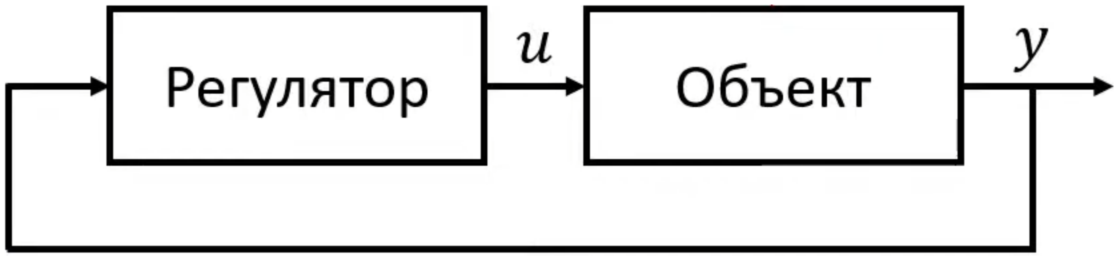
Теория автоматического управления

Слежение и компенсация:

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона

Стабилизация

Стабилизация

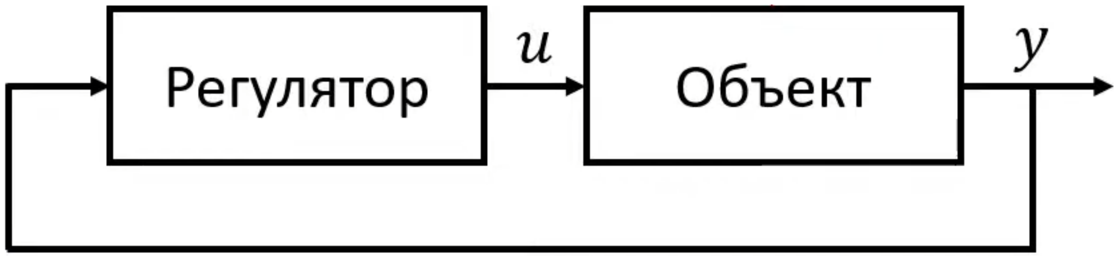


Цель управления

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

Стабилизация

Стабилизация



Цель управления

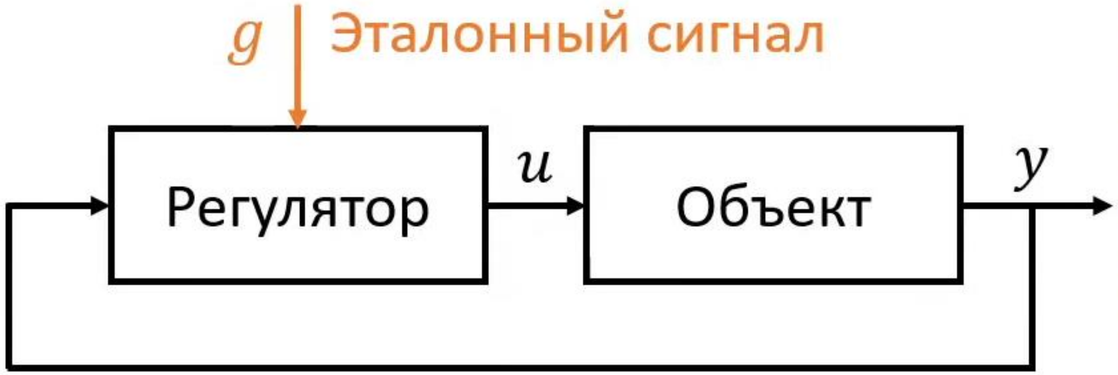
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

Без предварительного решения задачи стабилизации невозможно решить производные задачи слежения и компенсации

Слежение и компенсация: постановка задачи

Один из подходов к решению этих задач приведен в Лекции 12

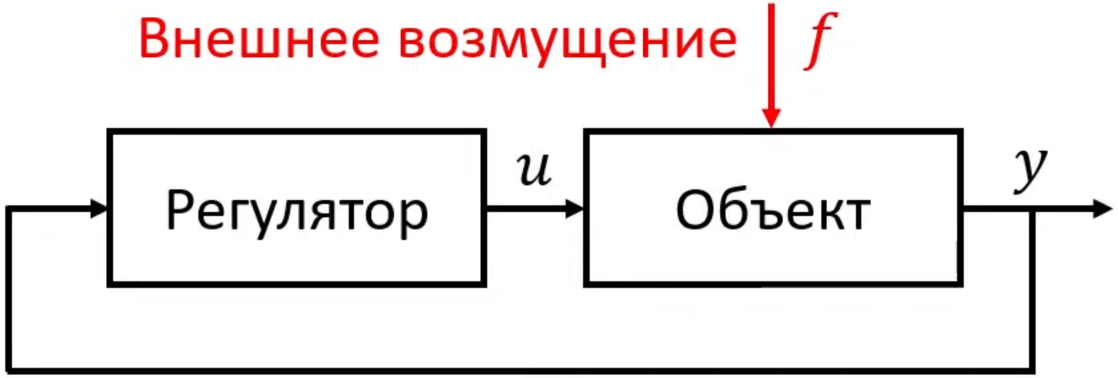
Слежение



Цель управления

$$\lim_{t\to\infty}\big(y(t) - g(t)\big) = 0$$

Компенсация



Цель управления

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

Задачи слежения и компенсации дуальные

Слежение и компенсация: постановка задачи

Слежение

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |g(t) - y(t)| = 0$$

Задающее воздействие:

$$\begin{cases} \dot{w}_g = \Gamma_g w_g \\ g = Y_g w_g \end{cases}, \quad w_g(0)$$

Компенсация

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f f \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$$

Возмущение:

$$\begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases}, \quad w_f(0)$$

Эталонная модель (желаемая замкнутая система):

$$\begin{cases} \dot{w} = \Gamma w \\ v = Y w \end{cases}$$

Допущение: Сигналы x, w_g, w_f доступны к прямому измерению.

Матрицы $\Gamma_g, \Gamma_f, Y_g, Y_f$ известны

Слежение и компенсация: постановка задачи

Слежение

Объект управления:

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases}$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |g(t) - y(t)| = 0$$

Задающее воздействие:

$$\boxed{\begin{cases}\dot{w}_g = \Gamma_g w_g \\ g = Y_g w_g\end{cases}, \quad w_g(0)}$$

Компенсация

Объект управления:

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu + B_f f \\ y = Cx + Du\end{cases}$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$$

Возмущение:

$$\boxed{\begin{cases}\dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f\end{cases}, \quad w_f(0)}$$

Эталонная модель (желаемая замкнутая система):

$$\boxed{\begin{cases}\dot{w} = \Gamma w \\ v = Yw\end{cases}}$$

Допущение: Сигналы x, w_g, w_f доступны к прямому измерению.

Матрицы $\Gamma_g, \Gamma_f, Y_g, Y_f$ известны

Что имеется ввиду?

Эталонная модель и модель внешних воздействий

Эталонная модель – это математическая модель, описывающая желаемое поведения САУ в соответствии с требуемыми динамическими показателями качества.

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В.
«Проектирование регуляторов систем управления.»

Эталонная модель и модель внешних воздействий

Эталонная модель – это математическая модель, описывающая желаемое поведения САУ в соответствии с требуемыми динамическими показателями качества.

С лекции 8:

Для регулятора:

Пусть матрица Γ такова, что $\sigma(\Gamma) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

желаемый спектр

При каком условии $\sigma(A + BK) = \sigma(\Gamma)$?

Для наблюдателя:

Пусть матрица Γ такова, что $\sigma(\Gamma) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

желаемый спектр

При каком условии $\sigma(A + LC) = \sigma(\Gamma)$?

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. «Проектирование регуляторов систем управления.»

Эталонная модель и модель внешних воздействий

Эталонная модель – это математическая модель, описывающая желаемое поведения САУ в соответствии с требуемыми динамическими показателями качества.

$$\begin{cases} \dot{w} = \Gamma w \\ v = Y w \end{cases}$$

Пусть матрица Γ такова, что $\sigma(\Gamma) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

желаемый спектр

Пара (Γ, Y) по сути задает желаемый эталон

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. «Проектирование регуляторов систем управления.»

Эталонная модель и модель внешних воздействий

Эталонная модель – это математическая модель, описывающая желаемое поведения САУ в соответствии с требуемыми динамическими показателями качества.

$$\begin{cases} \dot{w} = \Gamma w \\ v = Y w \end{cases}$$

Пусть матрица Γ такова, что $\sigma(\Gamma) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

желаемый спектр

При каком условии $\sigma(A + BK) = \sigma(\Gamma)$?

Пара (Γ, Y) по сути задает желаемый эталон

При каком условии $\sigma(A + LC) = \sigma(\Gamma)$?

Вспомните «автономные генераторы» с ЛСАУ, по сути мы сводим системы к такому виду

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. «Проектирование регуляторов систем управления.»

Эталонная модель и модель внешних воздействий

Задающее воздействие:

$$\begin{cases} \dot{w}_g = \Gamma_g w_g \\ g = Y_g w_g \end{cases},$$

$$w_g(0)$$

Почему именно в такой форме?

Возмущение:

$$\begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases},$$

$$w_f(0)$$

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. «Проектирование регуляторов систем управления.»

Эталонная модель и модель внешних воздействий

Задающее воздействие:

$$\begin{cases} \dot{w}_g = \Gamma_g w_g \\ g = Y_g w_g \end{cases},$$

$$w_g(0)$$

Почему именно в такой форме?

Возмущение:

$$\begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases},$$

$$w_f(0)$$

1. Задача слежения или компенсации может быть решена только для **детерминированных** (не случайных) сигналов;
2. Мы работаем в парадигме линейных систем, любые рассматриваемые сигналы должны быть способны порождаться линейными системами.

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. «Проектирование регуляторов систем управления.»

Эталонная модель и модель внешних воздействий

Задающее воздействие:

$$\begin{cases} \dot{w}_g = \Gamma_g w_g \\ g = Y_g w_g \end{cases},$$

$$w_g(0)$$

Почему именно в такой форме?

Возмущение:

$$\begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases},$$

$$w_f(0)$$

Математическое условие осмысленности задачи слежения/компенсации:

$$\sigma(\Gamma_{g/f}) \in \bar{\mathbb{C}}_+,$$

т.е. *система не асимптотически устойчива.*

Звучит на Лекции 12

Иначе нет смысла: внешний сигнал сам затухнет и достаточно просто стабилизировать систему и подождать, асимптотика справится.

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. «Проектирование регуляторов систем управления.»

Эталонная модель и модель внешних воздействий

Задающее воздействие:

$$\begin{cases} \dot{w}_g = \Gamma_g w_g \\ g = Y_g w_g \end{cases}, \quad w_g(0)$$

Почему именно в такой форме?

Возмущение:

$$\begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases}, \quad w_f(0)$$

С практической точки зрения же все сигналы внутри замкнутой системе должны оставаться ограниченными. Если у вас где-то при решении задачи управление или какое-то состояние будет уходить на бесконечность, то объект управления «порвет»

стабилизировать систему и подождать, асимптотика справится.

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. «Проектирование регуляторов систем управления.»

Эталонная модель и модель внешних воздействий

Задающее воздействие:

$$\begin{cases} \dot{w}_g = \Gamma_g w_g \\ g = Y_g w_g \end{cases},$$

$$w_g(0)$$

Почему именно в такой форме?

Возмущение:

$$\begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases},$$

$$w_f(0)$$

Если генератор задает ограниченное воздействие (система устойчива по Ляпунову), то с высокой вероятностью задача решаема с точки зрения практики (но и то не всегда, есть некоторые нюансы)

объект управления «порвет»

стабилизировать систему и подождать, асимптотика справится.

Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. «Проектирование регуляторов систем управления.»

Два вида компенсации

Компенсация по выходу

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du + D_f f \end{cases}$$

Возмущение:

$$\begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases}, \quad w_f(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$$

Компенсация по входу

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f f \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Возмущение:

$$\begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases}, \quad w_f(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$$

Эталонная модель (желаемая замкнутая система):

$$\begin{cases} \dot{w} = \Gamma w \\ v = Yw \end{cases}$$

Допущение: Сигналы x, w_f доступны к прямому измерению.

Матрицы Γ_f, Y_f известны

Два вида компенсации

Компенсация по выходу

Возмущение вмешалось в выход

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du + D_f f \end{cases}$$

Возмущение:

$$\begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases}, \quad w_f(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$$

Компенсация по входу

Возмущение идет на вход

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f f \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Возмущение:

$$\begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases}, \quad w_f(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$$

Эталонная модель (желаемая замкнутая система):

$$\begin{cases} \dot{w} = \Gamma w \\ v = Y w \end{cases}$$

Допущение: Сигналы x, w_f доступны к прямому измерению.

Матрицы Γ_f, Y_f известны

Два вида компенсации

Компенсация по выходу

Возмущение вмешалось в выход

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du + D_f f \end{cases}$$

Возмущение:

$$\begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases}, \quad w_f(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$$

Может быть сведена к задаче слежения!

Компенсация по входу

Возмущение идет на вход

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f f \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Возмущение:

$$\begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases}, \quad w_f(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$$

ная модель (желаемая замкнутая система):

$$\begin{cases} \dot{w} = \Gamma w \\ v = Y w \end{cases}$$

Допущение: Сигналы x, w_f доступны к прямому измерению.

Матрицы Γ_f, Y_f известны

Два вида компенсации

Эквивалентно

Компенсация по выходу

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du + D_f f \end{cases}$$

Возмущение:

$$\begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases}, \quad w_f(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$$

«Слежение»

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

«Задающее воздействие»:

$$\begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f' = -D_f Y_f w_f \end{cases}, \quad w_f(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |f'(t) - y(t)| = 0$$

Эталонная модель (желаемая замкнутая система):

$$\begin{cases} \dot{w} = \Gamma w \\ v = Yw \end{cases}$$

Допущение: Сигналы x, w_f доступны к прямому измерению.

Матрицы Γ_f, Y_f известны

Слежение и ком

Поэтому спокойно возвращаемся к исходной постановке и решаем задачи

Слежение

Объект управления:

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu\\ y = Cx + Du\end{cases}$$

Задающее воздействие:

$$\begin{cases}\dot{w}_g = \Gamma_g w_g\\ g = Y_g w_g\end{cases},$$

$$w_g(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty}|g(t) - y(t)| = 0$$

Компенсация (по входу)

Объект управления:

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu + B_f f\\ y = Cx + Du\end{cases}$$

Возмущение:

$$\begin{cases}\dot{w}_f = \Gamma_f w_f\\ f = Y_f w_f\end{cases},$$

$$w_f(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty}|y(t)| = 0$$

Эталонная модель (желаемая замкнутая система):

$$\begin{cases}\dot{w} = \Gamma w\\ v = Yw\end{cases}$$

Допущение: Сигналы x, w_g, w_f доступны к прямому измерению.

Матрицы $\Gamma_g, \Gamma_f, Y_g, Y_f$ известны

Слежение и компенсация: постановка задачи

Слежение

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Задающее воздействие:

$$\begin{cases} \dot{w}_g = \Gamma_g w_g \\ g = Y_g w_g \end{cases}, \quad w_g(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |g(t) - y(t)| = 0$$

Компенсация (по входу)

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f f \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Возмущение:

$$\begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases}, \quad w_f(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$$

Эталонная модель (желаемая замкнутая система):

$$\begin{cases} \dot{w} = \Gamma w \\ v = Y w \end{cases}$$

Допущение: Сигналы x, w_g, w_f доступны к прямому измерению.

Матрицы $\Gamma_g, \Gamma_f, Y_g, Y_f$ известны

Слежение и компенсация: постановка задачи

Слежение

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Задающее воздействие:

$$\begin{cases} \dot{w}_g = \Gamma_g w_g \\ g = Y_g w_g \end{cases},$$

$$w_g(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |g(t) - y(t)| = 0$$

Компенсация (по входу)

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f f \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Возмущение:

$$\begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases},$$

$$w_f(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$$

Эталонная модель (желаемая замкнутая система):

$$\begin{cases} \dot{w} = \Gamma w \\ v = Y w \end{cases}$$

Модель ошибок:

$$\begin{cases} e = P_g w_g - x \\ \varepsilon = g - y \end{cases}$$

Модель ошибок:

$$\begin{cases} e = P_f w_f - x \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Допущ… w_g, w_f доступны к прям…

Матрицы $\Gamma_g, \Gamma_f, Y_g, Y_f$ известны

Слежение и компенсация: постановка задачи

Слежение

Объект управления:

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu\\ y = Cx + Du\end{cases}$$

Задающее воздействие:

$$\begin{cases}\dot{w}_g = \Gamma_g w_g\\ g = Y_g w_g\end{cases},$$

$$w_g(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty}|g(t) - y(t)| = 0$$

Компенсация (по входу)

Объект управления:

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu + B_f f\\ y = Cx + Du\end{cases}$$

Возмущение:

$$\begin{cases}\dot{w}_f = \Gamma_f w_f\\ f = Y_f w_f\end{cases},$$

$$w_f(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty}|y(t)| = 0$$

Эталонная модель (желаемая замкнутая система):

Модель ошибок:

$$\begin{cases}e = P_g w_g - x\\ \varepsilon = g - y\end{cases}$$

Вспомогательная цель

Основная цель

Модель ошибок:

$$\begin{cases}e = P_f w_f - x\\ y = Cx + Du\end{cases}$$

Слежение и компенсация: постановка задачи

Слежение

Объект управления:

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases}$$

Задающее воздействие:

$$\begin{cases}\dot{w}_g = \Gamma_g w_g \\ \ldots\end{cases}$$

Цель управления:

$\lim\limits_{t\to\infty} |g \ldots$

Компенсация (по входу)

Объект управления:

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu + B_f f \\ y = Cx + Du\end{cases}$$

Возмущение:

$$\begin{cases}\dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ \ldots\end{cases}$$

Цель управления:

Первый смысл «вспомогательной цели»:

w_g/w_f линейно зависимы с x, но находятся в другом базисе;

P_g/P_f – матрицы перехода в базис системы, их нужно найти

Модель ошибок:

$$\begin{cases}e = P_g w_g - x \\ \varepsilon = g - y\end{cases}$$

Вспомогательная цель

Основная цель

Модель ошибок:

$$\begin{cases}e = P_f w_f - x \\ y = Cx + Du\end{cases}$$

Слежение и компенсация: постановка задачи

Слежение

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Задающее воздействие:

$$\begin{cases} \dot{w}_g = \Gamma_g w_g \\ g = Y_g w_g \end{cases}, \quad w_g(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |g(t) - y(t)| = 0$$

Компенсация (по входу)

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f f \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Возмущение:

$$\begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases}, \quad w_f(0)$$

Цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$$

Второй смысл «вспомогательной цели»

Модель ошибок:

$$\begin{cases} e = P_g w_g - x \\ \varepsilon = g - y \end{cases}$$

Стабилизация

Слежение/

Компенсация

Модель ошибок:

$$\begin{cases} e = P_f w_f - x \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} e = P_g w_g - x \\ \varepsilon = g - y \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} e = P_f w_f - x \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} e = P_g w_g - x \\ \varepsilon = g - y \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{e} = P_g \dot{w}_g - \dot{x} \\ \varepsilon = Y_g w_g - Cx - Du \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} e = P_f w_f - x \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{e} = P_f \dot{w}_f - \dot{x} \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Рассмотрим динамику

$$\begin{cases} \dot{w}_g = \Gamma_g w_g \\ g = Y_g w_g \end{cases}, \quad w_g(0) \qquad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases}, \quad w_f(0)$$

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} e = P_g w_g - x \\ \varepsilon = g - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{e} = P_g \Gamma_g w_g - Ax - Bu \\ \varepsilon = Y_g w_g - Cx - Du \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} e = P_f w_f - x \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{e} = P_f \Gamma_f w_f - Ax - Bu - B_f Y_f w_f \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Рассмотрим динамику

$$\begin{cases} \dot{w}_g = \Gamma_g w_g \\ g = Y_g w_g \end{cases}, \quad w_g(0) \qquad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{w}_f = \Gamma_f w_f \\ f = Y_f w_f \end{cases}, \quad w_f(0)$$

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} e = P_g w_g - x \\ \varepsilon = g - y \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{e} = P_g \Gamma_g w_g - Ax - Bu \\ \varepsilon = Y_g w_g - Cx - Du \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{e} = P_g \Gamma_g w_g - A(P_g w_g - e) - Bu \\ \varepsilon = Y_g w_g - C(P_g w_g - e) - Du \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} e = P_f w_f - x \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{e} = P_f \Gamma_f w_f - Ax - Bu - B_f Y_f w_f \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{e} = P_f \Gamma_f w_f - A(P_f w_f - e) - Bu - \\ \quad - B_f Y_f w_f \\ y = C(P_f w_f - e) + Du \end{cases}$$

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} e = P_g w_g - x \\ \varepsilon = g - y \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{e} = P_g \Gamma_g w_g - Ax - Bu \\ \varepsilon = Y_g w_g - Cx - Du \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{e} = P_g \Gamma_g w_g - A\left(P_g w_g - e\right) - Bu \\ \varepsilon = Y_g w_g - C\left(P_g w_g - e\right) - Du \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + \left(P_g \Gamma_g - AP_g\right) w_g - Bu \\ \varepsilon = Ce + \left(Y_g - CP_g\right) w_g - Du \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} e = P_f w_f - x \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{e} = P_f \Gamma_f w_f - Ax - Bu - B_f Y_f w_f \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{e} = P_f \Gamma_f w_f - A\left(P_f w_f - e\right) - Bu - \\ \quad - B_f Y_f w_f \\ y = C\left(P_f w_f - e\right) + Du \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + \left(P_f \Gamma_f - AP_f - B_f Y_f\right) w_f - \\ \quad - Bu \\ y = CP_f w_f - Ce + Du \end{cases}$$

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + \left(P_g\Gamma_g - AP_g\right)w_g - Bu \\ \varepsilon = Ce + \left(Y_g - CP_g\right)w_g - Du \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + \left(P_f\Gamma_f - AP_f - B_fY_f\right)w_f - \\ -Bu \\ y = CP_fw_f - Ce + Du \end{cases}$$

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + \left(P_g\Gamma_g - AP_g\right)w_g - Bu \\ \varepsilon = Ce + \left(Y_g - CP_g\right)w_g - Du \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + \left(P_f\Gamma_f - AP_f - B_fY_f\right)w_f - \\ \quad -Bu \\ y = CP_fw_f - Ce + Du \end{cases}$$

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона:

$$\begin{cases} P_g\Gamma_g - AP_g = BK_g \\ Y_g - CP_g = DK_g \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_f\Gamma_f - AP_f - B_fY_f = BK_f \\ -CP_f = DK_f \end{cases}$$

Решение **системы** уравнений даст P_g/ P_f и K_g/ K_f

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_g w_g - Bu \\ \varepsilon = Ce + DK_g w_g - Du \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_f w_f - Bu \\ y = -DK_f w_f - Ce + Du \end{cases}$$

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона:

$$\begin{cases} P_g\Gamma_g - AP_g = BK_g \\ Y_g - CP_g = DK_g \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_f\Gamma_f - AP_f - B_f Y_f = BK_f \\ -CP_f = DK_f \end{cases}$$

Francis B. A. *The linear multivariable regulator problem* //SIAM Journal on Control and Optimization. – 1977. – Т. 15. – №. 3. – С. 486-505.

Davison E. *The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems* //IEEE transactions on Automatic Control. – 1976. – Т. 21. – №. 1. – С. 25-34.

Francis B. A., Wonham W. M. *The internal model principle of control theory* //Automatica. – 1976. – Т. 12. – №. 5. – С. 457-465.

Isidori A. *Lectures in feedback design for multivariable systems.* – Basel, Switzerland : Springer International Publishing, 2017.

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_g w_g - Bu \\ \varepsilon = Ce + DK_g w_g - Du \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_f w_f - Bu \\ y = -DK_f w_f - Ce + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_g \Gamma_g \\ Y_g \end{cases}$$

Про «принцип внутренней модели» уже звучало на курсе ЛСАУ от Алексея Алексеевича

Однако по настоящему себя принцип проявляет при управлении **по выходу**, сейчас рассматриваем случай **по состоянию**

Francis B. A. *The linear multivariable regulator problem* //SIAM Journal on Control and Optimization. – 1977. – Т. 15. – №. 3. – С. 486-505.
Davison E. *The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems* //IEEE transactions on Automatic Control. – 1976. – Т. 21. – №. 1. – С. 25-34.
Francis B. A., Wonham W. M. ***The internal model principle*** *of control theory* //Automatica. – 1976. – Т. 12. – №. 5. – С. 457-465.
Isidori A. *Lectures in feedback design for multivariable systems.* – Basel, Switzerland : Springer International Publishing, 2017.

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_g w_g - Bu \\ \varepsilon = Ce + DK_g w_g - Du \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_f w_f - Bu \\ y = -DK_f w_f - Ce + Du \end{cases}$$

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона (общий вид):

$$\begin{cases} AP + BK + Y_1 = P\Gamma \\ CP + DK + Y_2 = 0 \end{cases}$$

Решение относительно P и K для произвольных Y_1 и Y_2 есть, если:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A - I\lambda_{i\Gamma} & B \\ C & D \end{bmatrix} = \text{число строк}, \quad \begin{matrix} \lambda_{i\Gamma} - \text{собственные числа } \Gamma \\ W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \end{matrix}$$

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_g w_g - Bu \\ \varepsilon = Ce + DK_g w_g - Du \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_f w_f - Bu \\ y = -DK_f w_f - Ce + Du \end{cases}$$

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона (общий вид):

$$\begin{cases} AP + BK + Y_1 = P\Gamma \\ CP + DK + Y_2 = 0 \end{cases}$$

Как это понимать?

Решение относительно P и K для произвольных Y_1 и Y_2 есть, если:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A - I\lambda_{i\Gamma} & B \\ C & D \end{bmatrix} = \text{число строк},\quad \begin{array}{c} \lambda_{i\Gamma} - \text{собственные числа } \Gamma \\ W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \end{array}$$

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_g w_g - Bu \\ \varepsilon = Ce + DK_g w_g - Du \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_f w_f - Bu \\ y = -DK_f w_f - Ce + Du \end{cases}$$

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона (общий вид):

$$\begin{cases} AP + BK + Y_1 = P\Gamma \\ CP + DK + Y_2 = 0 \end{cases}$$

Как это понимать?

Следствие:

1. Множество нулей системы $W(s)$ не пересекается со спектром Γ;
2. Система $W(s)$ полностью управляема по выходу;
3. Количество входов равно или больше количества выходов системы;
4. Если количество входов равно количеству выходов, то система $W(s)$ должна быть невырожденной

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_g w_g - Bu \\ \varepsilon = Ce + DK_g w_g - Du \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_f w_f - Bu \\ y = -DK_f w_f - Ce + Du \end{cases}$$

В общем случае метод выводился для многоканальных систем (Multi-Input-Multi-Output)
Для одноканальных упрощается

...анкиса-Дэвисона (общий вид):

$$\ldots K + Y_1 = P\Gamma$$

$$\ldots K + Y_2 = 0$$

Следствие:

1. Множество нулей системы $W(s)$ не пересекается со спектром Γ;
2. Система $W(s)$ полностью управляема по выходу;
3. Количество входов равно или больше количества выходов системы;
4. Если количество входов равно количеству выходов, то система $W(s)$ должна быть невырожденной

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_g w_g - Bu \\ \varepsilon = Ce + DK_g w_g - Du \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_f w_f - Bu \\ y = -DK_f w_f - Ce + Du \end{cases}$$

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона (общий вид):

$$\begin{cases} AP + BK + Y_1 = P\Gamma \\ CP + DK + Y_2 = 0 \end{cases}$$

Чем-то похоже на Сильвестра

Следствие:

1. Множество нулей системы $W(s)$ не пересекается со спектром Γ;
2. Система $W(s)$ полностью управляема по выходу;

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_g w_g - Bu \\ \varepsilon = Ce + DK_g w_g - Du \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_f w_f - Bu \\ y = -DK_f w_f - Ce + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_g \Gamma_g - AP_g = BK_g \\ Y_g - CP_g = DK_g \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_f \Gamma_f - AP_f - B_f Y_f = BK_f \\ -CP_f = DK_f \end{cases}$$

Эталонная модель:

$$\begin{cases} \dot{w} = \Gamma w \\ v = Yw \end{cases}$$

Уравнение Сильвестра:

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

Когда уравнение Сильвестра имеет невырожденное решение вы *уже должны знать…*

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_g w_g - Bu \\ \varepsilon = Ce + DK_g w_g - Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_g \Gamma_g - AP_g = BK_g \\ Y_g - CP_g = DK_g \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_f w_f - Bu \\ y = -DK_f w_f - Ce + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_f \Gamma_f - AP_f - B_f Y_f = BK_f \\ -CP_f = DK_f \end{cases}$$

Уравнение Сильвестра:

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

Закон управления:

$$u = -Ke + K_g w_g$$

Закон управления:

$$u = -Ke + K_f w_f$$

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_g w_g + BKe - BK_g w_g \\ \varepsilon = Ce + DK_g w_g + DKe - DK_g w_g \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + BK_f w_f + BKe - BK_f w_f \\ y = -DK_f w_f - Ce - DKe + DK_f w_f \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_g \Gamma_g - AP_g = BK_g \\ Y_g - CP_g = DK_g \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_f \Gamma_f - AP_f - B_f Y_f = BK_f \\ -CP_f = DK_f \end{cases}$$

Уравнение Сильвестра:

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

Закон управления:

$$u = -Ke + K_g w_g$$

Закон управления:

$$u = -Ke + K_f w_f$$

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} \dot{e} = (A + BK)e \\ \varepsilon = (C + DK)e \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_g\Gamma_g - AP_g = BK_g \\ Y_g - CP_g = DK_g \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} \dot{e} = (A + BK)e \\ y = -(C + DK)e \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_f\Gamma_f - AP_f - B_fY_f = BK_f \\ -CP_f = DK_f \end{cases}$$

Уравнение Сильвестра:

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

Закон управления:

$$u = -Ke + K_g w_g$$

Закон управления:

$$u = -Ke + K_f w_f$$

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} \dot{e} = (A + BK)e \\ \varepsilon = (C + DK)e \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} \dot{e} = (A + BK)e \\ y = -(C + DK)e \end{cases}$$

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона:

$$\begin{cases} P_g \Gamma_g - A P_g = B K_g \\ Y_g - C P_g = D K_g \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_f \Gamma_f - A P_f - B_f Y_f = B K_f \\ -C P_f = D K_f \end{cases}$$

Уравнение Сильвестра:

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

Закон управления:

$$u = -Ke + K_g w_g$$

Закон управления:

$$u = -Ke + K_f w_f$$

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} \dot{e} = P^{-1}\Gamma P e \\ \varepsilon = (C + DK)e \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} \dot{e} = P^{-1}\Gamma P e \\ y = -(C + DK)e \end{cases}$$

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона:

$$\begin{cases} P_g\Gamma_g - AP_g = BK_g \\ Y_g - CP_g = DK_g \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_f\Gamma_f - AP_f - B_fY_f = BK_f \\ -CP_f = DK_f \end{cases}$$

Уравнение Сильвестра:

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

Закон управления:

$$u = -Ke + K_g w_g$$

Закон управления:

$$u = -Ke + K_f w_f$$

Слежение и компенсация: синтез

Слежение

$$\begin{cases} \dot{e} = P^{-1}\Gamma P e \\ \varepsilon = (C + DK)e \end{cases}$$

Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} \dot{e} = P^{-1}\Gamma P e \\ y = -(C + DK)e \end{cases}$$

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона:

$$\begin{cases} P_g\Gamma_g - AP_g = BK_g \\ Y_g - CP_g = DK_g \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_f\Gamma_f - AP_f - B_fY_f = BK_f \\ -CP_f = DK_f \end{cases}$$

Стабилизирующий регулятор K можно искать любым желаемым образом:
Задание спектра; Желаемая степень устойчивости; LQR; …

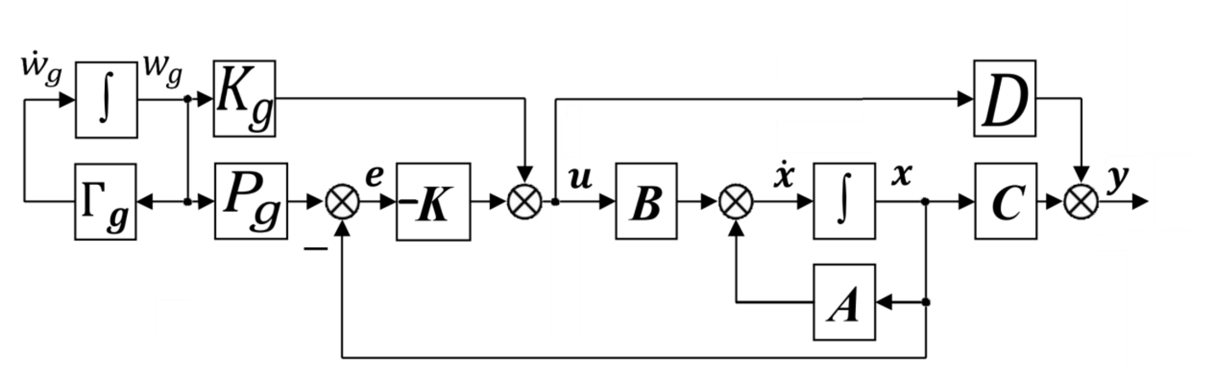
Закон управления:
$u = -Ke + K_g w_g$

Закон управления:
$u = -Ke + K_f w_f$

Слежение и компенсация: синтез

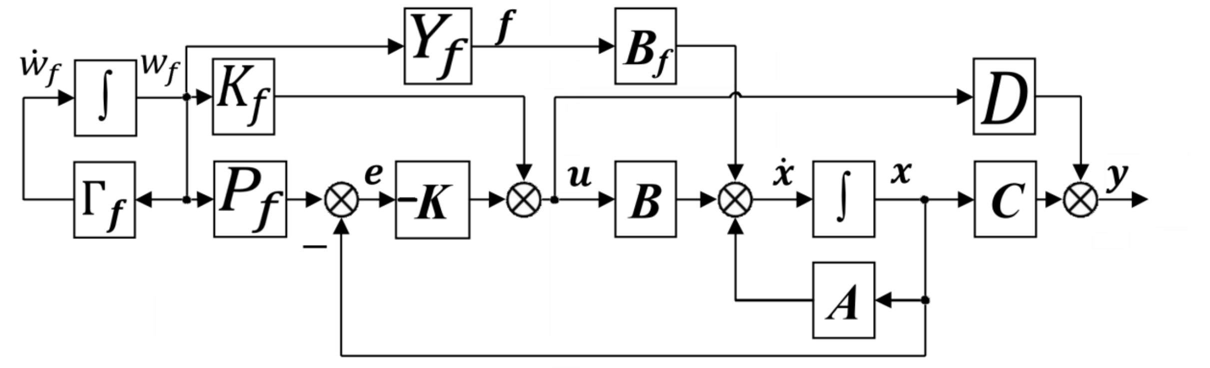
Слежение

$$\begin{cases} \dot{e} = P^{-1}\Gamma P e \\ \varepsilon = (C + DK)e \end{cases}$$



Компенсация (по входу)

$$\begin{cases} \dot{e} = P^{-1}\Gamma P e \\ y = -(C + DK)e \end{cases}$$



Стабилизирующий регулятор K можно искать любым желаемым образом:
Задание спектра; Желаемая степень устойчивости; LQR; …

Закон управления:
$u = -Ke + K_g w_g$

Закон управления:
$u = -Ke + K_f w_f$

Слежение и компенсация: прямые и обратные связи

Альтернативная точка зрения

Слежение

Закон управления:

$u = Kx + K_g w_g$

Компенсация (по входу)

Закон управления:

$u = Kx + K_f w_f$

Слежение и компенсация: прямые и обратные связи

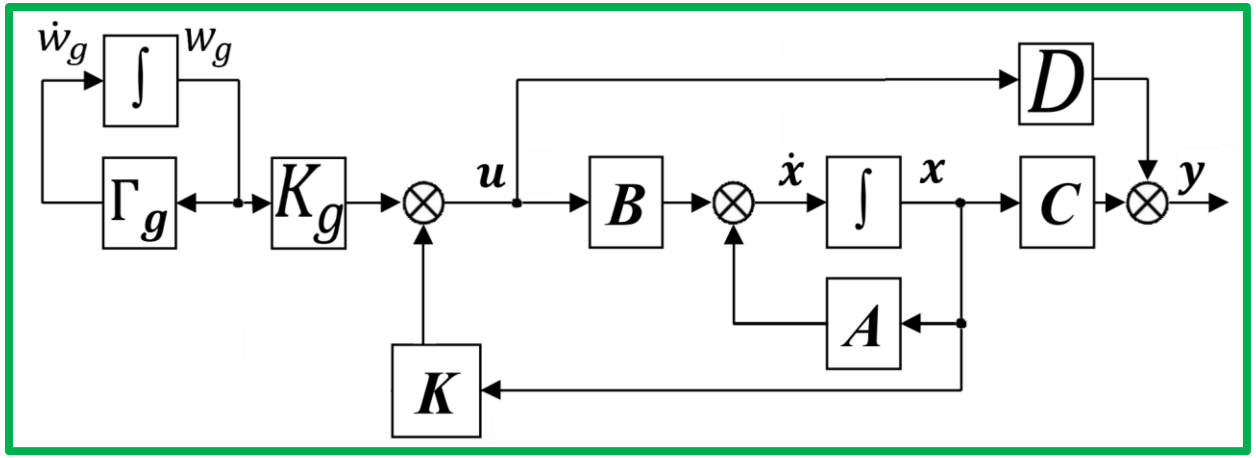
Альтернативная точка зрения

Слежение

Закон управления:

$u = Kx + K_g w_g$

K – «Feedback»,
Обратная связь, чтобы привести замкнутую систему к желаемым характеристикам.

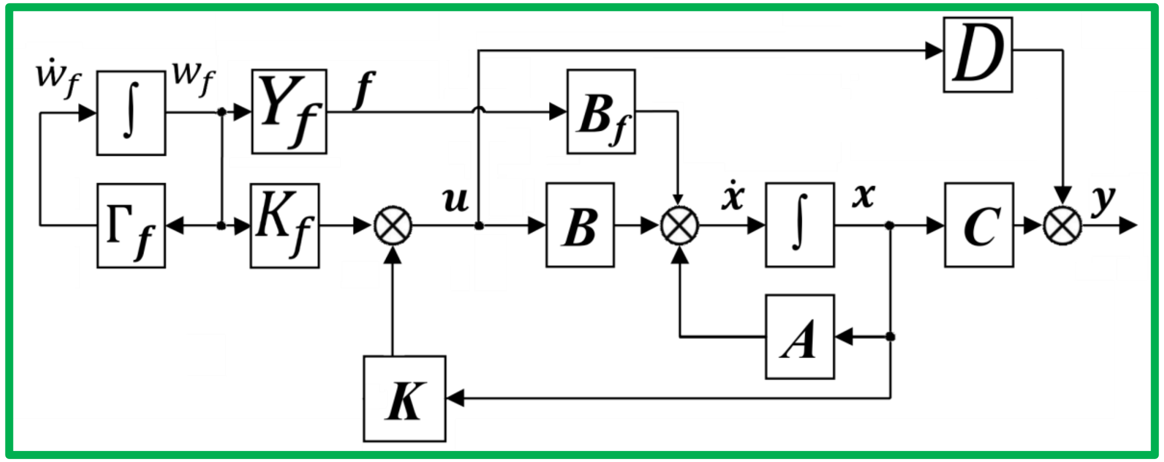


Компенсация (по входу)

Закон управления:

$u = Kx + K_f w_f$

K_g/ K_f – «Feedforward»,
Прямая связь, чтобы замкнутая система успешно следила / компенсировала.



Слежение и компенсация: прямые и обратные связи

Слежение

Компенсация (по входу)

Закон управл

$u = Kx + K_g$

K -

Обрат

привести

желаемы

ward»,

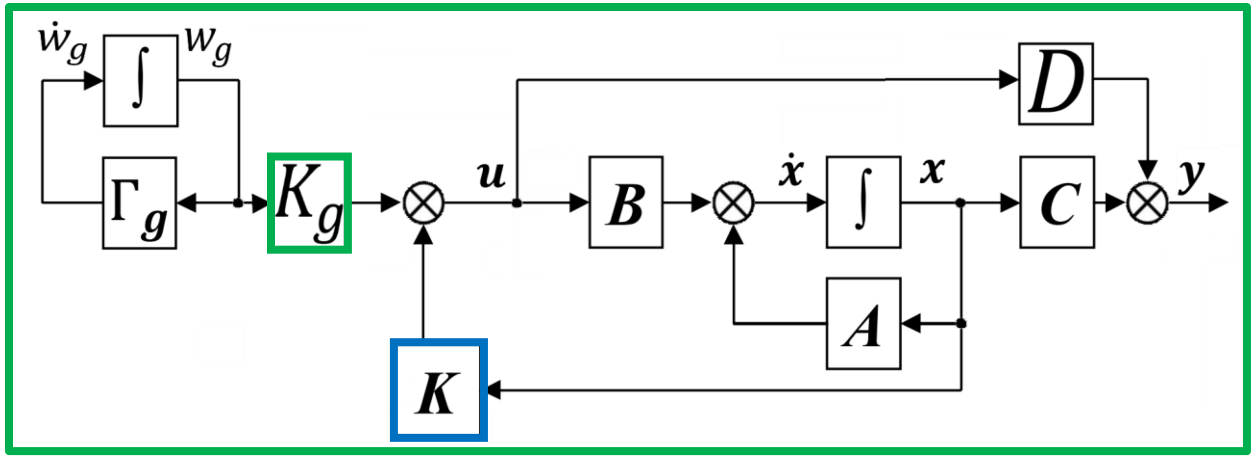
тобы

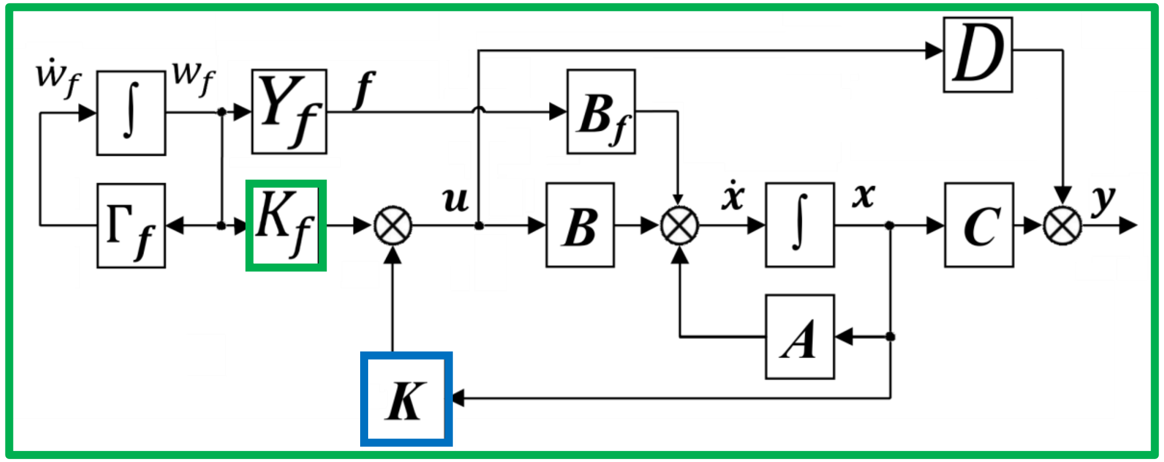
успешно

ировала.

В схемах структурно уже нет P_g / P_f, управление формируется напрямую из вектора состояния генератора внешнего сигнала и вектора состояния системы

Более наглядно видны стабилизирующий контур и часть, отвечающая за слежения/компенсацию





Слежение и компенсация: прямые и обратные связи

Слежение

Закон управления:

$$u = Kx + K_g w_g$$

Компенсация (по входу)

Закон управления:

$$u = Kx + K_f w_f$$

Стабилизирующий регулятор K можно искать любым желаемым образом:

Задание спектра; Желаемая степень устойчивости; LQR; …

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона:

$$\begin{cases} P_g \Gamma_g - (A + BK) P_g = BK_g \\ (C + DK) P_g + DK_g = Y_g \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_f \Gamma_f - (A + BK) P_f - B_f Y_f = BK_f \\ (C + DK) P_f + DK_f = 0 \end{cases}$$

Слежение и компенсация: прямые и обратные связи

Слежение

Закон управления:

$$u = Kx + K_g w_g$$

Компенсация (по выходу)

Закон управления:

$$u = Kx + K_f w_f$$

Стабилизирующий регулятор K можно искать любым желаемым образом:

Задание спектра; Желаемая степень устойчивости; LQR; …

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона:

$$\begin{cases} P_g\Gamma_g - (A + BK)P_g = BK_g \\ (C + DK)P_g + DK_g = Y_g \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_f\Gamma_f - (A + BK)P_f = BK_f \\ (C + DK)P_f + DK_f = -D_f Y_f \end{cases}$$

Слежение и компенсация: общая компенсация

Слежение

Закон управления:

$u = Kx + K_g w_g$

Компенсация (по выходу)

Закон управления:

$u = Kx + K_f w_f$

Стабилизирующий регулятор K можно искать любым желаемым образом:
Задание спектра; Желаемая степень устойчивости; LQR; …

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона:

Можно и объединить, если возмущение и на входе, и на выходе!

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f f \\ y = Cx + Du + D_f f \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_f \Gamma_f - (A + BK) P_f = BK_f \\ (C + DK) P_f + DK_f = -D_f Y_f \end{cases}$$

Слежение и компенсация: общая компенсация

Слежение

Закон управления:

$u = Kx + K_g w_g$

Компенсация (общая)

Закон управления:

$u = Kx + K_f w_f$

Стабилизирующий регулятор K можно искать любым желаемым образом:

Задание спектра; Желаемая степень устойчивости; LQR; …

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона:

Можно и объединить, если возмущение и на входе, и на выходе!

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f f \\ y = Cx + Du + D_f f \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_f \Gamma_f - (A + BK)P_f - B_f Y_f = BK_f \\ (C + DK)P_f + DK_f = -D_f Y_f \end{cases}$$

Слежение и компенсация: общая задача

Слежение + Компенсация (общая)

Закон управления:

$$u = Kx + K_g w_g + K_f w_f$$

Стабилизирующий регулятор K можно искать любым желаемым образом:
Задание спектра; Желаемая степень устойчивости; LQR; …

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона:

$$\begin{cases} P_g \Gamma_g - (A + BK) P_g = B K_g \\ (C + DK) P_g + D K_g = Y_g \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_f \Gamma_f - (A + BK) P_f - B_f Y_f = B K_f \\ (C + DK) P_f + D K_f = -D_f Y_f \end{cases}$$

И со слежением тоже можно объединить!
Просто независимо считаем компоненты регулятора!

Слежение и компенсация: ограничения

Слежение + Компенсация (общая)

Закон управления:

$$u = Kx + K_g w_g + K_f w_f$$

Но полагать w_g/ w_f

измеримыми самонадеянно

Стабилизирующий ... м желаемым образом:

Задание с ... ивости; LQR; ...

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона:

$$\begin{cases} P_g \Gamma_g - (A + BK)P_g = BK_g \\ (C + DK)P_g + DK_g = Y_g \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_f \Gamma_f - (A + BK)P_f - B_f Y_f = BK_f \\ (C + DK)P_f + DK_f = -D_f Y_f \end{cases}$$

Слежение и компенсация: ограничения

Слежение + Компенсация (общая)

Закон управления:

$$u = Kx + K_g w_g + K_f w_f$$

Но полагать w_g/ w_f измеримыми самонадеянно

Хорошо, что существуют специальные наблюдатели