МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ
по лабораторной работе E:
УПРАВЛЕНИЕ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ

Вариант 17

по дисциплине
«Теория автоматического управления»

Студент:
Группа № R3338 *А.А. Нечаева*

Предподаватель:
ассистент факультера СУиР, к. т. н. *А.В. Пашенко*

Санкт-Петербург 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1 ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ.

Рассмотрим многоканальную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \tag{1}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

и выполним следующие шаги:

- Определим собственные числа матрицы A
- Определим передаточную матрицу многоканальной системы. Рассчитаем нули и полюса системы, сравним с собственными числами матрицы A.
- Исследуем систему (1) на:
  - управляемость по состоянию и стабилизируемость;
  - наблюдаемость и обнаруживаемость;
  - управляемость по выходу.
- Выведем аналитические выражения для временных (переходной и весовой) характеристик системы. Приведем графическое представление рассчитанных характеристик.
- Выведем аналитические выражения для частотных (АЧХ, ФЧХ, ЛАЧХ и ЛФЧХ) характеристик системы. Приведем графическое представление рассчитанных характеристик.

1.1 Собственные числа матрицы A

Определим собственные числа матрицы A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases} \tag{3}$$

1.2 Передаточная функция

Определим передаточную матрицу многоканальной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX = AX + BU \\ Y = CX \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = (sI - A)^{-1}BU \\ Y = CX \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Y = C(sI - A)^{-1}BU \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W_{u\to y} = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{s-4}{s^2+s-2} & \frac{10s+14}{s^2+s-2} \\ -\frac{5s-2}{s^2+s-2} & -\frac{4s+20}{s^2+s-2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Для нахождения нулей и полюсов системы вычислим определитель передаточной матрицы, получим

$$\det\{W_{u\to y}\} = \frac{54}{(s-1)(s+2)} \quad (5)$$

следовательно, нули системы $\emptyset$, полюса $s = 1; -2$. Заметим, что полюса системы совпадают с собственными числами матрицы A.

1.3 Управляемость по состоянию и стабилизируемость

Составим матрицу управляемости и вычислим ее ранг

$$U = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(U) = 2 \quad (6)$$

Ранг U равен размерности системы, следовательно, система управляема и стабилизируема.

1.4 Наблюдаемость и обнаруживаемость

Составим матрицу управляемости и вычислим ее ранг

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \\ 4 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(V) = 2 \quad (7)$$

Ранг V равен размерности системы, следовательно, система наблюдаема и обнаруживаема.

1.5 Управляемость по выходу

Составим матрицу для определения управляемости по выходу и вычислим ранг

$$U_{out} = \begin{bmatrix} CU & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 7 & -16 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(U_{out}) = 2 \tag{8}$$

Ранг матрицы U_{out} равен количеству выходов, следовательно, система управляема по выходу.

1.6 Временные характеристики системы

Найдем весовую функцию системы

$$W_{u\to y} = \begin{bmatrix} \frac{4-s}{s^2+s-2} & \frac{10s+14}{s^2+s-2} \\ \frac{2-5s}{s^2+s-2} & -\frac{4s+20}{s^2+s-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s+2} & \frac{8}{s-1} + \frac{2}{s+2} \\ -\frac{1}{s-1} - \frac{4}{s+2} & \frac{8}{s-1} - \frac{4}{s+2} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$y_{i.r.} = \mathcal{L}^{-1}\{W_{u\to y}\} = \begin{bmatrix} e^t - 2e^{-2t} & 8e^t + 2e^{-2t} \\ -e^t - 4e^{-2t} & 8e^t - 4e^{-2t} \end{bmatrix} \tag{10}$$

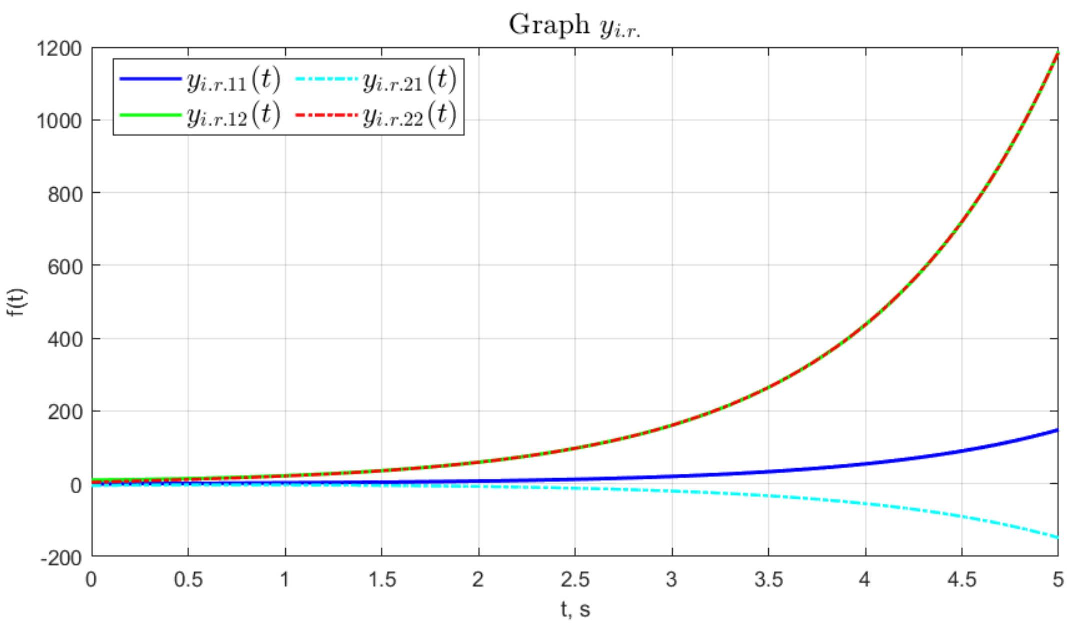

Рисунок 1 — График весовой функции системы.

Найдем переходную функцию системы

$$y_{s.r.} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W_{u\to y}}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s(s-1)} - \frac{2}{s(s+2)} & \frac{8}{s(s-1)} + \frac{2}{s(s+2)} \\ -\frac{1}{s(s-1)} - \frac{4}{s(s+2)} & \frac{8}{s(s-1)} - \frac{4}{s(s+2)} \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2} & \frac{8}{s-1} - \frac{7}{s} - \frac{1}{s+2} \\ -\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s+2} & \frac{8}{s-1} - \frac{10}{s} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^t - 2 + e^{-2t} & 8e^t - 7 - e^{-2t} \\ -e^t - 1 + 2e^{-2t} & 8e^t - 10 + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (11)$$

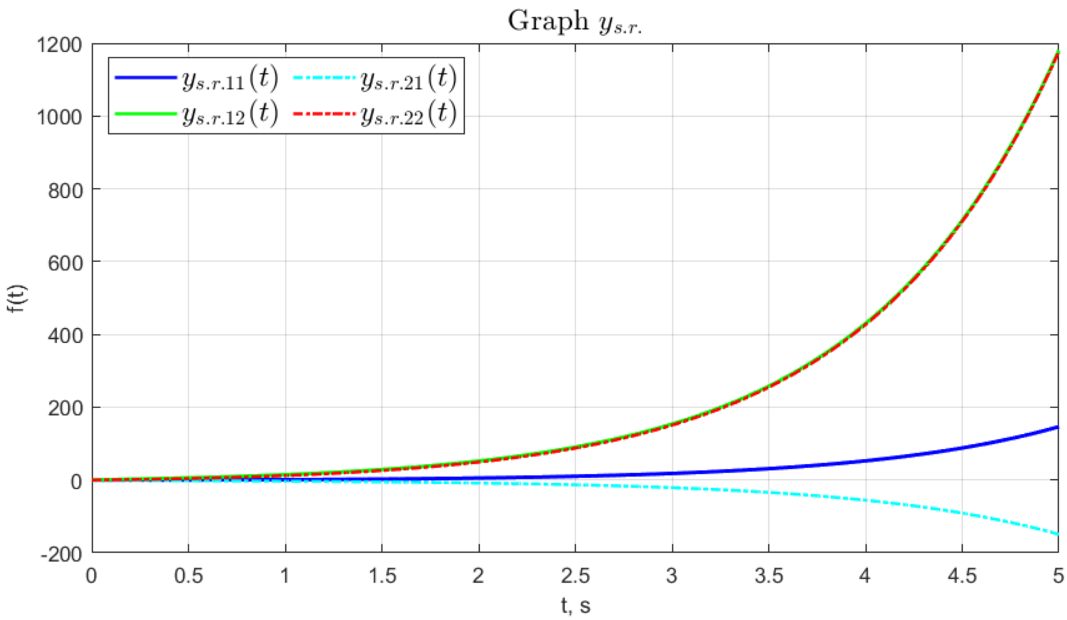

Рисунок 2 — График переходной функции системы.

1.7 Частотные характеристики системы

Найдем аналитические выражения для частотных характеристик системы.

Заменим в передаточной матрице s на $i\omega$

$$
\begin{aligned}
W_{u\to y} = \begin{bmatrix} \frac{4-s}{s^2+s-2} & \frac{10s+14}{s^2+s-2} \\ \frac{2-5s}{s^2+s-2} & -\frac{4s+20}{s^2+s-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4-i\omega}{-\omega^2+i\omega-2} & \frac{10i\omega+14}{-\omega^2+i\omega-2} \\ \frac{2-5i\omega}{-\omega^2+i\omega-2} & -\frac{4i\omega+20}{-\omega^2+i\omega-2} \end{bmatrix} = \\
= \begin{bmatrix} \frac{(4-i\omega)(-\omega^2-2-i\omega)}{(\omega^2+2)^2-\omega^2} & \frac{(10i\omega+14)(-\omega^2-2-i\omega)}{(\omega^2+2)^2-\omega^2} \\ \frac{(2-5i\omega)(-\omega^2-2-i\omega)}{(\omega^2+2)^2-\omega^2} & -\frac{(4i\omega+20)(-\omega^2-2-i\omega)}{(\omega^2+2)^2-\omega^2} \end{bmatrix} = \\
= \begin{bmatrix} \frac{-5\omega^2-8-6i\omega-i\omega^3}{(\omega^2+2)^2-\omega^2} & \frac{-10i\omega^3-4\omega^2-28-34i\omega}{(\omega^2+2)^2-\omega^2} \\ \frac{-7\omega^2+5i\omega^3-4+8i\omega}{(\omega^2+2)^2-\omega^2} & \frac{4i\omega^3+16\omega^2-40+28i\omega}{(\omega^2+2)^2-\omega^2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{12}
$$

Амплитудно-частотная характеристика (рисунок 3)

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \tag{13}$$

где $P(\omega) = Re(W)$, $Q(\omega) = Im(W)$.

$$P(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{-5\omega^2-8}{(\omega^2+2)^2-\omega^2} & \frac{-4\omega^2-28}{(\omega^2+2)^2-\omega^2} \\ \frac{-7\omega^2-4}{(\omega^2+2)^2-\omega^2} & \frac{16\omega^2-40}{(\omega^2+2)^2-\omega^2} \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$Q(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{-6\omega-\omega^3}{(\omega^2+2)^2-\omega^2} & \frac{-10\omega^3-34\omega}{(\omega^2+2)^2-\omega^2} \\ \frac{5\omega^3+8\omega}{(\omega^2+2)^2-\omega^2} & \frac{4\omega^3+28\omega}{(\omega^2+2)^2-\omega^2} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$A(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{-49\,w^6-185\,w^4+56\,w^2+176}}{w^4+3w^2+4} & \frac{\sqrt{6}\,\sqrt{-5\,w^6-61\,w^4-144\,w^2+224}}{w^4+3w^2+4} \\ \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{5\,w^6+19\,w^4+156\,w^2+64}}{w^4+3w^2+4} & \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{-17\,w^6+129\,w^4-278\,w^2+856}}{w^4+3w^2+4} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Логарифмическая АЧХ (рисунок 4) найдена по следующей формуле

$$L(\omega) = 20\lg(A(\omega)) \tag{17}$$

Фазово-частотная характеристика (рисунок 5)

$$\phi(\omega) = atan2\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \tag{18}$$

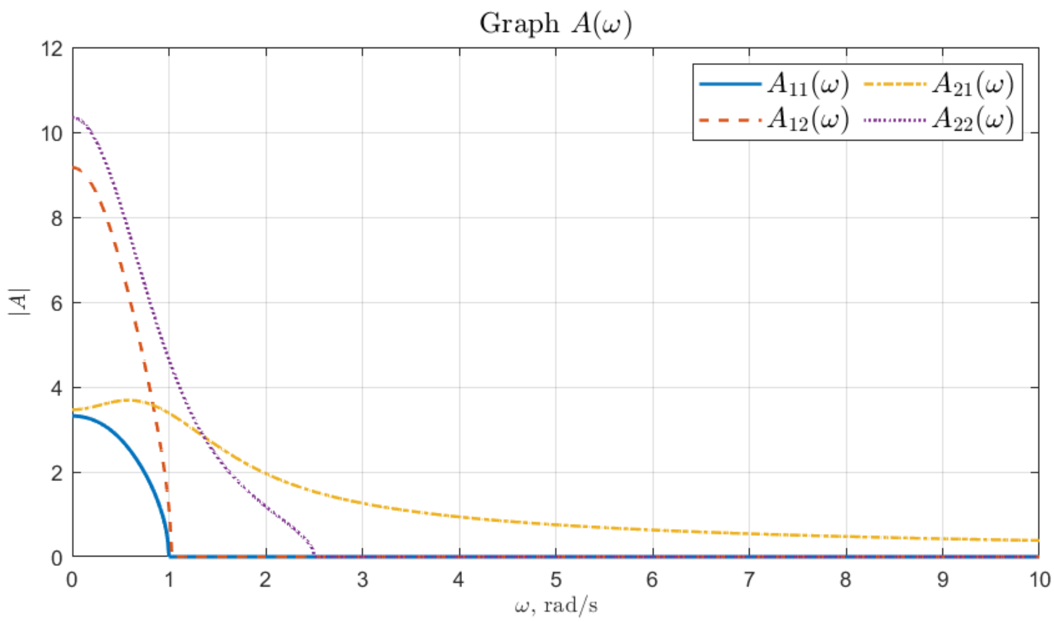

Рисунок 3 — График АЧХ.

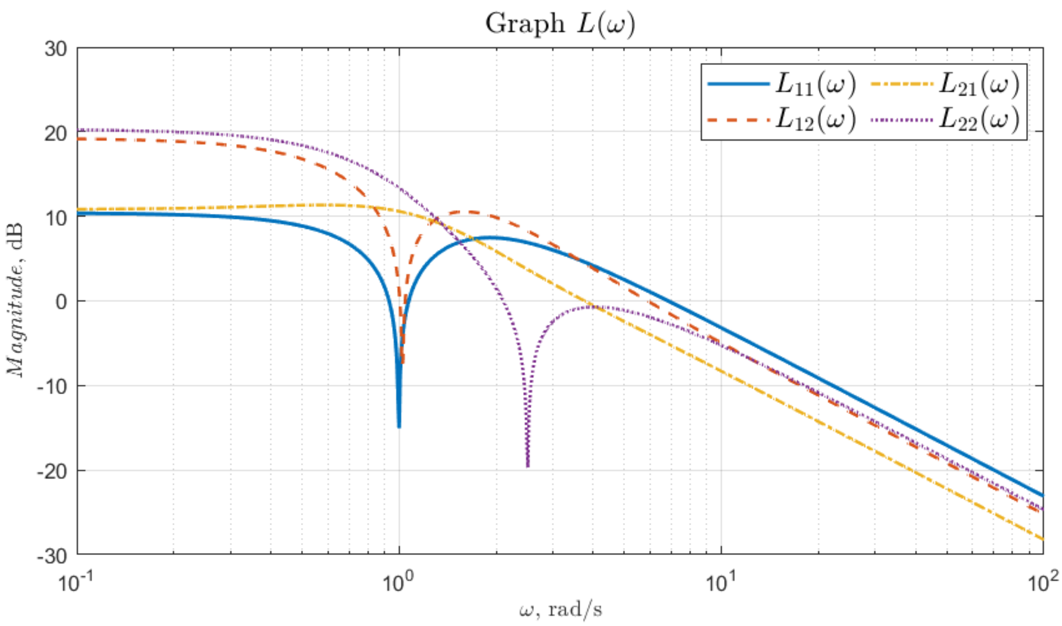

Рисунок 4 — График ЛАЧХ.

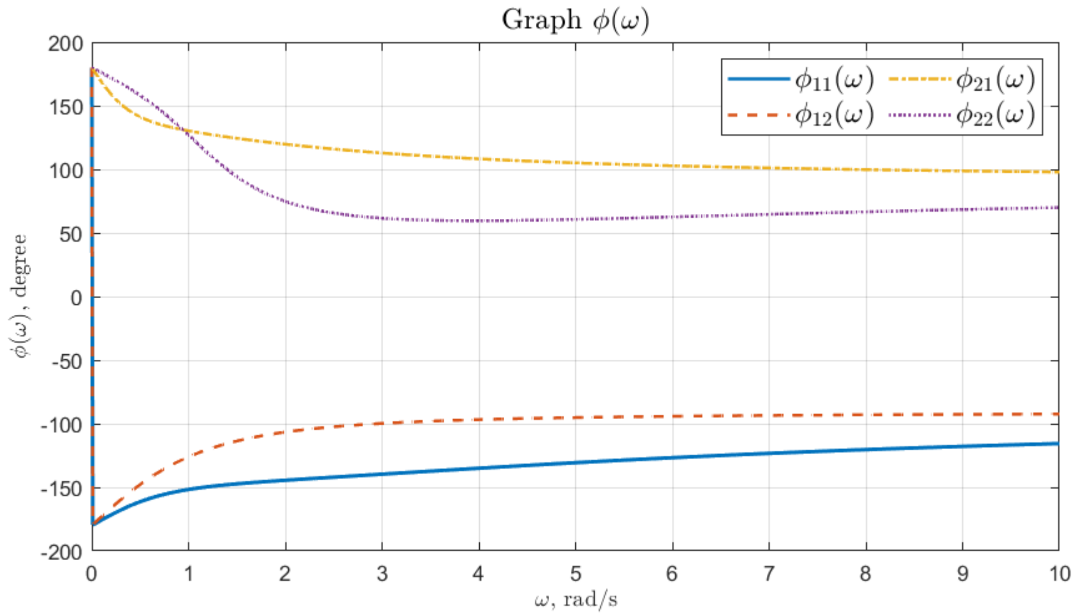

Рисунок 5 — График ФЧХ.

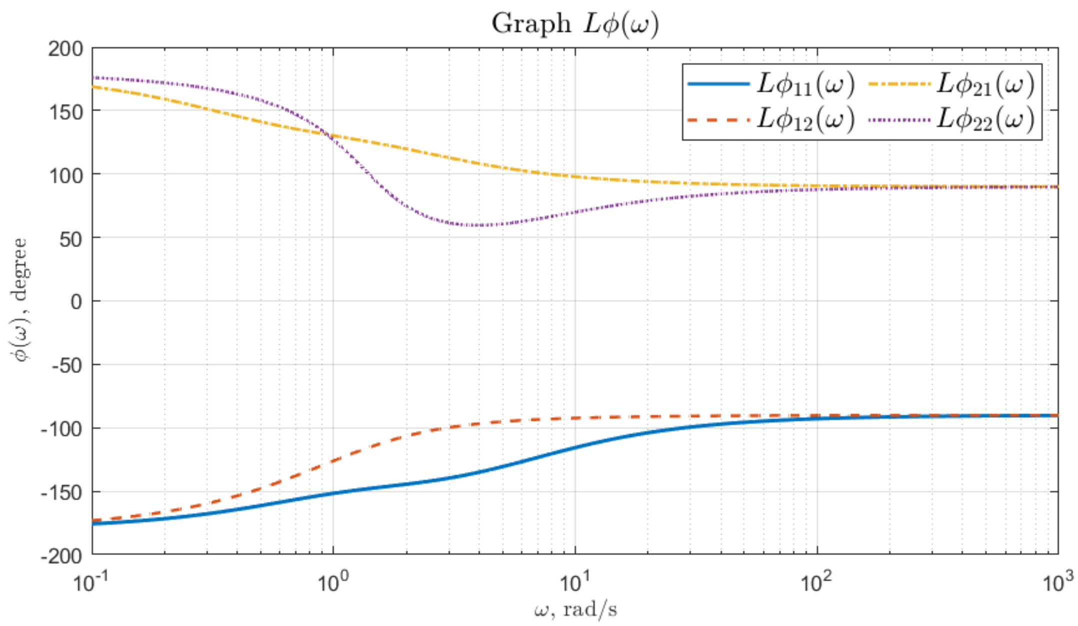

Рисунок 6 — График ЛФЧХ.

1.8 Анализ результатов

В результате выполнения данного задания была синтезирована передаточная матрица многоканальной системы, найдены полюса и нули системы. Выяснено, что полюса передаточной матрицы совпадают со спектром матрицы A. Проведено исследование на управляемость по состоянию и по выходу и наблюдаемость. Вычисленны временные и частотные характеристики системы, построены соответствующие графики.

2 СИНТЕЗ СЛЕДЯЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ.

Рассмотрим многоканальную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f f_1 \\ z = C_z x + D_z u - g \\ y = Cx + Du + D_f f_2 \end{cases} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$
$$B_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, D_f = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C_z = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, D_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$f_1(t) = \begin{bmatrix} 4\cos(6t) \\ 3\sin(2t) \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} 5\sin(2t) \\ 3\cos(6t) \end{bmatrix}, g(t) = \begin{bmatrix} 5\sin(3t) \\ 5\cos(3t) \end{bmatrix}$$

Считая доступными к измерению только величины $y(t)$ и $g(t)$, выполним следующие шаги:

- Исследуем систему (19) на:
  - управляемость по состоянию и стабилизируемость;
  - наблюдаемость и обнаруживаемость относительно выхода $y(t)$ и виртуального (регулируемого) выхода $z(t)$;
  - управляемость по выходу $y(t)$ и виртуальному (регулируемому) выходу $z(t)$
- Составим передаточные матрицы системы (19) от управляющих воздействий $u(t)$ к выходу $y(t)$ и виртуальному (регулируемому) выходу $z(t)$, проверим их на вырожденность.
- Определим матрицы и начальные условия генератора внешнего воздействия

$$\begin{cases} \dot{w} = \Gamma_w w \\ g = Y_g w \\ f_1 = Y_1 w \\ f_2 = Y_2 w \end{cases} \qquad w(0) \tag{20}$$

– Построим схему моделирования системы (19), замкнутой регулятором, состоящим из необходимых для решения данной задачи управления наблюдателей и закона управления

$$u = K\hat{x} + K_w\hat{w}, \tag{21}$$

обеспечивающим выполнение целевого условия

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0 \tag{22}$$

– Зададимся эталонной моделью замкнутой системы на основании требований

$$1 < |Re(\lambda_i^*)| < 4, \qquad 0 \leq |Im(\lambda_i^*)| < 3 \tag{23}$$

Синтезируем «feedback»-компоненту K регулятора (21) при помощи матричных уравнений типа Сильвестра, предварительно проверив условия существования единственного невырожденного решения.

– Составим систему матричных уравнений Франкиса-Дэвисона для синтеза компоненты K_w регулятора (21), проверим условие существования решения системы уравнений и синтезируем K_w.

– Синтезируем необходимые для выполнения целевого условия (22) при помощи управления (21) наблюдатели.

– Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы с нулевыми начальными условиями наблюдателей. Построим график формируемого регулятором управления $u(t)$, графики внешних воздействий $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $g(t)$, сравнительные графики векторов состояния системы $x(t)$ и генератора $w(t)$ и их оценок, а также ошибок оценки $e(t)$, графики фактического и виртуального (регулируемого) выходов $y(t)$ и $z(t)$

2.1 Управляемость по состоянию и стабилизируемость

Составим матрицу управляемости и найдем ее ранг

$$U = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(U) = 2 \qquad (24)$$

Ранг матрицы U равен размерности равен системы, следовательно, система управляема по состоянию и стабилизируема.

2.2 Наблюдаемость и обнаруживаемость относительно выхода $y(t)$ и виртуального выхода (регулируемого) $z(t)$

Составим матрицы наблюдаемости и вычислим их ранг относительно $y(t)$

$$V_y = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \\ 4 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(V_y) = 2 \qquad (25)$$

и виртуального выхода (регулируемого) $z(t)$

$$V_z = \begin{bmatrix} C_z \\ C_zA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(V_z) = 2 \qquad (26)$$

Ранги матриц V_y и V_z равны размерности системы, следовательно система наблюдаема и обнаруживаема относительно выходов $y(t)$ и $z(t)$.

2.3 Управляемость по выходу $y(t)$ и виртуальному (регулируемому) выходу $z(t)$

Составим матрицы управляемости по выходу $y(t)$

$$U_{out,y} = \begin{bmatrix} CU & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 7 & -16 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(U_{out,y}) = 2 \qquad (27)$$

и $z(t)$

$$U_{out,z} = \begin{bmatrix} CU & D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 7 & -16 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(U_{out,z}) = 2 \tag{28}$$

Ранги матриц $U_{out,y}$ и $U_{out,z}$ равны размерности выхода системы, следовательно, система является управляемой по выходу $y(t)$ и $z(t)$.

2.4 Передаточные матрицы системы

Составим передаточные матрицы системы (19) от управляющих воздействий $u(t)$ к выходу $y(t)$

$$W_{u\to y}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} \frac{4\,s^2+3\,s-4}{s^2+s-2} & \frac{2\,(5\,s+7)}{s^2+s-2} \\ -\frac{5\,s-2}{s^2+s-2} & -\frac{s^2+5\,s+18}{s^2+s-2} \end{bmatrix} \tag{29}$$

и виртуальному (регулируемому) выходу $z(t)$

$$W_{u\to z}(s) = C_z(sI - A)^{-1}B + D_z = \begin{bmatrix} \frac{s^2+3\,s-2}{s^2+s-2} & \frac{4\,(s+3)}{s^2+s-2} \\ -\frac{2}{s+2} & \frac{2\,(2\,s+5)}{s+2} \end{bmatrix} \tag{30}$$

Проверим передаточные матрицы на вырожденность, для этого найдем определители каждой из них и сравним с нулем

$$\det\left(W_{u\to y}(s)\right) = -\frac{4\,s+11}{s-1} \neq 0 \tag{31}$$

$$\det\left(W_{u\to z}(s)\right) = \frac{2\left(2\,s^2+7\,s+1\right)}{s^2+s-2} \neq 0 \tag{32}$$

Передаточные матрицы $W_{u\to y}(s)$ и $W_{u\to z}(s)$ невырождены.

2.5 Матрицы и начальные условия генератора внешнего воздействия

Определим матрицы и начальные условия генератора внешнего воздействия

$$\begin{cases} \dot{w} = \Gamma_w w \\ g = Y_g w \\ f_1 = Y_1 w \\ f_2 = Y_2 w \end{cases} \qquad w(0) \tag{33}$$

Рассмотрим заданные сигналы $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $g(t)$

$$f_1(t) = \begin{bmatrix} 4\cos(6t) \\ 3\sin(2t) \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} 5\sin(2t) \\ 3\cos(6t) \end{bmatrix}, g(t) = \begin{bmatrix} 5\sin(3t) \\ 5\cos(3t) \end{bmatrix}$$

Составим матрицу Γ_w так, чтобы включить в ее спектр все требуемые гармоники

$$\Gamma_w = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$Y_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 2.5 \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{36}$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{37}$$

Начальные условия

$$w(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{38}$$

2.6 Схема моделирования

Построим схему моделирования системы (19), замкнутой регулятором, состоящим из необходимых для решения данной задачи управления наблюдателей и закона управления

$$u = K\hat{x} + K_w\hat{w} \Rightarrow u = \bar{K}\hat{x}_w, \tag{39}$$

где

$$\hat{x}_w = \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{x} \end{bmatrix}, \quad \bar{K} = \begin{bmatrix} K_w & K \end{bmatrix} \tag{40}$$

Преобразуем также систему и дополним ее модель генератором внешнего воздействия

$$\begin{cases} \dot{x}_f = \bar{A}x_f + \bar{B}u \\ y_f = y - g = \bar{C}x_f + Du, \end{cases} \tag{41}$$

где

$$x_f = \begin{bmatrix} w \\ x \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} \Gamma_w & 0 \\ B_f Y_1 & A \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} D_f Y_2 - Y_g & C \end{bmatrix} \tag{42}$$

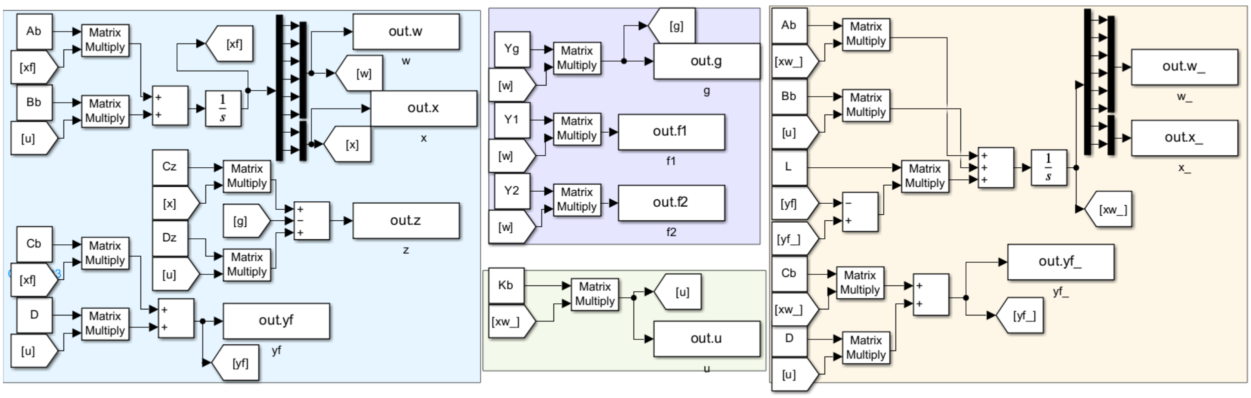

Рисунок 7 — Схема моделирования.

2.7 Эталонная модель замкнутой системы

Зададимся эталонной моделью замкнутой системы на основании требований

$$1 < |Re(\lambda_i^*)| < 4, \qquad 0 \le |Im(\lambda_i^*)| < 3 \tag{43}$$

Пусть

$$\lambda_{1,2} = -2.5 \tag{44}$$

Синтезируем компоненту K регулятора, запишем систему матричных уравнений типа Сильвестра

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{+} \end{cases} \tag{45}$$

Запишем матрицы Γ и Y

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2.5 & 1 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{46}$$

Проверим условия существования решения уравнения Сильвестра. Спектр матрицы A $\sigma(A) = \{\, 1, -2\}$ – не пересекается со спектром матрицы Γ. Пара матриц (A, B) управляема (это было выяснено в ходе выполнения пункта 2.1), проверим наблюдаемость пары (Y, Γ)

$$V = \begin{bmatrix} Y \\ Y\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2.5 \\ -2.5 & -1.5 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(V) = 2 \tag{47}$$

Ранг матрицы наблюдаемости равен размерности системы, следовательно, пара (Y, Γ) наблюдаема.

Решим систему уравнений (45)

$$K = \begin{bmatrix} 1.9091 & 0.3182 \\ -1.6591 & -0.5682 \end{bmatrix} \tag{48}$$

2.8 Синтез компоненты K_w регулятора

Запишем систему матричных уравнений Франкиса-Дэвисона

$$\begin{cases} P\Gamma_w - (A + BK)P - B_f Y_1 = BK_w \\ (C_z + D_z K)P + D_z K_w = Y_g \end{cases} \tag{49}$$

Запишем условие существования решения относительно P и K_w

$$rank \begin{bmatrix} A + BK - I\lambda_{i\Gamma_w} & B \\ C_z + D_z K & D_z \end{bmatrix} = \text{число строк} \tag{50}$$

Проверим, что это условие выполнено для каждого из собственных чисел матрицы Γ_w:

для $\lambda_1 = -6i$

$$rank \begin{bmatrix} A + BK - I\lambda_{1\Gamma_w} & B \\ C_z + D_z K & D_z \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -1.4091 + 6i & 0.1818 & 1 & 2 \\ -6.5455 & -3.5909 + 6i & -1 & 4 \\ 3.9091 & 0.3182 & 1 & 0 \\ -7.6364 & -1.2727 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4 \tag{51}$$

для $\lambda_2 = 6i$

$$rank \begin{bmatrix} A + BK - I\lambda_{2\Gamma_w} & B \\ C_z + D_z K & D_z \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -1.4091 - 6i & 0.1818 & 1 & 2 \\ -6.5455 & -3.5909 - 6i & -1 & 4 \\ 3.9091 & 0.3182 & 1 & 0 \\ -7.6364 & -1.2727 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4 \tag{52}$$

для $\lambda_3 = -3i$

$$rank \begin{bmatrix} A + BK - I\lambda_{3\Gamma_w} & B \\ C_z + D_z K & D_z \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -1.4091 + 3i & 0.1818 & 1 & 2 \\ -6.5455 & -3.5909 + 3i & -1 & 4 \\ 3.9091 & 0.3182 & 1 & 0 \\ -7.6364 & -1.2727 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4 \tag{53}$$

для $\lambda_4 = 3i$

$$rank\begin{bmatrix} A+BK-I\lambda_{4\Gamma_w} & B \\ C_z+D_zK & D_z \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -1.4091-3i & 0.1818 & 1 & 2 \\ -6.5455 & -3.5909-3i & -1 & 4 \\ 3.9091 & 0.3182 & 1 & 0 \\ -7.6364 & -1.2727 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4 \quad (54)$$

для $\lambda_5 = -2i$

$$rank\begin{bmatrix} A+BK-I\lambda_{5\Gamma_w} & B \\ C_z+D_zK & D_z \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -1.4091+2i & 0.1818 & 1 & 2 \\ -6.5455 & -3.5909+2i & -1 & 4 \\ 3.9091 & 0.3182 & 1 & 0 \\ -7.6364 & -1.2727 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4 \quad (55)$$

для $\lambda_6 = 2i$

$$rank\begin{bmatrix} A+BK-I\lambda_{6\Gamma_w} & B \\ C_z+D_zK & D_z \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -1.4091-2i & 0.1818 & 1 & 2 \\ -6.5455 & -3.5909-2i & -1 & 4 \\ 3.9091 & 0.3182 & 1 & 0 \\ -7.6364 & -1.2727 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4 \quad (56)$$

Условие существования решения системы уравнений Франкиса-Дэвисона выполнено. Найдем матрицу K_w

$$K_w = \begin{bmatrix} -0.6367 & -5.1240 & 3.6234 & -1.2662 & 5.6915 & -2.4651 \\ 0.2029 & 2.6764 & -1.9091 & 0.4091 & -1.2514 & 3.0833 \end{bmatrix} \quad (57)$$

2.9 Синтез наблюдателей

Синтезируем матрицу наблюдателя L путем решения уравнения типа Сильвестра

$$\begin{cases} \bar{\Gamma}Q - Q\bar{A} = \bar{Y}\bar{C} \\ L = Q^{-1}\bar{Y} \end{cases} \tag{58}$$

Условия существования решения Q: $\sigma(\bar{\Gamma}) \cap \sigma(\bar{A}) = \emptyset$, $(\bar{\Gamma}, \bar{Y})$ – управляема, $(\bar{C}, \bar{A})$ – наблюдаема.

Составим матрицу наблюдаемости для $(\bar{C}, \bar{A})$ и найдем ее ранг

$$rank(V) = rank \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^7 \end{bmatrix} = 8 \tag{59}$$

Ранг матрицы наблюдаемости равен размерности системы, следовательно, пара $(\bar{C}, \bar{A})$ – наблюдаема.

Определим спектр матрицы $\bar{A}$:

$$\sigma(A) = \begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm 6i \\ \lambda_3 = 1 \\ \lambda_4 = -2 \\ \lambda_{5,6} = \pm 2i \\ \lambda_{7,8} = \pm 3i \end{cases} \tag{60}$$

Выберем матрицы $\bar{\Gamma}$ и $\bar{Y}$:

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \bar{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{61}$$

Заметим, что условие $\sigma(\bar{\Gamma}) \cap \sigma(\bar{A}) = \emptyset$ выполнено, убедимся в том, что $(\bar{\Gamma}, \bar{Y})$ – управляема: составим матрицу управляемости и найдем ее ранг

$$rank(U) = rank \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \dots & \bar{A}^7\bar{B} \end{bmatrix} = 8 \tag{62}$$

Теперь вычислим матрицу L, решив систему (58)

$$L = \begin{bmatrix} 2.1641 & 2.1641 \\ -5.5918 & -5.5918 \\ -1.2815 & -1.2815 \\ -0.6785 & -0.6785 \\ 3.6888 & 3.6888 \\ 1.3022 & 1.3022 \\ -8.0848 & -7.4181 \\ -6.0666 & -5.3999 \end{bmatrix} \tag{63}$$

2.10 Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы с нулевыми начальными условиями наблюдателей. Построим график формируемого регулятором управления $u(t)$ (рисунок 8), графики внешних воздействий $f_1(t)$ (рисунок 9), $f_2(t)$ (рисунок 10) и $g(t)$ (рисунок 11), сравнительные графики векторов состояния системы $x(t)$ (рисунок 12) и генератора $w(t)$ (рисунки 13 и 14) и их оценок, а также ошибок оценки $e(t)$ (рисунок 15) и e_w (рисунок 16), графики фактического и виртуального (регулируемого) выходов $y(t)$ (рисунок 17) и $z(t)$ (рисунок 18)

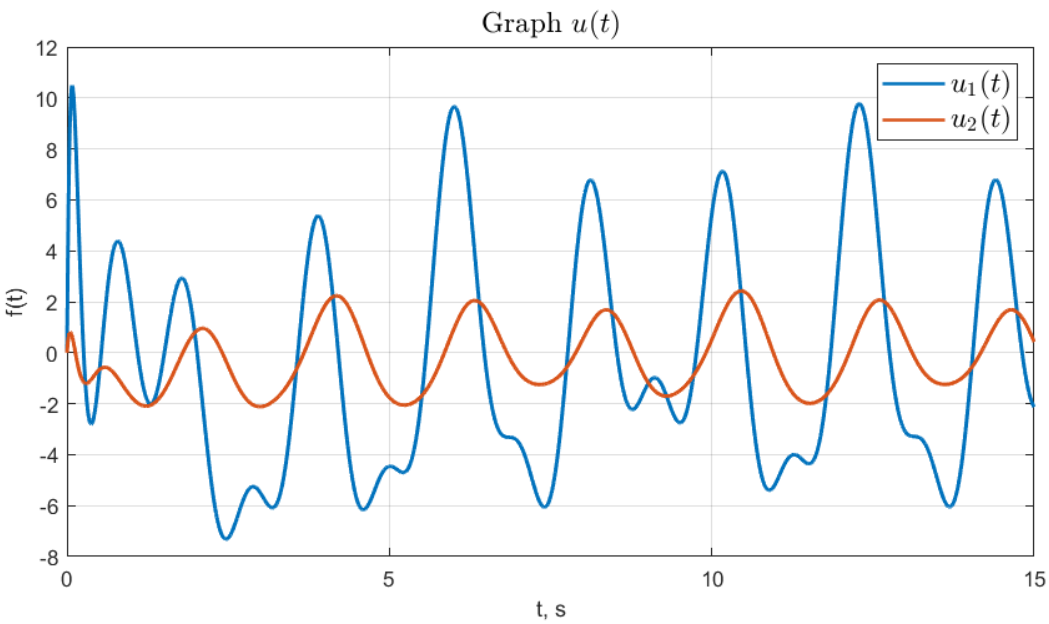

Рисунок 8 — График формируемого регулятором управления $u(t)$.

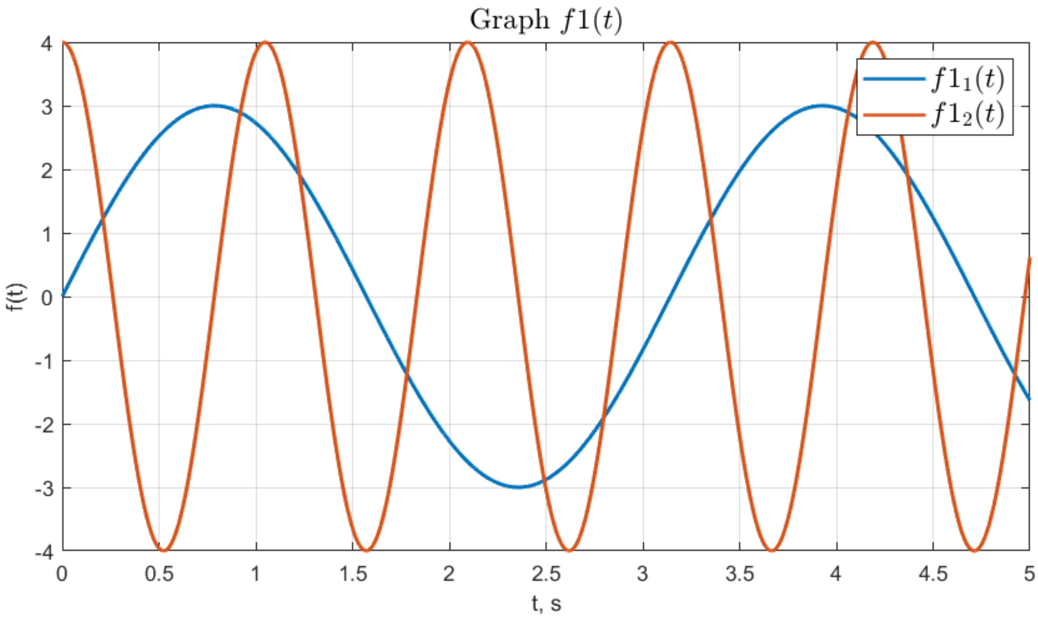

Рисунок 9 — График внешнего воздействия $f_1(t)$.

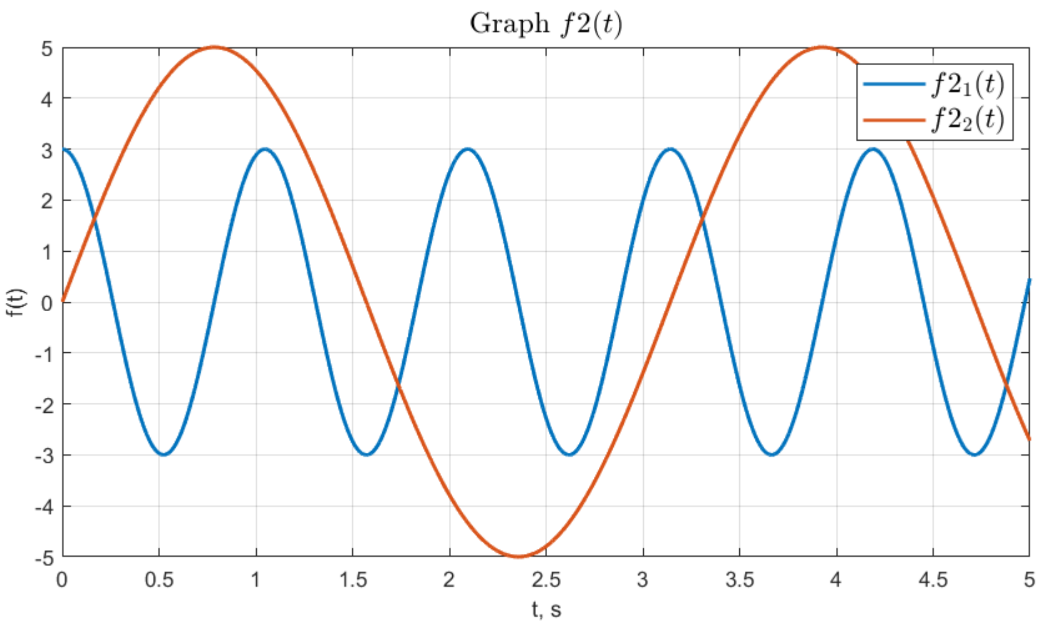

Рисунок 10 — График внешнего воздействия $f_2(t)$.

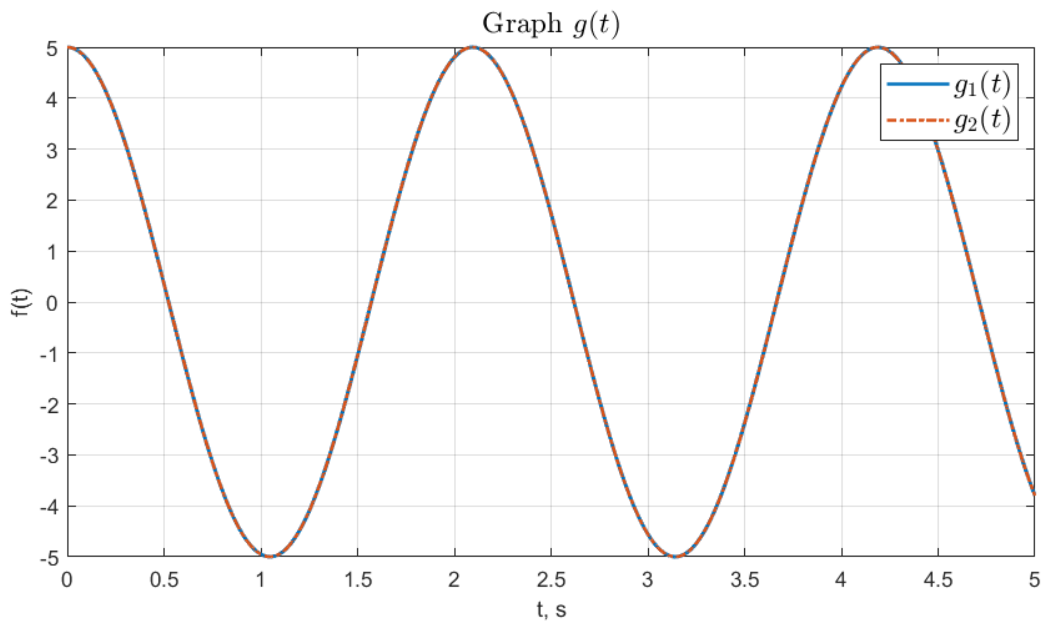

Рисунок 11 — График внешнего воздействия $g(t)$.

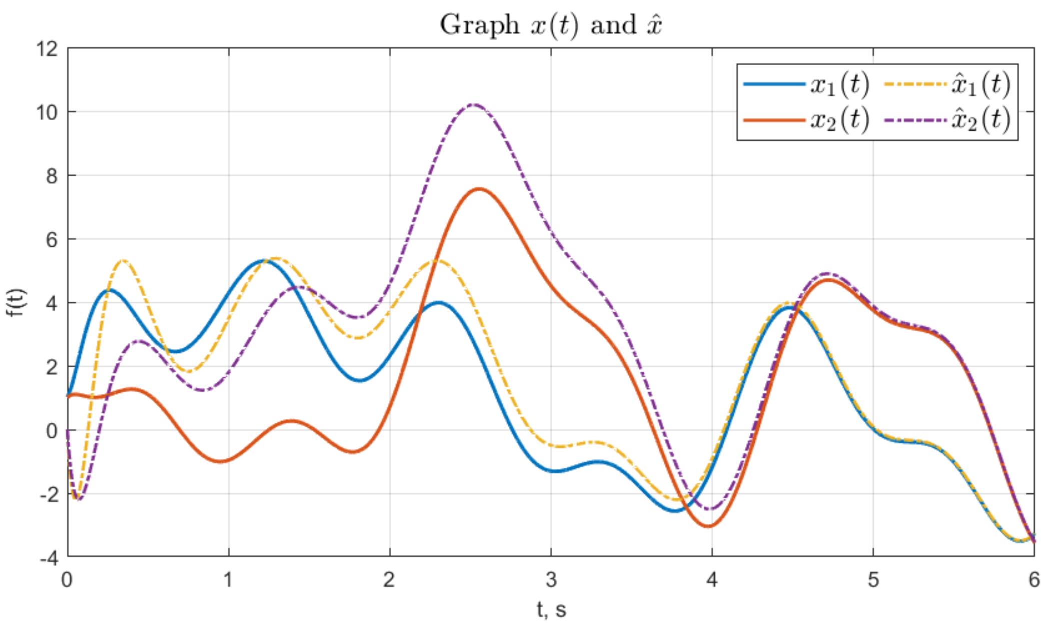

Рисунок 12 — График вектора состояния $x(t)$ и его оценки $\hat{x}(t)$.

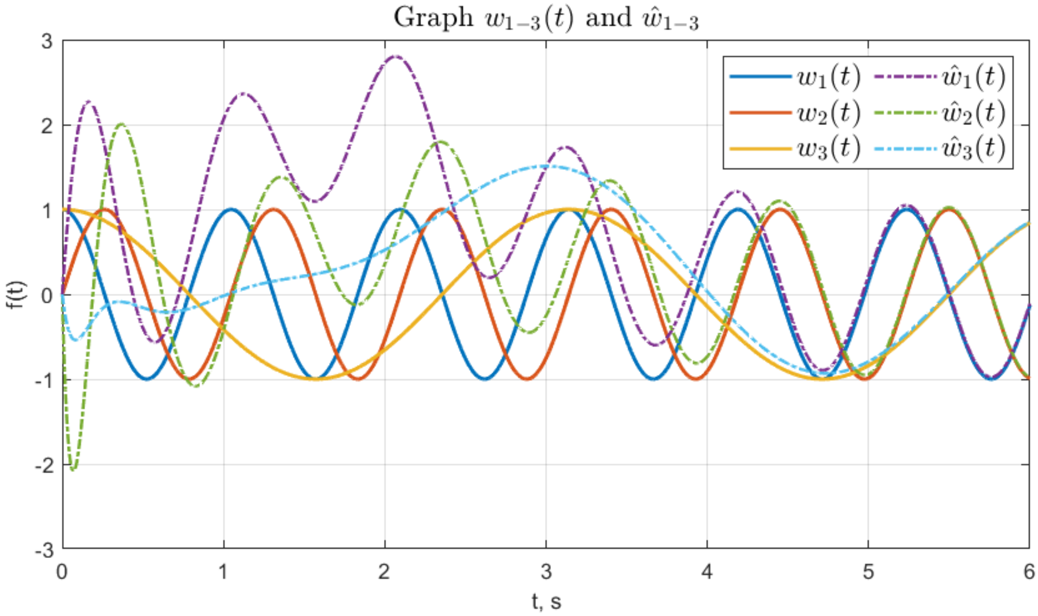

Рисунок 13 — График вектора состояния $w(t)$ генератора и его оценки $\hat{w}(t)$ (первые три вектора).

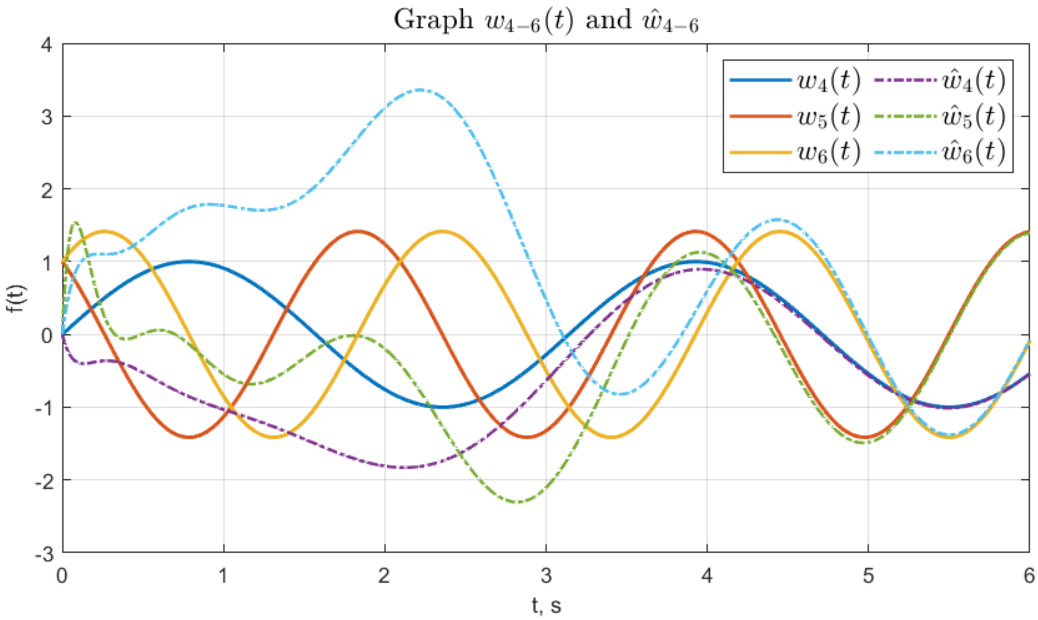

Рисунок 14 — График вектора состояния $w(t)$ генератора и его оценки $\hat{w}(t)$ (последние три вектора).

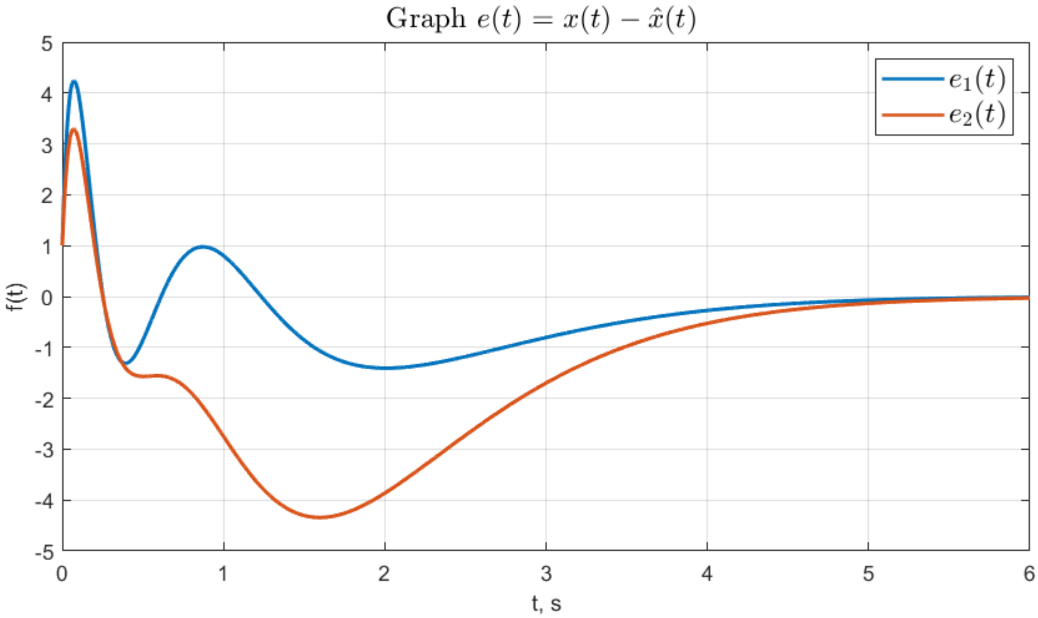

Рисунок 15 — График ошибки $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

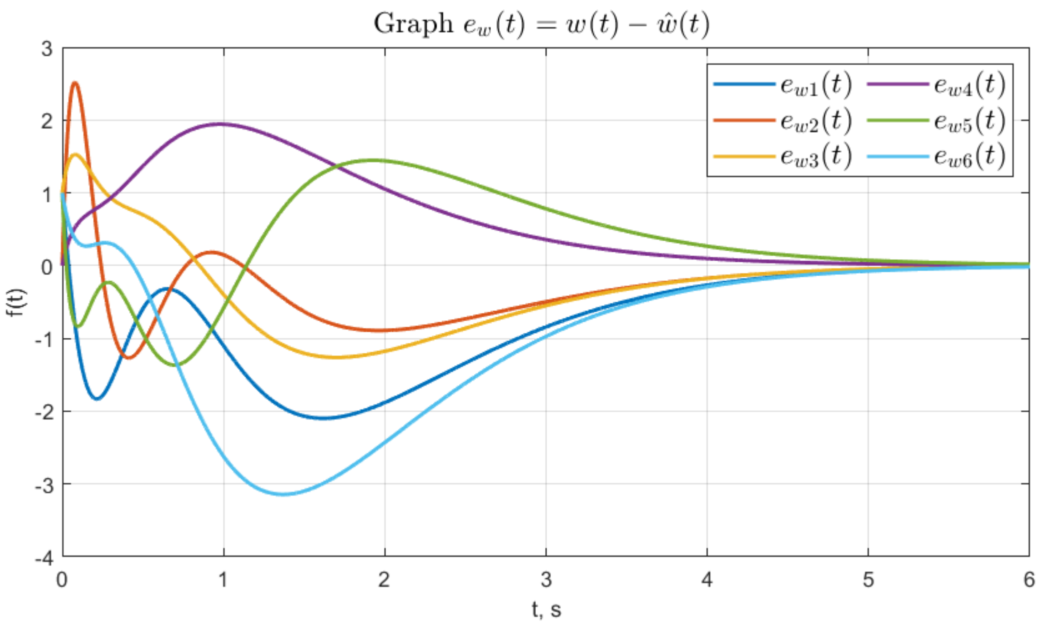

Рисунок 16 — График ошибки $e_w(t) = w(t) - \hat{w}(t)$.

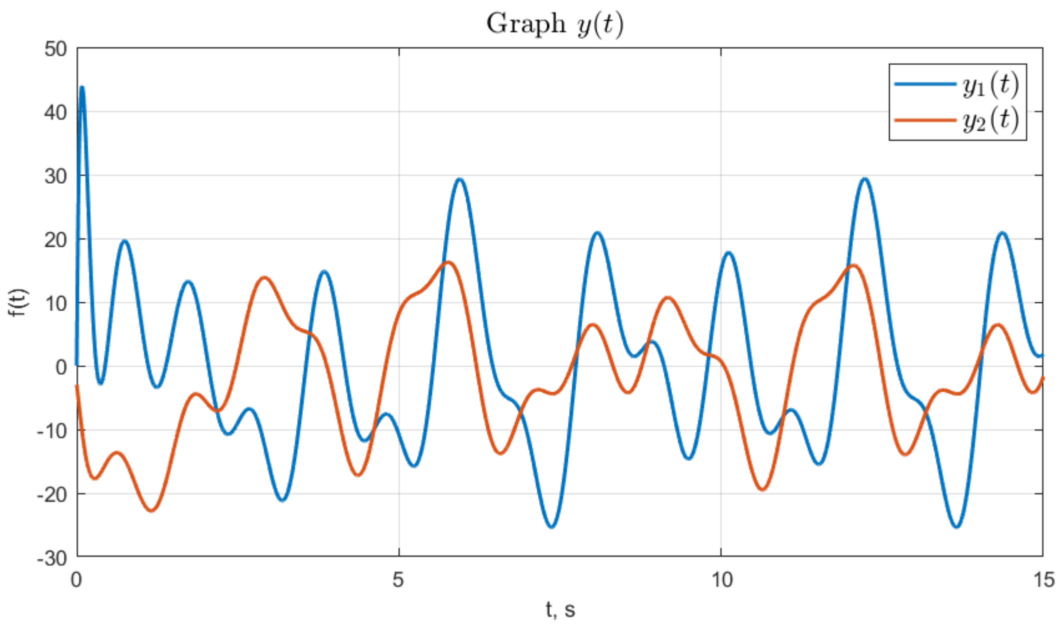

Рисунок 17 — График фактического выхода $y(t)$.

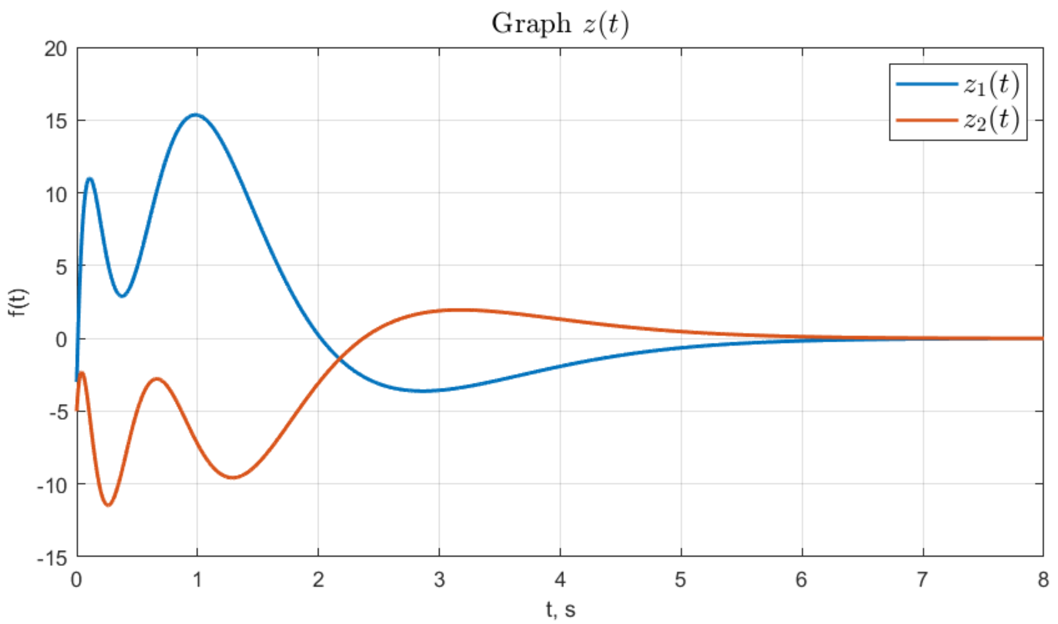

Рисунок 18 — График регулируемого выхода $z(t)$.

2.11 Анализ результатов

Синтезированное при выполнении задания следящее управление позволило достичь целевого условия (22). Ошибки оценок вектора состояния системы и генератора сходятся к нулю с течением времени.

3 ВЫВОД

В ходе выполнения лабораторной работы были применены на практике знания об управлении многоканальной системой. В первой части работы изучена управляемость и наблюдаемость многоканальной системы. Составлена передаточная матрица, на ее основе вычисленны и визуализированы временные и частотные характеристики системы. Во второй части выполнен синтез следящего управления в условиях внешних возмущений для многоканальной системы. Были синтезированны «feedback» и «feedforward» компоненты регулятора, а также построен наблюдатель. Целевое условие было достигнуто, а ошибки между векторами состояния системы и генератора со временем стали неотличимы от нуля.