МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ
по лабораторной работе А:
ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЕ РАДОСТИ

Вариант 17

по дисциплине
«Теория автоматического управления»

Студент:
Группа № R3338 *А.А. Нечаева*

Предподаватель:
ассистент факультера СУиР, к. т. н. *А.В. Пашенко*

Санкт-Петербург 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1 ИССЛЕДОВАНИЕ LQR

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \tag{1}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и выполним следующие шаги:

- Проверим систему на стабилизируемость.
- Построим схему моделирования системы (1), замкнутой регулятором $u = Kx$.
- Зададимся подходящими значениями матриц $Q^* \succ 0$ и $R^* \succ 0$ и значением параметра $\alpha > 0$ и сформируем четыре набора пар матриц (Q, R):
  - (Q, R)
  - $(\alpha Q, R)$
  - $(Q, \alpha R)$
  - $(\alpha Q, \alpha R)$
- Для каждой из пар значений матриц (Q, R) синтезируем регулятор, минимизирующий функционал качества

  $$J = \int_0^\infty \left(x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right) dt \tag{2}$$

  путем решения соответствующего матричного уравнения Риккати при $\nu = 1$:

  $$A^T P + PA + Q - \nu PBR^{-1}B^T P = 0, \quad K = -R^{-1}B^T P \tag{3}$$

  - Найдем соответствующую матрицу регулятора K, обеспечивающую минимизацию функционала качества.

– Вычислим соответствующее минимизированное значение функционала

$$J_{min} = x_0^T P x_0, \tag{4}$$

где P – решение соответствующего уравнения Риккати.

– Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы и построим графики управления $u(t)$, вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ и экспериментального значения функционала качества $J_{exp}(t)$. Сопоставим последнее с вычисленным ранее J_{min}.

– Сравним полученные результаты для различных пар (Q, R), сделаем выводы.

1.1 Проверка системы на стабилизируемость

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 2 - 3i \\ \lambda_3 = 2 + 3i \end{cases}$$

Определим управляемость собственных чисел с помощью матриц Хаутуса.

Для собственного числа $\lambda_1 = -3$:

$$U_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & -8 & 0 \\ 6 & 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \;\; rank(U_1) = 2 \tag{5}$$

Ранг U_1 меньше порядка системы, следовательно, собственного число λ_1 неуправляемо.

Для собственного числа $\lambda_2 = 2 - 3i$:

$$U_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+3i & 8 & 5 & 2 \\ -6 & -11+3i & -8 & 0 \\ 6 & 6 & 3+3i & 0 \end{bmatrix}, \;\; rank(U_2) = 3 \tag{6}$$

Ранг U_2 равно порядку системы, следовательно, собственного число λ_2 управляемо.

Для собственного числа $\lambda_3 = 2 + 3i$:

$$U_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3i & 8 & 5 & 2 \\ -6 & -11-3i & -8 & 0 \\ 6 & 6 & 3-3i & 0 \end{bmatrix}, \quad rank(U_3) = 3 \qquad (7)$$

Ранг U_3 равно порядку системы, следовательно, собственного число λ_3 управляемо.

Система в целом не является полностью управляемой, из-за того, что собственное число $\lambda_1 = -3$ неуправляемо. В то же время $Re(\lambda_1) < 0$, то есть данное собственное число устойчивое, следовательно, система стабилизируема.

1.2 Схема моделирования

Построим схему моделирования системы (1), замкнутой регулятором $u = Kx$.

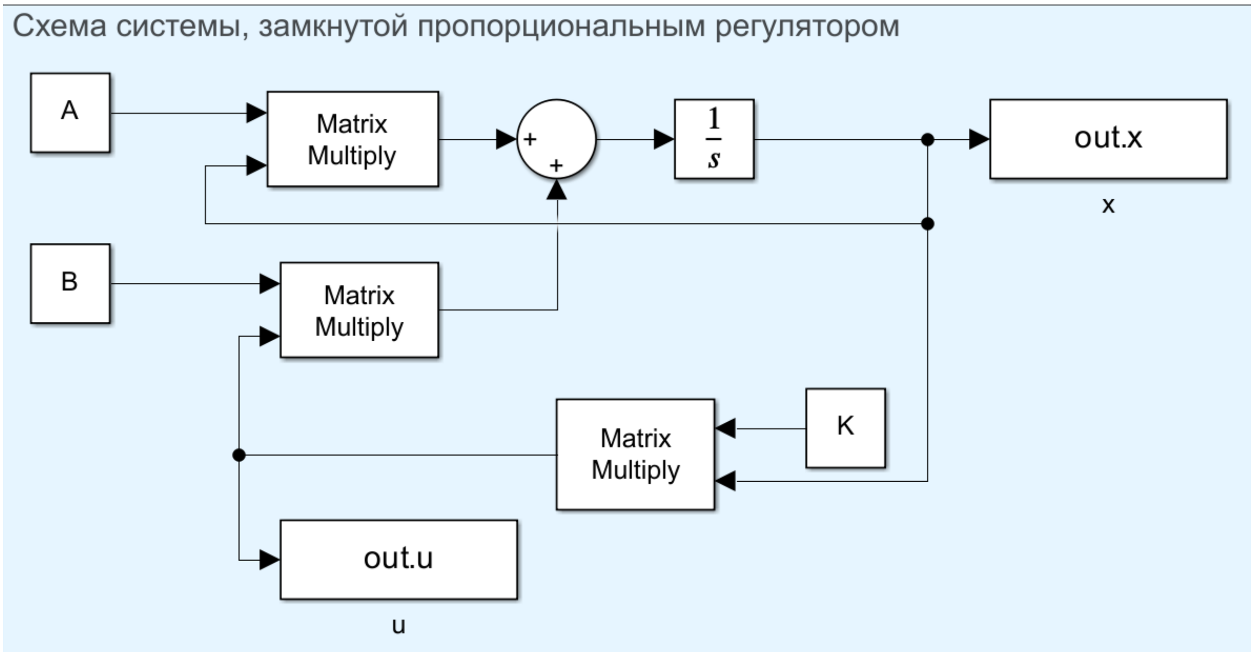

Рисунок 1 — Схема моделирования системы, замкнутой регулятором $u = Kx$.

1.3 Наборы параметров

Зададимся подходящими значениями матриц $Q^* \succ 0$ и $R^* \succ 0$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ R = 1 \tag{8}$$

и значением параметра $\alpha = 10$ и сформируем четыре набора пар матриц (Q, R):

1.3.1 Умеренная скорость процесса и умеренная сила управления

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ R = 1 \tag{9}$$

1.3.2 Высокая скорость процесса и умеренная сила управления

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \ R = 1 \tag{10}$$

1.3.3 Умеренная скорость процесса и низкая сила управления

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ R = 10 \tag{11}$$

1.3.4 Высокая скорость процесса и низкая сила управления

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \ R = 10 \tag{12}$$

1.4 Синтез регуляторов

Для каждой из пар значений матриц (Q, R) синтезируем регулятор, минимизирующий функционал качества (2) путем решения соответствующего матричного уравнения Риккати (3).

1.4.1 Умеренная скорость процесса и умеренная сила управления

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \tag{13}$$

Решение уравнения Риккати (3)

$$P = \begin{bmatrix} 2.5195 & 2.3142 & 2.2472 \\ 2.3142 & 2.4141 & 2.2374 \\ 2.2472 & 2.2374 & 3.2526 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Искомая матрица регулятора

$$K_{1,1} = \begin{bmatrix} -5.0390 & -4.6284 & -4.4944 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Вычислим соответствующее минимизированное значение функционала

$$J_{min} = x_0^T P x_0 = 21.7837 \tag{16}$$

1.4.2 Высокая скорость процесса и умеренная сила управления

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \tag{17}$$

Решение уравнения Риккати (3)

$$P = \begin{bmatrix} 3.9702 & 2.9725 & 4.0849 \\ 2.9725 & 4.6443 & 5.1150 \\ 4.0849 & 5.1150 & 9.7735 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Искомая матрица регулятора

$$K_{10,1} = \begin{bmatrix} -7.9405 & -5.9449 & -8.1697 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Вычислим соответствующее минимизированное значение функционала

$$J_{min} = x_0^T P x_0 = 42.7327 \tag{20}$$

1.4.3 Умеренная скорость процесса и низкая сила управления

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ R = 10 \tag{21}$$

Решение уравнения Риккати (3)

$$P = \begin{bmatrix} 20.7694 & 20.4916 & 17.4794 \\ 20.4916 & 20.5420 & 17.4044 \\ 17.4794 & 17.4044 & 22.4889 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Искомая матрица регулятора

$$K_{1,10} = \begin{bmatrix} -4.1539 & -4.0983 & -3.4959 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Вычислим соответствующее минимизированное значение функционала

$$J_{min} = x_0^T P x_0 = 174.5511 \tag{24}$$

1.4.4 Высокая скорость процесса и низкая сила управления

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \ R = 10 \tag{25}$$

Решение уравнения Риккати (3)

$$P = \begin{bmatrix} 25.1949 & 23.1418 & 22.4722 \\ 23.1418 & 24.1409 & 22.3737 \\ 22.4722 & 22.3737 & 32.5256 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Искомая матрица регулятора

$$K_{10,10} = \begin{bmatrix} -5.0390 & -4.6284 & -4.4944 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Вычислим соответствующее минимизированное значение функционала

$$J_{min} = x_0^T P x_0 = 217.8366 \tag{28}$$

1.5 Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование замнкутой системы и построим графики управления $u(t)$, вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ и экспериментального значения функционала качества $J_{exp}(t)$. Сопоставим последнее с вычисленным ранее J_{min}.

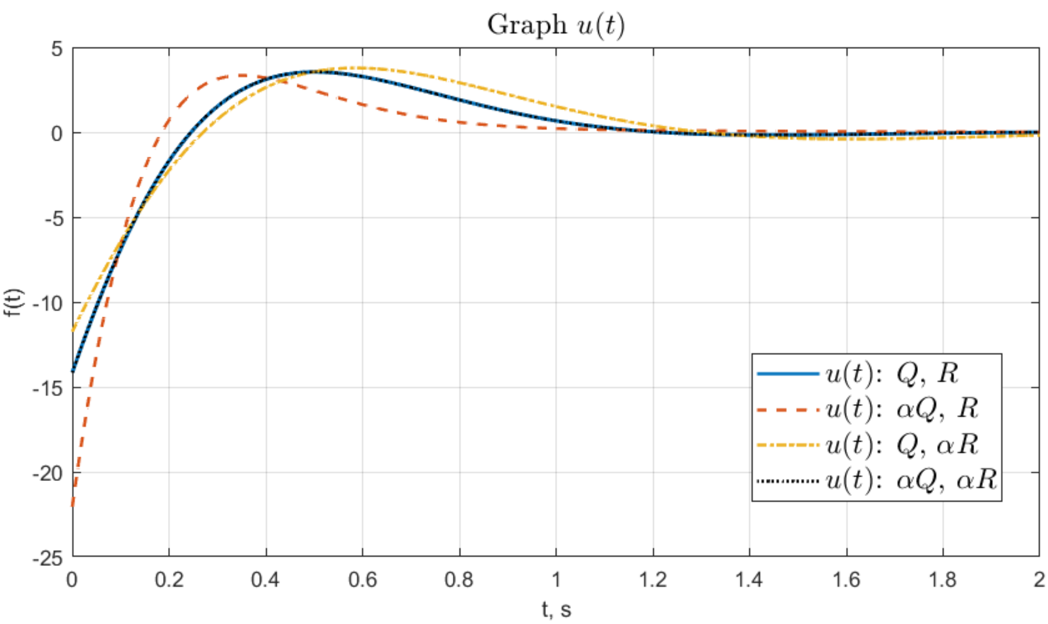

Рисунок 2 — Графики управления $u(t)$.

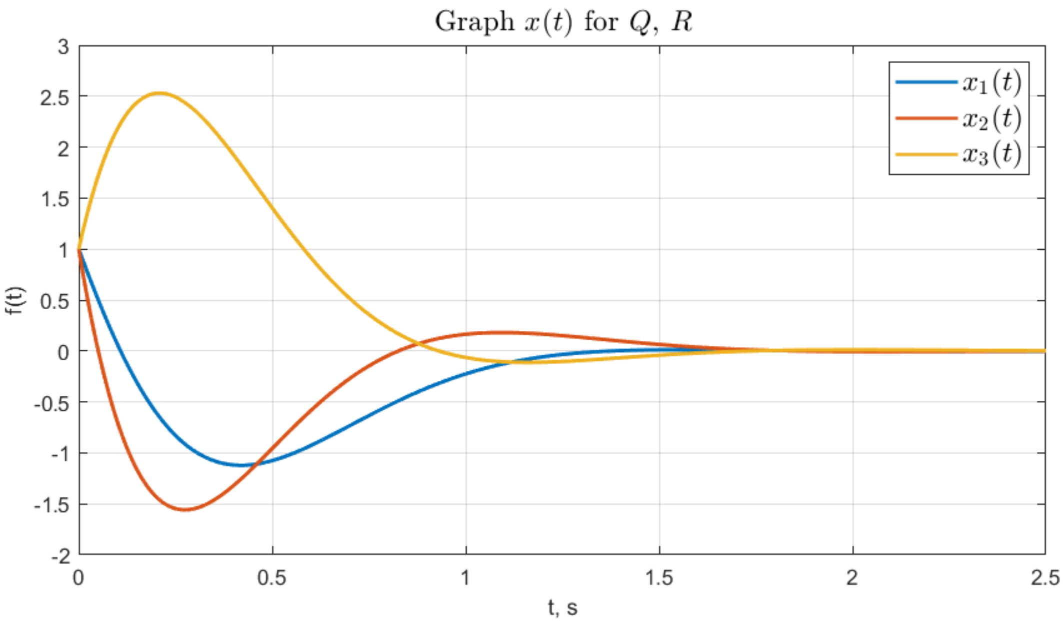

Рисунок 3 — График вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ при Q и R.

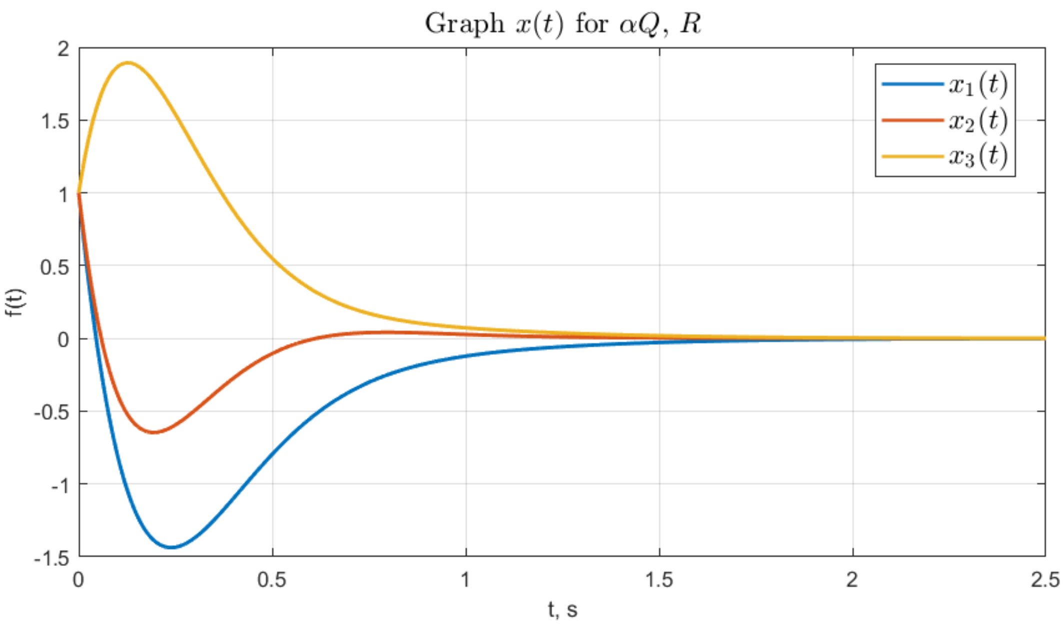

Рисунок 4 — График вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ при αQ и R.

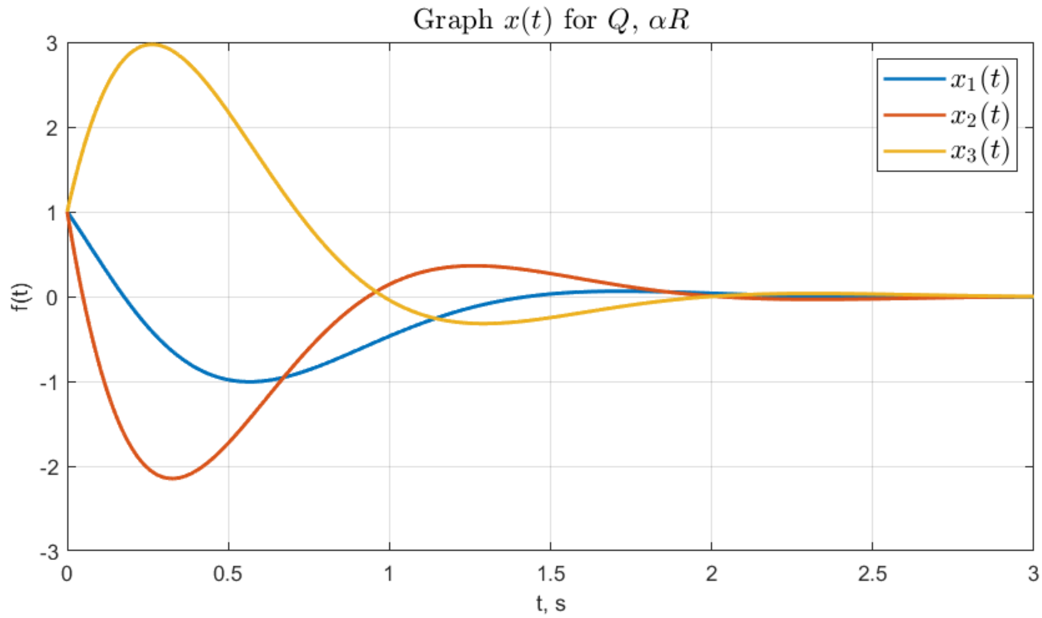

Рисунок 5 — График вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ при Q и αR.

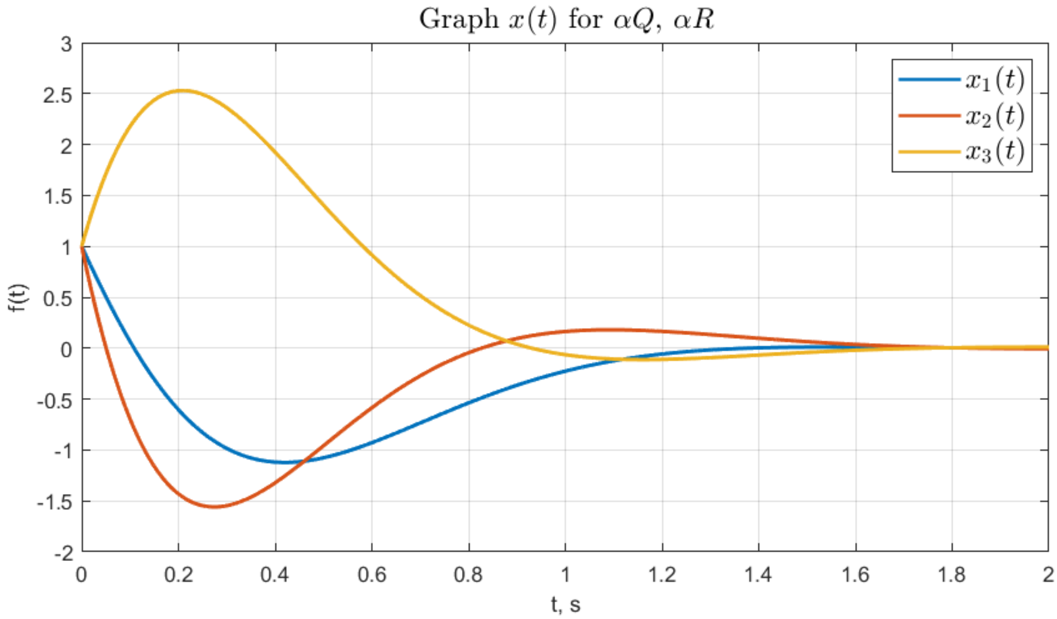

Рисунок 6 — График вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ при αQ и αR.

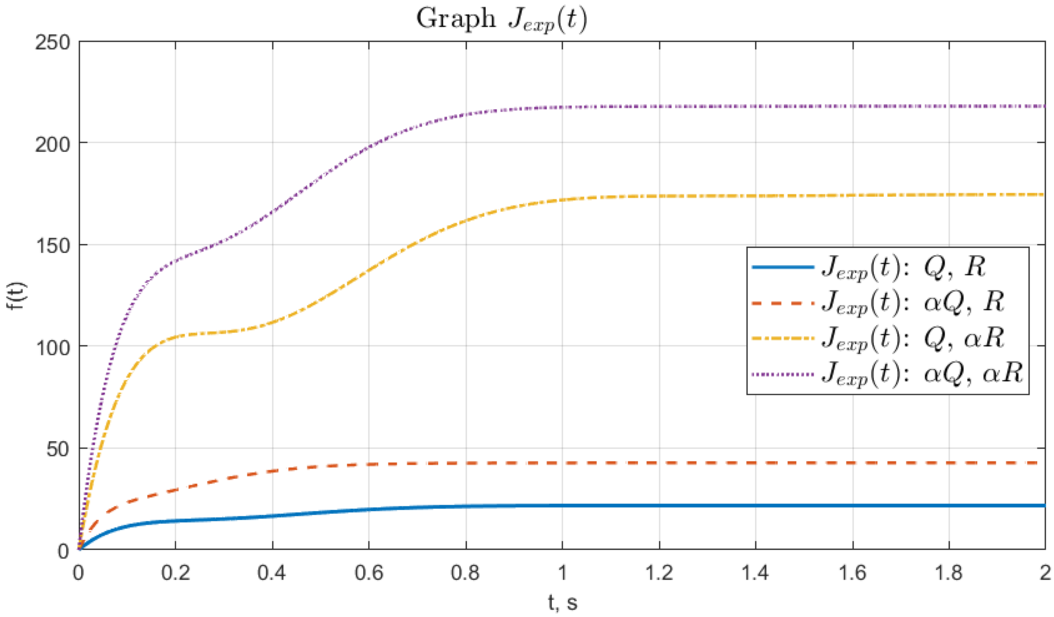

Рисунок 7 — График экспериментального значения функционала $J_{exp}(t)$.

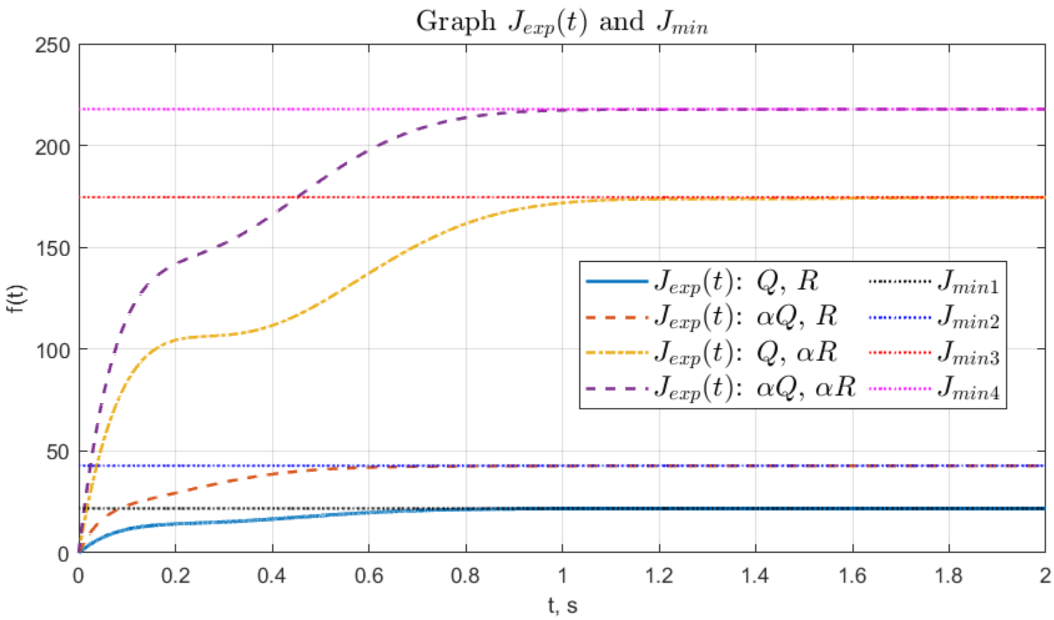

Рисунок 8 — Сравнительный график экспериментального значения функционала $J_{exp}(t)$ и вычисленного J_{min}.

1.6 Сравнение полученных результатов

На графике управления (рисунок 2) заметно, что для набора $(\alpha Q, R)$ управление становится более резким, что приводит к увеличении скорости переходного процесса, действительно, компоненты вектора состояния (рисунок 4) быстрее сходятся к нулю, чем в остальных случаях. При $(Q, \alpha R)$ управление становится меньше и плавнее, скорость переходного процесса минимальна относительно рассмотренных (рисунок 5). Для наборов (Q, R) и $(\alpha Q, \alpha R)$ графики управления визуально неотличимы, как и графики векторов состояний для этих двух случаев (рисунок 3 и 6 соответственно).

Заметим также, что графики экспериментального значения функционала качества сходятся к значениям соответствующих минимизированных функционалов (рисунок 8).

2 ИССЛЕДОВАНИЕ LQE

Рассмотрим рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f, \\ y = Cx + \xi \end{cases} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \tag{29}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 6 & -20 & 11 \\ 14 & 3 & -10 & 4 \\ 40 & 11 & -31 & 17 \\ 6 & 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T$$

Зададимся детерминированными сигналами $f(t)$ и $\xi(t)$ (гармонические возмущения), исследуя таким образом LQE.

$$f(t) = \begin{bmatrix} 0.5\sin(2\pi \cdot 0.1t) \\ 0.3\cos(2\pi \cdot 0.2t) \\ 0.4\sin(2\pi \cdot 0.15t) \\ 0.2\cos(2\pi \cdot 0.05t) \end{bmatrix},$$

$$\xi(t) = 0.1\sin(2\pi \cdot 0.3t) + 0.05\cos(2\pi \cdot 0.25t) \tag{30}$$

Выполним следующие шаги:

– Проверим систему на обнаруживаемость
– Построим схему моделирования системы (29) с наблюдателем состояния

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$$

– Зададимся подходящими значениями матриц $Q^* \succ 0$ и $R^* \succ 0$ и значением параметра $\alpha > 0$ и сформируем четыре набора пар матриц (Q, R):
  - (Q, R)
  - $(\alpha Q, R)$
  - $(Q, \alpha R)$
  - $(\alpha Q, \alpha R)$

– Для каждой из пар значений матриц (Q, R) синтезируем наблюдатель, минимизирующий «критерий доверия»

$$J = \int\limits_0^\infty \left(f^T(t)Q^{-1}f(t) + \xi^T(t)R^{-1}\xi(t)\right) dt \tag{31}$$

путем решения соответствующего матричного уравнения Риккати при $\nu = 1$:

$$AP + PA^T + Q - \nu PC^T R^{-1} CP = 0, \;\; L = -PC^T R^{-1} \tag{32}$$

  – Найдем соответствующую матрицу корррекции наблюдателя L, обеспечивающую минимизацию функционала качества (2), где P – решение соответствующего уравнения Риккати (3).
  – Выполним компьютерное моделирование с нулевыми начальными условиями наблюдателя $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Построим сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

– Сравним полученные результаты для различных пар (Q, R), сделаем выводы.

2.1 Обнаруживаемость системы

Найдем собственные числа матрицы A и определим наблюдаемость каждого из них. Сделаем вывод о наблюдаемости и обнаруживаемости системы.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 6 & -20 & 11 \\ 14 & 3 & -10 & 4 \\ 40 & 11 & -31 & 17 \\ 6 & 4 & -4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm 3i \\ \lambda_{3,4} = \pm i \end{cases}$$

Определим наблюдаемость собственных чисел с помощью матриц Хаутуса.

Для собственного числа $\lambda_1 = -3i$

$$V_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25+3i & 6 & -20 & 11 \\ 14 & 3+3i & -10 & 4 \\ 40 & 11 & -31+3i & 17 \\ 6 & 4 & -4 & 3+3i \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ rank(V_1) = 4 \tag{33}$$

Ранг матрицы V_1 равен порядку системы, следовательно, собственное число $\lambda_1 = -3i$ наблюдаемо.

Для собственного числа $\lambda_2 = 3i$

$$V_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25-3i & 6 & -20 & 11 \\ 14 & 3-3i & -10 & 4 \\ 40 & 11 & -31-3i & 17 \\ 6 & 4 & -4 & 3-3i \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ rank(V_2) = 4 \tag{34}$$

Ранг матрицы V_2 равен порядку системы, следовательно, собственное число $\lambda_2 = 3i$ наблюдаемо.

Для собственного числа $\lambda_3 = -i$

$$V_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25+i & 6 & -20 & 11 \\ 14 & 3+i & -10 & 4 \\ 40 & 11 & -31+i & 17 \\ 6 & 4 & -4 & 3+i \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ rank(V_3) = 4 \tag{35}$$

Ранг матрицы V_3 равен порядку системы, следовательно, собственное число $\lambda_3 = -i$ наблюдаемо.

Для собственного числа $\lambda_1 = -3i$

$$V_4 = \begin{bmatrix} A - \lambda_4 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25-i & 6 & -20 & 11 \\ 14 & 3-i & -10 & 4 \\ 40 & 11 & -31-i & 17 \\ 6 & 4 & -4 & 3-i \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ rank(V_4) = 4 \tag{36}$$

Ранг матрицы V_4 равен порядку системы, следовательно, собственное число $\lambda_4 = i$ наблюдаемо.

Все собственные числа матрицы наблюдаемы, следовательно, система в целом полностью наблюдаема. Для обнаруживаемости системы достаточно того, что система наблюдаема, значит, система еще и обнаруживаемая.

2.2 Схема моделирования

Построим схему моделирования системы (29) с наблюдателем состояния

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$$

.

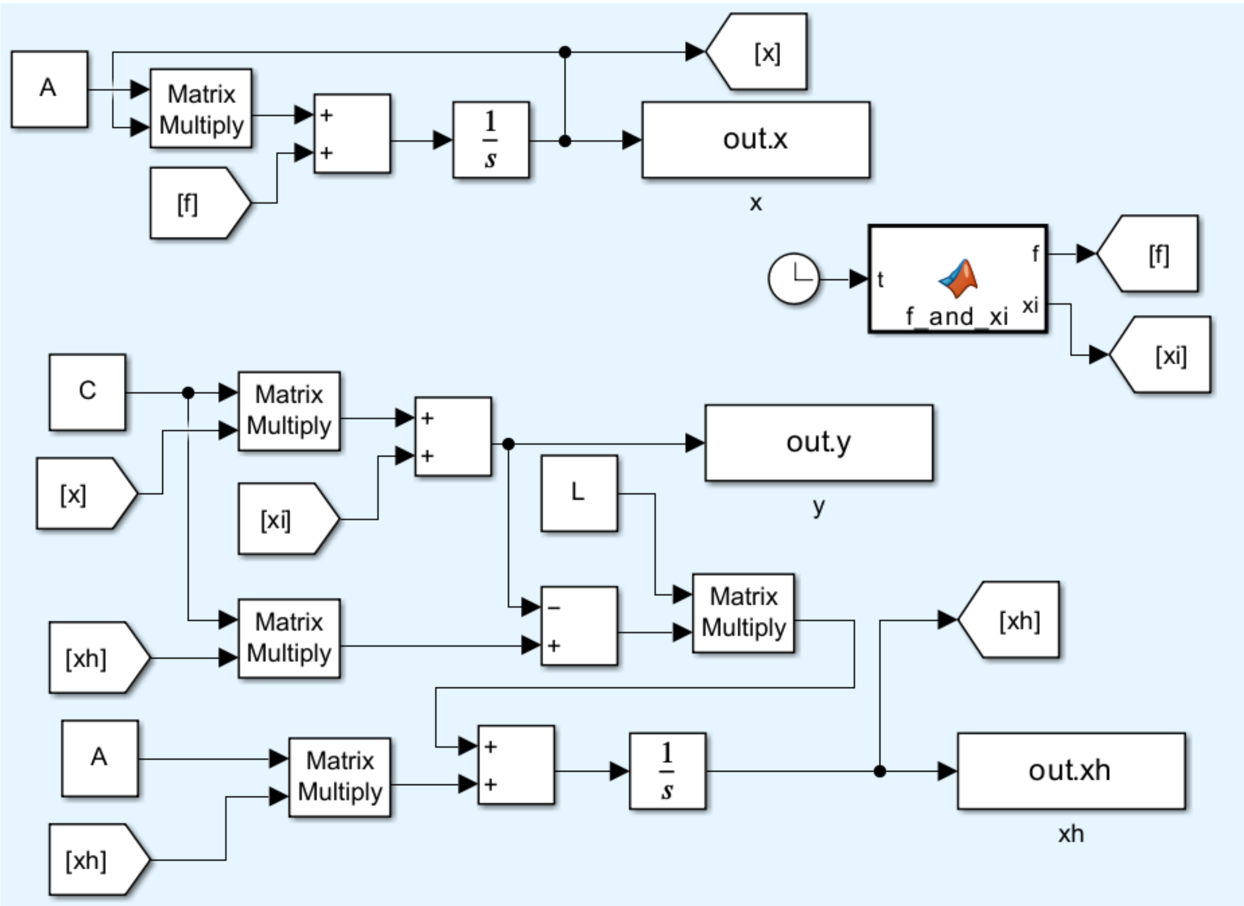

Рисунок 9 — Схема моделирования системы с наблюдателем состояния $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$.

2.3 Наборы параметров

Зададимся подходящими значениями матриц $Q^* \succ 0$ и $R^* \succ 0$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ R = 1 \tag{37}$$

и значением параметра $\alpha = 10$ и сформируем четыре набора пар матриц (Q, R):

2.3.1 Умеренное возмущение и умеренная помеха

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ R = 1 \tag{38}$$

2.3.2 Большое возмущение и умеренная помеха

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \ R = 1 \tag{39}$$

2.3.3 Умеренное возмущение и большая помеха

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ R = 10 \tag{40}$$

2.3.4 Большое возмущение и большая помеха

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R = 10 \tag{41}$$

2.4 Синтез наблюдателя

Для каждой из пар значений матриц (Q, R) синтезируем наблюдатель, минимизирующий «критерий доверия» (31) путем решения соответствующего матричного уравнения Риккати при $\nu = 1$:

$$AP + PA^T + Q - \nu PC^T R^{-1} CP = 0, \quad L = -PC^T R^{-1} \tag{42}$$

2.4.1 Умеренное возмущение и умеренная помеха

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \tag{43}$$

Решение уравнения Риккати (42)

$$P = \begin{bmatrix} 63.4984 & 37.9508 & 130.6814 & 76.4226 \\ 37.9508 & 28.6271 & 78.9099 & 44.0316 \\ 130.6814 & 78.9099 & 283.8838 & 179.6160 \\ 76.4226 & 44.0316 & 179.6160 & 127.6773 \end{bmatrix} \tag{44}$$

Искомая матрица коррекции наблюдателя

$$L_1 = \begin{bmatrix} -9.2395 \\ -3.0726 \\ -26.4137 \\ -24.4839 \end{bmatrix} \tag{45}$$

2.4.2 Большое возмущение и умеренная помеха

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \ R = 1 \tag{46}$$

Решение уравнения Риккати (42)

$$P = \begin{bmatrix} 476.9 & 300.2 & 922.2 & 478.3 \\ 300.2 & 201.0 & 585.5 & 303.8 \\ 922.2 & 585.5 & 1840.2 & 998.9 \\ 478.3 & 303.8 & 998.9 & 581.2 \end{bmatrix} \tag{47}$$

Искомая матрица коррекции наблюдателя

$$L_2 = \begin{bmatrix} -33.0665 \\ -18.4427 \\ -80.8288 \\ -60.6352 \end{bmatrix} \tag{48}$$

2.4.3 Умеренное возмущение и большая помеха

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ R = 10 \tag{49}$$

Решение уравнения Риккати (42)

$$P = \begin{bmatrix} 92.0913 & 37.3332 & 190.4522 & 118.3935 \\ 37.3332 & 61.1155 & 84.5025 & 36.1468 \\ 190.4522 & 84.5025 & 450.6701 & 335.7674 \\ 118.3935 & 36.1468 & 335.7674 & 312.1042 \end{bmatrix} \tag{50}$$

Искомая матрица коррекции наблюдателя

$$L_3 = \begin{bmatrix} -2.0033 \\ 1.1022 \\ -7.5549 \\ -9.4730 \end{bmatrix} \tag{51}$$

2.4.4 Большое возмущение и большая помеха

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R = 10 \tag{52}$$

Решение уравнения Риккати (42)

$$P = \begin{bmatrix} 635 & 379.5 & 1306.8 & 764.2 \\ 379.5 & 286.3 & 789.1 & 440.3 \\ 1306.8 & 789.1 & 2838.8 & 1796.2 \\ 764.2 & 440.3 & 1796.2 & 1276.8 \end{bmatrix} \tag{53}$$

Искомая матрица коррекции наблюдателя

$$L_4 = \begin{bmatrix} -9.2395 \\ -3.0726 \\ -26.4137 \\ -24.4839 \end{bmatrix} \tag{54}$$

2.5 Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование с нулевыми начальными условиями наблюдателя $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Построим сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

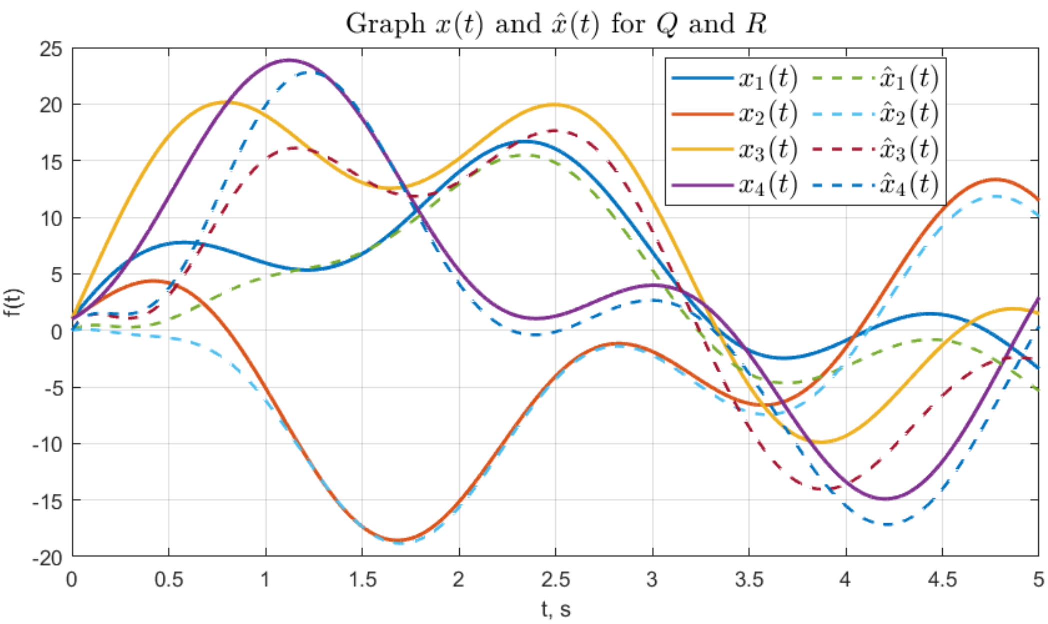

Рисунок 10 — Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ при Q и R.

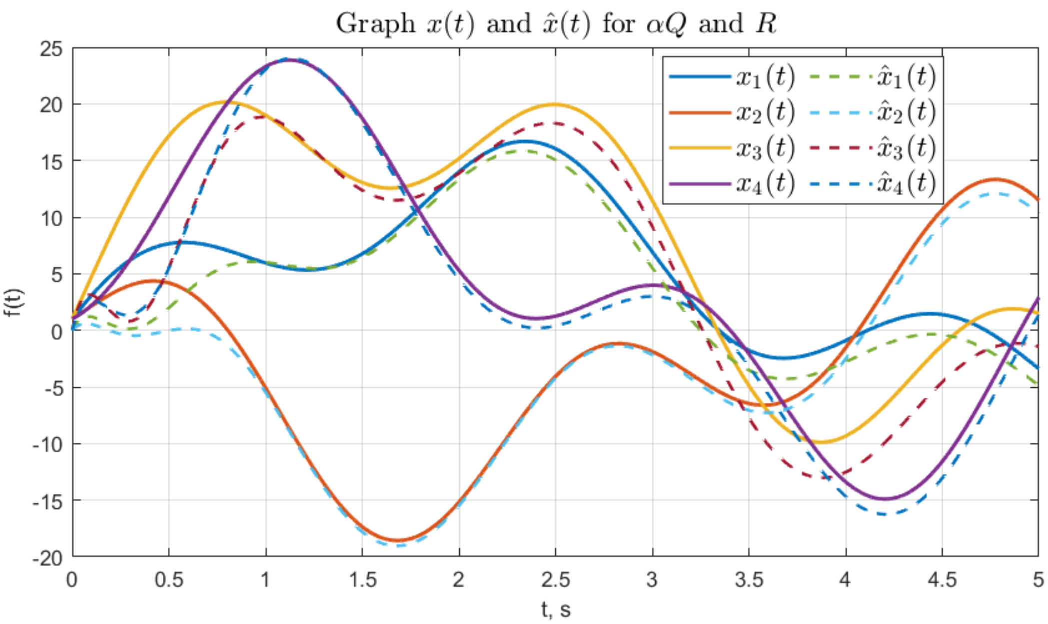

Рисунок 11 — Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ при αQ и R.

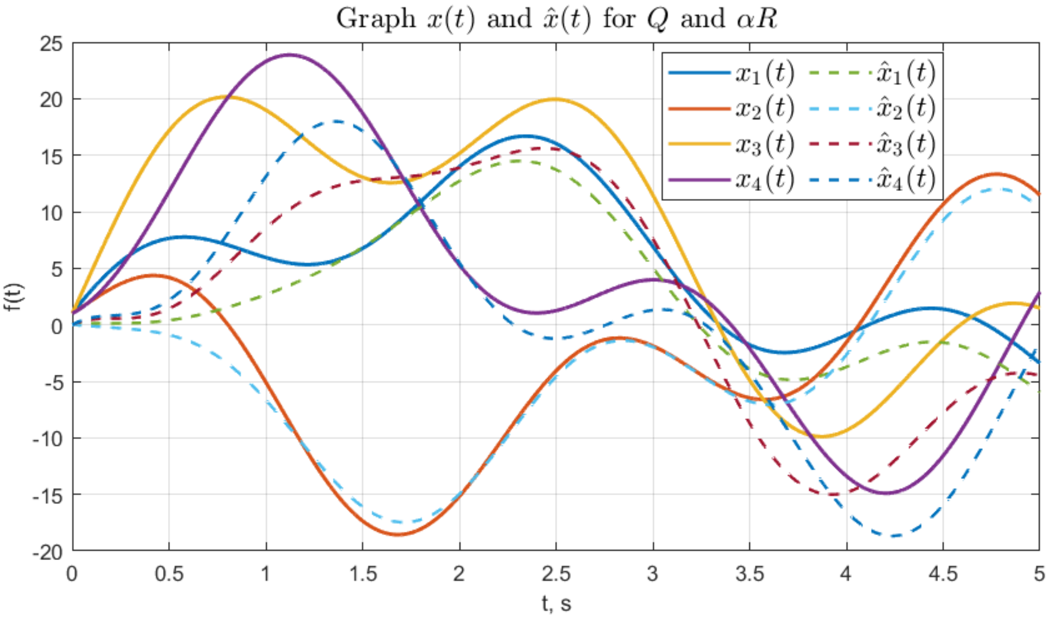

Рисунок 12 — Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ при Q и αR.

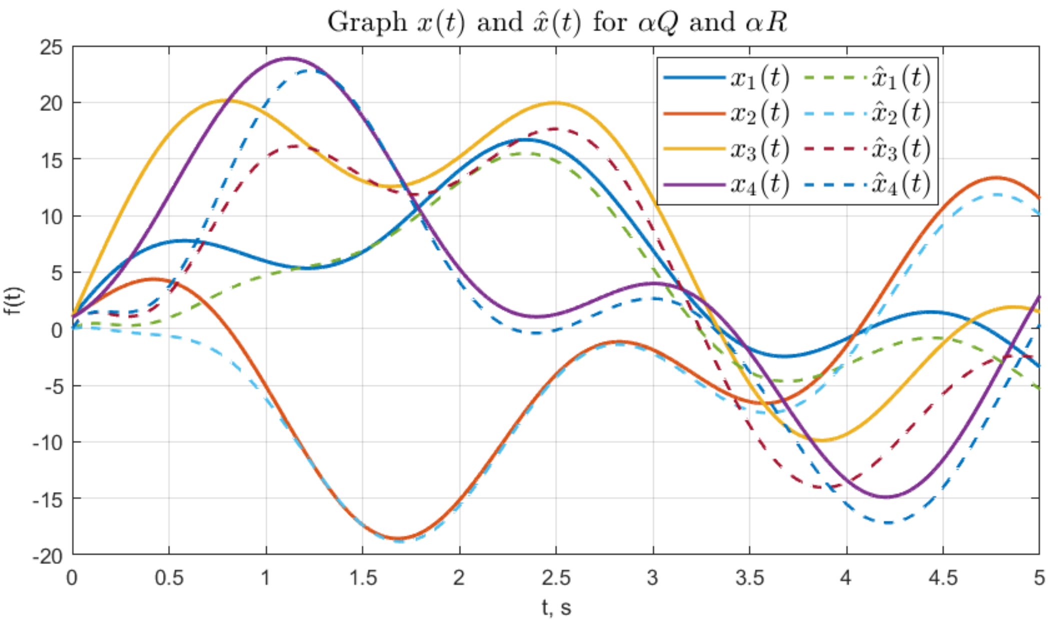

Рисунок 13 — Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ при αQ и αR.

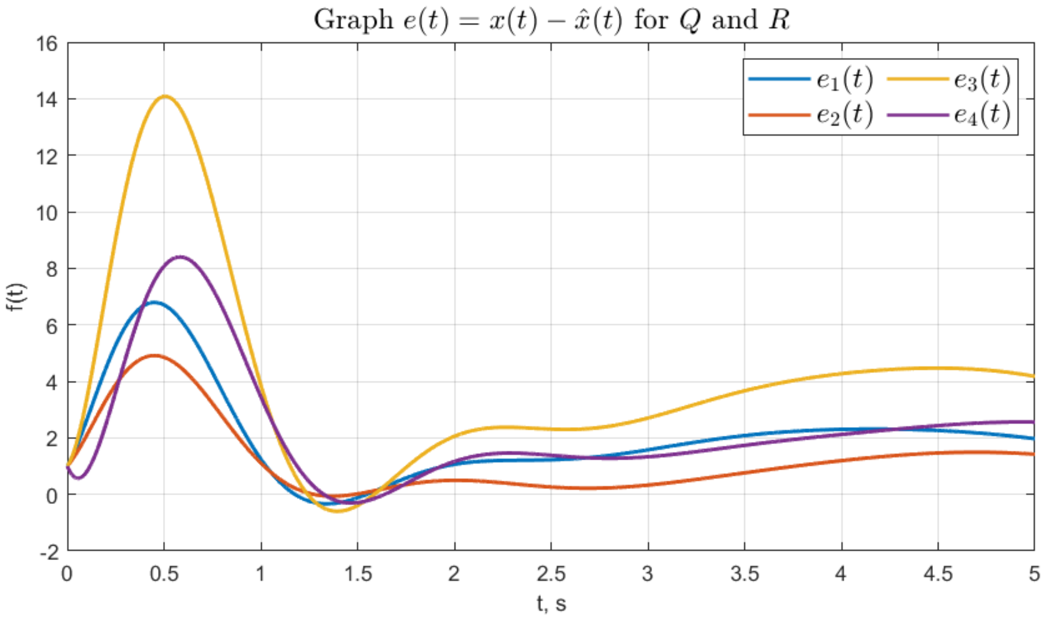

Рисунок 14 — График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ при Q и R.

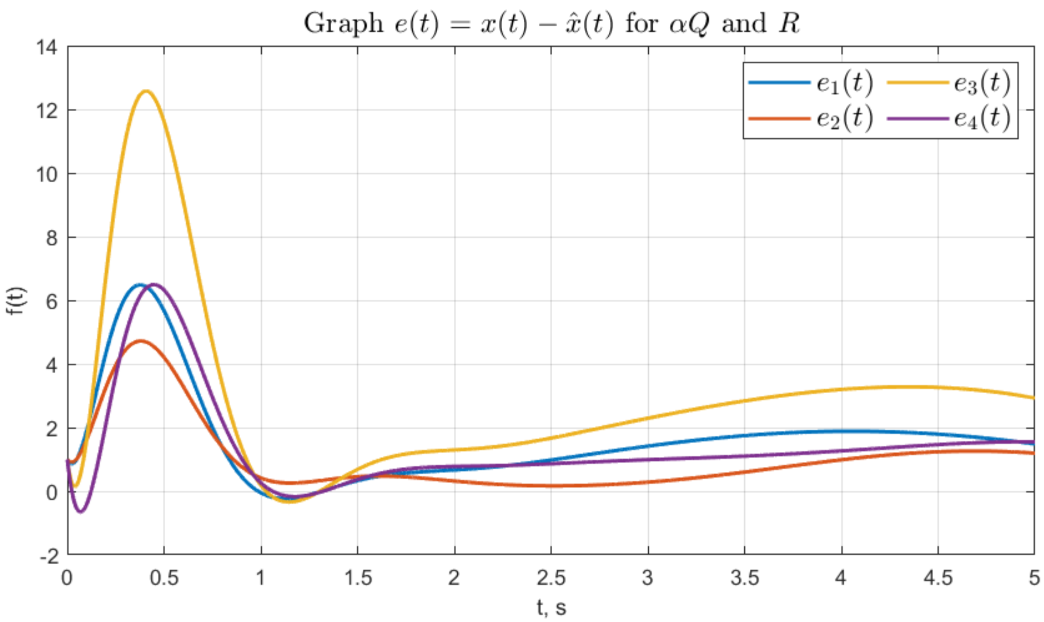

Рисунок 15 — График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ при αQ и R.

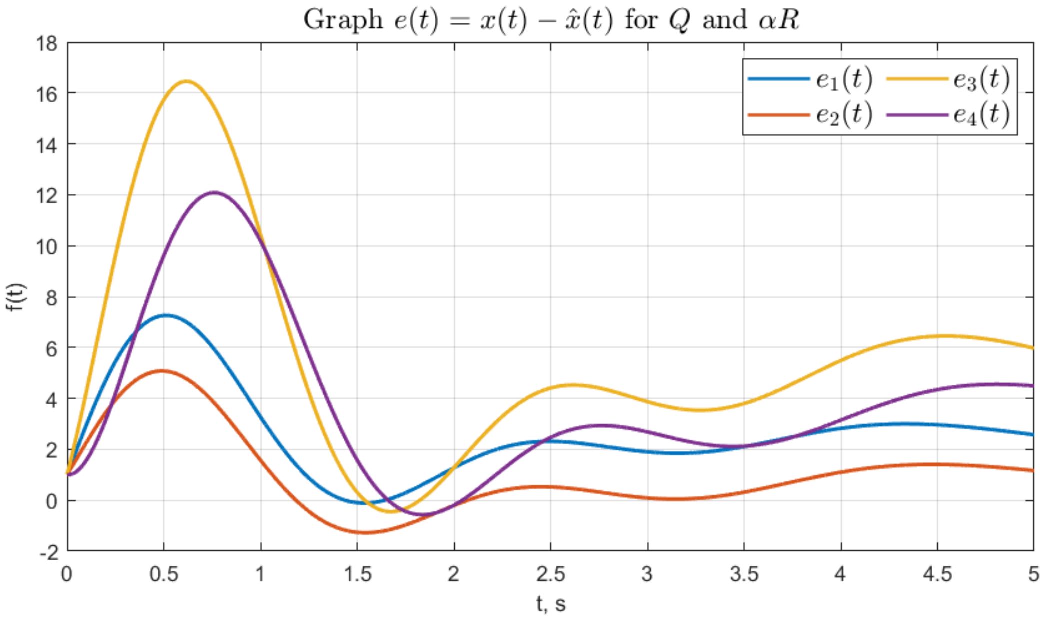

Рисунок 16 — График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ при Q и αR.

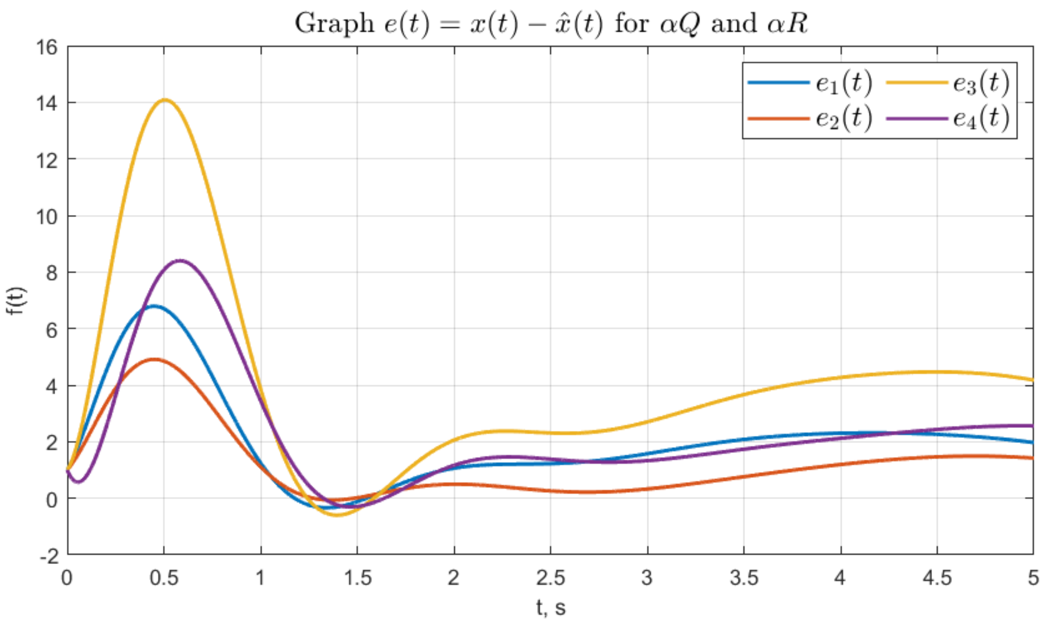

Рисунок 17 — График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ при αQ и αR.

2.6 Анализ результатов

Заметим, что для наборов (Q, R) и $(\alpha Q, \alpha R)$ поведение наблюдателя визуально неразличимы (рисунок 10 и 13 соответственно). Кроме того, графики ошибок схожи между собой (рисунок 14 и 17). Минимальная ошибка наблюдателя характерна для набора $(\alpha Q, R)$, максимальная – $(Q, \alpha R)$. В первом случае мы считаем, что возмущение сильнее влияет на результат, во втором – помеха. В нашем случае возмущение является более значимым фактором, влияющим на результат.

3 СИНТЕЗ LQG

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f \\ y = Cx + Du + \xi \end{cases} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \tag{55}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 0 \\ 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{56}$$

Зададимся случайными сигналами $f(t)$ и $\xi(t)$ (гауссовский белый шум).

$$f(t) \sim \mathcal{N}(0{,}1) \tag{57}$$

$$\xi(t) \sim \mathcal{N}(0{,}0.5) \tag{58}$$

Выполним следующие шаги:

- Проверим систему на стабилизируемость и обнаруживаемость.
- Построим схему моделирования системы (55), замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя и закона управления $u = K\hat{x}$.
- Зададимся значениями пар матриц (Q_K, R_K) для регулятора и (Q_L, R_L) для наблюдателя.
- Синтезируем матрицу регулятора K, используя решение соответствующего матричного уравнения Риккати (3).
- Синтезируем матрицу коррекции наблюдателя L, используя решение соответствующего матричного уравнения Риккати (42).
- Выполним компьютерное моделирование с нулевыми начальными условиями наблюдателя $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Построим график

формируемого регулятором управления $u(t)$, сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

3.1 Стабилизируемость и обнаруживаемость

Проверим систему на стабилизируемость и обнаруживаемость.

3.1.1 Стабилизируемость

Составим матрицу управляемости и найдем ее ранг

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 & 0 & 240 & 0 & 1216 & 0 \\ 6 & 0 & 12 & 0 & 272 & 0 & 1344 & 0 \\ 4 & 0 & -36 & 0 & -112 & 0 & -1728 & 0 \\ 2 & 0 & 44 & 0 & 144 & 0 & 1856 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow rank(U) = 4 \quad (59)$$

Ранг матрицы наблюдаемости равен размерности системы, следовательно, система в целом полностью управляема и стабилизируема.

3.1.2 Обнаруживаемость

Найдем собственные числа матрицы A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 4 \\ \lambda_4 = 8 \end{cases} \quad (60)$$

Определим наблюдаемость каждого из собственных чисел, для этого воспользуемся матрицами наблюдаемости Хаутуса.

Для $\lambda_1 = -4$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad rank(V_1) = 3 \tag{61}$$

Так как ранг V_1 меньше размерности системы, то число λ_1 не наблюдаемо.

Для $\lambda_1 = 0$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad rank(V_2) = 4 \tag{62}$$

Так как ранг V_2 равен размерности системы, то число λ_2 наблюдаемо.

Для $\lambda_3 = 4$

$$V_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad rank(V_3) = 4 \tag{63}$$

Так как ранг V_3 равен размерности системы, то число λ_3 наблюдаемо.

Для $\lambda_4 = 8$

$$V_4 = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad rank(V_4) = 4 \tag{64}$$

Так как ранг V_4 равен размерности системы, то число λ_4 наблюдаемо.

Согласно критерию обнаруживаемости, все неустойчивые собственные числа должны быть наблюдаемы, это верно в нашем случае, следовательно, система обнаруживаема.

3.2 Схема моделирования

Построим схему моделирования системы (55), замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L\left(C\hat{x} + Du - y\right)$ и закона управления $u = K\hat{x}$.

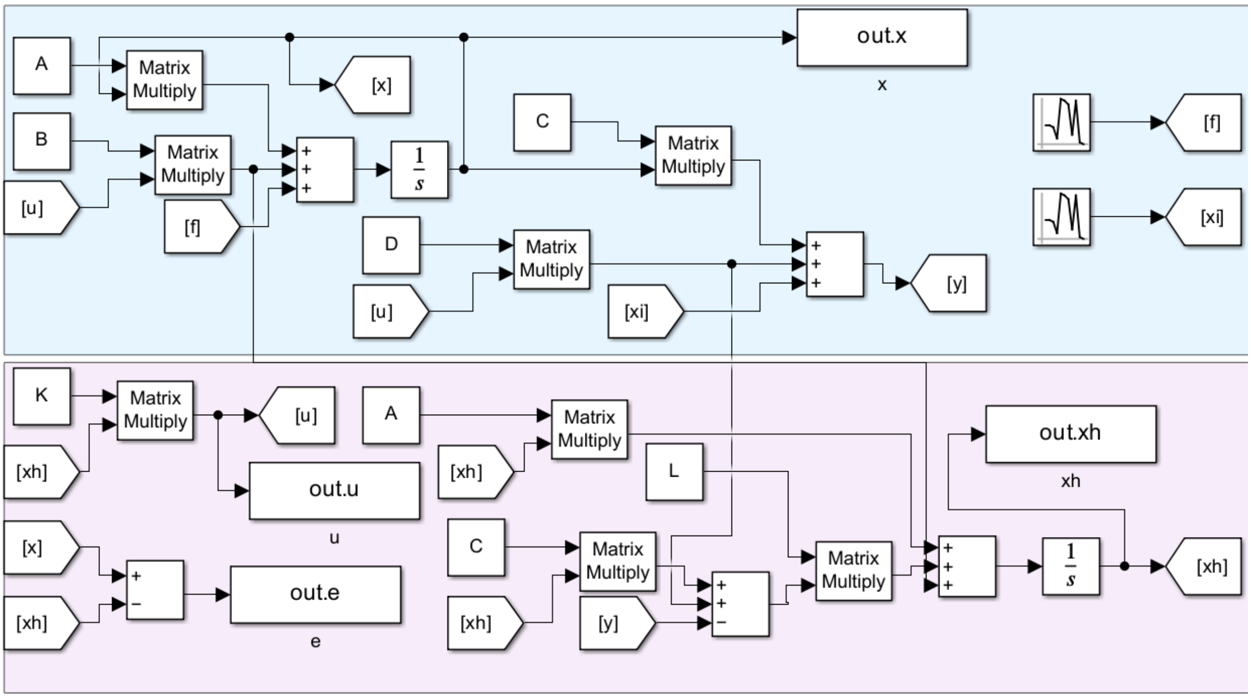

Рисунок 18 — Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя и закона управления $u = K\hat{x}$.

3.3 Наборы параметров

Зададимся значениями пар матриц (Q_K, R_K) для регулятора и (Q_L, R_L) для наблюдателя.

$$Q_K = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{65}$$

Выбор Q_L и R_L опирается на то, что мы задали шумы и помехи с определенной дисперсией.

$$\begin{cases} E\left(f(t)f^T(t)\right) = \delta(t-\tau)\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_4^2 \end{bmatrix} = \delta(t-\tau)Q_L \\ \\ E\left(\xi(t)\xi^T(t)\right) = \delta(t-\tau)\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \delta(t-\tau)R_L \end{cases} \tag{66}$$

С учетом $f(t) \sim \mathcal{N}(0{,}1)$ и $\xi(t) \sim \mathcal{N}(0{,}0.5)$ получаем

$$Q_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_L = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{67}$$

3.4 Синтез регулятора

Синтезируем матрицу регулятора K, используя решение соответствующего матричного уравнения Риккати (3):

$$P = \begin{bmatrix} 339.3214 & -195.0494 & -294.1131 & -156.0911 \\ -195.0494 & 117.0442 & 163.9014 & 89.6462 \\ -294.1131 & 163.9014 & 261.6570 & 135.1953 \\ -156.0911 & 89.6462 & 135.1953 & 75.0003 \end{bmatrix} \tag{68}$$

$$K = -R^{-1}B^TP = \begin{bmatrix} -55.6401 & 23.2323 & 52.4779 & 20.0700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{69}$$

3.5 Синтез наблюдателя

Синтезируем матрицу коррекции наблюдателя L, используя решение соответствующего матричного уравнения Риккати (42):

$$P = \begin{bmatrix} 0.9091 & 0.5297 & -1.0234 & 0.2904 \\ 0.5297 & 1.8822 & -1.2636 & 1.0234 \\ -1.0234 & -1.2636 & 1.8822 & -0.5297 \\ 0.2904 & 1.0234 & -0.5297 & 0.9091 \end{bmatrix} \tag{70}$$

$$L = -PC^T R^{-1} = \begin{bmatrix} -4.7979 & 2.2247 \\ -6.2121 & -2.2247 \\ 6.2121 & -2.2247 \\ -4.7979 & -2.2247 \end{bmatrix} \tag{71}$$

3.6 Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование с нулевыми начальными условиями наблюдателя $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Построим график формируемого регулятором управления $u(t)$, сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

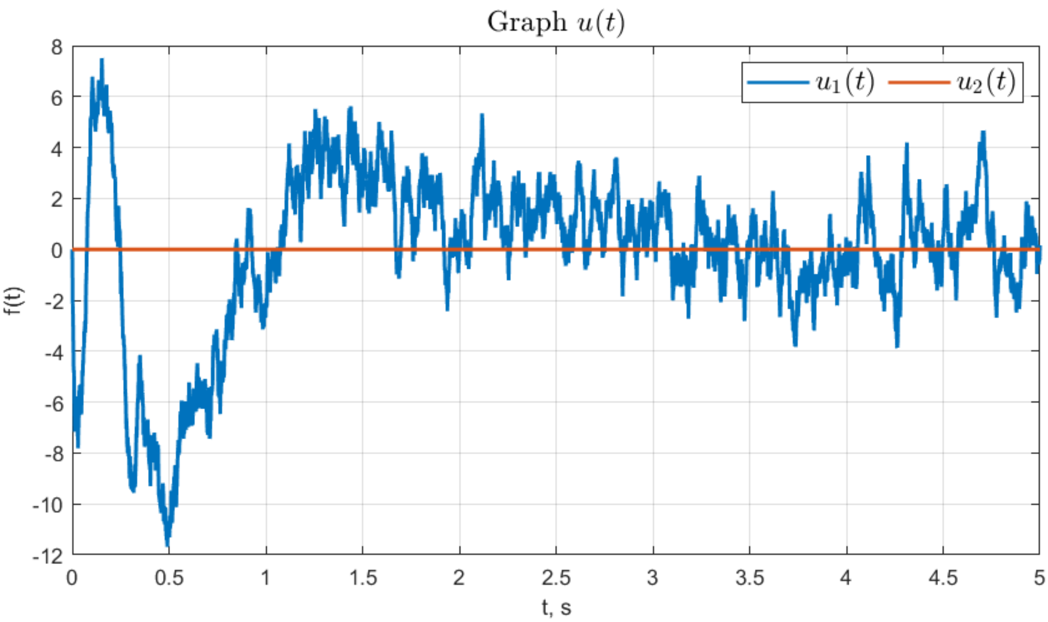

Рисунок 19 — график формируемого регулятором управления $u(t)$.

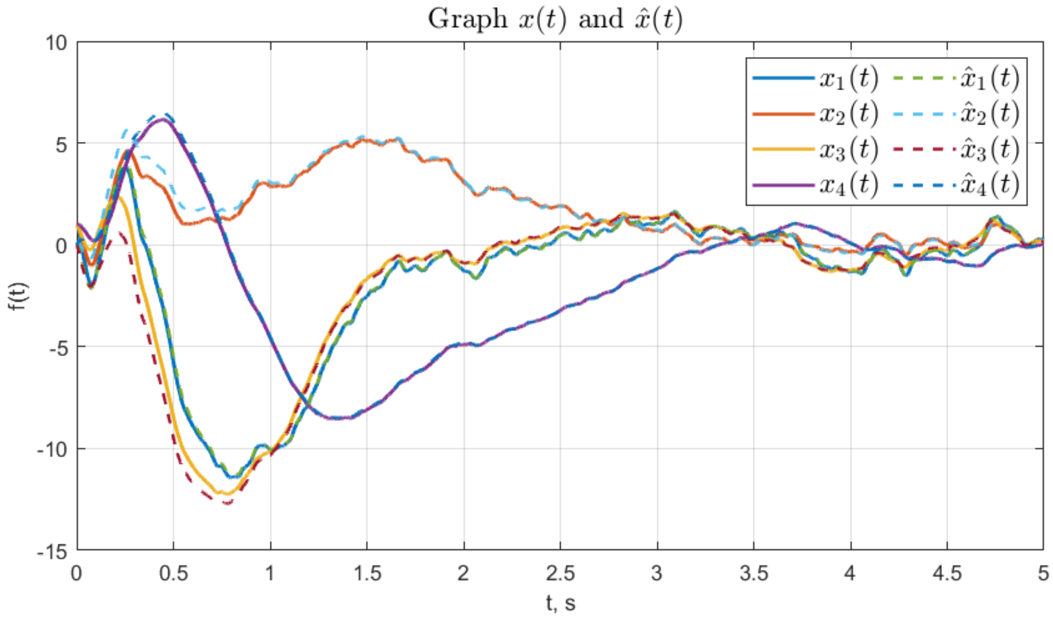

Рисунок 20 — Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$.

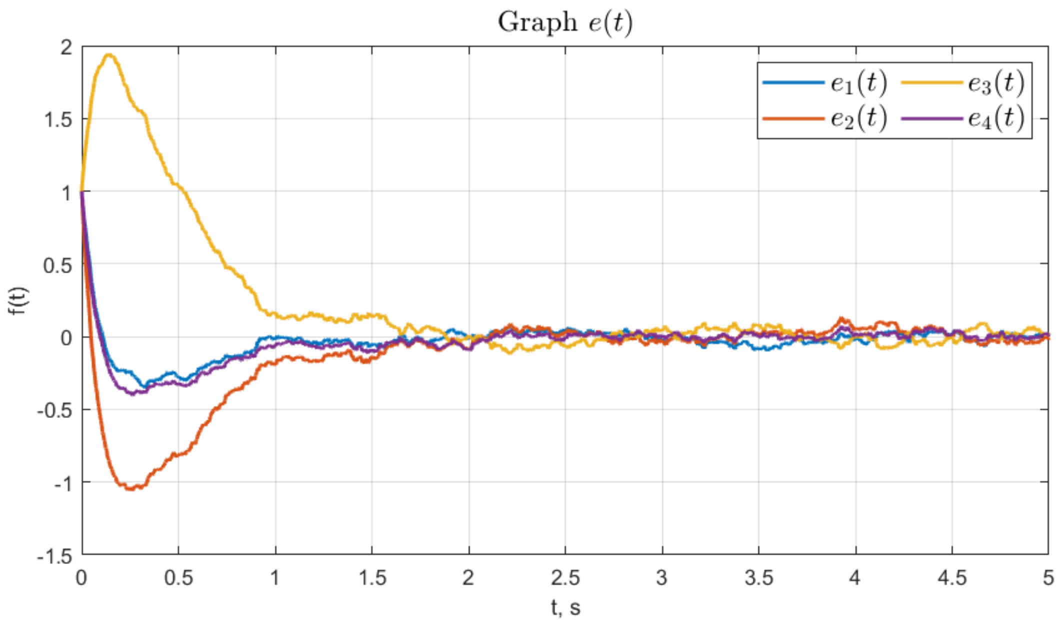

Рисунок 21 — График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

3.7 Анализ результатов

Наблюдатель довольно качественно отслеживает сигнал, на рисунке 21 заметно, что со второй секунды моделирования ошибка по модулю около 0.1. График вектора состояния системы (рисунок 20) стремится к нулю, но остаются небольшие случайные всплески, до единицы по модулю, что соответствует значению дисперсии для случайного сигнала f.

4 ВЫВОД

В ходе выполнения лабораторной работы были применены на практике знания о линейно-квадратичных регуляторах и наблюдателях. В первом задании был синтезирован регулятор (LQR), продемонстрировано влияние параметров на характер процесса стабилизации системы. Во втором задании исследован (LQE) в условиях детерминированных возмущений и помех. Так же исследовано влияние параметров на точность наблюдателя. Выяснено, что из всех рассмотренных вариантов, наиболее точен тот, где внешнее возмущение подавляется сильнее помехи. В последнем задании был синтезирован регулятор, состоящий из наблюдателя и закона управления. Внешнее воздействие представлено гауссовким белым шумом. В итоге вектор состояния замкнутой системы стремился к нулю с точностью до случайных всплесков, находящихся в пределах дисперсии внешнего возмущения.