ИТМО

Теория автоматического управления

Немодальные методы стабилизации систем

С лекций: экспоненциальная устойчивость

Асимптотическая устойчивость

При всех начальных условиях $x(0)$ выполнено $\lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0$

Экспоненциальная устойчивость

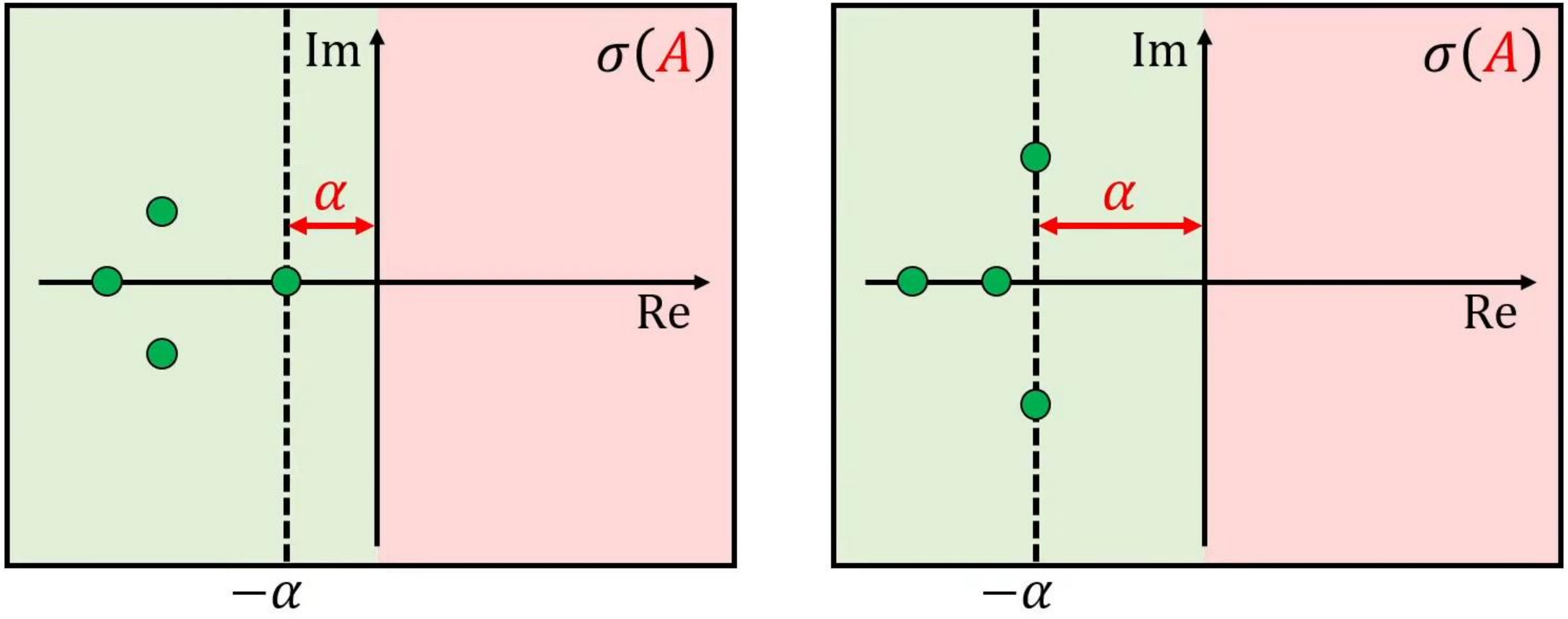
Существуют положительные числа c и α такие, что при всех начальных условиях $x(0)$ выполнено $\|x(t)\| \leq ce^{-\alpha t}\|x(0)\|$

Для линейных стационарных систем
оба типа устойчивости эквивалентны…

…но в определении экспоненциальной устойчивости
дополнительно упоминается скорость сходимости, связанная со степенью устойчивости

С лекций: экспоненциальная устойчивость

Степень устойчивости (устойчивой системы) – положительное число, равное наименьшему из расстояний от собственных чисел до мнимой оси



Откуда в «Устойчивости по Ляпунову» Ляпунов?

Устойчивость по Ляпунову

При всех начальных условиях $x(0)$

$\|x(t)\|$ ограничен

Асимптотическая устойчивость

При всех начальных условиях $x(0)$ выполнено

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0$$

Экспоненциальная устойчивость

Существуют положительные числа c и α такие, что при всех начальных условиях $x(0)$ выполнено

$$\|x(t)\| \le c e^{-\alpha t}\|x(0)\|$$

Откуда в «Устойчивости по Ляпунову» Ляпунов?

Устойчивость по Ляпунову

Существует такая функция Ляпунова $V(x)$,
что $\dot{V}(x) \leq 0$

Асимптотическая устойчивость

Существует такая функция Ляпунова $V(x)$,
что $\dot{V}(x) < 0$ при $x \neq 0$, $\quad \dot{V}(0) = 0$

Экспоненциальная устойчивость

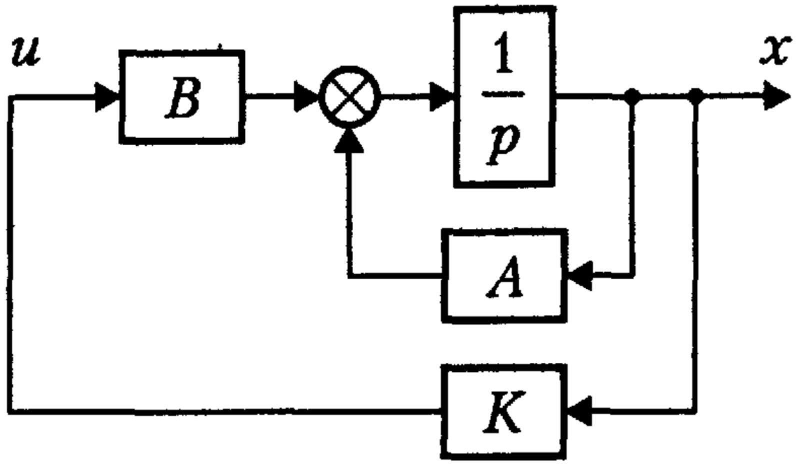
Существует такое положительное число α
и такая функция Ляпунова $V(x)$,
что $\dot{V}(x) \leq -2\alpha V(x) \quad \Rightarrow \quad \dot{V}(x) \leq -2\alpha V(0)$

Модальное управление…

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x} = (A + BK)x \\ y = (C + DK)x\end{cases}$$

*Для решения задачи (стабилизации) используется простейший регулятор состояния – **пропорциональный, модальный** или **П-регулятор состояния***

Модальное управление – это коррекция собственных чисел матрицы системы A при помощи регулятора вида $u = Kx$



$(A + BK)$ – новая матрица системы
с собственными числами (а значит и модами движения),
заданными при помощи регулятора

«По классике» $u = -Kx$,
но по сути разницы нет, т.к. K задаем мы сами
(и на лекциях Алексей Алексеевич использует
запись без минуса)

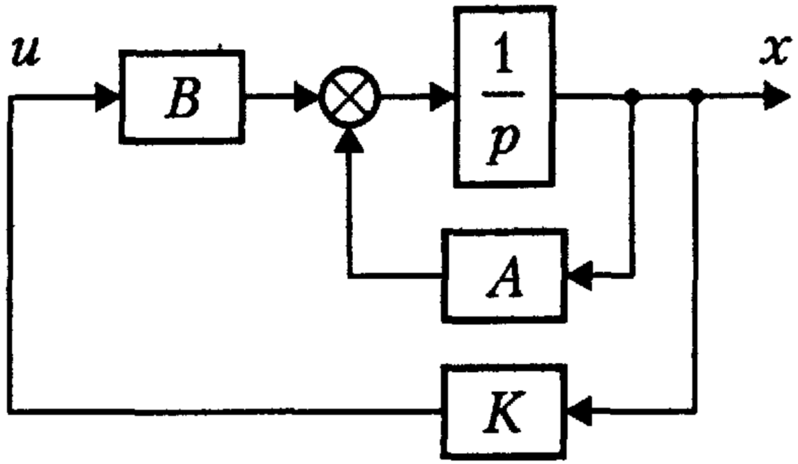
Мирошник И. В.
«Теория автоматического управления.
Линейные системы.»

…и не модальное управление

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x} = (A + BK)x \\ y = (C + DK)x\end{cases}$$

Все еще та же структура,
П-регулятор состояния

Рассмотренная процедура расчета матриц <…> позволяет синтезировать регулятор ($u = Kx$), который обеспечивает в замкнутой системе ***экспоненциальную устойчивость*** *<…>.*



При этом не осуществляется строгий расчет желаемых мод <…>. ***Поэтому данный алгоритм синтеза не относится к классу классических модальных методов.***

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. «Проектирование регуляторов систем управления.»

…и не модальное управление

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x} = (A + BK)x \\ y = (C + DK)x\end{cases}$$

Все еще та же структура,
П-регулятор состояния

Рассмотренная процедура расчета *матриц <…> позволяет синтезировать регулятор ($u = Kx$), который обеспечивает в замкнутой системе* ***экспоненциальную устойчивость*** *<…>.*

При эт… строгий р… **Поэтому с… не относ… модальных методов.**

Варианты расчета:

1. Линейные матричные неравенства (LMI),

рассмотрены на лекции;

2. (Алгебраическое) матричное уравнение типа Риккати.

«Проектирование регуляторов систем управления.»

Матричное уравнение Риккати

Общий вид:

$$XA^* + AX + XDX - C = 0,$$

где

X – искомая матрица;

A, C, D – известные квадратные комплексные матрицы;

C, D – эрмитовы матрицы;

A^* – эрмитово-сопряженная к A.

Матричное уравнение Риккати

Общий вид:

$$XA^* + AX + XDX - C = 0,$$

где

X – искомая матрица;

A, C, D – известные квадратные комплексные матрицы;

C, D – эрмитовы матрицы;

A^* – эрмитово-сопряженная к A.

Матричное уравнение Риккати **квадратичное**, а не линейное!

Матричное уравнение Риккати

Общий вид:

$$XA^* + AX + XDX - C = 0,$$

В MATLAB:

icare

Implicit solver for continuous-time algebraic Riccati equations

$$[X, K, L] = \text{icare}(A, B, Q, R, S, E, G)$$

$$A^T XE + E^T XA + E^T XGXE - (E^T XB + S)R^{-1}(B^T XE + S^T) + Q = 0$$

Матричное уравнение Риккати

Необходимый нам «общий вид»:

$$A^T P + PA - \nu PBR^{-1}B^T P + Q = 0,$$

где

P – искомая симметричная квадратная матрица;

A, B – матрицы объекта управления;

Q – симметричная положительно-полуопределенная матрица, определяющая «штраф на вектор состояния»;

R – симметричная положительно-определенная матрица, определяющая «штраф на управление»;

ν – параметр модификации уравнения, принимает значения 0, 1 или 2.

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. «Проектирование регуляторов систем управления.»

Матричное уравнение Риккати

Необходимый нам «общий вид»:

$$A^T P + PA - 0 \cdot \cancel{PBR^{-1}B^T P} + Q = 0,$$

где

P – искомая симметричная квадратная матрица;

A, B – матрицы объекта управления;

Q – симметричная положительно-полуопределенная матрица, определяющая «штраф на вектор состояния»;

R – симметричная положительно-определенная матрица, определяющая «штраф на управление»;

$\nu = 0.$

Получили матричное уравнение Ляпунова

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. «Проектирование регуляторов систем управления.»

Матричное уравнение Риккати

Необходимый нам «общий вид»:

$$A^T P + PA = -Q,$$

где

P – искомая симметричная квадратная матрица;

A, B – матрицы объекта управления;

Q – симметричная положительно-полуопределенная матрица, определяющая «штраф на вектор состояния»;

R – симметричная положительно-определенная матрица, определяющая «штраф на управление»;

$\nu = 0.$

Получили матричное уравнение Ляпунова

[Г]ригорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. «Проектирование регуляторов систем управления.»

Матричное уравнение Риккати

Необходимый нам «общий вид»:

$$A^T P + PA - 1 \cdot PBR^{-1}B^T P + Q = 0,$$

где

P – искомая симметричная квадратная матрица;

A, B – матрицы объекта управления;

Q – симметричная положительно-полуопределенная матрица, определяющая «штраф на вектор состояния»;

R – симметричная положительно-определенная матрица, определяющая «штраф на управление»;

$\nu = 1.$

Классическое уравнение типа Риккати, используется в задачах ***оптимального управления***

С.В.

.»

Матричное уравнение Риккати

Необходимый нам «общий вид»:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0,$$

где

P – искомая симметричная квадратная матрица;

A, B – матрицы объекта управления;

Q – симметричная положительно-полуопределенная матрица, определяющая «штраф на вектор состояния»;

R – симметричная положительно-определенная матрица, определяющая «штраф на управление»;

$\nu = 1.$

Классическое уравнение типа Риккати, используется в задачах ***оптимального управления***

С.В.

.»

С вводного занятия: Темы курса

Лекционный материал:

- Управляемость и наблюдаемость;
- Модальное управление;
- Управление с желаемой степенью сходимости;
- Управление по линейно-квадратичным критериям;
- $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-управление;
- Слежение и компенсация (посредством виртуального выхода).

Темы *оптимального управления*, курс магистратуры

Матричное уравнение Риккати

Необходимый нам «общий вид»:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0,$$

Линейно-квадратичный регулятор (LQR)

Объект	Регулятор	Критерий качества
$\dot{x} = Ax + Bu$	$u = Kx$	$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$

Уравнения LQR-регулятора

$$\boxed{\begin{cases} A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases}}$$

Лекция 10:
«LQR и фильтр Калмана»

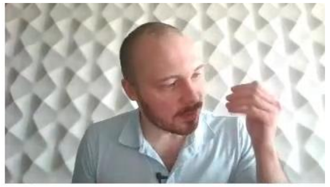
Классическое уравнение типа Риккати, используется в задачах ***оптимального управления***

С.В.
.»

Матричное уравнение Риккати

Необходимый нам «общий вид»:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0,$$



Синтез $\mathcal{H}_2$-регулятора

Объект	Регулятор	Целевой критерий
$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_2 x + D_2 u \end{cases}$	$u = Kx$	$\left\| W_{w \to z}(s) \right\|_{\mathcal{H}_2} \to \min$

Уравнения $\mathcal{H}_2$-регулятора

$$\boxed{\begin{cases} A^T Q + QA + C_2^T C_2 - QB_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = 0 \\ K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q \end{cases}}$$

Лекция 11:
«$\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ управление»

Классическое уравнение типа Риккати, используется в задачах ***оптимального управления***

С.В.
.»

Матричное уравнение Риккати

Необходимый нам «общий вид»:

$$A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + Q = 0,$$

где

P – искомая симметричная квадратная матрица;

A, B – матрицы объекта управления;

Q – симметричная положительно-полуопределенная матрица,

определ

R – симм ,

определ

$\nu = 2.$

Задача нахождения управления по принципу

оптимальности по принуждению

Фурасов В.Д.

«Устойчивость движения, оценки и стабилизация.»

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В.

«Проектирование регуляторов систем управления.»

Матричное уравнение Риккати

Уравнения искомого регулятора с заданной степенью устойчивости:

$$\begin{cases} A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P, \end{cases}$$

где

P – искомая симметричная квадратная матрица;

A, B – матрицы объекта управления;

Q – симметричная положительно-полуопределенная матрица, определяющая «штраф на вектор состояния»;

R – симметричная положительно-определенная матрица, определяющая «штраф на управление»;

α – желаемая степень устойчивости/скорость сходимости.

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. «Проектирование регуляторов систем управления.»

Регулятор с заданной степенью устойчивости: доказательство

ИТМО

LMI-критерий экспоненциальной устойчивости

С лекции:

Линейная система

$$\dot{x} = Ax \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

LMI-критерий

$$A^T Q + QA + 2\alpha Q \preccurlyeq 0$$

$$V(t) = x^T(t)Qx(t)$$

Доказательство

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \le 0$$

Вспомогательный математический факт #1

Если бы было уравнение, то его решение было бы таким

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad V(t) = e^{-2\alpha t}V(0)$$

У нас неравенство, поэтому $V(t) \le e^{-2\alpha t}V(0)$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: доказательство

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = (A + BK)x$$

$$\begin{cases} A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases}$$

$\Downarrow$

Функция Ляпунова:

$$V(t) = x^T P x$$

$$\dot{V}(t) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

Целевое неравенство:

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \preccurlyeq 0$$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: доказательство

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = (A + BK)x$$

$$\begin{cases} A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases}$$

$\Downarrow$

Функция Ляпунова:

$$V(t) = x^T P x$$

$$\dot{V}(t) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A + BK)^T P x + x^T P (A + BK) x =$$

$$= x^T \big((A + BK)^T P + P(A + BK) \big) x$$

Целевое неравенство:

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \leqslant 0$$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: доказательство

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx\end{cases} \Rightarrow \dot{x} = (A + BK)x$$

$$\boxed{\begin{cases}A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P\end{cases}}$$

$\Downarrow$

Функция Ляпунова:

Целевое неравенство:

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \leqslant 0$$

$$V(t) = x^T P x$$

$$\dot{V}(t) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A + BK)^T P x + x^T P (A + BK) x =$$

$$= x^T \big((A + BK)^T P + P(A + BK)\big) x = x^T (A^T P + PA + K^T B^T P + PBK) x =$$

$$= x^T \big(A^T P + PA - (R^{-1}B^T P)^T B^T P - PB(R^{-1}B^T P)\big) x$$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: доказательство

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = (A + BK)x$$

$$\begin{cases} A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases}$$

Целевое неравенство:

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \leqslant 0$$

Функция Ляпунова:

$$V(t) = x^T P x$$

$$\dot{V}(t) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A + BK)^T P x + x^T P (A + BK) x =$$

$$= x^T \big((A + BK)^T P + P(A + BK)\big) x = x^T (A^T P + PA + K^T B^T P + PBK) x =$$

$$= x^T \big(A^T P + PA - (R^{-1}B^T P)^T B^T P - PB(R^{-1}B^T P)\big) x =$$

$$= x^T (A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P - PBR^{-1}B^T P) x =$$

$$= x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P) x$$

$$P^T = P$$
$$R^{-T} = R^{-1}$$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: доказательство

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = (A + BK)x$$

$$\boxed{\begin{cases} A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases}}$$

Целевое неравенство:

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \preccurlyeq 0$$

Функция Ляпунова:

$$V(t) = x^T P x$$

$$\dot{V}(t) = x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P)x$$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: доказательство

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = (A + BK)x$$

$$\begin{cases} A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases}$$

$\Downarrow$

Функция Ляпунова:

Целевое неравенство:
$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \leqslant 0$$

$$V(t) = x^T P x$$
$$\dot{V}(t) = x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P)x$$
$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) = ?$$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: доказательство

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx\end{cases} \Rightarrow \dot{x} = (A + BK)x$$

$$\boxed{\begin{cases}A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P\end{cases}}$$

$\Downarrow$

Целевое неравенство:

$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \leqslant 0$

Функция Ляпунова:

$$V(t) = x^T P x$$

$$\dot{V}(t) = x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P)x$$

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) = x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P)x + 2\alpha x^T P x =$$

$$= x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P)x$$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: доказательство

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = (A + BK)x$$

$$\boxed{\begin{cases} A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases}}$$

$\Downarrow$

Функция Ляпунова:

$$V(t) = x^T P x$$

$$\dot{V}(t) = x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P)x$$

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) = x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P)x + 2\alpha x^T P x =$$

$$= x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P)x \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q)x$$

Целевое неравенство:

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \preccurlyeq 0$$

$$\boxed{Q \succcurlyeq 0}$$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: доказательство

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = (A + BK)x$$

$$\boxed{\begin{cases} A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases}}$$

$\Downarrow$

Функция Ляпунова:

Целевое неравенство:
$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \preccurlyeq 0$

$$V(t) = x^T P x$$

$$\dot{V}(t) = x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P)x$$

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) = x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P)x + 2\alpha x^T P x =$$

$$= x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P)x \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q)x = 0$$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: доказательство

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = (A + BK)x$$

$$\boxed{\begin{cases} A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases}}$$

$\Downarrow$

Функция Ляпунова:

$$V(t) = x^T P x$$

$$\dot{V}(t) = x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P)x$$

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \preccurlyeq 0$$

Целевое неравенство:
$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \preccurlyeq 0$

Регулятор, синтезированный данным методом, будет работать, если $P \succ 0$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: доказательство

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = (A + BK)x$$

$$\begin{cases} A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases}$$

Целевое неравенство:

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \preccurlyeq 0$$

Функция Ляпунова:

$$V(t) = x^T P x$$

$$\dot{V}(t) = x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P)x$$

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \preccurlyeq 0$$

Регулятор, синтезированный данным методом, будет работать, если $P \succ 0$

Уравнение квадратичное, так что решений в общем случае больше одного (и чем выше порядок системы, тем больше), выбираем те, что нам подходят

Регулятор с заданной степенью устойчивости: доказательство

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = (A + BK)x$$

$$\begin{cases} A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases}$$

$\Downarrow$

Функция Ляпунова:

$$V(t) = x^T P x$$

$$\dot{V}(t) = x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P)x$$

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \preccurlyeq 0$$

Целевое неравенство:
$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \preccurlyeq 0$

Критерии существования единственного $P \succ 0$:
1. Пара (A, B) стабилизируема;
2. Пара (Q, A) наблюдаема.

При этом в лабораторной вам будет предложено попытаться найти регулятор для $Q = 0$...

Регулятор с заданной степенью устойчивости: доказательство

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = (A + BK)x$$

$$\begin{cases} A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases}$$

Целевое неравенство:
$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \leqslant 0$

*Использование данной процедуры синтеза <…> ограничивается **трудностью** в назначении элементов матриц штрафов Q и R <..>. Также существуют сложности в установлении связи значений матриц Q и R с показателями качества переходных процессов в замкнутой системе (колебательность, перерегулирование, время переходного процесса)*

Опять «творческий процесс» выбора матриц

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. «Проектирование регуляторов систем управления.»

Регулятор с заданной степенью устойчивости: доказательство

$$\begin{cases} A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases}$$

<...> Для преодоления указанных проблем удобно использовать понятие экспоненциально устойчивой системы.

Но в целом то, что мы предъявляем требования по заданной скорости сходимости, сглаживают неоднозначность

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. «Проектирование регуляторов систем управления.»

Регулятор с заданной степенью устойчивости: доказательство

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = (A + BK)x$$

$$\begin{cases} A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases}$$

Целевое неравенство:
$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \preccurlyeq 0$

Функция Ляпунова:

$$V(t) = x^T P x$$

$$\dot{V}(t) = x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P)x$$

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \preccurlyeq 0$$

Система (пара (A, B)) должна быть стабилизируемой (с оговорками на достижимые α)

Но лучше работать с полностью управляемыми системами (см. процедуру «усечения» с прошлой практики), т.к. иначе иногда машинные методы вычисления «захлебываются»

Регулятор с заданной степенью устойчивости: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

0. Проверить управляемость;

Уже проверяли на прошлой практике!

Регулятор с заданной степенью устойчивости: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1, \alpha = 2$$

Вариант 1: **vpasolve( )**

```
Q=eye(3);
R=1;
a=2;
syms P_ [3 3]
eqs = [A'*P_+P_*A-2*P_'*B*inv(R)*B'*P_+2*a*P_+Q==0]
```

Задаем уравнение

$$A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0$$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1, \alpha = 2$$

Вариант 1: **vpasolve( )**

```
s=vpasolve(eqs,[P_])
P=[s.P_1_1 s.P_1_2 s.P_1_3;
    s.P_2_1 s.P_2_2 s.P_2_3;
    s.P_3_1 s.P_3_2 s.P_3_3];
K=-inv(R)*B'*P;
e=eig(A+B*K)
```

Считаем регулятор!

Регулятор с заданной степенью устойчивости: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1, \alpha = 2$$

Вариант 1: **vpasolve( )**

```
s=vpasolve(eqs,[P_])
P=[s.P_1_1 s.P_1_2 s.P_1_3;
    s.P_2_1 s.P_2_2 s.P_2_3;
    s.P_3_1 s.P_3_2 s.P_3_3];
K=-inv(R)*B'*P;
e=eig(A+B*K)
```

...а он не работает

```
s = struct with fields:

    P_1_1: 0.40477520829322430366135653186752
    P_2_1: -1.4603602684525766910570250820768
    P_3_1: -0.44973307618948901780408157064431
    P_1_2: -1.4603602684525766910570250820768
    P_2_2: 4.462489522104345959130130224686 5
    P_3_2: 1.2910001491885465033736895077874
    P_1_3: -0.44973307618948901780408157064431
    P_2_3: 1.2910001491885465033736895077874
    P_3_3: -0.043650858285980632821281711808663

e =
```

$$\begin{pmatrix} 3.2609522979825094913535824533964 + 2.7030302604904806262447916135551\,\mathrm{i} \\ 3.2609522979825094913535824533964 - 2.7030302604904806262447916135551\,\mathrm{i} \\ -3.4578096313293187970080057620096 \end{pmatrix}$$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1, \alpha = 2$$

Вариант 1: **vpasolve( )**

```
s=vpasolve(eqs,[P_])
P=[s.P_1_1 s.P_1_2 s.P_1_3;
    s.P_2_1 s.P_2_2 s.P_2_3;
    s.P_3_1 s.P_3_2 s.P_3_3];
K=-inv(R)*B'*P;
e=eig(A+B*K)
```

Нам нашло не то решение

```
s = struct with fields:

    P_1_1: 0.40477520829322430366135653186752
    P_2_1: -1.4603602684525766910570250820768
    P_3_1: -0.44973307618948901780408157064431
    P_1_2: -1.4603602684525766910570250820768
    P_2_2: 4.4624895221043459591301302246865
    P_3_2: 1.2910001491885465033736895077874
    P_1_3: -0.44973307618948901780408157064431
    P_2_3: 1.2910001491885465033736895077874
    P_3_3: -0.043650858285980632821281711808663

e =
```

$$\begin{pmatrix} 3.2609522979825094913535824533964 + 2.7030302604904806262447916135551\,\mathrm{i} \\ 3.2609522979825094913535824533964 - 2.7030302604904806262447916135551\,\mathrm{i} \\ -3.4578096313293187970080057620096 \end{pmatrix}$$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1, \alpha = 2$$

Вариант 1: **vpasolve( )**

```
s=vpasolve(eqs,[P_])
P=[s.P_1_1 s.P_1_2 s.P_1_3;
    s.P_2_1 s.P_2_2 s.P_2_3;
    s.P_3_1 s.P_3_2 s.P_3_3];
K=-inv(R)*B'*P;
e=eig(A+B*K)
```

Нам нашло не то решение

vpasolve(...,...,init_param)
Можно было бы задаться интервалом, на котором искать решение, но кто бы знал этот интервал…

Регулятор с заданной степенью устойчивости: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1, \alpha = 2$$

Вариант 1: **vpasolve( )**

```
s=vpasolve(eqs,[P_],Random=true)
P=[s.P_1_1 s.P_1_2 s.P_1_3;
    s.P_2_1 s.P_2_2 s.P_2_3;
    s.P_3_1 s.P_3_2 s.P_3_3];
K=-inv(R)*B'*P;
e=eig(A+B*K)
```

Придется положиться на случай

Регулятор с заданной степенью устойчивости: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1, \alpha = 2$$

Вариант 1: **vpasolve( )**

```
s=vpasolve(eqs,[P_],Random=true)
P=[s.P_1_1 s.P_1_2 s.P_1_3;
    s.P_2_1 s.P_2_2 s.P_2_3;
    s.P_3_1 s.P_3_2 s.P_3_3];
K=-inv(R)*B'*P;
e=eig(A+B*K)
```

Прогоняем, пока не найдет подходящее решение

Регулятор с заданной степенью устойчивости: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1, \alpha = 2$$

Вариант 1: **vpasolve( )**

```
s=vpasolve(eqs,[P_],Random=true)
P=[s.P_1_1 s.P_1_2 s.P_1_3;
    s.P_2_1 s.P_2_2 s.P_2_3;
    s.P_3_1 s.P_3_2 s.P_3_3];
K=-inv(R)*B'*P;
e=eig(A+B*K)
```

Прогоняем, пока не найдет подходящее решение

```
s = struct with fields:

    P_1_1: 2.8721378037450949935866828586806
    P_2_1: -9.80827800554554753812918118586
    P_3_1: 0.45380261375602399326949995275883
    P_1_2: -9.80827800554554753812918118586
    P_2_2: 42.566370090787780344741025122606
    P_3_2: -1.2700002834474539176253266356547
    P_1_3: 0.45380261375602399326949995275883
    P_2_3: -1.2700002834474539176253266356547
    P_3_3: 0.31216653769058368349334703653876

e =
```

$$\begin{pmatrix} -2.9997729308074258632868883127172 + 6.4958011104484673162355285602426\,i \\ -2.9997729308074258632868883127172 - 6.4958011104484673162355285602426\,i \\ -3.1806928116503053143783881467786 \end{pmatrix}$$

$$K \approx \begin{bmatrix} 0.2843 & -10.6015 & -0.7157 \end{bmatrix}$$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1, \alpha = 2$$

Вариант 1: **vpasolve( )**

```
s=vpasolve(eqs,[P_],Random=true)
P=[s.P_1_1 s.P_1_2 s.P_1_3;
    s.P_2_1 s.P_2_2 s.P_2_3;
    s.P_3_1 s.P_3_2 s.P_3_3];
K=-inv(R)*B'*P;
e=eig(A+B*K)
```

А можно без казино?

```
s = struct with fields:

    P_1_1: 2.8721378037450949935866828586806
    P_2_1: -9.80827800554554753812918118586
    P_3_1: 0.45380261375602399326949995275883
    P_1_2: -9.80827800554554753812918118586
    P_2_2: 42.566370090787780344741025122606
    P_3_2: -1.2700002834474539176253266356547
    P_1_3: 0.45380261375602399326949995275883
    P_2_3: -1.2700002834474539176253266356547
    P_3_3: 0.31216653769058368349334703653876

e =
```

$$\begin{pmatrix} -2.9997729308074258632868883127172 + 6.4958011104484673162355285602426\,i \\ -2.9997729308074258632868883127172 - 6.4958011104484673162355285602426\,i \\ -3.1806928116503053143783881467786 \end{pmatrix}$$

$$K \approx \begin{bmatrix} 0.2843 & -10.6015 & -0.7157 \end{bmatrix}$$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases}\dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$[1 \quad 0 \quad 0]$

Q

Вариант 2: **icare( )**

icare() находит $P \succ 0$, но нужно установить соответствия между «его» уравнением и «нашим»

В MATLAB:

icare

$$\boxed{A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0}$$

Implicit solver for continuous-time algebraic Riccati equations

$$[X, K, L] = \text{icare}(A, B, Q, R, S, E, G)$$

$$A^T XE + E^T XA + E^T XGXE - (E^T XB + S)R^{-1}(B^T XE + S^T) + Q = 0$$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$[1$

Q

Вариант 2: **icare( )**

icare() находит $P \succ 0$, но нужно установить соответствия между «его» уравнением и «нашим»

$$A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P + Q = 0$$

$$A^T P + PA - \left(\sqrt{2}\right)^2 PBR^{-1}B^T P + (\alpha I)^T P + P(\alpha I) + Q = 0$$

$$(A + \alpha I)^T P + P(A + \alpha I) - P\left(\sqrt{2}B\right)R^{-1}\left(\sqrt{2}B\right)^T P + Q = 0$$

В MA

icare

Implic

$$A^T XE + E^T XA + E^T XGXE - (E^T XB + S)R^{-1}(B^T XE + S^T) + Q = 0$$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1, \alpha = 2$$

Вариант 2: **icare( )**

```
Q=eye(3);
R=1;
a=2;
nu=2;
Aa=A+eye(3)*a;
[P,K,e]=icare(Aa,sqrt(nu)*B,Q,R);
K=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K)
```

```
K = 1×3

    0.2843  -10.6015   -0.7157

e = 3×1 complex

  -2.9998 + 6.4958i
  -2.9998 - 6.4958i
  -3.1807 + 0.0000i
```

Сразу корректный ответ!

$$K \approx \begin{bmatrix} 0.2843 & -10.6015 & -0.7157 \end{bmatrix}$$

Регулятор с заданной степенью устойчивости: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1, \alpha = 2$$

Тот K, что нам дает icare(), не подойдет, его игнорируем!

Вариант 2: **icare( )**

```
Q=eye(3);
R=1;
a=2;
nu=2;
Aa=A+eye(3)*a;
[P,K,e]=icare(Aa,sqrt(nu)*B,Q,R);
K=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K)
```

```
K = 1×3
     0.2843  -10.6015   -0.7157

e = 3×1 complex
   -2.9998 + 6.4958i
   -2.9998 - 6.4958i
   -3.1807 + 0.0000i
```

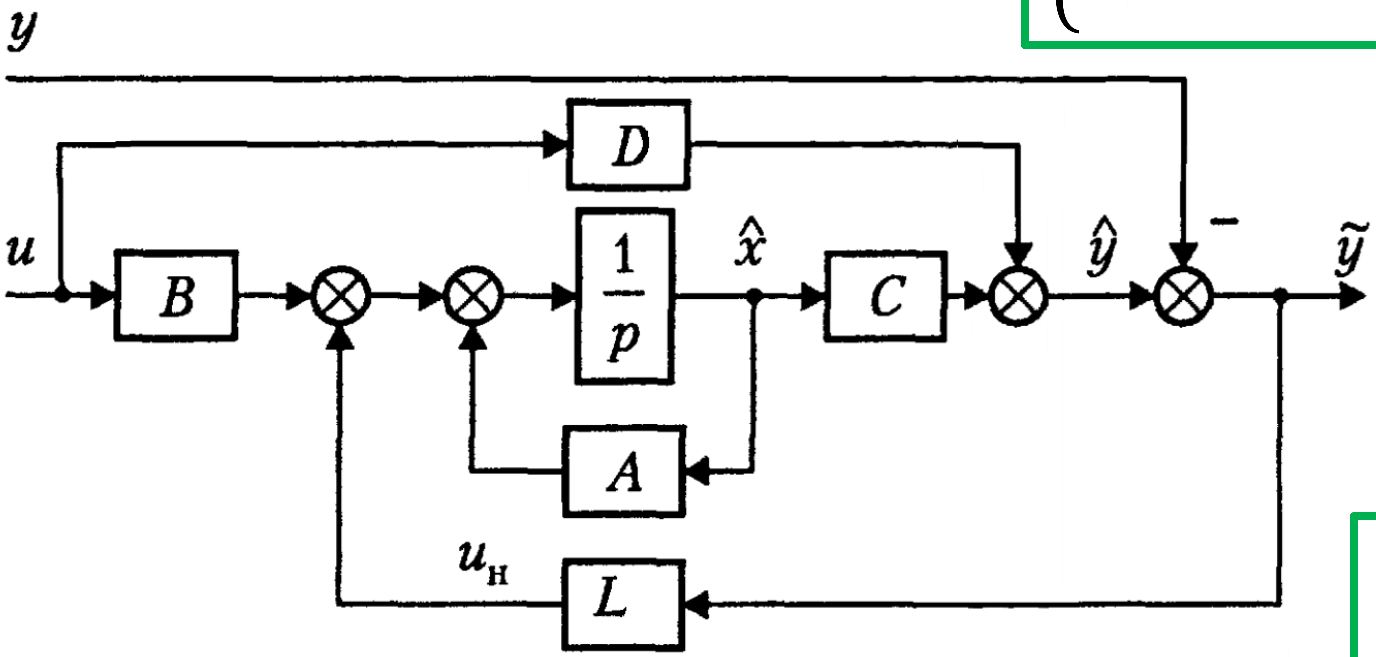
Сразу корректный ответ!

$$K \approx \begin{bmatrix} 0.2843 & -10.6015 & -0.7157 \end{bmatrix}$$

Наблюдатель с заданной степенью устойчивости: матричные уравнения Риккати

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} + Du \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} AP + PA^T - 2PC^TR^{-1}CP + 2\alpha P + Q = 0 \\ L = -PC^TR^{-1} \end{cases}}$$



Без доказательств – верю, что при желании вы сами их выведите!

Наблюдатель с заданной степенью устойчивости: матричные уравнения Риккати

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} AP + PA^T - 2PC^TR^{-1}CP + 2\alpha P + Q = 0 \\ L = -PC^TR^{-1} \end{cases}$$

Критерии существования единственного $P \succ 0$:
1. Пара (C, A) обнаруживаема;
2. Пара (A, Q) управляема.

icare( )

```
Aa=A+eye(n)*a;
[P,K,e]=icare(Aa',sqrt(nu)*Cj1',Q,R);
L=-P*C'*inv(R);
```

Пара (A, B) должна быть обнаруживаемой (с оговорками на достижимые α), но лучше работать с полностью наблюдаемыми

LMI: «минимизация» наблюдателя

На лекции разбирали, как за счет минимизации управления «прижать» полученные собственные числа замкнутой регулятором системы к желаемой степени устойчивости

Задача минимизации

```
% Plant parameters

A = [0 1; 0 0];
B = [0; 1];
x0 = [1; 0];

% Desired decay rate

a = 2;
```

```
% Solving LMI

cvx_begin sdp
variable P(2,2)
variable Y(1,2)
variable mumu
minimize mumu
P > 0.0001*eye(2);
P*A'+A*P+2*a*P+Y'*B'+B*Y <= 0;
[P x0;
 x0' 1] > 0;
[P Y';
 Y mumu] > 0;
cvx_end
```

Точно!

```
% Finding controller matrix
% and upper bound on control

K = Y*inv(P);
mu = sqrt(mumu);
```

Результат

$$K = [-6 \quad -4]$$

$$\sigma(A + BK) = \{-2 \pm \sqrt{2}i\}$$

$$\mu = 10.39$$

А для наблюдателя?

LMI: «минимизация» наблюдателя

Объект наблюдения:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$\alpha = 2$

```
cvx_begin sdp
variable Q(3,3)
variable Y(3,1)
Q>0.0001*eye(3);
A'*Q+Q*A+2*a*Q+C'*Y'+Y*C<=0;
cvx_end

L=inv(Q)*Y
e=eig(A+L*C)
```

```
L = 3×1
   -18.1190
    70.2247
   -50.1626

e = 3×1 complex
   -6.1847 +13.3197i
   -6.1847 -13.3197i
   -3.7497 + 0.0000i
```

Нашли *какой-то* наблюдатель

$$L \approx \begin{bmatrix} -18.119 & 70.2247 & 50.1626 \end{bmatrix}^T$$

LMI: «минимизация» наблюдателя

Объект наблюдения:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha = 2$$

```
x0=[1;1;1];
xh0=[0;0;0];
e0=x0-xh0;

cvx_begin sdp
variable Q(3,3)
variable Y(3,1)
variable mumu
minimize mumu
Q>0.0001*eye(3);
A'*Q + Q*A + 2*a*Q + C'*Y' + Y*C <= 0;
[Q e0;
    e0' 1]>0;
[Q Y;
    Y' mumu]>0;
cvx_end

L=inv(Q)*Y
e=eig(A+L*C)
```

```
L = 3×1

   -8.0000
    1.6000
   -1.6000
```

```
e = 3×1 complex

  -2.0000 + 4.1231i
  -2.0000 - 4.1231i
  -2.0000 + 0.0000i
```

$$L \approx \begin{bmatrix} -8 & 1.6 & -1.6 \end{bmatrix}^T$$

Нашли наблюдатель, минимизировав!

LMI: «минимизация» наблюдателя

Объект наблюдения:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha = 2$$

```
x0=[1;1;1];
xh0=[0;0;0];
e0=x0-xh0;

cvx_begin sdp
variable Q(3,3)
variable Y(3,1)
variable mumu
minimize mumu
Q>0.0001*eye(3);
A'*Q + Q*A + 2*a*Q + C'*Y' + Y*C <= 0;
[Q e0;
    e0' 1]>0;
[Q Y;
    Y' mumu]>0;
cvx_end

L=inv(Q)*Y
e=eig(A+L*C)
```

```
L = 3×1

   -8.0000
    1.6000
   -1.6000

e = 3×1 complex

  -2.0000 + 4.1231i
  -2.0000 - 4.1231i
  -2.0000 + 0.0000i
```

$$L \approx \begin{bmatrix} -8 & 1.6 & -1.6 \end{bmatrix}^T$$

А что минимизировали то?

LMI: «минимизация» наблюдателя

Объект наблюдения:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha = 2$$

В некотором смысле – начальный бросок ошибки (*перерегулирование?*), $e(0) = x(0) - \hat{x}(0)$

```
x0=[1;1;1];
xh0=[0;0;0];
e0=x0-xh0;

cvx_begin sdp
variable Q(3,3)
variable Y(3,1)
variable mumu
minimize mumu
Q>0.0001*eye(3);
A'*Q + Q*A + 2*a*Q + C'*Y' + Y*C <= 0;
[Q e0;
    e0' 1]>0;
[Q Y;
    Y' mumu]>0;
cvx_end

L=inv(Q)*Y
e=eig(A+L*C)
```

```
L = 3x1
   -8.0000
    1.6000
   -1.6000

e = 3x1 complex
  -2.0000 + 4.1231i
  -2.0000 - 4.1231i
  -2.0000 + 0.0000i
```

$$L \approx \begin{bmatrix} -8 & 1.6 & -1.6 \end{bmatrix}^T$$

А что минимизировали то?

LMI: «минимизация» наблюдателя

Объект наблюдения:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

В некотором смысле – начальный бросок ошибки (*перерегулирование?*), $e(0) = x(0) - \hat{x}(0)$

```
x0=[1;1;1];
xh0=[0;0;0];
e0=x0-xh0;

cvx_begin sdp
variable Q(3,3)
variable Y(3,1)
variable mumu
...
L=inv(Q)*Y
e=eig(A+L*C)
```

```
L = 3×1
   -8.0000
    1.6000
   -1.6000

e = 3×1 complex
  -2.0000 + 4.1231i
  -2.0000 - 4.1231i
  -2.0000 + 0.0000i
```

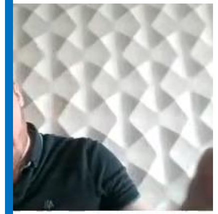
А откуда мы знаем начальные условия на объекте?
Тот же вопрос и к минимизации управления для регулятора!

$$L \approx \begin{bmatrix} -8 & 1.6 & -1.6 \end{bmatrix}^T$$

А что минимизировали то?

LMI: другой взгляд на «минимизацию»

Начальные условия с точки зрения практической задачи вам (*почти?*) никогда не известны, следовательно на практике ни о какой «минимизации управления» речи идти (*почти?*) не может



0 x_1

Задача минимизации

```
% Plant parameters

A = [0 1; 0 0];
B = [0; 1];
x0 = [1; 0];

% Desired decay rate

a = 2;
```

```
% Solving LMI

cvx_begin sdp
variable P(2,2)
variable Y(1,2)
variable mumu
minimize mumu
P > 0.0001*eye(2);
P*A'+A*P+2*a*P+Y'*B'+B*Y <= 0;
[P x0;
 x0' 1] > 0;
[P Y';
 Y mumu] > 0;
cvx_end
```

Точно!

```
% Finding controller matrix
% and upper bound on control

K = Y*inv(P);
mu = sqrt(mumu);
```

Результат

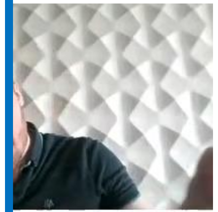
$$K = [-6 \quad -4]$$

$$\sigma(A + BK) = \{-2 \pm \sqrt{2}i\}$$

$$\mu = 10.39$$

LMI: другой взгляд на «минимизацию»

Начальные условия с точки зрения практической задачи вам (*почти?*) никогда не известны, следовательно на практике ни о какой «минимизации управления» речи идти (*почти?*) не может



0 x_1

Задача минимизации

```
% Plant parameters

A = [0 1; 0 0];
B = [0; 1];
x0 = [1; 0];

% Desired decay rate

a = 2;
```

Однако если ваша цель именно что просто «прижать» собственные числа замкнутой регулятором системы или наблюдателя к желаемой степени устойчивости, т.е. не делать «слишком быструю» систему, то в качестве $e(0)$ и $x(0)$ можно использовать *любую вещественную величину* (хоть ноль)

```
P*A'+A*P+2*a*P+Y'*B'+B*Y <= 0;
[P x0;
 x0' 1] > 0;
[P Y';
 Y mumu] > 0;
cvx_end
```

Точно!

$$K = [-6 \quad -4]$$

$$\sigma(A + BK) = \{-2 \pm \sqrt{2}i\}$$

$$\mu = 10.39$$

Качественная экспоненциальная устойчивость

Экспоненциальная устойчивость

Существует такое положительное число α и такая функция Ляпунова $V(x)$, что $\dot{V}(x) \le -2\alpha V(x)$ $\qquad \dot{V}(x) \le -2\alpha V(0)$

Существует и другой подход к экспоненциальной устойчивости.

Качественная экспоненциальная устойчивость

Экспоненциальная устойчивость

Существует такое положительное число α и такая функция Ляпунова $V(x)$, что $\dot{V}(x) \leq -2\alpha V(x)$ $\qquad$ $\dot{V}(x) \leq -2\alpha V(0)$

Качественная экспоненциальная устойчивость

Существует такая функция Ляпунова $V(x)$ и такие числа $r > 0$и β, что $\beta + r < 0$ и $V(\dot{x} - \beta x) \leq rV(x)$

Еще иногда уточняется, что «Качественная экспоненциальная устойчивость *в большом*»

Качественная экспоненциальная устойчивость

Экспоненциальная устойчивость

Существуют положительные числа c и α такие,
что при всех начальных условиях $x(0)$ выполнено

$$\|x(t)\| \leq c e^{-\alpha t} \|x(0)\|$$

Качественная экспоненциальная устойчивость

Существуют числа $c > 0$, $r > 0$ и β такие,
что $\beta + r < 0$ и при всех начальных условиях $x(0)$ выполнено

$$\left\| x(t) - e^{\beta t} x(0) \right\| \leq c \left(e^{(\beta - r)t} - e^{\beta t} \right) \|x(0)\|$$

Еще иногда уточняется, что
«Качественная экспоненциальная устойчивость *в большом*»

Качественная экспоненциальная устойчивость

Понятие введено во времена существования «кафедры систем управления и информатики» в **ИТМО**, профессором Григорьевым Валерием Владимировичем (материал докторской)

Григорьев В.В., Лукьянова Г.В., «Сергеев К.А. Анализ систем автоматического управления.»

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. «Проектирование регуляторов систем управления.»

Качественная экспоненциальная устойчивость

Существуют числа $c > 0$, $r > 0$ и β такие,
что $\beta + r < 0$ и при всех начальных условиях $x(0)$ выполнено

$$\left\|x(t) - e^{\beta t}x(0)\right\| \leq c\left(e^{(\beta - r)t} - e^{\beta t}\right)\|x(0)\|$$

Качественная экспоненциальная устойчивость

Экспоненциальная устойчивость

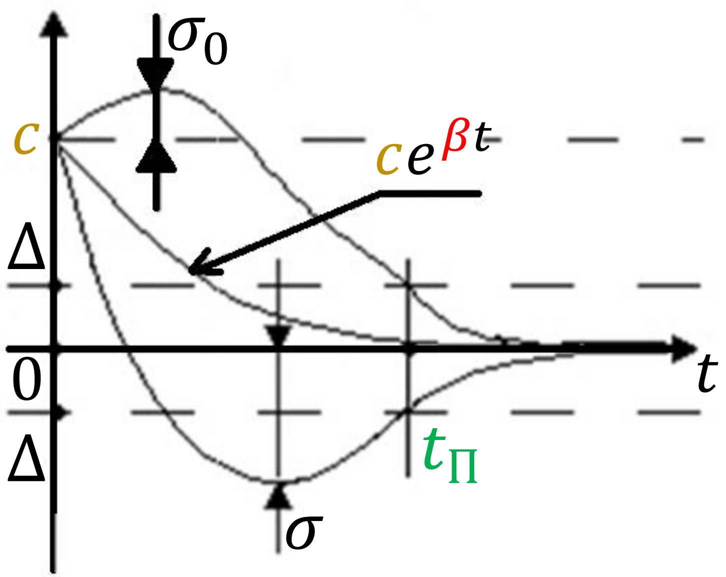
Геометрический смысл:
Сойдется не медленнее, чем экспонента $e^{-\alpha t}$.

Качественная экспоненциальная устойчивость

Геометрический смысл:
$ce^{\beta t}$ – «средняя траектория затухания»,
r – разброс траекторий от среднего.

Качественная экспоненциальная устойчивость

Геометрический смысл:
$ce^{\beta t}$ – «средняя траектория затухания»,
r – разброс траекторий от среднего.



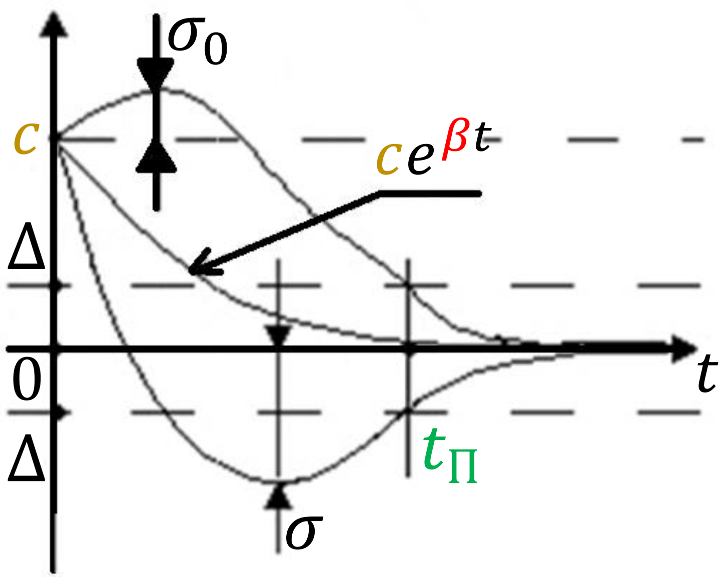
t_{Π} – время сходимости

Качественная экспоненциальная устойчивость

Геометрический смысл:

$ce^{\beta t}$ – «средняя траектория затухания»,

r – разброс траекторий от среднего.



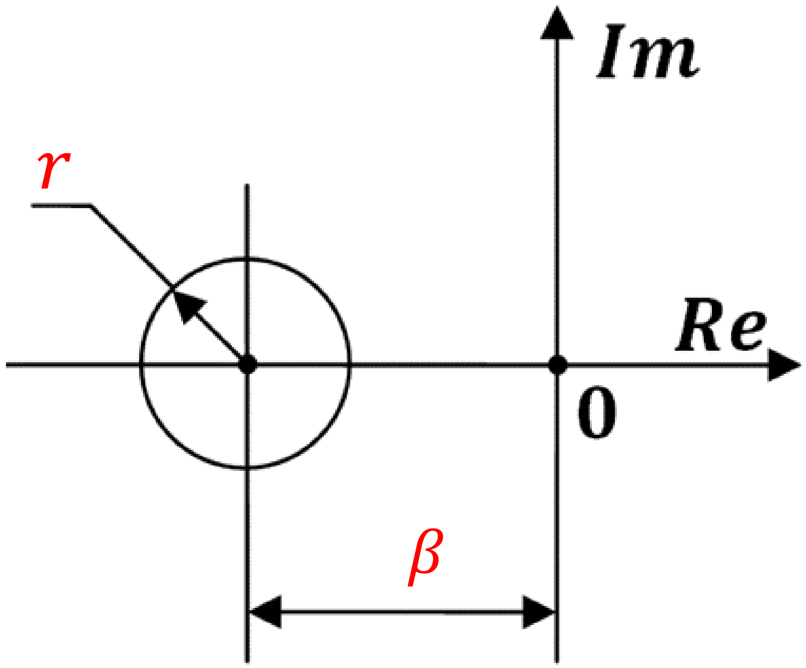
По сути процесс сходится «ни слишком быстро, ни слишком медленно», и требования выполняем, и лишнюю энергию не тратим

Качественная экспоненциальная устойчивость

Качественная экспоненциальная устойчивость

Геометрический смысл:
$ce^{\beta t}$ – «средняя траектория затухания»,
r – разброс траекторий от среднего.

Собственные числа системы, замкнутой регулятором, обеспечивающим *качественную экспоненциальную устойчивость*, оказываются в пределах круга на комплексной плоскости!



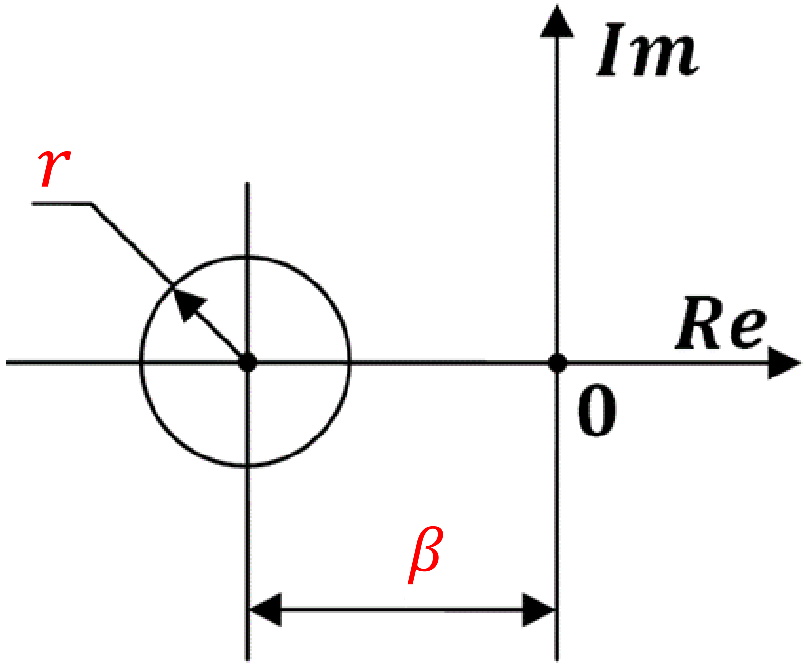
ITMO

Качественная экспоненциальная устойчивость

Геометрический смысл:
$ce^{\beta t}$ – «средняя траектория затухания»,
r – разброс траекторий от среднего.

Собственные числа системы, замкнутой
регулятором, обеспечивающим
устойчивость, оказываются в пределах
круга на комплексной плоскости!

Также не классический модальный метод,
поскольку нет строгого расчета мод



Качественная экспоненциальная устойчивость

Геометрический смысл:

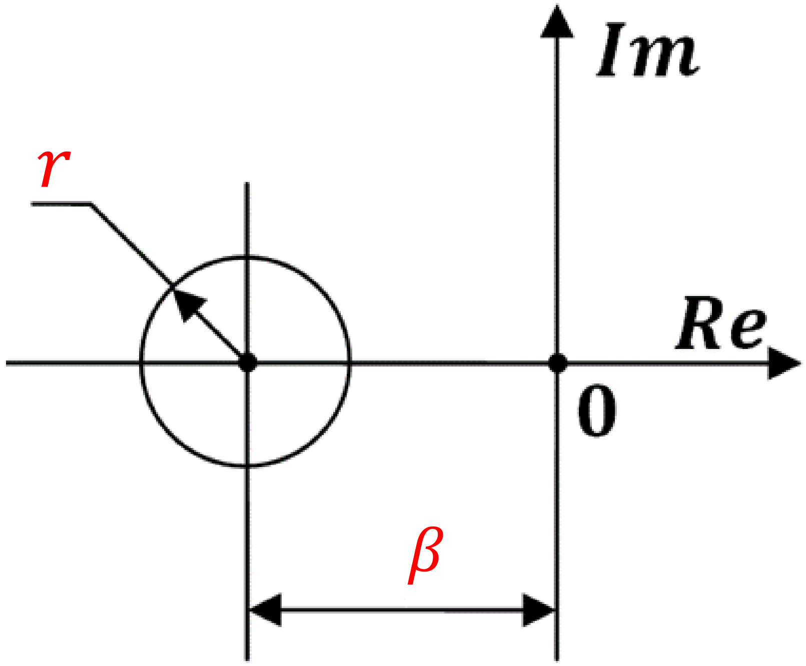
$ce^{\beta t}$ – «средняя траектория затухания»,

r – разброс траекторий от среднего.

Собственные числа системы, замкнутой **регулятором**, обеспечивающим

Как этот регулятор синтезировать?

устойчивость, оказываются в пределах круга на комплексной плоскости!



Качественная экспоненциальная устойчивость: Матричное уравнение типа Риккати

Уравнения искомого регулятора
с качественной экспоненциальной устойчивостью:

$$\begin{cases} (A + BK - \beta I)^T P (A + BK - \beta I) - r^2 P + Q = 0, \\ K = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P (A - \beta I), \end{cases}$$

где

P – искомая симметричная квадратная матрица;

A, B – матрицы объекта управления;

Q, R – симметричные положительно-полуопределенные матрицы;

β – желаемая средняя скорость сходимости;

r – разброс траекторий от среднего.

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В.
«Проектирование регуляторов систем управления.»

Качественная экспоненциальная устойчивость: Матричное уравнение типа Риккати

Уравнения искомого регулятора
с качественной экспоненциальной устойчивостью:

$$\begin{cases}(A + BK - \beta I)^T P (A + BK - \beta I) - r^2 P + Q = 0,\\ K = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P (A - \beta I),\end{cases}$$

где
P – искомая
A, B – матри
Q, R – симметричные положительно-полуопределенные матрицы;
β – желаемая средняя скорость сходимости;
r – разброс траекторий от среднего.

Пара (A, B) должна быть стабилизируемой (с оговорками на достижимые β и r), но лучше работать с полностью управляемыми

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В.
«Проектирование регуляторов систем управления.»

Качественная экспоненциальная устойчивость: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1,$$

$$\beta = -3, r = 1.5$$

0. Проверить управляемость;

Уже проверяли на прошлой практике! Стабилизируема, -2 не управляемо

Качественная экспоненциальная устойчивость: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1,$$

$$\beta = -3, r = 1.5$$

0. Проверить управляемость;

Рекомендую усечь, при размерности 3×3 считать, возможно, будет очень долго

Качественная экспоненциальная устойчивость: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} u,$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1,$$

$$\beta = -3, r = 1.5$$

Рекомендую усечь, при размерности 3×3 считать, возможно, будет очень долго

```
[P,Aj]=jordan(A);
P(:,2)=real(P(:,2));
P(:,3)=imag(P(:,3));
Aj=P^-1*A*P
Bj=P^-1*B

Aj1=Aj;
Aj1(1,:)=[];
Aj1(:,1)=[];
Bj1=Bj;
Bj1(1,:)=[]
```

Качественная экспоненциальная устойчивость: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} u,$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1,$$

$$\beta = -3, r = 1.5$$

Вариантов, кроме «казино», у меня для вас нет: уравнения сложные, специфичные, специальных пакетов под это мне неизвестно

Если найдете способ лучше – прошу поделиться в конференции предмета

Качественная экспоненциальная устойчивость: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} u,$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1,$$

$$\beta = -3, r = 1.5$$

Вариант: **vpasolve( )**

```
syms P_ [2 2]
K_ = -(inv(R+Bj1'*P_*Bj1)*Bj1'*P_*(Aj1-b*eye(2)))
eqs = (Aj1+Bj1*K_-b*eye(2))'*P_*(Aj1+Bj1*K_-b*eye(2))-r^2*P_==-Q;
```

Задаем уравнения

$$\begin{cases} (A + BK - \beta I)^T P (A + BK - \beta I) - r^2 P + Q = 0, \\ K = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P (A - \beta I) \end{cases}$$

Качественная экспоненциальная устойчивость: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} u,$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1,$$

$$\beta = -3, r = 1.5$$

Вариант: **vpasolve( )**

Считаем…

```
s=vpasolve(eqs,[P_],Random=true)
P_=[s.P_1_1 s.P_1_2;
    s.P_2_1 s.P_2_2];
K=[0 -(inv(R+Bj1'*P_*Bj1)*Bj1'*P_*(Aj1-b*eye(2)))]*P^-1;
e=eig(A+B*K)
```

Задаем уравнения

$$\begin{cases} (A + BK - \beta I)^T P (A + BK - \beta I) - r^2 P + Q = 0, \\ K = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P (A - \beta I) \end{cases}$$

Качественная экспоненциальная устойчивость: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} u,$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1,$$

$$\beta = -3, r = 1.5$$

Вариант: **vpasolve( )**

Считаем…

```
s=vpasolve(eqs,[P_],Random=true)
P_=[s.P_1_1 s.P_1_2;
    s.P_2_1 s.P_2_2];
K=[0 -(inv(R+Bj1'*P_*Bj1)*Bj1'*P_*(Aj1-b*eye(2)))]*P^-1;
e=eig(A+B*K)
```

e =

$$\begin{pmatrix} 2.2557726276480658636715357350106 \\ -2.0 \\ -2.2426160945123384157649809587639 \end{pmatrix}$$

Не попали

Качественная экспоненциальная устойчивость: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} u,$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1,$$

$$\beta = -3, r = 1.5$$

Вариант: **vpasolve( )**

```
s=vpasolve(eqs,[P_],Random=true)
P_=[s.P_1_1 s.P_1_2;
    s.P_2_1 s.P_2_2];
K=[0 -(inv(R+Bj1'*P_*Bj1)*Bj1'*P_*(Aj1-b*eye(2)))]*P^-1;
e=eig(A+B*K)
```

Считаем…

```
e =
```

$$\begin{pmatrix} 2.218872385905313875823085445351 \\ -2.0 \\ -2.568872385905313875823085445351 \end{pmatrix}$$

Не попали

Качественная экспоненциальная устойчивость: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} u,$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1,$$

$$\beta = -3, r = 1.5$$

Вариант: **vpasolve( )**

Считаем…

```
s=vpasolve(eqs,[P_],Random=true)
P_=[s.P_1_1 s.P_1_2;
    s.P_2_1 s.P_2_2];
K=[0 -(inv(R+Bj1'*P_*Bj1)*Bj1'*P_*(Aj1-b*eye(2)))]*P^-1;
e=eig(A+B*K)
```

e =

$$\begin{pmatrix} 7.1085315472264705565109559715995 \\ -1.9036834793805793358662876836253 \\ -2.0 \end{pmatrix}$$

Не попали

Качественная экспоненциальная устойчивость: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} u,$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1,$$

$$\beta = -3, r = 1.5$$

Вариант: **vpasolve( )**

Считаем…

```
s=vpasolve(eqs,[P_],Random=true)
P_=[s.P_1_1 s.P_1_2;
    s.P_2_1 s.P_2_2];
K=[0 -(inv(R+Bj1'*P_*Bj1)*Bj1'*P_*(Aj1-b*eye(2)))]*P^-1;
e=eig(A+B*K)
```

e =

$$\begin{pmatrix} 2.77324636456861763186543752064 8 + 0.850955011873896706032758322566 03\,i \\ 2.773246364568617631865437520648 - 0.85095501187389670603275832256603\,i \\ -2.0 \end{pmatrix}$$

Не попали

Качественная экспоненциальная устойчивость: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} u,$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1,$$

$$\beta = -3, r = 1.5$$

Вариант: **vpasolve( )**

```
s=vpasolve(eqs,[P_],Random=true)
P_=[s.P_1_1 s.P_1_2;
    s.P_2_1 s.P_2_2];
K=[0 -(inv(R+Bj1'*P_*Bj1)*Bj1'*P_*(Aj1-b*eye(2)))]*P^-1;
e=eig(A+B*K)
```

Считаем…

```
e =
```

$$\begin{pmatrix} -2.0 \\ -2.6897382581591502337445645442592 + 0.61288444959275301733142908922761\,\mathrm{i} \\ -2.6897382581591502337445645442592 - 0.61288444959275301733142908922761\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$K \approx -\begin{bmatrix} 1.3538 & 6.6718 & 1.3538 \end{bmatrix}$$

Похоже на правду

Качественная экспоненциальная устойчивость: пример в MATLAB

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} u,$$

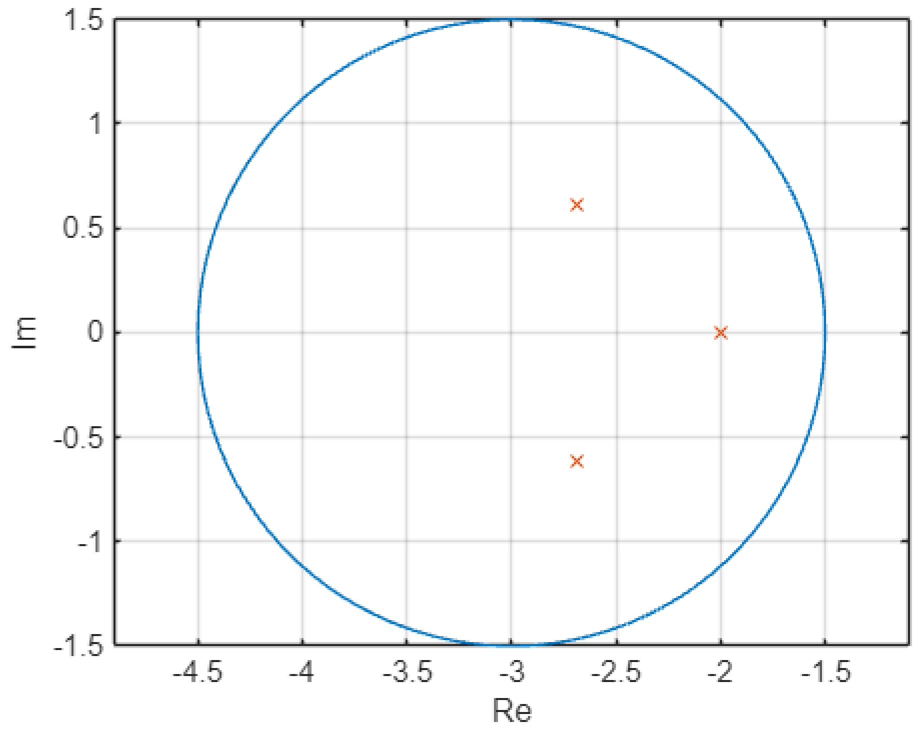
$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1,$$

$$\beta = -3, r = 1.5$$

Вариант: **vpasolve( )**

```
th = 0:pi/50:2*pi;
xunit = r * cos(th) + b;
yunit = r * sin(th);
plot(xunit, yunit);
hold on
plot(real(e),imag(e),"o")
axis equal
grid on
xlabel("Re")
ylabel("Im")
hold off
```



$$K \approx -\begin{bmatrix} 1.3538 & 6.6718 & 1.3538 \end{bmatrix}$$

Похоже на правду