

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ  
по лабораторной работе № 4:  
СЛЕЖЕНИЕ И КОМПЕНСАЦИЯ: ВИРТУАЛЬНЫЙ ВЫХОД

Вариант 17

по дисциплине  
*«Теория автоматического управления»*

Студент:  
*Группа № R3338*

*А.А. Нечаева*

Предподаватель:  
*ассистент факультета СУиР, к. т. н.*

*А.В. Пашенко*

Санкт-Петербург 2025

## СОДЕРЖАНИЕ

1	КОМПЕНСИРУЮЩИЙ РЕГУЛЯТОР ПО СОСТОЯНИЮ. ....	4
1.1	Определение характера внешнего возмущения .....	5
1.2	Схема моделирования .....	6
1.3	Синтез «feedback»-компоненты .....	6
1.4	Синтез «feedforward»-компоненты .....	8
1.5	Компьютерное моделирование .....	8
1.5.1	Моделирование разомкнутой системы .....	8
1.5.2	Моделирование с «feedback» .....	9
1.5.3	Моделирование системы, замкнутой компенсирующим регулятором .....	10
1.6	Анализ результатов .....	13
2	СЛЕДЯЩИЙ РЕГУЛЯТОР ПО СОСТОЯНИЮ .....	14
2.1	Определение характера внешнего возмущения .....	15
2.2	Схема моделирования .....	16
2.3	Синтез «feedback»-компоненты .....	16
2.4	Синтез «feedforward»-компоненты .....	16
2.5	Компьютерное моделирование .....	17
2.5.1	Моделирование разомкнутой системы. ....	17
2.5.2	Моделирование системы, замкнутой регулятором только с «feedback» .....	19
2.5.3	Моделирование системы, замкнутой следящим регулятором .....	20
2.6	Анализ результатов .....	21
3	СЛЕЖЕНИЕ И КОМПЕНСАЦИЯ ПО ВЫХОДУ. ....	22
3.1	Определение характера внешнего возмущения .....	24
3.2	Определение возможности слежения и компенсации по выходу	24
3.3	Схема моделирования .....	25
3.4	Синтез «feedback»-компоненты следящего регулятора .....	28
3.5	Синтез матрицы коррекции наблюдателя .....	28
3.6	Первый виртуальный выход .....	29

3.6.1	Синтез «feedforward»-компоненты .....	29
3.6.2	Компьютерное моделирование .....	30
3.6.3	Собственные числа матрицы наблюдателя .....	32
3.7	Второй виртуальный выход .....	33
3.7.1	Синтез «feedforward»-компоненты .....	33
3.7.2	Компьютерное моделирование .....	34
3.7.3	Собственные числа матрицы наблюдателя .....	36
3.8	Анализ результатов .....	37
4	ТЕЛЕЖКА И МЕАНДР.....	38
4.1	Синтез математической модели.....	39
4.2	Выбор задающего сигнала.....	39
4.3	Разложение сигнала в ряд Фурье .....	39
4.4	Формирование генератора .....	40
4.5	Задание виртуального выхода .....	41
4.6	Синтез следящего регулятора .....	42
4.6.1	Синтез матрицы $K_1$ .....	42
4.6.2	Синтез матрицы $K_2$ .....	42
4.7	Компьютерное моделирование .....	43
4.8	Анализ результатов .....	46
5	ВЫВОД .....	47

## 1 КОМПЕНСИРУЮЩИЙ РЕГУЛЯТОР ПО СОСТОЯНИЮ.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_f w_f, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (1)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

генератор внешнего возмущения

$$\dot{w}_f = \Gamma w_f, \quad w_f(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (2)$$

где

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix}$$

и виртуальный выход вида

$$z = C_Z x, \quad (3)$$

где

$$C_Z = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Выполним следующие шаги:

- Найдём собственные числа матрицы  $\Gamma$  и определим характер внешнего возмущения.
- Построим схему моделирования системы (1), замкнутой компенсирующим регулятором

$$u = K_1 x + K_2 w_f, \quad (4)$$

обеспечивающим выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0 \quad (5)$$

при внешнем воздействии, задаваемом генератором (2).

- Синтезируем «feedback»-компоненту  $K_1$  компенсирующего регулятора (4) любым пройденным на курсе способом. Приведем выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу  $K_1$ .
- Синтезируем «feedforward»-компоненту  $K_2$  компенсирующего регулятора (4). Приведем выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу  $K_2$ .
- Выполним компьютерное моделирование...
  - ...разомкнутой системы ( $u = 0$ ) и построим графики вектора состояния генератора внешнего возмущения  $w_f(t)$ , вектора состояния объекта управления  $x(t)$  и виртуального выхода  $z(t)$ .
  - ...системы, замкнутой регулятором только с «feedback»-компонентой ( $u = K_1 x$ ) и построим графики формируемого регулятором управления  $u(t)$ , вектора состояния замкнутой системы  $x(t)$  и виртуального выхода  $z(t)$ .
  - ...системы, замкнутой компенсирующим регулятором (4) и построим графики формируемого регулятором управления  $u(t)$ , вектора состояния замкнутой системы  $x(t)$  и виртуального выхода  $z(t)$ .
- Проанализируем полученные результаты и сделаем выводы.

## 1.1 Определение характера внешнего возмущения

Найдем собственные числа матрицы  $\Gamma$  и определим характер внешнего возмущения.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm 2i \in \overline{\mathbb{C}_+} \\ \lambda_{3,4} = \pm i \in \overline{\mathbb{C}_+} \end{cases} \quad (6)$$

Характер внешнего возмущения: незатухающие колебания (синусоиды).

## 1.2 Схема моделирования

Построим схему моделирования системы (1), замкнутой компенсирующим регулятором (4), обеспечивающим выполнение целевого условия (59) при внешнем воздействии, задаваемом генератором (2).

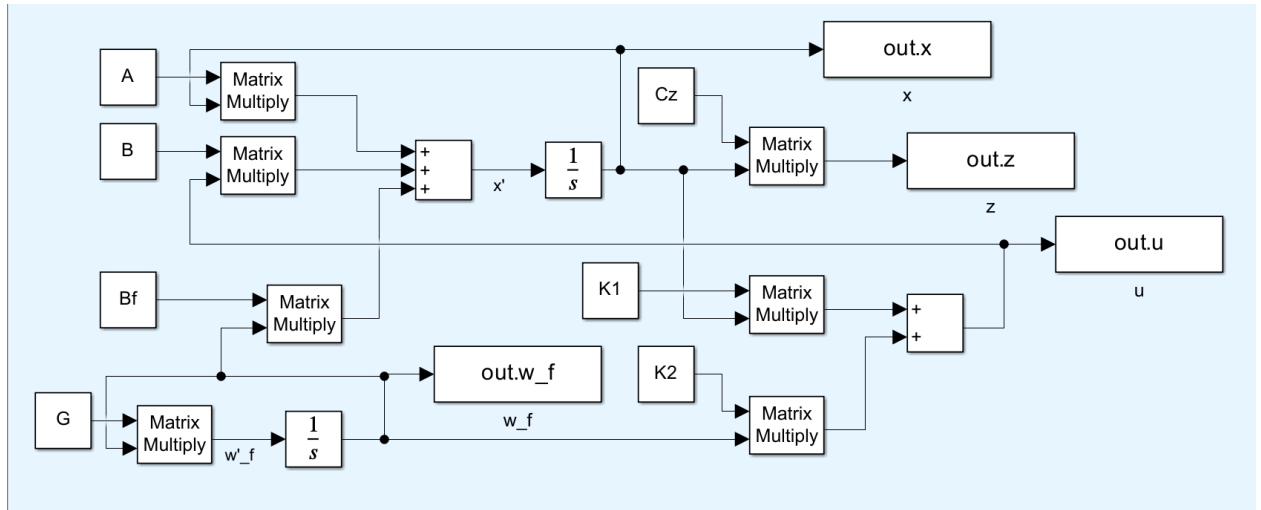


Рисунок 1 — Схема моделирования системы.

## 1.3 Синтез «feedback»-компоненты

Синтезируем «feedback»-компоненту  $K_1$  компенсирующего регулятора (4) с помощью модального управления. Приведем выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу  $K_1$ .

Найдем собственные числа матрицы  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 2 - 3i \\ \lambda_3 = 2 + 3i \end{cases}$$

Определим управляемость собственных чисел с помощью матриц Хаутуса.

Для собственного числа  $\lambda_1 = -3$ :

$$U_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & -8 & 0 \\ 6 & 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_1) = 2 \quad (7)$$

Ранг  $U_1$  меньше порядка системы, следовательно, собственного число  $\lambda_1$  неуправляемо.

Для собственного числа  $\lambda_2 = 2 - 3i$ :

$$U_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 3i & 8 & 5 & 2 \\ -6 & -11 + 3i & -8 & 0 \\ 6 & 6 & 3 + 3i & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_2) = 3 \quad (8)$$

Ранг  $U_2$  равно порядку системы, следовательно, собственного число  $\lambda_2$  управляемо.

Для собственного числа  $\lambda_3 = 2 + 3i$ :

$$U_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3i & 8 & 5 & 2 \\ -6 & -11 - 3i & -8 & 0 \\ 6 & 6 & 3 - 3i & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(U_3) = 3 \quad (9)$$

Ранг  $U_3$  равно порядку системы, следовательно, собственного число  $\lambda_3$  управляемо.

Система в целом не является полностью управляемой, из-за того, что собственное число  $\lambda_1 = -3$  неуправляемо. В то же время  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$ , то есть данное собственное число устойчивое, следовательно, система стабилизируема.

Для нахождения матрицы регулятора  $K_1$  воспользуемся системой

$$\begin{cases} AP_1 - P_1\Phi = BY_1 \\ K_1 = -Y_1P_1^+ \end{cases} \quad (10)$$

Пусть желаемый спектр замкнутой системы  $\sigma(A + BK_1) = \{-3, -4, -5\} \in \mathbb{C}_-$ . Составим матрицу  $\Phi$  в Жордановой форме так, чтобы её спектр совпадал с  $\sigma(A + BK_1)$ .

$$\Phi = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Теперь подберем такую матрицу  $Y_1$ , чтобы  $(Y_1, \Phi)$  была ненаблюдаема для неуправляемого собственного числа  $\lambda = -3$  и наблюдаема для всех остальных собственных чисел.

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

После решения системы (10) получим

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.1379 & 0.1333 & 0 \\ 0.2069 & 0.2667 & 0 \\ -0.2069 & -0.2667 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} -6.50 & -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (13)$$

#### 1.4 Синтез «feedforward»-компоненты

Синтезируем «feedforward»-компоненту  $K_2$  компенсирующего регулятора (4). Приведем выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу  $K_2$ .

Сначала найдем  $P_2$  и  $Y_2$  такие, что

$$\begin{cases} P_2 \Gamma - AP_2 = BY_2 + B_f \\ C_Z P_2 + D_Z = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Так как мы исследуем задачу компенсации, то  $D_Z = 0$ .

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.2077 & 0.3231 & -0.4846 & 0.3923 \\ 14.2615 & 4.6846 & -11.0769 & 7.0385 \\ -14.6769 & -5.3308 & 12.0462 & -7.8231 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} -20.4346 \\ -6.7038 \\ 16.1308 \\ -10.6654 \end{bmatrix}^T \quad (15)$$

Вычислим  $K_2$  по формуле

$$K_2 = Y_2 - K_1 P_2 = \begin{bmatrix} -11.8500 & -2.1000 & 7.2000 & -4.4000 \end{bmatrix} \quad (16)$$

#### 1.5 Компьютерное моделирование

##### 1.5.1 Моделирование разомкнутой системы

Выполним компьютерное моделирование разомкнутой системы ( $u = 0$ ) и построим графики вектора состояния генератора внешнего возмущения  $w_f(t)$ , вектора состояния объекта управления  $x(t)$  и виртуального выхода  $z(t)$ .



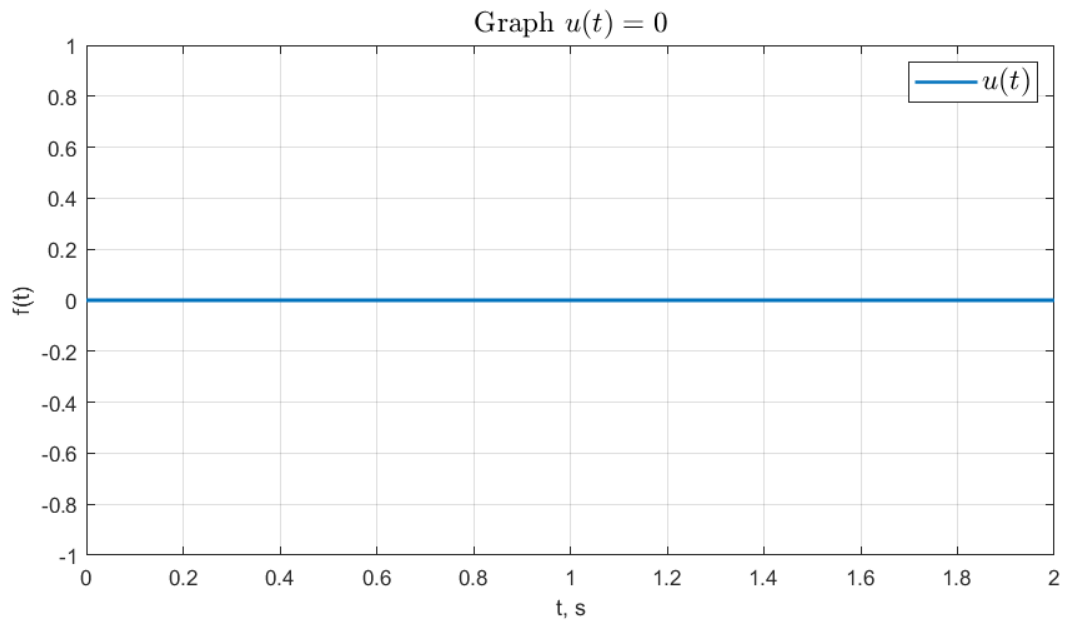


Рисунок 2 — График  $u(t)$  для разомкнутой системы.

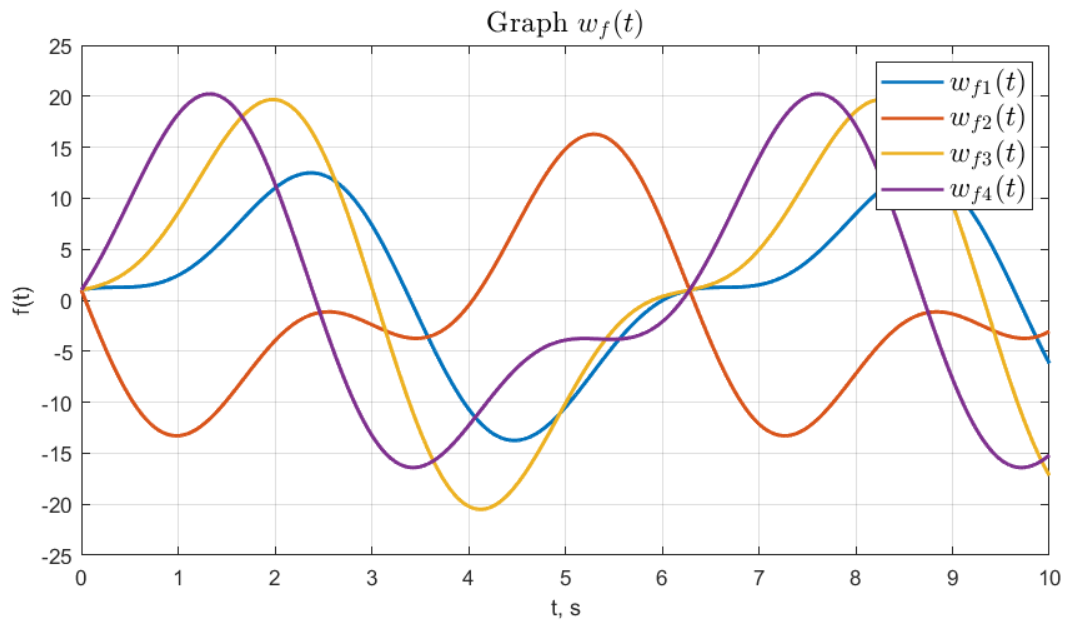


Рисунок 3 — График вектора состояния генератора внешнего возмущения  $w_f(t)$ .

### 1.5.2 Моделирование с «feedback»

Выполним компьютерное моделирование системы, замкнутой регулятором только с «feedback»-компонентой ( $u = K_1 x$ ) и построим графики формируемого регулятором управления  $u(t)$ , вектора состояния замкнутой системы  $x(t)$  и виртуального выхода  $z(t)$ .

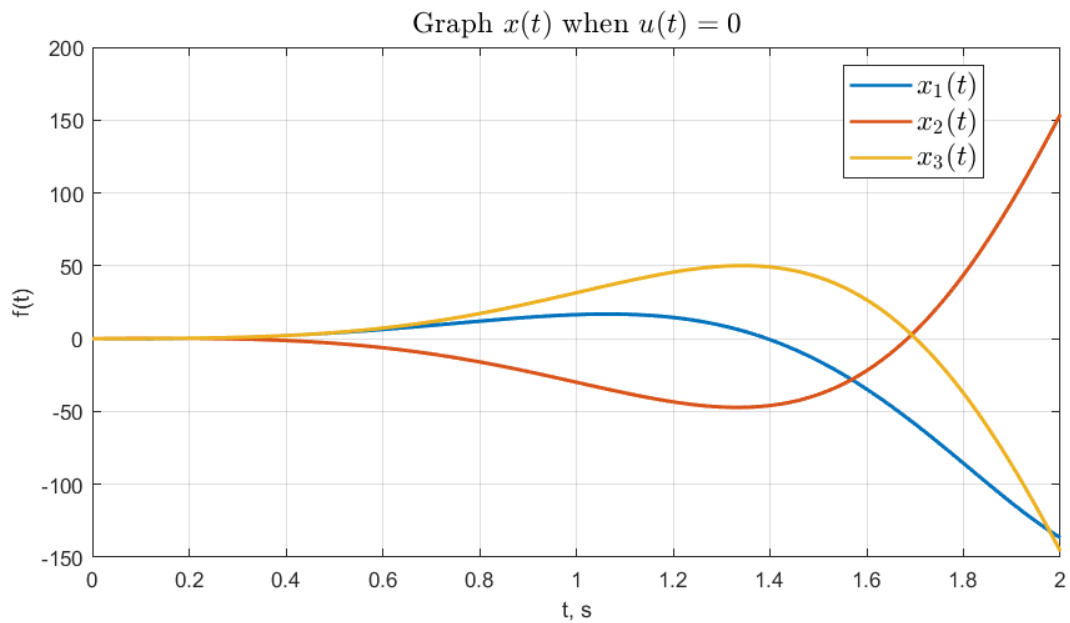


Рисунок 4 — График вектора состояния объекта управления  $x(t)$ .

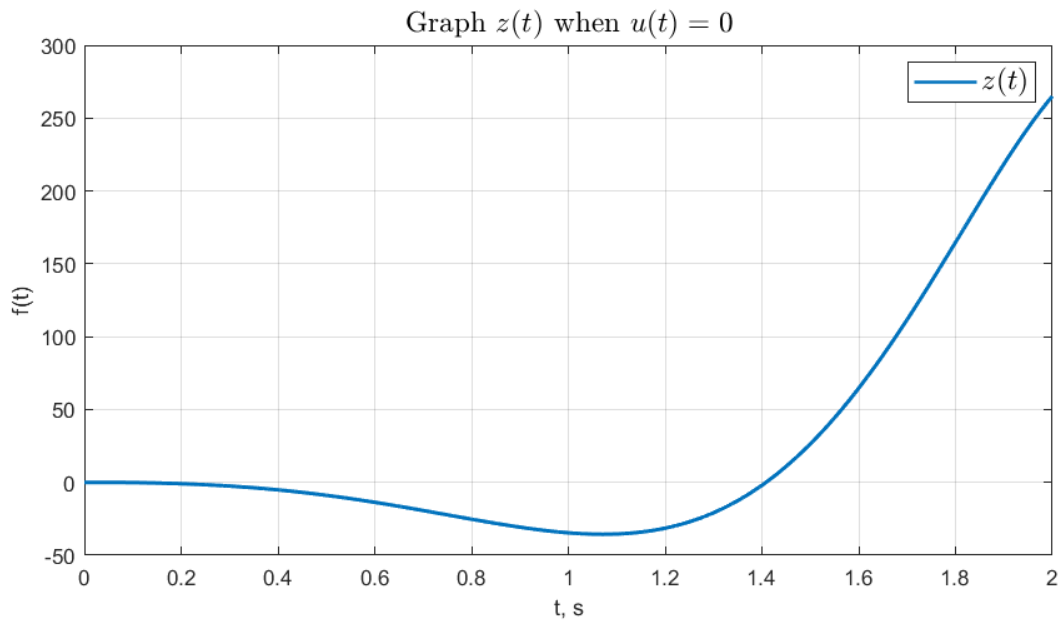


Рисунок 5 — График виртуального выхода  $z(t)$ .

### 1.5.3 Моделирование системы, замкнутой компенсирующим регулятором

Выполним компьютерное моделирование системы, замкнутой компенсирующим регулятором (4) и построим графики формируемого регулятором управления  $u(t)$ , вектора состояния замкнутой системы  $x(t)$  и виртуального выхода  $z(t)$ .

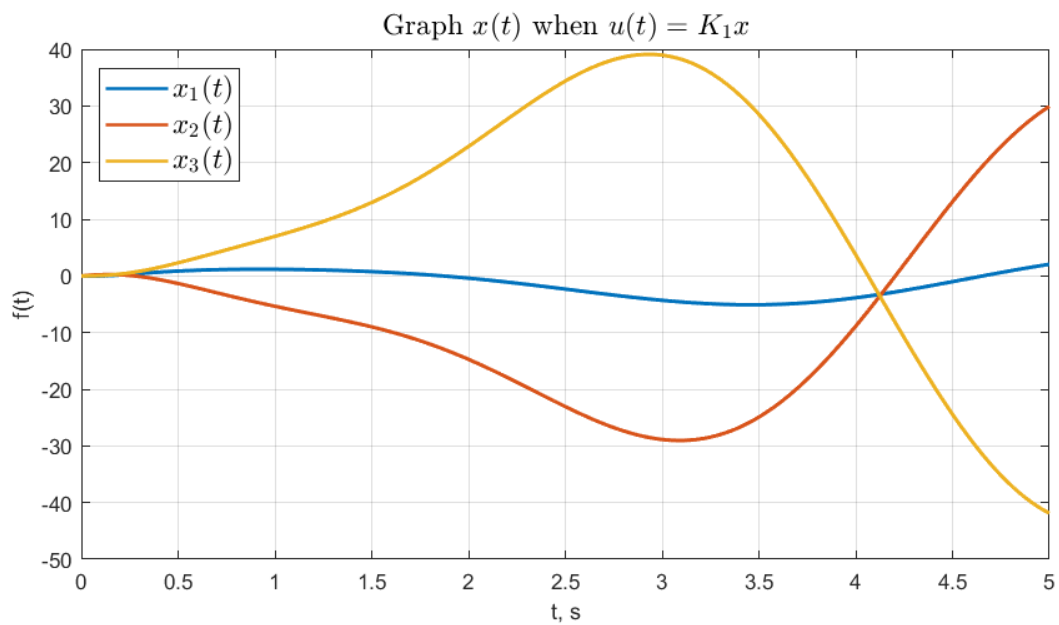


Рисунок 6 — График вектора состояния объекта управления  $x(t)$ .

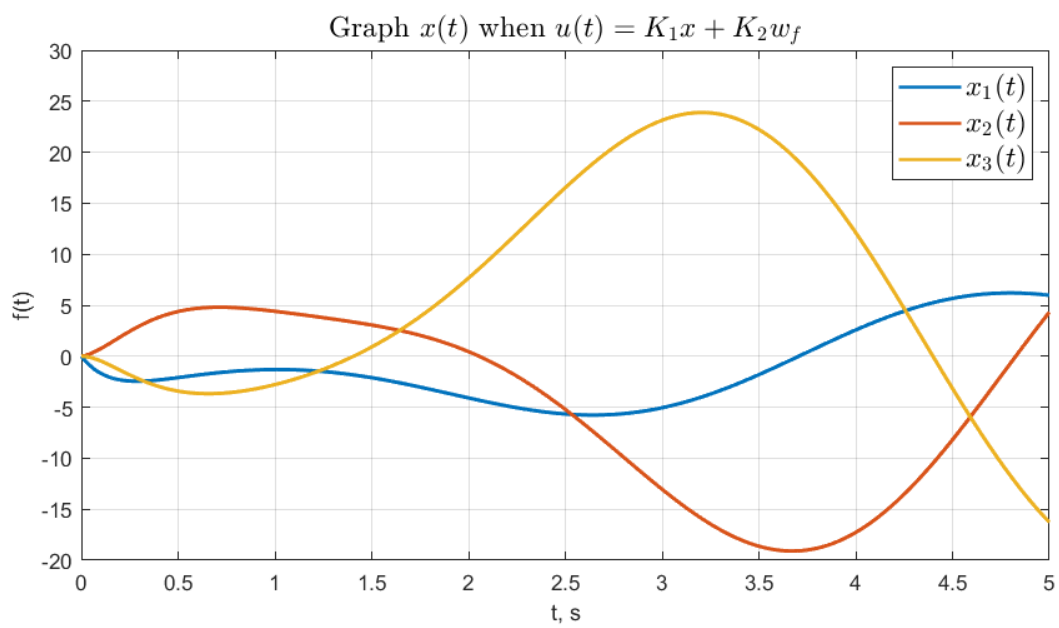


Рисунок 7 — График вектора состояния объекта управления  $x(t)$ .

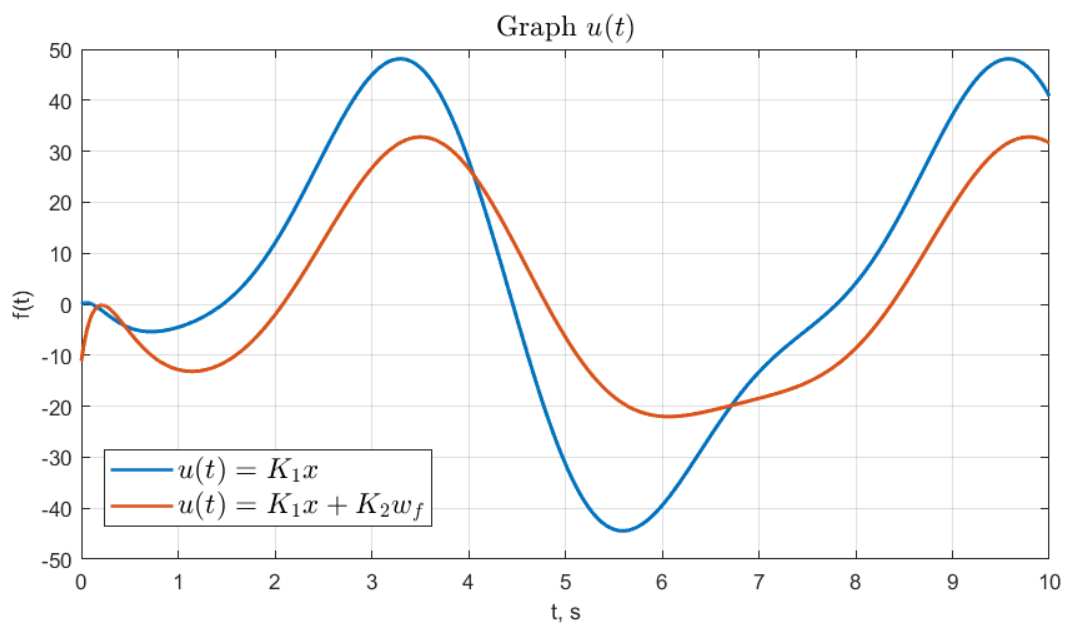


Рисунок 8 — График управляющего воздействия  $u(t)$ .

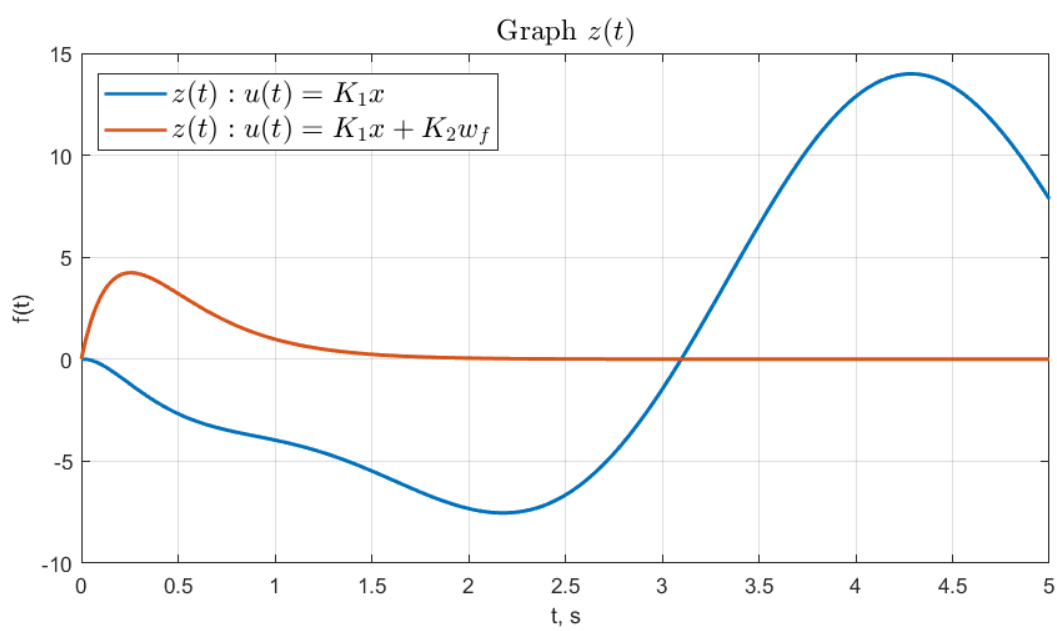


Рисунок 9 — График виртуального выхода  $z(t)$ .

## 1.6 Анализ результатов

Как можно заметить на рисунке 9 компенсирующий регулятор обеспечивает выполнение целевого условия 59, график  $z(t) : u(t) = K_1x + K_2w_f$  действительно стремится к нулю с течением времени. График вектора состояния внешнего возмущения (рисунок 3) действительно представлен незатухающими колебаниями, похож на сумму синусоид. Управляющее воздействие  $u(t) = K_1x + K_2w_f$  стремится компенсировать внешнее возмущение, воздействующее на систему. В случае  $u(t) = K_1x$  не удастся компенсировать внешнее возмущение, однако выход системы все же становится более устойчивым, чем при  $u(t) = 0$ .

## 2 СЛЕДЯЩИЙ РЕГУЛЯТОР ПО СОСТОЯНИЮ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (17)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

генератор задающего сигнала

$$\dot{w}_g = \Gamma w_g, \quad w_g(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (18)$$

где

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix}$$

и виртуальный выход вида

$$z = C_Z x + D_Z w_g, \quad (19)$$

где

$$C_Z = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_Z = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Выполним следующие шаги:

- Найдём собственные числа матрицы  $\Gamma$  и определим характер внешнего возмущения.
- Построим схему моделирования системы (17), замкнутой следящим регулятором

$$u = K_1 x + K_2 w_g, \quad (20)$$

обеспечивающим выполнение целевого условия (59) при внешнем воздействии, задаваемом генератором (18).

- Синтезируем «feedback»-компоненту  $K_1$  следящего регулятора (20) любым пройденным на курсе способом. Приведем выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу  $K_1$ .
- Синтезируем «feedforward»-компоненту  $K_2$  следящего регулятора (18). Приведем выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу  $K_2$ .
- Выполним компьютерное моделирование...
  - ...разомкнутой системы ( $u = 0$ ) и построим графики вектора состояния генератора задающего сигнала  $w_g(t)$ , вектора состояния объекта управления  $x(t)$  и виртуального выхода  $z(t)$
  - ...системы, замкнутой регулятором только с «feedback»-компонентой ( $u = K_1 x$ ) и построим графики формируемого регулятором управления  $u(t)$ , вектора состояния замкнутой системы  $x(t)$  и виртуального выхода  $z(t)$ .
  - ...системы, замкнутой следящим регулятором (20) и построим графики формируемого регулятором управления  $u(t)$ , вектора состояния замкнутой системы  $x(t)$  и виртуального выхода  $z(t)$ .
- Проанализируем полученные результаты и сделаем выводы.

## 2.1 Определение характера внешнего возмущения

Найдем собственные числа матрицы  $\Gamma$  и определим характер внешнего возмущения.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm 2i \in \overline{\mathbb{C}_+} \\ \lambda_{3,4} = \pm i \in \overline{\mathbb{C}_+} \end{cases} \quad (21)$$

Характер внешнего возмущения: незатухающие колебания (синусоиды).

## 2.2 Схема моделирования

Построим схему моделирования системы (17), замкнутой следящим регулятором 20, обеспечивающим выполнение целевого условия (59) при внешнем воздействии, задаваемом генератором (18).

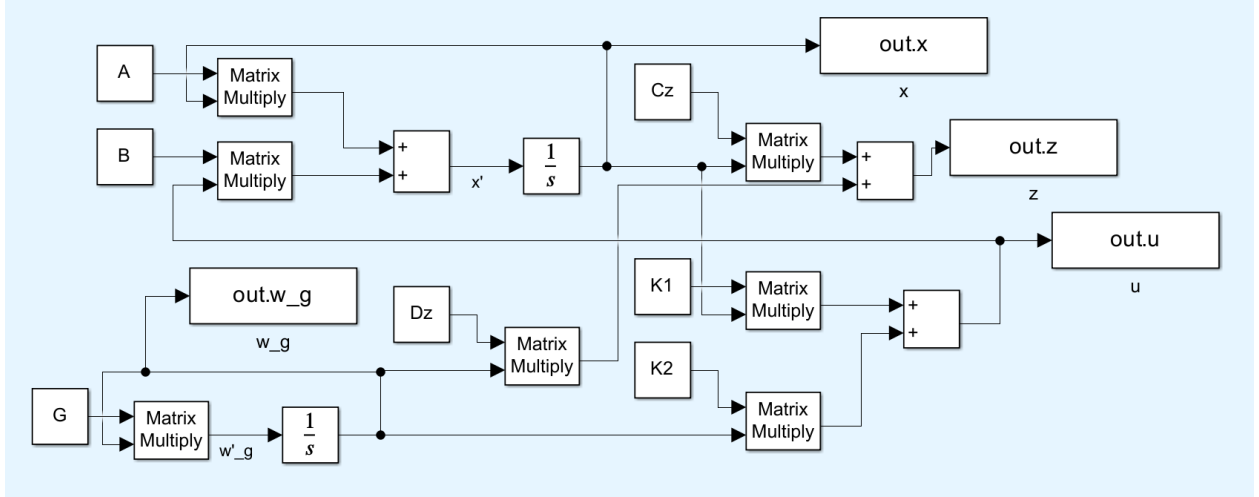


Рисунок 10 — Схема моделирования системы.

## 2.3 Синтез «feedback»-компоненты

Воспользуемся результатами, полученными при выполнении первого задания и запишем «feedback»-компоненту  $K_1$  следящего регулятора (4)

$$K_1 = \begin{bmatrix} -6.50 & -0.25 & 0.25 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

## 2.4 Синтез «feedforward»-компоненты

Синтезируем «feedforward»-компоненту  $K_2$  следящего регулятора (4). Приведем выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу  $K_2$ .

Сначала найдем  $P_2$  и  $Y_2$  такие, что

$$\begin{cases} P_2\Gamma - AP_2 = BY_2 + B_f \\ C_ZP_2 + D_Z = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Так как мы исследуем задачу слежения, то  $B_f = 0$ .



$$P_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 & -1.5 \\ 22.8 & 7.8 & -18 & 12 \\ -22 & -7.8 & 18 & -12 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} -28.2 \\ -8.7 \\ 21.5 \\ -13.75 \end{bmatrix}^T \quad (24)$$

Вычислим  $K_2$  по формуле

$$K_2 = Y_2 - K_1 P_2 = \begin{bmatrix} -29.8 & -11.3 & 25.5 & -17.5 \end{bmatrix} \quad (25)$$

## 2.5 Компьютерное моделирование

### 2.5.1 Моделирование разомкнутой системы.

Выполним компьютерное моделирование разомкнутой системы ( $u = 0$ ) и построим графики вектора состояния генератора задающего сигнала  $w_g(t)$ , вектора состояния объекта управления  $x(t)$  и виртуального выхода  $z(t)$

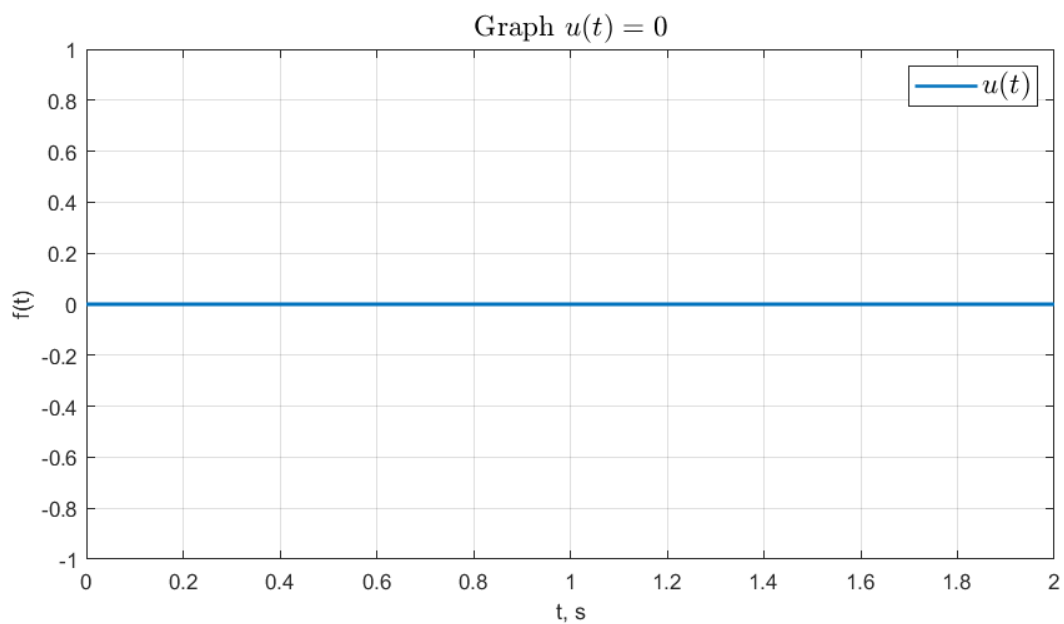


Рисунок 11 — График  $u(t)$  для разомкнутой системы.

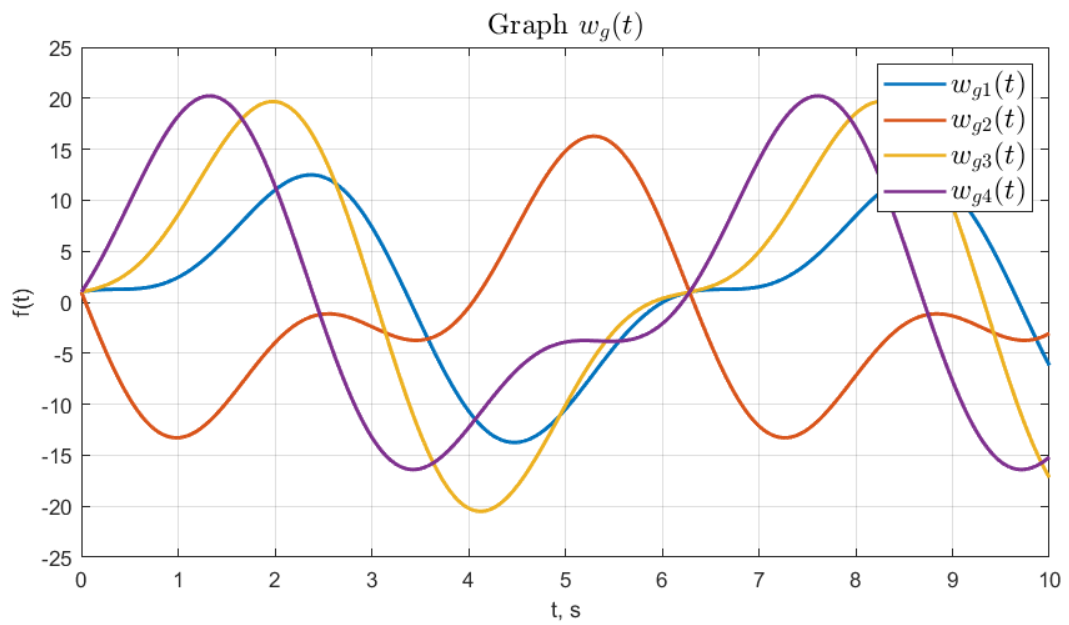


Рисунок 12 — График вектора состояния генератора задающего сигнала  $w_g(t)$ .

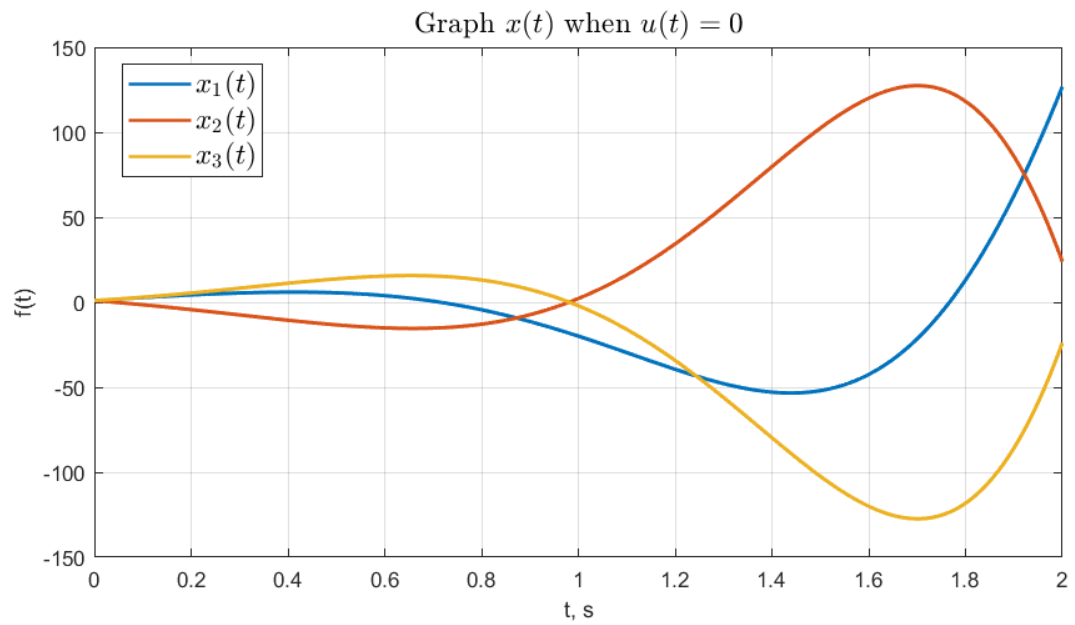


Рисунок 13 — График вектора состояния объекта управления  $x(t)$ .

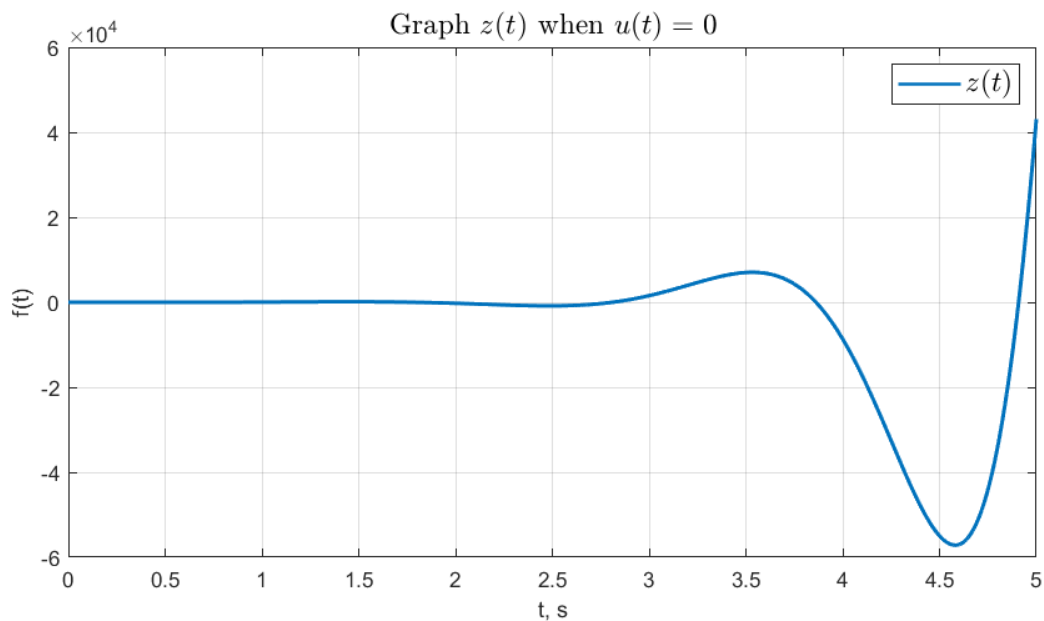


Рисунок 14 — График виртуального выхода  $z(t)$ .

### 2.5.2 Моделирование системы, замкнутой регулятором только с «feedback»

Выполним компьютерное моделирование системы, замкнутой регулятором только с «feedback»-компонентой ( $u = K_1 x$ ) и построим графики формируемого регулятором управления  $u(t)$ , вектора состояния замкнутой системы  $x(t)$  и виртуального выхода  $z(t)$ .

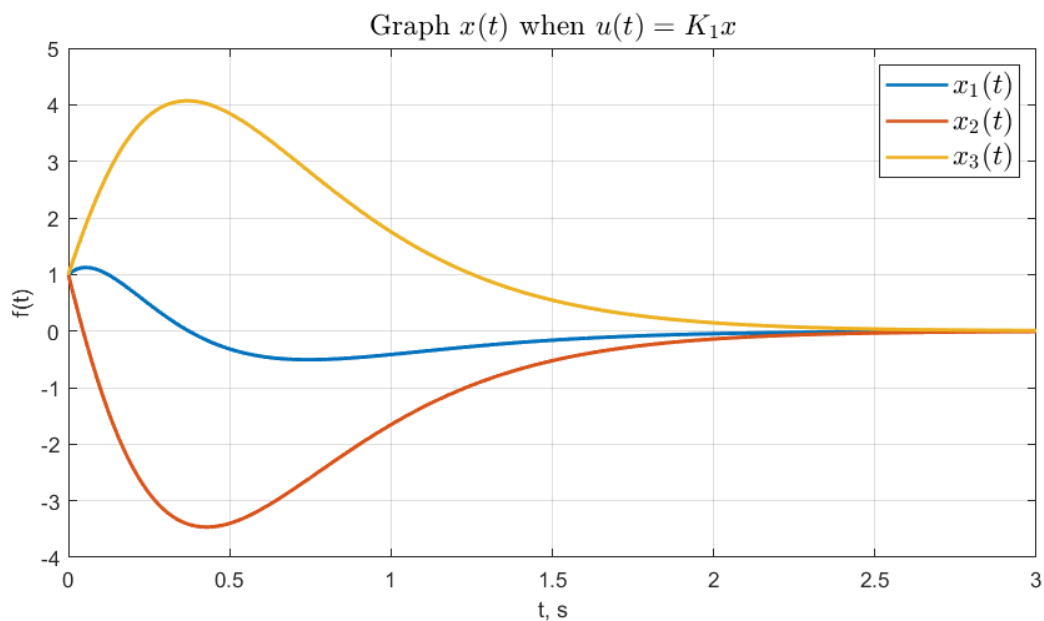


Рисунок 15 — График вектора состояния объекта управления  $x(t)$ .

### 2.5.3 Моделирование системы, замкнутой следящим регулятором

Выполним компьютерное моделирование системы, замкнутой следящим регулятором (20) и построим графики формируемого регулятором управления  $u(t)$ , вектора состояния замкнутой системы  $x(t)$  и виртуального выхода  $z(t)$ .

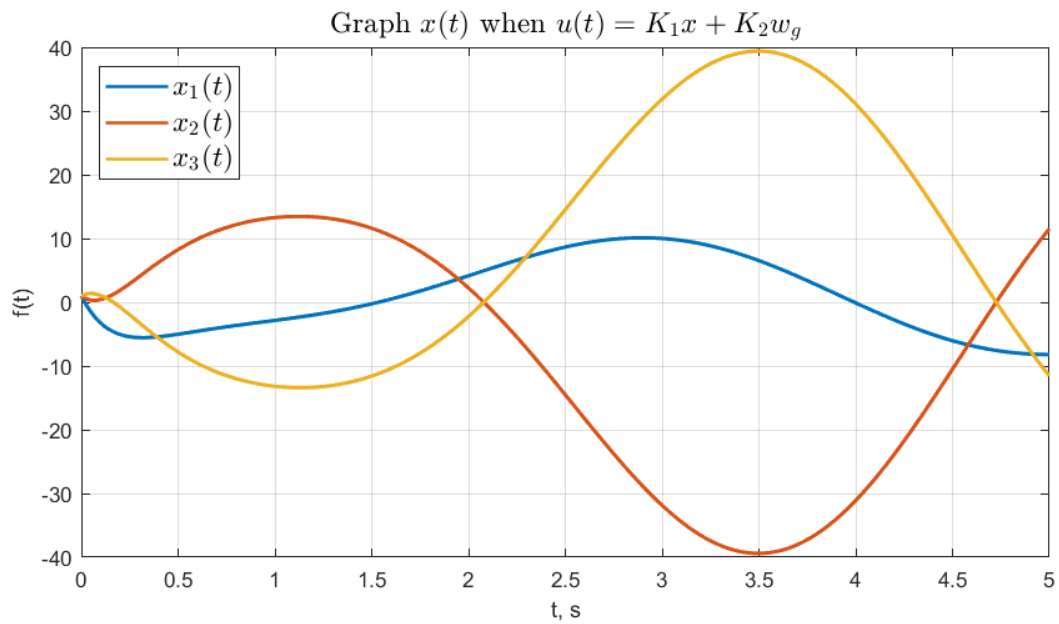


Рисунок 16 — График вектора состояния объекта управления  $x(t)$ .

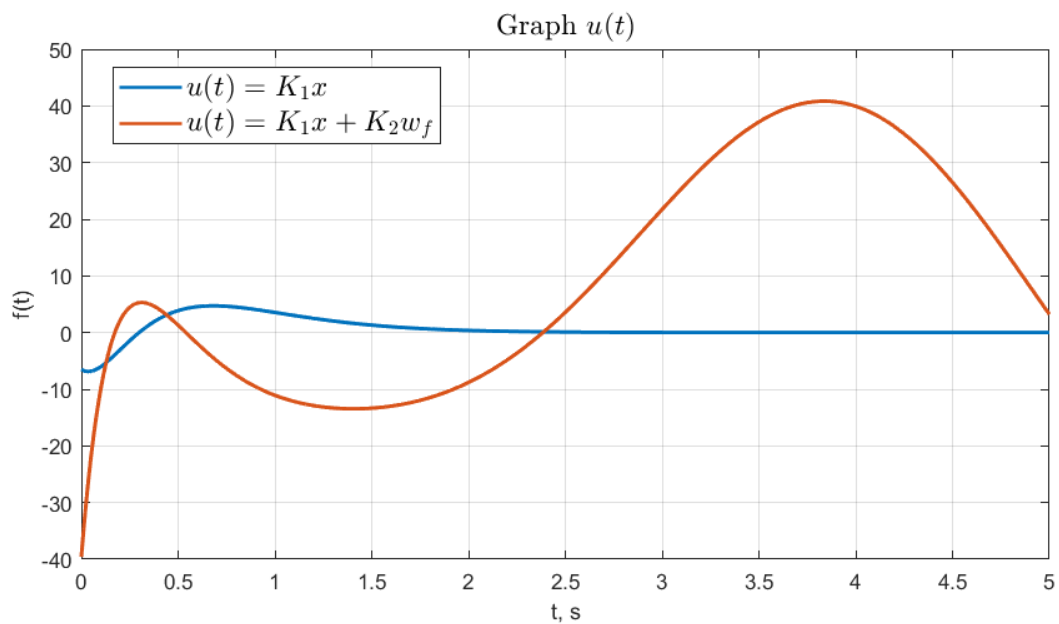


Рисунок 17 — График управляющего воздействия  $u(t)$ .

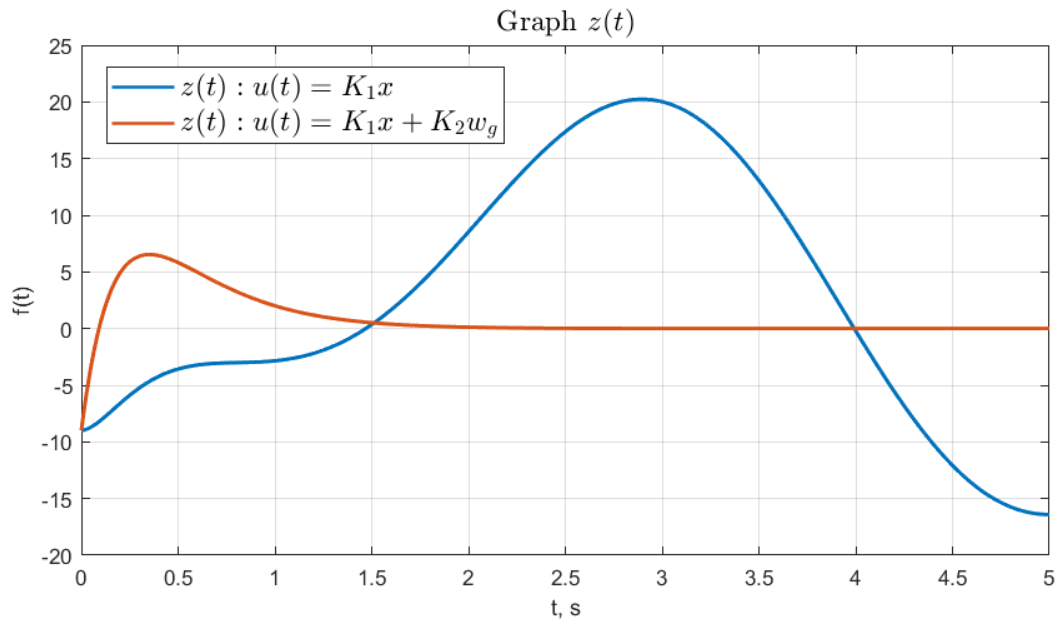


Рисунок 18 — График виртуального выхода  $z(t)$ .

## 2.6 Анализ результатов

Как можно заметить на рисунке 18 следящий регулятор обеспечивает выполнение целевого условия 59, график  $z(t) : u(t) = K_1x + K_2w_g$  действительно стремится к нулю с течением времени. График вектора состояния внешнего возмущения (рисунок 12) действительно представлен незатухающими колебаниями, похож на сумму синусоид. Управляющее воздействие  $u(t) = K_1x + K_2w_g$  обеспечивает слежение за задающим сигналом. В случае  $u(t) = K_1x$  не удастся обеспечить выполнение целевого условия, однако виртуальный выход системы все же становится более устойчивым, чем при  $u(t) = 0$ .

### 3 СЛЕЖЕНИЕ И КОМПЕНСАЦИЯ ПО ВЫХОДУ.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f w, \\ y = Cx + Dw, \end{cases} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (26)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix};$$

и генератор внешнего воздействия

$$\dot{w} = \Gamma w, \quad w(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (27)$$

где

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix}$$

Выполним следующие шаги:

- Найдем собственные числа матрицы  $\Gamma$  и определим характер внешнего возмущения.
- Проверим пару

$$\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} A & B_f \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}$$

на обнаруживаемость и сделаем вывод о возможности осуществления слежения и компенсации по выходу.

- Построим схему моделирования системы (26), замкнутой регулятором, состоящим из расширенного наблюдателя

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} - Ly \quad (28)$$

и закона управления

$$u = K_1 \hat{x} + K_2 \hat{w}, \quad (29)$$

обеспечивающего выполнение целевого условия (59) при внешнем воздействии, задаваемом генератором (27).

- Синтезируем «feedback»-компоненту  $K_1$  следящего регулятора (29) любым пройденным на курсе способом. Приведем выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу  $K_1$ .
- Синтезируем матрицу коррекции  $L$  наблюдателя (28). Приведем выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу  $L$ .
- Рассмотрим два случая виртуального выхода:

- $z = C_Z x + D_Z w$ , где

$$C_Z = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_Z = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

- $z = y$ .

Для каждого из вариантов виртуального выхода:

- Синтезируем «feedforward»-компоненту  $K_2$  следящего регулятора (29). Приведем выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу  $K_2$ .
- Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы с нулевыми начальными условиями наблюдателя. Построим график формируемого регулятором управления  $u(t)$ , сравнительные графики  $\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix}$ , график ошибки наблюдателя  $e(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix}$  и сравнительные графики фактического и виртуального выходов  $y(t)$  и  $z(t)$
- Найдём собственные числа матрицы системы регулятора в форме В-С-В и сравним с собственными числами матрицы генератора (27) Г.
- Проанализируем полученные результаты и сделаем выводы.

### 3.1 Определение характера внешнего возмущения

Найдем собственные числа матрицы  $\Gamma$  и определим характер внешнего возмущения.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm 2i \in \overline{\mathbb{C}_+} \\ \lambda_{3,4} = \pm i \in \overline{\mathbb{C}_+} \end{cases} \quad (30)$$

Характер внешнего возмущения: незатухающие колебания (синусоиды).

### 3.2 Определение возможности слежения и компенсации по выходу

Проверим пару

$$\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} A & B_f \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}$$

на обнаруживаемость и сделаем вывод о возможности осуществления слежения и компенсации по выходу.

Запишем исследуемые матрицы

$$\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} A & B_f \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & -9 & -8 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix} \quad (31)$$



Пусть  $\zeta = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}$ ,  $\Lambda = \begin{bmatrix} A & B_f \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}$ . Проверим систему на наблюдаемость, составим матрицу наблюдаемости

$$V = \begin{bmatrix} \zeta \\ \zeta\Lambda \\ \dots \\ \zeta\Lambda^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 16 & 31 & 24 & 1 & 4 & -12 & 8 \\ 38 & -7 & -48 & 69 & -7 & -20 & 13 \\ -56 & 79 & 6 & 255 & 150 & -302 & 248 \\ -718 & -1123 & -882 & 473 & -105 & -170 & -71 \\ -2144 & -929 & 984 & 379 & 754 & -936 & 2 \\ 758 & -2887 & 1632 & -15927 & -5827 & 15988 & -11915 \end{bmatrix} \Rightarrow \Rightarrow \text{rank}(V) = 7 \quad (32)$$

Так как ранг матрицы наблюдаемости равен размерности системы, то пара

$$\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} A & B_f \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}$$

является полностью наблюдаемой, следовательно, и обнаруживаемой, значит, возможно реализовать слежение и компенсацию по выходу.

### 3.3 Схема моделирования

Построим схему моделирования системы (26), замкнутой регулятором, состоящим из расширенного наблюдателя (28) и закона управления (29) обеспечивающего выполнение целевого условия (59) при внешнем воздействии, задаваемом генератором (27).

Найдем матрицу  $\bar{A}$  в

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} - Ly$$

из уравнений регулятора по выходу

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + B_f\hat{w} + L_1(\hat{y} - y) \\ \dot{\hat{w}} = \Gamma\hat{w} + L_2(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} + D\hat{w} \\ u = K_1\hat{x} + K_2\hat{w} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B(K_1\hat{x} + K_2\hat{w}) + B_f\hat{w} + L_1(C\hat{x} + D\hat{w} - y) \\ \dot{\hat{w}} = \Gamma\hat{w} + L_2(C\hat{x} + D\hat{w} - y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A + BK_1 + L_1C)\hat{x} + (BK_2 + B_f + L_1D)\hat{w} - L_1y \\ \dot{\hat{w}} = (\Gamma + L_2D)\hat{w} + L_2C\hat{x} - L_2y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{A} = \begin{bmatrix} A + BK_1 + L_1C & BK_2 + B_f + L_1D \\ L_2C & \Gamma + L_2D \end{bmatrix} \quad (33)$$

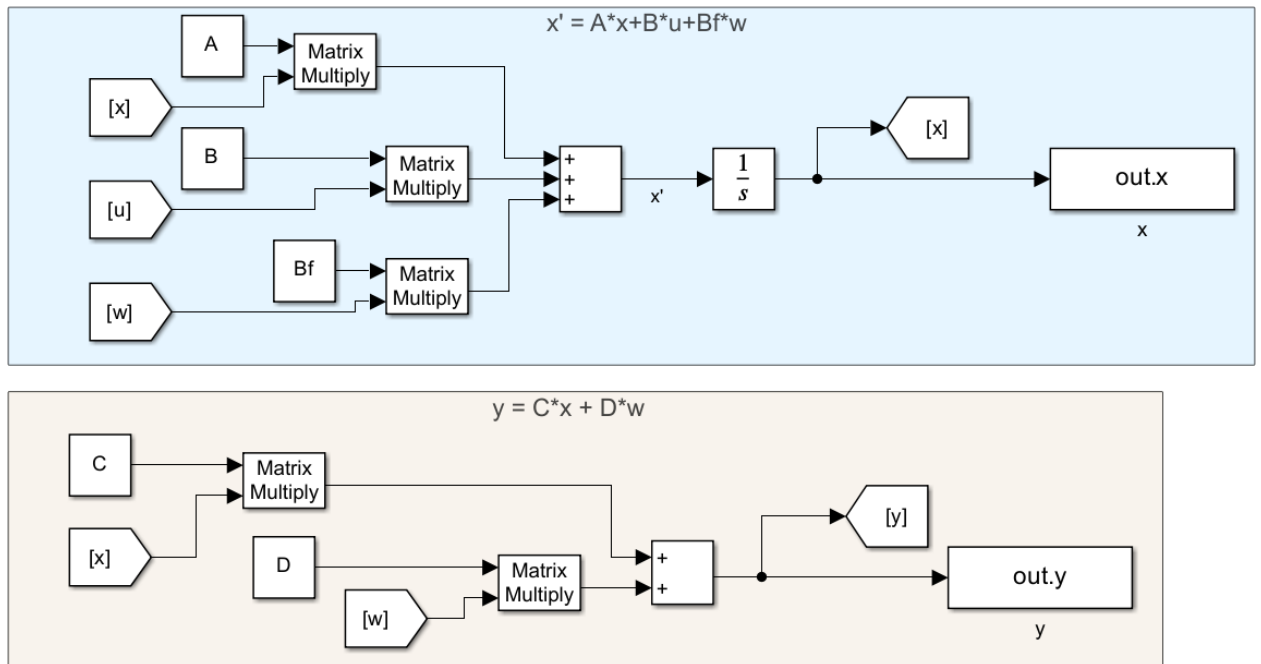


Рисунок 19 — Схема моделирования системы.

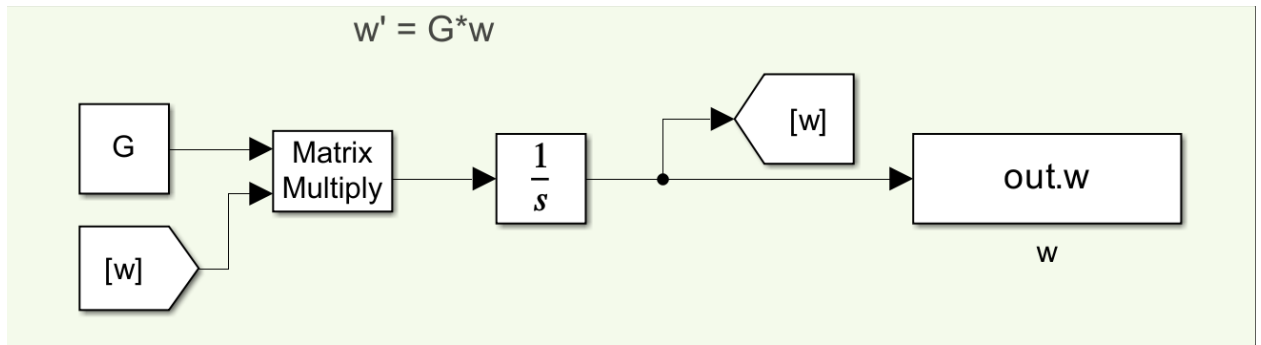


Рисунок 20 — Схема моделирования генератора внешнего воздействия.

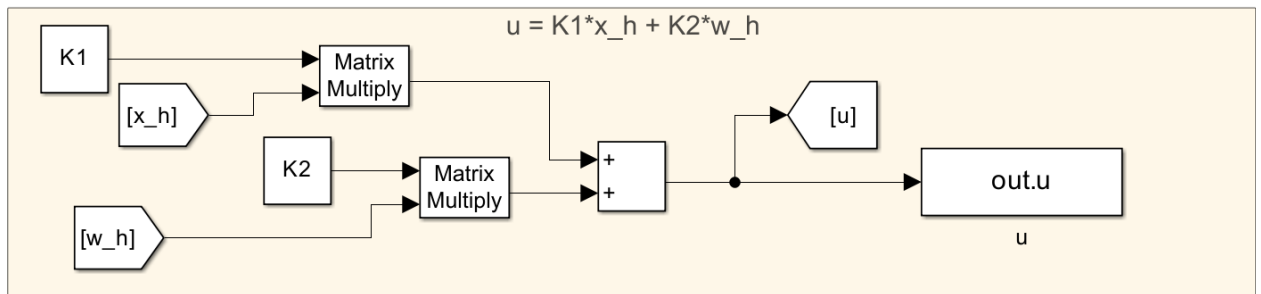


Рисунок 21 — Схема моделирования закона управления.

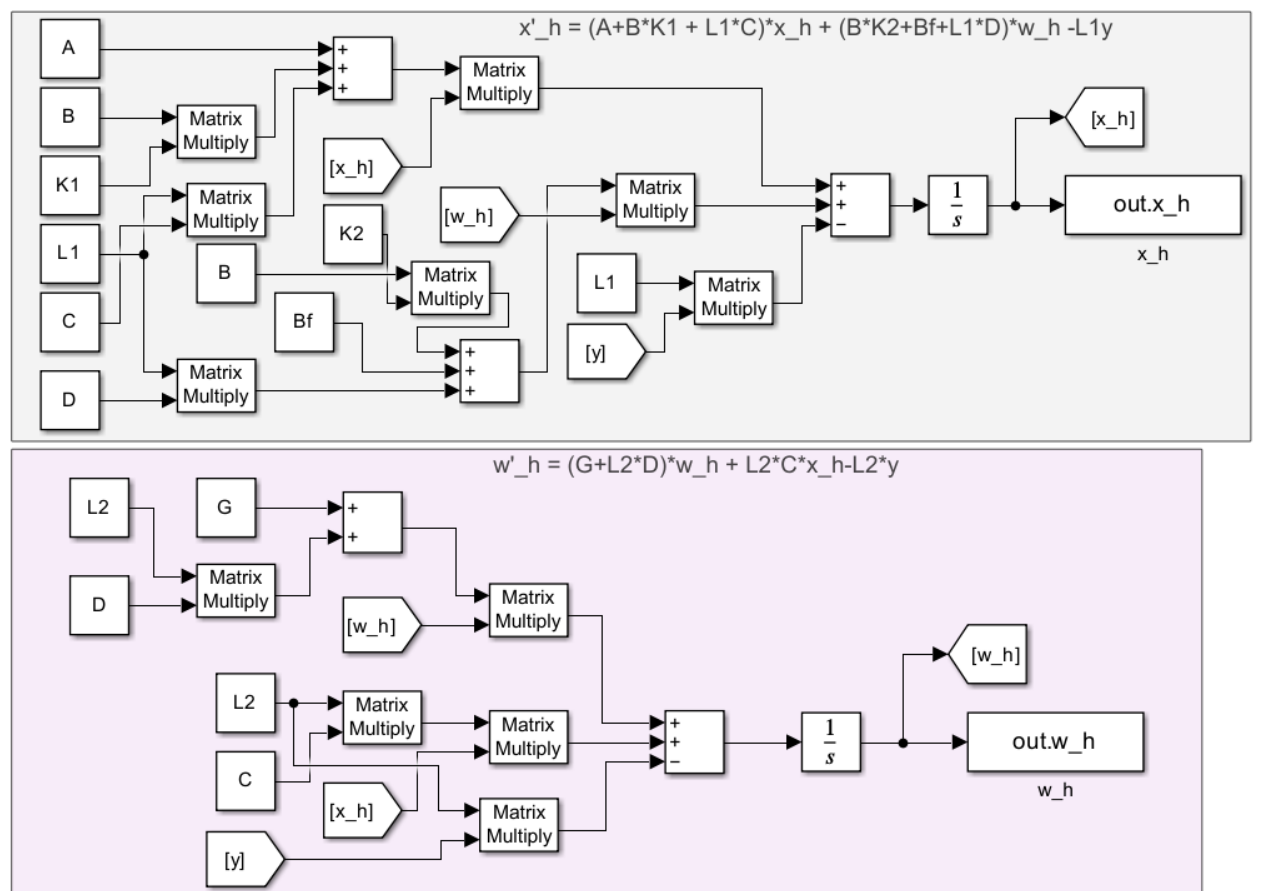


Рисунок 22 — Схема моделирования расширенного наблюдателя.

### 3.4 Синтез «feedback»-компоненты следящего регулятора

Воспользуемся результатами первого задания и запишем «feedback»-компоненту  $K_1$  следящего регулятора (29)

$$K_1 = \begin{bmatrix} -6.50 & -0.25 & 0.25 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

### 3.5 Синтез матрицы коррекции наблюдателя

Синтезируем матрицу коррекции  $L$  наблюдателя (28). Приведем выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу  $L$ .

Необходимо, чтобы было выполнено условие

$$\begin{bmatrix} A & B_f \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \prec 0 \quad (35)$$

Воспользуемся уравнением модального регулятора

$$\begin{cases} \Phi Q - Q \begin{bmatrix} A & B_f \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = Q^+ X \end{cases} \quad (36)$$

Пусть желаемый спектр матрицы (35)

$$\sigma = \{-2.5, -2.5, -3.5, -4, -4.05, -4.5, -4.5\}$$

Тогда

$$\Phi = \begin{bmatrix} -4.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

В результате получим матрицу корреляции наблюдателя

$$L = \begin{bmatrix} -6.3196 \\ -36.6327 \\ 51.9155 \\ 20.1333 \\ 9.8566 \\ 28.7566 \\ -2.7313 \end{bmatrix} \quad (38)$$

То есть искомые  $L_1$  и  $L_2$ :

$$L_1 = \begin{bmatrix} -6.3196 \\ -36.6327 \\ 51.9155 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 20.1333 \\ 9.8566 \\ 28.7566 \\ -2.7313 \end{bmatrix} \quad (39)$$

### 3.6 Первый виртуальный выход

Рассмотрим виртуальный выход:

$$z = C_Z x + D_Z w,$$

где

$$C_Z = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_Z = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

#### 3.6.1 Синтез «feedforward»-компоненты

Синтезируем «feedforward»-компоненту  $K_2$  следящего регулятора (29). Приведем выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу  $K_2$ .

Найдем  $P$  и  $Y$  как решение системы уравнений

$$\begin{cases} P\Gamma - AP = BY + B_f \\ C_Z P + D_Z = 0 \end{cases} \quad (40)$$

$$P = \begin{bmatrix} -1.7923 & -0.6769 & 1.5154 & -1.1077 \\ 37.0615 & 12.4846 & -29.0769 & 19.0385 \\ -37.4769 & -13.1308 & 30.0462 & -19.8231 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -48.6346 \\ -15.4038 \\ 37.6308 \\ -24.4154 \end{bmatrix}^T \quad (41)$$

$$K_2 = Y - K_1 P = \begin{bmatrix} -41.6500 & -13.4000 & 32.7000 & -21.9000 \end{bmatrix} \quad (42)$$

### 3.6.2 Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы с нулевыми начальными условиями наблюдателя. Построим график формируемого регулятором управления  $u(t)$ , сравнительные графики  $\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix}$ , график ошибки наблюдателя  $e(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix}$  и сравнительные графики фактического и виртуального выходов  $y(t)$  и  $z(t)$

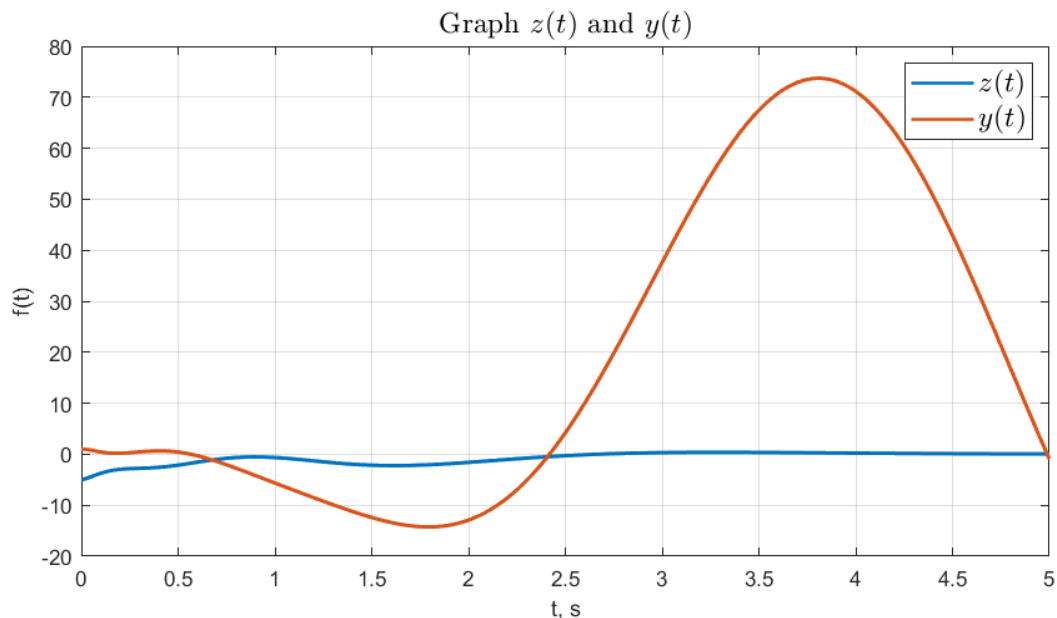


Рисунок 23 — Сравнительные графики фактического и виртуального выходов  $y(t)$  и  $z(t)$ .

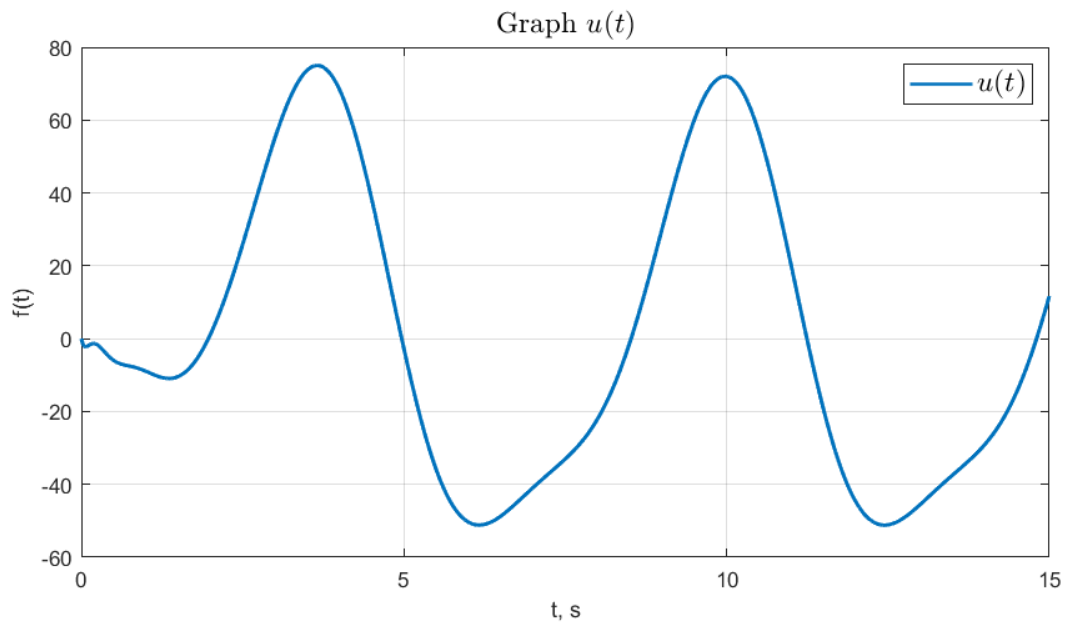


Рисунок 24 — График формируемого регулятором управления  $u(t)$ .

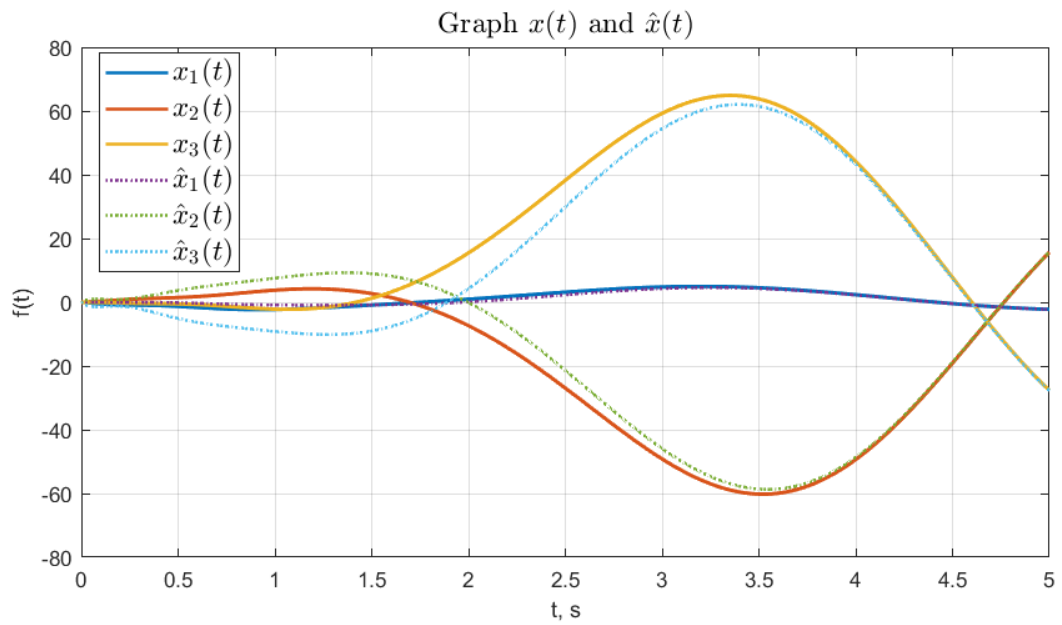


Рисунок 25 — Сравнительные графики  $x(t)$  и  $\hat{x}(t)$ .

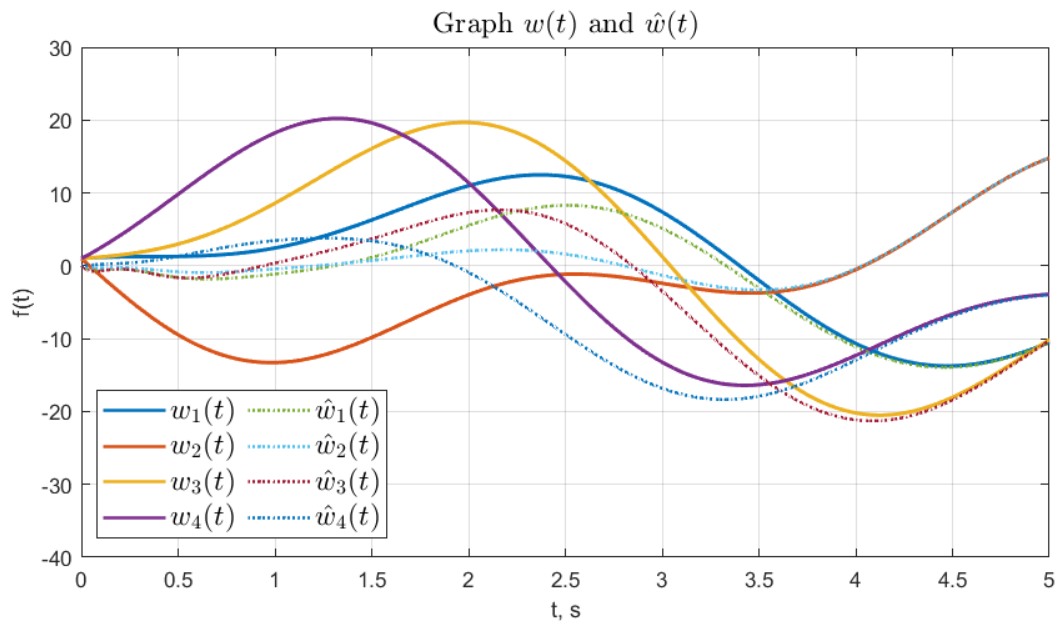


Рисунок 26 — Сравнительные графики  $w(t)$  и  $\hat{w}(t)$ .

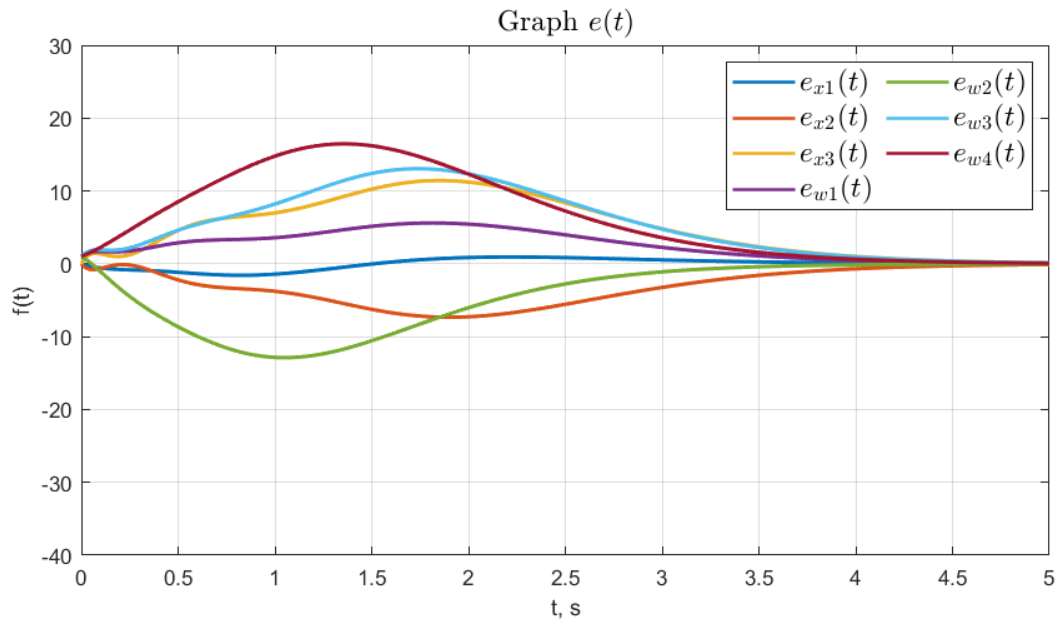


Рисунок 27 — Графики ошибки наблюдателя.

### 3.6.3 Собственные числа матрицы наблюдателя

Найдем собственные числа матрицы системы регулятора в форме В-С-В и сравним с собственными числами матрицы генератора (27)  $\Gamma$ .



$$A_{reg} = \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 + B_f \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -5 \\ \lambda_2 = -4 \\ \lambda_3 = -3 \\ \lambda_{4,5} = \pm 2i \\ \lambda_{6,7} = \pm i \end{cases} \quad (43)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm 2i \\ \lambda_{3,4} = \pm i \end{cases} \quad (44)$$

Как можно заметить, спектр матрицы  $\Gamma$  содержится в спектре матрицы системы регулятора, это показывает то, что регулятор «повторяет» динамику возмущения.

### 3.7 Второй виртуальный выход

Рассмотрим виртуальный выход:

$$z = y$$

#### 3.7.1 Синтез «feedforward»-компоненты

Синтезируем «feedforward»-компоненту  $K_2$  следящего регулятора (29). Приведем выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу  $K_2$ .

Найдем  $P$  и  $Y$  как решение системы уравнений

$$\begin{cases} P\Gamma - AP = BY + B_f \\ CP + D = 0 \end{cases} \quad (45)$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.8188 & 1.0622 & -1.3389 & 1.1459 \\ 6.4683 & 3.4167 & -6.6163 & 4.8611 \\ -6.8837 & -4.0629 & 7.5855 & -5.6457 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -16.3524 \\ -7.3512 \\ 14.1188 \\ -10.3829 \end{bmatrix}^T \quad (46)$$

$$K_2 = Y - K_1 P = \begin{bmatrix} -1.1923 & 1.4231 & 1.8654 & -0.3077 \end{bmatrix} \quad (47)$$

### 3.7.2 Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы с нулевыми начальными условиями наблюдателя. Построим график формируемого регулятором управления  $u(t)$ , сравнительные графики  $\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix}$ , график ошибки наблюдателя  $e(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix}$  и сравнительные графики фактического и виртуального выходов  $y(t)$  и  $z(t)$

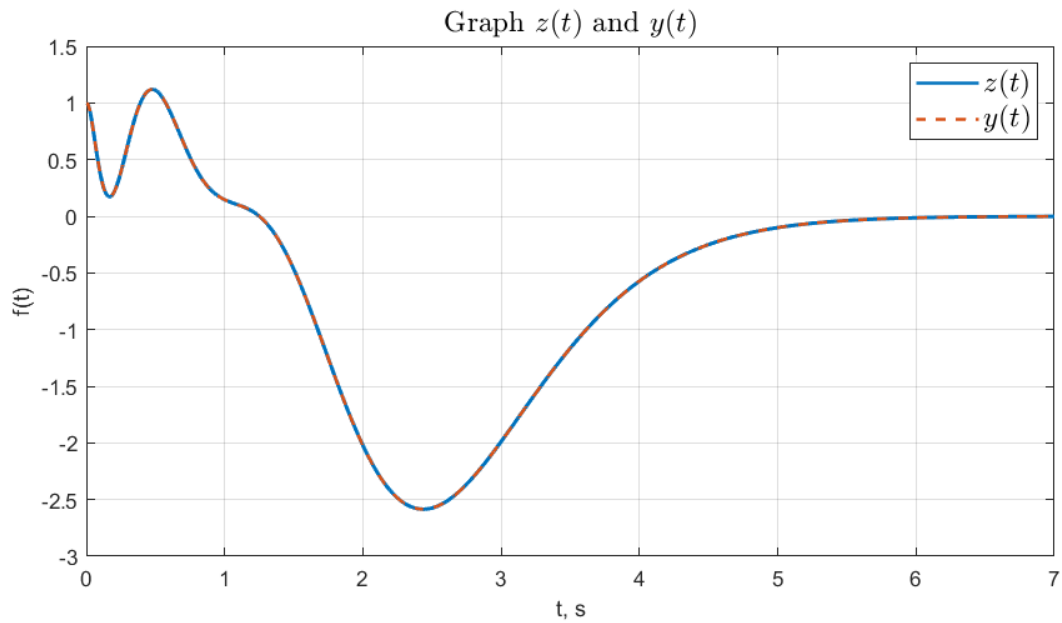


Рисунок 28 — Сравнительные графики фактического и виртуального выходов  $y(t)$  и  $z(t)$ .

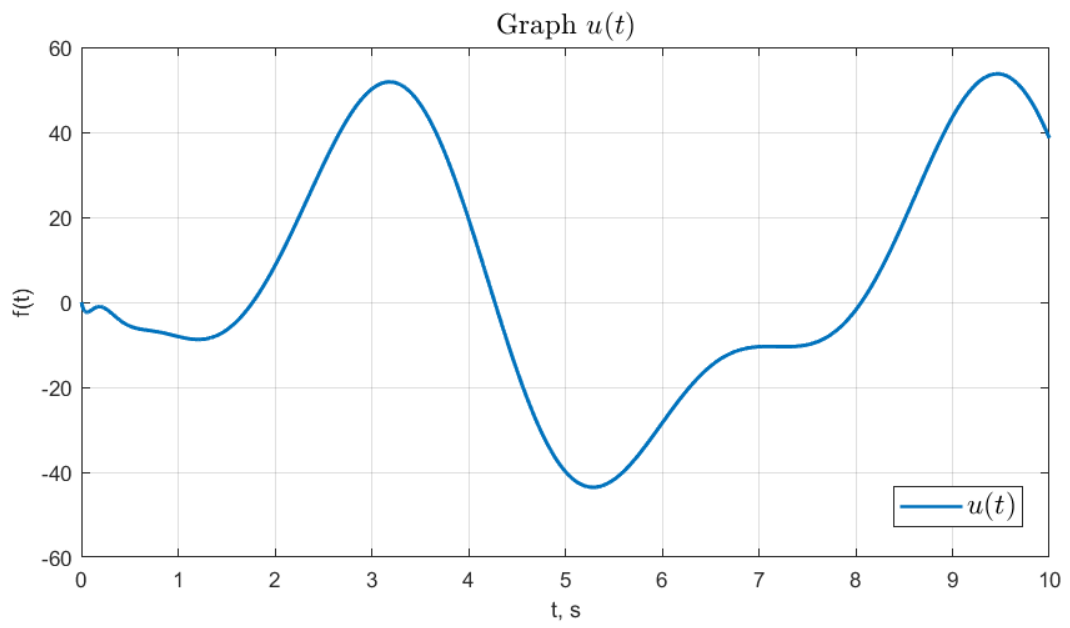


Рисунок 29 — График формируемого регулятором управления  $u(t)$ .

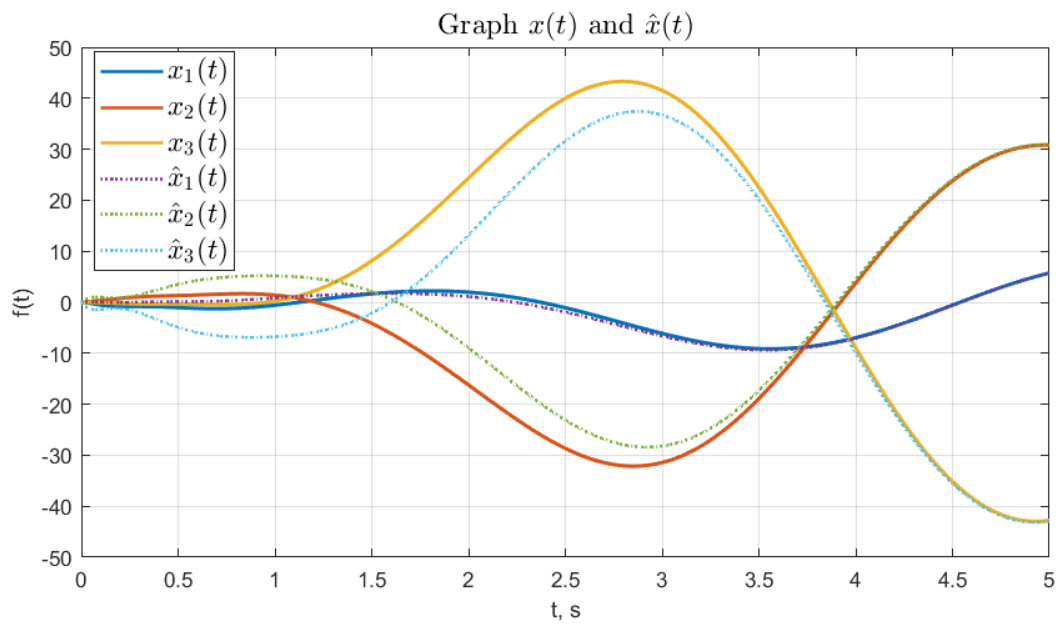


Рисунок 30 — Сравнительные графики  $x(t)$  и  $\hat{x}(t)$ .

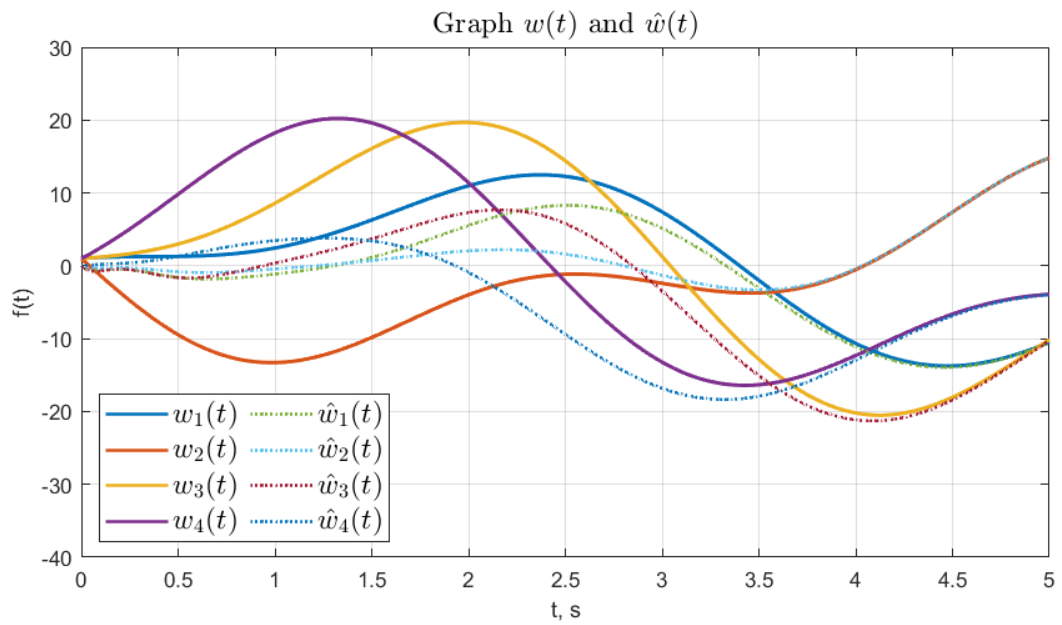


Рисунок 31 — Сравнительные графики  $w(t)$  и  $\hat{w}(t)$ .

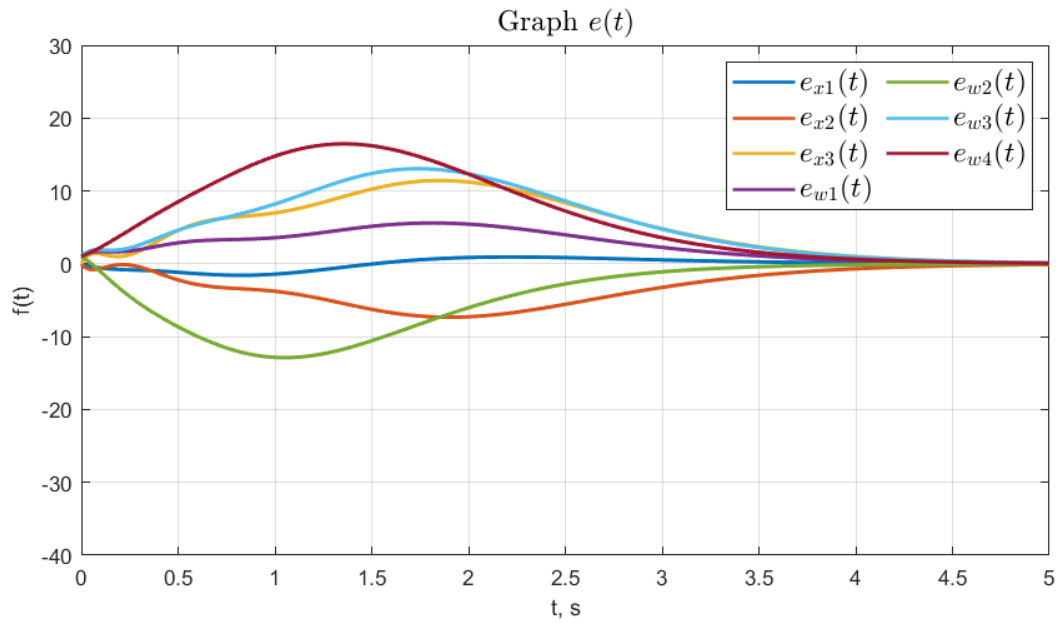


Рисунок 32 — Графики ошибки наблюдателя.

### 3.7.3 Собственные числа матрицы наблюдателя

Найдем собственные числа матрицы системы регулятора в форме В-С-В и сравним с собственными числами матрицы генератора (27) Г.

$$A_{reg} = \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 + B_f \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -5 \\ \lambda_2 = -4 \\ \lambda_3 = -3 \\ \lambda_{4,5} = \pm 2i \\ \lambda_{6,7} = \pm i \end{cases} \quad (48)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm 2i \\ \lambda_{3,4} = \pm i \end{cases} \quad (49)$$

Собственные числа матрицы  $\Gamma$  содержатся в спектре матрицы системы регулятора, это показывает то, что регулятор «повторяет» динамику возмущения.

### 3.8 Анализ результатов

Заметим, что в обоих случаях виртуального выхода условие  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$  выполнено (рисунки 23 и 28). Также графики ошибки наблюдателей неотличимы от нуля после  $t = 4.5$  с, то есть задача слежения и компенсации выполнена успешно.

## 4 ТЕЛЕЖКА И МЕАНДР.

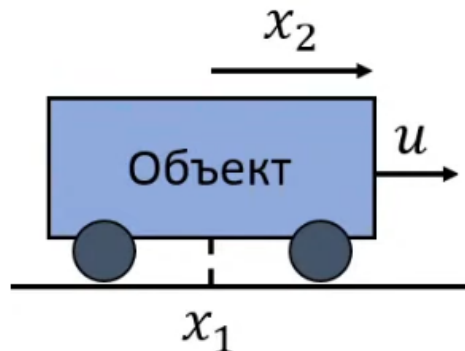


Рисунок 33 — Тележка.

Рассмотрим объект управления «тележка», представленный на рисунке 33, и выполним следующие шаги:

- Синтезируем математическую модель «тележки», приняв в качестве выхода линейную координату  $y(t) = x_1(t)$ .
- Примем задающий сигнал  $g(t)$  меандром (англ. square wave) с произвольной амплитудой и периодом (выбрать самостоятельно).
- Разложим сигнал  $g(t)$  в ряд Фурье и зададимся конечным числом гармоник  $m$  для использования конечной суммы ряда в качестве приближенного сигнала  $\bar{g}(t)$ .
- Сформируем генератор типа (18), способный порождать выбранные гармоники компоненты  $\bar{g}(t)$ . Необходимый порядок генератора определим самостоятельно.
- Зададимся виртуальным выходом  $z(t)$  в форме (19) и зададим матрицы  $C_z$  и  $D_z$  такими, чтобы при выполнении целевого условия (59) было справедливо

$$\bar{g} = D_z w_g(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{g}(t) - y(t)| = 0$$

Прокомментируем, какую задачу мы решаем таким образом.

- Синтезируем следящий регулятор (20), обеспечивающий выполнение целевого условия (59). Приведем выкладки процедуры синтеза и полученные матрицы  $K_1$  и  $K_2$ .

- Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы и построим графики формируемого регулятором управления  $u(t)$ , вектора состояния замкнутой системы  $x(t)$ , задающего сигнала  $g(t)$ , приближенного задающего сигнала  $\bar{g}(t)$  и выхода  $y(t)$ .
- Проанализируем полученные результаты и сделаем выводы о достоинствах и недостатках такого регулятора.

#### 4.1 Синтез математической модели

Синтезируем математическую модель «тележки», приняв в качестве выхода линейную координату  $y(t) = x_1(t)$ .

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Bu, \\ y = C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (50)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 4.2 Выбор задающего сигнала

Примем задающий сигнал  $g(t)$  меандром (англ. square wave) с произвольной амплитудой и периодом. Пусть амплитуда  $A = 5$ , период  $T = 2\pi$

$$g(t) = \begin{cases} -5, & t \in [\pi, 2\pi), \\ 5, & t \in [2\pi, 3\pi) \end{cases} \quad (51)$$

#### 4.3 Разложение сигнала в ряд Фурье

Разложим сигнал  $g(t)$  в ряд Фурье и зададимся конечным числом гармоник  $m$  для использования конечной суммы ряда в качестве приближенного сигнала  $\bar{g}(t)$ .

Запишем формулу для частичной суммы Фурье

$$F_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad (52)$$

где

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = \frac{1}{\pi}(-10\pi + 10\pi) = 0, \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos(nt) dt = 0, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(nt) dt = \frac{10(1-(-1)^n)}{\pi n} \end{cases} \quad (53)$$

Пусть  $m = 6$  тогда получим приближенный сигнал  $\bar{g}(t)$

$$\begin{aligned} \bar{g}(t) &= \sum_{n=1}^6 \left( \frac{10(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin(nt) \right) = \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^6 \left( \frac{1-(-1)^n}{n} \sin(nt) \right) = \\ &= \frac{10}{\pi} \left( 2 \sin(t) + \frac{2}{3} \sin(3t) + \frac{2}{5} \sin(5t) \right) \end{aligned} \quad (54)$$

#### 4.4 Формирование генератора

Сформируем генератор типа (18), способный порождать выбранные гармоники компоненты  $\bar{g}(t)$ .

$$\dot{w} = \Gamma w, \quad (55)$$

Матрицу  $\Gamma$  зададим в виде блочной матрицы, каждый блок отвечает за определенную гармонику в сумме Фурье (54).

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$



Определим начальные условия состояния генератора, то есть  $w_0$ . Так как в выбранных гармониках  $\bar{g}$  присутствуют только синусы, «занулим» компоненты  $w_0$ , соответствующие косинусам

$$w_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (57)$$

#### 4.5 Задание виртуального выхода

Зададимся виртуальным выходом  $z(t)$  в форме

$$z = C_Z x + D_Z w_g \quad (58)$$

и зададим матрицы  $C_Z$  и  $D_Z$  такими, чтобы при выполнении целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0 \quad (59)$$

было справедливо

$$\bar{g} = D_Z w_g(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{g}(t) - y(t)| = 0$$

То есть

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{g}(t) - y(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |D_Z w_g(t) - Cx(t)| = 0 \quad (60)$$

и в то же время должно быть выполнено условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C_Z x(t) + D_Z w_g(t) = 0 \quad (61)$$

Согласно выражениям (60) и (61) примем  $C_Z = -C$ .

$$C_Z = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

Чтобы график  $\bar{g} = D_Z w_g(t)$  представлял собой конечную сумму ряда, примем в качестве  $D_Z$  коэффициенты перед функциями в разложении  $g(t)$  в конечную сумму Фурье (54)

$$D_Z = \frac{10}{\pi} \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Таким образом, мы решаем классическую задачу слежения.

## 4.6 Синтез следящего регулятора

Синтезируем следящий регулятор

$$u = K_1 x + K_2 w, \quad (64)$$

обеспечивающий выполнение целевого условия (59). Приведем выкладки процедуры синтеза и полученные матрицы  $K_1$  и  $K_2$ .

### 4.6.1 Синтез матрицы $K_1$

Проведем синтез на основе модального управления.

Пусть желаемый спектр системы  $\sigma = \{-1, -1\}$ , тогда составим матрицу  $\Gamma_{K_1}$  с помощью полинома Ньютона второго порядка так, чтобы её спектр совпадал с  $\sigma$

$$\Gamma_{K_1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Подберем матрицу  $Y_{K_1}$

$$Y_{K_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (66)$$

Теперь с помощью *MATLAB* решим уравнение Сильвестра

$$AP - P\Gamma_{K_1} = BY_{K_1}$$

относительно  $P$  и вычислим матрицу  $K_1$ :

$$K_1 = -Y_{K_1}P^+ = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (67)$$

### 4.6.2 Синтез матрицы $K_2$

Сначала найдем  $P_2$  и  $Y_2$  такие, что

$$\begin{cases} P_2\Gamma - AP_2 = BY_2 + B_f \\ C_Z P_2 + D_Z = 0 \end{cases} \quad (68)$$

Так как мы исследуем задачу слежения, то  $B_f = 0$ .

$$P_2 = \begin{bmatrix} 6.3662 & 0 & 2.1221 & 0 & 1.2732 & 0 \\ 0 & 6.3662 & 0 & 6.3662 & 0 & 6.3662 \end{bmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} -6.3662 & 0 & -19.0986 & 0 & -31.8310 & 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

Вычислим  $K_2$  по формуле

$$K_2 = Y_2 - K_1 P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 12.7324 \\ -16.9765 \\ 12.7324 \\ -30.5577 \\ 12.7324 \end{bmatrix}^T \quad (70)$$

#### 4.7 Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы и построим графики формируемого регулятором управления  $u(t)$ , вектора состояния замкнутой системы  $x(t)$ , задающего сигнала  $g(t)$ , приближенного задающего сигнала  $\bar{g}(t)$  и выхода  $y(t)$ .

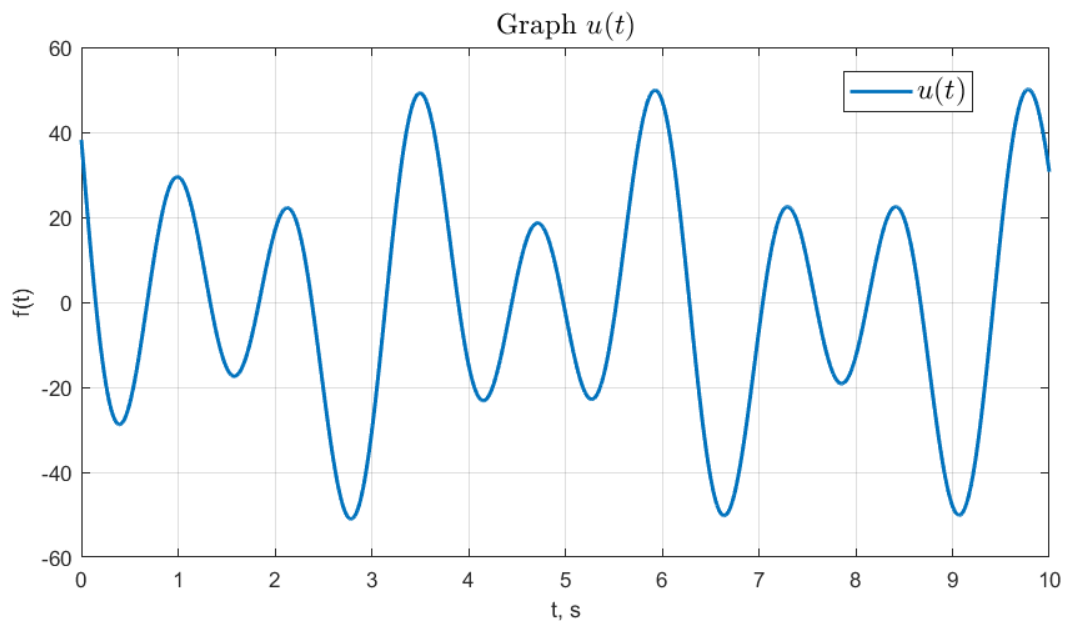


Рисунок 34 — График формируемого регулятором управления  $u(t)$ .

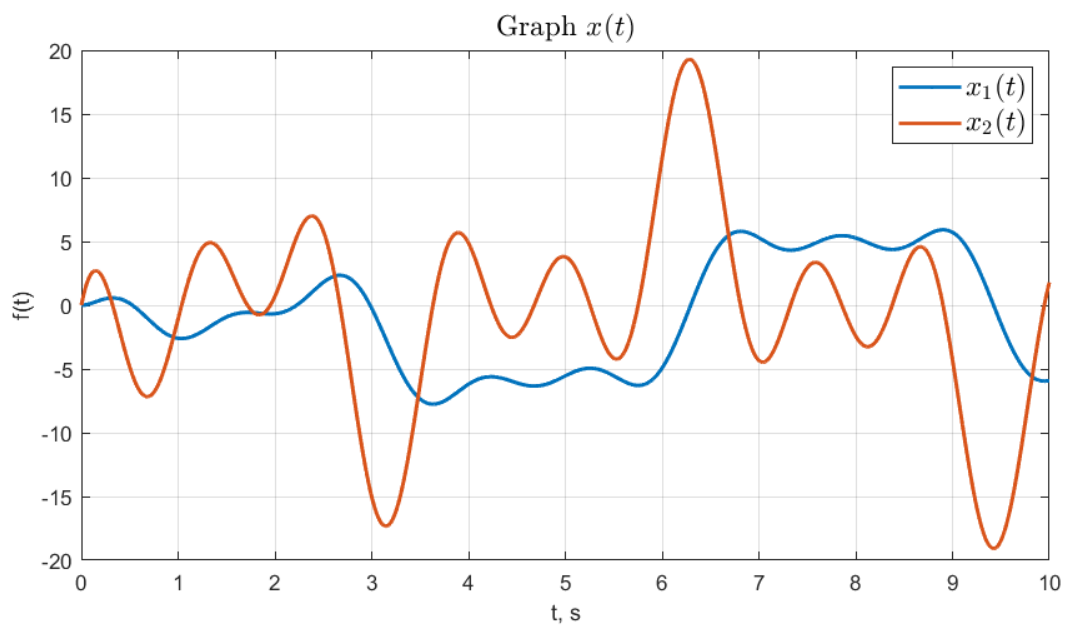


Рисунок 35 — График вектора состояния замкнутой системы  $x(t)$ .

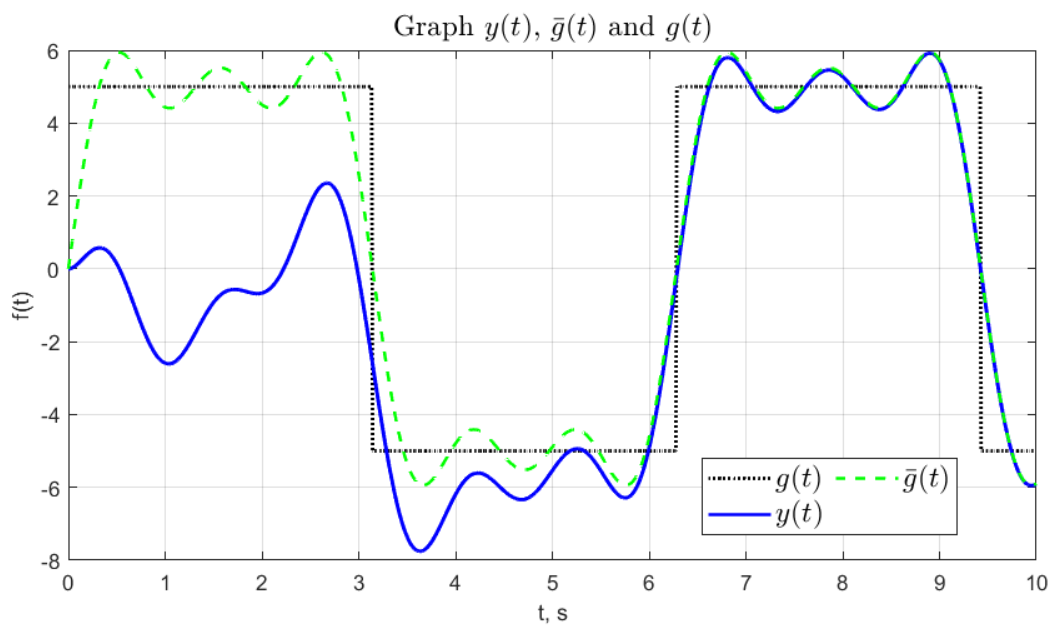


Рисунок 36 — Графики задающего сигнала  $g(t)$ , приближенного задающего сигнала  $\bar{g}(t)$  и выхода  $y(t)$ .

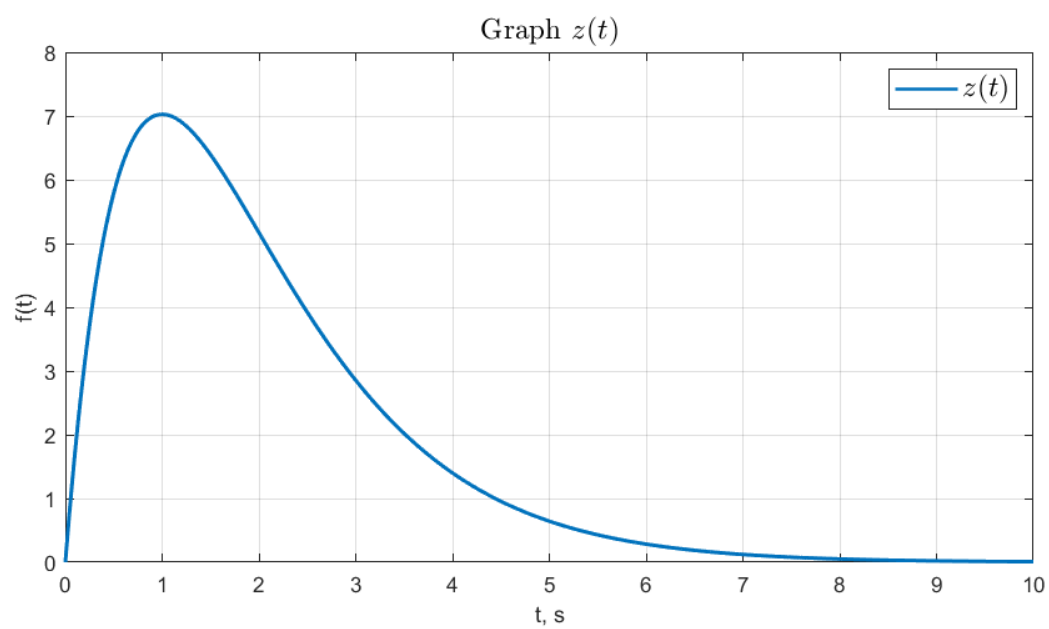


Рисунок 37 — График виртуального выхода  $z(t)$ .

## 4.8 Анализ результатов

Рисунки 36 и 37 свидетельствуют о том, что задача слежения выполнена и целевое условие  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$  достигнуто. К плюсам данного регулятора можно отнести высокую точность при работе с периодическими сигналами и гибкость настройки при добавлении новых гармоник. Сложности данного регулятора заключаются в том, что при увеличении числа гармоник, будут сильно расти вычислительные затраты и размеры матриц.

## 5 ВЫВОД

В ходе выполнения лабораторной работы были применены на практике знания о синтезе компенсирующих и следящих регуляторов. В первом задании был синтезирован компенсирующий регулятор по состоянию, который нейтрализовал внешнее возмущение, воздействующее на систему. В следующем задании был синтезирован следящий регулятор по состоянию, задачей которого было обеспечить такое управление объектом, при котором его выходная переменная точно отслеживает заданный эталонный сигнал, используя полную информацию о состоянии системы. В третьем задании решалась комплексная задача слежения и компенсации по выходу, проводилась оценка вектора состояния и проводилось слежение за сигналом. В последнем задании был синтезирован следящий регулятор в случае представления задающего сигнала в виде суммы конечного ряда Фурье. В ходе выполнения каждого задания было проведено компьютерное моделирование, подтверждающее корректность выполненных расчетов.