

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ
по лабораторной работе № 1:
УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

Вариант 17

по дисциплине
«Теория автоматического управления»

Студент:
Группа № R3338

А.А. Нечаева

Предподаватель:
ассистент факультета СУиР, к. т. н.

А.В. Пашенко

Санкт-Петербург 2025

СОДЕРЖАНИЕ

| | | |
|-------|---|----|
| 1 | ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ | 4 |
| 1.1 | Исследование управляемости системы | 5 |
| 1.1.1 | Матрица управляемости системы | 5 |
| 1.1.2 | Собственные числа матрицы A и матрица Хаутуса | 5 |
| 1.1.3 | Жорданова (диагональная) форма системы | 6 |
| 1.2 | Анализ системы через Грамиан | 7 |
| 1.3 | Моделирование системы | 8 |
| 1.4 | Вывод | 9 |
| 2 | ЕЩЕ ОДНО ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ | 10 |
| 2.1 | Принадлежность точек управляемому подпространству | 10 |
| 2.2 | Исследование управляемости системы | 11 |
| 2.2.1 | Матрица управляемости системы | 11 |
| 2.2.2 | Собственные числа матрицы A и матрица Хаутуса | 11 |
| 2.2.3 | Жорданова (диагональная) форма системы | 12 |
| 2.3 | Анализ системы через Грамиан | 13 |
| 2.4 | Моделирование системы | 14 |
| 2.5 | Вывод | 15 |
| 3 | ИССЛЕДОВАНИЕ НАБЛЮДАЕМОСТИ | 17 |
| 3.1 | Исследование наблюдаемости системы | 18 |
| 3.1.1 | Матрица наблюдаемости системы | 18 |
| 3.1.2 | Собственные числа матрицы A и матрица Хаутуса | 18 |
| 3.1.3 | Жорданова (диагональная) форма системы | 19 |
| 3.2 | Анализ системы через Грамиан | 20 |
| 3.3 | Моделирование системы | 21 |
| 3.4 | Вывод | 24 |
| 4 | ЕЩЕ ОДНО ИССЛЕДОВАНИЕ НАБЛЮДАЕМОСТИ | 25 |
| 4.1 | Исследование наблюдаемости системы | 25 |
| 4.1.1 | Матрица наблюдаемости системы | 25 |
| 4.1.2 | Собственные числа матрицы A и матрица Хаутуса | 25 |
| 4.1.3 | Жорданова (диагональная) форма системы | 26 |

| | | |
|-------|---|----|
| 4.2 | Анализ системы через Грамиан | 27 |
| 4.3 | Моделирование системы..... | 28 |
| 4.4 | Другие начальные условия | 30 |
| 4.5 | Вывод | 35 |
| 5 | ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПО ВЫХОДУ | 36 |
| 5.1 | Жорданова (диагональная) форма системы..... | 36 |
| 5.2 | Определение управляемости и наблюдаемости собственных чисел | 37 |
| 5.2.1 | Исследование управляемости | 37 |
| 5.2.2 | Исследование наблюдаемости..... | 38 |
| 5.3 | Исследование матрицы управляемости по выходу | 39 |
| 5.4 | Анализ результатов | 40 |
| 5.5 | Поиск матрицы связи для обеспечения полной управляемости. | 40 |
| 6 | ВЫВОД | 42 |

1 ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ

В соответствии с вариантом возьмем матрицы A и B и точку x_1 . Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -6 & -7 & -2 \\ 6 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Исследуем управляемость системы:
 - Найдём матрицу управляемости системы, определим ее ранг, сделаем вывод об управляемости системы в целом.
 - Найдём собственные числа матрицы A , найдём для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса (для управляемости), определим ранги матриц, сделаем выводы об управляемости каждого собственного числа и системы в целом.
 - Найдём Жорданову (или диагональную) форму системы и сделаем выводы об управляемости каждого собственного числа и системы в целом.
- Найдём Грамиан управляемости системы относительно времени $t_1 = 3$, вычислим его собственные числа. Проанализируем полученные собственные числа с точки зрения управляемости системы.
- Найдём управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1 . Выполним моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов.

1.1 Исследование управляемости системы

1.1.1 Матрица управляемости системы

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -26 \\ 4 & -12 & 16 \\ -2 & 10 & -14 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Определим ранг матрицы управляемости системы.

$$\text{rank}(U) = 3 \quad (3)$$

Ранг матрицы управляемости равен порядку системы, следовательно, по критерию Калмана, система полностью управляема.

1.1.2 Собственные числа матрицы A и матрица Хаутуса

Найдём собственные числа матрицы A :

$$\begin{aligned} \det |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & -1 \\ -6 & -7 - \lambda & -2 \\ 6 & 6 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= -(\lambda + 1)(\lambda + (2 + 3i))(\lambda + (2 - 3i)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -2 - 3i, \\ \lambda_3 = -2 + 3i \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

Найдём для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса и определим ранги матриц.

Для собственного числа $\lambda_1 = -1$:

$$U_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & -2 \\ -6 & -6 & -2 & 4 \\ 6 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_1) = 3 \quad (5)$$

Ранг U_1 равен порядку системы, следовательно, собственное число λ_1 управляемо.

Для собственного числа $\lambda_2 = -2 - 3i$:

$$U_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 3i & 2 & -1 & -2 \\ -6 & -5 + 3i & -2 & 4 \\ 6 & 6 & 3 + 3i & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_2) = 3 \quad (6)$$

Ранг U_2 равен порядку системы, следовательно, собственное число λ_2 управляемо.

Для собственного числа $\lambda_3 = -2 + 3i$:

$$U_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3i & 2 & -1 & -2 \\ -6 & -5 - 3i & -2 & 4 \\ 6 & 6 & 3 - 3i & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_3) = 3 \quad (7)$$

Ранг U_3 равен порядку системы, следовательно, собственное число λ_3 управляемо.

Все собственные числа матрицы A управляемы, следовательно, система в целом полностью управляема.

1.1.3 Жорданова (диагональная) форма системы

Найдём Жорданову (или диагональную) форму системы.

$$\dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu, \quad (8)$$

где P – матрица обобщенных собственных векторов матрицы A .

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0.7071 & -0.7071 \\ 1 & -1.4142 & 0 \\ 0 & 1.4142 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\hat{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.4142 \\ -1.4142 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1.4142 \\ -1.4142 \end{bmatrix} u \quad (12)$$

Все собственные числа матрицы A , следовательно, и вся система, являются управляемыми, так как элементы матрицы входных воздействий, соответствующие последним строкам жордановых клеток, не равны нулю, и все Жордановы клетки относятся к различным собственным числам.

1.2 Анализ системы через Грамиан

Найдём Грамиан управляемости системы относительно времени $t_1 = 3$.

$$\begin{aligned} P(t_1) &= \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \Rightarrow P(3) = \int_0^3 e^{At} B B^T e^{A^T t} dt = \\ &= \int_0^3 \begin{bmatrix} \frac{\cos(3t)+\sin(3t)}{e^2} & \frac{-e^2+e^t \cos(3t)+e^t \sin(3t)}{e^{(t+2)}} & \frac{-e^2+e^t \cos(3t)}{e^{(t+2)}} \\ \frac{-2 \sin(3t)}{e^2} & \frac{e^2-2e^t \sin(3t)}{e^{(t+2)}} & \frac{e^2-e^t \cos(3t)-e^t \sin(3t)}{e^{(t+2)}} \\ \frac{2 \sin(3t)}{e^2} & \frac{2 \sin(3t)}{e^2} & \frac{\cos(3t)+\sin(3t)}{e^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\cos(3t)+\sin(3t)}{e^2} & \frac{-2 \sin(3t)}{e^2} & \frac{2 \sin(3t)}{e^2} \\ \frac{-e^2+e^t \cos(3t)+e^t \sin(3t)}{e^{(t+2)}} & \frac{e^2-2e^t \sin(3t)}{e^{(t+2)}} & \frac{2 \sin(3t)}{e^2} \\ \frac{-e^2+e^t \cos(3t)}{e^{(t+2)}} & \frac{e^2-e^t \cos(3t)-e^t \sin(3t)}{e^{(t+2)}} & \frac{\cos(3t)+\sin(3t)}{e^2} \end{bmatrix} dt = \\ &\begin{bmatrix} 1.0078 & -1.4438 & 0.1155 \\ -1.4438 & 2.5336 & -0.5385 \\ 0.1155 & -0.5385 & 0.5385 \end{bmatrix} \quad (13) \end{aligned}$$

Нахождение конечного ответа в (13) в численном виде проводилось с помощью MATLAB.

С помощью функции $eig(P)$ в MATLAB вычислим собственные числа Грамиана (13) и получим: $\lambda_1 = 0.0575$, $\lambda_2 = 0.5266$, $\lambda_3 = 3.4957$.

Проанализируем полученные собственные числа с точки зрения управляемости системы. Так как для всех собственных чисел Грамиана верно $\lambda_i > 0$, то система полностью управляема.

1.3 Моделирование системы

Найдём управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время $t_1 = 3$ с.

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)} (P(t_1))^{-1} x_1, \quad (14)$$

где

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Решим данное уравнение с помощью MATLAB.

$$\begin{aligned} u(t) &= B^T e^{A^T(t_1-t)} (P(t_1))^{-1} x_1 = B^T e^{A^T(3-t)} (P(3))^{-1} x_1 = \\ &= -\frac{5177415784506225}{562949953421312} e^{t-3} + \\ &+ e^{t(2-3i)-6+9i} \left(-\frac{2952334874554185}{1125899906842624} - \frac{9222713917079985}{562949953421312} i \right) + \\ &+ e^{t(2+3i)-6-9i} \left(-\frac{2952334874554185}{1125899906842624} + \frac{9222713917079985}{562949953421312} i \right) \quad (15) \end{aligned}$$

Выполним моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов.

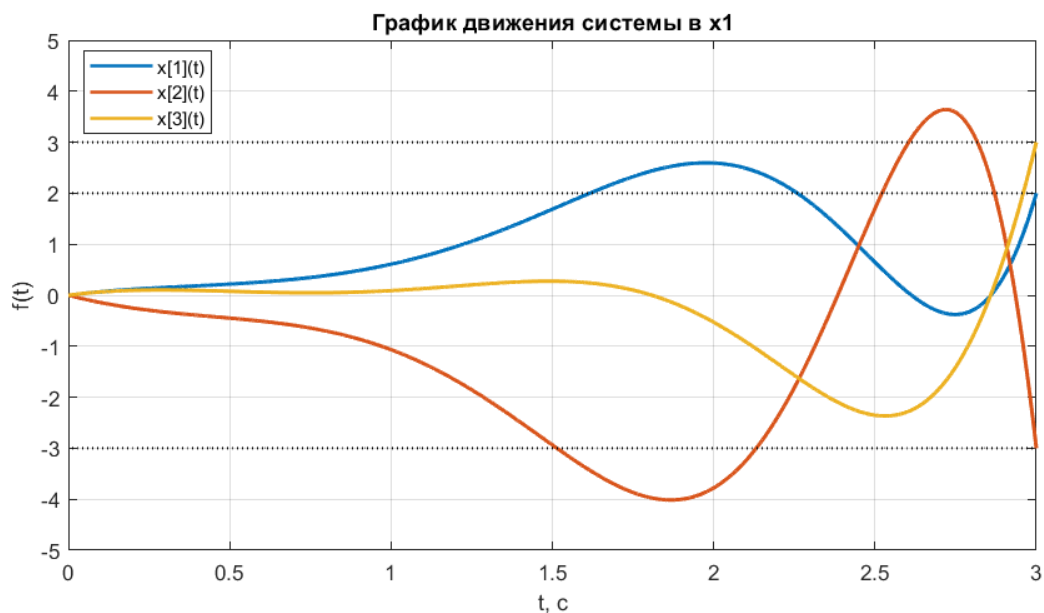


Рисунок 1 — Моделирование движения системы из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$.

На рисунке 1 представлен график движения системы (1) из точки $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1 под действием управляющего воздействия, график которого представлен на рисунке 2.

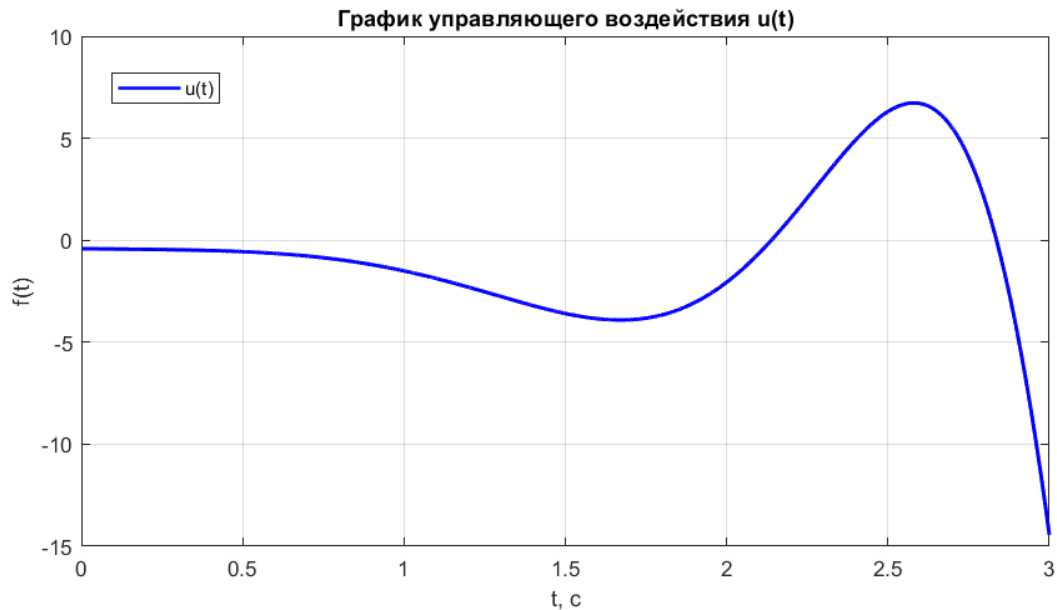


Рисунок 2 — Управляющее воздействие $u(t)$, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$.

1.4 Вывод

Проведено исследование управляемости системы 1 с помощью анализа матрицы управляемости, матрицы Хаутуса, Жордановой формы системы. В каждом случае была подтверждена полная управляемость системы. Также найдем Грамиан управляемости системы относительно времени t_1 , его собственные числа также управляемы. Найдено управление, переводящее систему 1 из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1 . Проведено моделирование (рисунок 1), демонстрирующее корректность выполненных расчетов.

2 ЕЩЕ ОДНО ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Возьмём матрицу A и матрицу B и точки x'_1 и x''_1 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -6 & -7 & -2 \\ 6 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x'_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x''_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим систему (1) и выполним следующие шаги:

- Проверим обе точки x'_1 и x''_1 на принадлежность управляемому подпространству системы. Принять целевой точкой x_1 ту, что принадлежит.
- Выполним все шаги **Задания 1** для рассматриваемой системы и выбранной целевой точки x_1 .

2.1 Принадлежность точек управляемому подпространству

Сначала найдём матрицу управляемости U системы (1).

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -34 \\ 0 & -12 & 48 \\ 0 & 12 & -48 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U) = 2 \quad (16)$$

Заметим, что последние две строки матрицы U являются линейно зависимыми, следовательно, ранг матрицы U равен 2, что меньше порядка системы равного 3. Значит, система не является полностью управляемой.

Проверим принадлежность точек x'_1 и x''_1 управляемому подпространству. Для этого необходимо проверить равенство

$$\text{rank}(U) = \text{rank}\begin{pmatrix} U & x_i \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где x_i – исследуемая точка. Если равенство выполнено, то точка x_i принадлежит управляемому подпространству системы.

$$\text{rank}\begin{pmatrix} U & x'_1 \end{pmatrix} = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & -34 & 2 \\ 0 & -12 & 48 & -3 \\ 0 & 12 & -48 & 3 \end{bmatrix}\right) = 2 = \text{rank}(U) \quad (18)$$

$$\text{rank}([U \ x_1'']) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & -34 & 1 \\ 0 & -12 & 48 & -2 \\ 0 & 12 & -48 & 3 \end{bmatrix}\right) = 3 \neq \text{rank}(U) \quad (19)$$

В результате проверки, получаем, что точка x_1' принадлежит, а x_1'' не принадлежит управляемому подпространству системы. Целевая точка $x_1 = x_1'$.

2.2 Исследование управляемости системы

2.2.1 Матрица управляемости системы

$$U = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -34 \\ 0 & -12 & 48 \\ 0 & 12 & -48 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U) = 2 \quad (20)$$

Как было отмечено в предыдущем пункте, по критерию Калмана, система не является полностью управляемой, так как ранг матрицы управляемости U меньше порядка системы.

2.2.2 Собственные числа матрицы A и матрица Хаутуса

Собственные числа матрицы A были найдены в первой главе в пункте 1.1.2, выражение (4). Перейдем к рассмотрению матриц Хаутуса для каждого собственного числа.

Для собственного числа $\lambda_1 = -1$:

$$U_1 = [A - \lambda_1 I \ B] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ -6 & -6 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_1) = 2 \quad (21)$$

Ранг U_1 меньше порядка системы, следовательно, собственное число λ_1 не управляемо.

Для собственного числа $\lambda_2 = -2 - 3i$:

$$U_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 3i & 2 & -1 & 2 \\ -6 & -5 + 3i & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 3 + 3i & 0 \end{bmatrix}, \text{rank}(U_2) = 3 \quad (22)$$

Ранг U_2 равен порядку системы, следовательно, собственное число λ_2 управляемо.

Для собственного числа $\lambda_3 = -2 + 3i$:

$$U_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3i & 2 & -1 & 2 \\ -6 & -5 - 3i & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 3 - 3i & 0 \end{bmatrix}, \text{rank}(U_3) = 3 \quad (23)$$

Ранг U_3 равен порядку системы, следовательно, собственное число λ_3 управляемо.

Собственные числа λ_2 и λ_3 управляемы, а λ_1 не управляемо, значит, система в целом не полностью управляема.

2.2.3 Жорданова (диагональная) форма системы

Найдем Жорданову (диагональную) форму системы

$$\dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu, \quad (24)$$

где P – матрица обобщенных собственных векторов матрицы A .

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0.7071 & -0.7071 \\ 1 & -1.4142 & 0 \\ 0 & 1.4142 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\hat{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.8284 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.8284 \end{bmatrix} u \quad (28)$$

Собственные числа $\lambda_{2,3}$ – управляемые, так как элементы матрицы входных воздействий, соответствующие последним строкам жордановых клеток, не равны нулю. Собственное число λ_1 не является управляемым.

2.3 Анализ системы через Грамиан

Вычислим Грамиан управляемости системы относительно времени $t_1 = 3$ с.

$$\begin{aligned} P(t_1) &= \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \Rightarrow P(3) = \int_0^3 e^{At} B B^T e^{A^T t} dt = \\ &= \int_0^3 \begin{bmatrix} \frac{\cos(3t)+\sin(3t)}{e^2} & \frac{-e^2+e^t \cos(3t)+e^t \sin(3t)}{e^{(t+2)}} & \frac{-e^2+e^t \cos(3t)}{e^{(t+2)}} \\ \frac{-2 \sin(3t)}{e^2} & \frac{e^2-2e^t \sin(3t)}{e^{(t+2)}} & \frac{e^2-e^t \cos(3t)-e^t \sin(3t)}{e^{(t+2)}} \\ \frac{2 \sin(3t)}{e^2} & \frac{2 \sin(3t)}{e^2} & \frac{\cos(3t)+\sin(3t)}{e^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\cos(3t)+\sin(3t)}{e^2} & \frac{-2 \sin(3t)}{e^2} & \frac{2 \sin(3t)}{e^2} \\ \frac{-e^2+e^t \cos(3t)+e^t \sin(3t)}{e^{(t+2)}} & \frac{e^2-2e^t \sin(3t)}{e^{(t+2)}} & \frac{2 \sin(3t)}{e^2} \\ \frac{-e^2+e^t \cos(3t)}{e^{(t+2)}} & \frac{e^2-e^t \cos(3t)-e^t \sin(3t)}{e^{(t+2)}} & \frac{\cos(3t)+\sin(3t)}{e^2} \end{bmatrix} dt = \\ &\quad \begin{bmatrix} 1.4615 & -1.1538 & 1.1538 \\ -1.1538 & 1.3846 & -1.3846 \\ 1.1538 & -1.3846 & 1.3846 \end{bmatrix} \quad (29) \end{aligned}$$

Нахождение конечного ответа в (29) в численном виде проводилось с помощью MATLAB.

С помощью функции $eig(P)$ в MATLAB вычислим собственные числа Грамиана (29) и получим: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0.3575$, $\lambda_3 = 3.8733$.

Проанализируем полученные собственные числа с точки зрения управляемости системы. Собственные числа $\lambda_{2,3} > 0$. Так как собственное число $\lambda_1 = 0$, система не полностью управляема.

2.4 Моделирование системы

Найдём управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время $t_1 = 3$ с.

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)} (P(t_1))^{-1} x_1, \quad (30)$$

где

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Решим данное уравнение с помощью MATLAB. Так как определитель Грамиана равен нулю, вместо обратной матрицы будем вычислять псевдообратную.

$$\begin{aligned} u(t) &= B^T e^{A^T(t_1-t)} (P(t_1))^+ x_1 = B^T e^{A^T(3-t)} (P(3))^+ x_1 = \\ &= e^{t(2-3i)-6+9i} \left(-\frac{4503672484388367}{4503599627370496} - \frac{5629533434397035}{1125899906842624}i \right) + \\ &+ e^{t(2+3i)-6-9i} \left(-\frac{4503672484388367}{4503599627370496} + \frac{5629533434397035}{1125899906842624}i \right) \quad (31) \end{aligned}$$

Выполним моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов.

На рисунке 3 представлен график движения системы (1) из точки $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1 под действием управляющего воздействия, график которого представлен на рисунке 4.

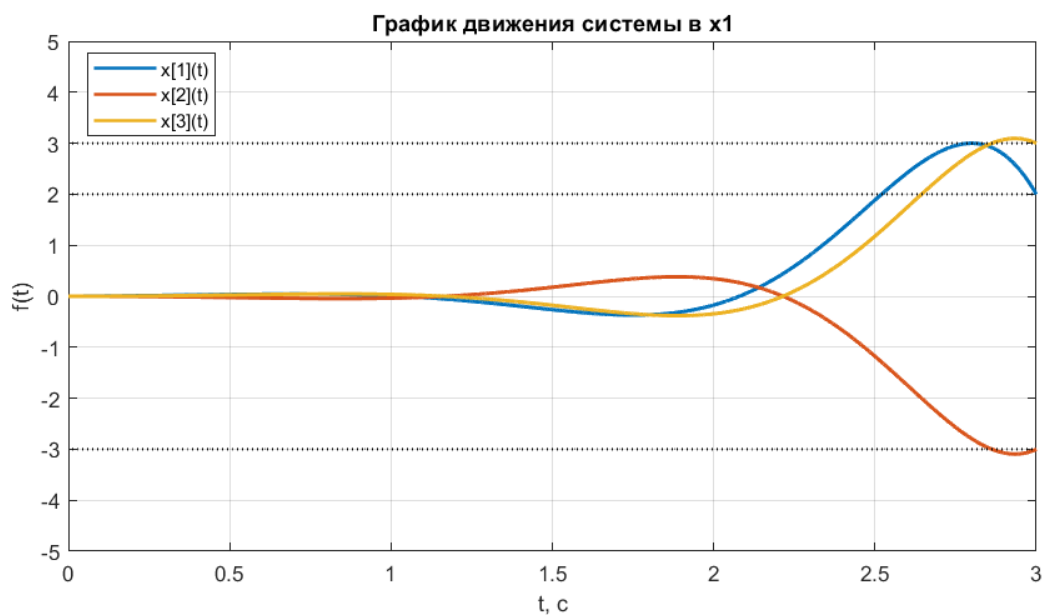


Рисунок 3 — Моделирование движения системы из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$.

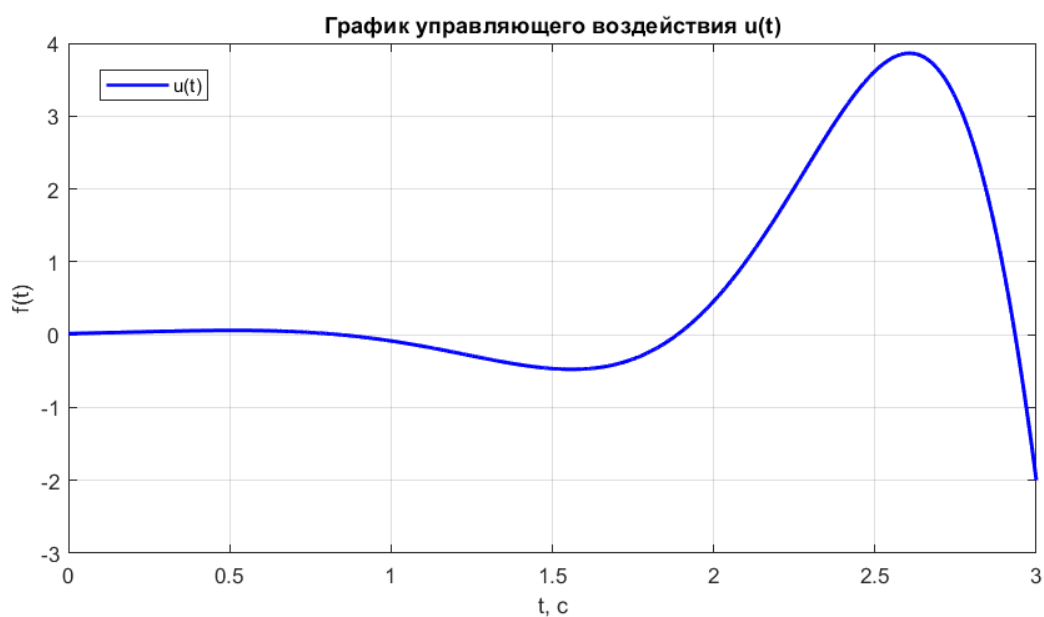


Рисунок 4 — Управляющее воздействие $u(t)$, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$.

2.5 Вывод

Исследована принадлежность точек x'_1 и x''_1 управляемому подпространству системы. Проведено исследование управляемости системы с помощью анализа матрицы управляемости, матрицы Хаутуса, Жордановой формы системы. В каждом случае было обнаружено то, что система не полностью управляема. Также найден Грамиан управляемости системы относительно времени t_1 , одно из его собственных чисел не является управляемым. Най-

дено управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1 . Проведено моделирование (рисунок 3), демонстрирующее корректность выполненных расчетов.

3 ИССЛЕДОВАНИЕ НАБЛЮДАЕМОСТИ

Возьмём матрицы A и C и сигнал $f(t)$:

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 0 & -10 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad f(t) = -3e^{-3t} \cos(2t) - 2e^{-3t} \sin(2t)$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad (32)$$

и выполним следующие шаги:

- Исследуем наблюдаемость системы:
 - Найдём матрицу наблюдаемости системы, определим её ранг, сделаем вывод об управляемости системы в целом.
 - найдём собственные числа матрицы A , найдём для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса (для наблюдаемости), определим ранги матриц, сделаем выводы о наблюдаемости каждого собственного числа и системы в целом.
 - Найдём Жорданову (или диагональную) форму системы и сделаем выводы о наблюдаемости каждого собственного числа и системы в целом.
- Найдём Грамиан наблюдаемости системы относительно времени $t_1 = 3$, вычислим его собственные числа. Проанализируем полученные собственные числа с точки зрения наблюдаемости системы.
- Считая, что выход системы $y(t)$ подчиняется закону $y(t) = f(t)$ на временном интервале $t \in [0, t_1]$ определим начальные условия системы. Выполним моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов.

3.1 Исследование наблюдаемости системы

3.1.1 Матрица наблюдаемости системы

Найдём матрицу наблюдаемости V системы (32) и определим её ранг.

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 6 & 11 & 18 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(V) = 3 \quad (33)$$

Ранг матрицы наблюдаемости равен размерности системы, следовательно, система полностью наблюдаема.

3.1.2 Собственные числа матрицы A и матрица Хаутуса

Найдём собственные числа матрицы A :

$$\begin{aligned} \det|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -9 - \lambda & 0 & -10 \\ -4 & -1 - \lambda & -6 \\ 6 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 7\lambda + 13 = \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + (3 + 2i))(\lambda + (3 - 2i)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -3 + 2i \\ \lambda_3 = -3 - 2i \end{cases} \quad (34) \end{aligned}$$

Найдём для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса (для наблюдаемости) и определим ранги матриц.

Для собственного числа $\lambda_1 = 1$:

$$V_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -10 \\ -4 & -2 & -6 \\ 6 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(V_1) = 3 \quad (35)$$

Ранг V_1 равен порядку системы, следовательно, собственное число λ_1 наблюдаемо.

Для собственного числа $\lambda_2 = -3 + 2i$:

$$V_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 - 2i & 0 & -10 \\ -4 & 2 - 2i & -6 \\ 6 & -2 & 8 - 2i \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(V_2) = 3 \quad (36)$$

Ранг V_2 равен порядку системы, следовательно, собственное число λ_2 наблюдаемо.

Для собственного числа $\lambda_3 = -3 - 2i$:

$$V_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 + 2i & 0 & -10 \\ -4 & 2 + 2i & -6 \\ 6 & -2 & 8 + 2i \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(V_3) = 3 \quad (37)$$

Ранг V_3 равен порядку системы, следовательно, собственное число λ_3 наблюдаемо.

Так как каждое собственное число матрицы A наблюдаемо, следовательно, система в целом полностью наблюдаема.

3.1.3 Жорданова (диагональная) форма системы

Найдём Жорданову (или диагональную) форму системы.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x}, \\ y = CPx, \end{cases} \quad (38)$$

где P – матрица обобщенных собственных векторов.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2.1213 & -0.7071 \\ -1 & -0.7071 & -0.7071 \\ 1 & 1.4142 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\hat{C} = CP = \begin{bmatrix} 1 & -0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix}, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (42)$$

Элементы матрицы выходов, соответствующие первым столбцам Жордановых клеток, не равны нулю и все Жордановы клетки относятся к различным собственным числам, следовательно, все собственные числа матрицы A являются наблюдаемыми. Значит, система в целом полностью наблюдаема.

3.2 Анализ системы через Грамиан

Вычислим Грамиан наблюдаемости системы относительно времени $t_1 = 3$ с, найдём его собственные числа.

$$\begin{aligned} Q(t_1) &= \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt = \int_0^3 e^{A^T t} C^T C e^{At} dt = \\ &= \int_0^3 \begin{bmatrix} \frac{-e^{(t+3)+2\cos(2t)-\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)-\cos(2t)+\sin(2t)}}{e^3} \\ \frac{e^{(t+3)-\cos(2t)-2\sin(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)-\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)+\sin(2t)}}{e^3} \\ \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)-3\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)-\sin(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)+2\sin(2t)}}{e^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-e^{(t+3)+2\cos(2t)-\sin(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)-\cos(2t)-2\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)-3\sin(2t)}}{e^3} \\ \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)-\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)-\sin(2t)}}{e^3} \\ \frac{e^{(t+3)-\cos(2t)+\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)+\sin(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)+2\sin(2t)}}{e^3} \end{bmatrix} dt = \\ &= \begin{bmatrix} 201.8539 & -201.7517 & 201.5658 \\ -201.7517 & 201.7392 & -201.4764 \\ 201.5658 & -201.4764 & 201.3034 \end{bmatrix} \quad (43) \end{aligned}$$

Нахождение конечного ответа в (43) в численном виде проводилось с помощью MATLAB.

С помощью функции $eig(Q)$ в MATLAB вычислим собственные числа Грамиана (43) и получим: $\lambda_1 = 0.0126$, $\lambda_2 = 0.0555$, $\lambda_3 = 604.8284$.

Проанализируем полученные собственные числа с точки зрения наблюдаемости системы. Так как для всех собственных чисел Грамиана верно $\lambda_i > 0$, то система полностью наблюдаема.

3.3 Моделирование системы

Считая, что выход системы $y(t)$ подчиняется закону

$$y(t) = f(t) = -3e^{-3t} \cos(2t) - 2e^{-3t} \sin(2t)$$

на временном интервале $t \in [0, t_1]$ определим начальные условия системы.

Найдем вектор соответствующий начальным условиям системы:

$$\begin{aligned} x(0) &= (Q(t_1))^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt = (Q(3))^{-1} \int_0^3 e^{A^T t} C^T y(t) dt = \\ &= \begin{bmatrix} 42.5018 & 5.9748 & -36.5773 \\ 5.9748 & 12.0013 & 6.0290 \\ -36.5773 & 6.0290 & 42.6641 \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \int_0^3 \begin{bmatrix} \frac{-e^{(t+3)+2\cos(2t)-\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)-\cos(2t)+\sin(2t)}}{e^3} \\ \frac{e^{(t+3)-\cos(2t)-2\sin(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)-\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)+\sin(2t)}}{e^3} \\ \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)-3\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)-\sin(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)+2\sin(2t)}}{e^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot (-3e^{-3t} \cos(2t) - 2e^{-3t} \sin(2t)) dt = \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (44) \end{aligned}$$

Нахождение конечного ответа в (44) в численном виде проводилось с помощью MATLAB.

Выполним моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов.

На рисунке 5 представлен график движения системы (32) из точки $x(0)$ за время t_1 , график выходного сигнала $y(t)$ и заданного закона $f(t)$ представлены на рисунке 6.

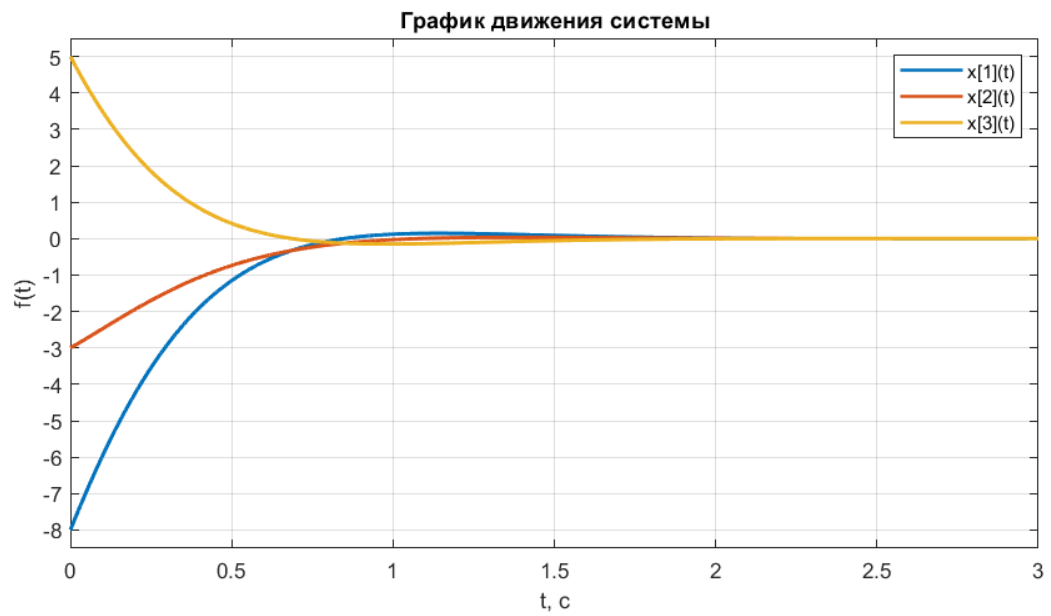


Рисунок 5 — Моделирование движения системы из $x(0)$.

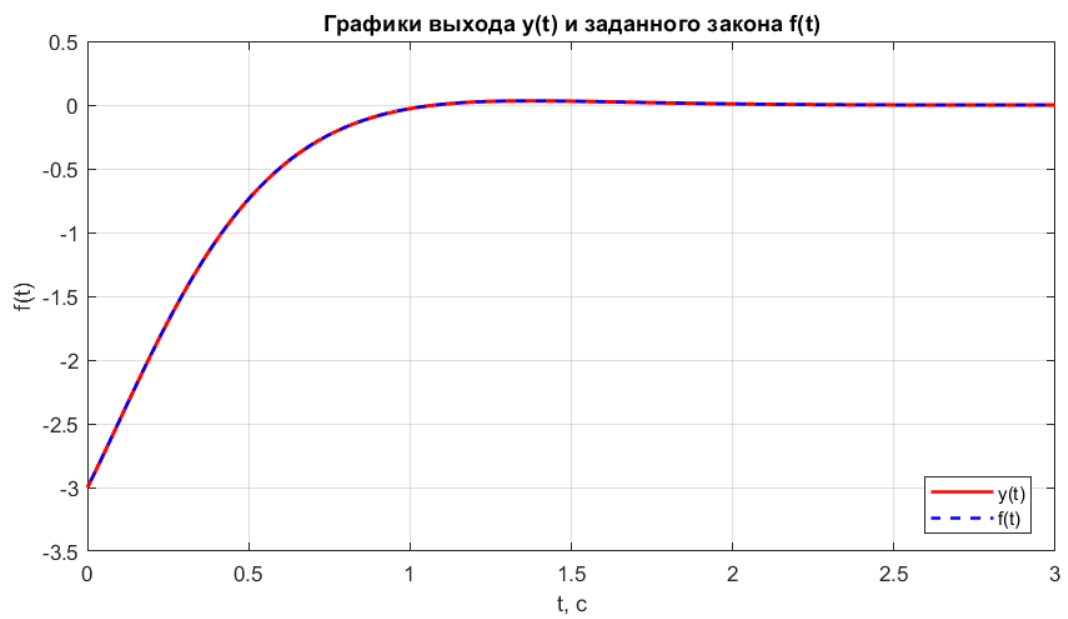


Рисунок 6 — Выходной сигнал $y(t)$ и заданный закон $f(t)$.

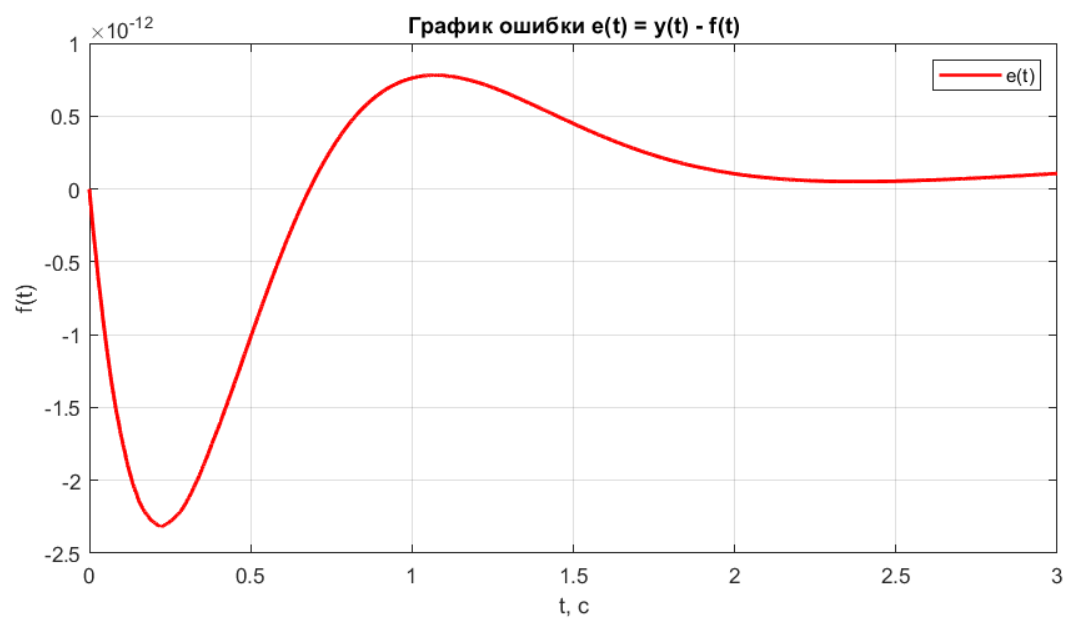


Рисунок 7 — График ошибки выходного сигнала в сравнении с заданным.

3.4 Вывод

Проведено исследование наблюдаемости системы с помощью анализа матрицы наблюдаемости, матрицы Хаутуса, Жордановой формы системы. В каждом случае было обнаружено то, что система полностью наблюдаема. Также найден Грамиан наблюдаемости системы относительно времени t_1 , все его собственные числа являются наблюдаемыми. Найдено начальное условие $x(0)$, при котором выходной сигнал системы $y(t)$ подчиняется заданному закону $f(t)$ на временном интервале $t \in [0, t_1]$. Проведено моделирование (рисунок 5), демонстрирующее корректность выполненных расчетов.

4 ЕЩЕ ОДНО ИССЛЕДОВАНИЕ НАБЛЮДАЕМОСТИ

Возьмём матрицу A , сигнал $f(t)$ и матрицу C :

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 0 & -10 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f(t) = -3e^{-3t} \cos(2t) - 2e^{-3t} \sin(2t)$$

Рассмотрим систему (32) и выполним следующие шаги:

- Выполним все шаги **Задания 3** для рассматриваемой системы.
- Определим, мог ли выход вида $y(t) = f(t)$ быть порождён начальными условиями, отличными от найденных. Если да, то привести хотя бы три таких вектора начальных условий и выполнить для каждого из них (включая изначально найденный) моделирование, демонстрирующее корректность выполненных расчетов (одинаковые выходы при разном поведении векторов состояния системы).

4.1 Исследование наблюдаемости системы

4.1.1 Матрица наблюдаемости системы

Найдем матрицу наблюдаемости V системы и определим её ранг.

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \\ 5 & 12 & 17 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(V) = 2 \quad (45)$$

Ранг матрицы наблюдаемости V равен двум, что меньше размерности системы. Следовательно, система не является полностью наблюдаемой.

4.1.2 Собственные числа матрицы A и матрица Хаутуса

Собственные числа матрицы A были вычислены в главе 3, пункт 3.1.2.

Найдем для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса.

Для собственного числа $\lambda_1 = 1$.

$$V_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -10 \\ -4 & -2 & -6 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(V_1) = 2 \quad (46)$$

Ранг V_1 меньше порядка системы, следовательно, собственное число λ_1 не наблюдаемо.

Для собственного числа $\lambda_2 = -3 + 2i$:

$$V_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 - 2i & 0 & -10 \\ -4 & 2 - 2i & -6 \\ 6 & -2 & 8 - 2i \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(V_2) = 3 \quad (47)$$

Ранг V_2 равен порядку системы, следовательно, собственное число λ_2 наблюдаемо.

Для собственного числа $\lambda_3 = -3 - 2i$:

$$V_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 + 2i & 0 & -10 \\ -4 & 2 + 2i & -6 \\ 6 & -2 & 8 + 2i \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(V_3) = 3 \quad (48)$$

Ранг V_3 равен порядку системы, следовательно, собственное число λ_3 наблюдаемо.

Так как собственное число λ_1 матрицы A не наблюдаемо, следовательно, система в целом не полностью наблюдаема.

4.1.3 Жорданова (диагональная) форма системы

Найдём Жорданову (диагональную) форму системы

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x}, \\ y = CP\hat{x}, \end{cases} \quad (49)$$

где P – матрица обобщенных собственных векторов.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2.1213 & -0.7071 \\ -1 & -0.7071 & -0.7071 \\ 1 & 1.4142 & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\hat{C} = CP = \begin{bmatrix} 0 & -0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix}, \\ y = \begin{bmatrix} 0 & -0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (53)$$

Собственное число $\lambda_1 = 1$ не наблюдаемо, так как элемент матрицы выходов, соответствующий первому столбцу Жордановой, клетки равен нулю. Остальные собственные числа наблюдаемы. Следовательно, система не является полностью наблюдаемой.

4.2 Анализ системы через Грамиан

Вычислим Грамиан наблюдаемости системы относительно времени $t_1 = 3$ с, найдём его собственные числа.

$$\begin{aligned}
Q(t_1) &= \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt = \int_0^3 e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt = \\
&= \int_0^3 \begin{bmatrix} \frac{-e^{(t+3)+2\cos(2t)-\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)-\cos(2t)+\sin(2t)}}{e^3} \\ \frac{e^{(t+3)-\cos(2t)-2\sin(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)-\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)+\sin(2t)}}{e^3} \\ \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)-3\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)-\sin(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)+2\sin(2t)}}{e^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \\
&\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-e^{(t+3)+2\cos(2t)-\sin(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)-\cos(2t)-2\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)-3\sin(2t)}}{e^3} \\ \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)-\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)-\sin(2t)}}{e^3} \\ \frac{e^{(t+3)-\cos(2t)+\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)+\sin(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)+2\sin(2t)}}{e^3} \end{bmatrix} dt = \\
&= \begin{bmatrix} 0.1410 & -0.0385 & 0.1026 \\ -0.0385 & 0.0256 & -0.0128 \\ 0.1026 & -0.0128 & 0.0897 \end{bmatrix} \quad (54)
\end{aligned}$$

Нахождение конечного ответа в (54) в численном виде проводилось с помощью MATLAB.

С помощью функции $eig(Q)$ в MATLAB вычислим собственные числа Грамиана (54) и получим: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0.0281$, $\lambda_3 = 0.2283$.

Проанализируем полученные собственные числа с точки зрения наблюдаемости системы. Так как собственное число λ_1 Грамиана равно нулю, то система не полностью наблюдаема.

4.3 Моделирование системы

Считая, что выход системы $y(t)$ подчиняется закону

$$y(t) = f(t) = -3e^{-3t} \cos(2t) - 2e^{-3t} \sin(2t)$$

на временном интервале $t \in [0, t_1]$ определим начальные условия системы.

Найдем вектор соответствующий начальным условиям системы:

$$\begin{aligned}
x(0) &= (Q(t_1))^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt = (Q(3))^+ \int_0^3 e^{A^T t} C^T y(t) dt = \\
&= \begin{bmatrix} 4.6667 & -7.3333 & -2.6667 \\ -7.3333 & 22.6667 & 15.3333 \\ -2.6667 & 15.3333 & 12.6667 \end{bmatrix} \cdot \\
&\cdot \int_0^3 \begin{bmatrix} \frac{-e^{(t+3)+2\cos(2t)-\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)-\cos(2t)+\sin(2t)}}{e^3} \\ \frac{e^{(t+3)-\cos(2t)-2\sin(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)-\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)+\sin(2t)}}{e^3} \\ \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)-3\sin(2t)}}{e^3} & \frac{-e^{(t+3)+\cos(2t)-\sin(2t)}}{e^3} & \frac{e^{(t+3)+2\sin(2t)}}{e^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \\
&\cdot (-3e^{-3t} \cos(2t) - 2e^{-3t} \sin(2t)) dt = \begin{bmatrix} -2.6667 \\ 2.3333 \\ -0.3333 \end{bmatrix} \quad (55)
\end{aligned}$$

Нахождение конечного ответа в (55) в численном виде проводилось с помощью MATLAB. Кроме того, ввиду равенства определителя матрицы $Q(t_1)$ нулю, вместо обратной матрицы была вычислена псевдообратная.

Выполним моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов.

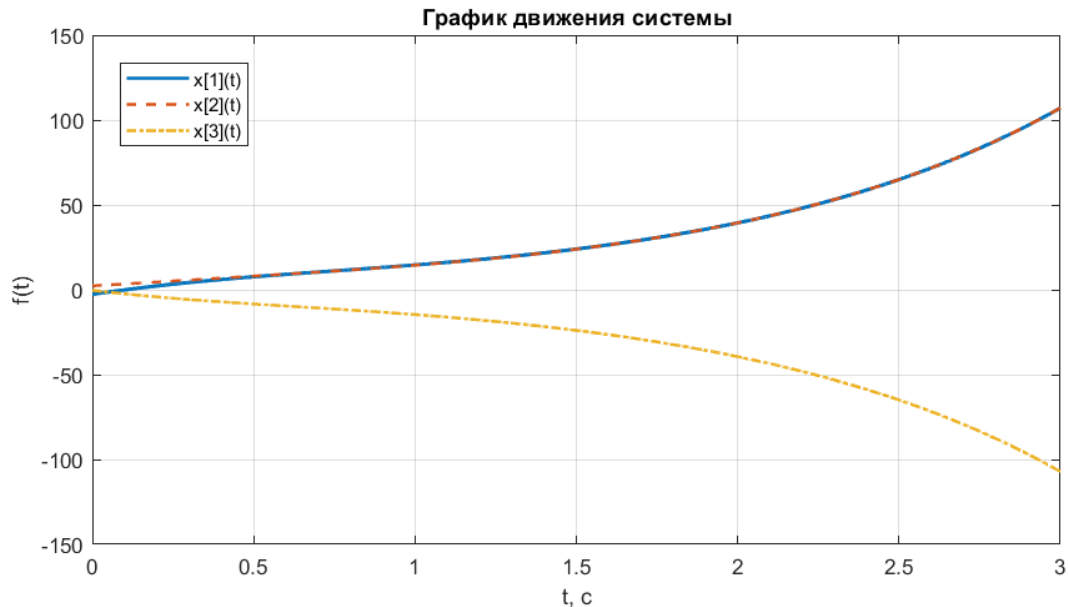


Рисунок 8 — Моделирование движения системы из $x(0)$.

На рисунке 8 представлен график движения системы из точки $x(0)$ за время t_1 , график выходного сигнала $y(t)$ и заданного закона $f(t)$ представлены на рисунке 9.

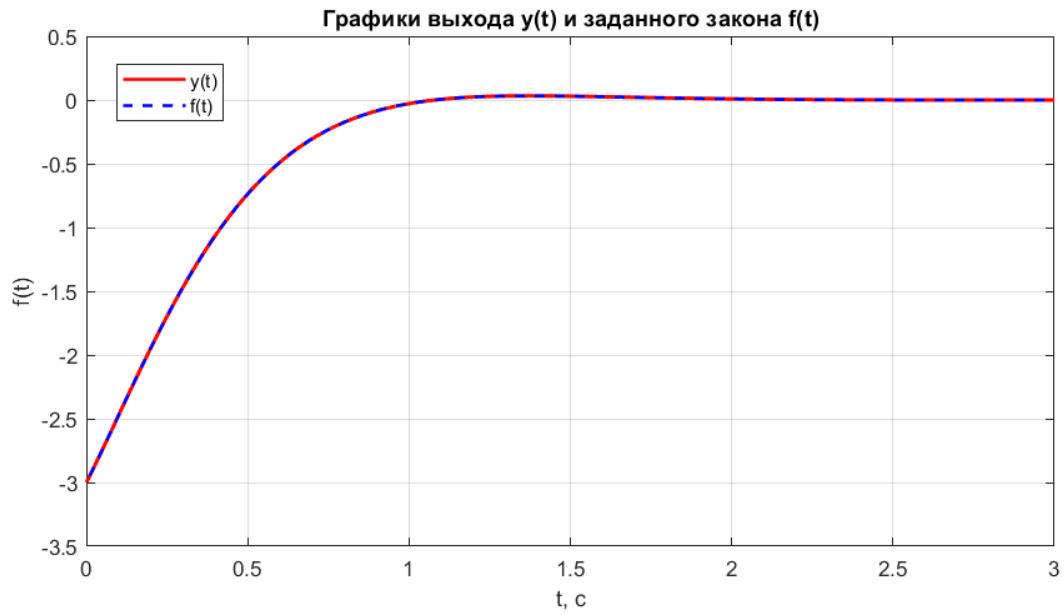


Рисунок 9 — Выходной сигнал $y(t)$ и заданный закон $f(t)$ при начальных условиях $x(0)$.

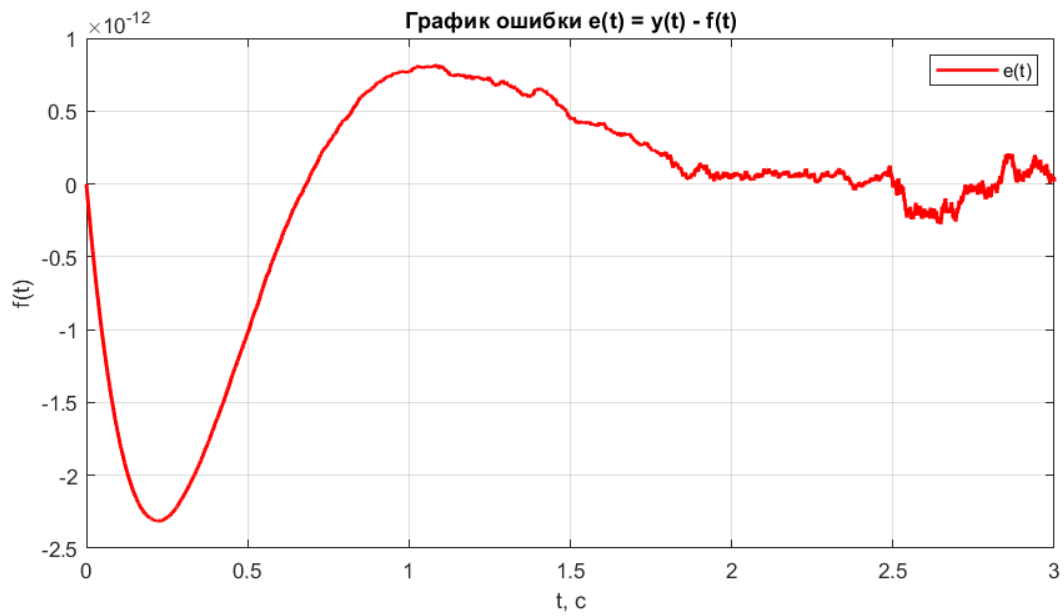


Рисунок 10 — График ошибки выходного сигнала в сравнении с заданным при начальных условиях $x(0)$.

4.4 Другие начальные условия

Определим, мог ли выход вида $y(t) = f(t)$ быть порождён начальными условиями, отличными от найденных.

Вычислим ядро матрицы V :

$$n = NullSpace(V) = \begin{bmatrix} -0.5774 \\ -0.5774 \\ 0.5774 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Для того, чтобы найти вектор начальных условий $x'(0)$, отличный от $x(0)$, чтобы выходной сигнал был таким же, необходимо, чтобы их разность принадлежала ненаблюдаемому подпространству, то есть ядру матрицы наблюдаемости.

Приведем три вектора, отличных от $x(0)$ и обеспечивающих такой же выходной сигнал на заданном промежутке времени.

$$x'(0) = x(0) + n = \begin{bmatrix} -3.2441 \\ 1.7559 \\ 0.2441 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$x''(0) = x(0) + 2n = \begin{bmatrix} -3.8214 \\ 1.1786 \\ 0.8214 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$x'''(0) = x(0) + 3n = \begin{bmatrix} -4.3988 \\ 0.6012 \\ 1.3988 \end{bmatrix} \quad (59)$$

И выполним для каждого из них моделирование, демонстрирующее корректность выполненных расчетов.

Заметим, что при всех найденных начальных условиях (рисунки 9, 11, 13, 15) график выхода $y(t)$ совпадает с заданным законом $f(t)$. И порядок ошибки (рисунки 10, 12, 14, 16) также совпадает, как и заметное уменьшение модуля ошибки ближе к концу промежутка времени.

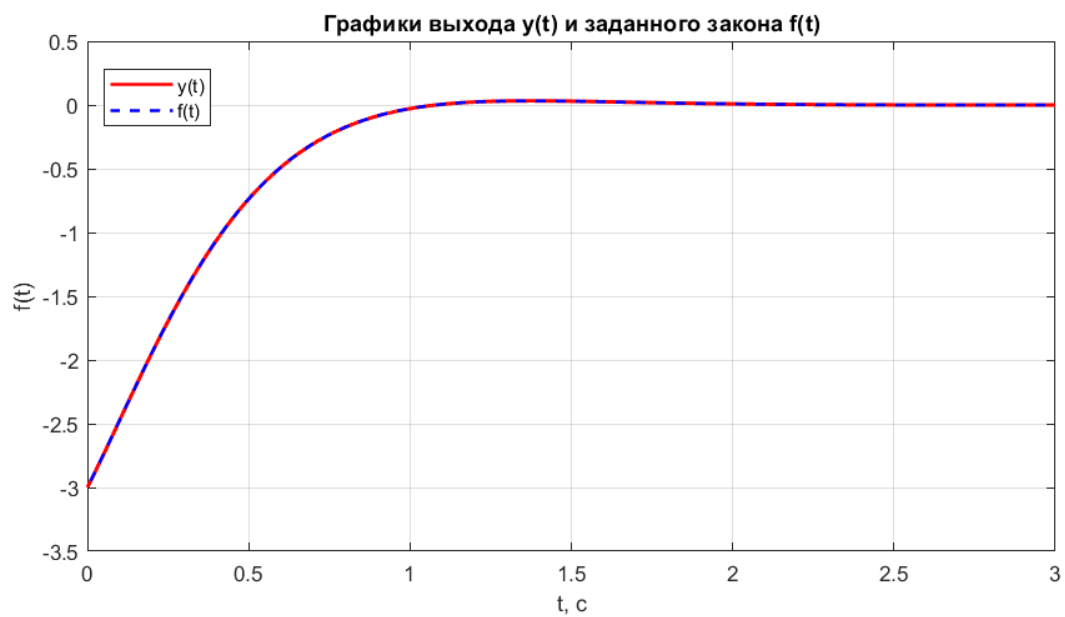


Рисунок 11 — Выходной сигнал $y(t)$ и заданный закон $f(t)$ при начальных условиях $x'(0)$.

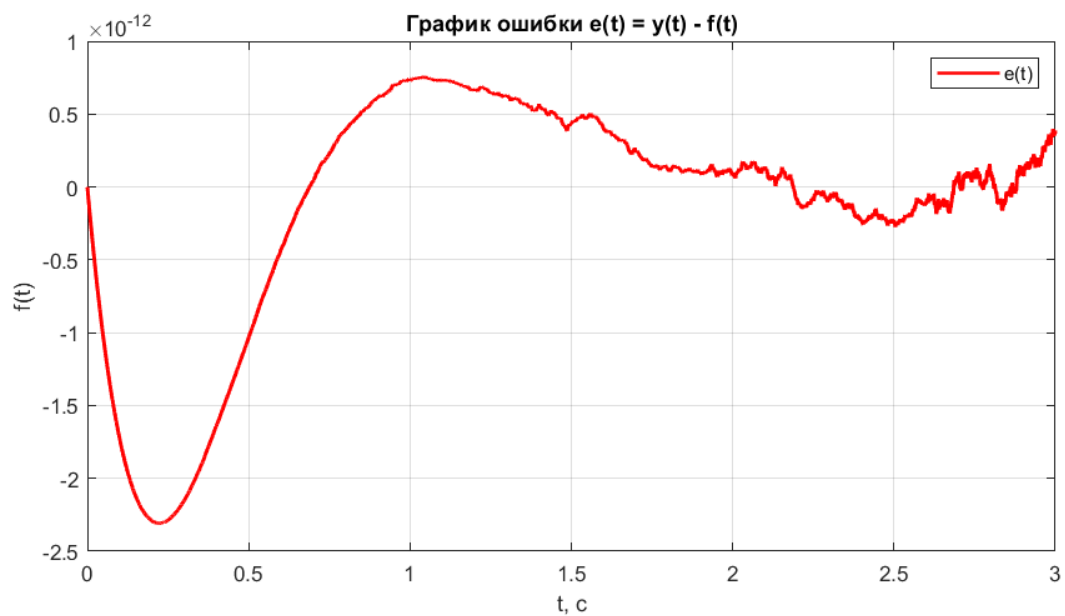


Рисунок 12 — График ошибки выходного сигнала в сравнении с заданным при начальных условиях $x'(0)$.

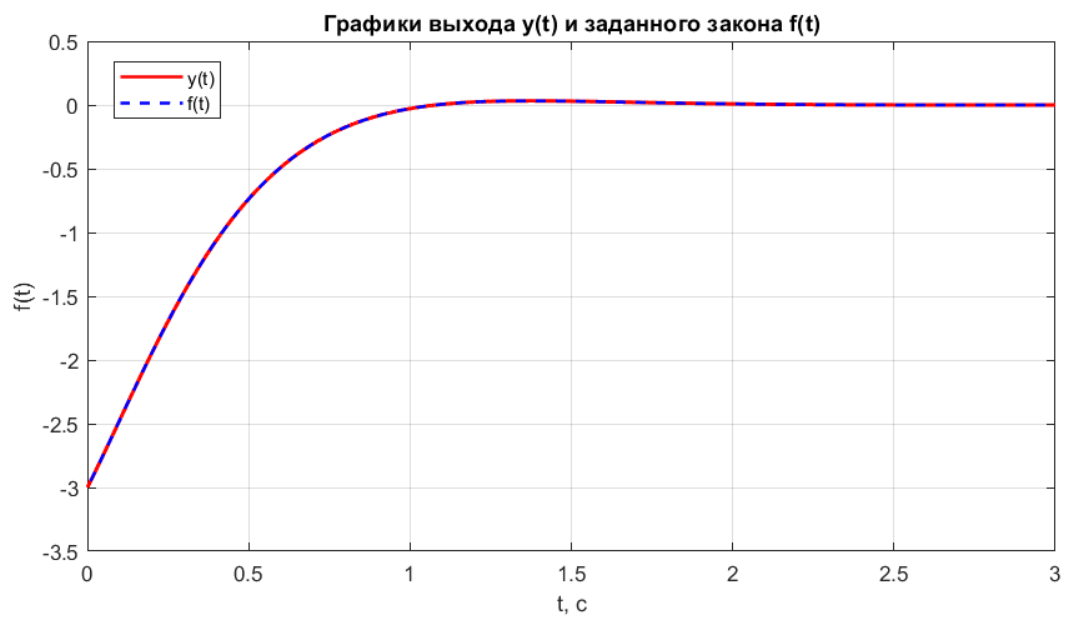


Рисунок 13 — Выходной сигнал $y(t)$ и заданный закон $f(t)$ при начальных условиях $x''(0)$.

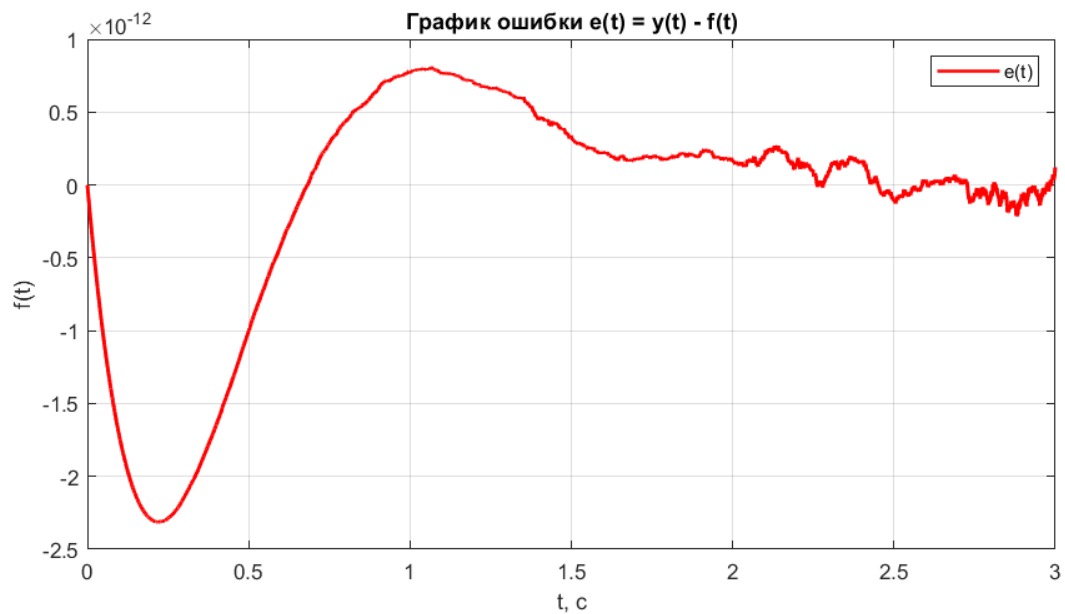


Рисунок 14 — График ошибки выходного сигнала в сравнении с заданным при начальных условиях $x''(0)$.

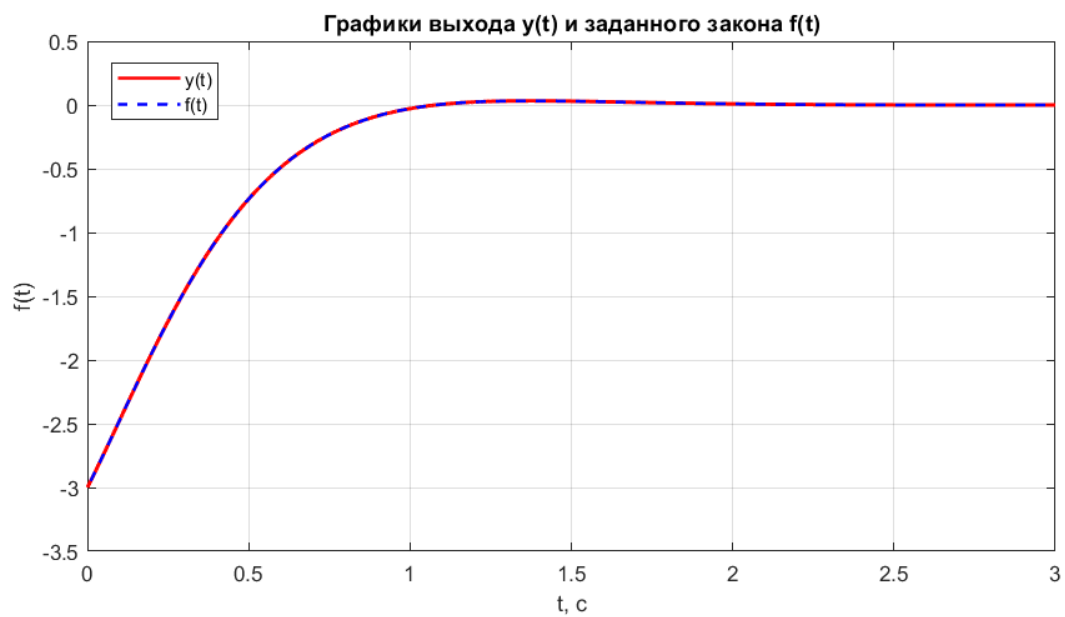


Рисунок 15 — Выходной сигнал $y(t)$ и заданный закон $f(t)$ при начальных условиях $x'''(0)$.

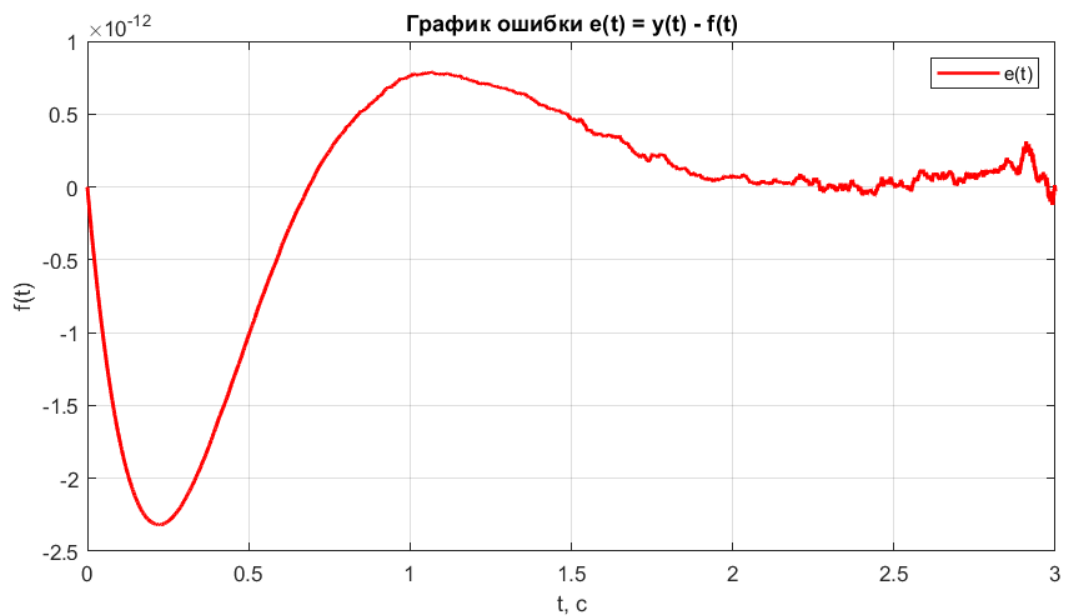


Рисунок 16 — График ошибки выходного сигнала в сравнении с заданным при начальных условиях $x'''(0)$.

4.5 Вывод

Проведено исследование наблюдаемости системы с помощью анализа матрицы наблюдаемости, матрицы Хаутуса, Жордановой формы системы. В каждом случае было обнаружено то, что система не полностью наблюдаема. Также найден Грамиан наблюдаемости системы относительно времени t_1 , одно из его собственных чисел не является наблюдаемым. Найдено начальное условие $x(0)$, при котором выходной сигнал системы $y(t)$ подчиняется заданному закону $f(t)$ на временном интервале $t \in [0, t_1]$. Проведено моделирование (рисунок 8), демонстрирующее корректность выполненных расчетов. Кроме того, найдены начальные условия, отличные от $x(0)$, при которых выход $y(t)$ системы также совпадает с заданным законом $f(t)$.

5 ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПО ВЫХОДУ

Возьмём матрицы A , B и C :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -6 & -7 & -2 \\ 6 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (60)$$

и выполним следующие шаги:

- Найдём Жорданову (или диагональную) форму системы.
- Определим управляемость и наблюдаемость каждого из собственных чисел в системе в целом любым удобным способом.
- Найдём матрицу управляемости системы по выходу при $D = 0_{2 \times 2}$, определим её ранг, сделаем вывод об управляемости системы по выходу.
- Проанализируем полученные результаты, попытаемся сделать вывод о причинах управляемости или неуправляемости по выходу.
- Предложить такую матрицу связи D , которая могла бы обеспечить полную управляемость по выходу.

5.1 Жорданова (диагональная) форма системы

Найдём Жорданову (или диагональную) форму системы.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu, \\ y = CP\hat{x} + Du, \end{cases} \quad (61)$$

где P – матрица обобщенных собственных векторов.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0.7071 & -0.7071 \\ 1 & -1.4142 & 0 \\ 0 & 1.4142 & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$\hat{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.4142 \\ -1.4142 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\hat{C} = CP = \begin{bmatrix} 1 & -2.8284 & 0 \\ -3 & 8.4853 & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1.4142 \\ -1.4142 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -2.8284 & 0 \\ -3 & 8.4853 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + Du, \end{cases} \quad (66)$$

5.2 Определение управляемости и наблюдаемости собственных чисел

Определим управляемость и наблюдаемость каждого из собственных чисел в системе в целом любым с помощью матриц Хаутуса.

Для начала воспользуемся Жордановым представлением системы в прошлом пункте и запишем собственные числа матрицы A .

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -2 + 3i, \\ \lambda_3 = -2 - 3i \end{cases} \quad (67)$$

5.2.1 Исследование управляемости

Найдем для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса для определения управляемости и вычислим ранги матриц.

Для собственного числа $\lambda_1 = -1$:

$$U_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & -2 \\ -6 & -6 & -2 & 4 \\ 6 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_1) = 3 \quad (68)$$

Ранг U_1 равен порядку системы, следовательно, собственное число λ_1 управляемо.

Для собственного числа $\lambda_2 = -2 + 3i$:

$$U_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3i & 2 & -1 & -2 \\ -6 & -5 - 3i & -2 & 4 \\ 6 & 6 & 3 - 3i & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_2) = 3 \quad (69)$$

Ранг U_2 равен порядку системы, следовательно, собственное число λ_2 управляемо.

Для собственного числа $\lambda_3 = -2 - 3i$:

$$U_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 3i & 2 & -1 & -2 \\ -6 & -5 + 3i & -2 & 4 \\ 6 & 6 & 3 + 3i & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_3) = 3 \quad (70)$$

Ранг U_3 равен порядку системы, следовательно, собственное число λ_3 управляемо.

Все собственные числа матрицы A управляемы, следовательно, система в целом полностью управляема.

5.2.2 Исследование наблюдаемости

Найдем для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса для определения наблюдаемости и вычислим ранги матриц.

Для собственного числа $\lambda_1 = -1$:

$$V_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(V_1) = 3 \quad (71)$$

Ранг V_1 равен порядку системы, следовательно, собственное число λ_1 наблюдаемо.

Для собственного числа $\lambda_2 = -2 + 3i$:

$$V_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3i & 2 & -1 \\ -6 & -5 - 3i & -2 \\ 6 & 6 & 3 - 3i \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(V_2) = 3 \quad (72)$$

Ранг V_2 равен порядку системы, следовательно, собственное число λ_2 наблюдаемо.

Для собственного числа $\lambda_3 = -2 - 3i$:

$$V_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 3i & 2 & -1 \\ -6 & -5 + 3i & -2 \\ 6 & 6 & 3 + 3i \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(V_3) = 3 \quad (73)$$

Ранг V_3 равен порядку системы, следовательно, собственное число λ_3 наблюдаемо.

Все собственные числа матрицы A наблюдаемы, следовательно, система в целом полностью наблюдаема.

5.3 Исследование матрицы управляемости по выходу

Запишем матрицу управляемости U :

$$U = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -26 \\ 4 & -12 & 16 \\ -2 & 10 & -14 \end{bmatrix} \quad (74)$$

Найдём матрицу управляемости системы по выходу при $D = 0_{2 \times 2}$ и определим её ранг.

$$\begin{aligned}
U_{\text{вых}} = [CU \ D] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 8 & -26 \\ 4 & -12 & 16 \\ -2 & 10 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 6 & -22 & 30 & 0 & 0 \\ -18 & 66 & -90 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_{\text{вых}}) = 1 \quad (75)
\end{aligned}$$

Для обеспечения управляемости по выходу ранг матрицы управляемости $U_{\text{вых}}$ должен быть равен размерности выхода. В нашем случае размерность выхода равна двум, а ранг матрицы $U_{\text{вых}}$ равен одному, следовательно, система не является полностью управляемой по выходу.

5.4 Анализ результатов

Проанализируем полученные результаты, попытаемся сделать вывод о причинах неуправляемости по выходу. Система оказалась неуправляемой по выходу, основной причиной может являться то, что задана нулевая матрица связи D , с помощью которой сложно обеспечить управляемость по выходу, то есть она не может создать достаточную связь между входами и выходами для данной системы. Кроме того, в нашем случае строки матрицы CU , которая является компонентой $U_{\text{вых}}$ являются линейно зависимыми, поэтому для обеспечения управляемости по выходу такой системы необходимо, чтобы матрица D обеспечивала линейную независимость строк $U_{\text{вых}}$.

5.5 Поиск матрицы связи для обеспечения полной управляемости

Предложим такую матрицу связи D , которая могла бы обеспечить полную управляемость по выходу.

Запишем матрицу связи в общем виде:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \quad (76)$$

Кроме того, ранее было замечено, что строки матрицы CU являются линейно зависимыми. Предположим, что для обеспечения линейной независимости строк матрицы $U_{\text{вых}}$ необходимо, чтобы было выполнено неравенство $3d_{1i} \neq d_{2i}$ хотя бы одного из двух значений индекса i .

Тогда возьмем следующую матрицу связи D :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (77)$$

и проверим управляемость системы по выходу. Найдём матрицу управляемости системы по выходу и определим её ранг.

$$\begin{aligned} U_{\text{вых}} = [CU \quad D] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 8 & -26 \\ 4 & -12 & 16 \\ -2 & 10 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -22 & 30 & 1 & 0 \\ -18 & 66 & -90 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_{\text{вых}}) = 2 \quad (78) \end{aligned}$$

Для обеспечения управляемости по выходу ранг матрицы управляемости $U_{\text{вых}}$ должен быть равен размерности выхода. В нашем случае размерность выхода равна двум, а ранг матрицы $U_{\text{вых}}$ равен одному, следовательно, система не является полностью управляемой по выходу.

6 ВЫВОД

В ходе выполнения лабораторной работы были применены на практике знания об управляемости и наблюдаемости систем. В первых двух заданиях проводились исследования управляемости систем с помощью матрицы управляемости, составления матриц Хаутуса для собственных чисел, рассмотрения Жордановой формы системы, Грамиана, рассчитаны управляющие сигналы, переводящие систему из одной точки в другую за определенное время. Во втором задании проанализирована принадлежность заданных точек управляемому подпространству системы.

При выполнении третьего и четвертого проводились исследования наблюдаемости заданных систем с помощью матрицы наблюдаемости, построения матриц Хаутуса для собственных чисел, рассмотрения Жордановой формы системы и Грамиана. Определены начальные условия, при которых выходной сигнал системы совпадает с заданным законом на определенном промежутке времени. В четвертом задании система дополнительно исследована на наличие отличных от найденного ранее начальных условий.

В последнем задании система была исследована на управляемость и наблюдаемость. Кроме того, проведен анализ управляемости системы по выходу при заданной матрице связи, предложена новая матрица связи, которая обеспечивает полную управляемость по выходу.