МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ
по лабораторной работе № 2:
МОДАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ И НАБЛЮДАТЕЛИ

Вариант 17

по дисциплине
«Теория автоматического управления»

Студент:
Группа № R3338 *А.А. Нечаева*

Предподаватель:
ассистент факультера СУиР, к. т. н. *А.В. Пашенко*

Санкт-Петербург 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1 МОДАЛЬНЫЙ РЕГУЛЯТОР 4
1.1 Управляемость и стабилизируемость системы 5
1.2 Схема моделирования 6
1.3 Спектры системы $(A + BK)$ 6
1.3.1 Матрицы регулятора для достижимых спектров 7
1.3.2 Собственные числа исследуемых систем 9
1.3.3 Компьютерное моделирование 10
1.4 Сравнение и анализ результатов моделирования 13

2 НАБЛЮДАТЕЛЬ ПОЛНОГО ПОРЯДКА 15
2.1 Наблюдаемость и обнаруживаемость системы 16
2.2 Схема моделирования системы 18
2.3 Спектр $\sigma(A + LC)$ 18
2.3.1 Матрицы корреляции наблюдателя 18
2.3.2 Собственные числа матрицы наблюдателя 21
2.3.3 Компьютерное моделирование 22
2.4 Сопоставление полученных результатов 31

3 МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ 32
3.1 Управляемость и наблюдаемость собственных чисел матрицы A 33
3.2 Схема моделируемой системы 35
3.3 Желаемые спектры 36
3.4 Синтез регулятора 36
3.5 Синтез матрицы коррекции наблюдателя 38
3.6 Компьютерное моделирование 39
3.7 Вывод 43

4 НАБЛЮДАТЕЛЬ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА 44
4.1 Управляемость и наблюдаемость собственных чисел матрицы A 45
4.2 Схема моделирования системы 46
4.3 Спектр матрицы наблюдателя пониженного порядка 47

4.4 Синтез матрицы преобразования ... 47
4.5 Компьютерное моделирование ... 48
4.6 Вывод ... 54

5 ВЫВОД ... 55

1 МОДАЛЬНЫЙ РЕГУЛЯТОР

В соответствии с вариантом возьмем матрицы A и B и рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Выполним следующие шаги:

– Найдем собственные числа матрицы A и определим управляемость каждого из них. Сделаем вывод об управляемости и стабилизируемости системы.
– Построим схему моделирования системы (1), замкнутой регулятором $u = Kx$.
– Рассмотрим предложенные в соответствии с вариантом желаемые спектры замкнутой системы $(A + BK)$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \{-1, -1, -1\}, & \sigma_2 &= \{-3, -3, -3\}, \\ \sigma_3 &= \{-1, -10, -100\}, & \sigma_4 &= \{-3, -30, -300\}, \\ \sigma_5 &= \{-1, -1 \pm 3i\}, & \sigma_6 &= \{-3, -3 \pm 9i\}, \end{aligned}$$

и определим, какие из них достижимы, а какие нет. Обоснуем выбор.
– Для каждого из достижимых спектров:
  – Найдем соответствующую матрицу регулятора K, приводящего спектр замкнутой системы к желаемому.
  – Определим собственнные числа матрицы замкнутой системы $(A + BK)$ и сравним с желаемым спектром в подтверждение корректности синтеза регулятора.
  – Выполним компьютерное моделирование и построим графики формируемого регулятором управляения $u(t)$ и вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

– Сопоставим полученные результаты компьютерного моделирования для рассмотренных спектров, оценим возможные сравнительные преимущества и недостатки каждого из них.

1.1 Управляемость и стабилизируемость системы

Найдем собственные числа матрицы A.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 2 - 3i \\ \lambda_3 = 2 + 3i \end{cases}$$

Определим управляемость собственных чисел с помощью матриц Хаутуса.

Для собственного числа $\lambda_1 = -3$:

$$U_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & -8 & 0 \\ 6 & 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \ rank(U_1) = 2 \tag{2}$$

Ранг U_1 меньше порядка системы, следовательно, собственного число λ_1 неуправляемо.

Для собственного числа $\lambda_2 = 2 - 3i$:

$$U_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+3i & 8 & 5 & 2 \\ -6 & -11+3i & -8 & 0 \\ 6 & 6 & 3+3i & 0 \end{bmatrix}, \ rank(U_2) = 3 \tag{3}$$

Ранг U_2 равно порядку системы, следовательно, собственного число λ_2 управляемо.

Для собственного числа $\lambda_3 = 2 + 3i$:

$$U_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3i & 8 & 5 & 2 \\ -6 & -11-3i & -8 & 0 \\ 6 & 6 & 3-3i & 0 \end{bmatrix}, \ rank(U_3) = 3 \tag{4}$$

Ранг U_3 равно порядку системы, следовательно, собственного число λ_3 управляемо.

Система в целом не является полностью управляемой, из-за того, что собственное число $\lambda_1 = -3$ неуправляемо. В то же время $Re(\lambda_1) < 0$, то есть данное собственное число устойчивое, следовательно, система стабилизируема.

1.2 Схема моделирования

Построим схему моделирования системы (1), замкнутой регулятором $u = Kx$.

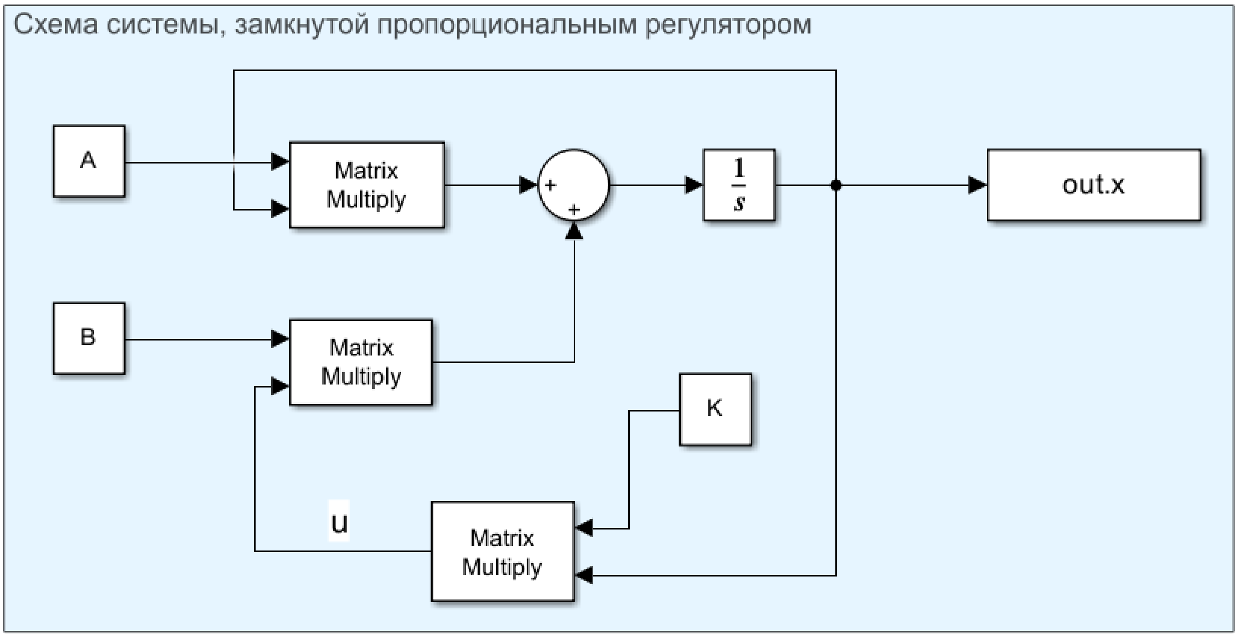

Рисунок 1 — Схема моделирования системы, замкнутой регулятором $u = Kx$.

1.3 Спектры системы $(A + BK)$

Рассмотрим предложенные в соответствии с вариантом желаемые спектры замкнутой системы $(A + BK)$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \{-1, -1, -1\}, & \sigma_2 &= \{-3, -3, -3\}, \\ \sigma_3 &= \{-1, -10, -100\}, & \sigma_4 &= \{-3, -30, -300\}, \\ \sigma_5 &= \{-1, -1 \pm 3i\}, & \sigma_6 &= \{-3, -3 \pm 9i\}, \end{aligned}$$

и определим, какие из них достижимы, а какие нет. Ранее было выяснено, что у системы есть одно неуправляемое число $\lambda_1 = -3$, которое не "сместить"с помощью регулятора, то есть оно сохранится в спектре матрицы $(A + BK)$, следовательно, из предложенных спектров этим необходимым условием обладают σ_2, σ_4 и σ_6.

1.3.1 Матрицы регулятора для достижимых спектров

Для нахождения матрицы регулятора K воспользуемся формулой

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases} \tag{5}$$

Спектр $\sigma_2 = \{-3, -3, -3\}$

Для получения матрицы Γ_1 воспользуемся полиномом Ньютона третьего порядка с $\omega_0 = 3$

$$(\lambda + 3)^3 = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27 \tag{6}$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -27 & -27 & -9 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Теперь с помощью $MATLAB$ решим уравнение Сильвестра

$$AP_1 - P_1\Gamma_1 = BY_1$$

относительно P_1:

$$P_1 = \begin{bmatrix} -4.4149 & -7.6964 & -1.0423 \\ 80.0021 & 25.1341 & 2.5869 \\ -77.9603 & -23.7728 & -2.3601 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Далее найдем значение матрицы K_1

$$K_1 = -Y_1P_1^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -15.2417 & -14.0751 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Спектр $\sigma_4 = \{-3, -30, -300\}$

Составим матрицу Γ_2 в Жордановой форме так, чтобы её спектр совпадал с σ_4

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & -300 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Теперь подберем такую матрицу Y_2, чтобы (Y_2, Γ_2) была ненаблюдаема для неуправляемого собственного числа $\lambda = -3$ и наблюдаема для всех остальных собственных чисел.

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Теперь с помощью $MATLAB$ решим уравнение Сильвестра

$$AP_2 - P_2\Gamma_2 = BY_2$$

относительно P_2:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.0561 & 0.0066 \\ 0 & 0.0116 & 0.0001 \\ 0 & -0.0116 & -0.0001 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Заметим, что определитель матрицы P_2 равен нулю, следовательно, при нахождении матрицы K_2 будем вычислять псевдообратную матрицу P_2^+

$$K_2 = -Y_2P_2^+ = \begin{bmatrix} -167 & 360.5417 & -360.5417 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Спектр $\sigma_6 = \{-3, -3 \pm 9i\}$

Составим матрицу Γ_3 в Жордановой форме так, чтобы её спектр совпадал с σ_6

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & -9 & -3 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Теперь подберем такую матрицу Y_3, чтобы (Y_3, Γ_3) была ненаблюдаема для неуправляемого собственного числа $\lambda = -3$ и наблюдаема для всех остальных собственных чисел.

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Теперь с помощью $MATLAB$ решим уравнение Сильвестра

$$AP_3 - P_3\Gamma_3 = BY_3$$

относительно P_3:

$$P_3 = \begin{bmatrix} -0 & 0.0219 & 0.2559 \\ 0 & -0.1595 & 0.0501 \\ 0 & 0.1595 & -0.0501 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Заметим, что определитель матрицы P_3 равен нулю, следовательно, при нахождении матрицы K_3 будем вычислять псевдообратную матрицу P_3^+

$$K_3 = -Y_3 P_3^+ = \begin{bmatrix} -5 & 2.7917 & -2.7917 \end{bmatrix} \tag{17}$$

1.3.2 Собственные числа исследуемых систем

Спектр $\sigma_2 = \{-3, -3, -3\}$

Для спектра σ_2 была получена следующая матрица коэффициентов регулятора $K_1 = [-5 \;\; -15.2417 \;\; -14.0751]$. Проверим, корректность результата, вычислив собственные числа замкнутой системы

$$(A + BK) = \begin{bmatrix} -5 & -22.4835 & -23.1502 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = -3 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases} \tag{18}$$

Как можно заметить, собственные числа замкнутой системы совпадают с желаемым спектром σ_2, следовательно, он достигнут.

Спектр $\sigma_4 = \{-3, -30, -300\}$

Для спектра σ_4 была получена следующая матрица коэффициентов регулятора $K_2 = [-167 \;\; 360.5417 \;\; -360.5417]$. Проверим, корректность результата, вычислив собственные числа замкнутой системы

$$(A + BK) = \begin{bmatrix} -329 & 729.0833 & -716.0833 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = -30 \\ \lambda_3 = -300 \end{cases} \tag{19}$$

Как можно заметить, собственные числа замкнутой системы совпадают с желаемым спектром σ_4, следовательно, он достигнут.

Спектр $\sigma_6 = \{-3, -3 \pm 9i\}$

Для спектра σ_6 была получена следующая матрица коэффициентов регулятора $K_3 = [-5 \;\; 2.7917 \;\; -2.7917]$. Проверим, корректность результата, вычислив собственные числа замкнутой системы

$$(A + BK) = \begin{bmatrix} -5 & 13.5833 & -0.5833 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = -3 + 9i \\ \lambda_3 = -3 - 9i \end{cases} \qquad (20)$$

Как можно заметить, собственные числа замкнутой системы совпадают с желаемым спектром σ_6, следовательно, он достигнут.

1.3.3 Компьютерное моделирование

Выполним моделирование при начальных условиях $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Спектр $\sigma_2 = \{-3, -3, -3\}$

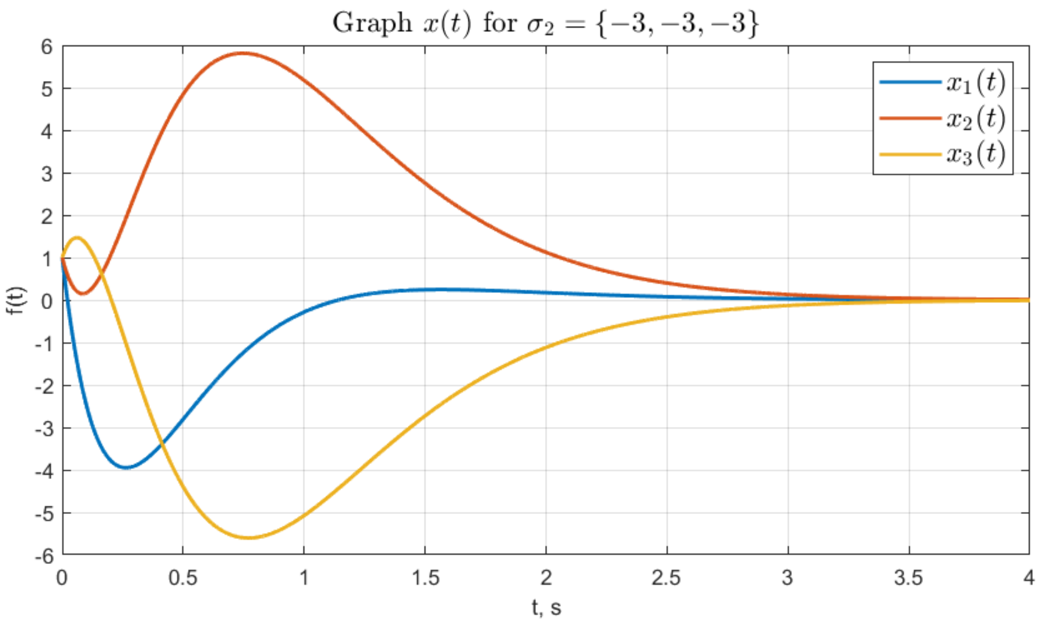

Рисунок 2 — График вектора состояния замкнутой системы для спектра σ_2.

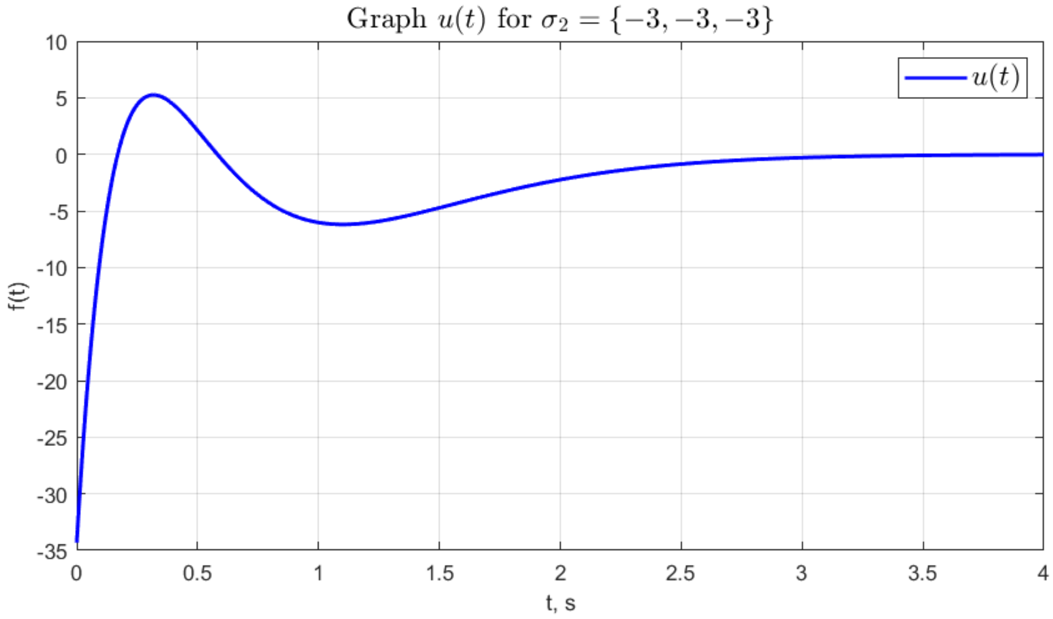

Рисунок 3 — График управления $u(t)$ для спектра σ_2.

Спектр $\sigma_4 = \{-3, -30, -300\}$

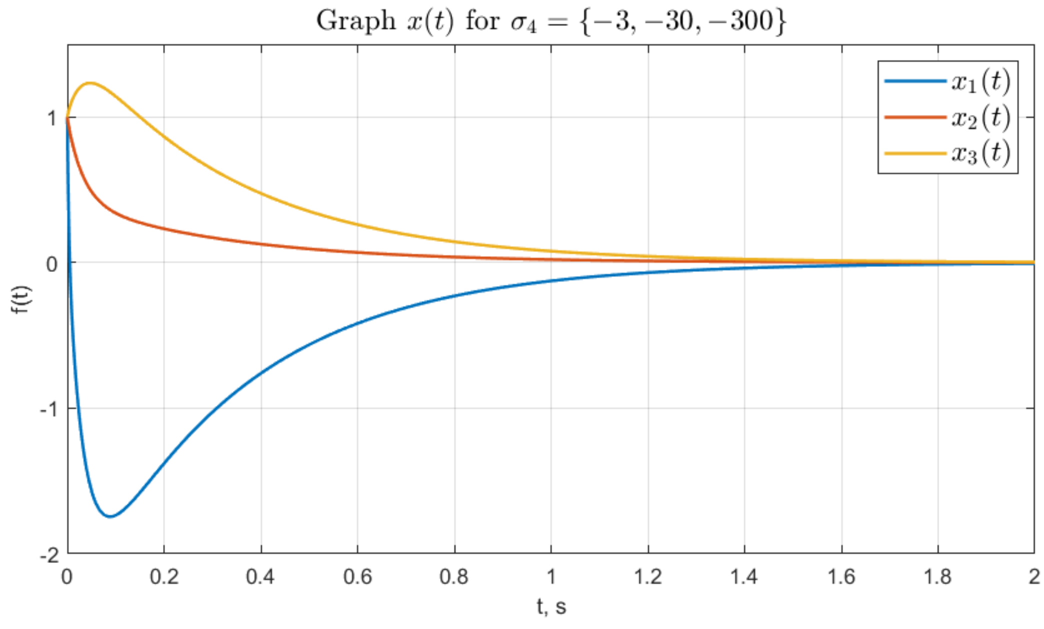

Рисунок 4 — График вектора состояния замкнутой системы для спектра σ_4.

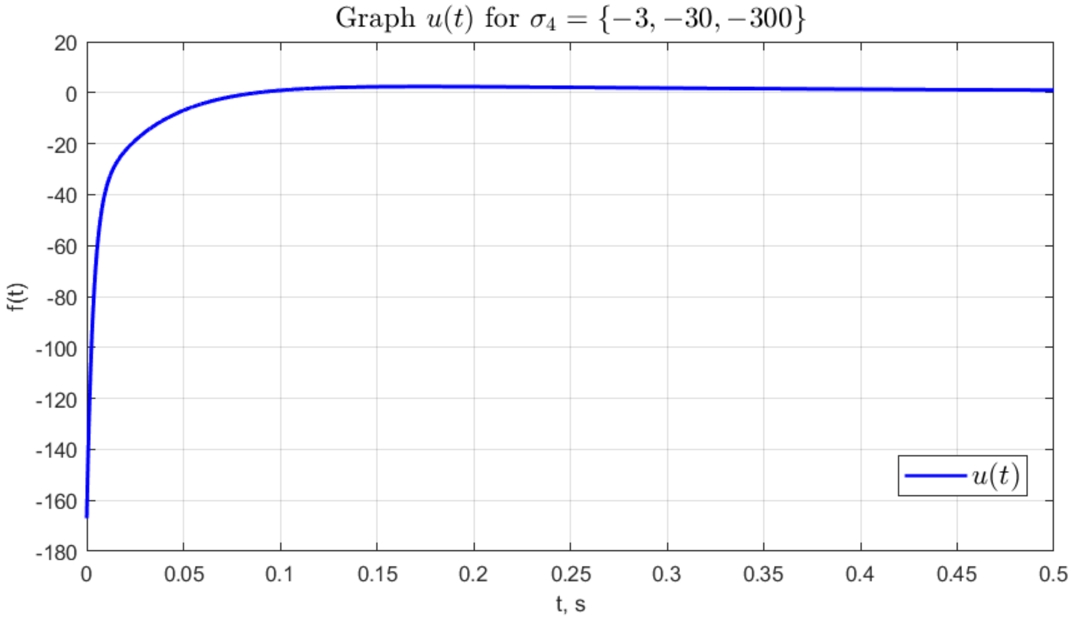

Рисунок 5 — График управления $u(t)$ для спектра σ_4.

Спектр $\sigma_6 = \{-3, -3 \pm 9i\}$

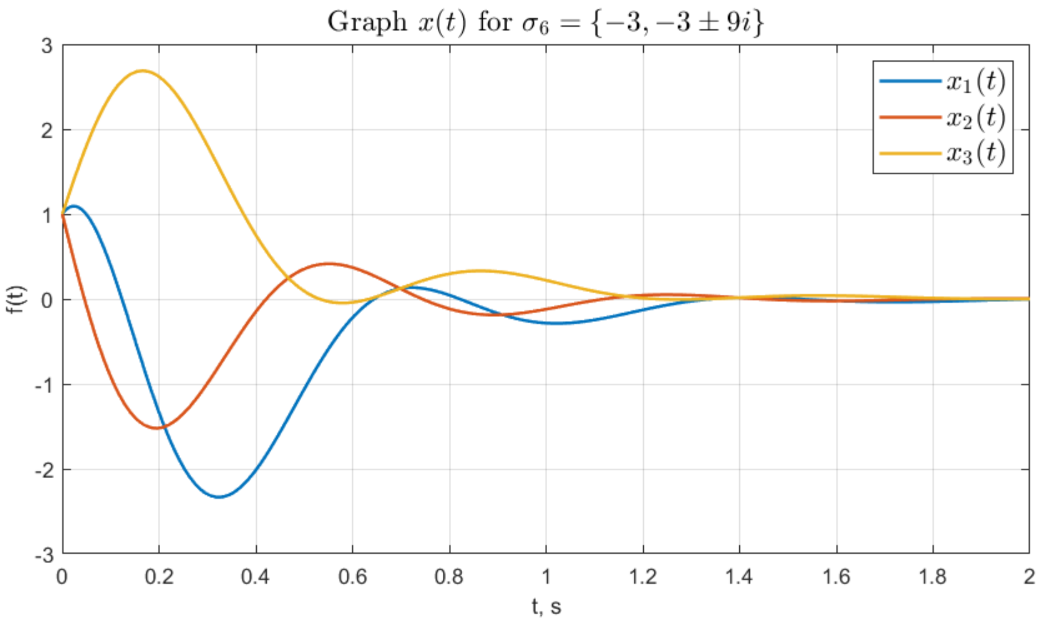

Рисунок 6 — График вектора состояния замкнутой системы для спектра σ_6.

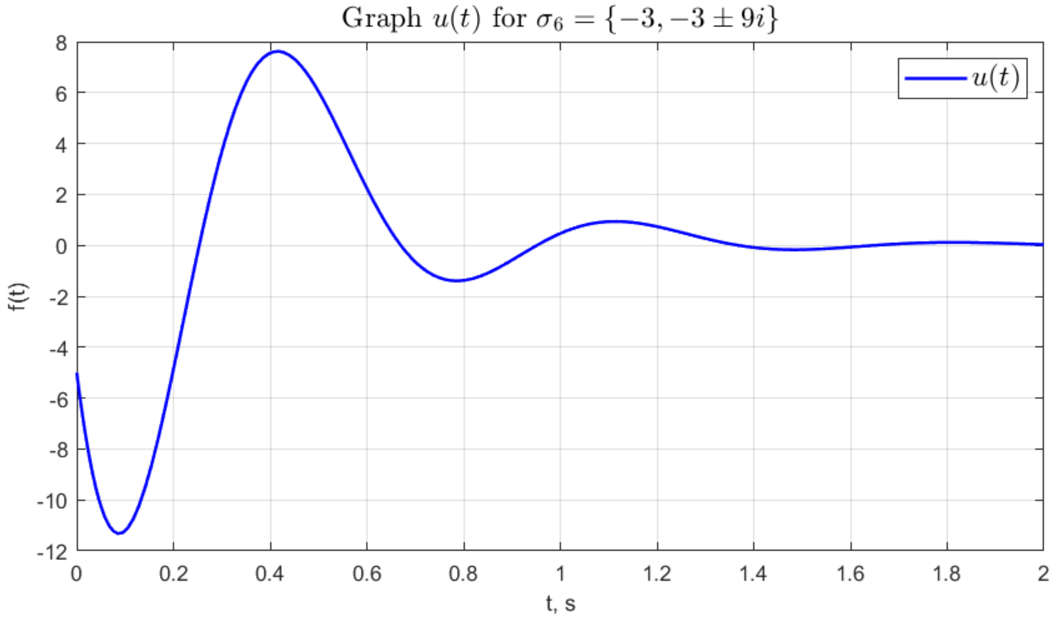

Рисунок 7 — График управления $u(t)$ для спектра σ_6.

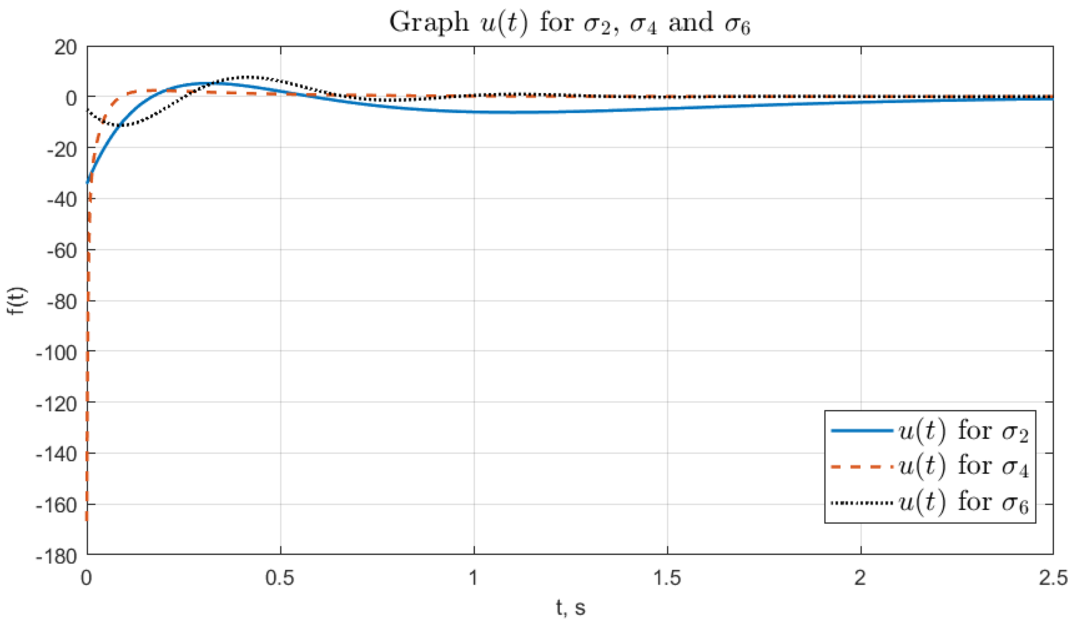

Рисунок 8 — Графики управления $u(t)$ спектров σ_2, σ_4, σ_6.

1.4 Сравнение и анализ результатов моделирования

Сопоставим полученные результаты компьютерного моделирования для рассмотренных спектров, оценим возможные сравнительные преимущества и недостатки каждого из них.

Рассмотрим результаты моделирования для спектра $\sigma_2 = \{-3, -3, -3\}$. Вектор состояния (рисунок 2) относительно медленно сходится к нулю: визуально неотличим от нуля после $t = 3.5$ с. Кроме того, есть значительное «перерегулирование» порядка пяти делений шкалы ординат. На графике управления (рисунок 3) также есть «перерегулирование» того же порядка, что и для векторов состояния. График $u(t)$ неотличим от нуля после $t = 3.5$ с.

Рассмотрим результаты моделирования для спектра $\sigma_4 = \{-3, -30, -300\}$. Вектор состояния (рисунок 4) сходится к нулю быстрее: визуально неотличим от нуля после $t = 2.5$ с. «Перерегулирование» в данном случае меньше: порядка двух делений шкалы ординат для компоненты x_1. На графике управления (рисунок 5) визуально заметно минимальное «перерегулирование» по данным графика порядка $u_{max} \simeq 2.39$. График $u(t)$ неотличим от нуля после $t = 0.5$ с, скорость изменения $u(t)$ очень высокая: с $u(0) = -167$ до первого пересечения с нулем менее чем за 0.1 с.

Рассмотрим результаты моделирования для спектра $\sigma_6 = \{-3 \quad -3 + 9i \quad -3 - 9i\}$. Вектор состояния (рисунок 6) сходится к нулю относительно быстро: визуально неотличим от нуля после $t = 2$ с. По сравнению с результатами для других спектров здесь компоненты вектора совершают больше колебаний, прежде чем дойти до нуля. «Перерегулирование» порядка двух-трех делений оси ординат. На графике управления (рисунок 7) $u(t)$ также имеет более частые колебания по сравнению с управляющим воздействием для других спектров.

2 НАБЛЮДАТЕЛЬ ПОЛНОГО ПОРЯДКА

В соответствии с вариантом возьмем матрицы A и C и рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{21}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 6 & -20 & 11 \\ 14 & 3 & -10 & 4 \\ 40 & 11 & -31 & 17 \\ 6 & 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Выполним следующие шаги:

– Найдем собственные числа матрицы A и определим наблюдаемость каждого из них. Сделаем вывод о наблюдаемости и обнаруживаемости системы.
– Построим схему моделирования системы (21) с наблюдателем состояния
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$$
– Для каждого из предложенных спектров $\sigma(A + LC)$
$$\sigma_1 = \{-7, -7, -7, -7\}$$
$$\sigma_2 = \{-7, -70, -700, -700\}$$
$$\sigma_3 = \{-7 \pm 8i, -7 \pm 9i\}$$
  – Найдем соответствующую матрицу коррекции наблюдателя L, обеспечивающую желаемый спектр.
  – Определим собственные числа матрицы наблюдателя $(A+LC)$ и сравним с желаемым спектром в подтверждение корректности синтеза наблюдателя.
  – Выполним компьютерное моделирование с начальными условиями системы $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ и наблюдателя $\hat{x} =$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$. Построим сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

– Сопоставим полученные результаты компьютерного моделирования для рассмотренных спектров, оценим возможные сравнительные преимущества и недостатки каждого из них.

2.1 Наблюдаемость и обнаруживаемость системы

Найдем собственные числа матрицы A и определим наблюдаемость каждого из них. Сделаем вывод о наблюдаемости и обнаруживаемости системы.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 6 & -20 & 11 \\ 14 & 3 & -10 & 4 \\ 40 & 11 & -31 & 17 \\ 6 & 4 & -4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm 3i \\ \lambda_{3,4} = \pm i \end{cases}$$

Определим наблюдаемость собственных чисел с помощью матриц Хаутуса.

Для собственного числа $\lambda_1 = -3i$

$$V_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25+3i & 6 & -20 & 11 \\ 14 & 3+3i & -10 & 4 \\ 40 & 11 & -31+3i & 17 \\ 6 & 4 & -4 & 3+3i \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad rank(V_1) = 4 \tag{22}$$

Ранг матрицы V_1 равен порядку системы, следовательно, собственное число $\lambda_1 = -3i$ наблюдаемо.

Для собственного числа $\lambda_2 = 3i$

$$V_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25-3i & 6 & -20 & 11 \\ 14 & 3-3i & -10 & 4 \\ 40 & 11 & -31-3i & 17 \\ 6 & 4 & -4 & 3-3i \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ rank(V_2) = 4 \tag{23}$$

Ранг матрицы V_2 равен порядку системы, следовательно, собственное число $\lambda_2 = 3i$ наблюдаемо.

Для собственного числа $\lambda_3 = -i$

$$V_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25+i & 6 & -20 & 11 \\ 14 & 3+i & -10 & 4 \\ 40 & 11 & -31+i & 17 \\ 6 & 4 & -4 & 3+i \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ rank(V_3) = 4 \tag{24}$$

Ранг матрицы V_3 равен порядку системы, следовательно, собственное число $\lambda_3 = -i$ наблюдаемо.

Для собственного числа $\lambda_1 = -3i$

$$V_4 = \begin{bmatrix} A - \lambda_4 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25-i & 6 & -20 & 11 \\ 14 & 3-i & -10 & 4 \\ 40 & 11 & -31-i & 17 \\ 6 & 4 & -4 & 3-i \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ rank(V_4) = 4 \tag{25}$$

Ранг матрицы V_4 равен порядку системы, следовательно, собственное число $\lambda_4 = i$ наблюдаемо.

Все собственные числа матрицы наблюдаемы, следовательно, система в целом полностью наблюдаема. Для обнаруживаемости системы достаточно того, что система наблюдаема, значит, система еще и обнаруживаемая.

2.2 Схема моделирования системы

Построим схему моделирования системы (21) с наблюдателем состояния

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$$

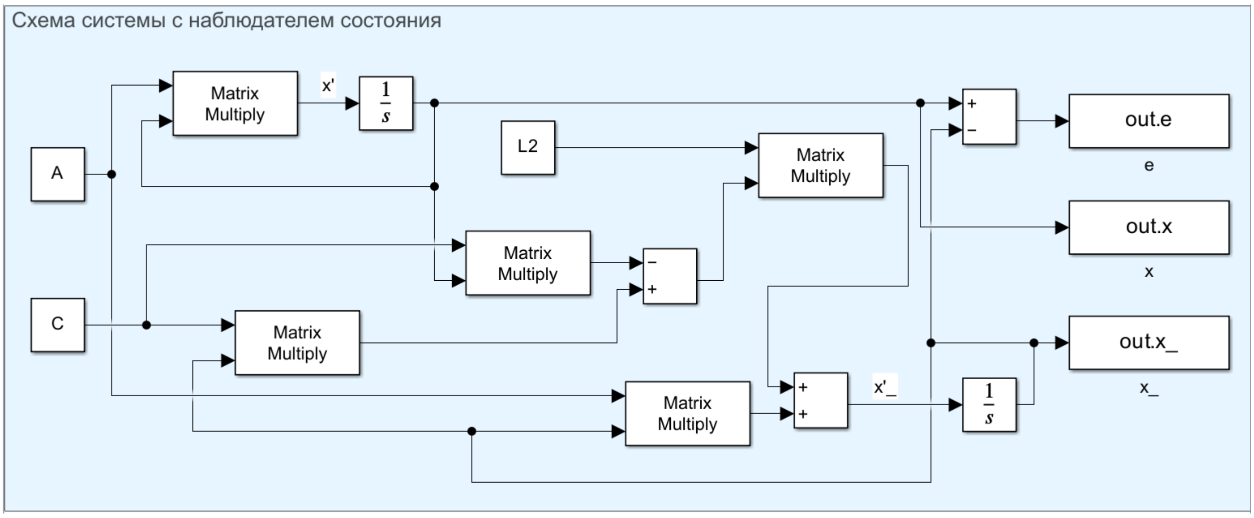

Рисунок 9 — Схема моделирования системы с наблюдателем состояния.

2.3 Спектр $\sigma(A + LC)$

Рассмотрим предложенные в соответствии с вариантом желаемые спектры замкнутой системы $(A + LC)$

$$\sigma_1 = \{-7, -7, -7, -7\}$$
$$\sigma_2 = \{-7, -70, -700, -700\}$$
$$\sigma_3 = \{-7 \pm 8i, -7 \pm 9i\}$$

2.3.1 Матрицы корреляции наблюдателя

Запишем уравнение модального регулятора

$$\begin{cases} \Gamma Q - QA = YC \\ L = Q^{-1}Y, \end{cases} \tag{26}$$

где L - матрица корреляции наблюдателя.

Спектр $\sigma_1 = \{-7, -7, -7, -7\}$

Для составления матрицы Γ_1 возьмем полином Ньютона четвертого порядка с $\omega_0 = 7$

$$(\lambda + 7)^4 = \lambda^4 + 28\lambda^3 + 294\lambda^2 + 1372\lambda + 2401 \tag{27}$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2401 \\ 1 & 0 & 0 & -1372 \\ 0 & 1 & 0 & -294 \\ 0 & 0 & 1 & -28 \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

С помощью $MATLAB$ решим уравнение

$$\Gamma_1 Q_1 - Q_1 A = Y_1 C \tag{30}$$

относительно Q_1.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -30.2563 & -6.1230 & 23.1333 & -11.0666 \\ -13.7435 & -3.0393 & 9.7042 & -3.8521 \\ 0.6627 & -0.1492 & -0.8120 & 0.9060 \\ -0.0074 & -0.0043 & 0.0031 & -0.0016 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Теперь найдем матрицу корреляции наблюдателя L_1

$$L_1 = Q_1^{+} Y_1 = \begin{bmatrix} -44.5000 \\ -242.3333 \\ -219.3333 \\ -202.8333 \end{bmatrix} \tag{32}$$

Спектр $\sigma_2 = \{-7, -70, -700, -700\}$

Для составления матрицы Γ_2 возьмем Жорданову форму

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -700 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -700 \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{34}$$

С помощью $MATLAB$ решим уравнение

$$\Gamma_2 Q_2 - Q_2 A = Y_2 C \tag{35}$$

относительно Q_2.

$$Q_2 = \begin{bmatrix} -0.3366 & -0.0310 & 0.2855 & -0.2028 \\ -0.0162 & -0.0002 & 0.0158 & -0.0149 \\ -0.0014 & 0 & 0.0014 & -0.0014 \\ -0.0014 & 0 & 0.0014 & -0.0014 \end{bmatrix} \tag{36}$$

Теперь найдем матрицу корреляции наблюдателя L_2

$$L_2 = Q_2^{+} Y_2 = \begin{bmatrix} 20336000 \\ -20156000 \\ 25314000 \\ 4977000 \end{bmatrix} \tag{37}$$

Спектр $\sigma_3 = \{-7 \pm 8i, -7 \pm 9i\}$

Для составления матрицы Γ_3 возьмем Жорданову форму

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 0 & 0 \\ -8 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & -9 & -7 \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{39}$$

С помощью $MATLAB$ решим уравнение

$$\Gamma_3 Q_3 - Q_3 A = Y_3 C \tag{40}$$

относительно Q_3.

$$Q_3 = \begin{bmatrix} -0.2100 & -0.0088 & 0.1935 & -0.1594 \\ 0.1174 & 0.0178 & -0.0897 & 0.0437 \\ -0.1769 & -0.0053 & 0.1660 & -0.1419 \\ 0.1170 & 0.0160 & -0.0917 & 0.0484 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Теперь найдем матрицу корреляции наблюдателя L_3

$$L_3 = Q_3^{+} Y_3 = 10^3 \begin{bmatrix} 0.9660 \\ -1.3027 \\ 0.9951 \\ 0.0011 \end{bmatrix} \tag{42}$$

2.3.2 Собственные числа матрицы наблюдателя

Спектр $\sigma_1 = \{-7, -7, -7, -7\}$

Запишем матрицу наблюдателя и найдем ее собственные числа

$$(A + L_1 C) = \begin{bmatrix} -19.5000 & 6.0000 & 24.5000 & -33.5000 \\ -228.3333 & 3.0000 & 232.3333 & -238.3333 \\ -179.3333 & 11.0000 & 188.3333 & -202.3333 \\ -196.8333 & 4.0000 & 198.8333 & -199.8333 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -7.0029 \\ \lambda_2 = -7.0000 \\ \lambda_3 = -7.0000 \\ \lambda_4 = -6.9971 \end{cases} \tag{43}$$

Как можно заметить собственные числа матрицы наблюдателя совпадают с заданным спектром с точностью до сотых.

Спектр $\sigma_2 = \{-7, -70, -700, -700\}$

Запишем матрицу наблюдателя и найдем ее собственные числа

$$(A + L_2C) = 10^7 \begin{bmatrix} 2.0336 & 0 & -2.0336 & 2.0336 \\ -2.0156 & 0 & 2.0156 & -2.0156 \\ 2.5314 & 0 & -2.5314 & 2.5314 \\ 0.4977 & 0 & -0.4977 & 0.4977 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -700 \\ \lambda_2 = -700 \\ \lambda_3 = -70 \\ \lambda_4 = -7 \end{cases} \tag{44}$$

Как можно заметить собственные числа матрицы наблюдателя совпадают с заданным спектром.

Спектр $\sigma_3 = \{-7 \pm 8i, -7 \pm 9i\}$

Запишем матрицу наблюдателя и найдем ее собственные числа

$$(A + L_3C) = 10^3 \begin{bmatrix} 0.9910 & 0.0060 & -0.9860 & 0.9770 \\ -1.2887 & 0.0030 & 1.2927 & -1.2987 \\ 1.0351 & 0.0110 & -1.0261 & 1.0121 \\ 0.0071 & 0.0040 & -0.0051 & 0.0041 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -7 + 9i \\ \lambda_2 = -7 - 9i \\ \lambda_3 = -7 + 8i \\ \lambda_4 = -7 - 8i \end{cases} \tag{45}$$

Как можно заметить собственные числа матрицы наблюдателя совпадают с заданным спектром.

2.3.3 Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование с начальными условиями системы $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ и наблюдателя $\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$. Построим сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Для наглядности изобразим графики для каждой координаты отдельно.

Спектр $\sigma_1 = \{-7, -7, -7, -7\}$

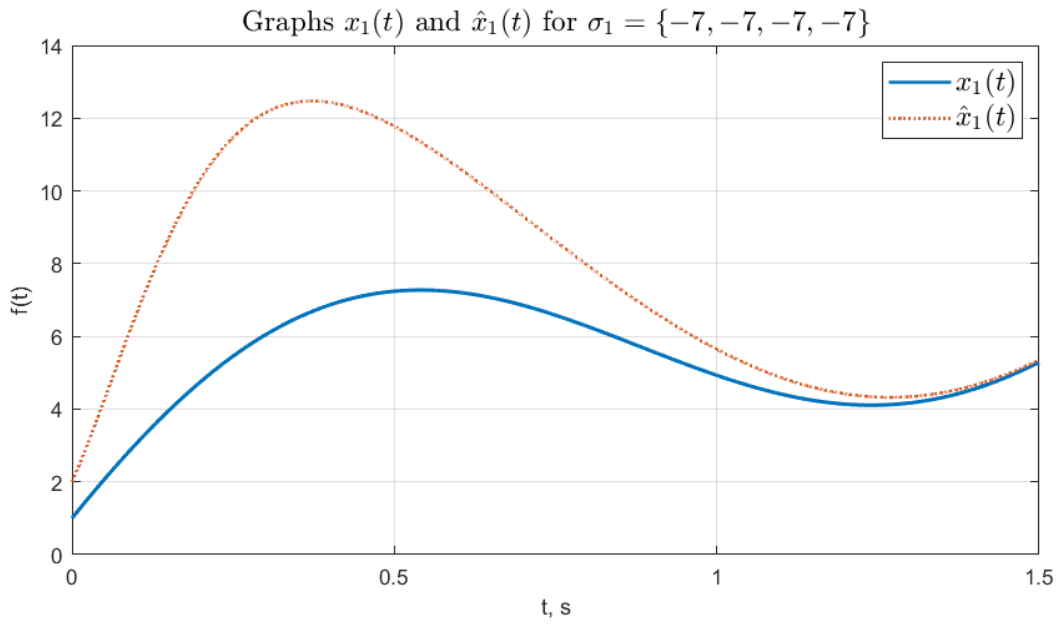

Рисунок 10 — Графики $x_1(t)$ и $\hat{x}_1(t)$ для спектра σ_1.

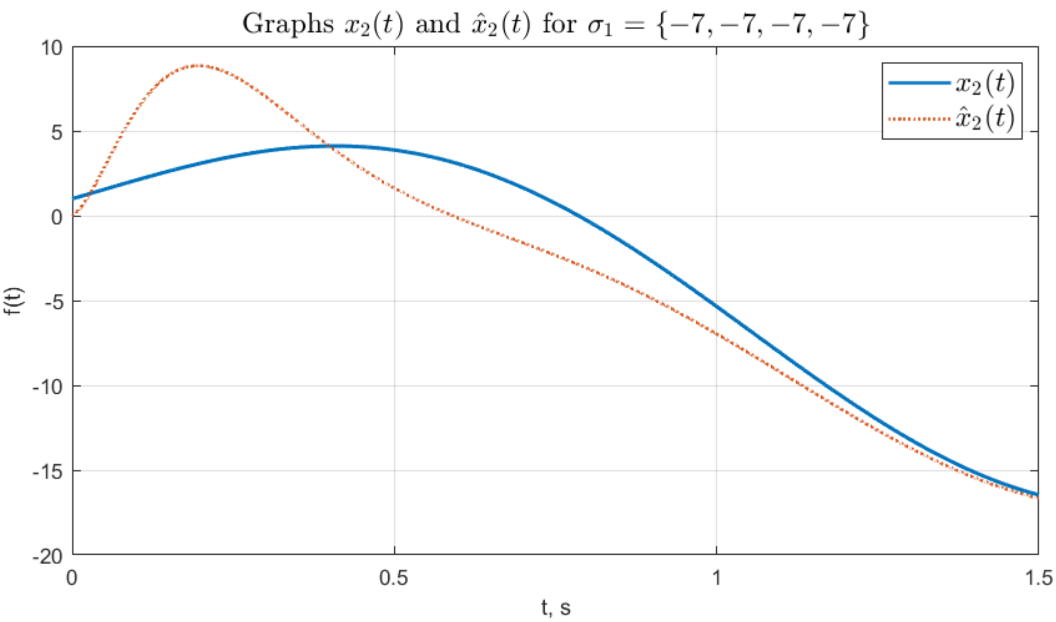

Рисунок 11 — Графики $x_2(t)$ и $\hat{x}_2(t)$ для спектра σ_1.

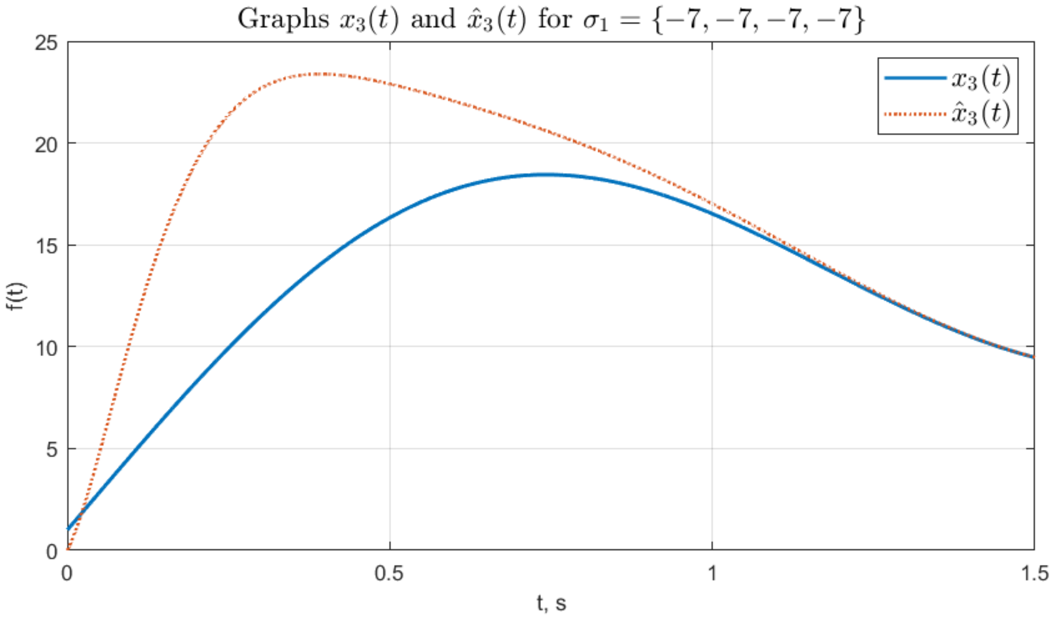

Рисунок 12 — Графики $x_3(t)$ и $\hat{x}_3(t)$ для спектра σ_1.

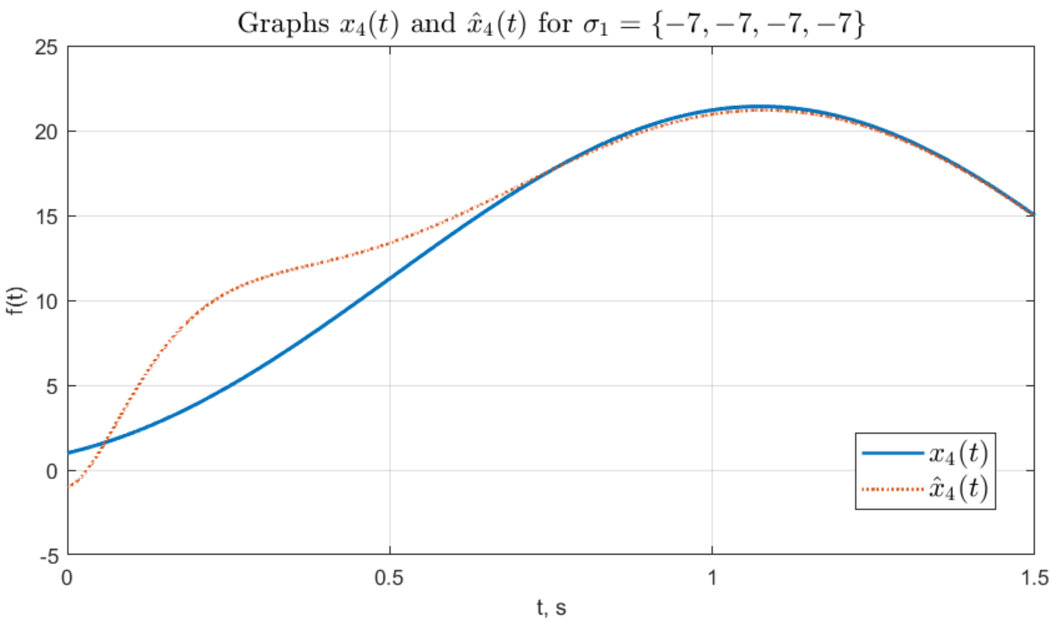

Рисунок 13 — Графики $x_4(t)$ и $\hat{x}_4(t)$ для спектра σ_1.

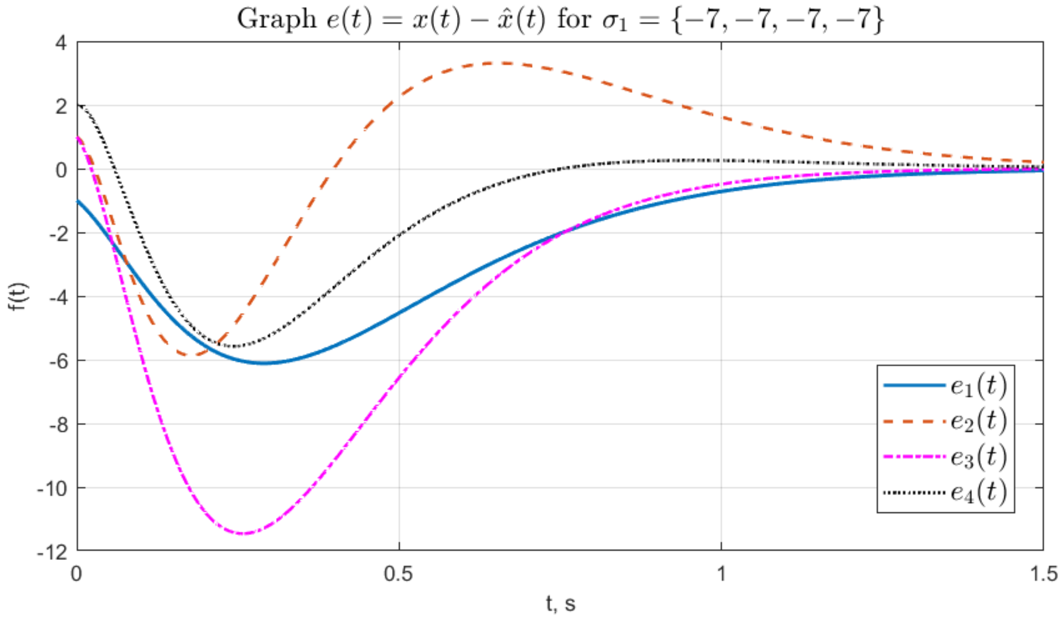

Рисунок 14 — График $e(t)$ для спектра σ_1.

Спектр $\sigma_2 = \{-7, -70, -700, -700\}$

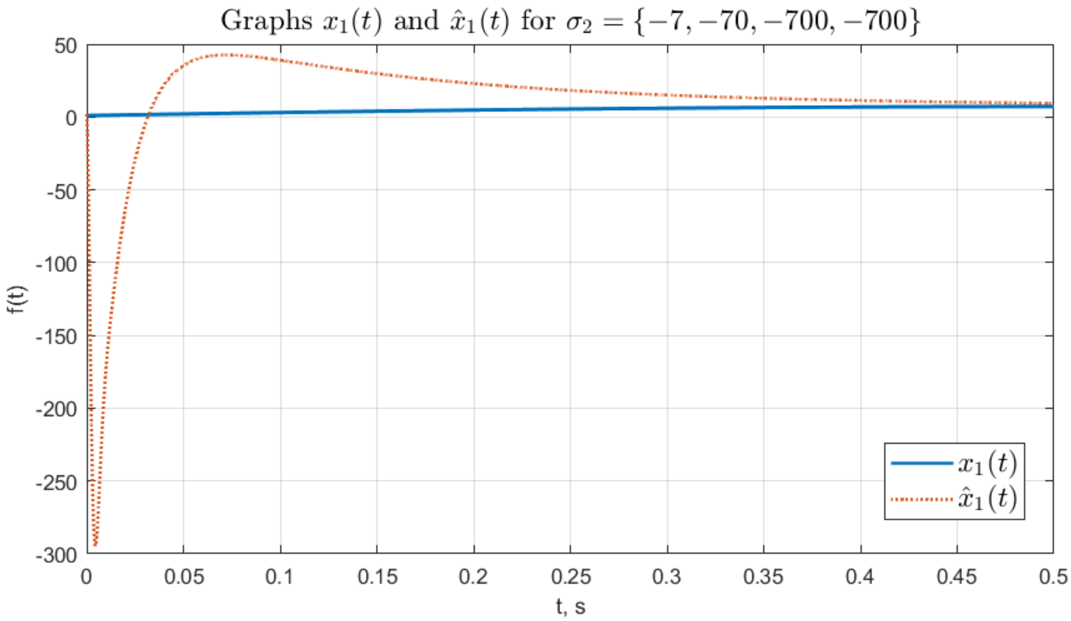

Рисунок 15 — Графики $x_1(t)$ и $\hat{x}_1(t)$ для спектра σ_2.

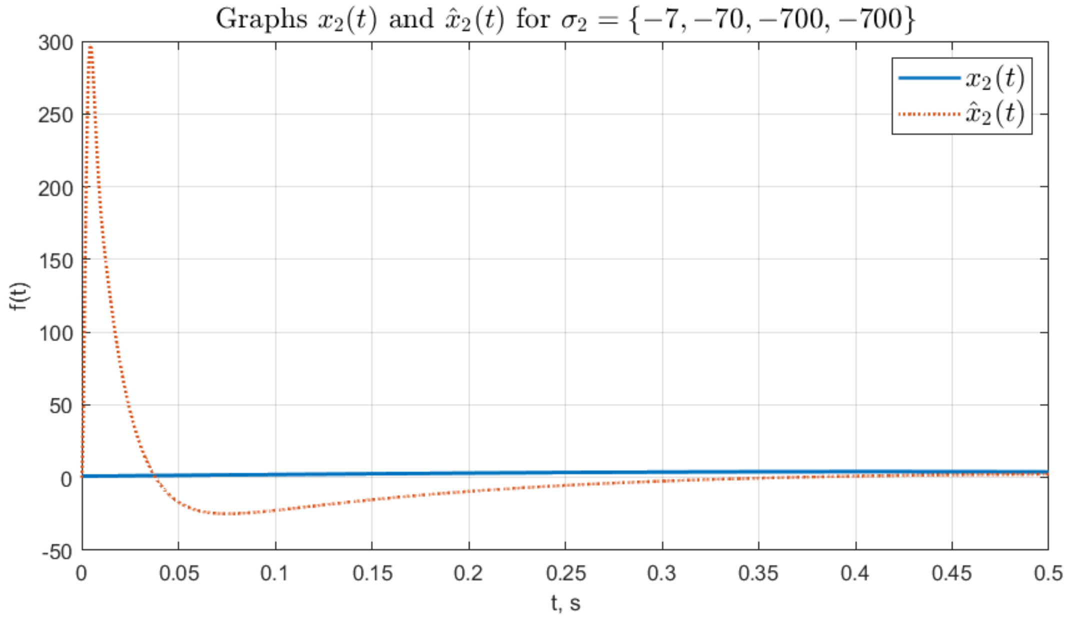

Рисунок 16 — Графики $x_2(t)$ и $\hat{x}_2(t)$ для спектра σ_2.

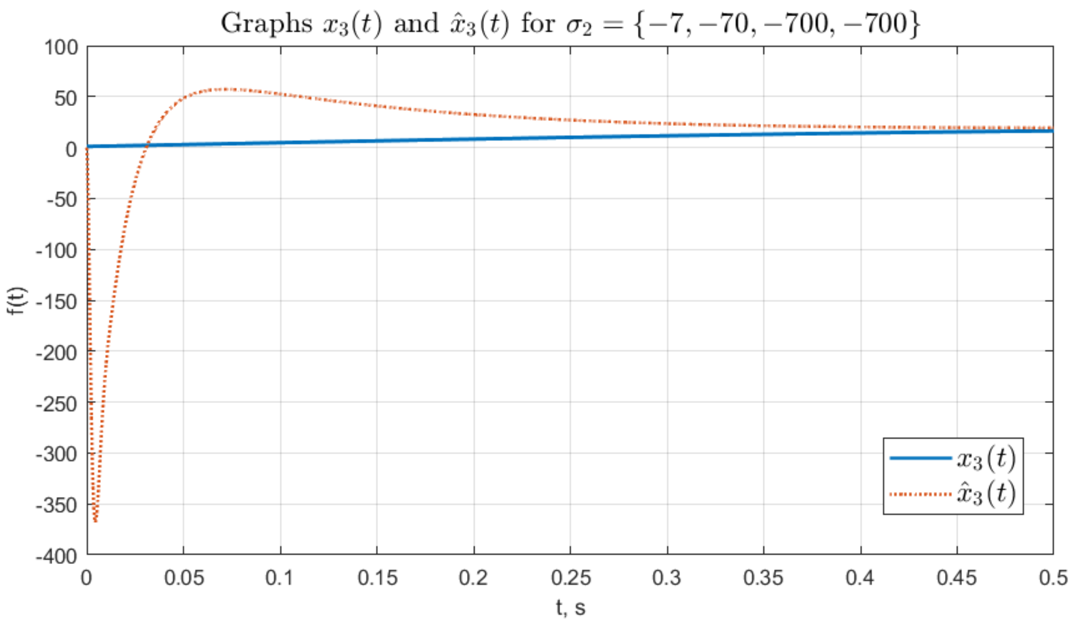

Рисунок 17 — Графики $x_3(t)$ и $\hat{x}_3(t)$ для спектра σ_2.

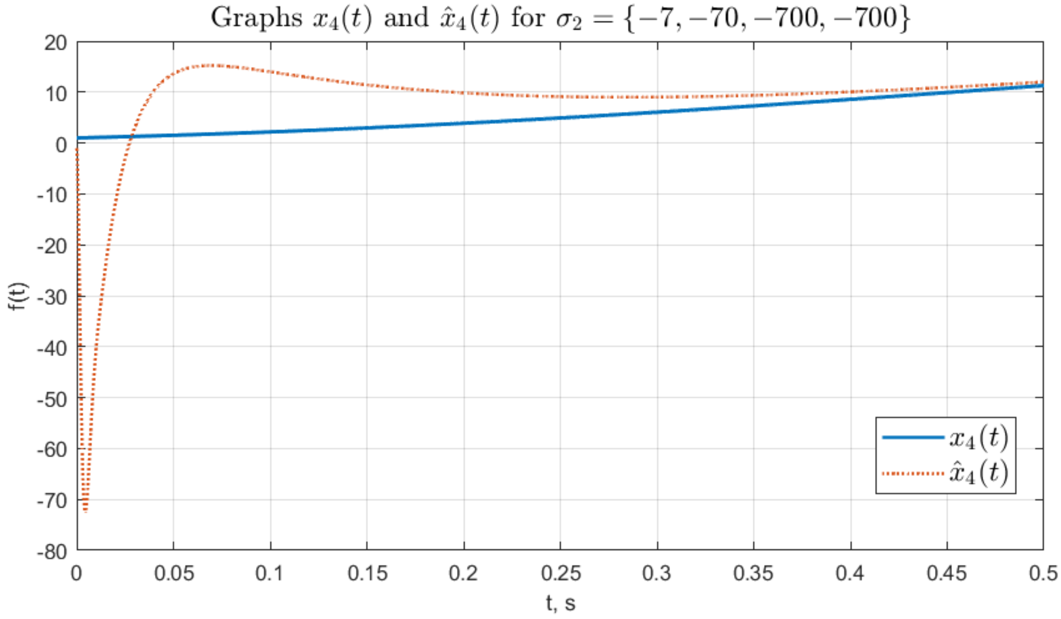

Рисунок 18 — Графики $x_4(t)$ и $\hat{x}_4(t)$ для спектра σ_2.

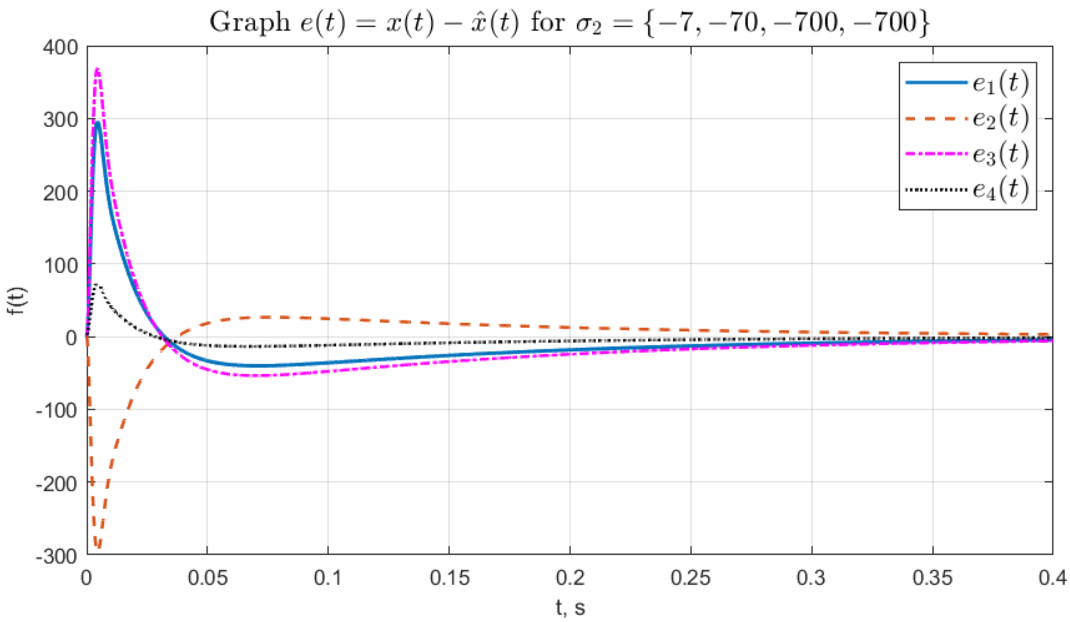

Рисунок 19 — График $e(t)$ для спектра σ_2.

Спектр $\sigma_3 = \{-7 \pm 8i, -7 \pm 9i\}$

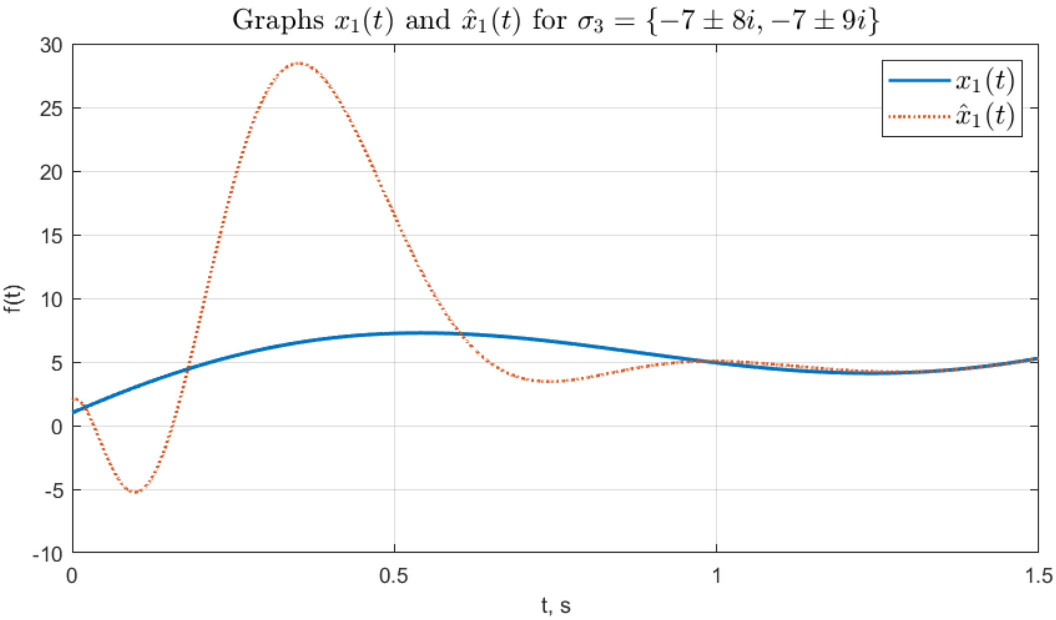

Рисунок 20 — Графики $x_1(t)$ и $\hat{x}_1(t)$ для спектра σ_3.

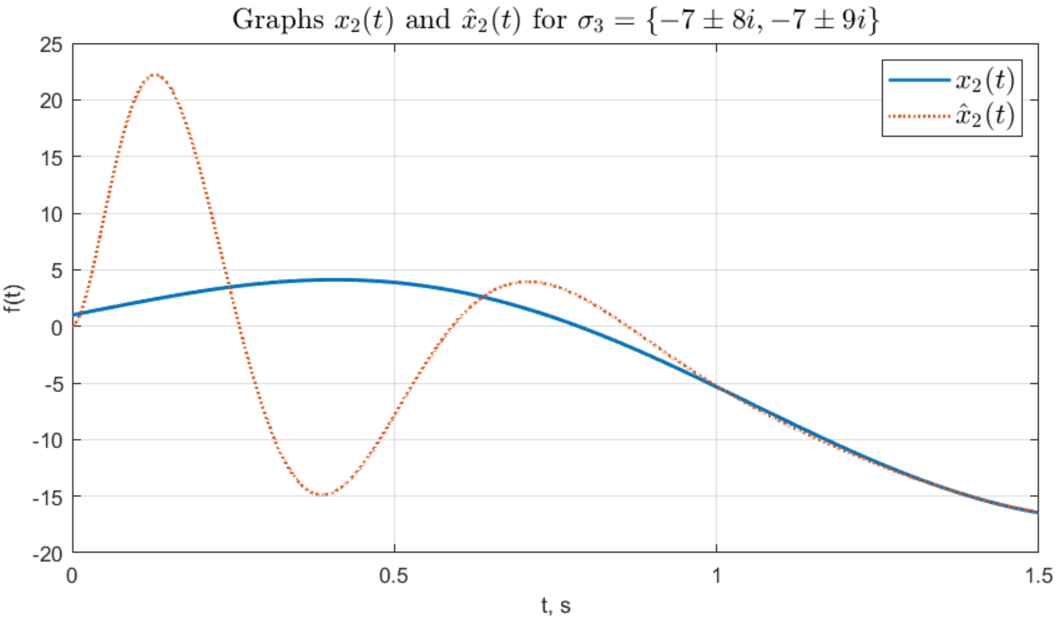

Рисунок 21 — Графики $x_2(t)$ и $\hat{x}_2(t)$ для спектра σ_3.

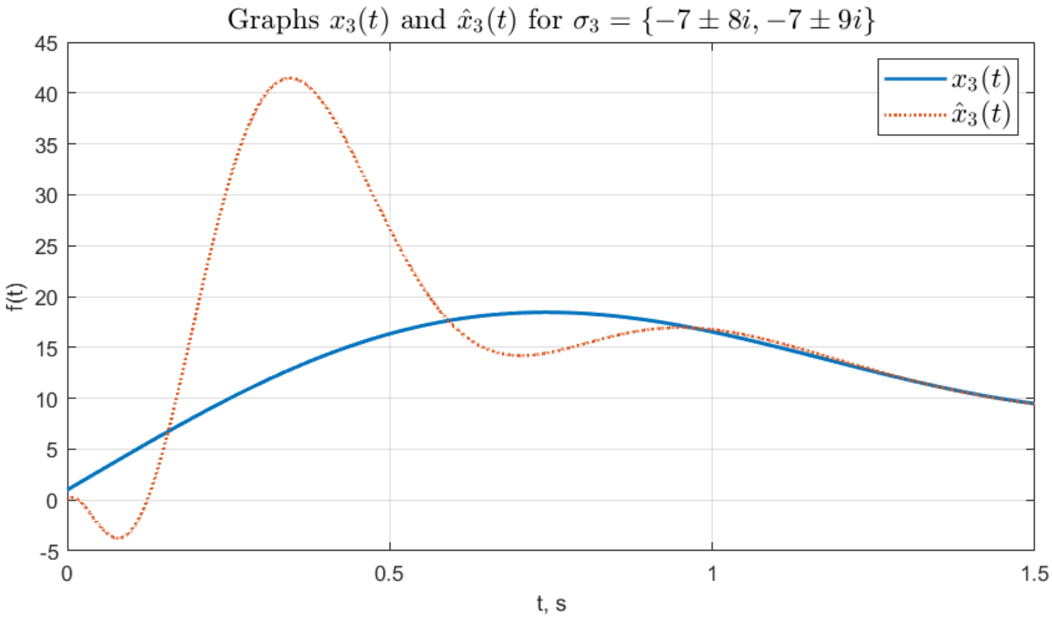

Рисунок 22 — Графики $x_3(t)$ и $\hat{x}_3(t)$ для спектра σ_3.

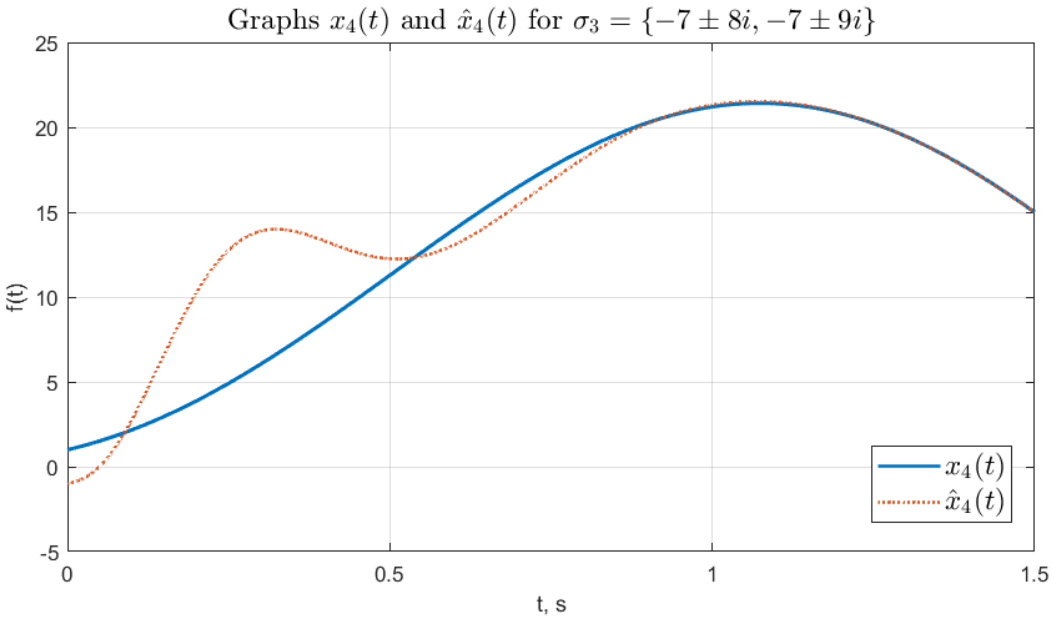

Рисунок 23 — Графики $x_4(t)$ и $\hat{x}_4(t)$ для спектра σ_3.

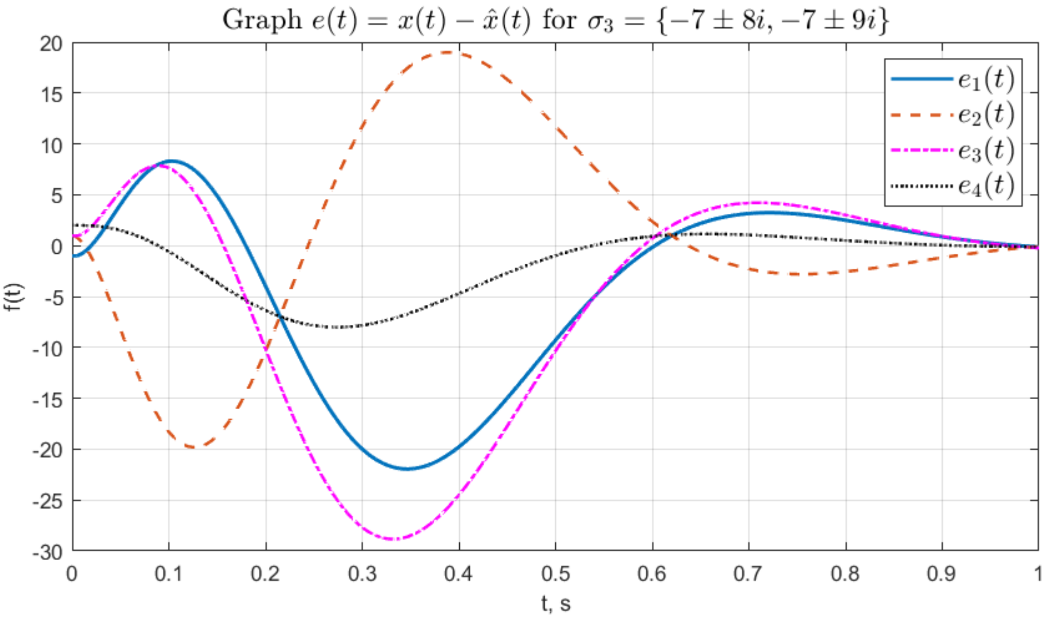

Рисунок 24 — График $e(t)$ для спектра σ_3.

2.4 Сопоставление полученных результатов

Заметим, что при увеличении собственных чисел по модулю (разница между графиками для σ_1 и σ_2) скорость приближения $\hat{x}(t)$ к $x(t)$ возрастает. Для спектра σ_3, состоящего из комплексных чисел наблюдается более высокая частота колебаний относительно других спектров, как для переменных $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, так и для графиков ошибки $e(t)$. Время, за которое $\hat{x}(t)$ становится неотличим от $x(t)$, сопоставимо с результатами для спектра σ_1. Амплитуды ошибок для σ_1 и σ_3 одного порядка, меньшего, чем ошибки для спектра σ_2.

3 МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ

В соответствии с вариантом возьмем матрицы A, B, C и D и рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \tag{46}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Выполним следующие шаги:

– Найдем собственные числа матрицы A и определим управляемость и наблюдаемость каждого из них. Сделаем вывод об управляемости, стабилизируемости, наблюдаемости и обнаруживемости системы.
– Построим схему моделирования системы (46), замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + (B + LD)u + L(C\hat{x} - y)$$

и закона управления $u = K\hat{x}$.
– Зададимся парой достижимых желаемых спектров для регулятора и наблюдателя, обеспечивающих асимптотическую устойчивость замкнутой системы.
– Синтезируем регулятор K на основании выбранного желаемого спектра, определим собственные числа матрицы $(A+BK)$ и сравним с желаемым спектром для проверки корректности расчетов.
– Синтезируем матрицу коррекции наблюдателя L на основании выбранного желаемого спектра, определим собственные числа матрицы $(A + LC)$ ии сравним с желаемым спектром для проверки корректности расчетов.

– Выполним компьютерное моделирование с начальными условиями системы $x(0) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ и наблюдателя $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$. Построим график формируемого регулятором управления $u(t)$, сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

3.1 Управляемость и наблюдаемость собственных чисел матрицы A

Найдем собственные числа матрицы A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 4 \\ \lambda_4 = 8 \end{cases} \tag{47}$$

Определим управляемость и наблюдаемость каждого из собственных чисел, для этого воспользуемся матрицами Хаутуса.

Для $\lambda_1 = -4$ найдем матрицы Хаутуса для управлемости U_1 и наблюдаемости V_1 и вычислим их ранг

$$U_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & 6 & -2 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \ \ rank(U_1) = 4 \tag{48}$$

Так как ранг U_1 равен размерности системы, то число λ_1 управляемо.

$$V_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \ rank(V_1) = 3 \tag{49}$$

Так как ранг V_1 меньше размерности системы, то число λ_1 не наблюдаемо.

Для $\lambda_1 = 0$ найдем матрицы Хаутуса для управлемости U_2 и наблюдаемости V_2 и вычислим их ранг

$$U_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \ rank(U_2) = 4 \tag{50}$$

Так как ранг U_2 равен размерности системы, то число λ_2 управляемо.

$$V_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \ rank(V_2) = 4 \tag{51}$$

Так как ранг V_2 равен размерности системы, то число λ_2 наблюдаемо.

Для $\lambda_3 = 4$ найдем матрицы Хаутуса для управлемости U_3 и наблюдаемости V_3 и вычислим их ранг

$$U_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \ \ rank(U_3) = 4 \tag{52}$$

Так как ранг U_3 равен размерности системы, то число λ_3 управляемо.

$$V_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \ rank(V_3) = 4 \tag{53}$$

Так как ранг V_3 равен размерности системы, то число λ_3 наблюдаемо.

Для $\lambda_4 = 8$ найдем матрицы Хаутуса для управлемости U_4 и наблюдаемости V_4 и вычислим их ранг

$$U_4 = \begin{bmatrix} A - \lambda_4 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -2 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & -6 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \ rank(U_4) = 4 \tag{54}$$

Так как ранг U_4 равен размерности системы, то число λ_4 управляемо.

$$V_4 = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ rank(V_4) = 4 \tag{55}$$

Так как ранг V_4 равен размерности системы, то число λ_4 наблюдаемо.

Все собственные числа системы управляемы, следовательно, система в целом полностью управляема и стабилизируема. Одно из собственных чисел не наблюдаемо, значит, система в целом не полностью наблюдаемая. Согласно критерию обнаруживаемости, все неустойчивые собственные числа должны быть наблюдаемы, это верно в нашем случае, следовательно, система обнаруживаема.

3.2 Схема моделируемой системы

Построим схему моделирования системы (46), замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + (B + LD)u + L(C\hat{x} - y)$$

и закона управления $u = K\hat{x}$.

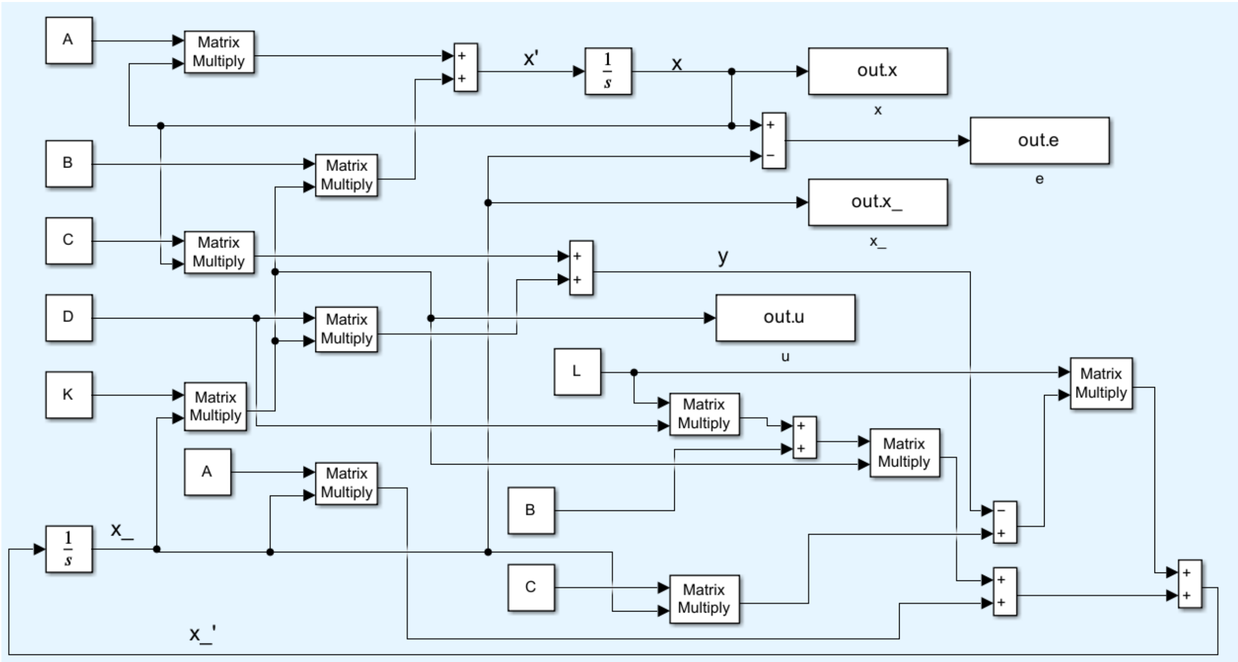

Рисунок 25 — Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя и закона управления.

3.3 Желаемые спектры

Зададимся парой достижимых желаемых спектров для регулятора и наблюдателя, обеспечивающих асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Желаемый спектр для регулятора:

$$\sigma(A + BK) = \{-1.5, -2.5, -3.5, -4.5\} \tag{56}$$

Желаемый спектр для наблюдателя с учетом того, что собственное число $\lambda_1 = -4$ является ненаблюдаемым и сохранится в желаемом спектре:

$$\sigma(A + LC) = \{-4, -4, -4, -4\} \tag{57}$$

3.4 Синтез регулятора

Для нахождения матрицы регулятора K воспользуемся формулой

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases} \tag{58}$$

Составим матрицу Γ в Жордановой форме так, чтобы её спектр был $\{-1.5, -2.5, -3.5, -4.5\}$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.5 \end{bmatrix} \tag{59}$$

Возьмем $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ и с помощью $MATLAB$ решим уравнение Сильвестра

$$AP - P\Gamma = BY \tag{60}$$

относительно P

$$P = \begin{bmatrix} -0.1327 & -1.7348 & -7.3010 & 8.5668 \\ -2.4357 & -3.0271 & -8.1772 & 7.9132 \\ -0.4006 & -1.9985 & -7.5561 & 8.3221 \\ 3.4309 & 3.9062 & 8.9656 & -7.1979 \end{bmatrix} \tag{61}$$

Теперь найдем матрицу K:

$$K = -YP^{-1} = \begin{bmatrix} -7.6209 & 1.3970 & 7.5052 & 1.2820 \end{bmatrix} \tag{62}$$

Определим собственные числа матрицы $(A + BK)$ и сравним с заданным спектром

$$A + BK = \begin{bmatrix} -58.9672 & 11.1764 & 56.0419 & 12.2559 \\ -45.7254 & 10.3823 & 43.0314 & 11.6920 \\ -34.4836 & 3.5882 & 32.0210 & 5.1280 \\ -13.2418 & 6.7941 & 15.0105 & 4.5640 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \lambda_1 = -4.5 \\ \lambda_2 = -3.5 \\ \lambda_3 = -2.5 \\ \lambda_4 = -1.5 \end{cases} \tag{63}$$

Заметим, что полученный спектр матрицы $(A + BK)$ совпал с желаемым.

3.5 Синтез матрицы коррекции наблюдателя

Запишем уравнение модального регулятора

$$\begin{cases} \Gamma Q - QA = YC \\ L = Q^{-1}Y, \end{cases} \tag{64}$$

где L – искомая матрица корреляции наблюдателя.

Для составления матрицы Γ полином Ньютона четвертого порядка с $\omega_0 = 4$

$$(\lambda + 4)^4 = \lambda^4 + 16\lambda^3 + 96\lambda^2 + 256\lambda + 256 \tag{65}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -256 \\ 1 & 0 & 0 & -256 \\ 0 & 1 & 0 & -96 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix} \tag{66}$$

В качестве матрицы Y возьмем

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{67}$$

С помощью $MATLAB$ решим уравнение Сильвестра

$$\Gamma Q - QA = YC \tag{68}$$

относительно Q

$$Q = \begin{bmatrix} -1.5367 & 0.6195 & -0.9360 & 3.0923 \\ -0.7749 & 0.6704 & 0.1704 & 3.7749 \\ 0.4436 & -0.2614 & 0.9677 & 2.0772 \\ -0.0307 & -0.0644 & -0.0158 & -0.0336 \end{bmatrix} \tag{69}$$

Теперь найдем матрицу корреляции наблюдателя L

$$L = Q^{-1}Y = \begin{bmatrix} -23.7187 & -23.7187 \\ -6.7187 & -6.7187 \\ 19.2813 & 19.2813 \\ -4.2813 & -4.2813 \end{bmatrix} \tag{70}$$

Определим собственные числа матрицы $(A + LC)$ и сравним с желаемым спектром

$$(A + LC) = \begin{bmatrix} -21.7187 & -23.7187 & -27.7187 & -69.1562 \\ -6.7187 & -4.7187 & -8.7187 & -16.1562 \\ 15.2813 & 17.2813 & 21.2813 & 57.8438 \\ -2.2813 & -0.2813 & -4.2813 & -10.8438 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{1,2,3,4} = -4 \tag{71}$$

Заметим, что полученный спектр матрицы $(A + LC)$ совпал с желаемым.

3.6 Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование с начальными условиями системы $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ и наблюдателя $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Построим график формируемого регулятором управления $u(t)$.

Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также графики ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ для наглядности будем строить для каждой координаты вектора отдельно.

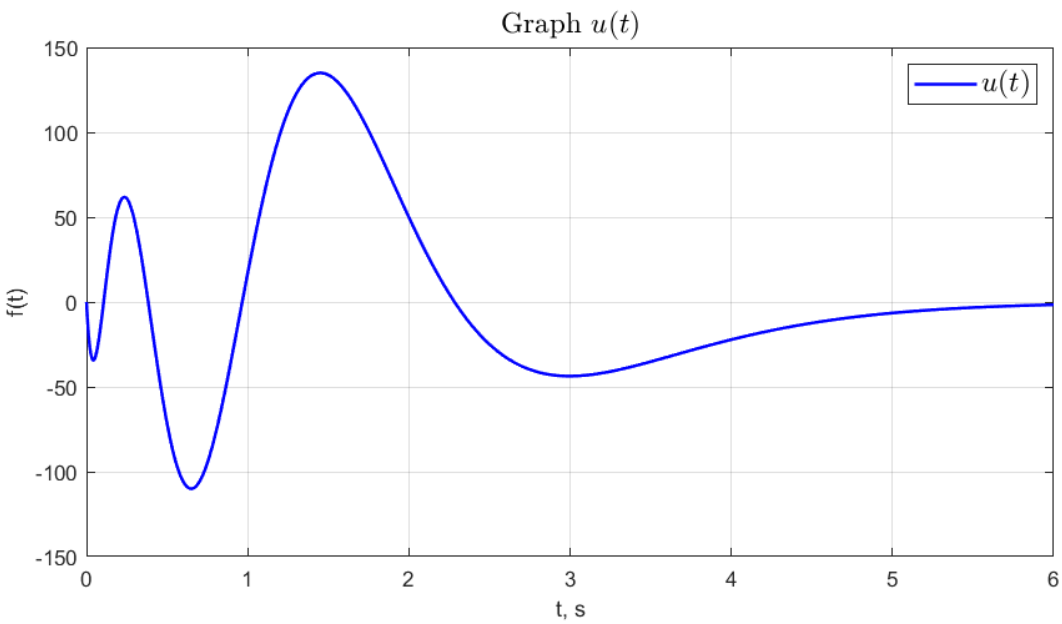

Рисунок 26 — График формируемого регулятором управления $u(t)$.

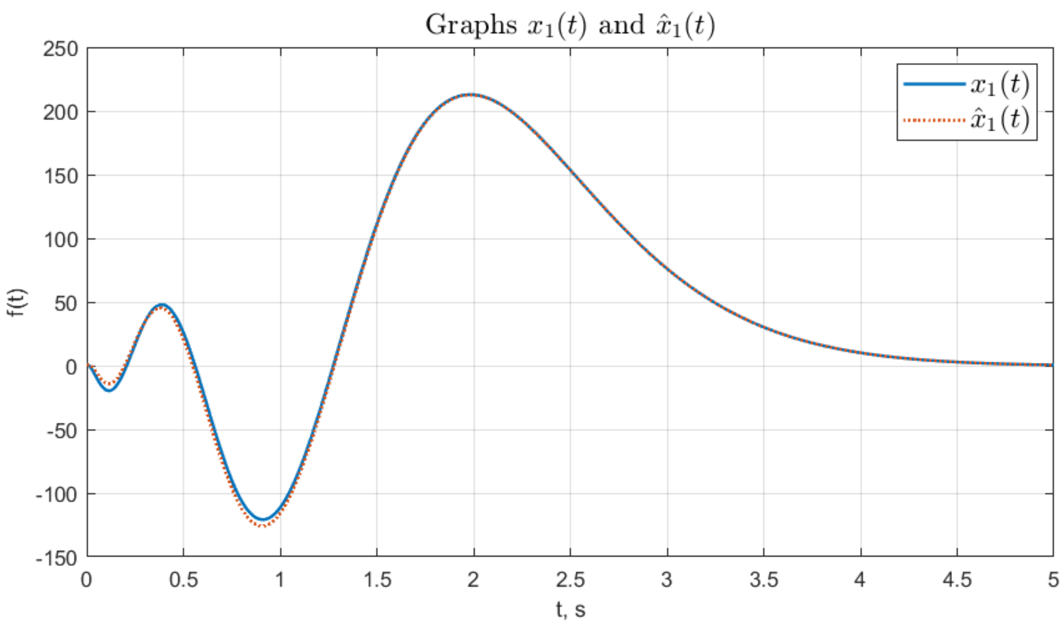

Рисунок 27 — Сравнительные графики $x_1(t)$ и $\hat{x}_1(t)$.

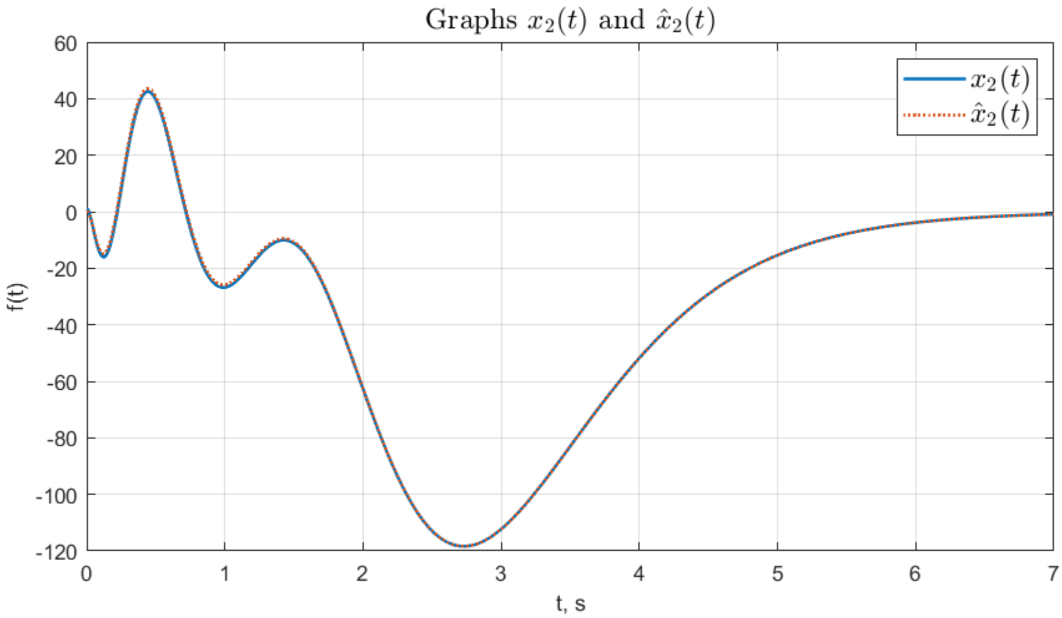

Рисунок 28 — Сравнительные графики $x_2(t)$ и $\hat{x}_2(t)$.

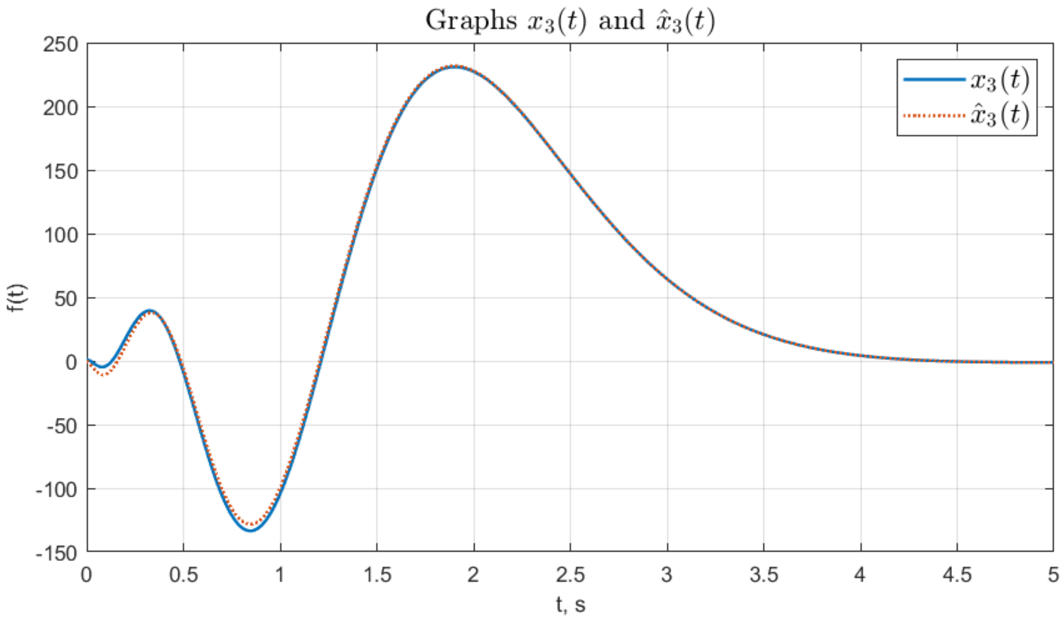

Рисунок 29 — Сравнительные графики $x_3(t)$ и $\hat{x}_3(t)$.

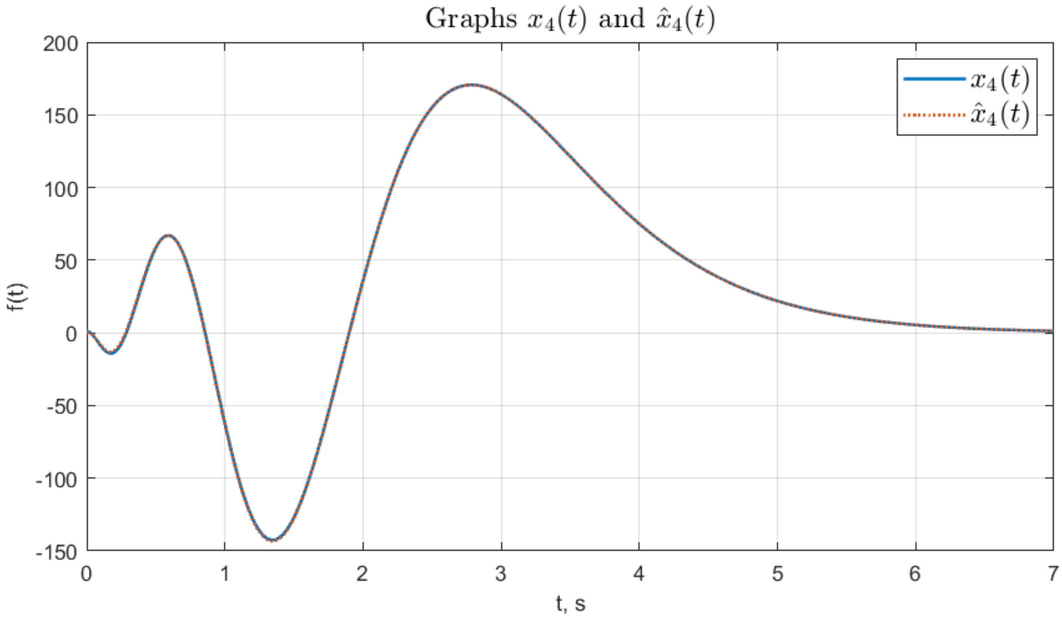

Рисунок 30 — Сравнительные графики $x_4(t)$ и $\hat{x}_4(t)$.

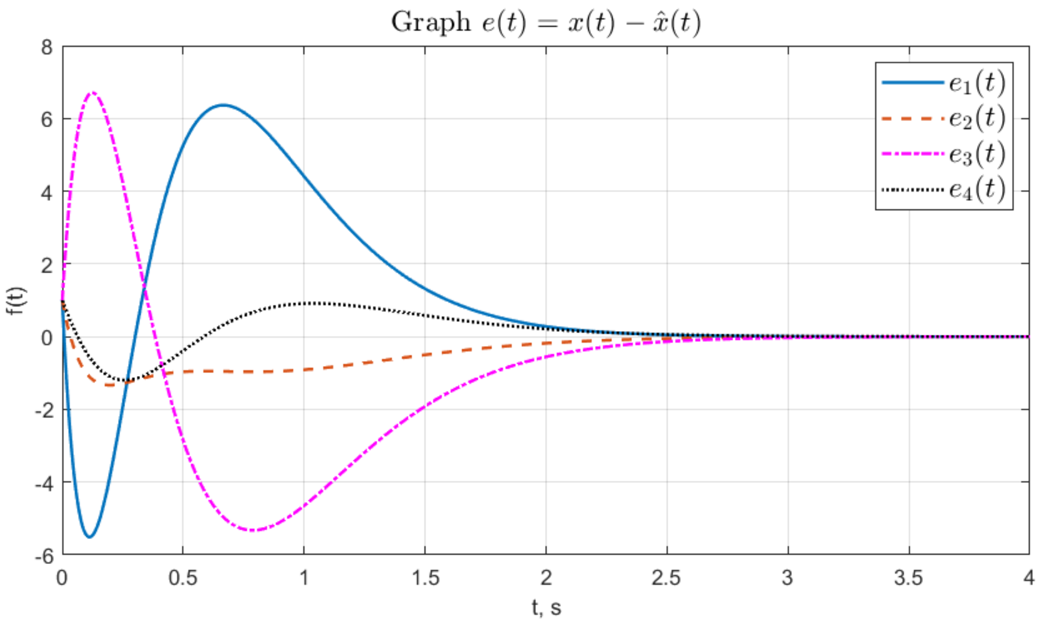

Рисунок 31 — График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

3.7 Вывод

В ходе выполнения данного задания был синтезирован регулятор, состоящий из наблюдателя состояния и закона управления. Он позволил обеспечить асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Результаты компьютерного моделирования для каждой компоненты векторов x и $\hat{x}$, представленные на рисунках 27, 28, 29, 30, демонстрируют асимптотическую устойчивость, все рассматриваемые графики сходятся к нулю с ростом времени. Кроме того, ошибка, которая вычисляется как разность $x(t)$ и $\hat{x}$ также страмится к нулю с ростом времени для каждой компоненты вектора состояния (рисунок 31).

4 НАБЛЮДАТЕЛЬ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА

В соответствии с вариантом возьмем матрицы A, B, C и D и рассмотрим систему (46)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Выполним следующие шаги:

– Найдём собственные числа матрицы A и определим управляемость и наблюдаемость каждого из них. Сделаем вывод об управляемости, стабилизируемости, наблюдаемости и обнаруживаемости системы. Допускается использование результатов **Задания 3**.
– Построим схему моделирования системы (46) замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния пониженного порядка

$$\dot{\hat{z}} = \Gamma\hat{z} - Yy + (QB + YD)u, \; \hat{x} = \begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y - Du \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

и закона управления $u = K\hat{x}$. В качестве модального регулятора K будем использовать синтезированный в **Задании 3**.
– Зададимся желаемым спектром матрицы наблюдателя пониженного порядка Γ, обеспечивающим асимптотическую устойчивость замкнутой системы.
– Синтезируем матрицу преобразования Q на основании выбранного желаемого спектра Γ.
– Выполнить компьютерное моделирование с начальными условиями системы $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ и наблюдателя $\hat{z}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Построим графики формируемого регулятором управления $u(t)$, вектора состояния наблюдателя пониженной размерности $\hat{z}$, сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

4.1 Управляемость и наблюдаемость собственных чисел матрицы A

Воспользуемся результатами, полученными в ходе выполнения Задания 3.

Еще раз запишем собственные числа матрицы A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 4 \\ \lambda_4 = 8 \end{cases} \tag{72}$$

И повторим полученный ранее вывод относительно управляемости, потому что матрицы A и B остались прежними. Все собственные числа системы управляемы, следовательно, система в целом полностью управляема и стабилизируема.

Исследуем наблюдаемость собственных чисел

$$V_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad rank(V_1) = 4 \tag{73}$$

Так как ранг V_1 равен размерности системы, то число λ_1 наблюдаемо.

$$V_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad rank(V_2) = 4 \tag{74}$$

Так как ранг V_2 равен размерности системы, то число λ_2 наблюдаемо.

$$V_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad rank(V_3) = 4 \tag{75}$$

Так как ранг V_3 равен размерности системы, то число λ_3 наблюдаемо.

$$V_4 = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad rank(V_4) = 4 \tag{76}$$

Так как ранг V_4 равен размерности системы, то число λ_4 наблюдаемо.

Все собственные числа наблюдаемы, значит, система в целом полностью наблюдаемая и обнаруживаемая.

4.2 Схема моделирования системы

Построим схему моделирования системы (46) замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния пониженного порядка

$$\dot{\hat{z}} = \Gamma \hat{z} - Yy + (QB + YD)u, \ \hat{x} = \begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y - Du \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

и закона управления $u = K\hat{x}$. В качестве модального регулятора K будем использовать синтезированный в **Задании 3**.

$$K = \begin{bmatrix} -7.6209 & 1.3970 & 7.5052 & 1.2820 \end{bmatrix} \tag{77}$$

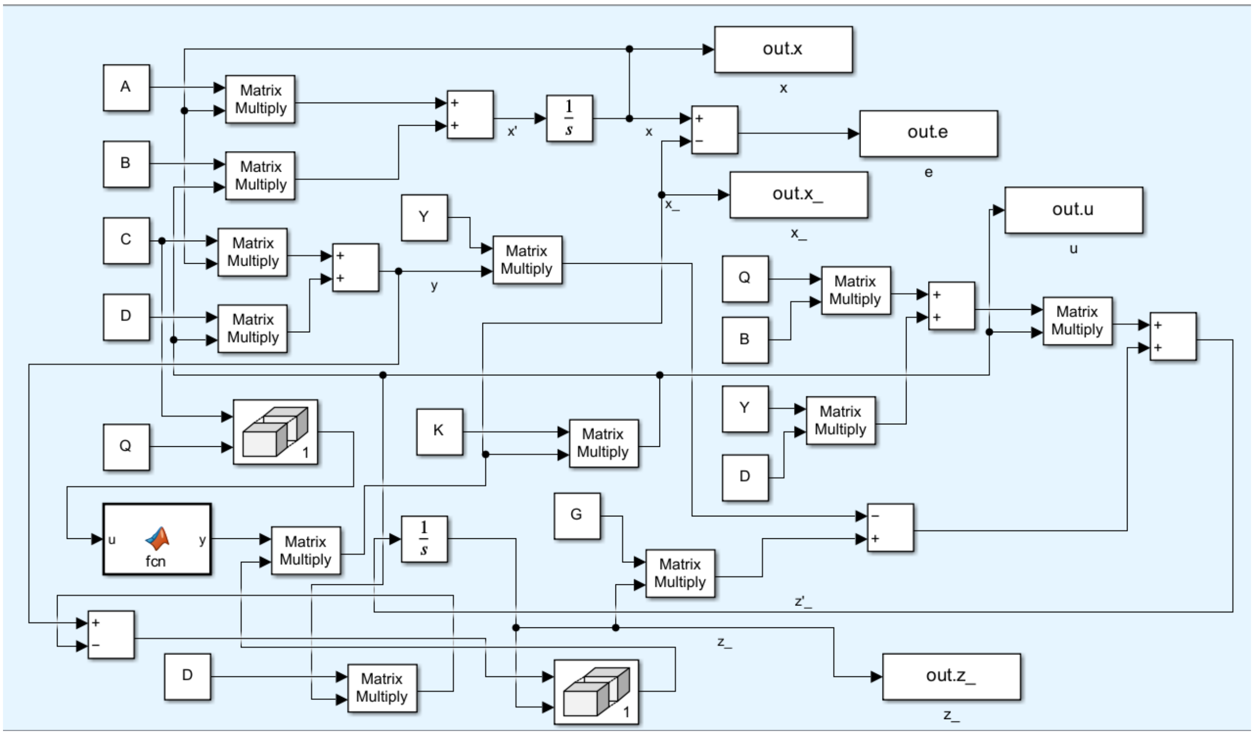

Рисунок 32 — Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния пониженного порядка и закона управления.

4.3 Спектр матрицы наблюдателя пониженного порядка

Зададимся желаемым спектром матрицы наблюдателя пониженного порядка $\sigma(\Gamma) = \begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix}$, обеспечивающим асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Запишем матрицу Γ в Жордановой форме.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{78}$$

Также зададимся матрицей Y

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{79}$$

4.4 Синтез матрицы преобразования

Синтезируем матрицу преобразования Q на основании выбранного желаемого спектра Γ. Решим уравнение Сильвестра

$$\Gamma Q - QA = YC \tag{80}$$

относительно Q и получим

$$Q = \begin{bmatrix} -0.0889 & 0.3111 & -0.2444 & -0.3556 \\ 0 & 0.5000 & 0 & -0.5000 \end{bmatrix} \tag{81}$$

4.5 Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование с начальными условиями системы $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ и наблюдателя $\hat{z}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Построим графики формируемого регулятором управления $u(t)$, вектора состояния наблюдателя пониженной размерности $\hat{z}$. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ построим для каждой координаты векторов отдельно.

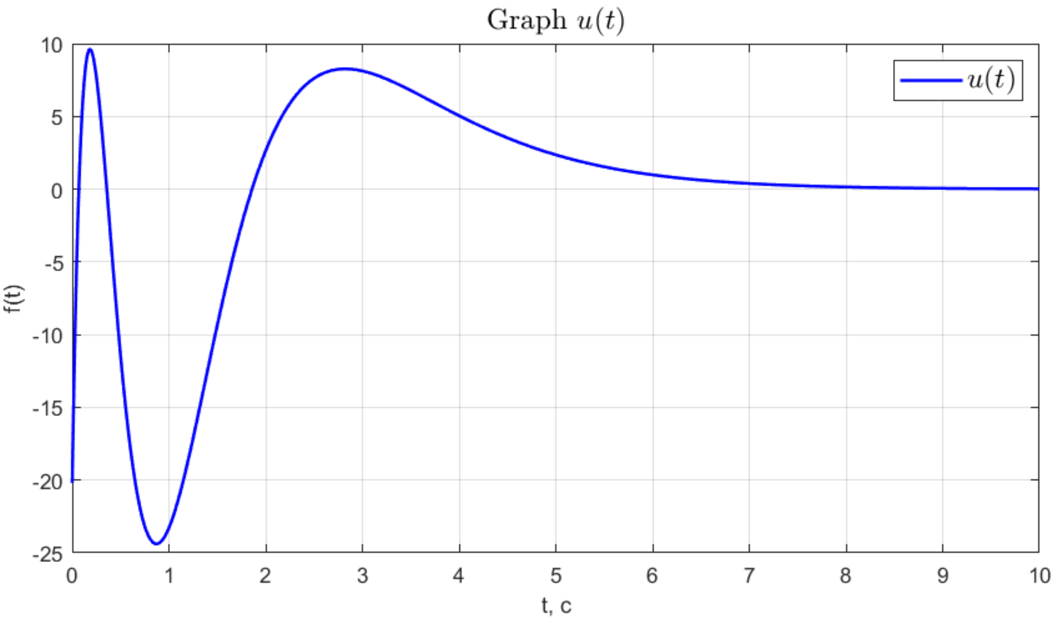

Рисунок 33 — График формируемого регулятором управления $u(t)$.

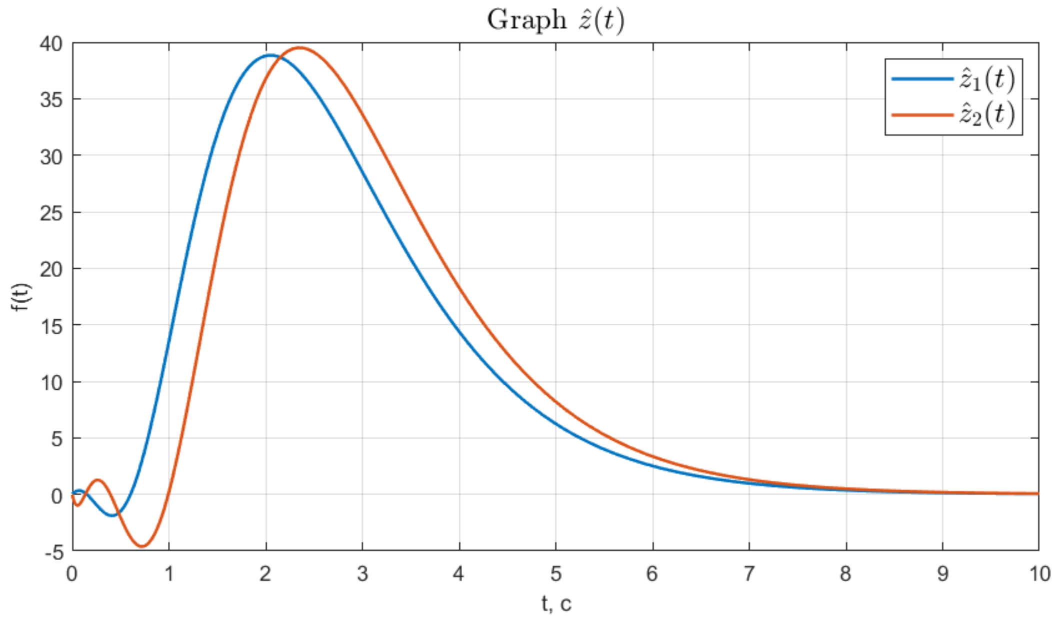

Рисунок 34 — Графики вектора состояния наблюдателя пониженной размерности $\hat{z}$.

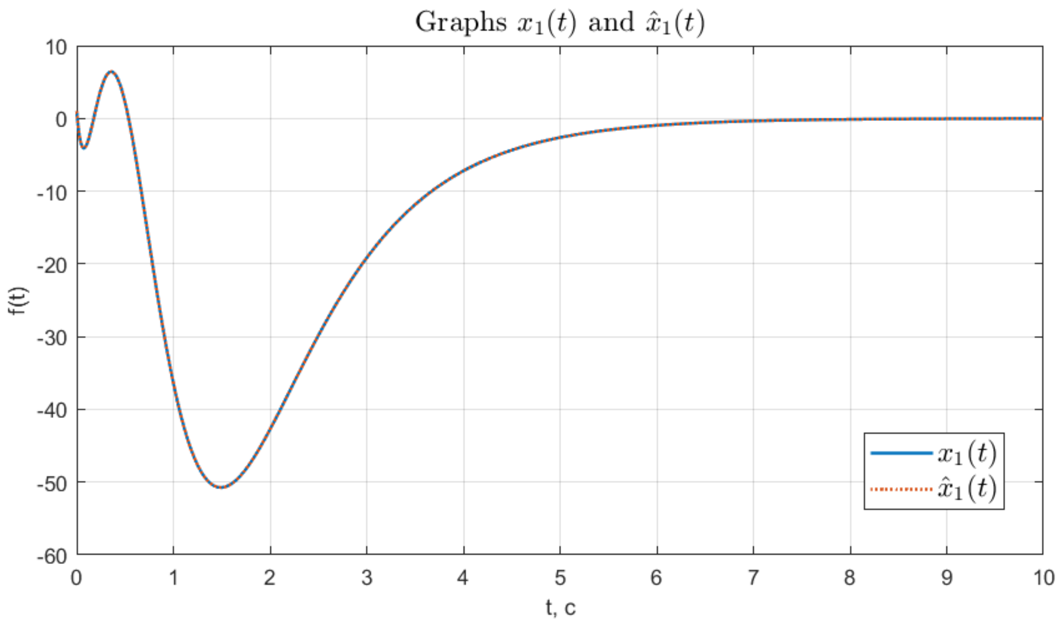

Рисунок 35 — Сравнительные графики $x_1(t)$ и $\hat{x}_1(t)$.

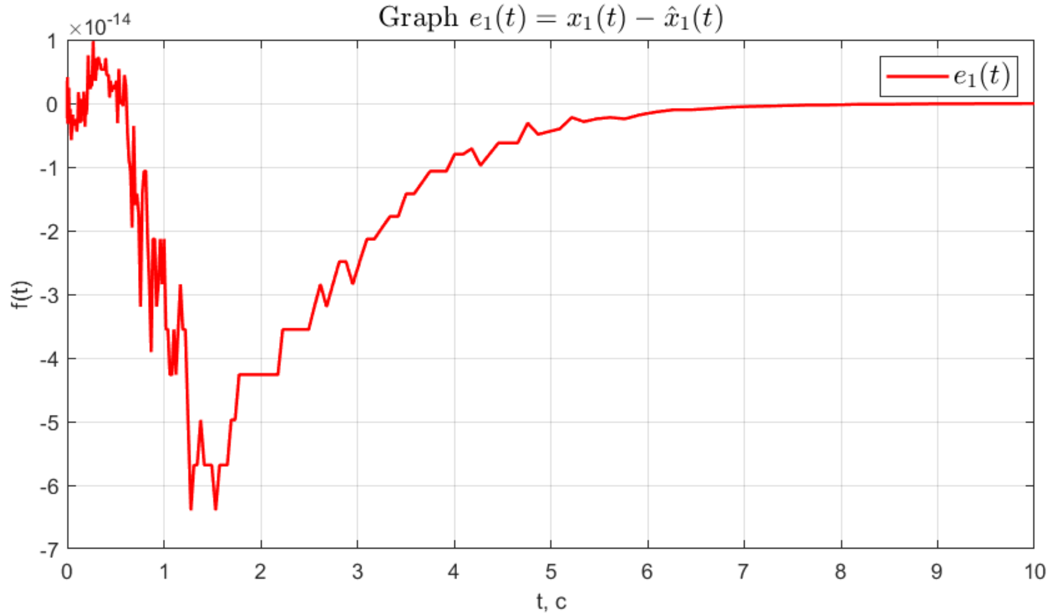

Рисунок 36 — График ошибки наблюдателя $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$.

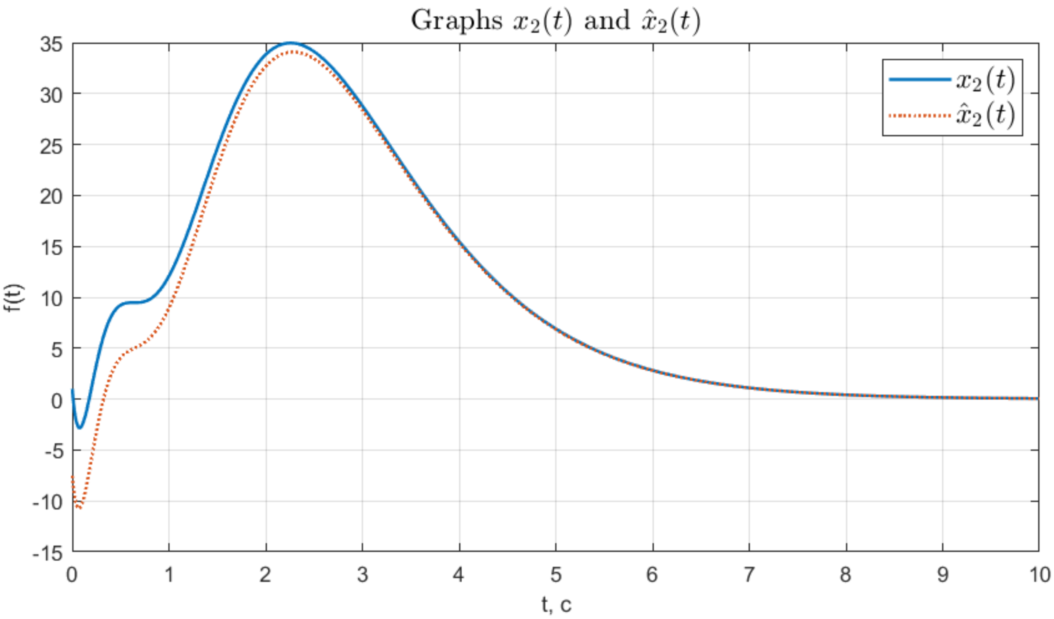

Рисунок 37 — Сравнительные графики $x_2(t)$ и $\hat{x}_2(t)$.

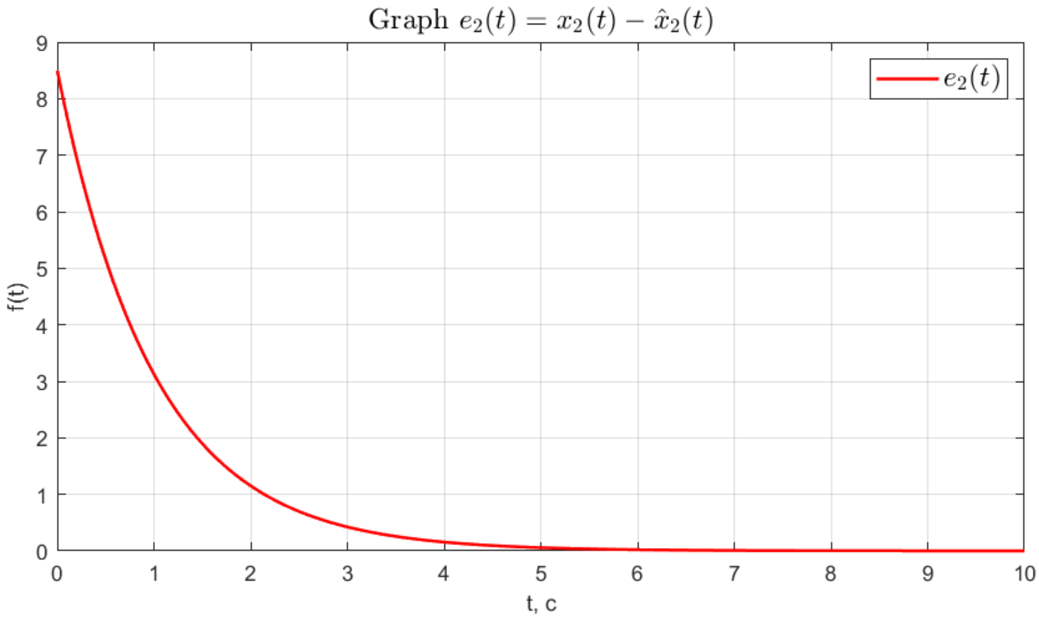

Рисунок 38 — График ошибки наблюдателя $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$.

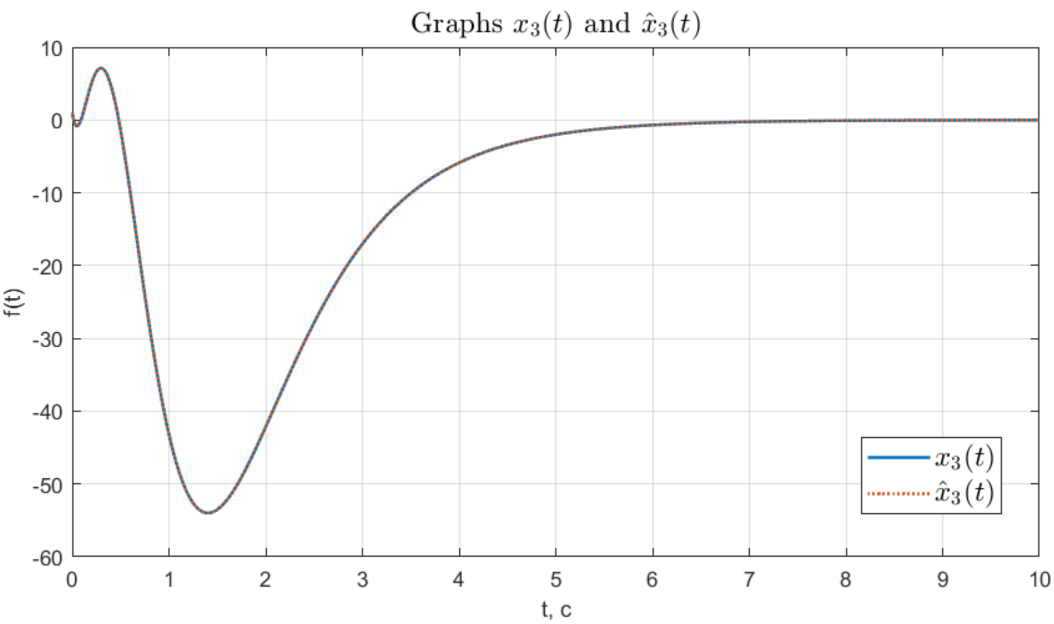

Рисунок 39 — Сравнительные графики $x_3(t)$ и $\hat{x}_3(t)$.

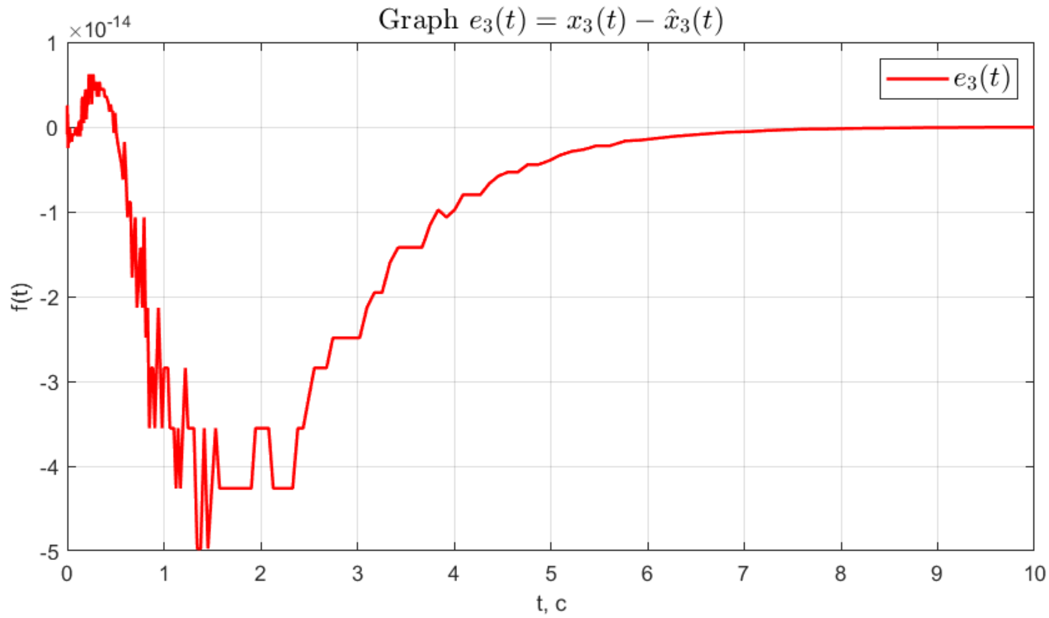

Рисунок 40 — График ошибки наблюдателя $e_3(t) = x_3(t) - \hat{x}_3(t)$.

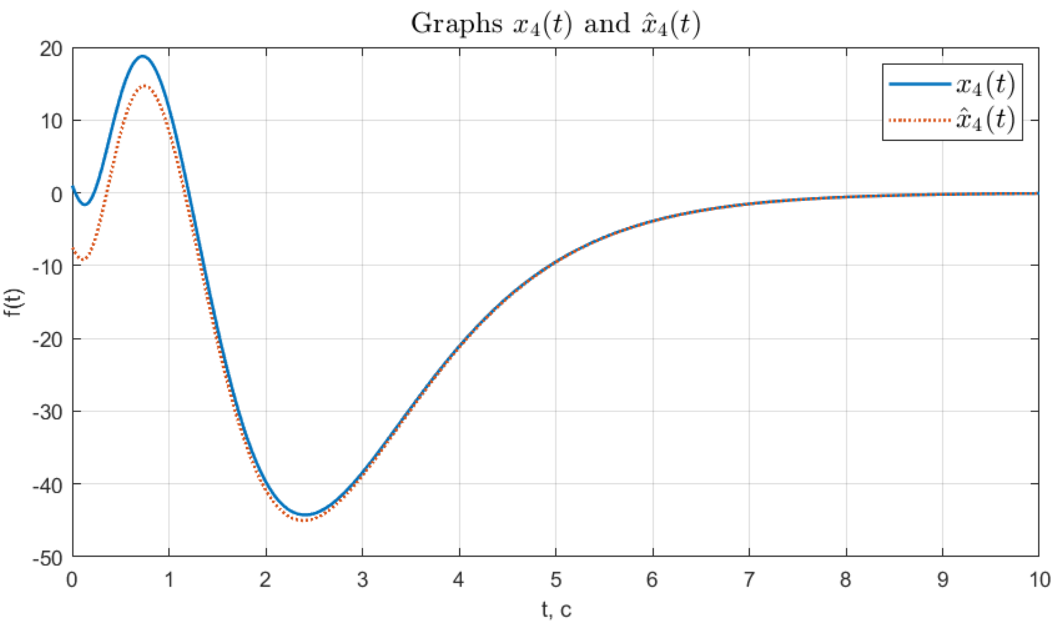

Рисунок 41 — Сравнительные графики $x_4(t)$ и $\hat{x}_4(t)$.

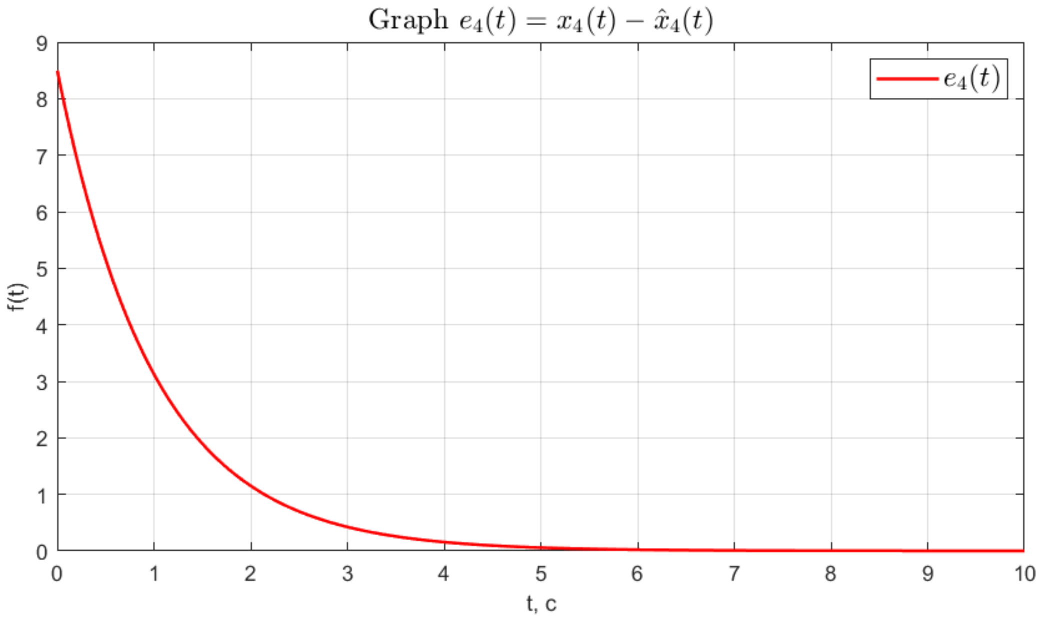

Рисунок 42 — График ошибки наблюдателя $e_4(t) = x_4(t) - \hat{x}_4(t)$.

4.6 Вывод

В ходе выполнения данного задания был синтезирован наблюдатель пониженного порядка. Результаты моделирования подтверждают корректность проведенных расчетов: между $\hat{x}(t)$ и $x(t)$ с течением времени ошибка стремится к нулю (рисунки 36, 38, 40, 42), также замкнутая система является асимптотически устойчивой, так как вектор состояния $x(t)$ стремится к нулю (рисунки 35, 37, 39, 41).

5 ВЫВОД

В ходе выполнения лабораторной работы были применены на практике знания о модальных регуляторах и наблюдателях. В каждом задании была изучена управляемость, стабилизируемость, наблюдаемость и обнаруживаемость систем. В первом задании был синтезирован модальный регулятор с заданными значениями спектра замкнутой системы. Во втором аналогично был синтезирован наблюдатель полного порядка. Далее был синтезирован регулятор и наблюдатель для обеспечения управления по выходу. В последнем задании проведен синтез наблюдатель пониженного порядка. В каждом задании для нахождения необходимых параметров регуляторов и наблюдателей были использованы системы уравнений, содержащие уравнение типа Сильвестра. Также проведено компьютерное моделирование, демонстрирующее корректность выполненных расчетов.