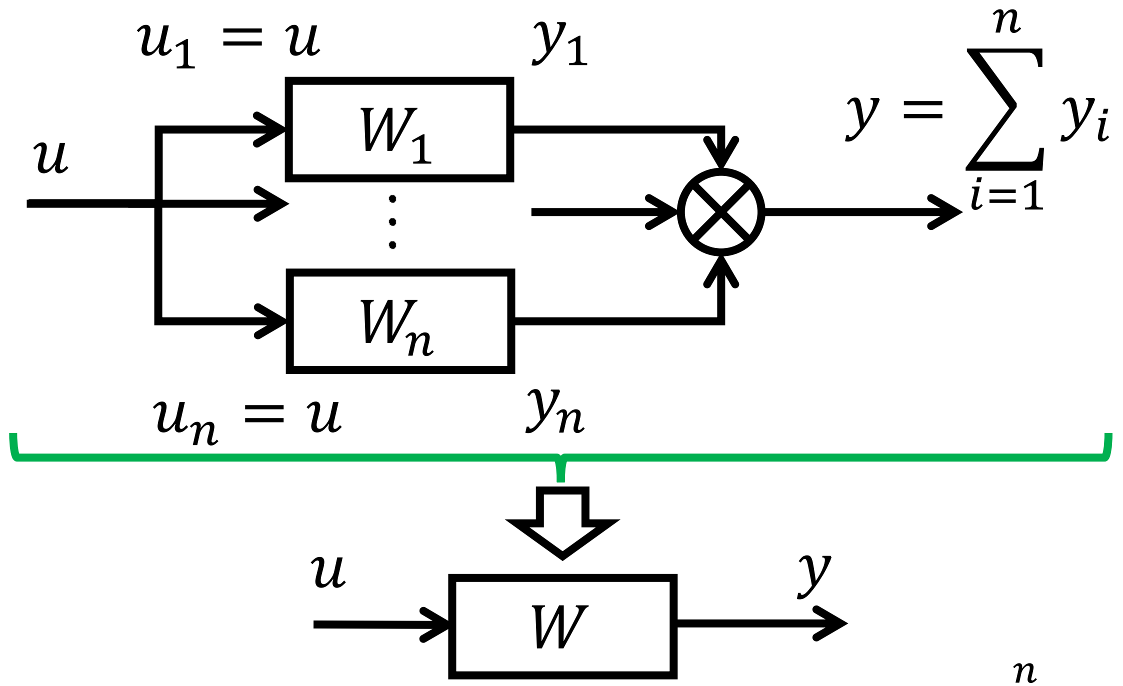


Структурные схемы: Параллельное соединение



$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

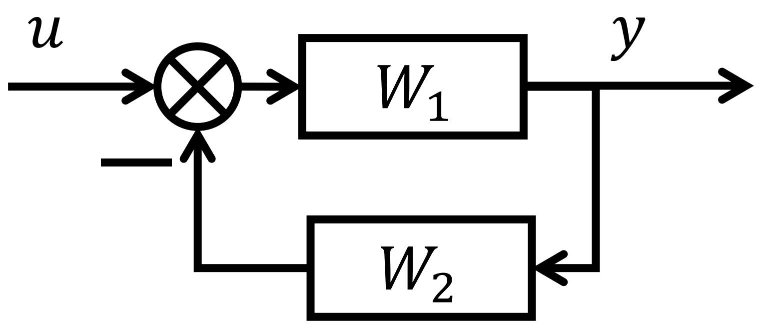
Структурные схемы: Параллельное соединение



$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{Q_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \cdots}{\prod_{i=1}^{n} Q_i}$$

Эквивалентная ПФ вбирает в себя все **полюса** от отдельных ПФ, **нули** же «замешиваются» сложнее, сложнее и осуществлять коррекцию динамики (компенсации нуля полюсом) таким образом

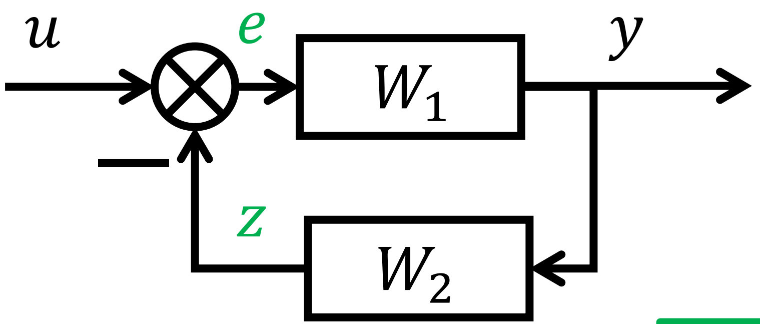
Структурные схемы: Встречно-параллельное



Пусть контур с отрицательной обратной связью (ООС)

Как правильно подступиться?

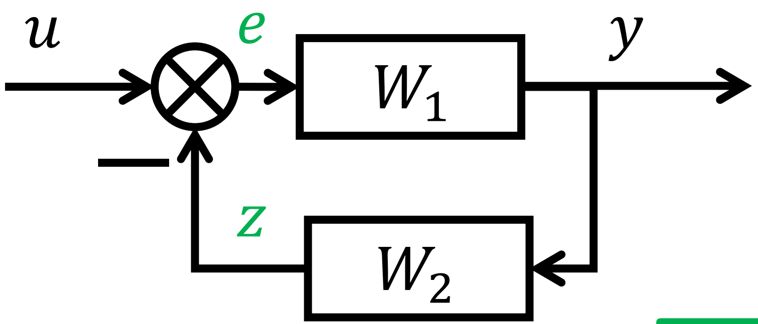
Структурные схемы: Встречно-параллельное



$$e = u - z$$

Вводится в рассмотрение ошибка e

Структурные схемы: Встречно-параллельное

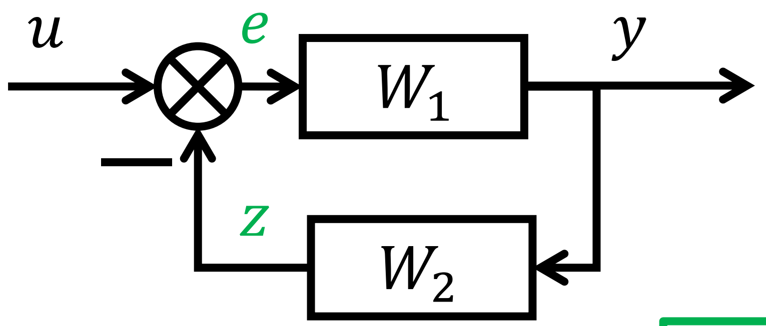


Вводится в рассмотрение ошибка e

$$e = u - z$$

$$y = W_1 e = W_1 u - W_1 z = W_1 u - W_1 W_2 y$$

Структурные схемы: Встречно-параллельное



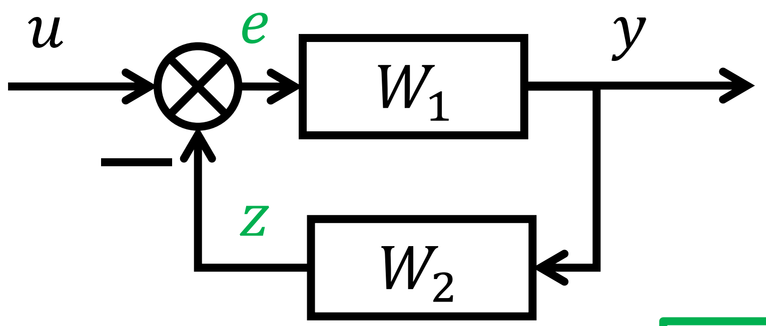
Вводится в рассмотрение ошибка e

$$e = u - z$$

$$y = W_1 e = W_1 u - W_1 z = W_1 u - W_1 W_2 y$$

$$(1 + W_1 W_2) y = W_1 u$$

Структурные схемы: Встречно-параллельное



Вводится в рассмотрение ошибка e

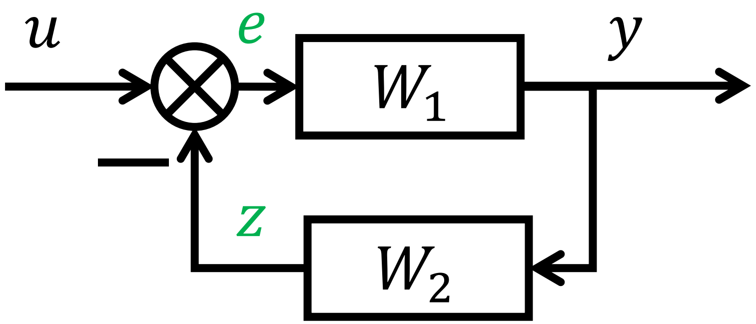
$$e = u - z$$

$$y = W_1 e = W_1 u - W_1 z = W_1 u - W_1 W_2 y$$

$$(1 + W_1 W_2) y = W_1 u$$

$$W = \frac{y}{u} = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2}$$

Структурные схемы: Встречно-параллельное



$$e = u - z$$

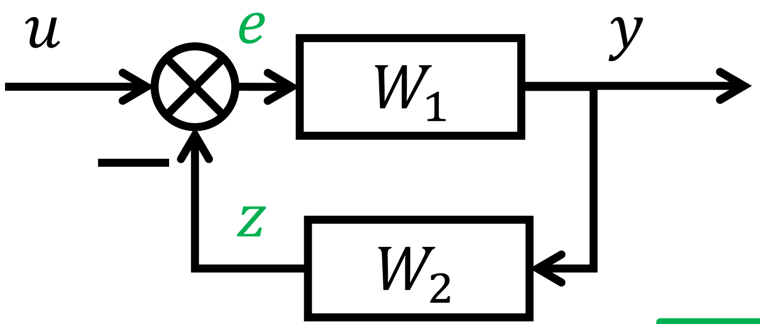
$$y = W_1 e = W_1 u - W_1 z = W_1 u - W_1 W_2 y$$

$$(1 + W_1 W_2) y = W_1 u$$

$$W = \frac{y}{u} = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2} \boxed{= \frac{R_1 Q_2}{Q_1 Q_2 + R_1 R_2}}$$

Все нули и полюса перемешались

Структурные схемы: Встречно-параллельное



Вводится в рассмотрение ошибка e

$$e = u - z$$

$$y = W_1 e = W_1 u - W_1 z = W_1 u - W_1 W_2 y$$

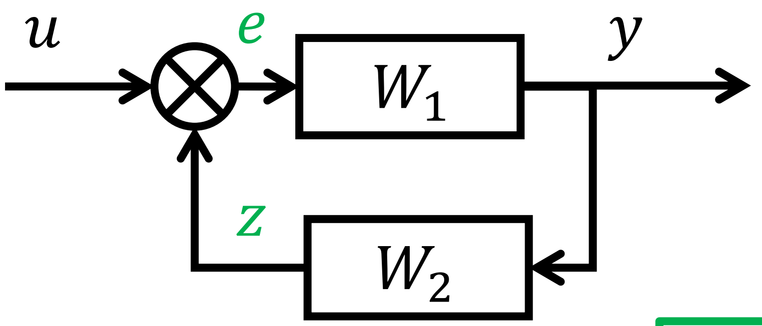
$$(1 + W_1 W_2) y = W_1 u$$

$$W_{u\to y} = \frac{y}{u} = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2}$$

$$W_{u\to e} = \frac{e}{u} = \frac{1}{1 + W_1 W_2}$$

Часто также рассматривается ПФ по ошибке

Структурные схемы: Встречно-параллельное



Вводится в рассмотрение ошибка e

$$e = u + z$$

$$y = W_1 e = W_1 u + W_1 z = W_1 u + W_1 W_2 y$$

$$(1 - W_1 W_2) y = W_1 u$$

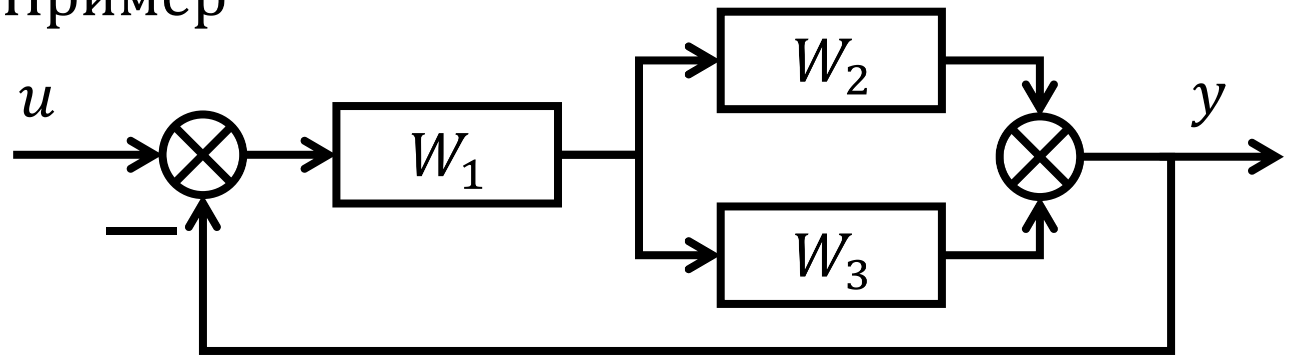
$$W_{u\to y} = \frac{y}{u} = \frac{W_1}{1 - W_1 W_2} \qquad W_{u\to e} = \frac{e}{u} = \frac{1}{1 - W_1 W_2}$$

Если обратная связь не отрицательная, а положительная

Положительная ОС характерна не для систем управления, а для генераторов

Структурные схемы

Пример

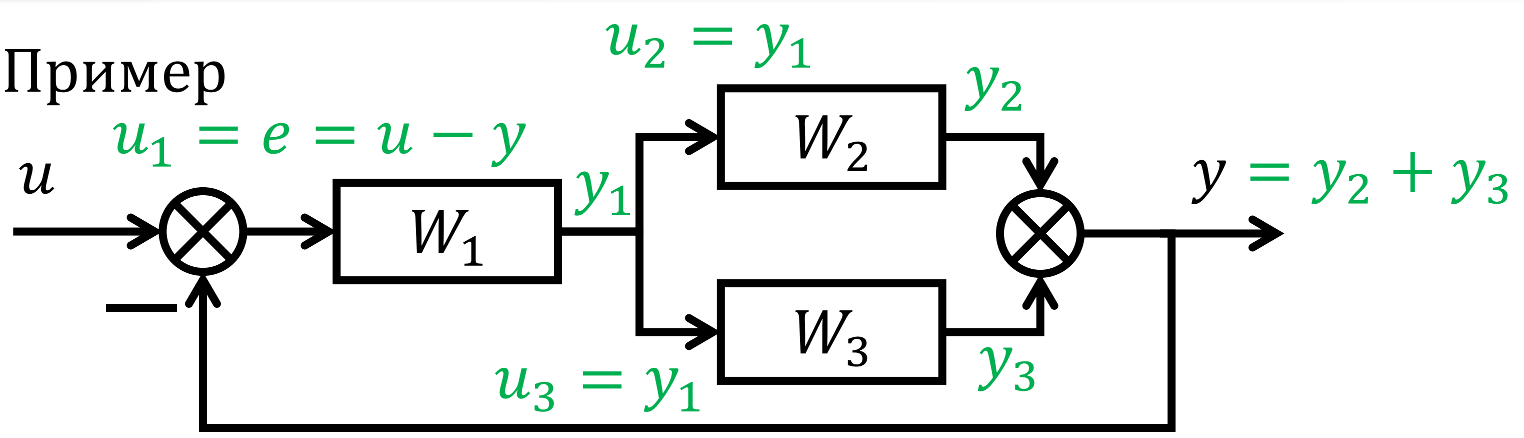


$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

$W(p) = ?$

Структурные схемы

Пример

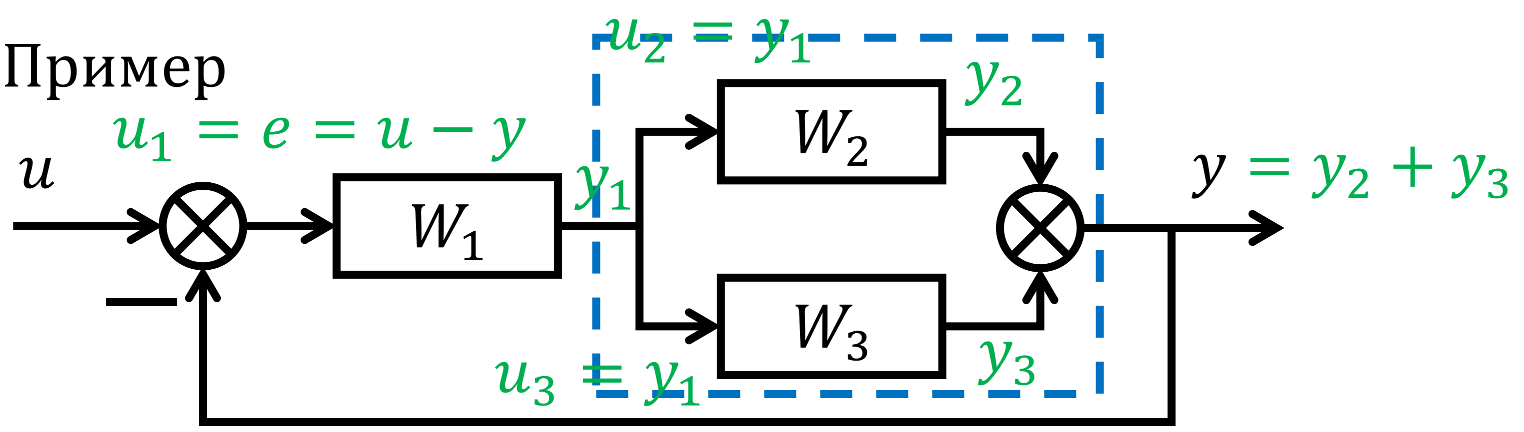


$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

$$W(p) = ?$$

Структурные схемы

Пример

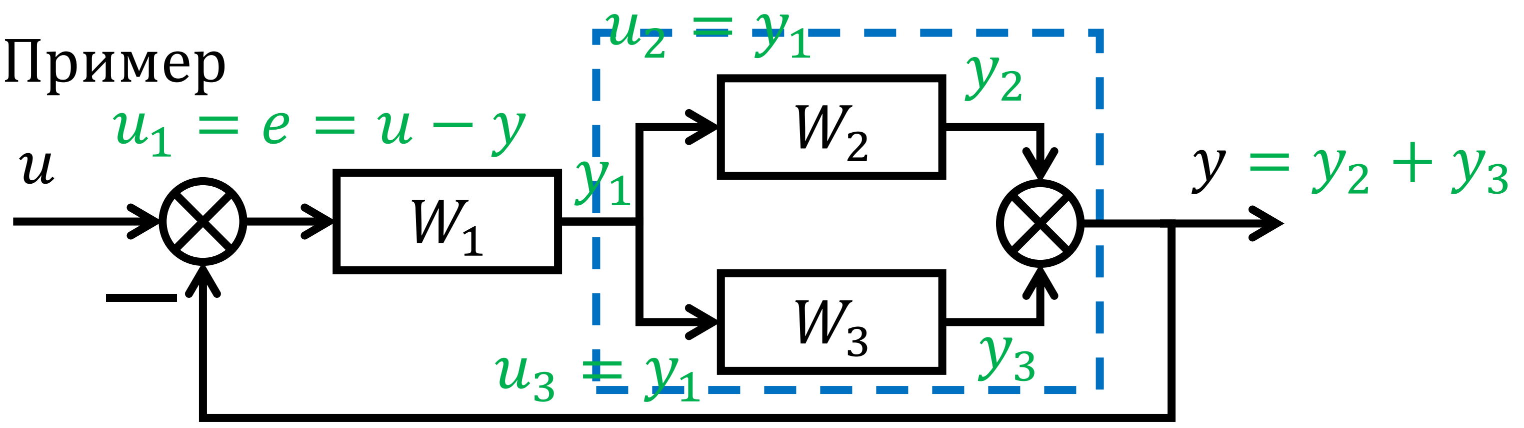


$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

$W(p) = ?$

Структурные схемы

Пример



Параллельное

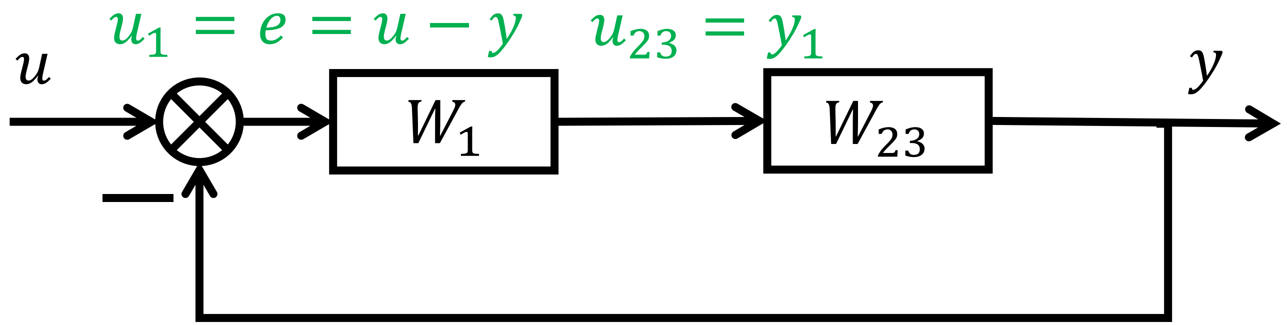
$$W_{23}(p) = W_2(p) + W_3(p) = \\ = \frac{3p+4}{p(p+2)}$$

$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

$$W(p) = ?$$

Структурные схемы

Пример



Параллельное

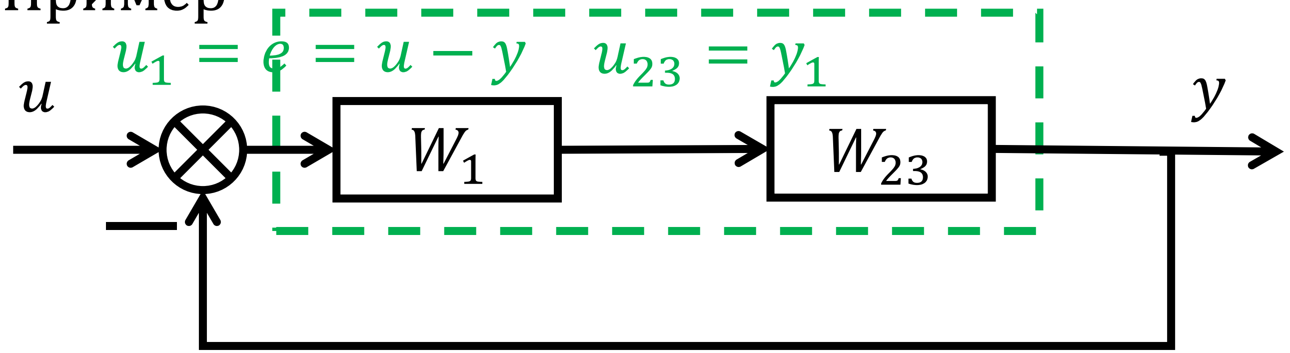
$$W_{23}(p) = W_2(p) + W_3(p) = \\ = \frac{3p + 4}{p(p + 2)}$$

$$W_1(p) = \frac{p}{p + 1}, W_2(p) = \frac{1}{p + 2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

$$W(p) = ?$$

Структурные схемы

Пример



$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

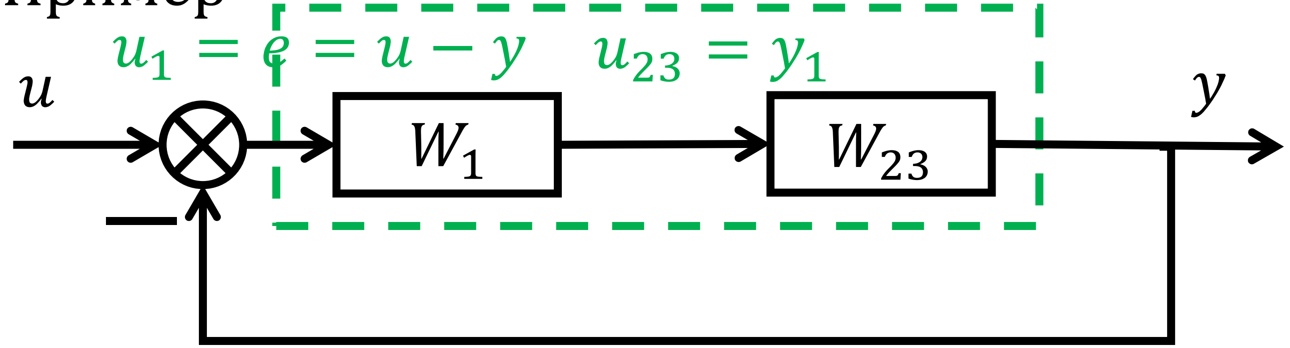
$W(p) = ?$

Параллельное

$$W_{23}(p) = W_2(p) + W_3(p) = \\ = \frac{3p+4}{p(p+2)}$$

Структурные схемы

Пример



$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

$W(p) = ?$

Параллельное

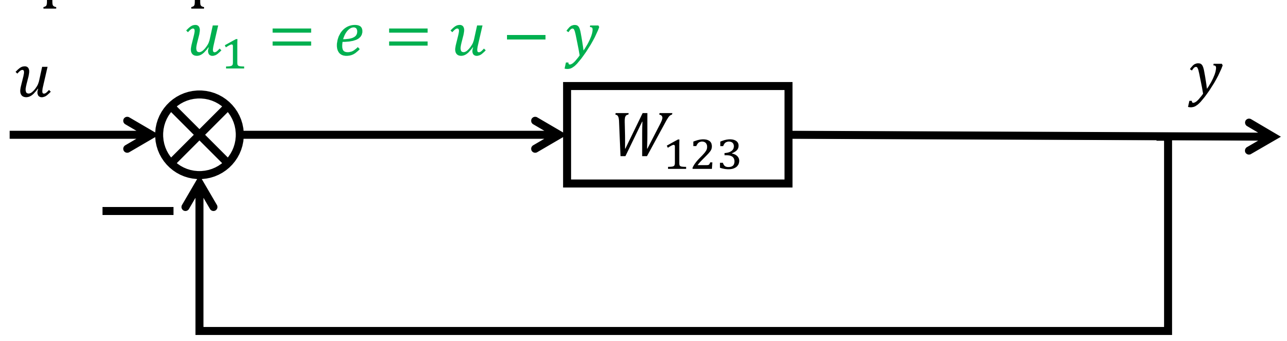
$$W_{23}(p) = W_2(p) + W_3(p) = \\ = \frac{3p+4}{p(p+2)}$$

Последовательное

$$W_{123}(p) = W_1(p)W_{23}(p) = \\ = \frac{3p+4}{(p+1)(p+2)}$$

Структурные схемы

Пример



$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

$W(p) = ?$

Параллельное

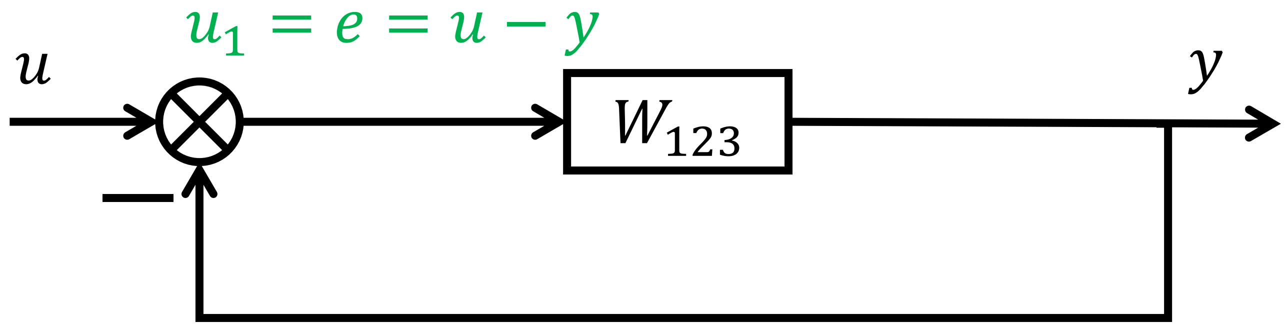
$$W_{23}(p) = W_2(p) + W_3(p) = \\ = \frac{3p+4}{p(p+2)}$$

Последовательное

$$W_{123}(p) = W_1(p)W_{23}(p) = \\ = \frac{3p+4}{(p+1)(p+2)}$$

Структурные схемы

Пример



$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

$$W(p) = ?$$

Параллельное

$$W_{23}(p) = W_2(p) + W_3(p) = \\ = \frac{3p+4}{p(p+2)}$$

Последовательное

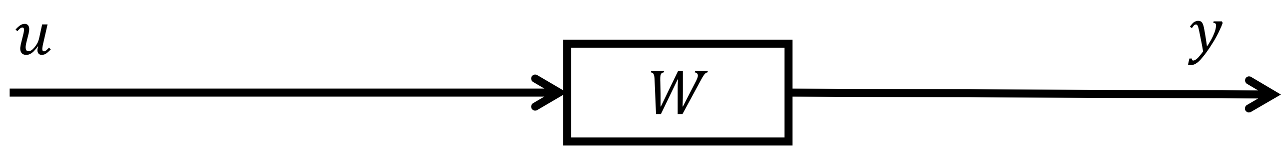
$$W_{123}(p) = W_1(p) W_{23}(p) = \\ = \frac{3p+4}{(p+1)(p+2)}$$

Встречно-параллельное

$$W(p) = \frac{W_{123}(p)}{1 + W_{123}(p)} = \frac{3p+4}{p^2+6p+6}$$

Структурные схемы

Пример



$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

$W(p) = ?$

Параллельное

$$W_{23}(p) = W_2(p) + W_3(p) = \\ = \frac{3p+4}{p(p+2)}$$

Последовательное

$$W_{123}(p) = W_1(p)W_{23}(p) = \\ = \frac{3p+4}{(p+1)(p+2)}$$

Встречно-параллельное

$$W(p) = \frac{W_{123}(p)}{1 + W_{123}(p)} = \frac{3p+4}{p^2+6p+6}$$

Структурные схемы

Пример

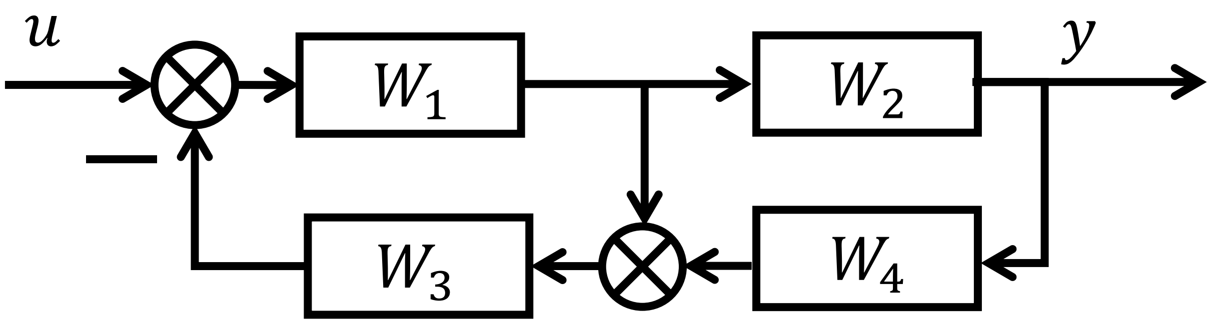
u y

$$W_1(p) = \frac{p}{p+}$$

$W(p) =?$

Но схемы бывают сложнее

Что делать?



Параллельное

$$W_{23}(p) = W_2(p) + W_3(p) =$$
$$= \frac{3p+4}{p(p+2)}$$

ледовательное

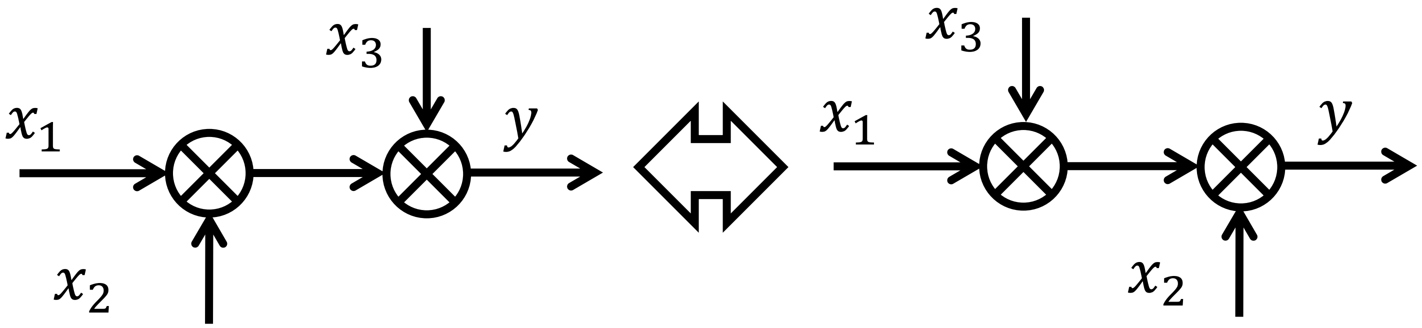
$$) = W_1(p)W_{23}(p) =$$
$$\frac{3p+4}{(p+1)(p+2)}$$

нно-параллельное

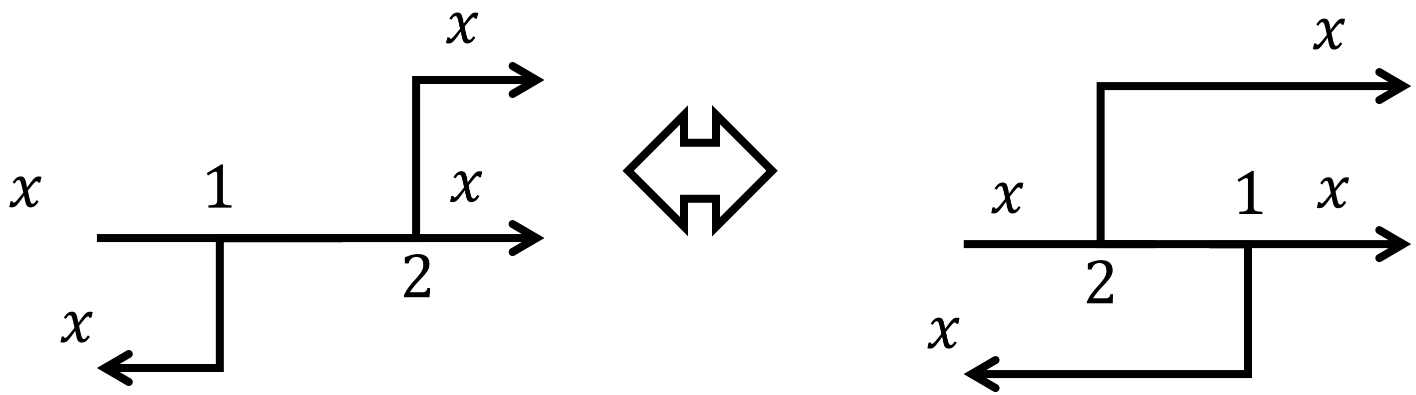
$$W(p) = \frac{W_{123}(p)}{1 + W_{123}(p)} = \frac{3p+4}{p^2+6p+6}$$

Преобразование структурных схем

1. Перенос узла суммирования через узел

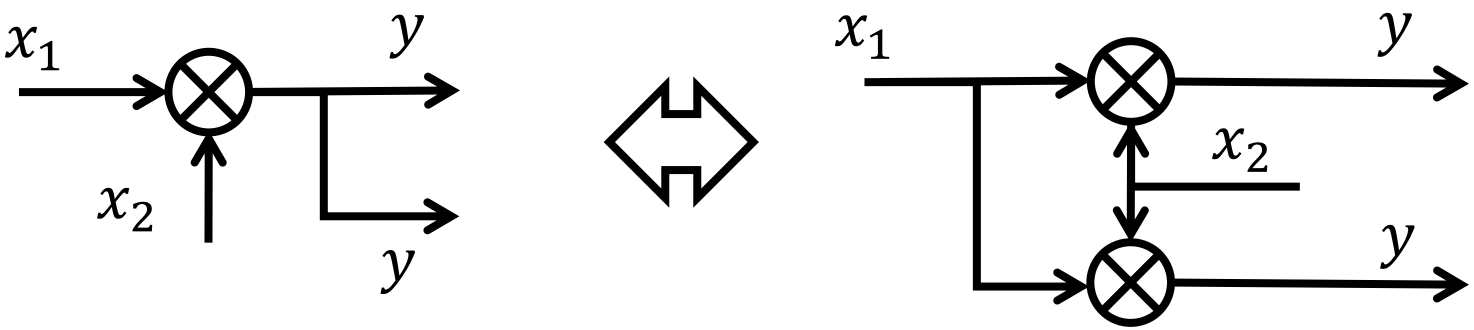


2. Перенос точки ветвления через точку ветвления

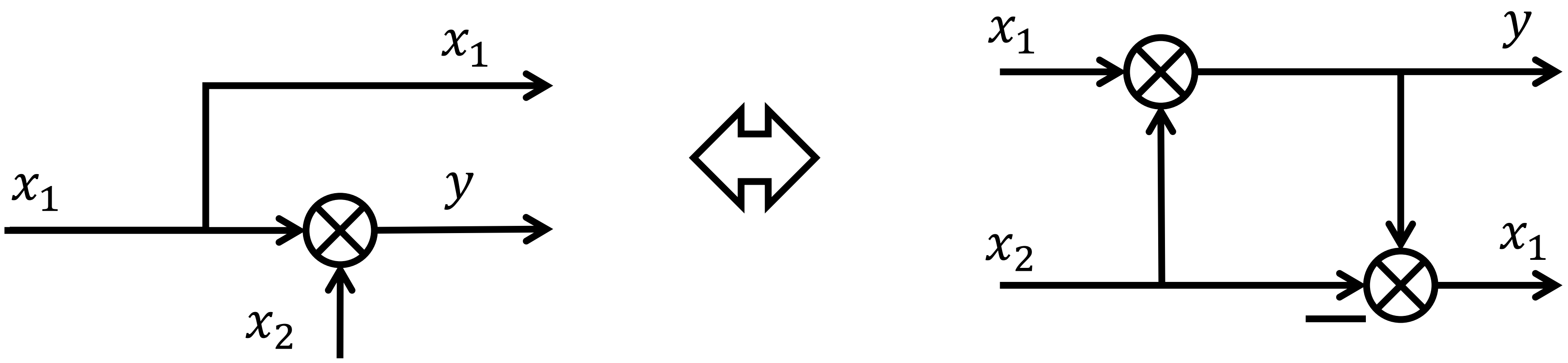


Преобразование структурных схем

3. Перенос узла суммирования через точку ветвления

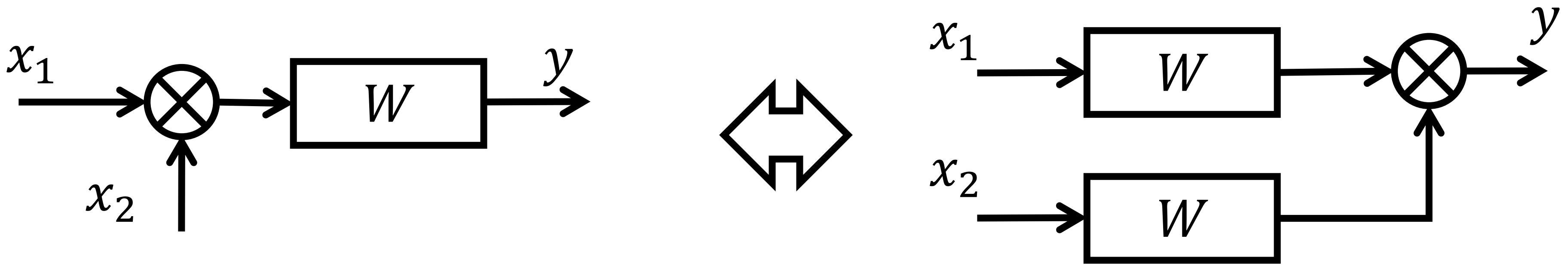


4. Перенос точки ветвления через узел суммирования

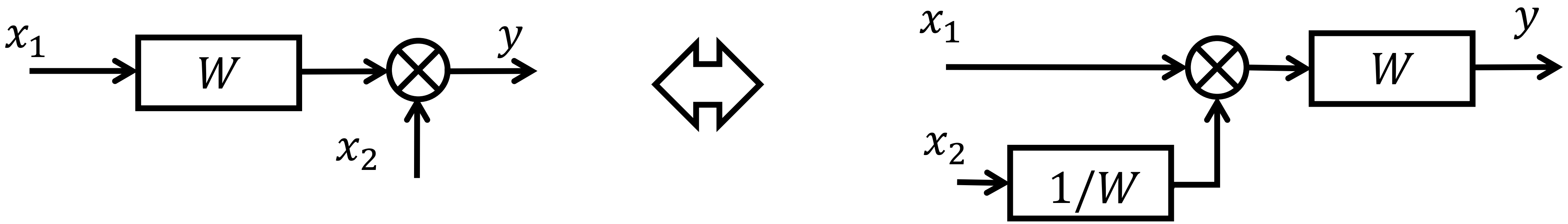


Преобразование структурных схем

5. Перенос узла суммирования через звено по ходу сигнала

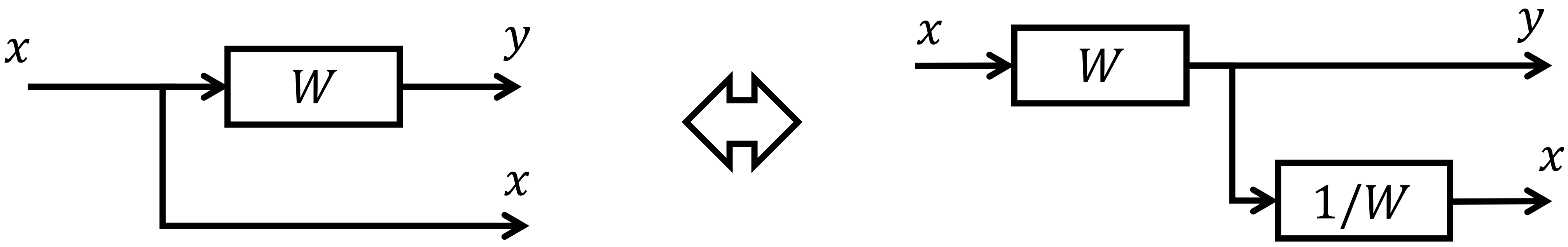


6. Перенос узла суммирования через звено против хода сигнала

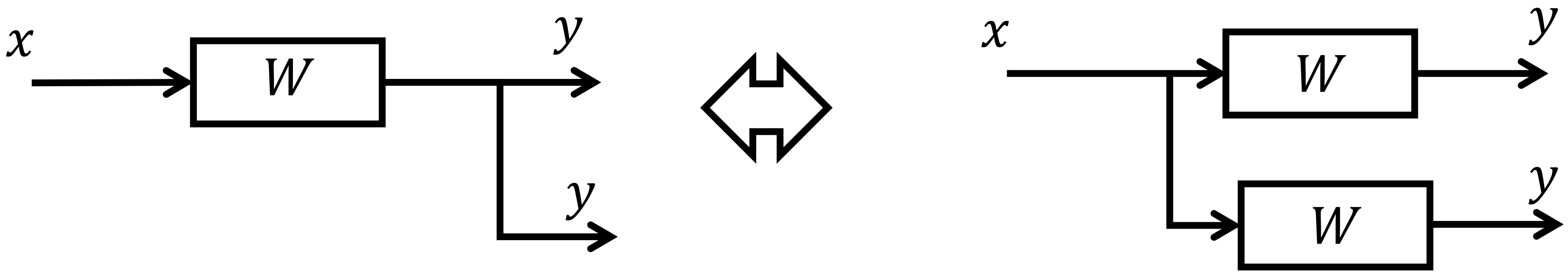


Преобразование структурных схем

7. Перенос точки ветвления через звено по ходу сигнала

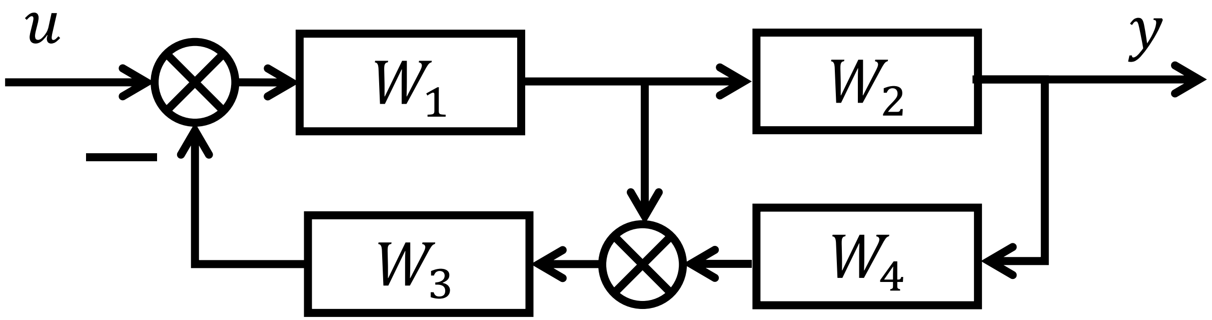


8. Перенос точки ветвления через звено против хода сигнала



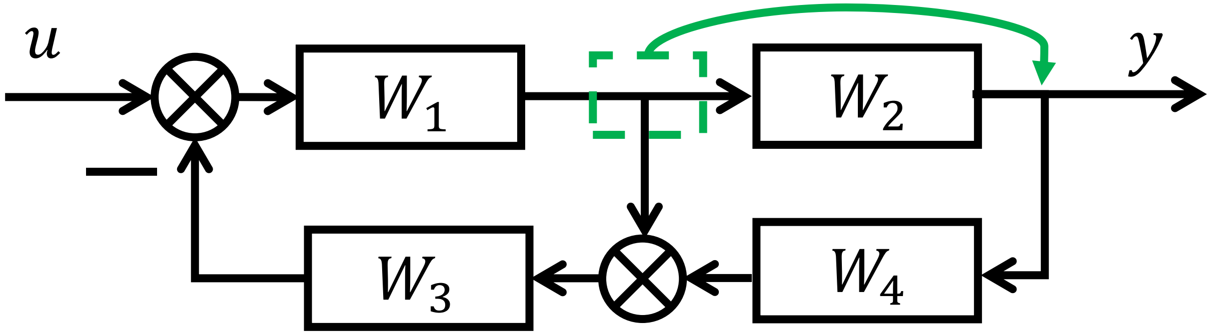
Преобразование структурных схем

Пример:



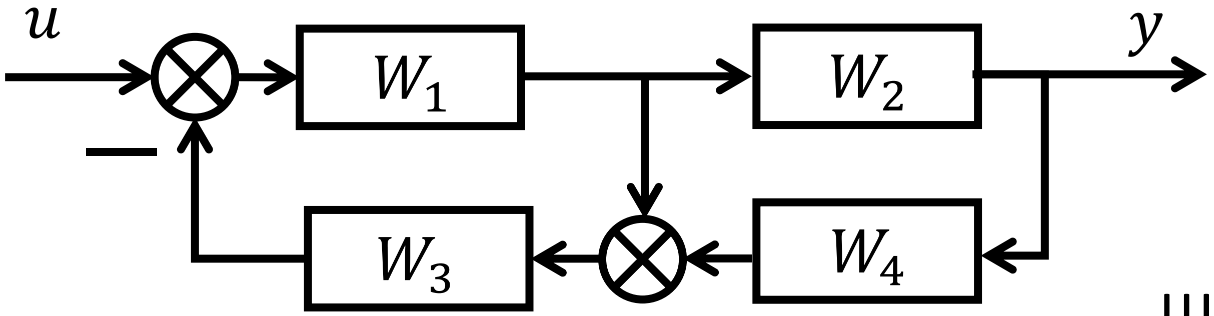
Преобразование структурных схем

Пример:

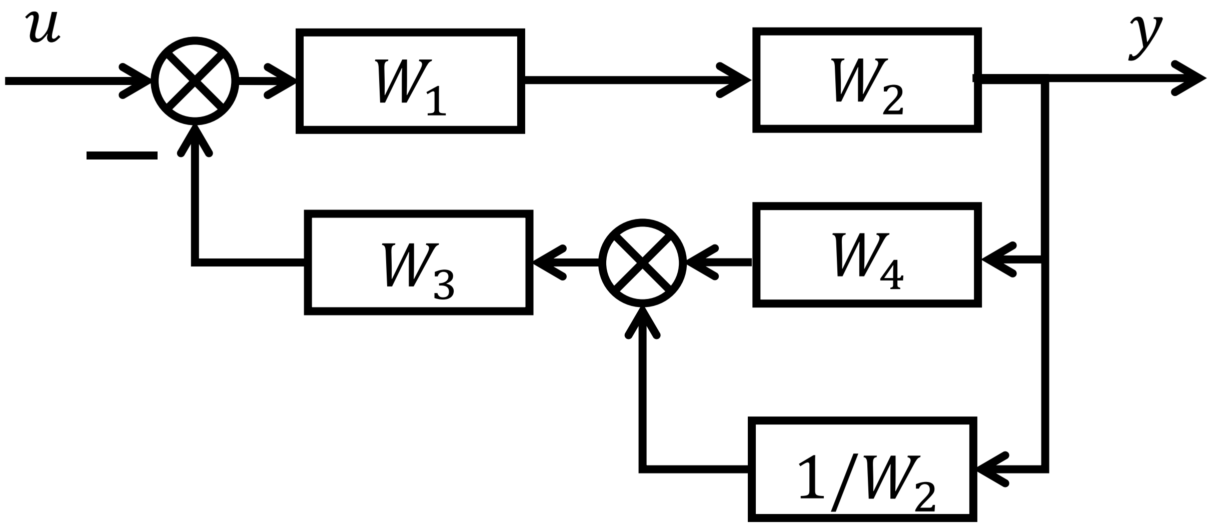


Преобразование структурных схем

Пример:

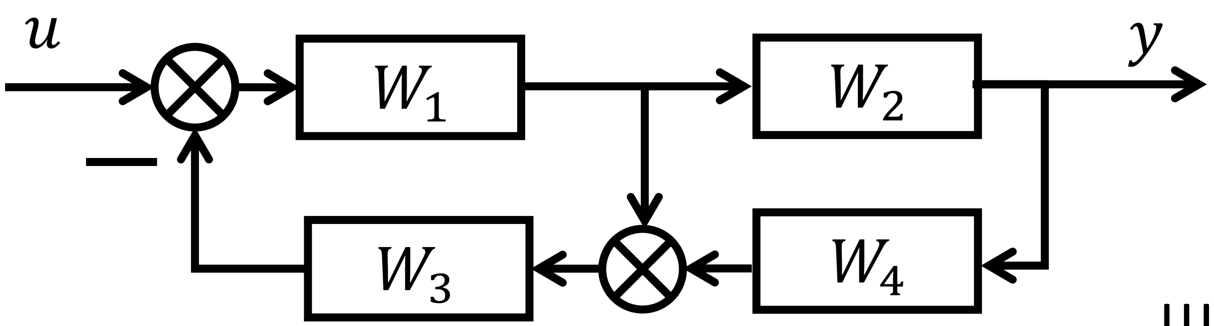


Шаг 1:

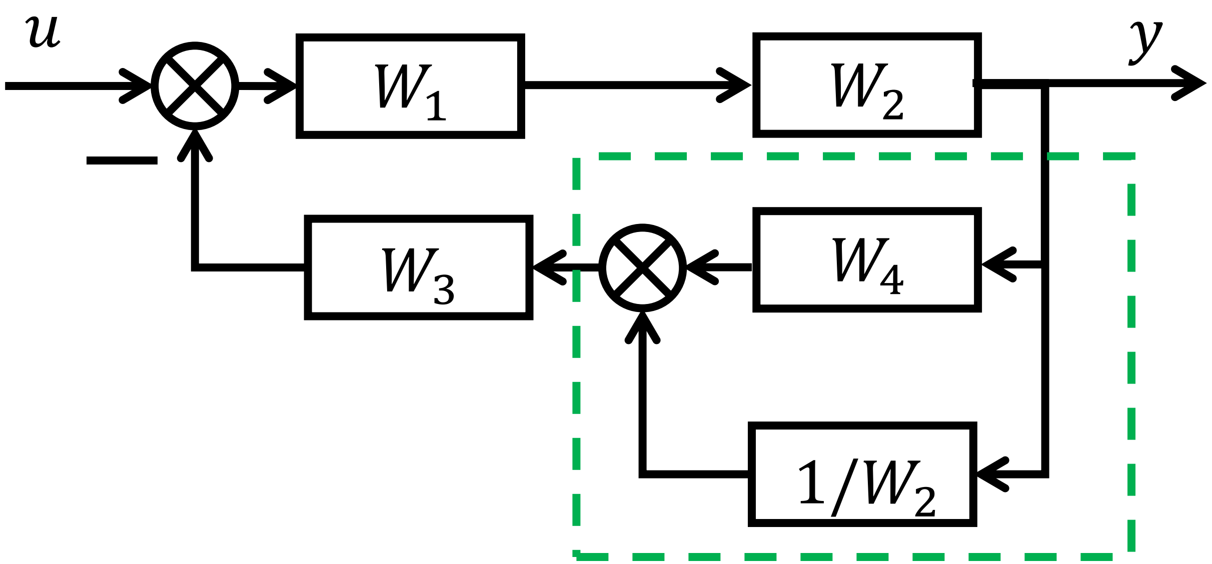


Преобразование структурных схем

Пример:

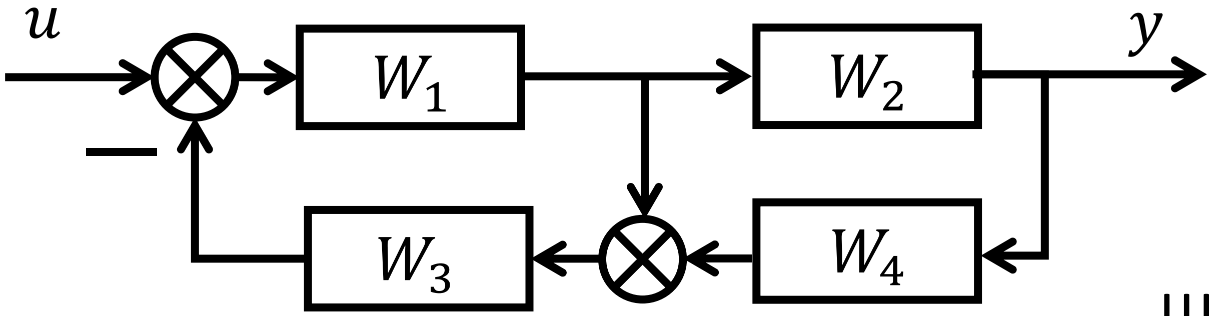


Шаг 1:

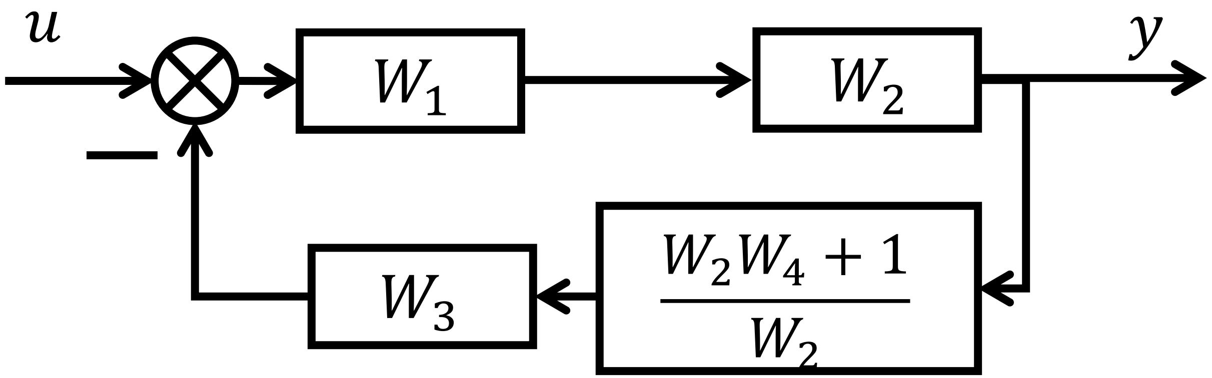


Преобразование структурных схем

Пример:

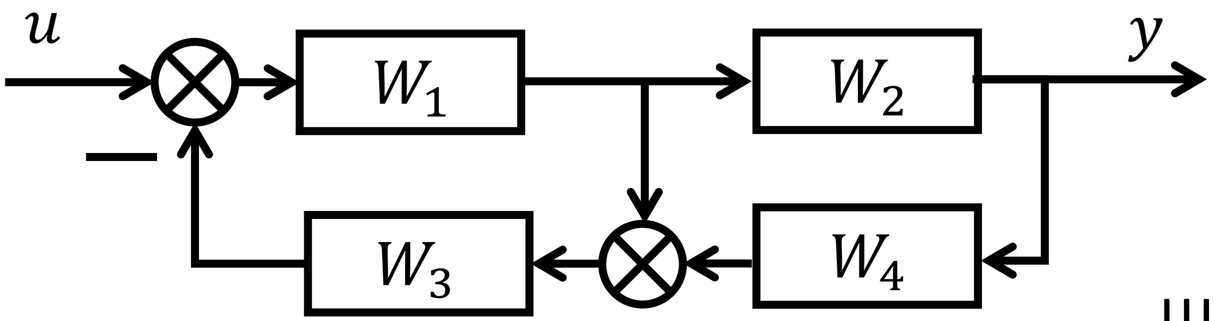


Шаг 2:

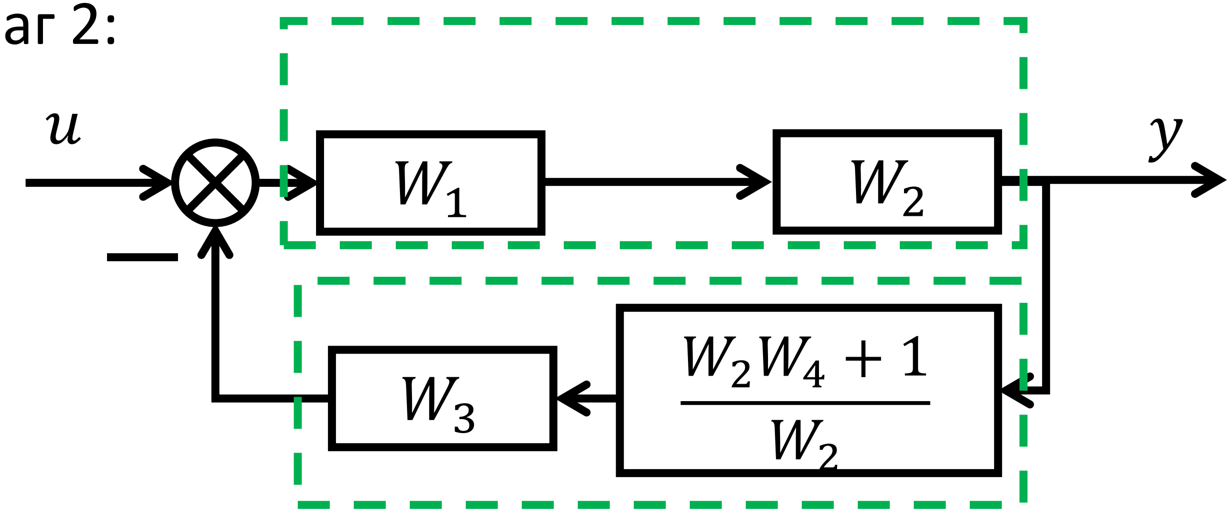


Преобразование структурных схем

Пример:

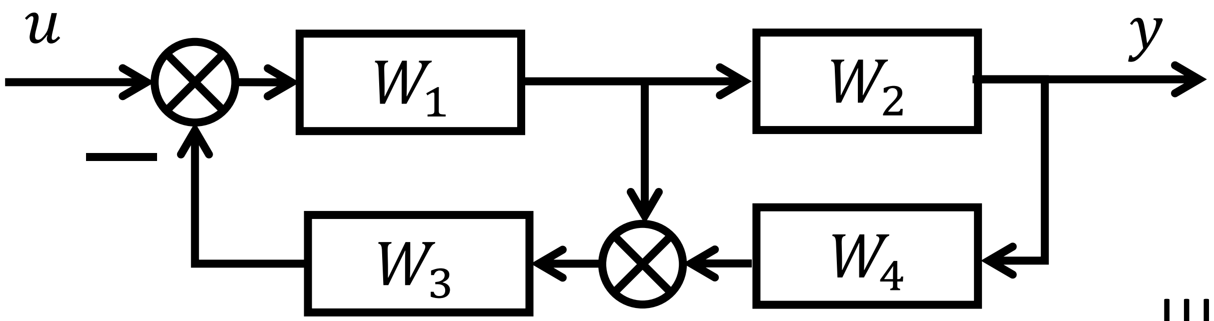


Шаг 2:

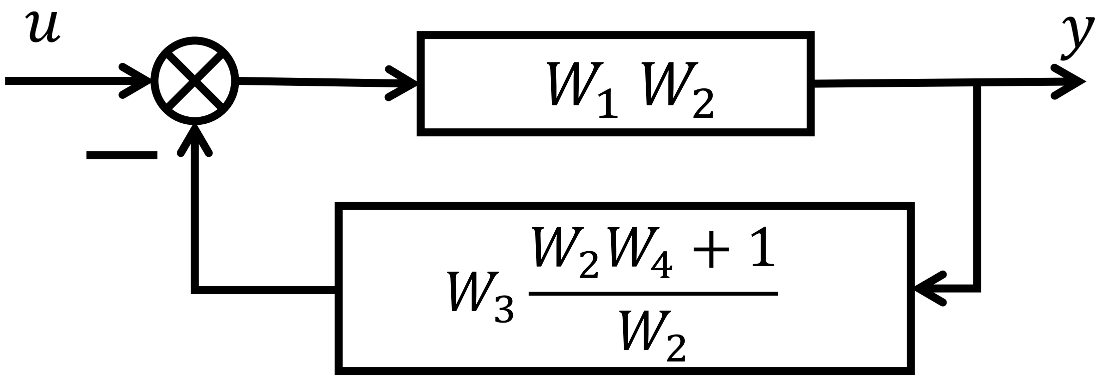


Преобразование структурных схем

Пример:

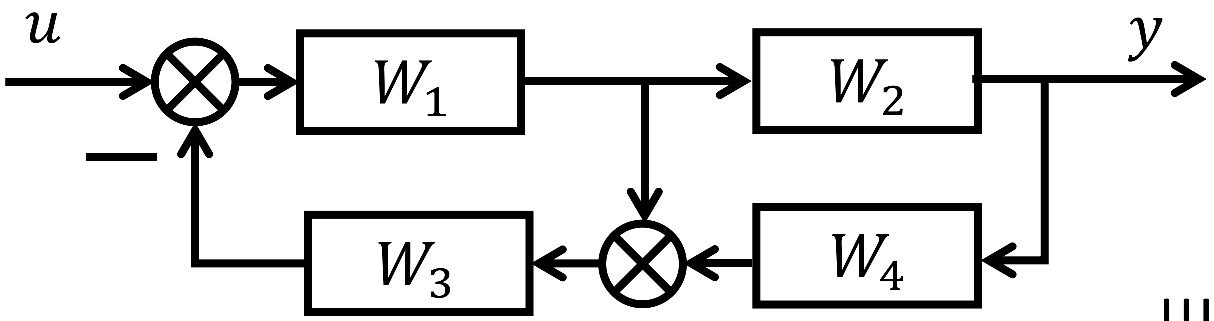


Шаг 3:

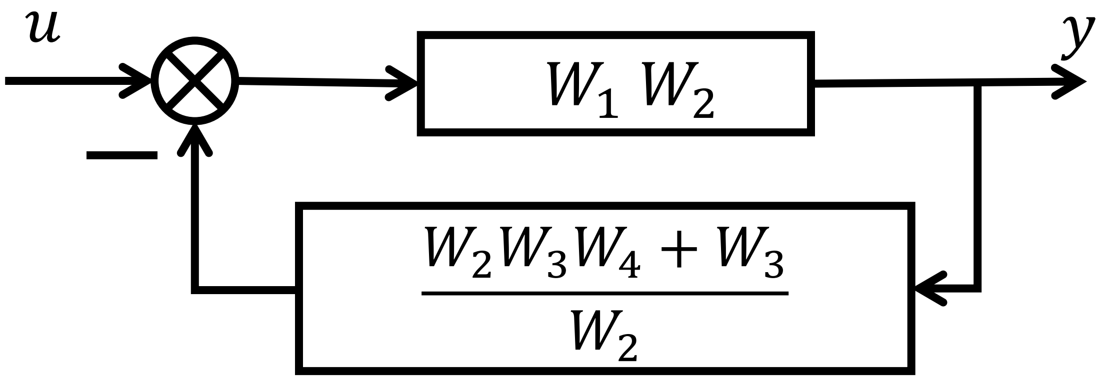


Преобразование структурных схем

Пример:

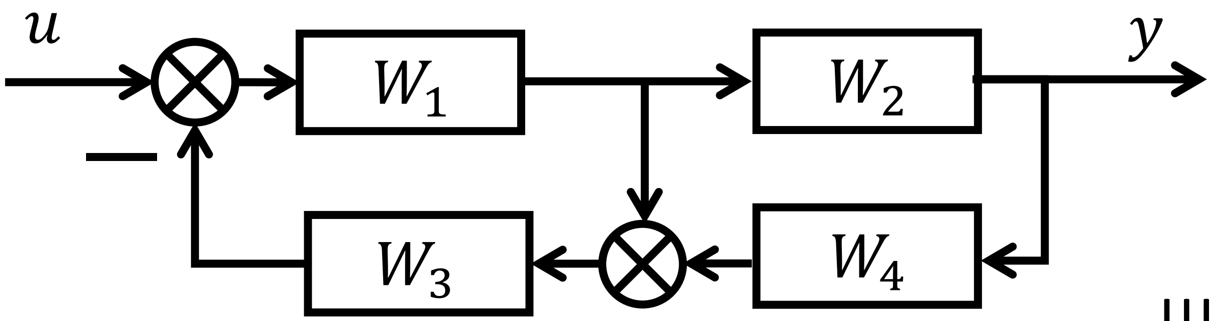


Шаг 3:

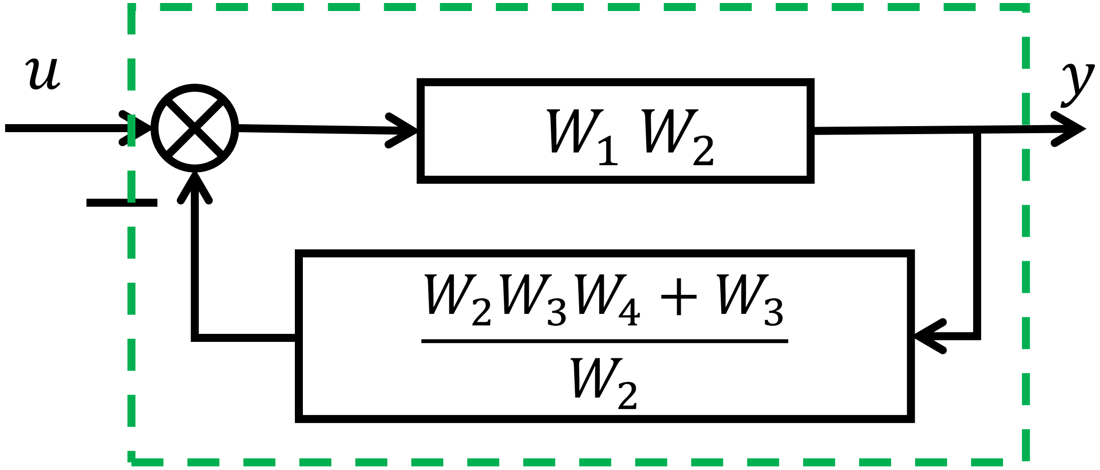


Преобразование структурных схем

Пример:

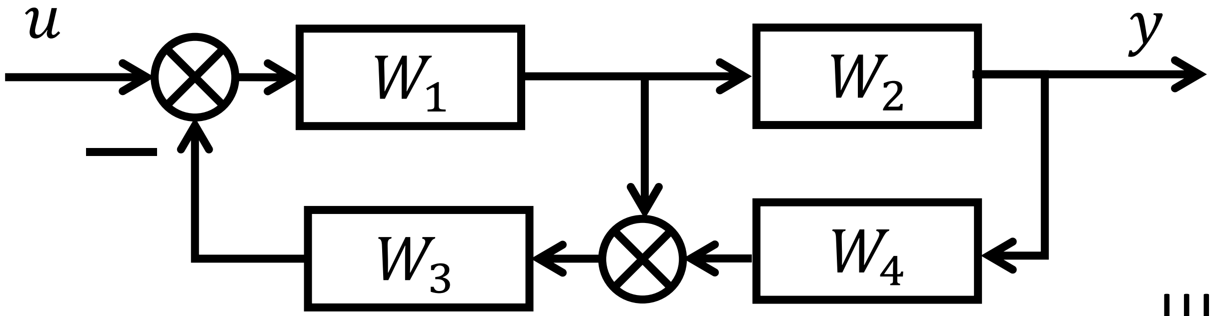


Шаг 3:



Преобразование структурных схем

Пример:

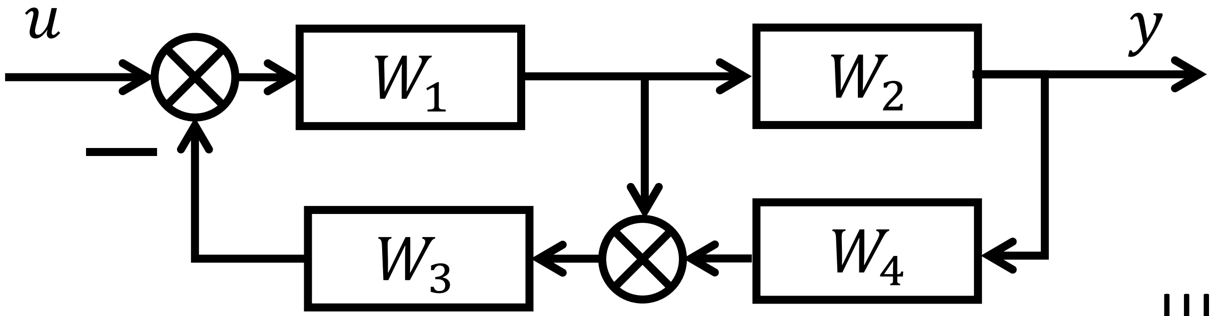


Шаг 4:

$$W = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2 \frac{W_2 W_3 W_4 + W_3}{W_2}}$$

Преобразование структурных схем

Пример:

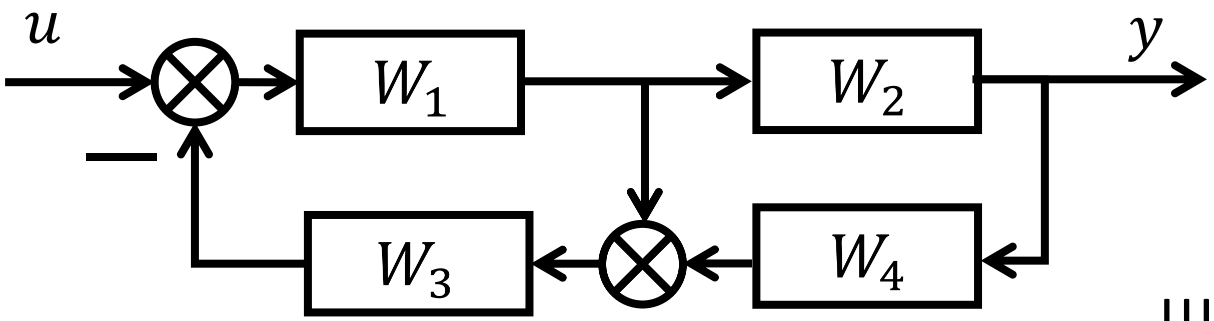


Шаг 4:

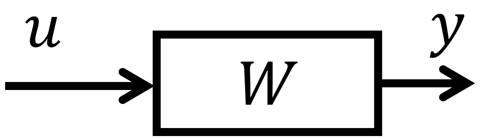
$$W = \frac{W_1\ W_2 W_2}{1 + W_1 W_2 [W_2 W_3 W_4 + W_3]}$$

Преобразование структурных схем

Пример:



Шаг 4:



$$W = \frac{W_1\ W_2 W_2}{W_2 + W_1 W_2 W_2 W_3 W_4 + W_1\ W_2 W_3}$$

Структурные схемы: элементарные и типовые звенья

Элементарные звенья – звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или дробей, т.е. элементарное звено может быть описано либо одним вещественным нулём, либо одним вещественным полюсом, либо парой комплексно-сопряжённых нулей, либо парой комплексно-сопряжённых полюсов.

Типовые динамические звенья – элемент системы, который описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

Структурные схемы: элементарные и типовые звенья

Элементарные звенья – звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или дробей, т.е. элементарное звено может быть описано либо одним вещественным нулём, либо одним вещественным полюсом, либо парой комплексно-сопряжённых нулей, либо парой комплексно-сопряжённых полюсов.

Типовые динамические звенья – элемент системы, который описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

А в чем существенная разница?
Почему два понятия?

Структурные схемы: элементарные и типовые звенья

Элементарные звенья – звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или дробей, т.е. элементарное звено может быть описано либо одним вещественным нулём, либо одним вещественным полюсом, либо парой комплексно-сопряжённых нулей, либо парой комплексно-сопряжённых полюсов.

Больше математическое, формулировка отталкивается от полюсов и нулей

Типовые динамические звенья – элемент системы, который описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

Инженерно-конструкторское, существуют таблицы типовых звеньев, для которых посчитаны характеристики и из которых удобно как из конструктора синтезировать системы

Структурные схемы: элементарные и типовые звенья

Элементарные звенья – звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или дробей, т.е. элементарное звено может быть описано либо одним вещественным нулём, либо одним вещественным полюсом, либо парой комплексно-сопряжённых нулей, либо парой комплексно-сопряжённых полюсов.

В основном соответствуют друг другу!

Типовые динамические звенья – элемент системы, который описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

…но из-за схожести в литературе можно столкнуться с путаницей, аналогичной разночтениям обозначений p и s.
Будьте готовы!

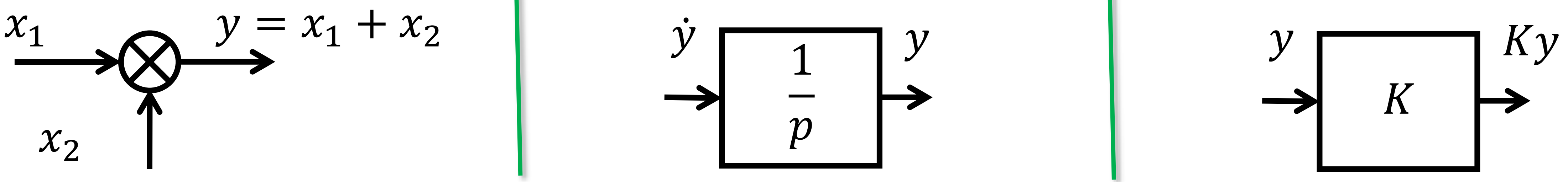
Структурные схемы: блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

1. Узел суммирования

2. «Интегратор»

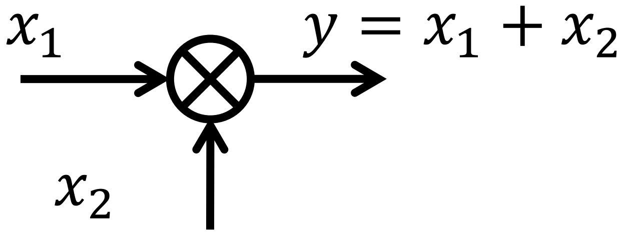
3. «Усилитель»



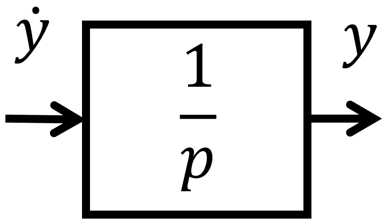
Структурные схемы:
блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

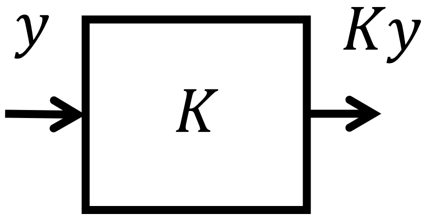
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



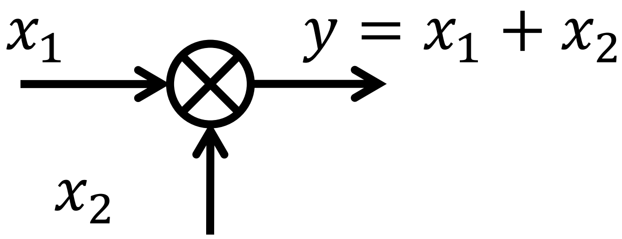
Пример

$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$

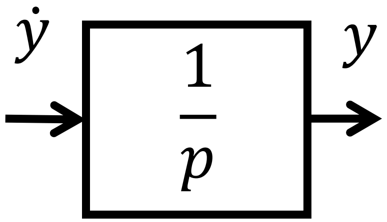
Структурные схемы:
блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

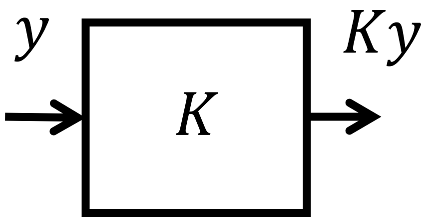
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$$

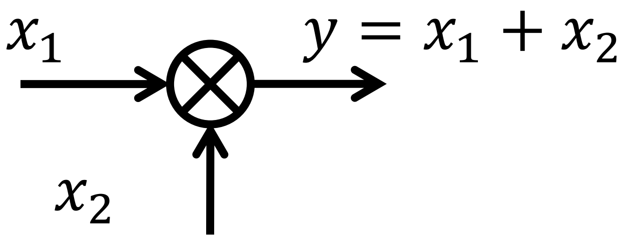
$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0 y$$

$$p^2[y] = u - a_1 p[y] - a_0 y$$

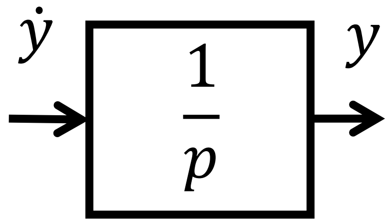
Структурные схемы: блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

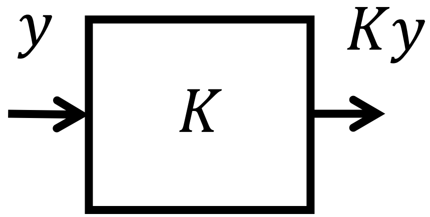
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



Пример

$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$

$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0 y$

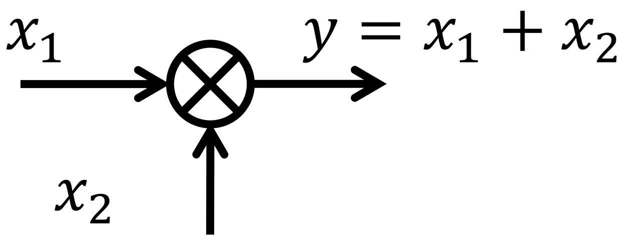
$p^2[y] = u - a_1 p[y] - a_0 y$

$y = \frac{1}{p^2}[u] - a_1\frac{1}{p}[y] - a_0\frac{1}{p^2}[y]$

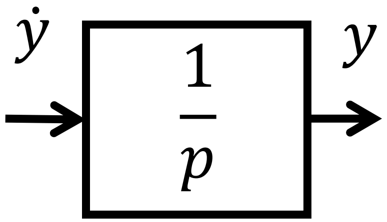
Структурные схемы: блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

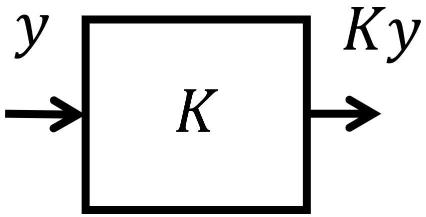
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



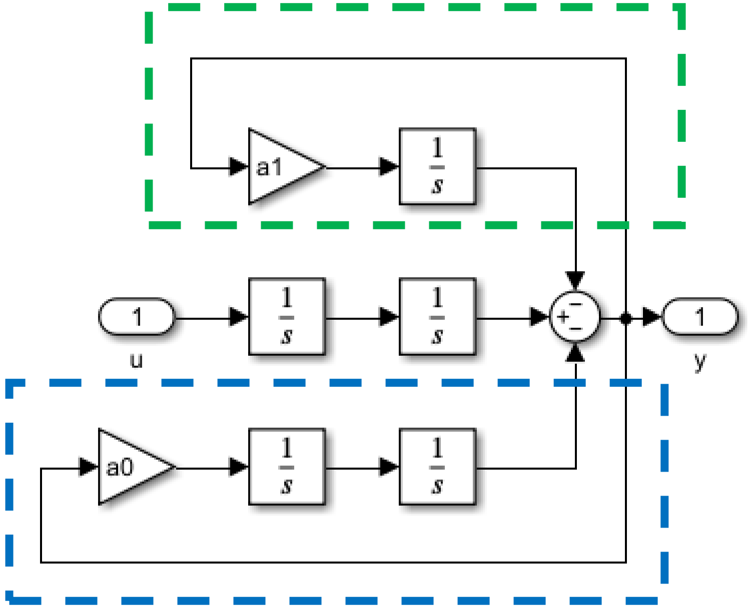
Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$$

$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0 y$$

$$p^2[y] = u - a_1 p[y] - a_0 y$$

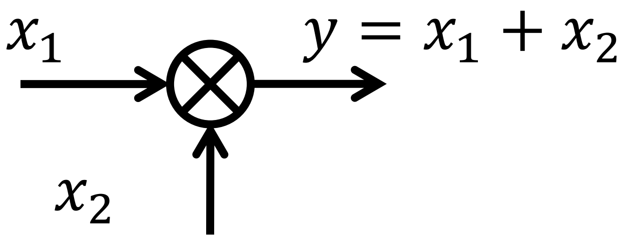
$$y = \frac{1}{p^2}[u] - a_1\frac{1}{p}[y] - a_0\frac{1}{p^2}[y]$$



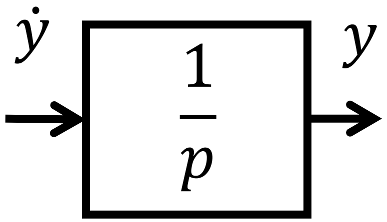
Структурные схемы: блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

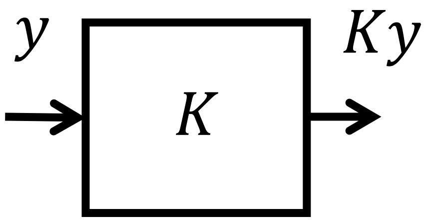
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$$

$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0 y$$

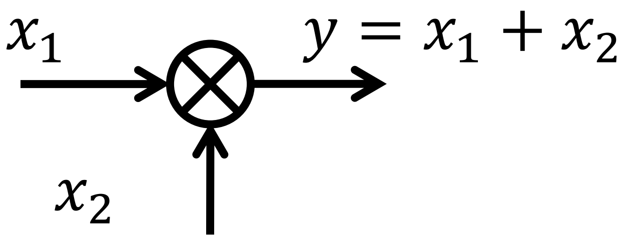
$$p^2[y] = u - a_1 p[y] - a_0 y$$

$$y = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p}[u] - a_1 y - a_0\frac{1}{p}[y]\right]$$

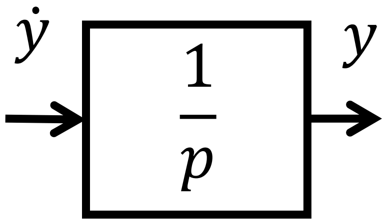
Структурные схемы: блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

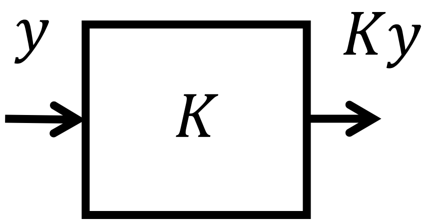
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



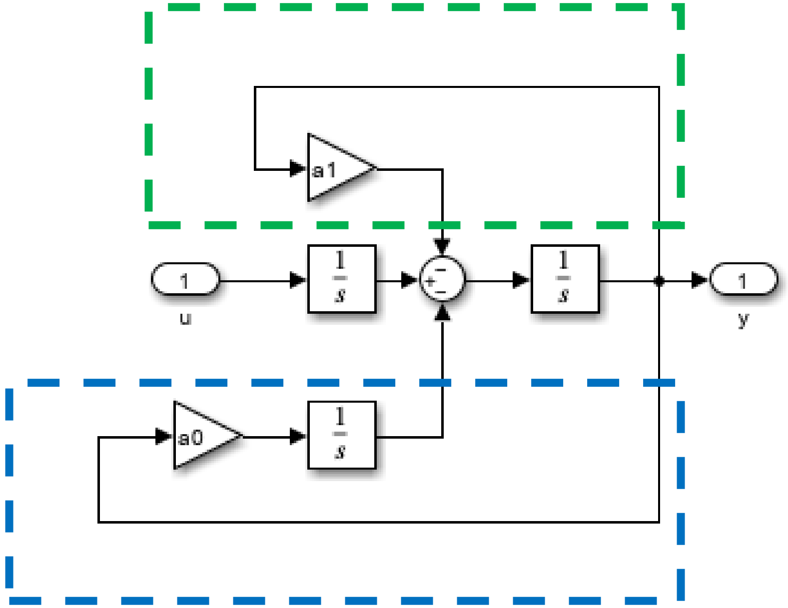
Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$$

$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0 y$$

$$p^2[y] = u - a_1 p[y] - a_0 y$$

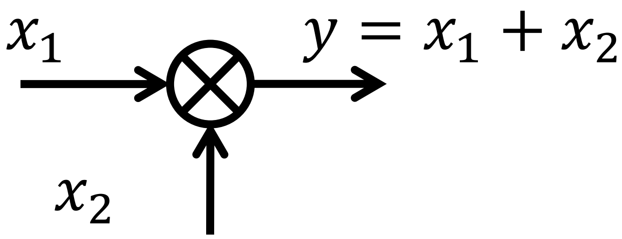
$$y = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p}[u] - a_1 y - a_0\frac{1}{p}[y]\right]$$



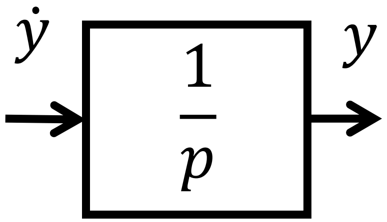
Структурные схемы: блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

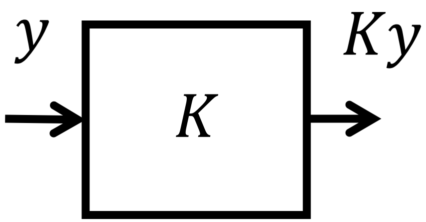
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$$

$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0 y$$

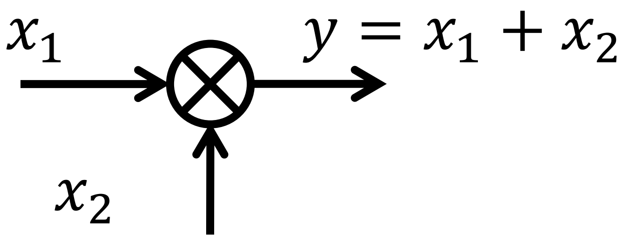
$$p^2[y] = u - a_1 p[y] - a_0 y$$

$$y = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p}[u - a_0 y] - a_1 y\right]$$

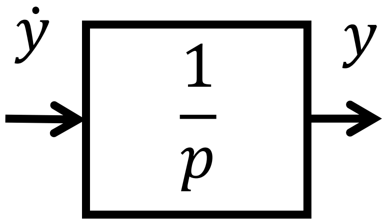
Структурные схемы: блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

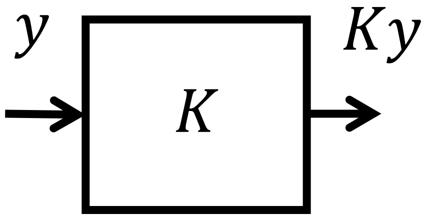
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



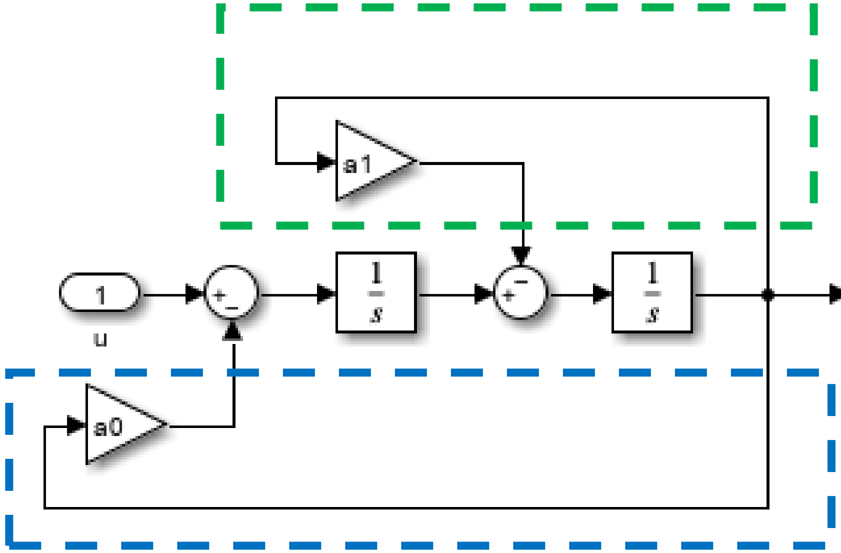
Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0y$$

$$p^2[y] = u - a_1p[y] - a_0y$$

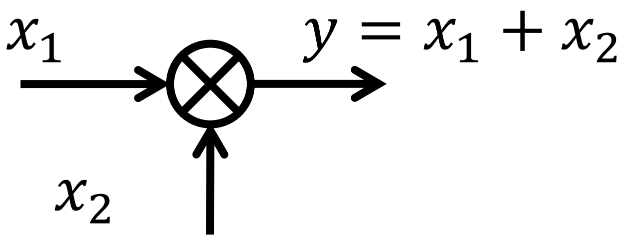
$$y = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p}[u - a_0y] - a_1y\right]$$



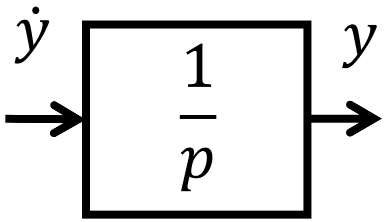
Структурные схемы: блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

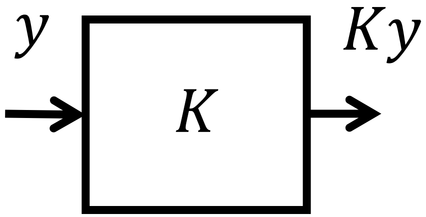
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



Пример

$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$

$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0 y$

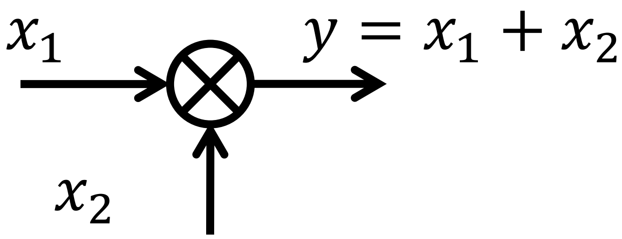
$p^2[y] = u - a_1 p[y] - a_0 y$

$y = \frac{1}{p^2}\left[u - a_0 y - a_1 p[y]\right]$

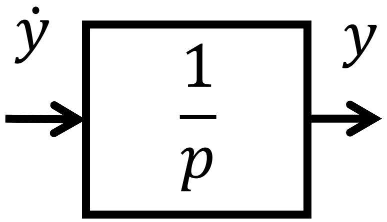
Структурные схемы:
блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

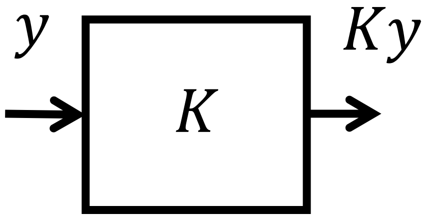
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



Пример

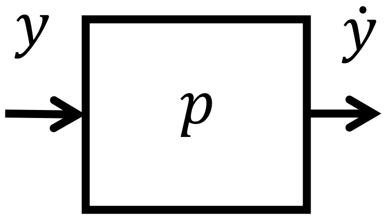
$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$$

$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0 y$$

$$p^2[y] = u - a_1 p[y] - a_0 y$$

$$y = \frac{1}{p^2}\left[u - a_0 y - a_1 p[y]\right]$$

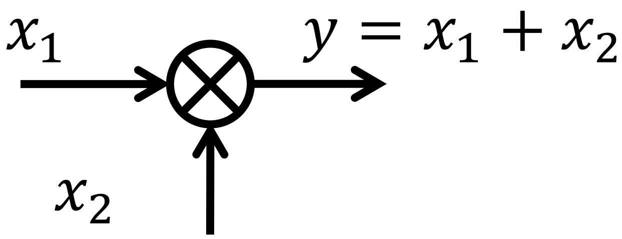
Физически нереализуемо?



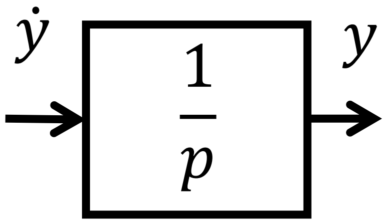
Структурные схемы: блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

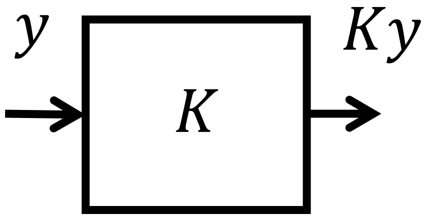
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$$

$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0 y$$

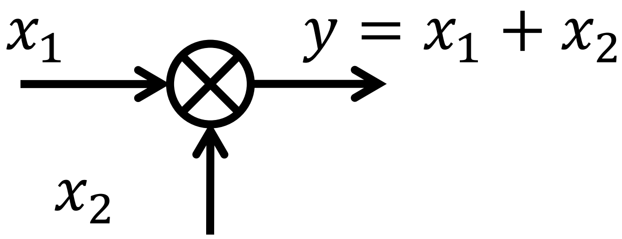
$$p^2[y] = u - a_1 p[y] - a_0 y$$

$$y = \frac{1}{p^2}[u - a_0 y - a_1\dot{y}]$$

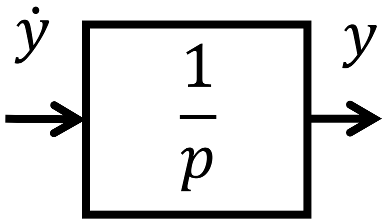
Структурные схемы:
блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

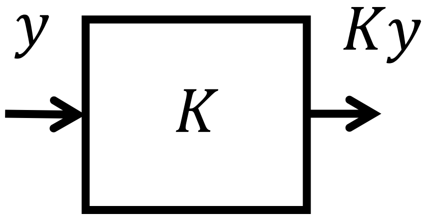
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



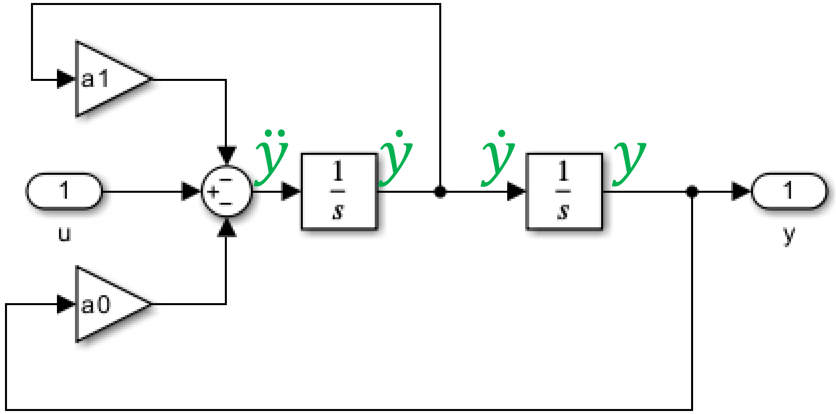
Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$$

$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0 y$$

$$p^2[y] = u - a_1 p[y] - a_0 y$$

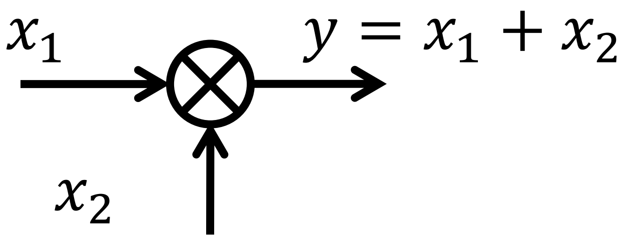
$$y = \frac{1}{p^2}[u - a_0 y - a_1\dot{y}]$$



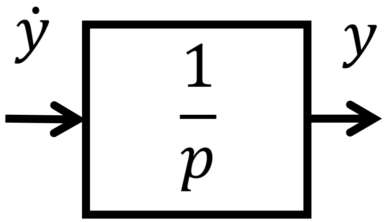
Структурные схемы: блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

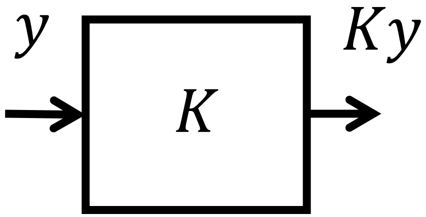
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



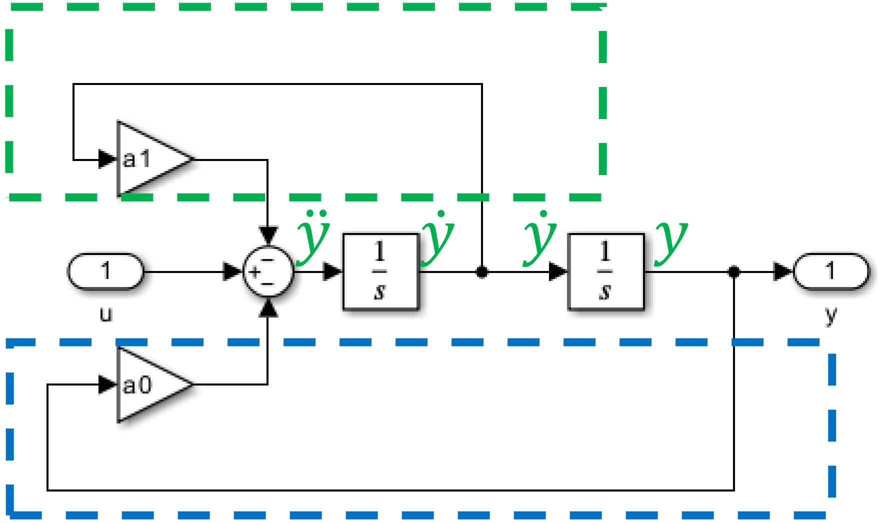
Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$$

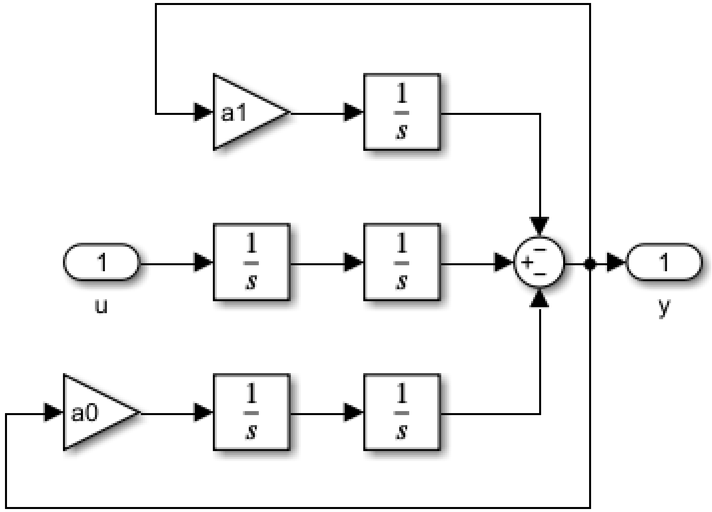
$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0 y$$

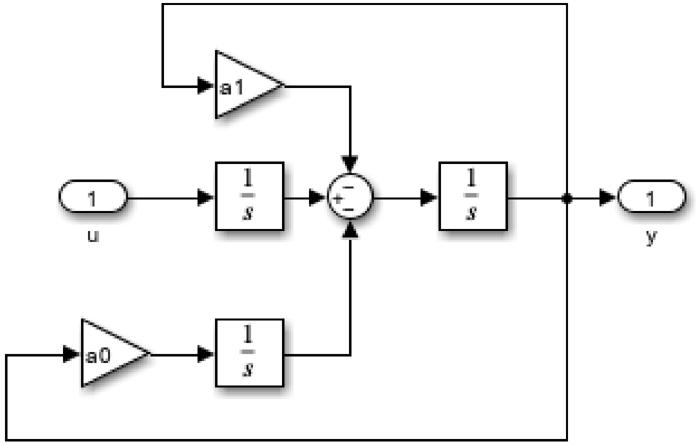
$$p^2[y] = u - a_1 p[y] - a_0 y$$

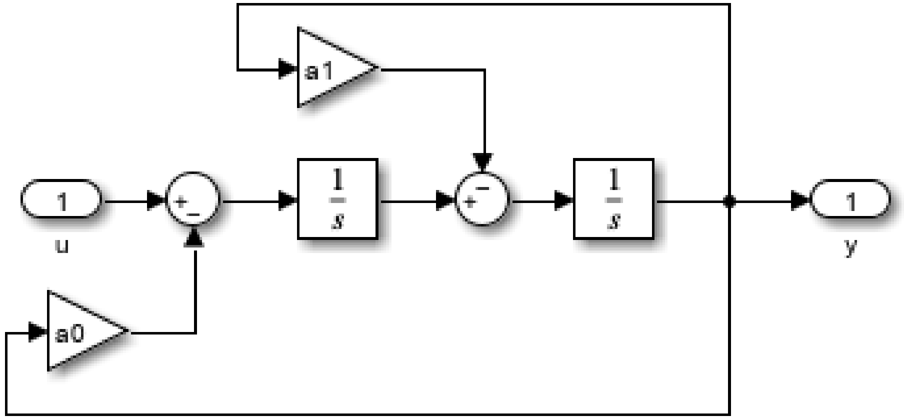
$$y = \frac{1}{p^2}[u - a_0 y - a_1\dot{y}]$$



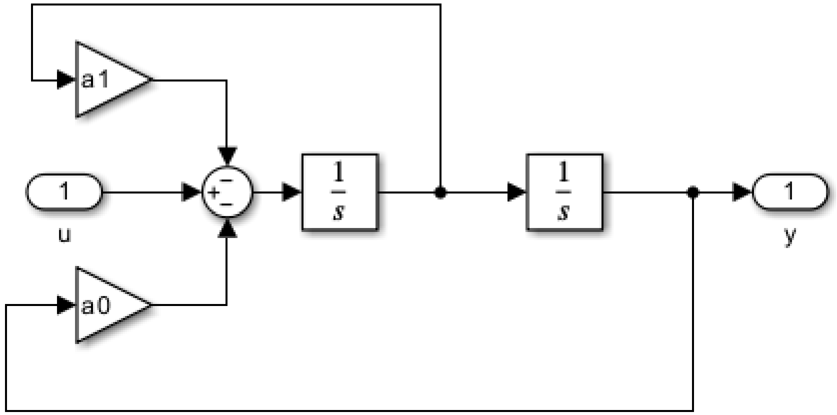
Структурные схемы: блоки элементарных операций



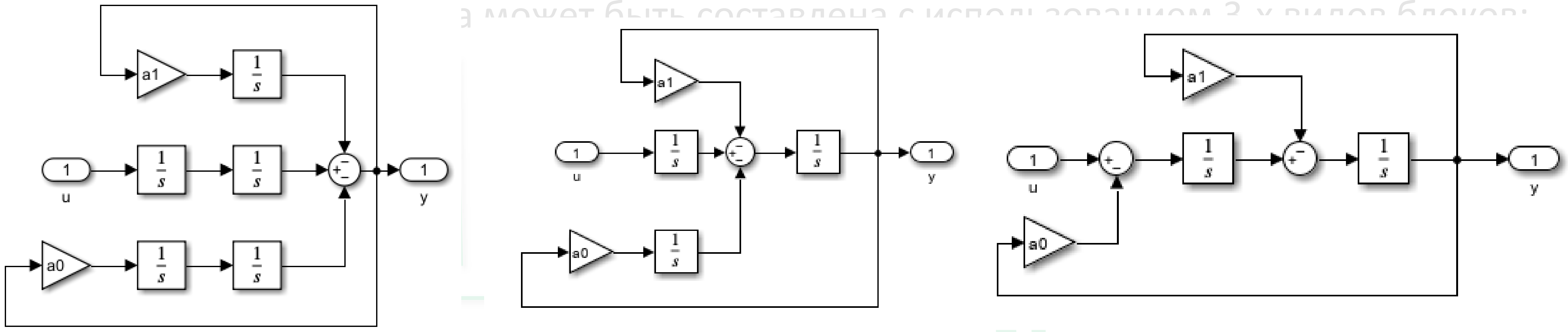




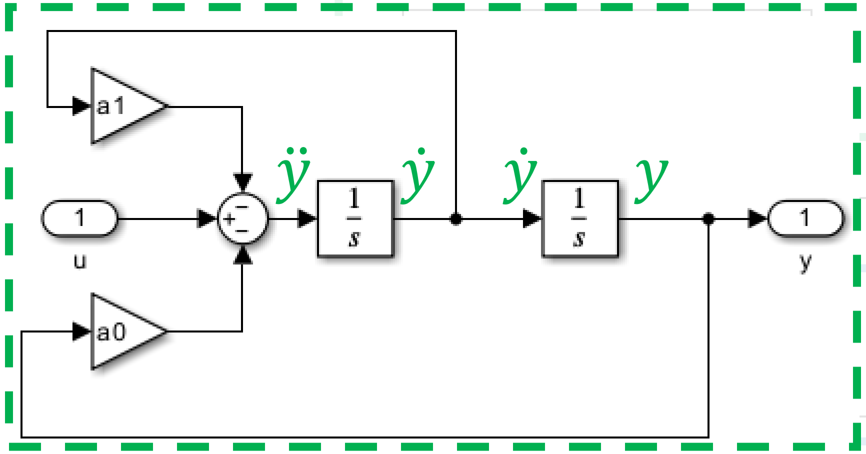
Начальные условия выставляются на интеграторах



Структурные схемы:
блоки элементарных операций



Начальные условия выставляются на интеграторах



Нет в явном виде интеграторов для $\dot{y}$ и y, н/у придется выставлять косвенно, пересчитывая

Канонические формы В-С-В

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \; W(p) = (C(Ip - A)^{-1}B + D)$$

A – матрица системы

B – матрица управления

C – матрица наблюдения

D – матрица связи

Канонические формы В-С-В

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow W(p) = \left(C(Ip - A)^{-1}B + D\right)$$

A – матрица системы

B – матрица управления

C – матрица наблюдения

D – матрица связи

Вспоминаем, как брать обратные матрицы – на первой лабораторной работе может выпасть задача на это

Канонические формы В-С-В

$$W(p) = d + \frac{b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

Диагональная

Управляемая

$$A_у = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & -a_2/a_n & \cdots & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix}, B_у = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_у = [b_0/a_n \quad b_1/a_n \quad b_2/a_n \quad \dots \quad b_{n-1}/a_n], D_у = [d]$$

Наблюдаемая

$$A_н = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0/a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1/a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2/a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix}, B_н = \begin{bmatrix} b_0/a_n \\ b_1/a_n \\ b_2/a_n \\ \vdots \\ b_{n-1}/a_n \end{bmatrix},$$

$$C_Н = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1], D_Н = [d]$$

Канонические формы В-С-В

$$W(p) = d + \frac{b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$

$$A_{\text{у}} = A_{\text{н}}^{\text{T}}, \qquad B_{\text{у}} = C_{\text{н}}^{\text{T}},$$
$$C_{\text{у}} = B_{\text{н}}^{\text{T}}, \qquad D_{\text{у}} = D_{\text{н}}^{\text{T}}$$

$\Downarrow$

Управляемая

$$A_{\text{у}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & -a_2/a_n & \cdots & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix}, B_{\text{у}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{\text{у}} = [b_0/a_n \quad b_1/a_n \quad b_2/a_n \quad \dots \quad b_{n-1}/a_n], D_{\text{у}} = [d]$$

Наблюдаемая

$$A_{\text{н}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0/a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1/a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2/a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix}, B_{\text{н}} = \begin{bmatrix} b_0/a_n \\ b_1/a_n \\ b_2/a_n \\ \vdots \\ b_{n-1}/a_n \end{bmatrix},$$

$$C_{\text{н}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1], D_{\text{н}} = [d]$$

Канонические формы В-С-В

$$W(p) = d + \frac{b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

$$A_\text{у} = A_\text{н}^\text{T}, \quad B_\text{у} = C_\text{н}^\text{T},$$
$$C_\text{у} = B_\text{н}^\text{T}, \quad D_\text{у} = D_\text{н}^\text{T}$$

Но все это справедливо только пока $W(p)$ – скаляр

Управляемая

$$A_\text{у} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & -a_2/a_n & \cdots & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix}, B_\text{у} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_\text{у} = [b_0/a_n \quad b_1/a_n \quad b_2/a_n \quad \dots \quad b_{n-1}/a_n], D_\text{у} = [d]$$

Наблюдаемая

$$A_\text{н} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0/a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1/a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2/a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix}, B_\text{н} = \begin{bmatrix} b_0/a_n \\ b_1/a_n \\ b_2/a_n \\ \vdots \\ b_{n-1}/a_n \end{bmatrix},$$

$$C_\text{н} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1], D_\text{н} = [d]$$

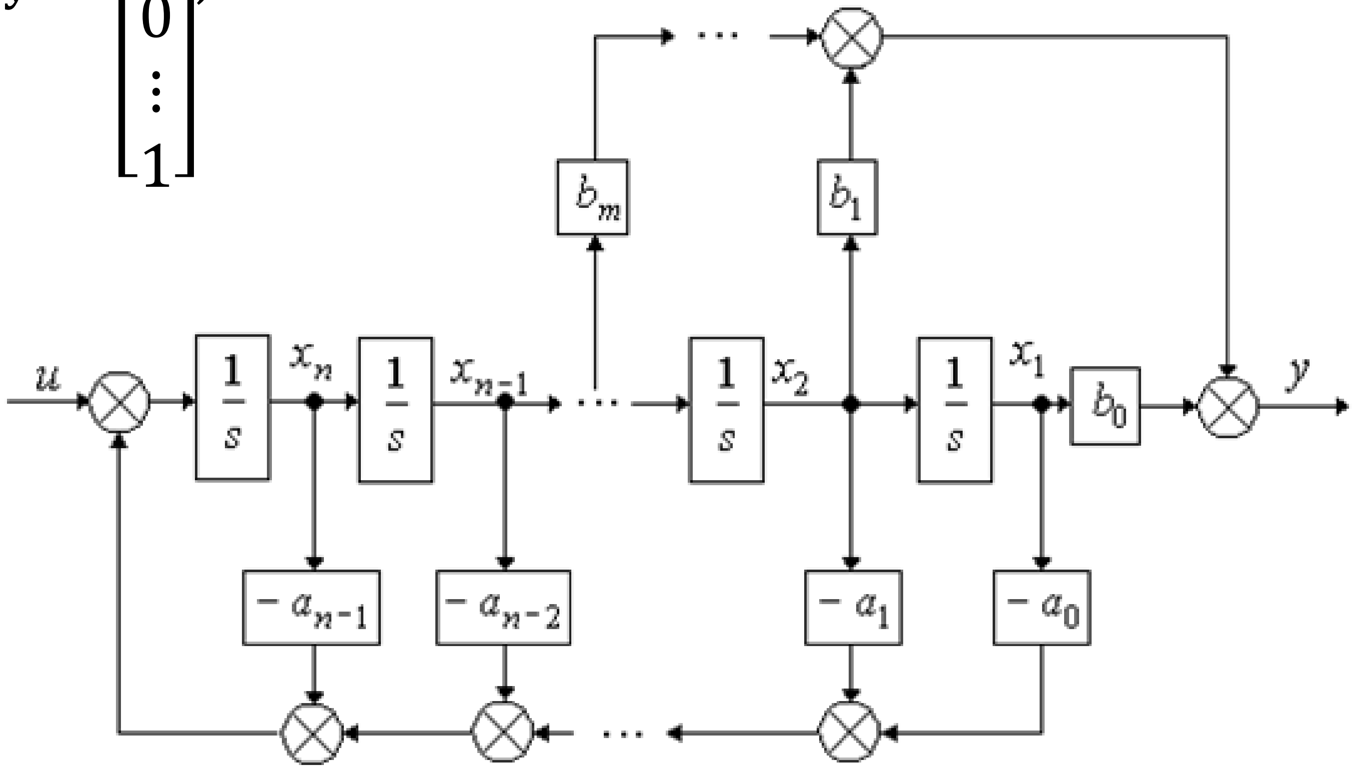
Канонические формы В-С-В и структурные схемы

Управляемая

$$A_{\text{у}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B_{\text{у}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{\text{у}} = [b_0 \quad \ldots \quad b_m \quad 0 \quad \ldots \quad 0]$$

$$W(p) = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$



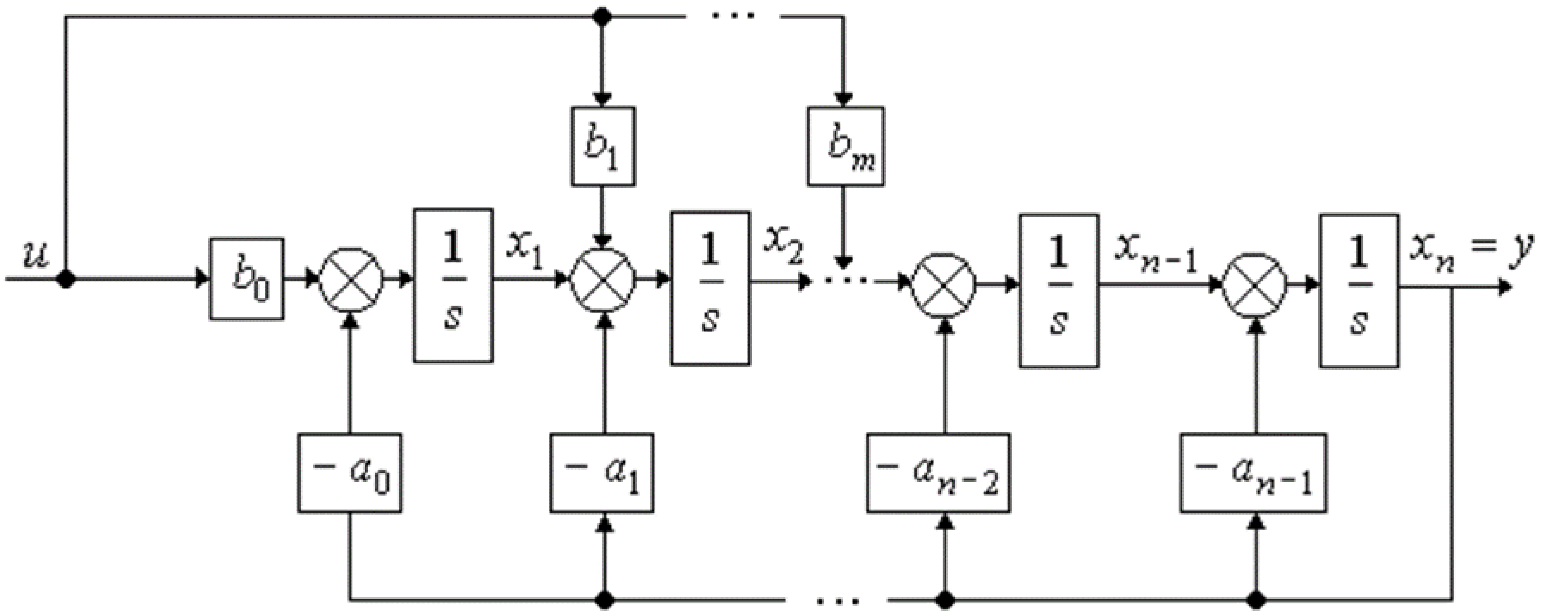
Канонические формы В-С-В и структурные схемы

Наблюдаемая

$$W(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

$$A_{\text{Н}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B_{\text{Н}} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{\text{Н}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]$$



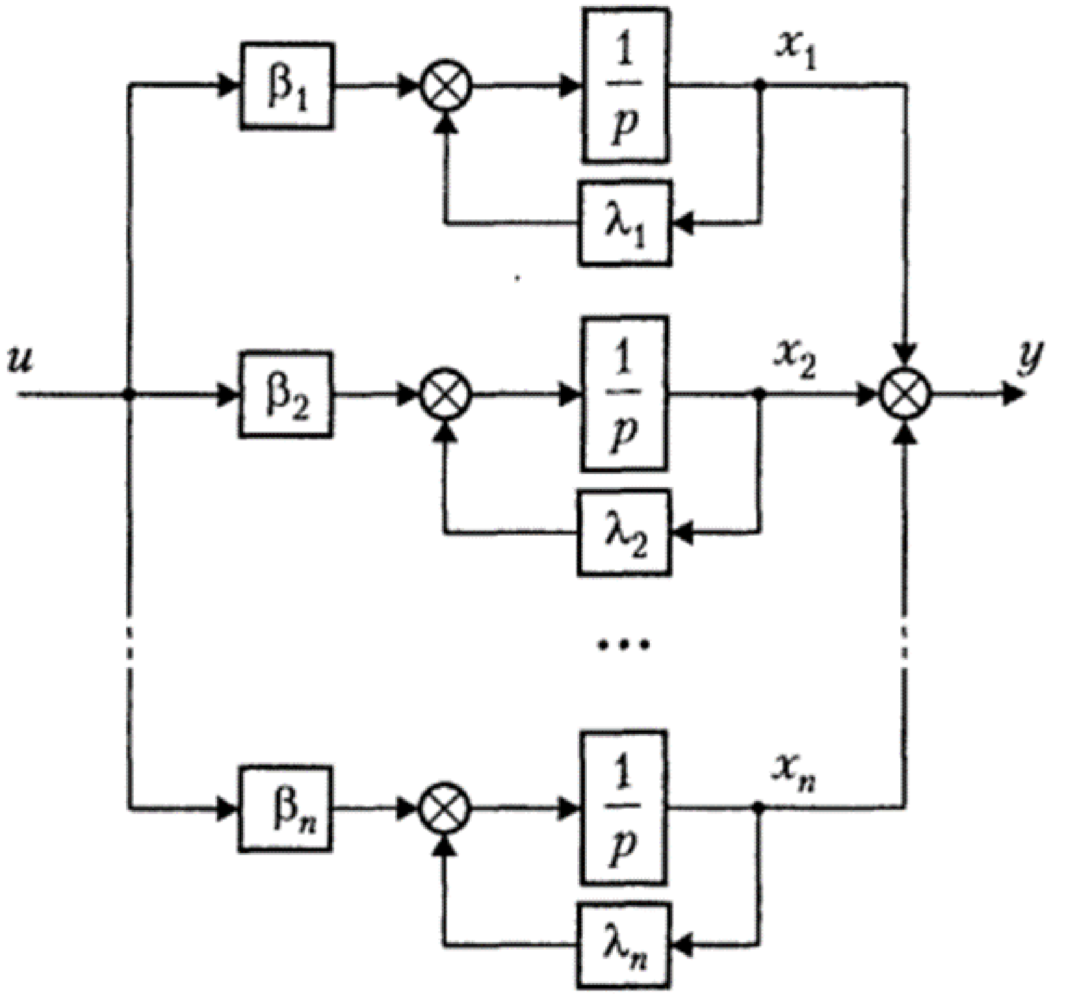
Канонические формы В-С-В и структурные схемы

Диагональная

$$A_Д = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, B_Д = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$C_Д = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$$

$$\boxed{W(p) = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{p - \lambda_i}}$$



Канонические формы В-С-В и структурные схемы

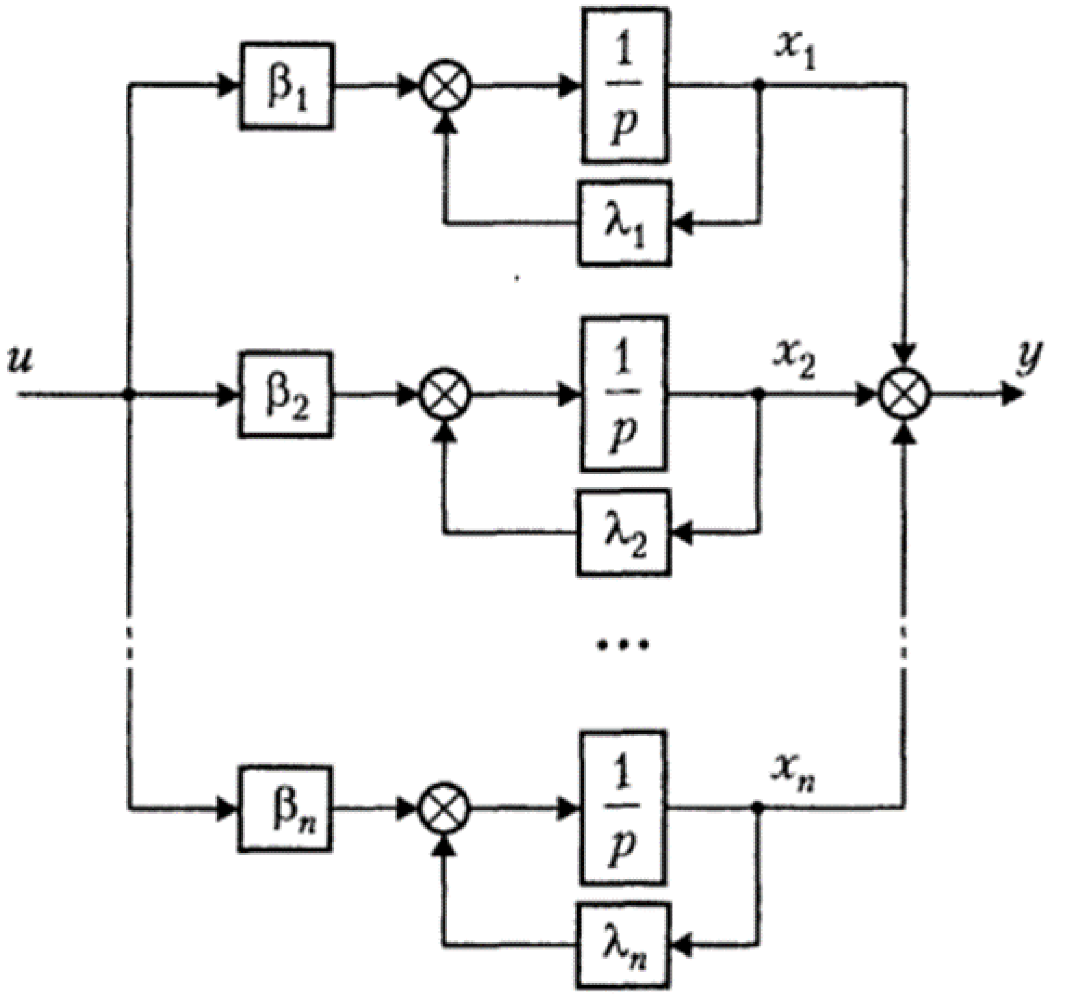
Диагональная

$$A_Д = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, B_Д = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$C_Д = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$$

$$W(p) = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{p - \lambda_i}$$

Все полюса ПФ системы должны быть вещественными и не кратными



Канонические формы В-С-В и структурные схемы

Жорданова

$$A_Ж = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_n \end{bmatrix}, B_Ж = \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{B}_2 \\ \mathrm{B}_3 \\ \vdots \\ \mathrm{B}_n \end{bmatrix},$$

$$C_Ж = [\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \Gamma_3 \quad \dots \quad \Gamma_4]$$

J_i – жордановы клетки

Общий случай диагональной

Канонические формы В-С-В и структурные схемы

Жорданова

$$A_Ж = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_n \end{bmatrix}, B_Ж = \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{B}_2 \\ \mathrm{B}_3 \\ \vdots \\ \mathrm{B}_n \end{bmatrix},$$

$$C_Ж = [\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \Gamma_3 \quad \dots \quad \Gamma_4]$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \mathrm{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_i = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Если $\lambda_i(i = \overline{1,n})$ – вещественные кратные

Общий случай диагональной

Канонические формы В-С-В и структурные схемы

Жорданова

$$A_Ж = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_n \end{bmatrix}, B_Ж = \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{B}_2 \\ \mathrm{B}_3 \\ \vdots \\ \mathrm{B}_n \end{bmatrix},$$

$$C_Ж = [\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \Gamma_3 \quad \dots \quad \Gamma_4]$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}, \mathrm{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_i = [1 \quad 0]$$

Если $\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$ – комплексно-сопряженные

Общий случай диагональной

Канонические формы В-С-В и структурные схемы

Жорданова

$$A_Ж = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_n \end{bmatrix}, B_Ж = \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{B}_2 \\ \mathrm{B}_3 \\ \vdots \\ \mathrm{B}_n \end{bmatrix},$$

$$C_Ж = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \dots & \Gamma_4 \end{bmatrix}$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}, \mathrm{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Если $\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$ – комплексно-сопряженные

Общий случай диагональной

Со схемами сложнее, каждую клетку следует рассматривать как отдельную подсистему

1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$

$$u = U,$$

$$W(p) = ?$$

1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$
$$u = U,$$
$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon}$$

Формы представления: практические примеры

1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$
$$u = U,$$
$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U$$

Формы представления: практические примеры

1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$
$$u = U,$$
$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \left\{I = \frac{M}{k_m}\right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U$$

Формы представления: практические примеры

1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$
$$u = U,$$
$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$
$$= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$
$$= \{M = J\dot{\omega}\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

Формы представления: практические примеры

1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$
$$u = U,$$
$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \left\{I = \frac{M}{k_m}\right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \{M = J\dot{\omega}\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\left(1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p\right)[\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

Формы представления: практические примеры

1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$

$$u = U,$$

$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \{M = J\dot{\omega}\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\left(1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p\right)[\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\omega = \frac{k_m}{k_\varepsilon k_m + RJp} [U]$$

Формы представления: практические примеры

1.1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$y = \theta,$$

$$u = U,$$

$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \{M = J\dot{\omega}\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\left(1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p\right)[\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\omega = \frac{k_m}{k_\varepsilon k_m + RJp} [U]$$

1.1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$
$$M = k_m I,$$
$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$
$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$
$$p[\theta] = \omega$$

$$y = \theta,$$
$$u = U,$$
$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$
$$= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$
$$= \{M = J\dot{\omega}\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\left(1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p\right) p[\theta] = \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\theta = \frac{k_m}{(k_\varepsilon k_m + RJp)p} [U]$$

Формы представления: практические примеры

2. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Выход

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \{M = J\dot{\omega}\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\left(1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p\right)[\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\omega = \frac{k_m}{k_\varepsilon k_m + RJp}[U]$$

2. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Выход

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \{M = J\dot{\omega} + M_f\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f,$$

$$\left(1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p\right)[\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\omega = \frac{k_m}{k_\varepsilon k_m + RJp}[U]$$

Формы представления: практические примеры

2. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Выход

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \{M = J\dot{\omega} + M_f\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f,$$

$$\left(1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p\right)[\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f,$$

$$\omega = \frac{k_m}{k_\varepsilon k_m + RJp}[U] - \frac{R}{k_\varepsilon k_m + RJp}[M_f]$$

Формы представления: практические примеры

2. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Выход

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \{M = J\dot{\omega} + M_f\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f,$$

$$\left(1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p\right)[\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f,$$

$$\omega = W_U(p)[U] - W_M(p)[M_f]$$

2. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Выход

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \{M = J\dot{\omega} + M_f\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f,$$

$$\left(1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p\right)[\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f,$$

$$\omega = [W_U(p)\ W_m(p)] \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix} = W(p)[u]$$

2. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Выход

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \{M = J\dot{\omega} + M_f\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f,$$

$$\left(1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p\right)[\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f,$$

Как это понимать?

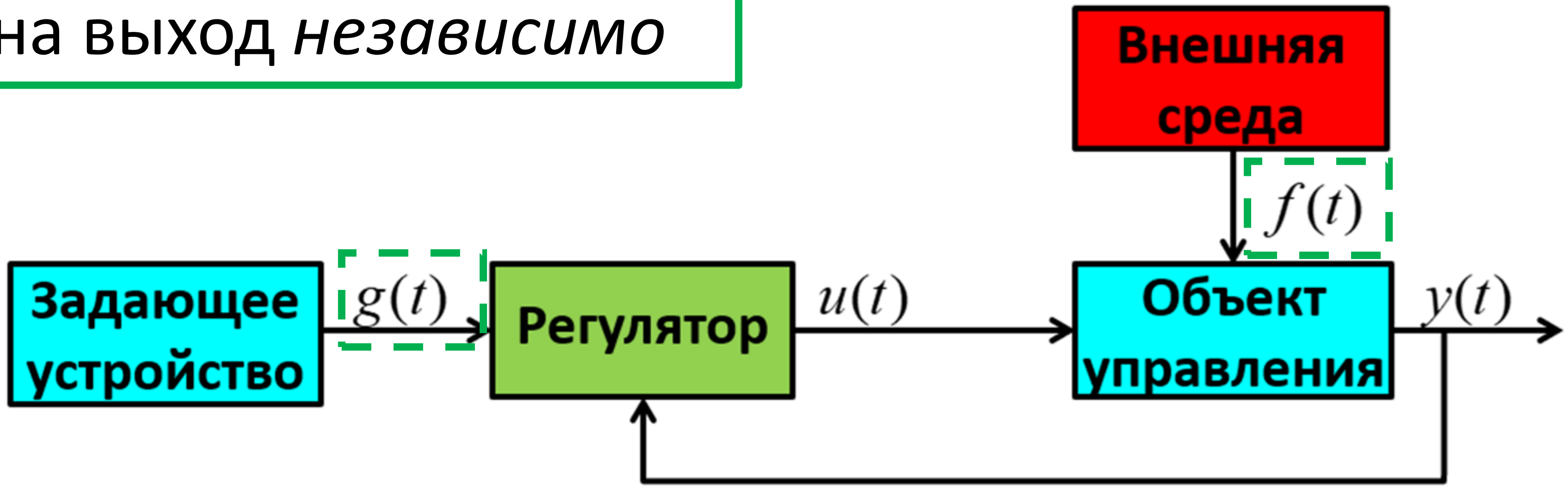
$$\omega = [W_U(p)\ W_m(p)] \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix} = W(p)[u]$$

В линейных системах с более чем одним входом различные входы действуют на выход *независимо*

$$\omega = W_U(p)[U] - W_M(p)\left[M_f\right]$$

Формы представления: практические примеры

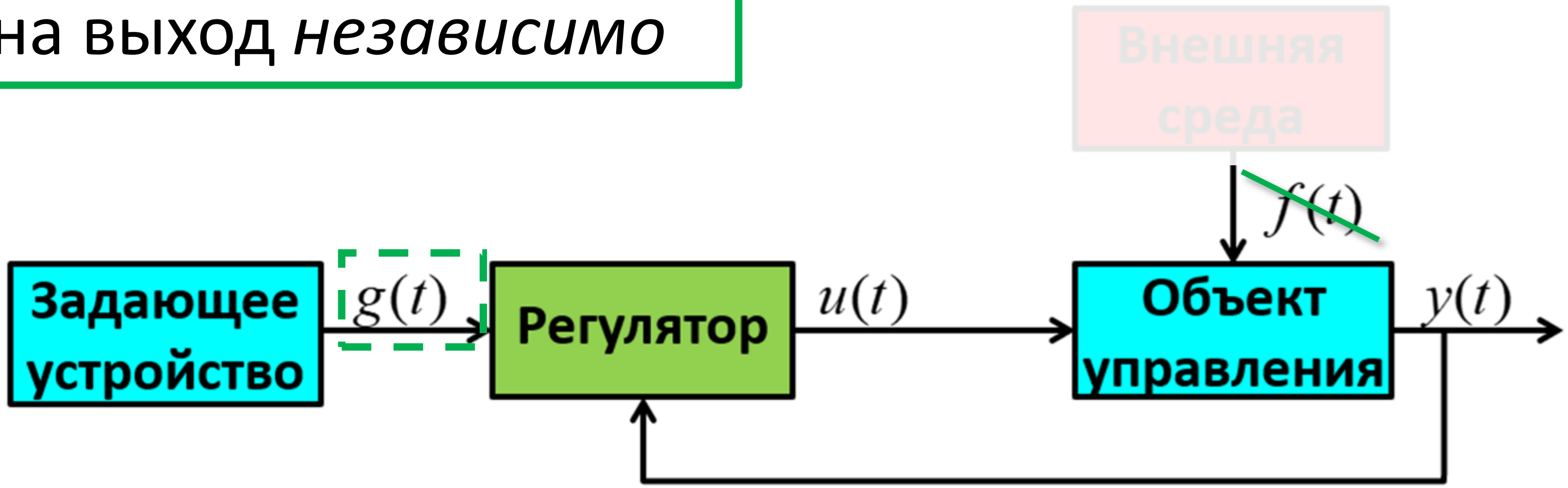
В линейных системах с более чем одним входом различные входы действуют на выход *независимо*



Это значит, что при поиске ПФ от **одного** входа следует *игнорировать* другие входы

Формы представления: практические примеры

В линейных системах с более чем одним входом различные входы действуют на выход *независимо*

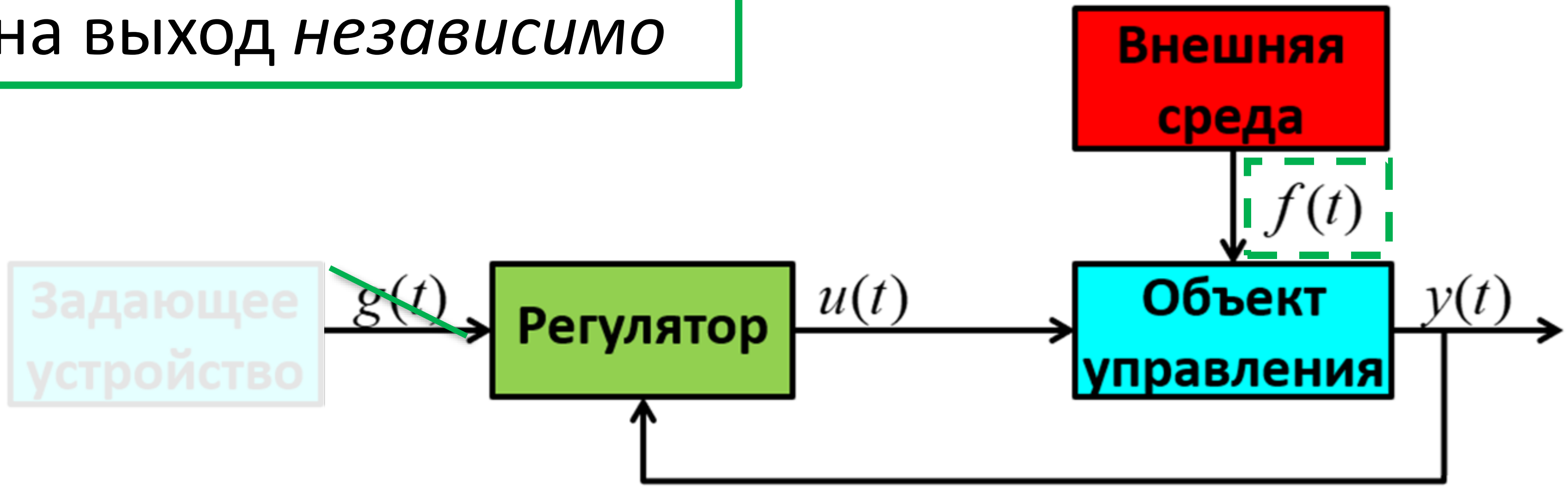


$$W_{g\to y}(p) = ?$$

Это значит, что при поиске ПФ от **одного** входа следует *игнорировать* другие входы

Формы представления: практические примеры

В линейных системах с более чем одним входом различные входы действуют на выход *независимо*



Это значит, что при поиске ПФ от **одного** входа следует *игнорировать* другие входы

$$W_{f\to y}(p) = ?$$

Формы представления: практические примеры

3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix},$$

$$y = x,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \left\{I = \frac{M}{k_m}\right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \{M = J\dot{\omega} + M_f\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f,$$

$$\left(1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p\right)[\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f,$$

$$\omega = [W_U(p)\; W_m(p)] \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix} = W(p)[u]$$

ИТМО

3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix},$$

$$y = x,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$A = ?$$

$$B = ?$$

$$C = ?$$

$$D = ?$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}}$$

Формы представления: практические примеры

3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix},$$

$$y = x,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$A = ?$$

$$B = ?$$

$$C = ?$$

$$D = ?$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J + M_f/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}}$$

3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix},$$

$$y = x,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$A = ?$$

$$B = ?$$

$$C = ?$$

$$D = ?$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}}$$

Формы представления: практические примеры

3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix},$$

$$y = x,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$A = ?$$

$$B = ?$$

$$C = ?$$

$$D = ?$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} M = k_m I, \\ \varepsilon_s = \varepsilon - \varepsilon_i \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} k_m I/J \\ (\varepsilon_i - \varepsilon)/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix}$$

Формы представления: практические примеры

3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix},$$

$$y = x,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$A = ?$$

$$B = ?$$

$$C = ?$$

$$D = ?$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} M = k_m I, \\ \varepsilon_s = \varepsilon - \varepsilon_i \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} k_m I/J \\ (\varepsilon_i - \varepsilon)/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega, \\ \varepsilon = RI - U \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} k_m I/J \\ -k_\varepsilon \omega/L - RI/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ U/L \end{bmatrix},$$

Формы представления: практические примеры

3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix},$$

$$y = x,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$A = ?$

$B = ?$

$C = ?$

$D = ?$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} M = k_m I, \\ \varepsilon_s = \varepsilon - \varepsilon_i \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} k_m I/J \\ (\varepsilon_i - \varepsilon)/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega, \\ \varepsilon = RI - U \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & k_m/J \\ -k_\varepsilon/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/J \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

Формы представления: практические примеры

3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U+\varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix},$$

$$y = x,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$A = ?$$

$$B = ?$$

$$C = ?$$

$$D = ?$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} M = k_m I, \\ \varepsilon_s = \varepsilon - \varepsilon_i \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} k_m I/J \\ (\varepsilon_i - \varepsilon)/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega, \\ \varepsilon = RI - U \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & k_m/J \\ -k_\varepsilon/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/J \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}$$

Формы представления: практические примеры

3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix}\omega \\ I\end{bmatrix},$$

$$y = x,$$

$$u = \begin{bmatrix}U \\ M_f\end{bmatrix},$$

$$A = ?$$

$$B = ?$$

$$C = ?$$

$$D = ?$$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\omega} \\ \dot{I}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}M/J \\ -\varepsilon_s/L\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}M_f/J \\ 0\end{bmatrix} = \left\{\begin{matrix}M = k_m I, \\ \varepsilon_s = \varepsilon - \varepsilon_i\end{matrix}\right\} =$$

$$= \begin{bmatrix}k_m I/J \\ (\varepsilon_i - \varepsilon)/L\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}M_f/J \\ 0\end{bmatrix} = \left\{\begin{matrix}\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega, \\ \varepsilon = RI - U\end{matrix}\right\} =$$

$$= \begin{bmatrix}0 & k_m/J \\ -k_\varepsilon/L & -R/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega \\ I\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1/J \\ 1/L & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U \\ M_f\end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix}\omega \\ I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega \\ I\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U \\ M_f\end{bmatrix}$$

MIMO
(Multi-Input-Multi-Output)

Формы представления: практические примеры

3.1 Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-Выход

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix},$$

$$y = \varepsilon,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$A = ?$$

$$B = ?$$

$$C = ?$$

$$D = ?$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} M = k_m I, \\ \varepsilon_s = \varepsilon - \varepsilon_i \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} k_m I/J \\ (\varepsilon_i - \varepsilon)/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega, \\ \varepsilon = RI - U \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & k_m/J \\ -k_\varepsilon/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/J \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}$$

Формы представления: практические примеры

3.1 Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-Выход

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix},$$

$$y = \varepsilon,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$A = ?$$

$$B = ?$$

$$C = ?$$

$$D = ?$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} M = k_m I, \\ \varepsilon_s = \varepsilon - \varepsilon_i \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} k_m I/J \\ (\varepsilon_i - \varepsilon)/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega, \\ \varepsilon = RI - U \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & k_m/J \\ -k_\varepsilon/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/J \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$y = \varepsilon = C \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}$$

Формы представления: практические примеры

3.1 Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-Выход

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix},$$

$$y = \varepsilon,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$A = ?$$

$$B = ?$$

$$C = ?$$

$$D = ?$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} M = k_m I, \\ \varepsilon_s = \varepsilon - \varepsilon_i \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} k_m I/J \\ (\varepsilon_i - \varepsilon)/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega, \\ \varepsilon = RI - U \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & k_m/J \\ -k_\varepsilon/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/J \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$y = \varepsilon = IR - U = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}$$