

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ  
по Курсовому проекту:  
УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕВЕРНУТЫМ МАЯТНИКОМ НА ТЕЛЕЖКЕ

Вариант 17

по дисциплине  
«Теория автоматического управления»

Студент:  
*Группа № R3338* *A.A. Нечаева*

Предподаватель:  
*ассистент факультета СУиР, к. т. н.* *A.B. Пашенко*

Санкт-Петербург 2025

# СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА .....	4
1.1 Вывод уравнений .....	4
1.2 Точки равновесия .....	6
1.3 Линеаризация .....	7
1.4 Выбор исходных данных .....	8
2 АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ .....	9
2.1 Анализ матриц .....	9
2.1.1 Управляемость и стабилизируемость системы .....	9
2.1.2 Наблюдаемость и обнаруживаемость системы .....	9
2.2 Передаточные матрицы .....	10
2.3 Моделирование .....	11
3 СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ....	19
3.1 Синтез регулятора по состоянию .....	19
3.1.1 Краткий вывод .....	25
3.2 Исследование регулятора по состоянию .....	25
3.3 Синтез наблюдателя .....	29
3.3.1 Наблюдатель полной размерности .....	29
3.3.2 Наблюдатель пониженной размерности .....	34
3.3.3 Сравнение работы наблюдателей полной и пониженной размерности .....	41
3.4 Синтез регулятора по выходу .....	41
4 СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: РЕГУЛЯТОРЫ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ.....	43
4.1 Синтез регулятора по состоянию .....	43
4.2 Исследование регулятора по состоянию .....	47
4.3 Синтез регулятора по состоянию с ограничением на управление	47
4.4 Исследование регулятора по состоянию с ограничением на управление .....	57
4.5 Синтез наблюдателя .....	58
4.6 Синтез регулятора по выходу .....	58

5	СЛЕЖЕНИЕ И КОМПЕНСАЦИЯ .....	65
5.1	Решение задачи компенсации .....	65
5.2	Решение задачи слежения .....	70
6	СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: LQR И ФИЛЬТР КАЛМАНА .....	75
6.1	Синтез линейно-квадратичного регулятора .....	75
6.2	Исследование линейно-квадратичного регулятора .....	78
6.3	Синтез фильтра Калмана .....	79
6.4	LQG для линейной модели .....	79
6.5	LQG для нелинейной модели .....	79
7	ВЫВОД .....	80

# 1 ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА

## 1.1 Вывод уравнений

Построим математическую модель перевернутого маятника на тележке, представленного на рисунке 1. В качестве переменных состояния выберем линейную координату тележки  $a$ , скорость тележки  $\dot{a}$ , угол отклонения маятника от вертикали  $\varphi$ , угловую скорость маятника  $\dot{\varphi}$ . В качестве управляющей переменной  $u$  примем горизонтальную силу, приложенную к тележке. В качестве внешнего возмущения  $f$  примем врачающий момент, действующий на маятник. В качестве выходных (измеряемых) примем величины  $y_1 = a$  и  $y_2 = \varphi$ .

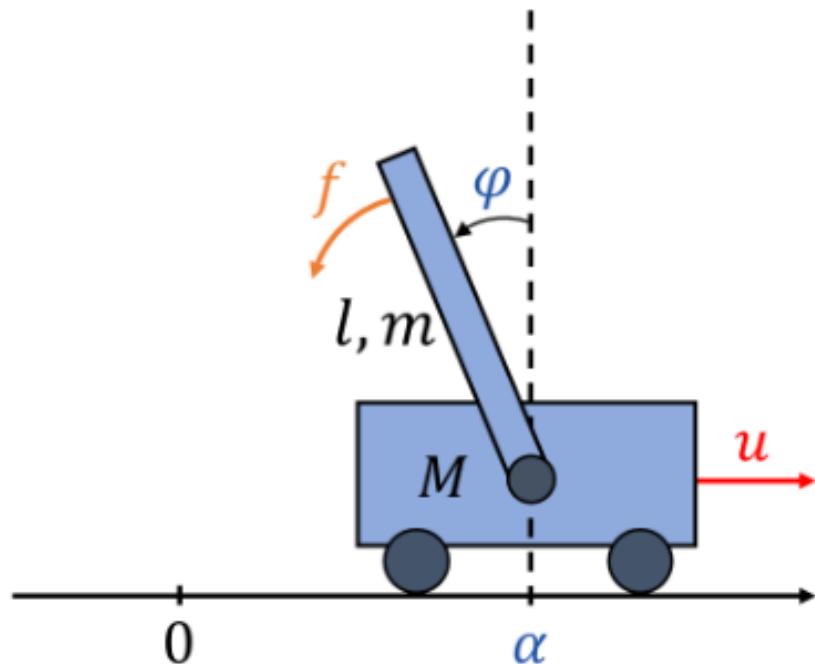


Рисунок 1 — Перевернутый маятник на тележке.

Введем переменные состояния

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = \dot{a} \\ x_3 = \varphi \\ x_4 = \dot{\varphi} \end{cases} \quad (1)$$

Пусть  $T$  – кинетическая энергия системы,  $T_{\text{тележки}}$ ,  $T_{\text{маятника}}$  – кинетическая энергия тележки и маятника соответственно.

$$T_{\text{тележки}} = \frac{M\dot{a}^2}{2} \quad (2)$$

$$T_{\text{маятника}} = \frac{m}{2} (\dot{x}_{\text{маятника}}^2 + \dot{y}_{\text{маятника}}^2) = \frac{\rho Sl}{2} (\dot{x}_{\text{маятника}}^2 + \dot{y}_{\text{маятника}}^2), \quad (3)$$

где  $l$  – длина стержня,  $S$  – площадь сечения,  $\rho$  – плотность.

$$\begin{aligned} T_{\text{маятника}} &= \frac{\rho Sl}{2} (\dot{x}_{\text{маятника}}^2 + \dot{y}_{\text{маятника}}^2) = \\ &= \frac{\rho S}{2} \int_0^l \left( (\dot{a} - (\lambda \sin \varphi)'_t)^2 + ((\lambda \cos \varphi)'_t)^2 \right) d\lambda = \\ &= \frac{m\dot{a}^2}{2} + \frac{\rho S}{2} \int_0^l (-2\lambda \dot{a} \dot{\varphi} \cos \varphi + \lambda^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \lambda^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) d\lambda = \\ &= \frac{m\dot{a}^2}{2} + \frac{\rho S}{2} \int_0^l (-2\lambda \dot{a} \dot{\varphi} \cos \varphi + \lambda^2 \dot{\varphi}^2) d\lambda = \\ &= \frac{m\dot{a}^2}{2} + \frac{\rho S}{2} \left( -l^2 \dot{a} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{l^3 \dot{\varphi}^2}{3} \right) = \frac{m\dot{a}^2}{2} - \frac{ml \dot{a} \dot{\varphi} \cos \varphi}{2} + \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{6} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} T &= T_{\text{тележки}} + T_{\text{маятника}} = \frac{M\dot{a}^2}{2} + \frac{m\dot{a}^2}{2} - \frac{ml \dot{a} \dot{\varphi} \cos \varphi}{2} + \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{6} = \\ &= \frac{(M+m)\dot{a}^2}{2} - \frac{ml \dot{a} \dot{\varphi} \cos \varphi}{2} + \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{6} \end{aligned} \quad (5)$$

Запишем систему уравнений Лагранжа

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial T}{\partial a} = u \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = f \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (M+m) \ddot{a} - \frac{ml(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)}{2} = u \\ \frac{ml^2 \ddot{\varphi}}{3} + \frac{ml \dot{a} \dot{\varphi} \sin \varphi}{2} - \frac{ml \dot{a} \dot{\varphi} \cos \varphi}{2} = f \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} (M+m) \ddot{a} - \frac{ml(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)}{2} = u \\ \frac{ml^2 \ddot{\varphi}}{3} - \frac{mgl \sin \varphi}{2} - \frac{ml \dot{a} \dot{\varphi} \cos \varphi}{2} = f \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Преобразуем данную систему уравнений

$$\begin{cases} \ddot{a} = -\frac{3 \cos \varphi \sin \varphi g l m + 6 \cos \varphi f - 2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi l^2 m + 4 l u}{l(3 \cos^2 \varphi m - 4 m - 4 M)} \\ \ddot{\varphi} = \frac{3(\cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi}^2 l^2 m^2 - 2 l m u \cos \varphi - 2 g l m^2 \sin \varphi - 2 g l m M \sin \varphi - 4 f m - 4 f M)}{l^2 m (3 m \cos^2 \varphi - 4 m - 4 M)} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{3 \cos \varphi \sin \varphi g l m + 6 \cos \varphi f - 2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi l^2 m + 4 l u}{l(3 \cos^2 \varphi m - 4 m - 4 M)} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{3(\cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi}^2 l^2 m^2 - 2 l m u \cos \varphi - 2 g l m^2 \sin \varphi - 2 g l m M \sin \varphi - 4 f m - 4 f M)}{l^2 m (3 m \cos^2 \varphi - 4 m - 4 M)} \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{cases} \quad (8)$$

## 1.2 Точки равновесия

Найдем точки равновесия системы из условия  $\dot{x}_i = 0$  и  $u = 0, f = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = -\frac{3 \cos \varphi \sin \varphi g l m + 0 - 2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi l^2 m + 0}{l(3 \cos^2 \varphi m - 4 m - 4 M)} = 0 \\ \dot{x}_3 = x_4 = 0 \\ \dot{x}_4 = \frac{3(\cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi}^2 l^2 m^2 - 0 - 2 g l m^2 \sin \varphi - 2 g l m M \sin \varphi - 0 - 0)}{l^2 m (3 m \cos^2 \varphi - 4 m - 4 M)} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = \dot{a} = 0 \\ \dot{x}_2 = -\frac{3 \cos \varphi \sin \varphi g l m - 2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi l^2 m}{l(3 \cos^2 \varphi m - 4 m - 4 M)} = 0 \\ \dot{x}_3 = x_4 = \dot{\varphi} = 0 \\ \dot{x}_4 = \frac{3(\cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi}^2 l^2 m^2 - 2 g l m^2 \sin \varphi - 2 g l m M \sin \varphi)}{l^2 m (3 m \cos^2 \varphi - 4 m - 4 M)} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = -\frac{3 \cos \varphi \sin \varphi g l m}{l(3 \cos^2 \varphi m - 4 m - 4 M)} = 0 \\ \dot{x}_4 = \frac{3(-2 g l m^2 \sin \varphi - 2 g l m M \sin \varphi)}{l^2 m (3 m \cos^2 \varphi - 4 m - 4 M)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi \sin \varphi = 0 \\ m \sin \varphi + M \sin \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \pi k, k \in \mathbf{Z} \quad (9)$$

Запишем вектор состояния для точек равновесия

$$\begin{cases} x_1 = a \in \mathbf{R} \\ x_2 = \dot{a} = 0 \\ x_3 = \varphi = \pi k, k \in \mathbf{Z} \\ x_4 = \dot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

### 1.3 Линеаризация

Линеаризуем уравнение объекта около точки равновесия  $(x, u, f) = 0$  (в нашем случае – верхнее положение маятника). При линеаризации воспользуемся следующими приемами:  $\sin x \approx x$ ,  $\cos x \approx 1$ ,  $x^{n+1} \approx 0$  для малых  $x$  и  $n \in \mathbf{N}$ . Будем считать  $\varphi$  малым.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{3 \cos \varphi \sin \varphi g l m + 6 \cos \varphi f - 2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi l^2 m + 4 l u}{l(3 \cos^2 \varphi m - 4 m - 4 M)} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{3(\cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi}^2 l^2 m^2 - 2 l m u \cos \varphi - 2 g l m^2 \sin \varphi - 2 g l m M \sin \varphi - 4 f m - 4 f M)}{l^2 m (3 m \cos^2 \varphi - 4 m - 4 M)} \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{3 x_3 g l m + 6 f + 4 l u}{l(m+4M)} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{3(2 l m u + 2 g l m^2 x_3 + 2 g l m M x_3 + 4 f m + 4 f M)}{l^2 m (m+4M)} \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{3 g m}{m+4M} x_3 + \frac{4}{m+4M} u + \frac{6}{l(m+4M)} f \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{6 g (m+M)}{l(m+4M)} x_3 + \frac{6}{l(m+4M)} u + \frac{12(m+M)}{l^2 m (m+4M)} f \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Перейдем к математической модели в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (12)$$

где  $A, B, C, D$  – постоянные матрицы, зависящие от значений  $M, m, g, l$ . Здесь  $x = (x_1, \dots, x_4)$  – совокупный вектор состояния,  $y = (y_1, y_2)$  – вектор измеряемых величин.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3gm}{m+4M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{6g(m+M)}{l(m+4M)} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{m+4M} \\ 0 \\ \frac{6}{l(m+4M)} \end{bmatrix},$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6}{l(m+4M)} \\ 0 \\ \frac{12(m+M)}{l^2m(m+4M)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

## 1.4 Выбор исходных данных

Получим численные значения массы тележки  $M = 264.5866$ , массы маятника  $m = 9.1747$  и длины маятника  $l = 2.5849$ . Ускорение свободного падения  $g = 9.81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ .

После подстановки численных значений получим следующие матрицы системы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2529 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5.8395 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0037 \\ 0 \\ 0.0022 \end{bmatrix},$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0022 \\ 0 \\ 0.0502 \end{bmatrix} \quad (14)$$

## 2 АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

### 2.1 Анализ матриц

Найдем собственные числа и собственные вектора матрицы  $A$  модели (12).

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_1 = 0 & v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \lambda_2 = 0 & v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \lambda_3 = 2.4165 & v_3 = \begin{bmatrix} 0.0165 & 0.0400 & 0.3820 & 0.9231 \end{bmatrix}^T \\ \lambda_4 = -2.4165 & v_4 = \begin{bmatrix} -0.0165 & 0.0400 & -0.3820 & 0.9231 \end{bmatrix}^T \end{array} \right. \quad (15)$$

Заметим, что в спектр матрицы  $A$  входит число с положительной вещественной частью, следовательно, система 8 неустойчива.

#### 2.1.1 Управляемость и стабилизируемость системы

Составим матрицу управляемости и определим ее ранг

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0037 & 0 & 0.0005 \\ 0.0037 & 0 & 0.0005 & 0 \\ 0 & 0.0022 & 0 & 0.0127 \\ 0.0022 & 0 & 0.0127 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Rightarrow rank(U) = 4 \quad (16)$$

Ранг матрицы управляемости равен размерности системы, следовательно, система является полностью управляемой, а значит и стабилизируемой.

#### 2.1.2 Наблюдаемость и обнаруживаемость системы

Составим матрицу наблюдаемости и определим ее ранг

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.2529 & 0 \\ 0 & 0 & 5.8395 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2529 \\ 0 & 0 & 0 & 5.8395 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(V) = 4 \quad (17)$$

Ранг матрицы наблюдаемости равен размерности системы, следовательно, система является полностью наблюдаемой, а значит и обнаруживаемой.

## 2.2 Передаточные матрицы

Найдем передаточную матрицу  $W_{u \rightarrow y}(s)$

$$W_{u \rightarrow y}(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{0.003747s^2 - 0.02133}{s^4 - 5.839s^2} \\ \frac{0.002174}{s^2 - 5.839} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Динамический порядок  $\frac{0.003747s^2 - 0.02133}{s^4 - 5.839s^2}$  равен 4, относительный динамический порядок 2; динамический порядок  $\frac{0.002174}{s^2 - 5.839}$  равен 2, относительный динамический порядок равен 2.

Нули функции  $\frac{0.003747s^2 - 0.02133}{s^4 - 5.839s^2}$  равны  $s_0 = \pm 2.3859$ , полюса  $s_p = \{0; 0; \pm 2.4165\}$ .

Полюса  $\frac{0.002174}{s^2 - 5.839}$  равны  $s_p = \{\pm 2.4165\}$ .

Найдем передаточную матрицу  $W_{f \rightarrow y}(s)$

$$W_{f \rightarrow y}(s) = C(sI - A)^{-1}D = \begin{bmatrix} \frac{0.002174}{s^2 - 5.839} \\ \frac{0.0502}{s^2 - 5.839} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Динамический порядок  $\frac{0.002174}{s^2 - 5.839}$  равен 2, относительный динамический порядок 2; динамический порядок  $\frac{0.0502}{s^2 - 5.839}$  равен 2, относительный динамический порядок равен 2.

Полюса для  $\frac{0.002174}{s^2 - 5.839}$  и  $\frac{0.0502}{s^2 - 5.839}$  одинаковы и равны  $s_p = \{\pm 2.4165\}$ .

Заметим, что полюса всех передаточных функций содержат в себе собственные числа матрицы  $A$   $\lambda_{3,4}$  – для функций, кроме первой, полюса первой передаточной функции совпадают с собственными числами матрицы  $A$ .

С физической точки зрения, все передаточные функции описывают расходящийся переходный процесс при  $u = 0$  и  $f = 0$ .

## 2.3 Моделирование

Зададим начальные условия

$$x_{0_1} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.05 \end{bmatrix}, x_{0_2} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.05 \\ 0.01 \end{bmatrix}, x_{0_3} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.05 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix}$$

и выполним моделирование линеаризованного (12) и нелинеаризованного объекта (8) на малом и большем отрезке времени: 1 и 10 секунд, соответственно.

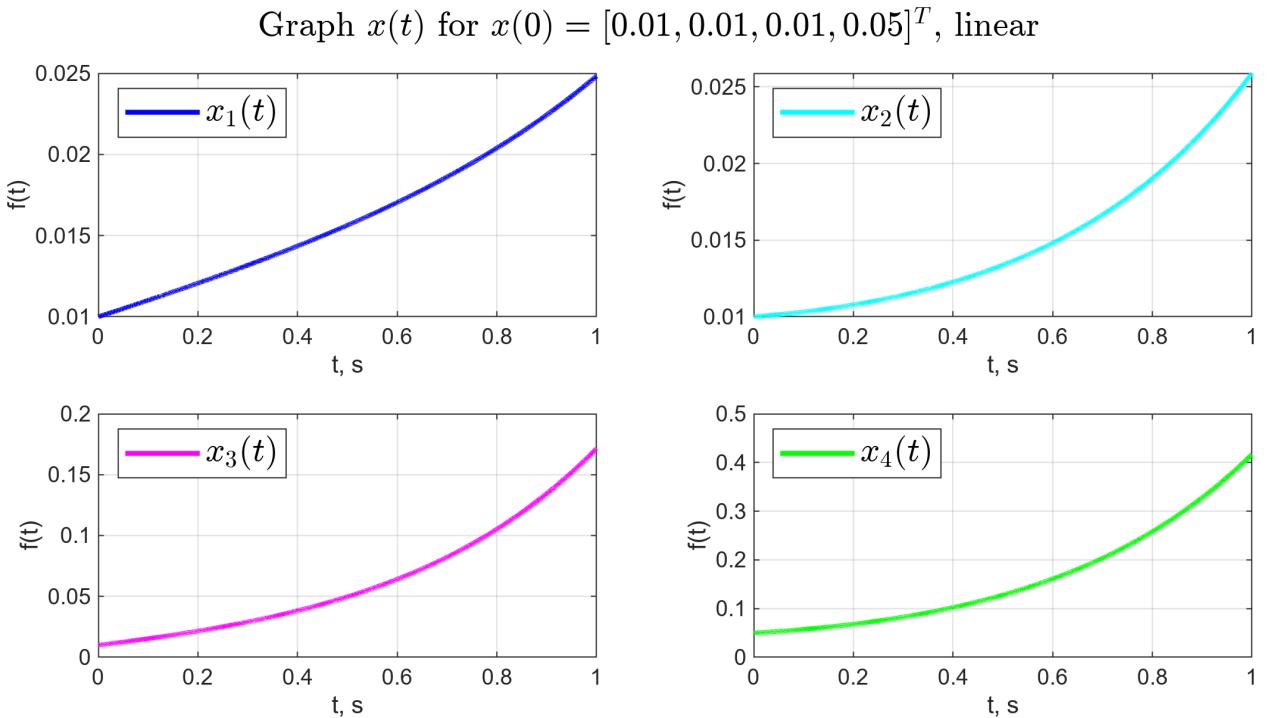


Рисунок 2 — График вектора состояния линеаризованной системы, время моделирования  $t = 1 \text{ с}$ , начальные условия  $x_{0_1}$ .

Заметим, что для малого времени моделирования ( $t = 1 \text{ с}$ ) графики состояния линеаризованной и нелинеаризованной систем близки между собой,

Graph  $x(t)$  for  $x(0) = [0.01, 0.01, 0.01, 0.05]^T$ , nonlinear

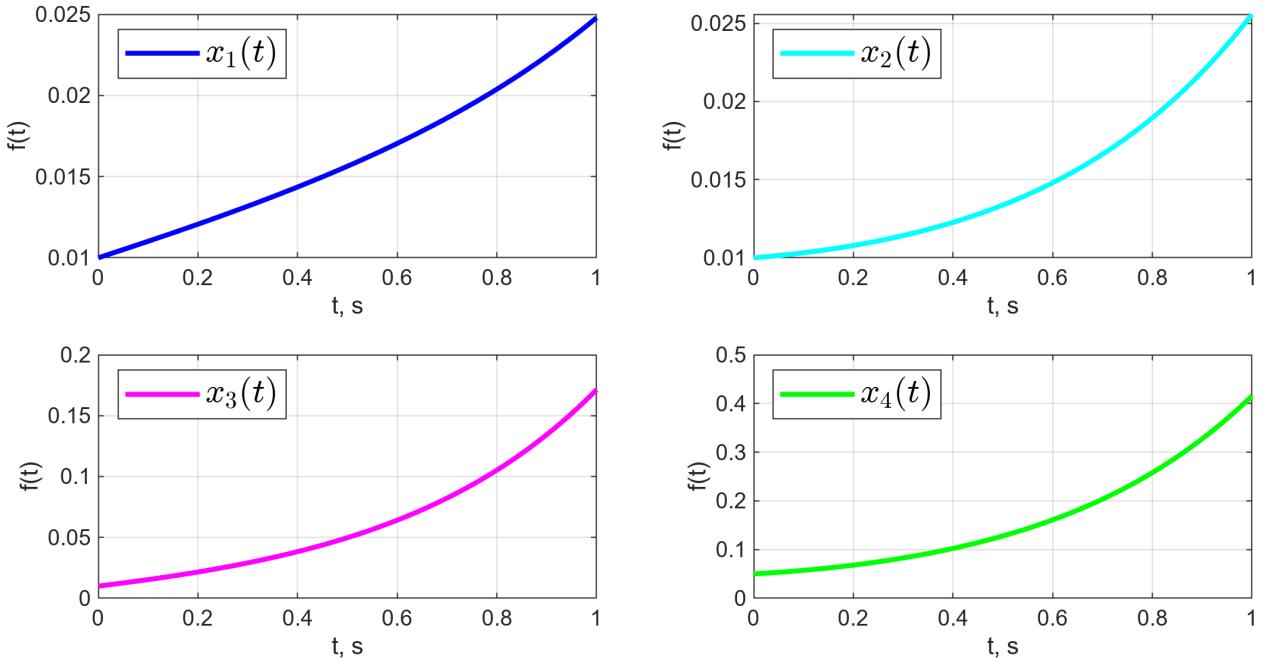


Рисунок 3 — График вектора состояния исходной системы, время моделирования  $t = 1$  с, начальные условия  $x_{01}$ .

Graph  $x(t)$  for  $x(0) = [0.01, 0.01, 0.01, 0.05]^T$ , linear

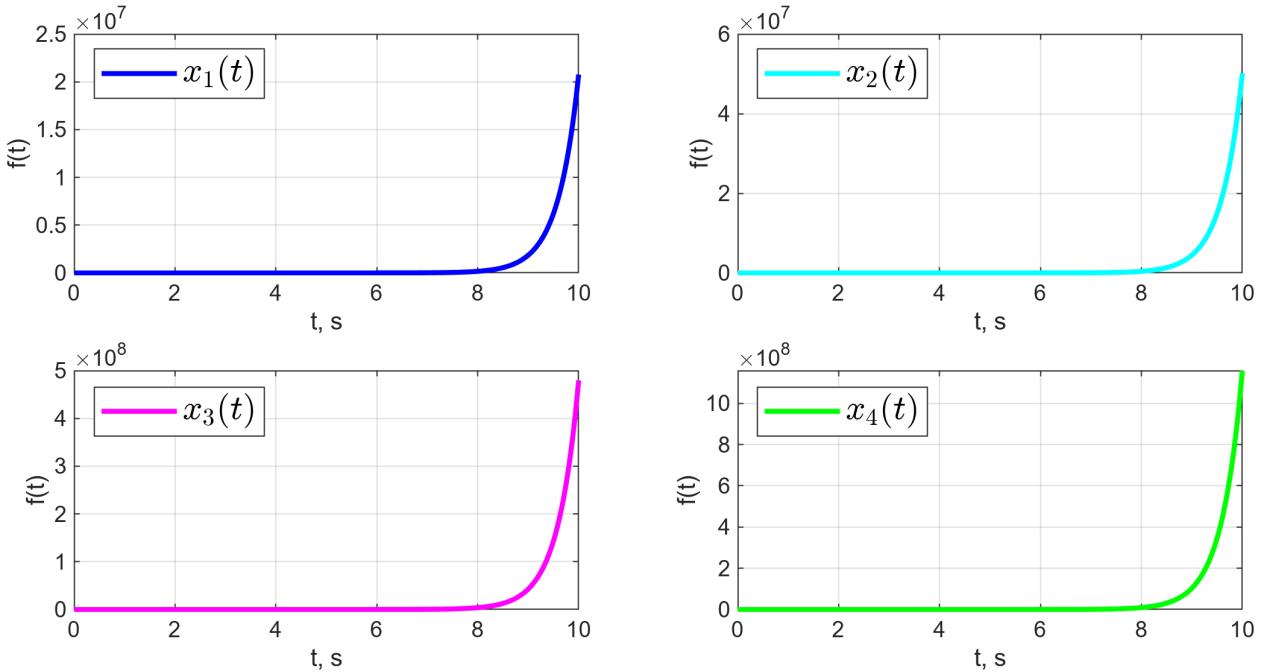


Рисунок 4 — График вектора состояния линеаризованной системы, время моделирования  $t = 10$  с, начальные условия  $x_{01}$ .

однако в случае увеличения времени моделирования до  $t = 10$  с, поведение линеаризованной модели сильно отличается от исходной. Это происхо-

Graph  $x(t)$  for  $x(0) = [0.01, 0.01, 0.01, 0.05]^T$ , nonlinear

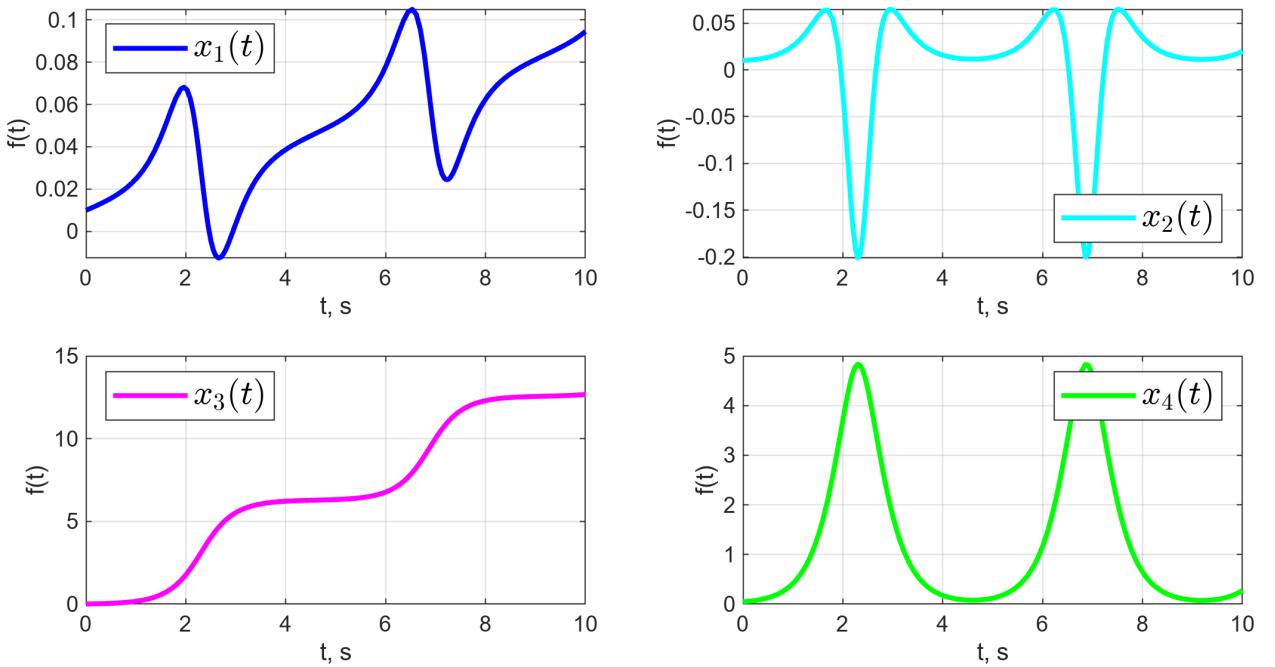


Рисунок 5 — График вектора состояния исходной системы, время моделирования  $t = 10$  с, начальные условия  $x_{01}$ .

дит потому, что в ходе линеаризации мы считали углы отклонения маятника от вертикали малыми.

Поведение, которое мы наблюдаем для нелинеаризованной модели (рисунок 5) близко к поведению реального физического объекта: координата тележки  $x_1$  совершает колебания (то есть движется из стороны в сторону) с постепенным смещением вверх, график угла отклонения  $x_3$  совершает переходы от  $\pi k$  к  $\pi(k + 1)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  (то есть совершает обороты около точки крепления), кроме того, мы видим, что энергия системы сохраняется: максимальная по модулю угловая скорость маятника достигается в нижней точке, минимальная – в верхней.

Далее выполним моделирование систем с начальными условиями  $x_{02}$ , то есть зададим большее значение угла отклонения маятника от вертикали.

Graph  $x(t)$  for  $x(0) = [0.01, 0.01, 0.05, 0.01]^T$ , linear

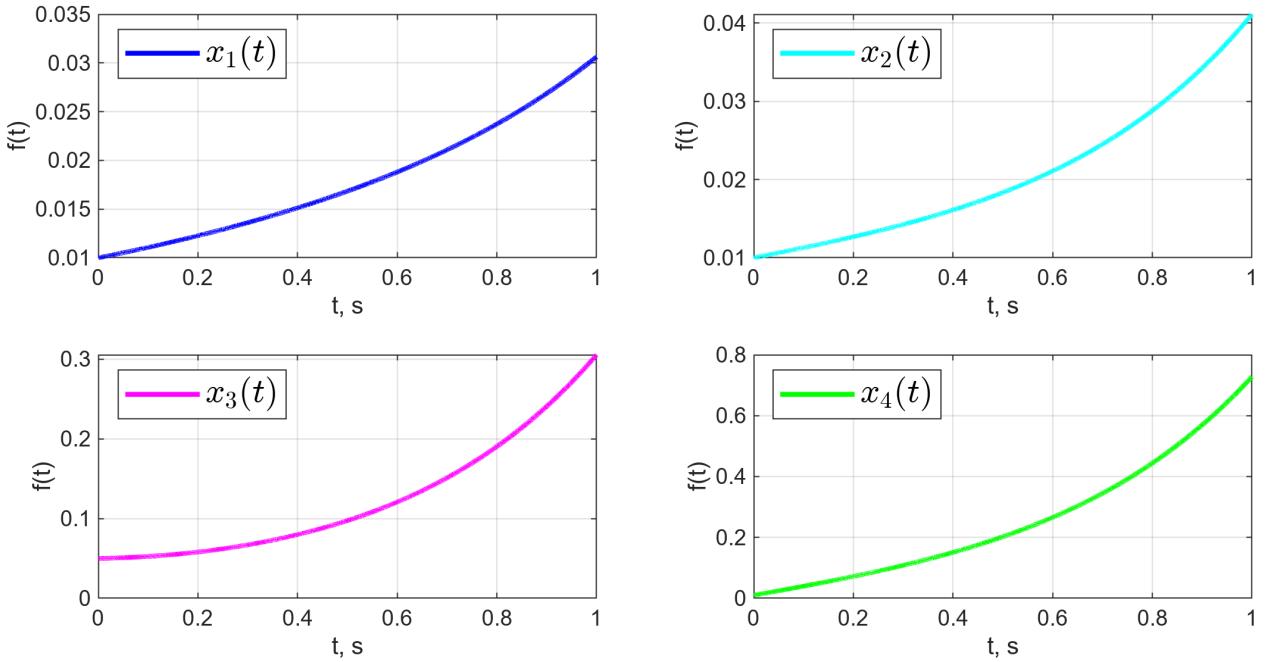


Рисунок 6 — График вектора состояния линеаризованной системы, время моделирования  $t = 1$  с, начальные условия  $x_{02}$ .

Graph  $x(t)$  for  $x(0) = [0.01, 0.01, 0.05, 0.01]^T$ , nonlinear

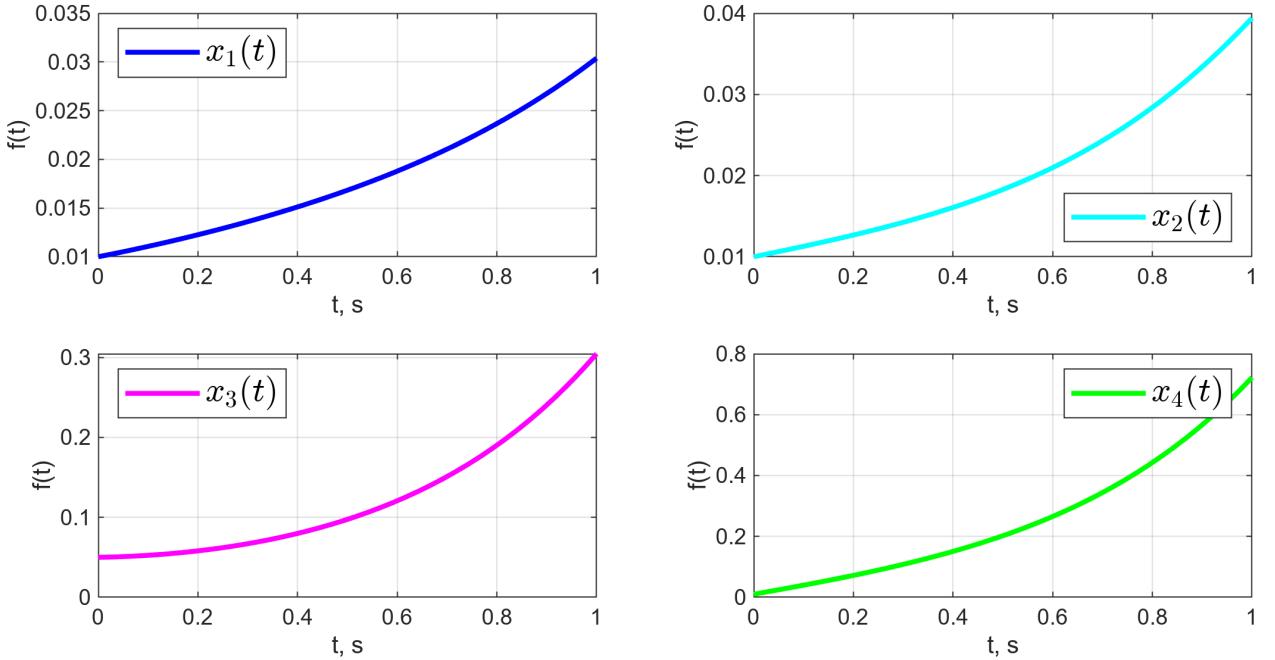


Рисунок 7 — График вектора состояния исходной системы, время моделирования  $t = 1$  с, начальные условия  $x_{02}$ .

Graph  $x(t)$  for  $x(0) = [0.01, 0.01, 0.05, 0.01]^T$ , linear

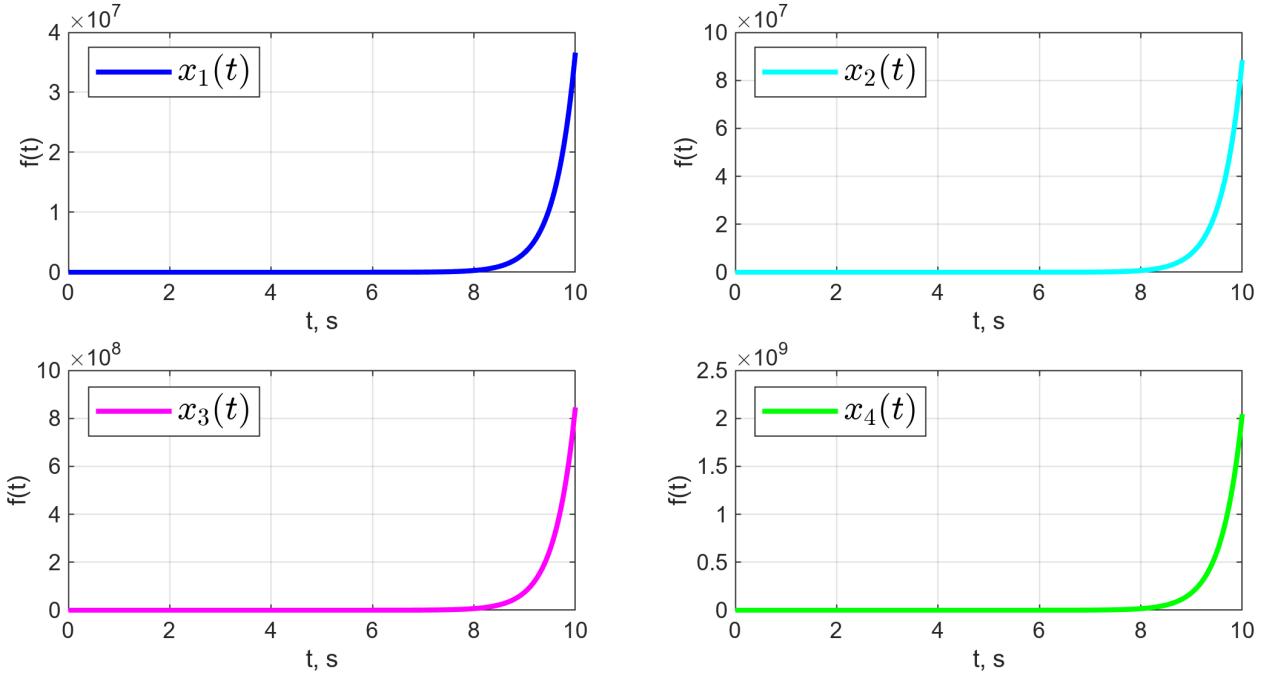


Рисунок 8 — График вектора состояния линеаризованной системы, время моделирования  $t = 10$  с, начальные условия  $x_{02}$ .

Graph  $x(t)$  for  $x(0) = [0.01, 0.01, 0.05, 0.01]^T$ , nonlinear

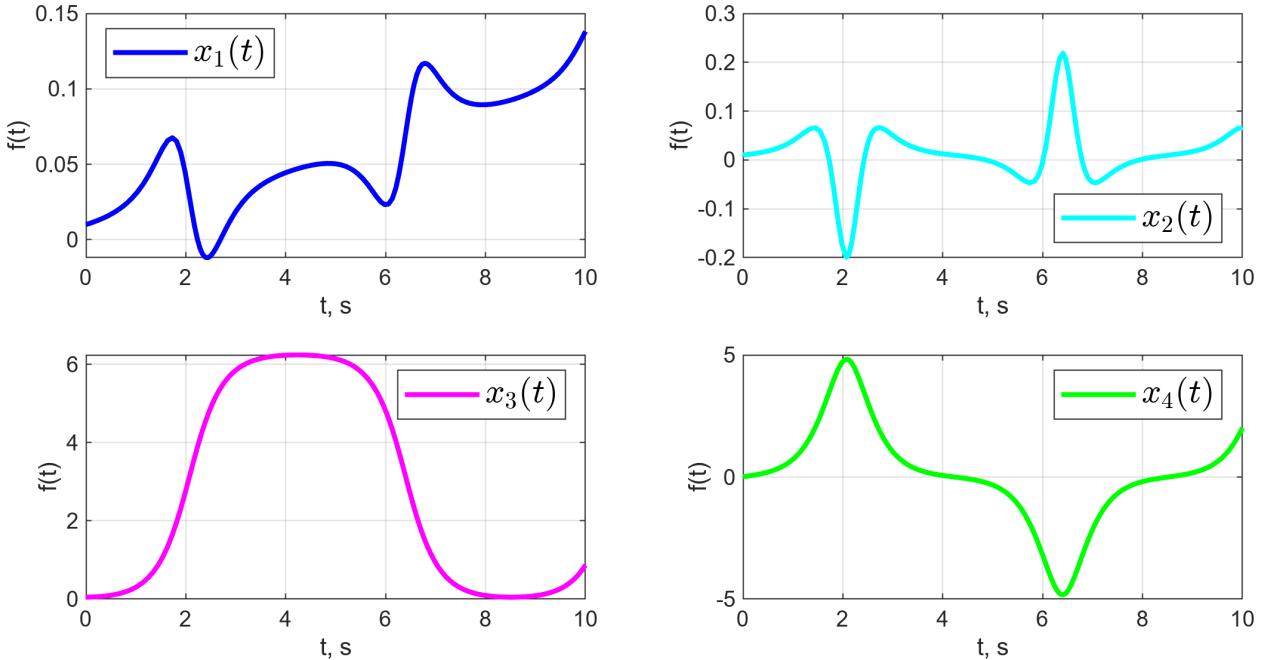


Рисунок 9 — График вектора состояния исходной системы, время моделирования  $t = 10$  с, начальные условия  $x_{02}$ .

Заметим, что поведение линеаризованной и исходной системы вновь схожи при малом времени моделирования  $t = 1$  с (рисунки 6 и 7). При увеличении времени моделирования до  $t = 10$  с линеаризованная система вновь

сильно отличается от исходной. Кроме того, теперь маятник совершает колебания от  $\varphi \approx 0$  до  $\varphi \approx 2\pi$ .

Далее рассмотрим поведение системы при начальных условиях  $x_{0_3}$  — здесь значения также близки к нулю, но теперь больше начальная скорость тележки  $x_2(0)$ .

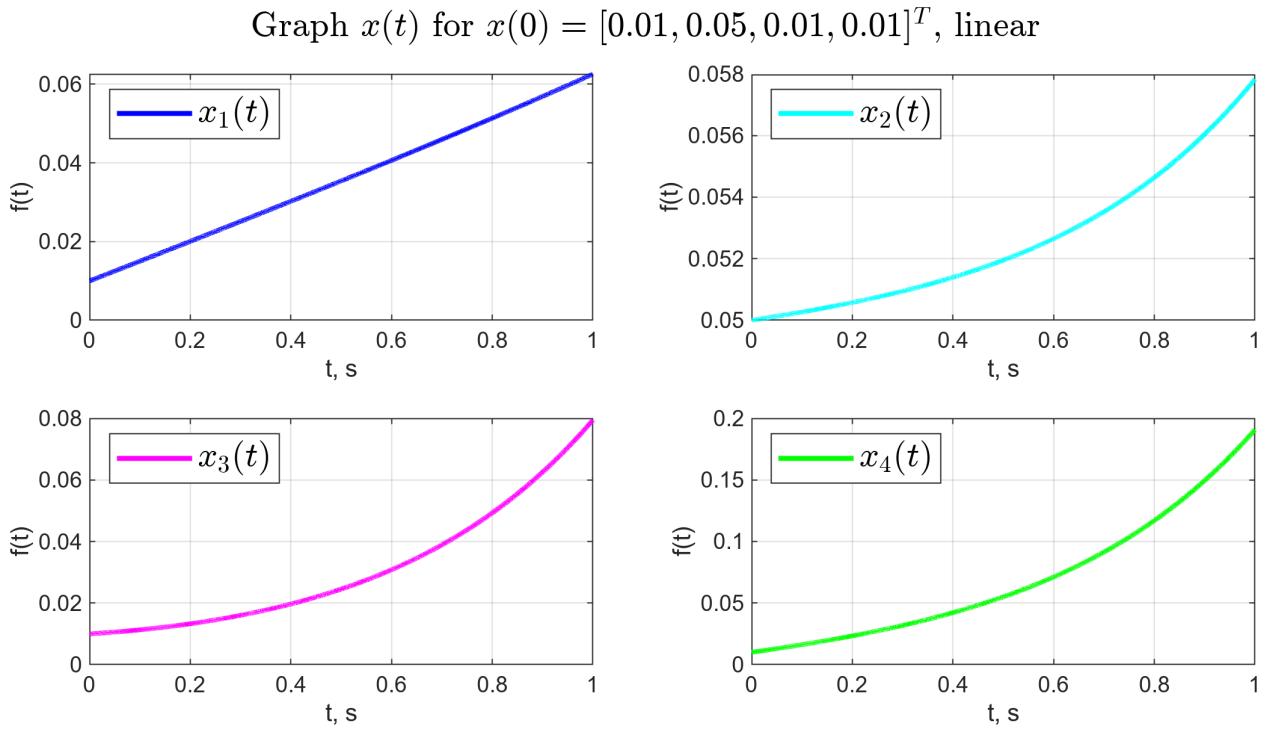


Рисунок 10 — График вектора состояния линеаризованной системы, время моделирования  $t = 1$  с, начальные условия  $x_{0_3}$ .

Graph  $x(t)$  for  $x(0) = [0.01, 0.05, 0.01, 0.01]^T$ , nonlinear

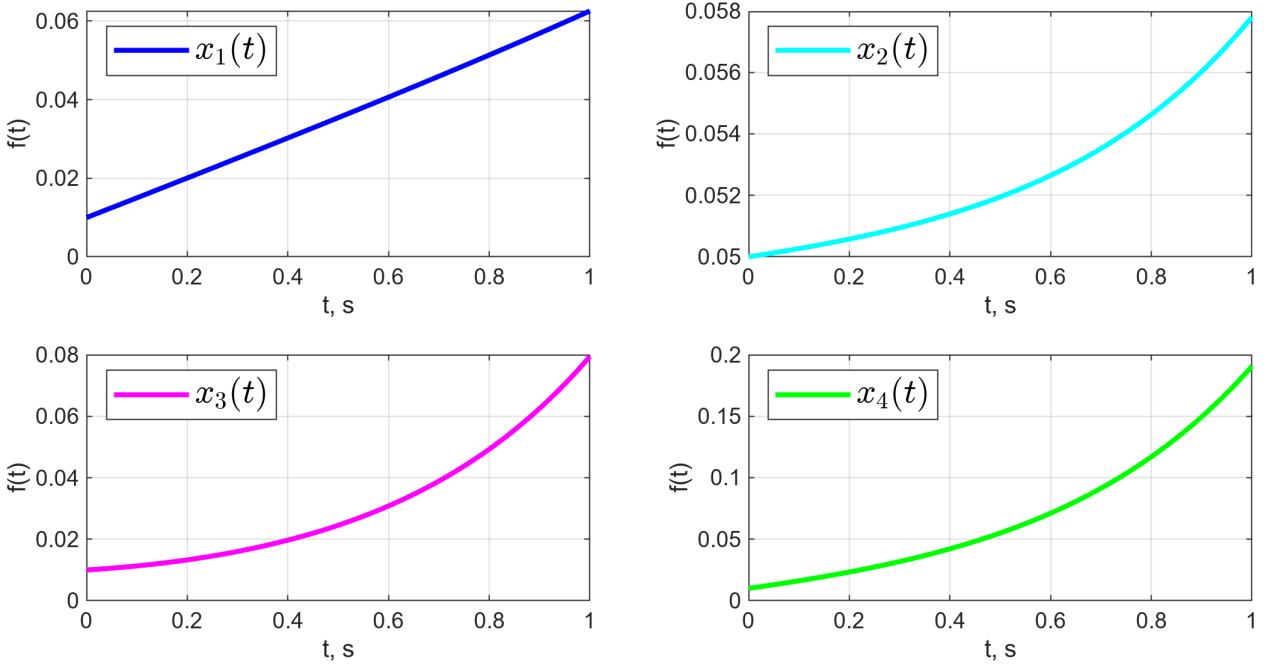


Рисунок 11 — График вектора состояния исходной системы, время моделирования  $t = 1$  с, начальные условия  $x_{03}$ .

Graph  $x(t)$  for  $x(0) = [0.01, 0.05, 0.01, 0.01]^T$ , linear

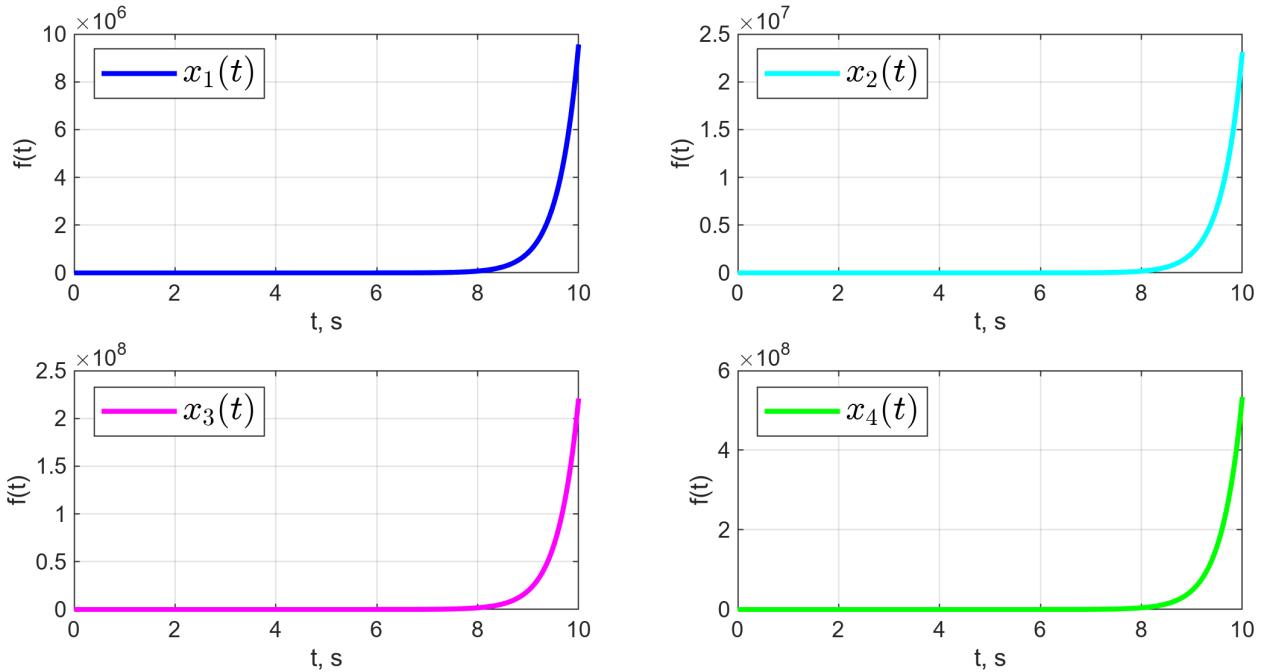


Рисунок 12 — График вектора состояния линеаризованной системы, время моделирования  $t = 10$  с, начальные условия  $x_{03}$ .

Graph  $x(t)$  for  $x(0) = [0.01, 0.05, 0.01, 0.01]^T$ , nonlinear

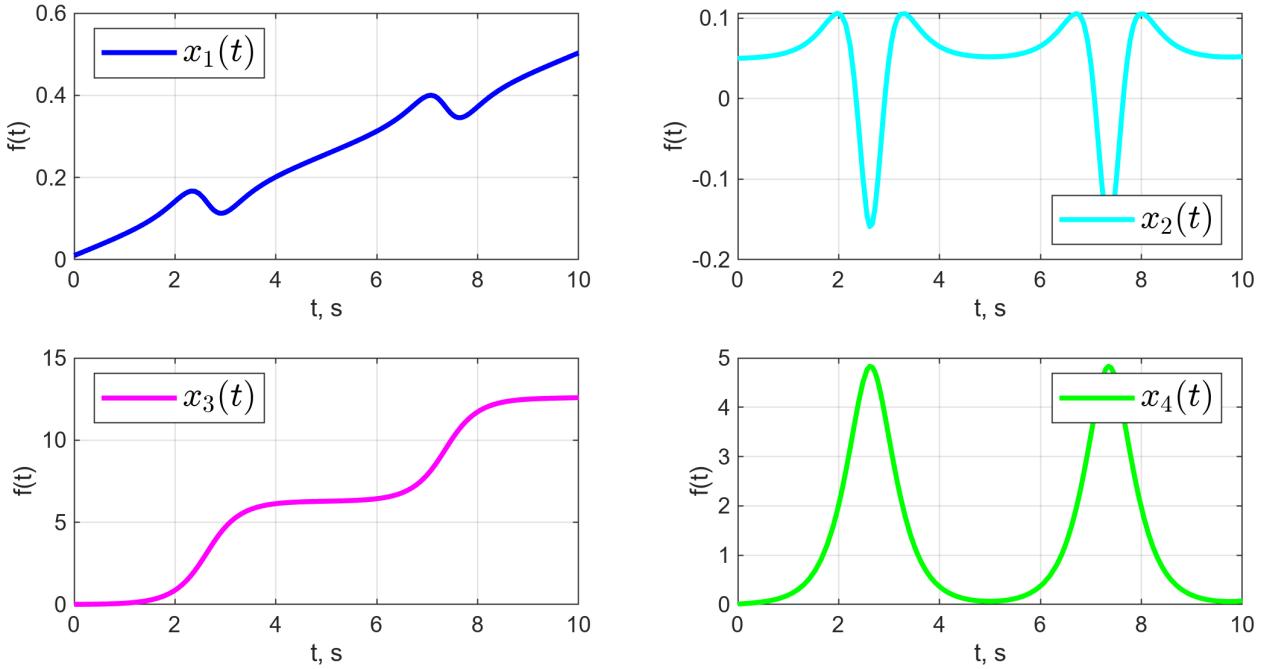


Рисунок 13 — График вектора состояния исходной системы, время моделирования  $t = 10$  с, начальные условия  $x_{03}$ .

Для малого времени моделирования поведение линеаризованной и исходной систем вновь схожи, кроме того, заметим более быстрой рост координаты тележки, чем в предыдущих случаях. На небольшом промежутки времени также наблюдается траектория близкая к линейной, что не характерно для ранее рассмотренных начальных условий.

### 3 СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

#### 3.1 Синтез регулятора по состоянию

Синтезируем регулятор вида

$$u = Kx \quad (20)$$

основываясь на линеаризованной модели (12). В ходе анализа математической модели было выяснено, что система является полностью управляемой и спектр системы  $\sigma(A) = \{0, 0, 2.4165, -2.4165\}$ .

Для нахождения матрицы регулятора  $K$  будем решать систему, содержащую уравнение Сильвестра

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases} \quad (21)$$

Запишем условия существования решения  $P$ :  $\sigma(A) \cap \sigma(\Gamma) = \emptyset$ ,  $(A, B)$  – управляема,  $(Y, \Gamma)$  – наблюдаема. Заметим, что второе условие выполнено.

Учтем то, что порядок ненулевых коэффициентов матрицы  $B$  примерно  $10^{-3}$ , в то время, как матрица  $A$  содержит элементы порядка единиц. Это может потребовать больших коэффициентов  $K$ , постараемся подобрать желаемый спектр так, чтобы требуемое управление было минимальным необходимым для стабилизации системы. Зададимся желаемым спектром замкнутой системы ближе к мнимой оси  $\sigma(A + BK) = \{-0.3, -0.25, -0.2, -0.15\}$ .

Запишем подходящие матрицы  $\Gamma$  и  $Y$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.15 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Проверим, что пара  $(Y, \Gamma)$  – наблюдаема: составим матрицу наблюдаемости и определим ее ранг

$$V = \begin{bmatrix} Y \\ Y\Gamma \\ Y\Gamma^2 \\ Y\Gamma^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.3 & -0.25 & -0.2 & -0.15 \\ 0.09 & 0.0625 & 0.04 & 0.0225 \\ -0.027 & -0.0156 & -0.008 & -0.0034 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{rank}(V) = 4 \quad (23)$$

Ранг матрицы наблюдаемости равен размерности системы, следовательно, пара  $(Y, \Gamma)$  – наблюдаема.

Синтезируем матрицу  $K$  решив систему (21)

$$K = [0.10548 \ 2.0042 \ -2822.6 \ -417.37] \quad (24)$$

Исследуем работоспособность синтезированного регулятора при управлении нелинейной системой (8) с различными начальными условиями при  $f = 0$ . Сначала проверим начальные условия из главы 2:

$$x_{0_1} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.05 \end{bmatrix}, x_{0_2} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.05 \\ 0.01 \end{bmatrix}, x_{0_3} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.05 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix}$$

При начальных условиях  $x_{0_1}$ ,  $x_{0_2}$  и  $x_{0_3}$  вектор состояния нелинейной системы с течением времени сходится к нулю, при данных условиях система стабилизируется. Так как при линеаризации мы считали малыми угол отклонения маятника от вертикали и угловую скорость, зададим вектор начальных условий с большим начальным углом отклонения

$$x_{0_4} = \left[ 0.01 \ 0.01 \ \frac{\pi}{4} \ 0.01 \right]^T$$

и вектор с существенной начальной угловой скоростью

$$x_{0_5} = \left[ 0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 1 \right]^T$$

Graph  $x(t)$  for  $x(0) = [0.01, 0.01, 0.01, 0.05]^T$ , nonlinear

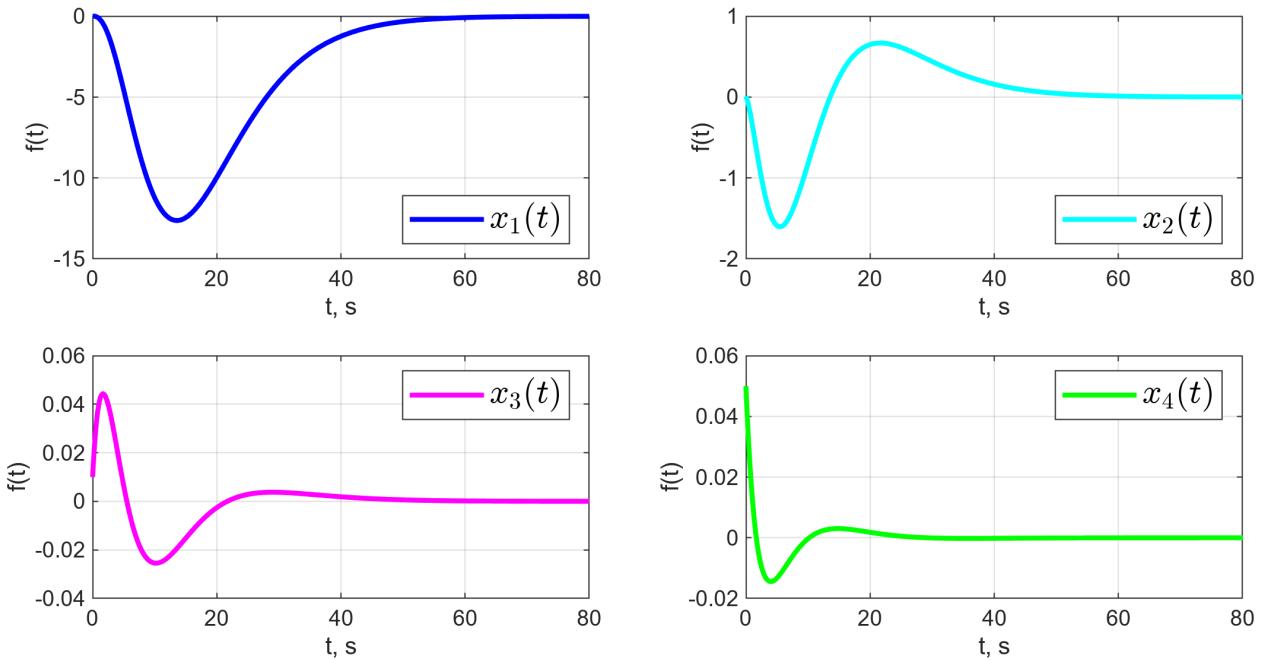


Рисунок 14 — График вектора состояния нелинейной системы, начальные условия  $x_{01}$ .

Graph  $x(t)$  for  $x(0) = [0.01, 0.01, 0.05, 0.01]^T$ , nonlinear

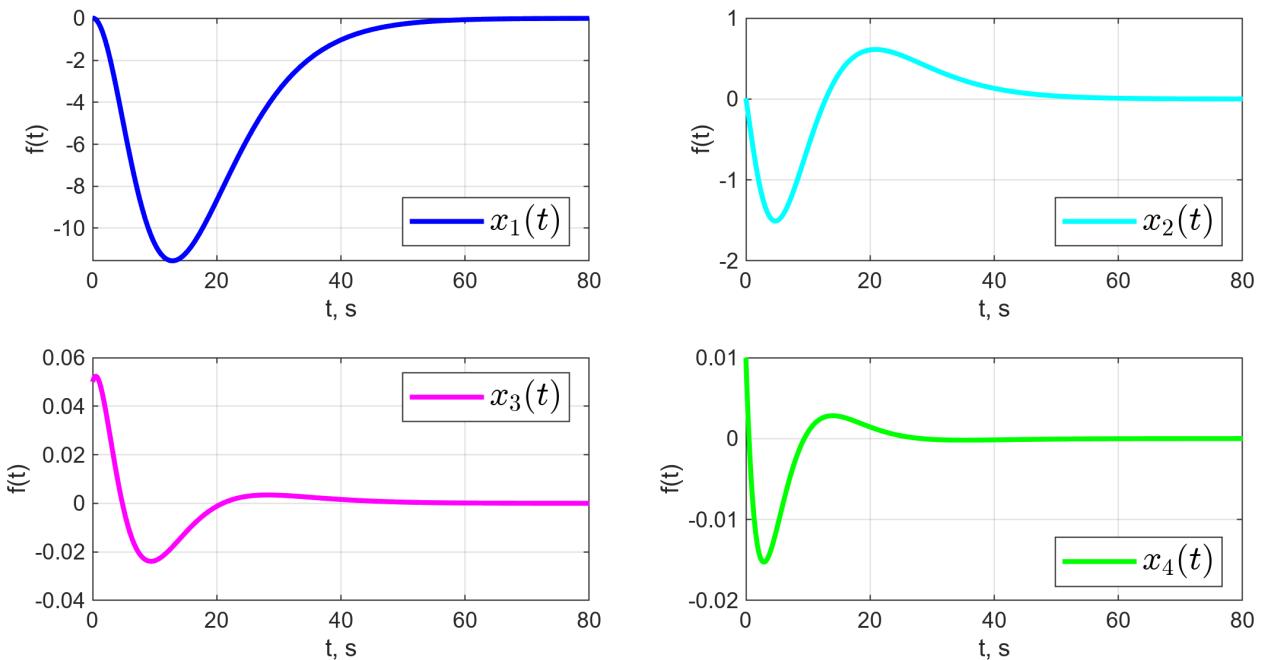


Рисунок 15 — График вектора состояния нелинейной системы, начальные условия  $x_{02}$ .

Graph  $x(t)$  for  $x(0) = [0.01, 0.05, 0.01, 0.01]^T$ , nonlinear

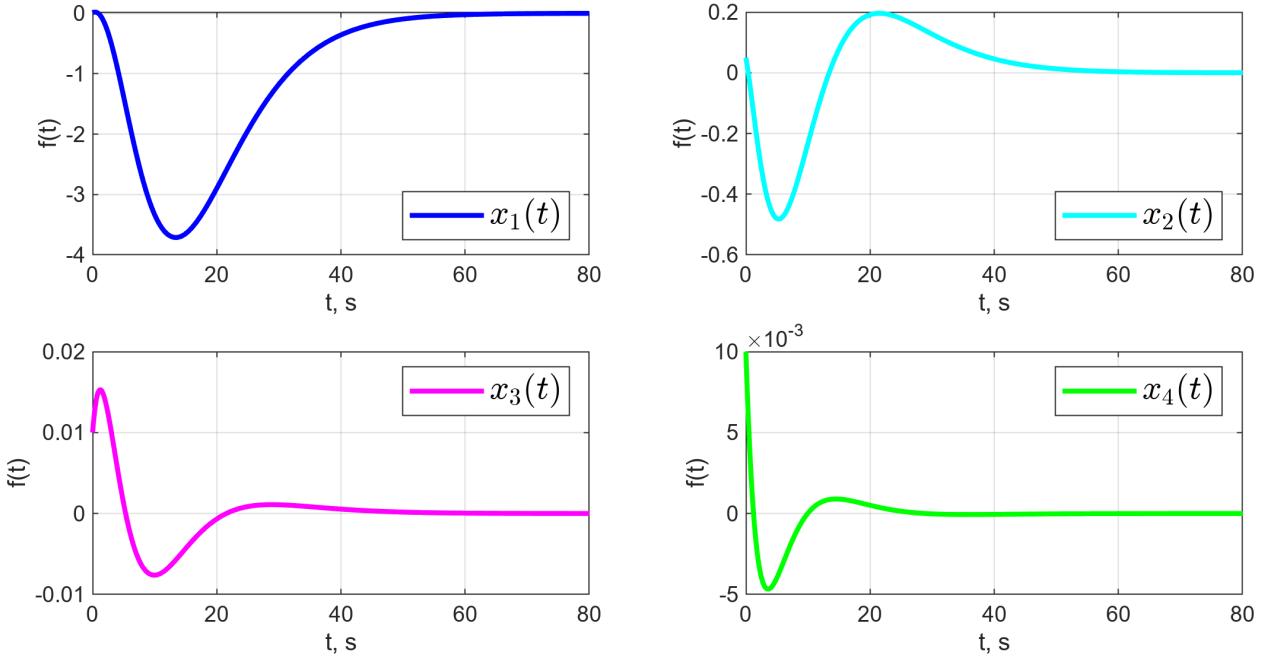


Рисунок 16 — График вектора состояния нелинейной системы, начальные условия  $x_{03}$ .

Graph  $x(t)$  for  $x(0) = [0.01, 0.01, \pi/4, 0.01]^T$ , nonlinear

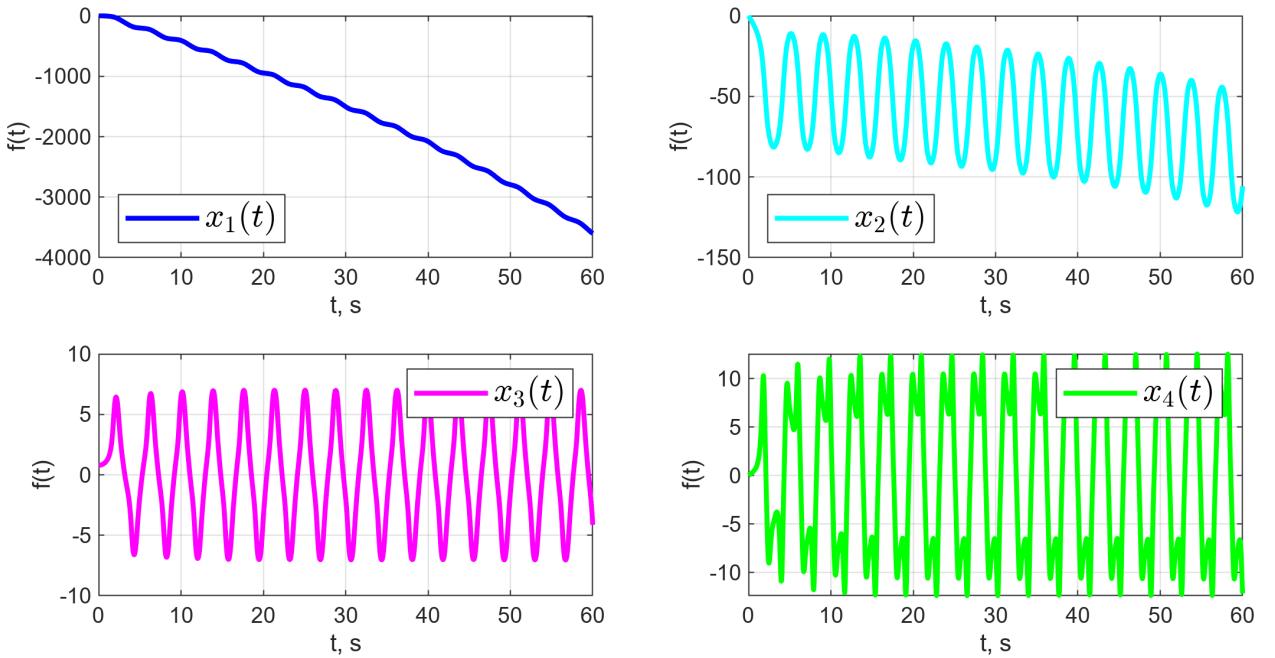


Рисунок 17 — График вектора состояния нелинейной системы, начальные условия  $x_{04}$ .

Заметим, что действительно при задании довольно большого угла начального отклонения маятника, система уже не стабилизируется синтезированным регулятором (рисунок 17), также как и при большем начальном значении угловой скорости (рисунок 18).

Graph  $x(t)$  for  $x(0) = [0.01, 0.01, 0.01, 1]^T$ , nonlinear

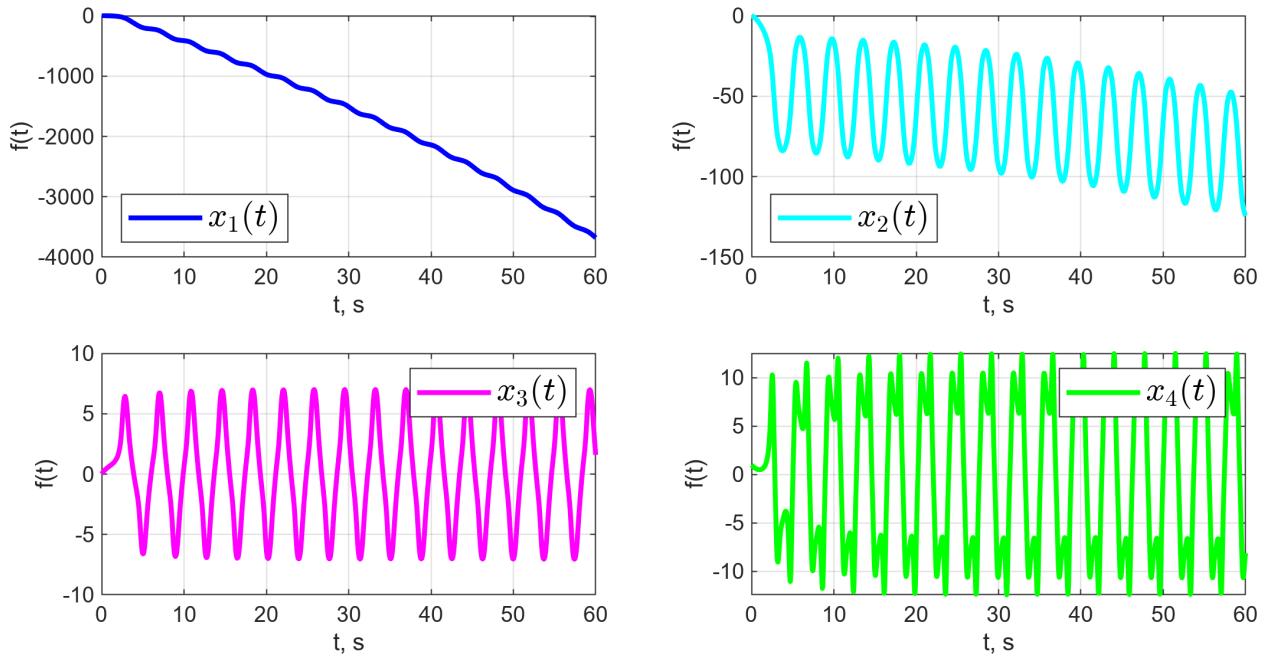


Рисунок 18 — График вектора состояния нелинейной системы, начальные условия  $x_{05}$ .

Заметим также, что система нестабилизируется также при сильном увеличении начального значения скорости тележки (рисунок 19)

$$x_{06} = \begin{bmatrix} 0.01 & 25 & 0.01 & 0.01 \end{bmatrix}^T$$

Graph  $x(t)$  for  $x(0) = [0.01, 25, 0.01, 0.01]^T$ , nonlinear

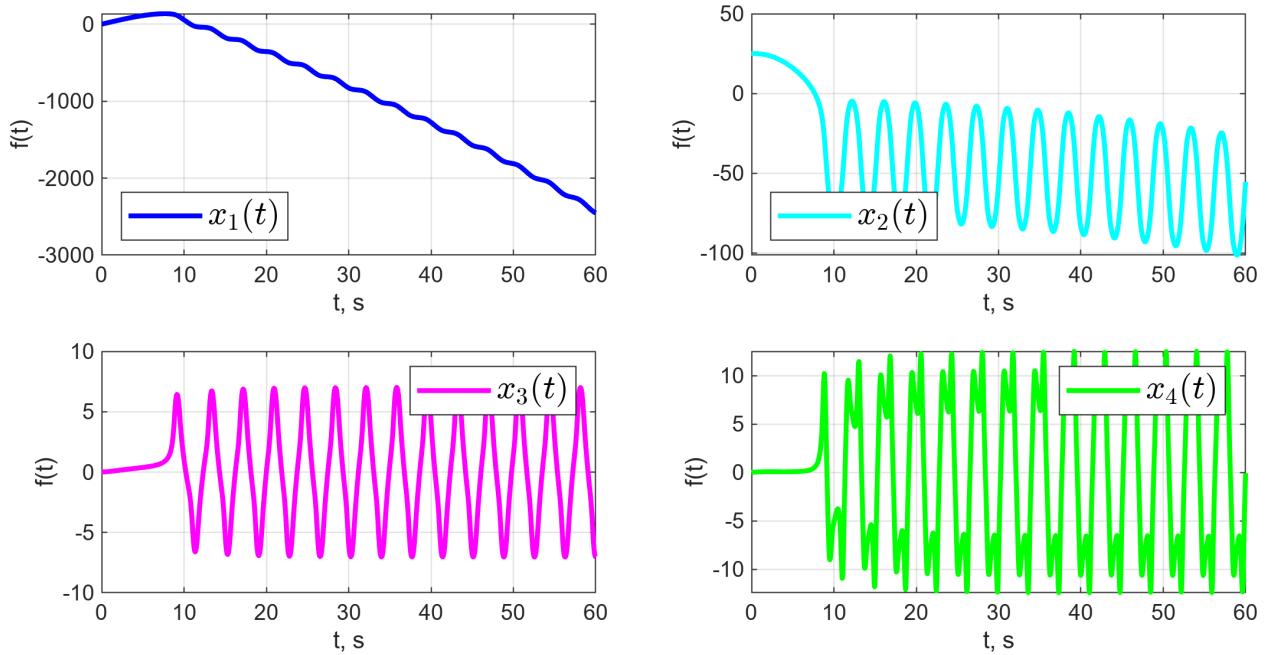


Рисунок 19 — График вектора состояния нелинейной системы, начальные условия  $x_{06}$ .

Убедимся в том, что изменение начального значения координаты тележки до 100, не препятствует успешной стабилизации системы (рисунок 20)

$$x_{07} = \begin{bmatrix} 100 & 0.01 & 0.01 & 0.01 \end{bmatrix}^T$$

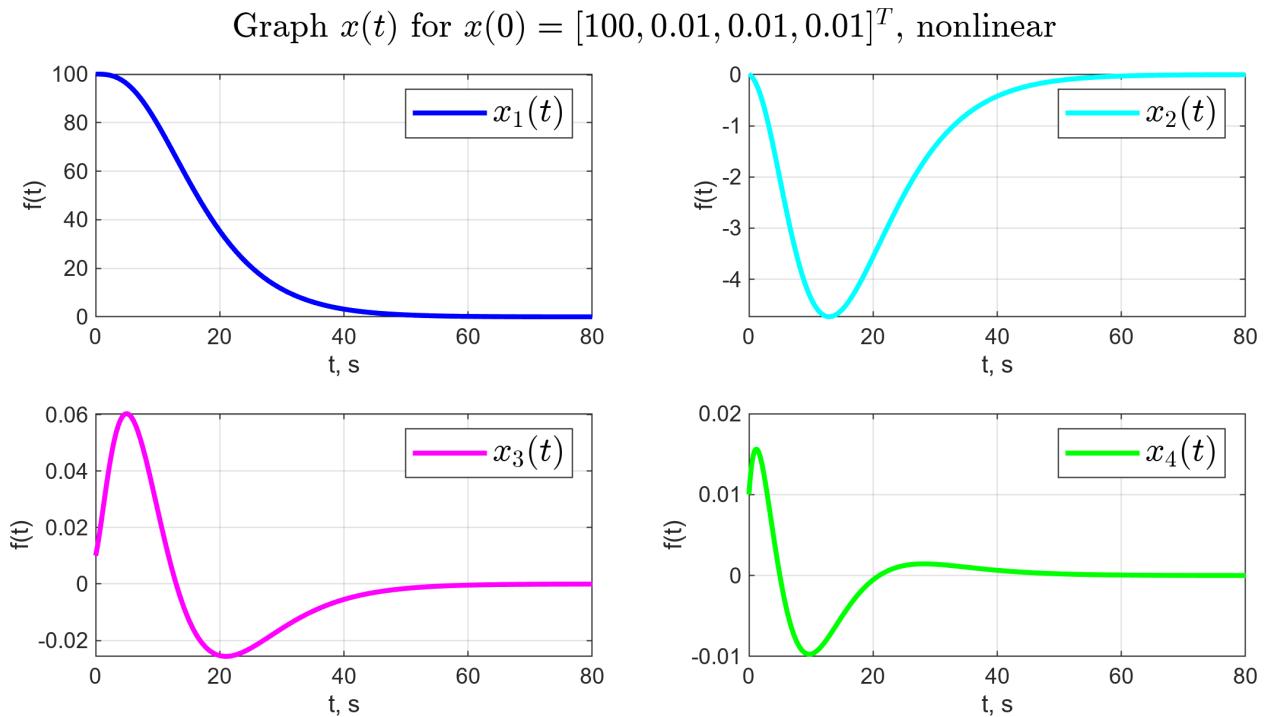


Рисунок 20 — График вектора состояния нелинейной системы, начальные условия  $x_{07}$ .

Однако при повышении начального значения координаты тележки до 1000 стабилизировать систему с помощью синтезированного регулятора не удается (рисунок 21)

$$x_{08} = \begin{bmatrix} 1000 & 0.01 & 0.01 & 0.01 \end{bmatrix}^T$$

Graph  $x(t)$  for  $x(0) = [1000, 0.01, 0.01, 0.01]^T$ , nonlinear

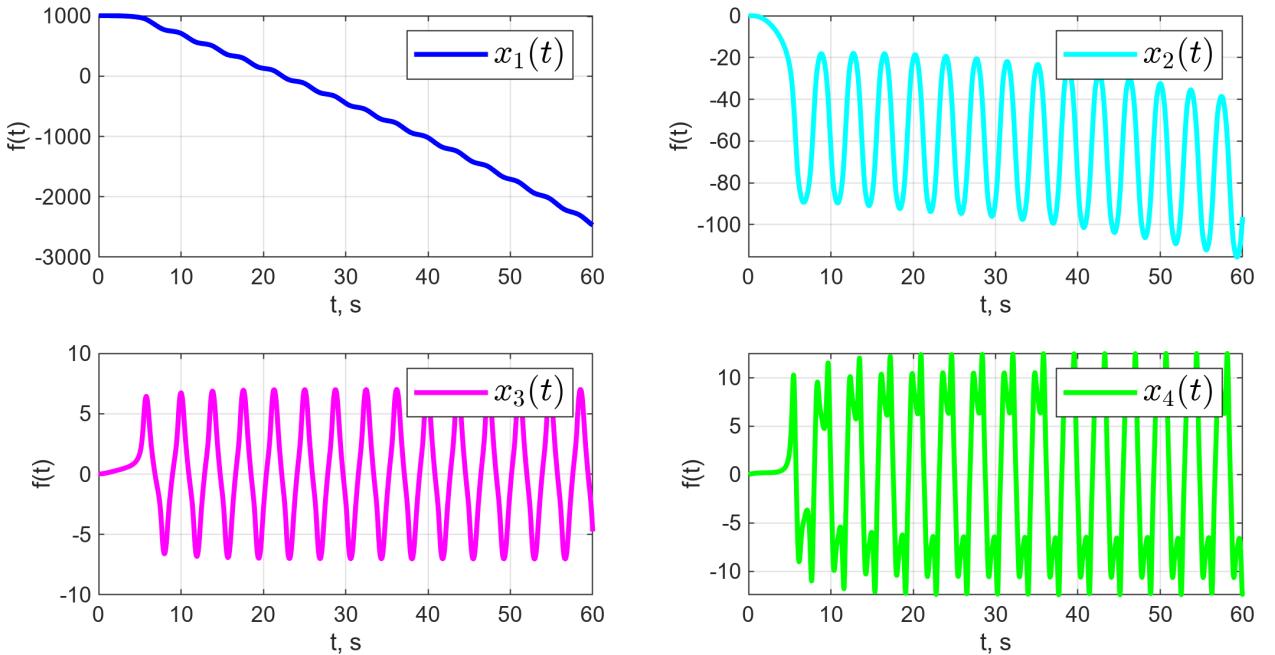


Рисунок 21 — График вектора состояния нелинейной системы, начальные условия  $x_{08}$ .

### 3.1.1 Краткий вывод

При начальных условиях, близких к нулю (наборы  $x_{01}, x_{02}, x_{03}$ ), синтезированный регулятор позволяет стабилизировать систему. Начальные условия для угла отклонения и угловой скорости не позволяют стабилизировать систему, если принимают значения порядка единицы. В ходе дополнительного моделирования было выяснено, что критическим значением начальной скорости тележки, при котором регулятор не работает, является  $\approx 18$  м/с. Критическим значением начальной координаты тележки, при котором перестает работать регулятор, является  $\approx 400$  м.

## 3.2 Исследование регулятора по состоянию

Исследуем влияние выбранных собственных чисел на максимальное отклонение маятника от вертикали, максимальное горизонтальное смещение тележки и максимальное значение управляющего сигнала при управлении нелинейной системой (8).

Будем рассматривать следующие спектры замкнутой системы

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \{-0.3, -0.25, -0.2, -0.15\}, & \sigma_2 &= \{-3, -2.5, -2, -1.5\}, \\ \sigma_3 &= \{-1, -2, -3 \pm 3i\}, & \sigma_4 &= \{-10, -20, -30 \pm 10i\}\end{aligned}$$

в качестве начальных условий примем вектор

$$x(0) = [0.01 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0.01]^T$$

Таблица 1 — Значения управления  $u(t)$  и состояний системы

Спектр	$\max  \varphi $	$\max  a $	$\max  u $
$\sigma_1$	0.0152	3.9533	43.4049
$\sigma_2$	0.0101	0.0389	227.1943
$\sigma_3$	0.0101	0.0329	277.5976
$\sigma_4$	0.0499	0.0935	96295

Graphs for  $\sigma = \{-0.3, -0.25, -0.2, -0.15\}$ , nonlinear

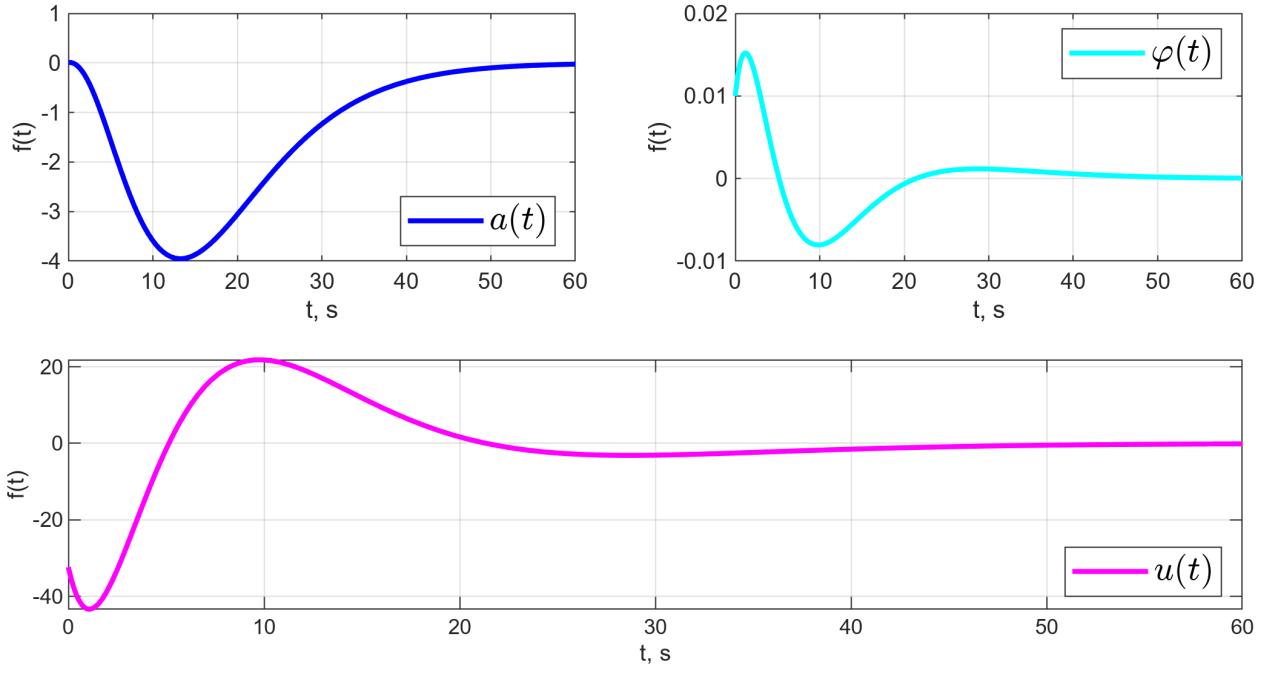


Рисунок 22 — Графики координаты тележки, угла отклонения маятника от вертикали и  $u(t)$  для  $\sigma_1$ .

Заметим, что при увеличении модулей значений спектра, возрастает максимальное значение управляющего сигнала, но уменьшается время, через которое вектор состояния системы становится неотличим от нуля.

Graphs for  $\sigma = \{-3, -2.5, -2, -1.5\}$ , nonlinear

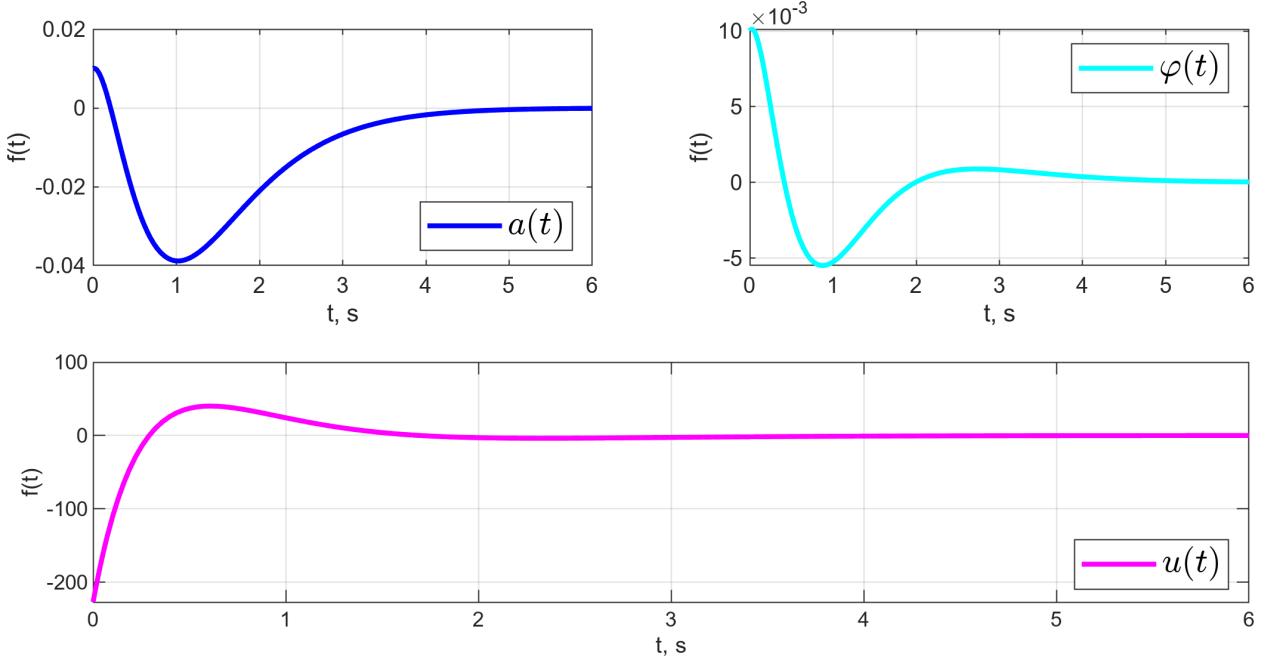


Рисунок 23 — Графики координаты тележки, угла отклонения маятника от вертикали и  $u(t)$  для  $\sigma_2$ .

Graphs for  $\sigma = \{-1, -2, -3 \pm 3i\}$ , nonlinear

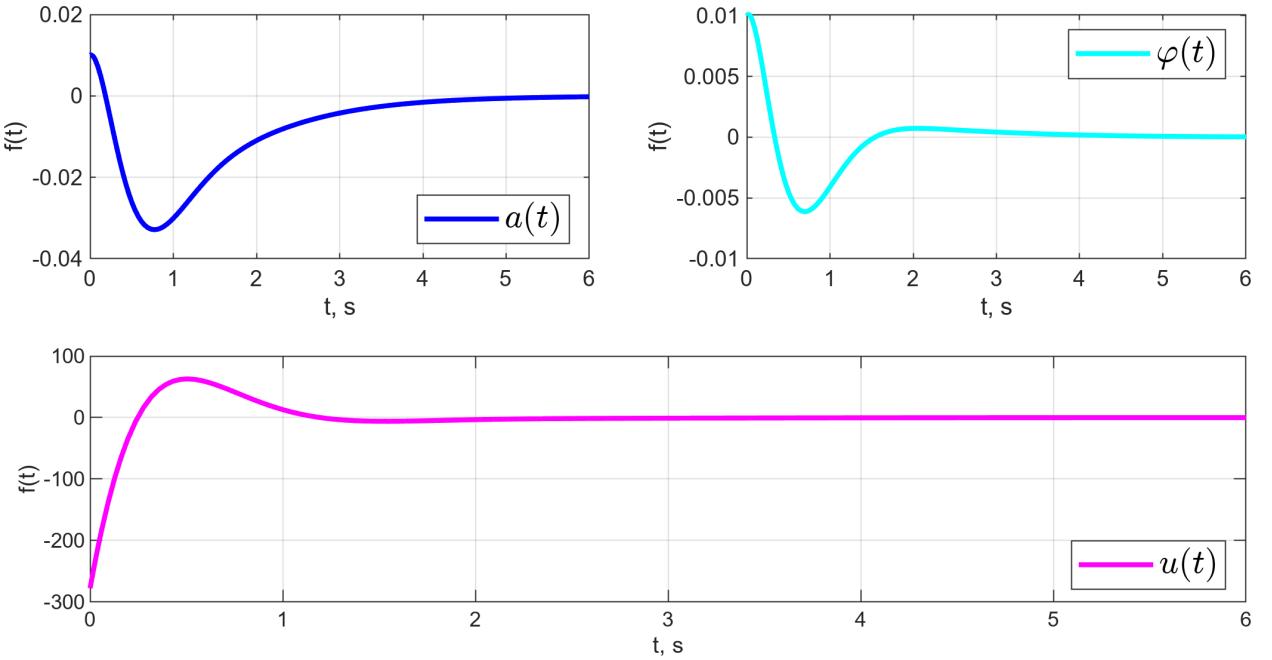


Рисунок 24 — Графики координаты тележки, угла отклонения маятника от вертикали и  $u(t)$  для  $\sigma_3$ .

Graphs for  $\sigma = \{-10, -20, -30 \pm 10i\}$ , nonlinear

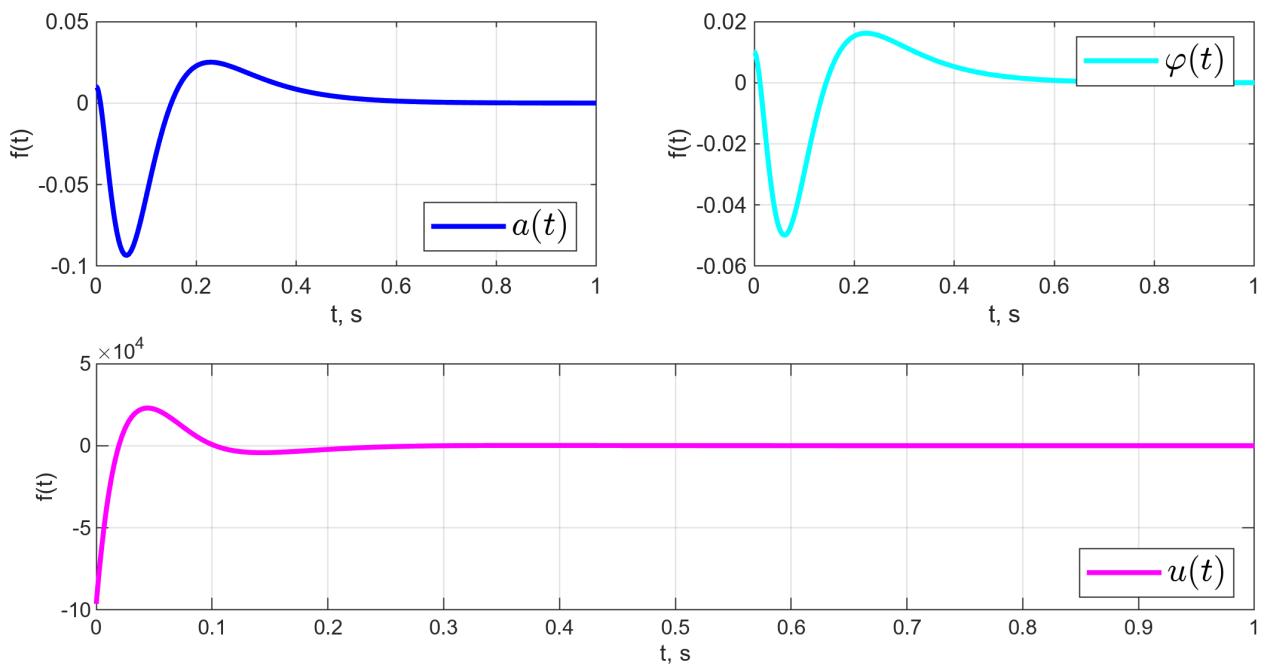


Рисунок 25 — Графики координаты тележки, угла отклонения маятника от вертикали и  $u(t)$  для  $\sigma_4$ .

### 3.3 Синтез наблюдателя

#### 3.3.1 Наблюдатель полной размерности

Запишем наблюдатель полной размерности

$$\begin{cases} \hat{y} = C\hat{x}, \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \end{cases} \quad (25)$$

Для нахождения матрицы регулятора  $L$  будем решать систему, содержащую уравнение Сильвестра

$$\begin{cases} \Gamma Q - QA = YC \\ L = Q^{-1}Y \end{cases} \quad (26)$$

Запишем условия существования решения  $Q$ :  $\sigma(A) \cap \sigma(\Gamma) = \emptyset$ ,  $(\Gamma, Y)$  – управляема,  $(C, A)$  – наблюдаема. Заметим, что последнее условие выполнено.

Зададимся спектром  $\sigma = \{-1, -2, -3, -4\}$ , запишем подходящие матрицы  $\Gamma$  и  $Y$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Убедимся, что условие  $(\Gamma, Y)$  – управляема выполнено, составим матрицу управляемости и найдем ее ранг

$$U = \begin{bmatrix} Y & \Gamma Y & \Gamma^2 Y & \Gamma^3 Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 4 & 4 & -8 & -8 \\ 1 & 1 & -3 & -3 & 9 & 9 & -27 & -27 \\ 1 & 1 & -4 & -4 & 16 & 16 & -64 & -64 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{rank}(U) = 4 \quad (28)$$

Ранг матрицы  $U$  равен размерности системы,  $(\Gamma, Y)$  – управляема.

Решим систему (26) и получим  $L$

$$L = \begin{bmatrix} 7.7918 & 7.7918 \\ 2.2438 & 2.2438 \\ -17.7918 & -17.7918 \\ -43.0833 & -43.0833 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Выберем систему, замкнутую систему со спектром  $\sigma_2 = \{-3, -2.5, -2, -1.5\}$  из исследованных ранее в пункте 3.2.

Запишем начальные условия системы и наблюдателя

$$\begin{aligned} x(0) &= [0.01 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0.01]^T \\ \hat{x}(0) &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned} \quad (30)$$

Построим графики  $x(t)$  и  $\hat{x}$  (рисунок 26) и график ошибки  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  (рисунок 27). Заметим, что синтезированный наблюдатель работает довольно успешно: ошибка наблюдения становится визуально неотличима от нуля после  $t = 2$  с.

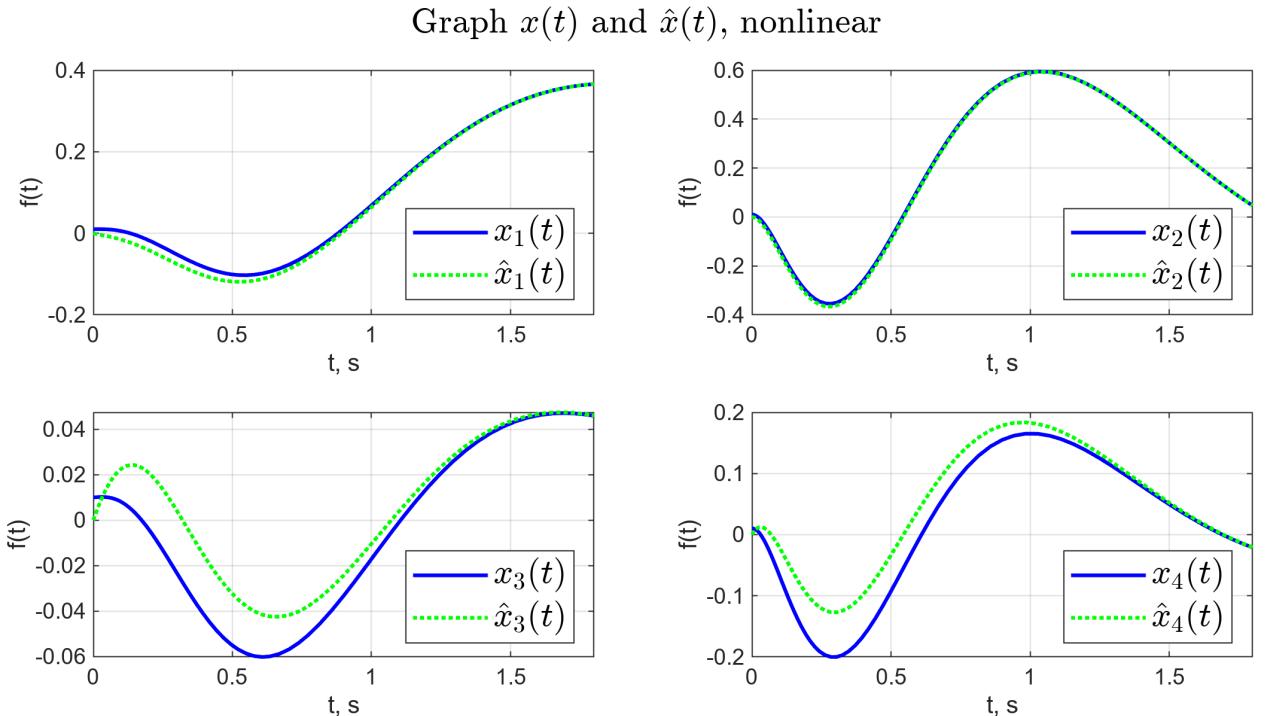


Рисунок 26 — Графики  $x(t)$  и  $\hat{x}(t)$ .

Теперь зададимся несколькими дополнительными наборами собственных чисел наблюдателя и исследуем их влияние на систему

Graph  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ , nonlinear

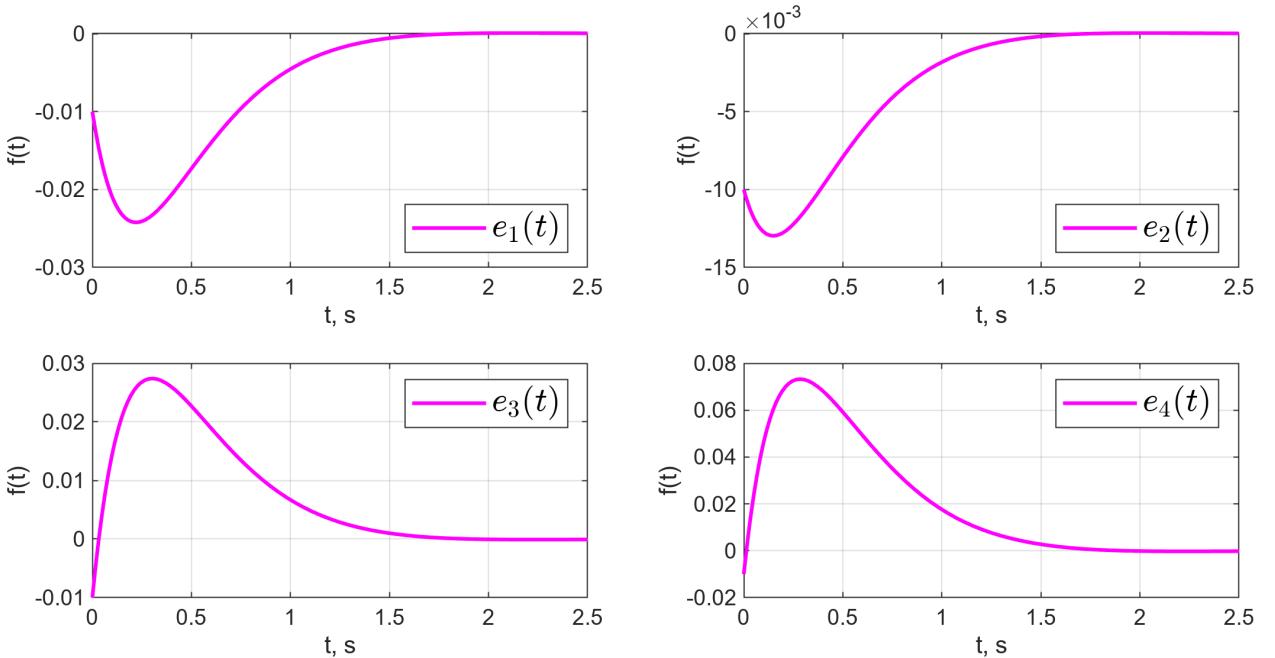


Рисунок 27 — Графики  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ .

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \{-0.1, -0.2, -0.3, -0.4\}, \quad \sigma_2 = \{-5, -10, -15, -20\}, \\ \sigma_3 &= \{-1, -2, -3 \pm 3i\}\end{aligned}$$

Graph  $x(t)$  and  $\hat{x}(t)$  for  $\sigma_1$ , nonlinear

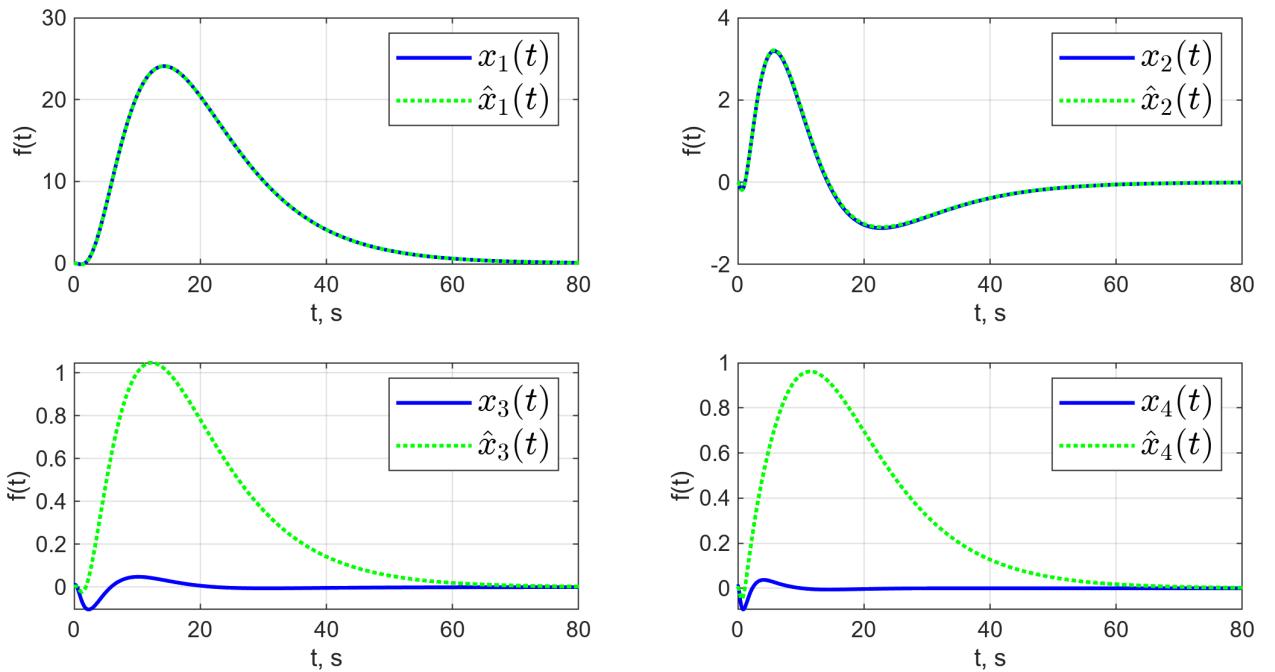


Рисунок 28 — Графики  $x(t)$  и  $\hat{x}(t)$  для  $\sigma_1 = \{-0.1, -0.2, -0.3, -0.4\}$ .

Graph  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  for  $\sigma_1$ , nonlinear

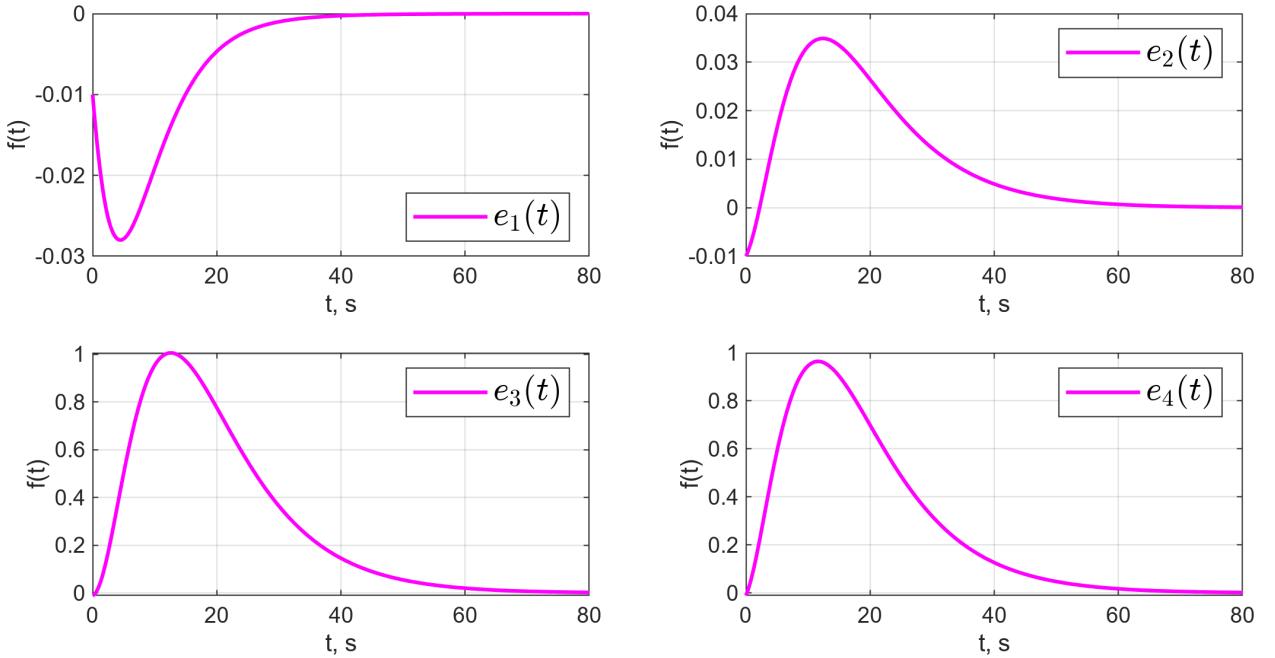


Рисунок 29 — Графики  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  для  $\sigma_1 = \{-0.1, -0.2, -0.3, -0.4\}$ .

При малых значениях спектра наблюдателя  $\sigma_1 = \{-0.1, -0.2, -0.3, -0.4\}$  наблюдатель выполняет свою задачу (рисунки 28 и 29), время, за которое ошибка наблюдения сходится к нулю сильно возрастает (до  $\approx 80$  с).

Graph  $x(t)$  and  $\hat{x}(t)$  for  $\sigma_2$ , nonlinear

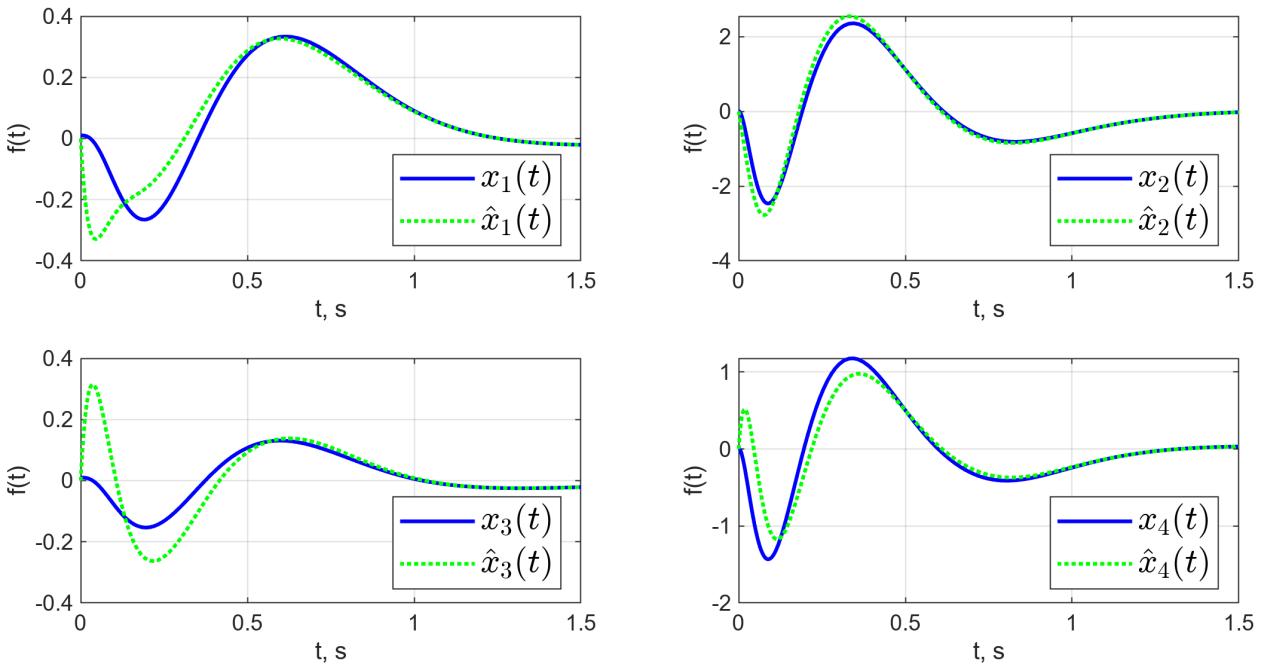


Рисунок 30 — Графики  $x(t)$  и  $\hat{x}(t)$  для  $\sigma_2 = \{-5, -10, -15, -20\}$ .

Graph  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  for  $\sigma_2$ , nonlinear

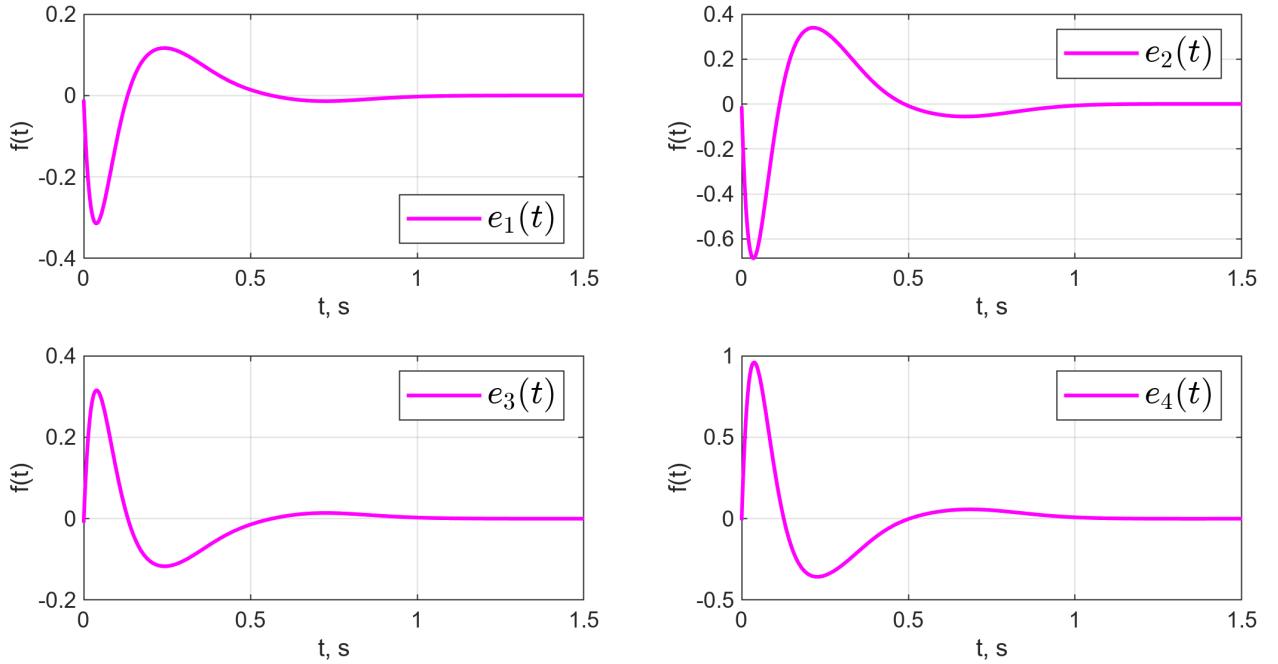


Рисунок 31 — Графики  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  для  $\sigma_2 = \{-5, -10, -15, -20\}$ .

При больших значениях собственных чисел наблюдателя  $\sigma_1 = \{-5, -10, -15, -20\}$  время, после которого ошибка наблюдения становится неотличима от нуля, существенно сокращается до  $\approx 1$  секунды.

Graph  $x(t)$  and  $\hat{x}(t)$  for  $\sigma_3$ , nonlinear

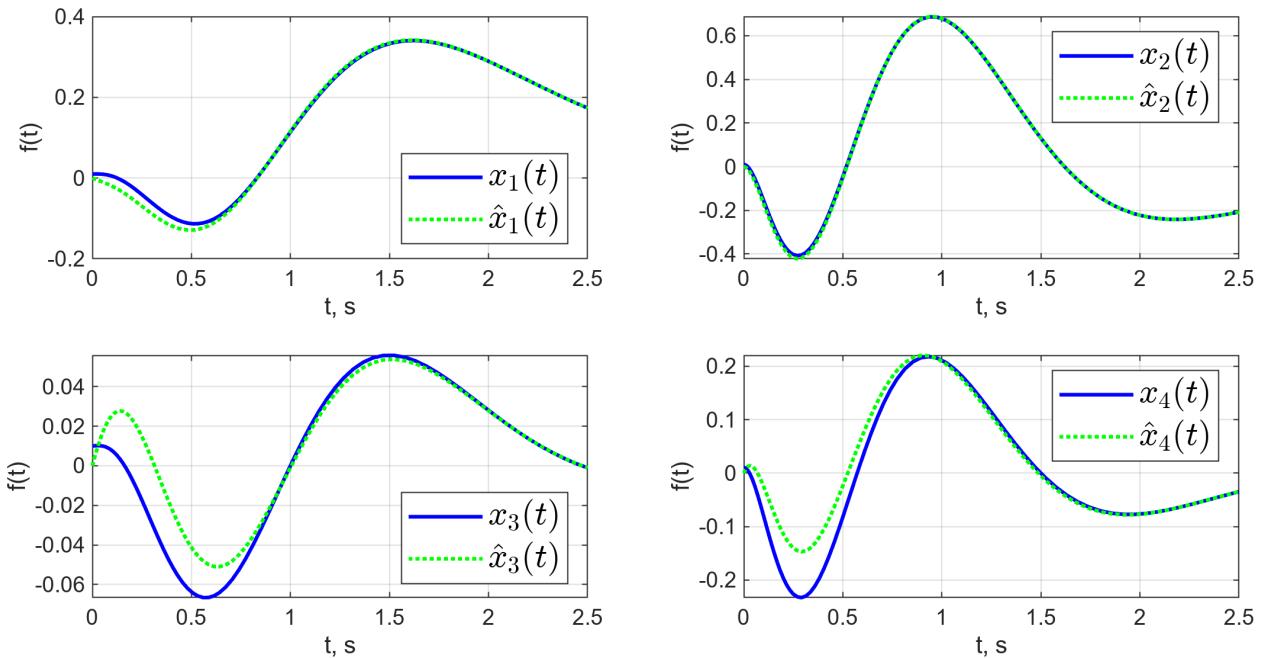


Рисунок 32 — Графики  $x(t)$  и  $\hat{x}(t)$  для  $\sigma_3 = \{-1, -2, -3 \pm 3i\}$ .

Graph  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  for  $\sigma_3$ , nonlinear

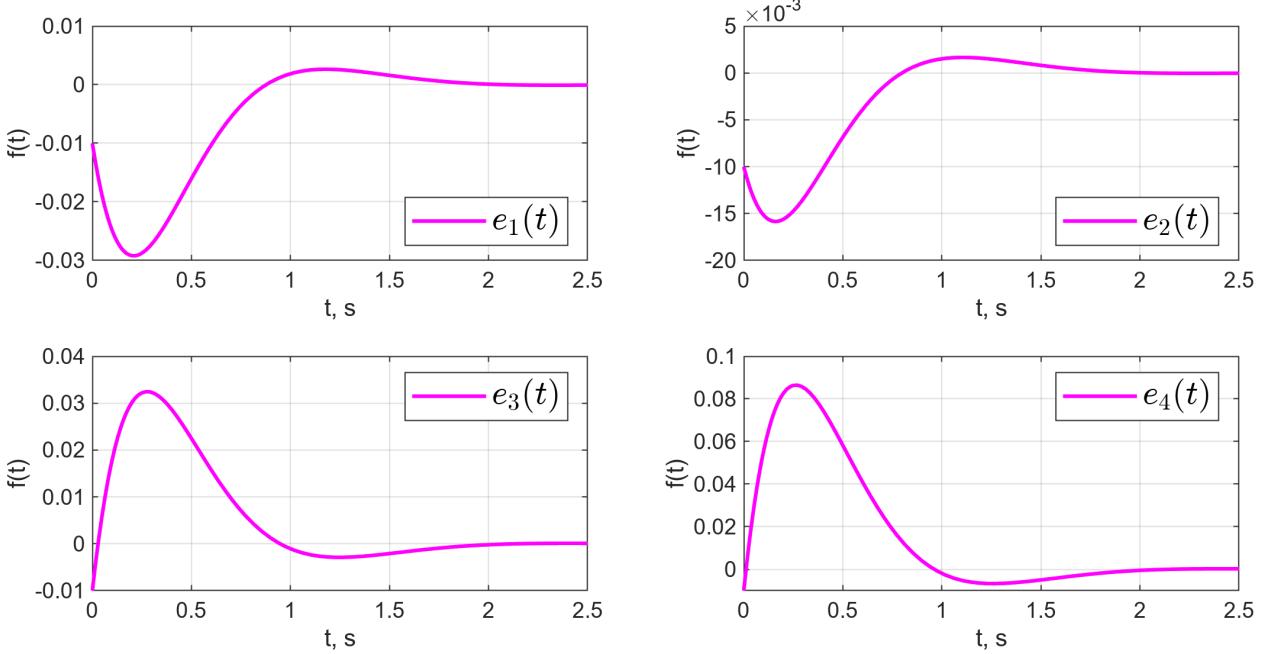


Рисунок 33 — Графики  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  для  $\sigma_3 = \{-1, -2, -3 \pm 3i\}$ .

### 3.3.2 Наблюдатель пониженной размерности

Запишем уравнения наблюдателя пониженного порядка

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = \Gamma \hat{z} - Y y + Q B u, \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ \hat{z} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (31)$$

Зададимся желаемым спектром матрицы наблюдателя пониженного порядка  $\sigma(\Gamma) = \{-1, -2\}$ . Запишем матрицы  $\Gamma$  и  $Y$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Синтезируем матрицу преобразования  $Q$  на основании выбранного же лаемого спектра  $\sigma(\Gamma)$ . Решим уравнение Сильвестра

$$\Gamma Q - Q A = Y C \quad (33)$$

относительно  $Q$  и получим

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0.2589 & -0.2589 \\ -0.5 & 0.25 & 1.156 & -0.578 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Зададимся начальными условиями системы и наблюдателя

$$\begin{aligned} x(0) &= [0.01 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0.01]^T \\ \hat{z}(0) &= [0 \quad 0]^T \end{aligned} \quad (35)$$

И выполним моделирование для той же замкнутой системы со спектром  $\sigma = \{-3, -2.5, -2, -1.5\}$ , что и для наблюдателя полной размерности

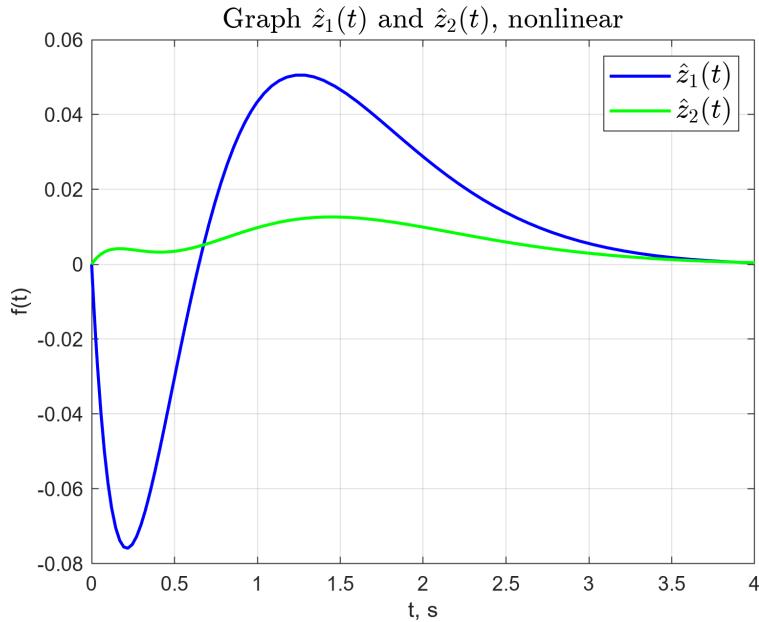


Рисунок 34 — График  $\hat{z}(t)$  для  $\sigma(\Gamma) = \{-1, -2\}$ .

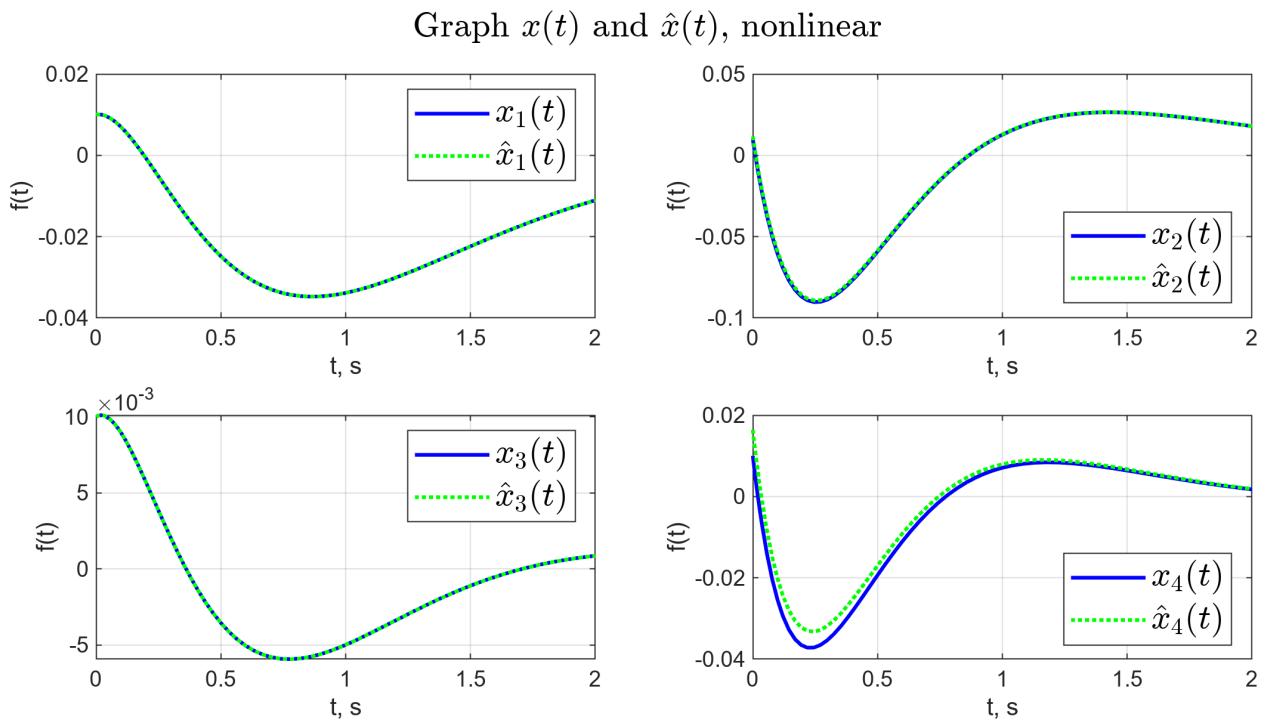


Рисунок 35 — Графики  $x(t)$  и  $\hat{x}(t)$  для  $\sigma(\Gamma) = \{-1, -2\}$ .

Graph  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ , nonlinear

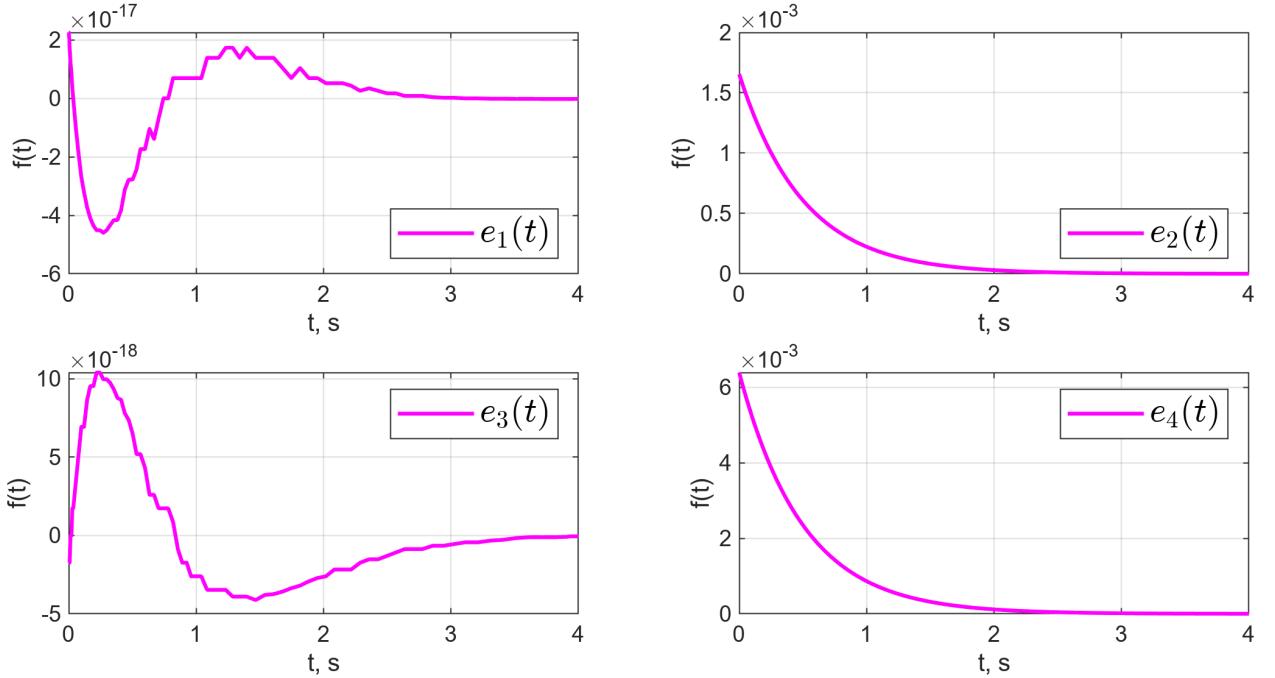


Рисунок 36 — Графики  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  для  $\sigma(\Gamma) = \{-1, -2\}$ .

Рассмотрим работу наблюдателя пониженной размерности при значениях спектра

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \{-0.1, -0.2\}, \quad \sigma_2 = \{-10, -20\}, \\ \sigma_3 &= \{-2 \pm i\}\end{aligned}$$

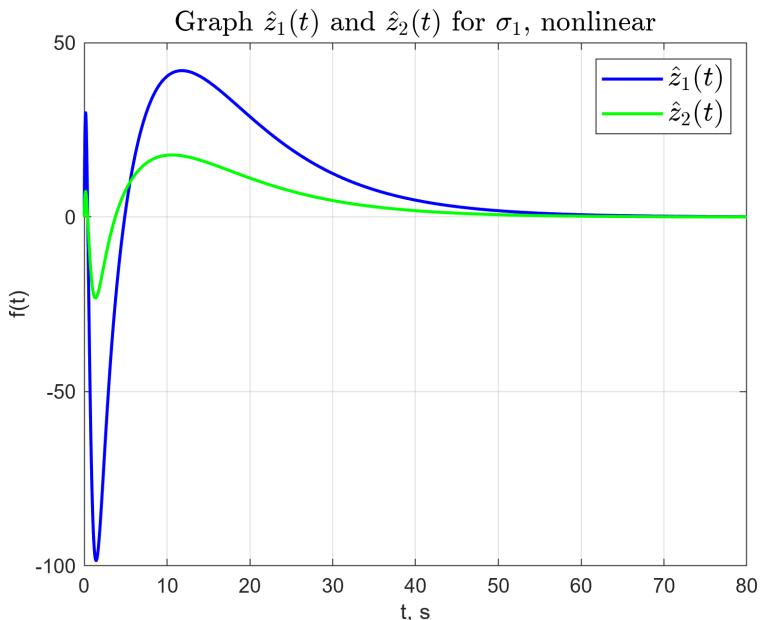


Рисунок 37 — График  $\hat{z}(t)$  для  $\sigma_1(\Gamma) = \{-0.1, -0.2\}$ .

Graph  $x(t)$  and  $\hat{x}(t)$  for  $\sigma_1$ , nonlinear

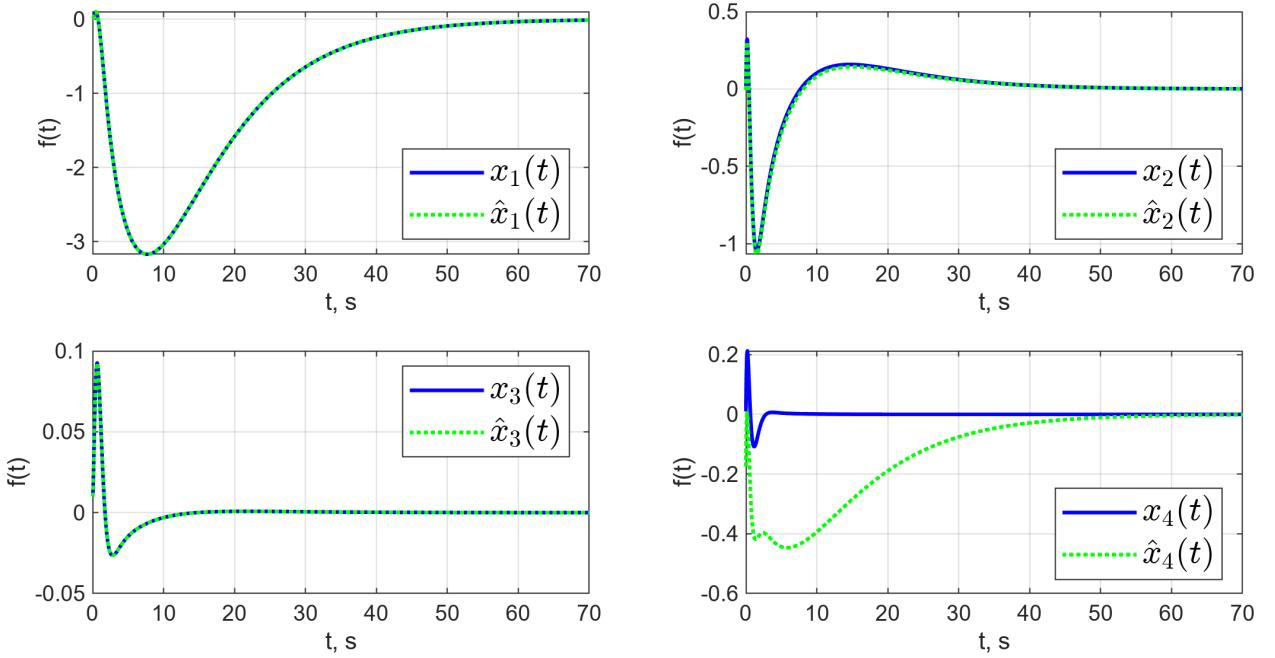


Рисунок 38 — Графики  $x(t)$  и  $\hat{x}(t)$  для  $\sigma_1(\Gamma) = \{-0.1, -0.2\}$ .

Graph  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  for  $\sigma_1$ , nonlinear

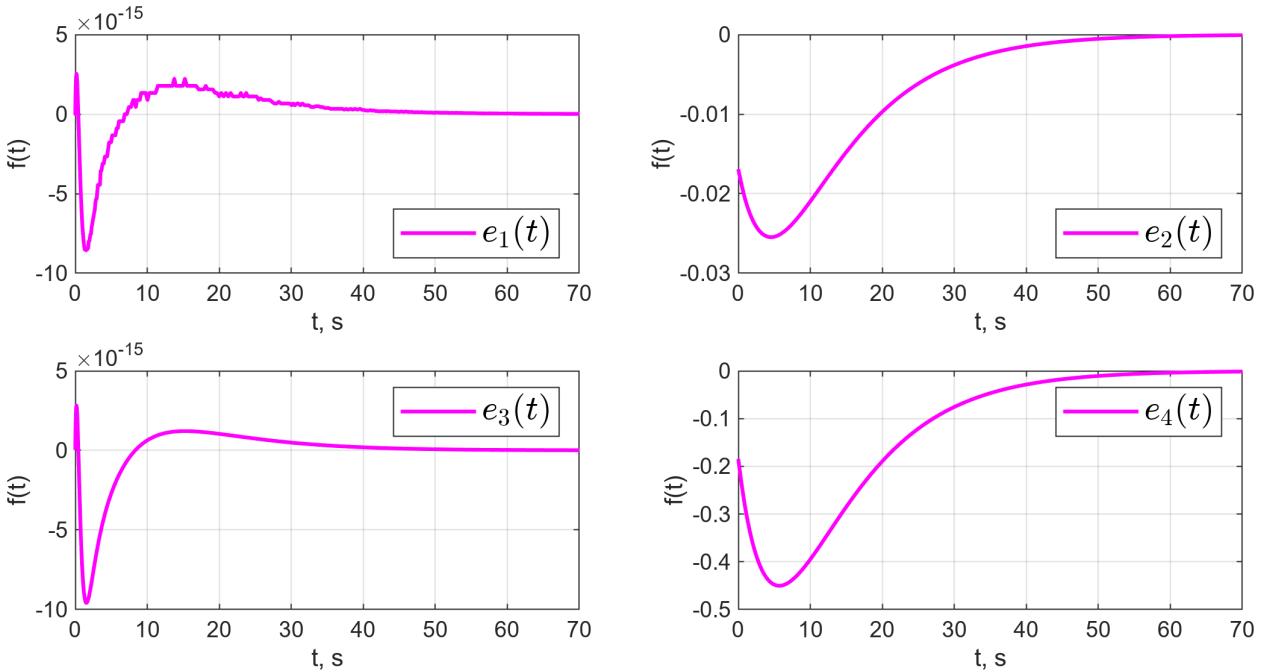


Рисунок 39 — Графики  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  для  $\sigma_1(\Gamma) = \{-0.1, -0.2\}$ .

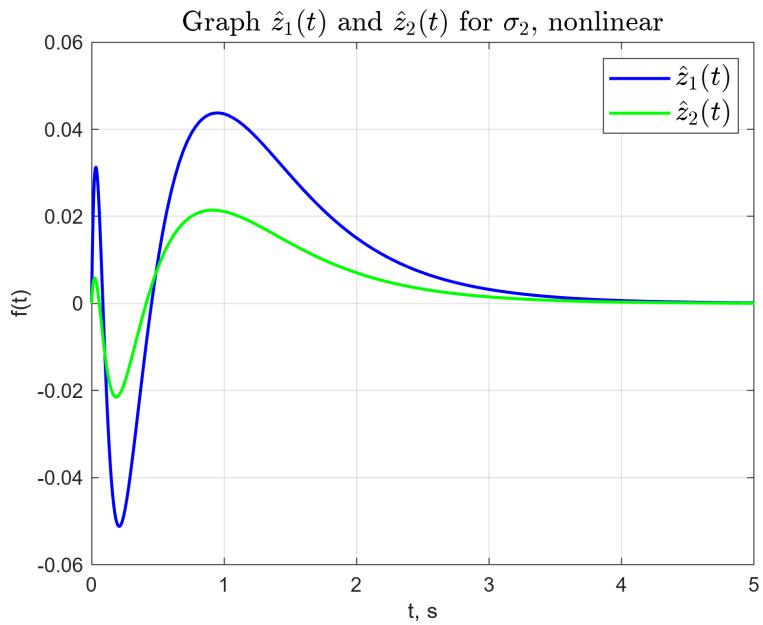


Рисунок 40 — График  $\hat{z}(t)$  для  $\sigma_2(\Gamma) = \{-10, -20\}$ .

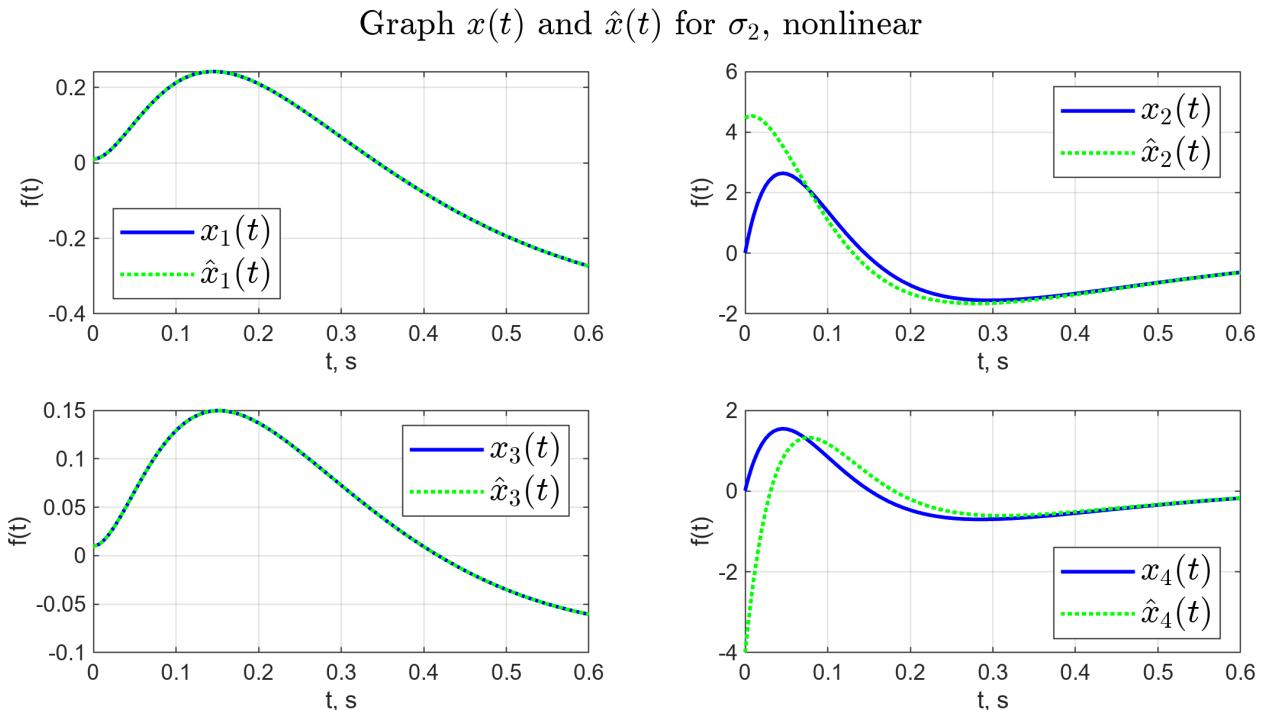


Рисунок 41 — Графики  $x(t)$  и  $\hat{x}(t)$  для  $\sigma_2(\Gamma) = \{-10, -20\}$ .

Graph  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  for  $\sigma_2$ , nonlinear

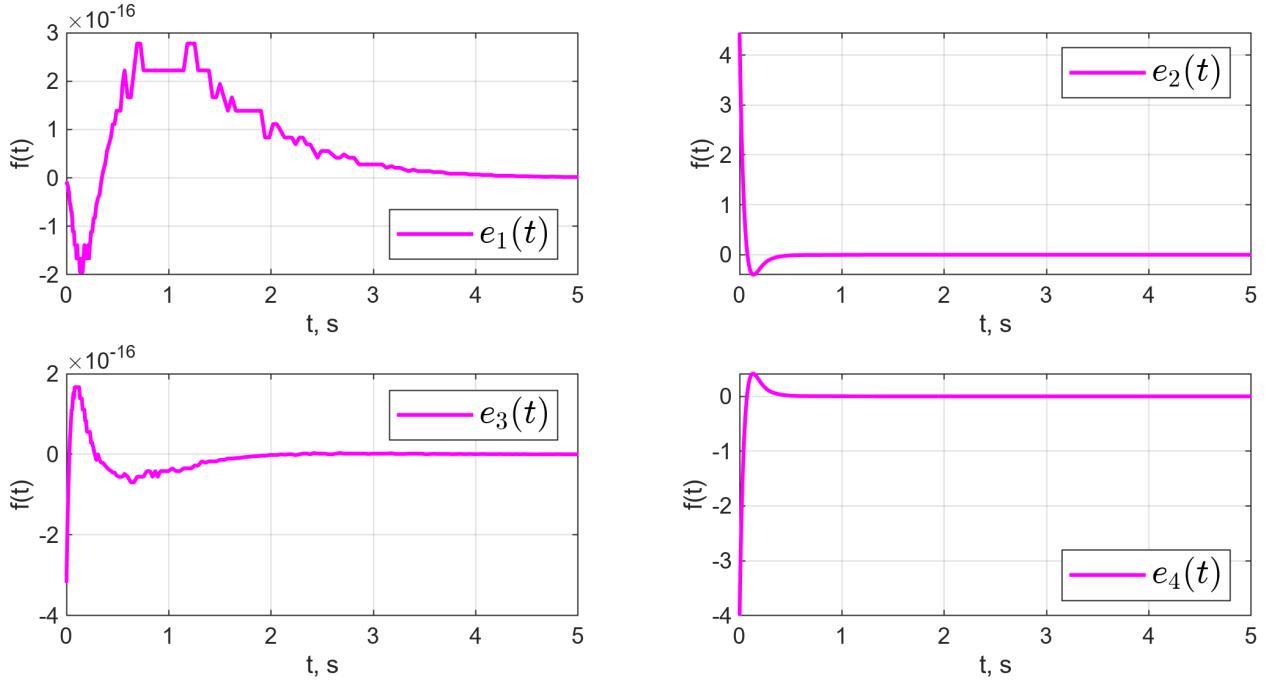


Рисунок 42 — Графики  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  для  $\sigma_2(\Gamma) = \{-10, -20\}$ .

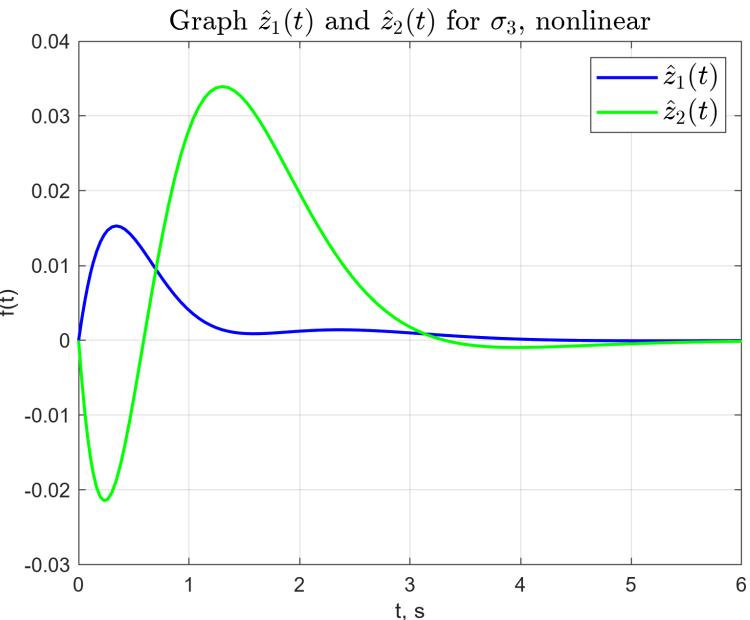


Рисунок 43 — График  $\hat{z}(t)$  для  $\sigma_3(\Gamma) = \{-2 \pm i\}$ .

Graph  $x(t)$  and  $\hat{x}(t)$  for  $\sigma_3$ , nonlinear

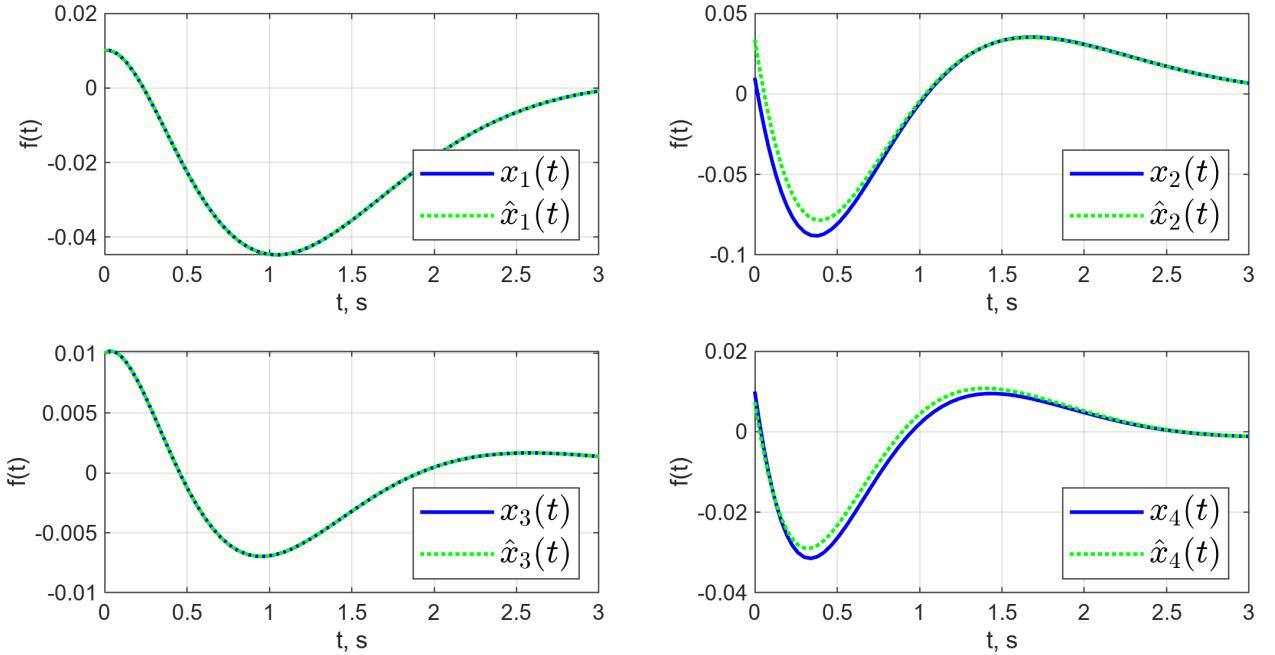


Рисунок 44 — Графики  $x(t)$  и  $\hat{x}(t)$  для  $\sigma_3(\Gamma) = \{-2 \pm i\}$ .

Graph  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  for  $\sigma_3$ , nonlinear

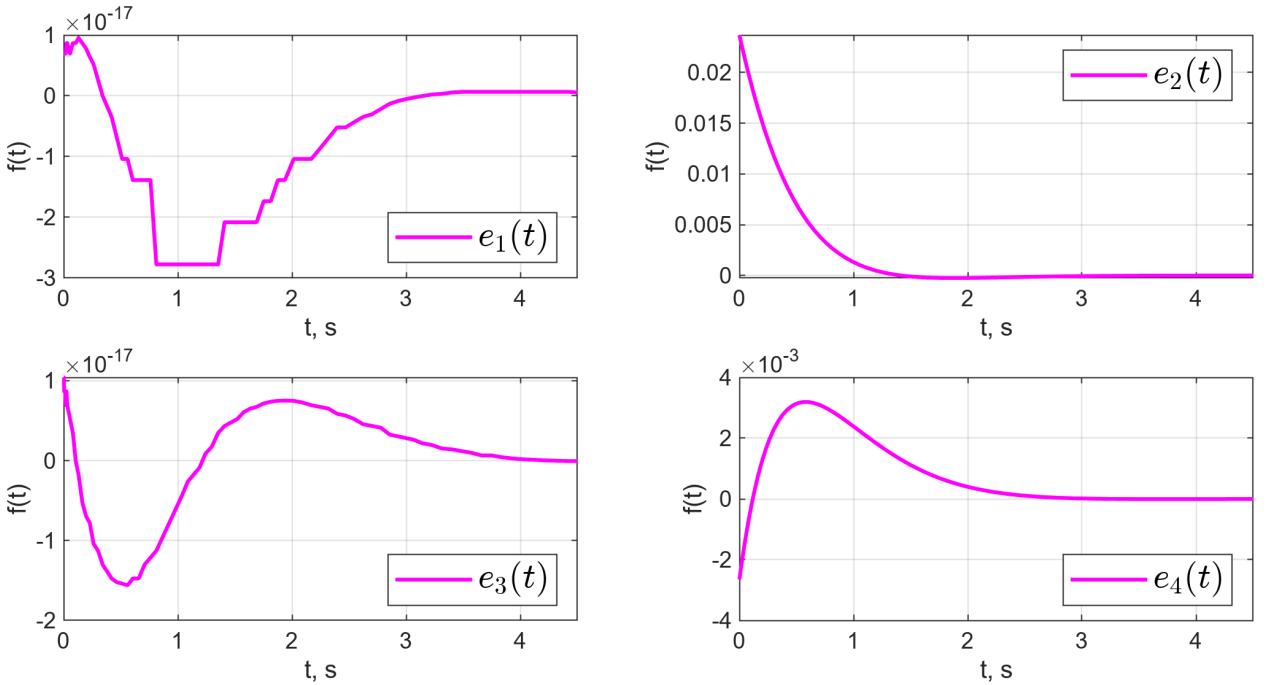


Рисунок 45 — Графики  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  для  $\sigma_3(\Gamma) = \{-2 \pm i\}$ .

Как и в случае наблюдателя полной размерности, для наблюдателя пониженной размерности также время, за которое ошибка наблюдателя становится неотличима от нуля, возрастает при уменьшении собственных значений для наблюдателя (рисунок 39) и уменьшается, при увеличении собственных чисел (рисунок 42).

### 3.3.3 Сравнение работы наблюдателей полной и пониженной размерности

В ходе исследования для наблюдателя пониженной размерности были подобраны спектры близкие к соответствующим наборам собственных чисел для наблюдателя полной размерности.

Время, за которое ошибка наблюдателя становится неотличима от нуля, сопоставимо для наблюдателей полной и пониженной размерности для близких спектров.

Для наблюдателя пониженной размерности практически нулевая ошибка для  $x_1$  и  $x_3$ , так как эти компоненты напрямую попадают в вывод  $y_1$  и  $y_2$  соответственно, то есть они измеримы. Наблюдатель полного порядка в данном случае избыточен и накапливает большую ошибку.

## 3.4 Синтез регулятора по выходу

Построим регулятор, стабилизирующий маятник и тележку в условиях, когда измерению доступны только сигналы  $y_1$  и  $y_2$ . Для этого будем использовать наблюдатель пониженной размерности из предыдущего пункта и основанный на нем закон управления

$$u = K\hat{x} \quad (36)$$

Постараемся подобрать такие спектры наблюдателя и регулятора, при которых переходные процессы в замкнутой системе будут иметь малое время переходного процесса, малое перерегулирование и малую величину управляющего воздействия. Поэтому для каждого набора спектров наблюдателя и регулятора будем находить максимальные значения модуля координаты тележки  $x_1(t)$ , угла отклонения маятника от вертикали  $x_3(t)$  и управляющего воздействия  $u(t)$ , а также фиксировать время переходного процесса (как последний момент времени, когда координата тележки или угол отклонения маятника отличался от нуля более, чем на 0.0001).

Из всех представленных вариантов в таблице 2 наиболее оптимальным является набор  $\sigma_{reg} = \{-3, -2.5, -2, -1.5\}$ ,  $\sigma_{obs} = \{-1, -1.5\}$ , графики представлены на рисунке 46.

Таблица 2 — Результаты моделирования для различных наборов спектров

$\sigma_{reg}$	$\sigma_{obs}$	$\max  \varphi $	$\max  a $	$\max  u $	t, s
$\{-1, -1, -1, -1\}$	$\{-1, -1.5\}$	0.011	0.15	67	15
$\{-3, -2.5, -2, -1.5\}$	$\{-1, -1.5\}$	0.010	0.042	203	6.7
$\{-0.5, -0.4, -0.3, -0.2\}$	$\{-5, -6\}$	0.016	1.3	67	63
$\{-1, -1, -1, -1\}$	$\{-5, -6\}$	0.017	0.16	304	13
$\{-3, -2.5, -2, -1.5\}$	$\{-5, -6\}$	0.025	0.095	1493	6.2

Graphs for  $\sigma_{reg} = \{-3, -2.5, -2, -1.5\}$ ,  $\sigma_{obs} = \{-1, -1.5\}$ , nonlinear

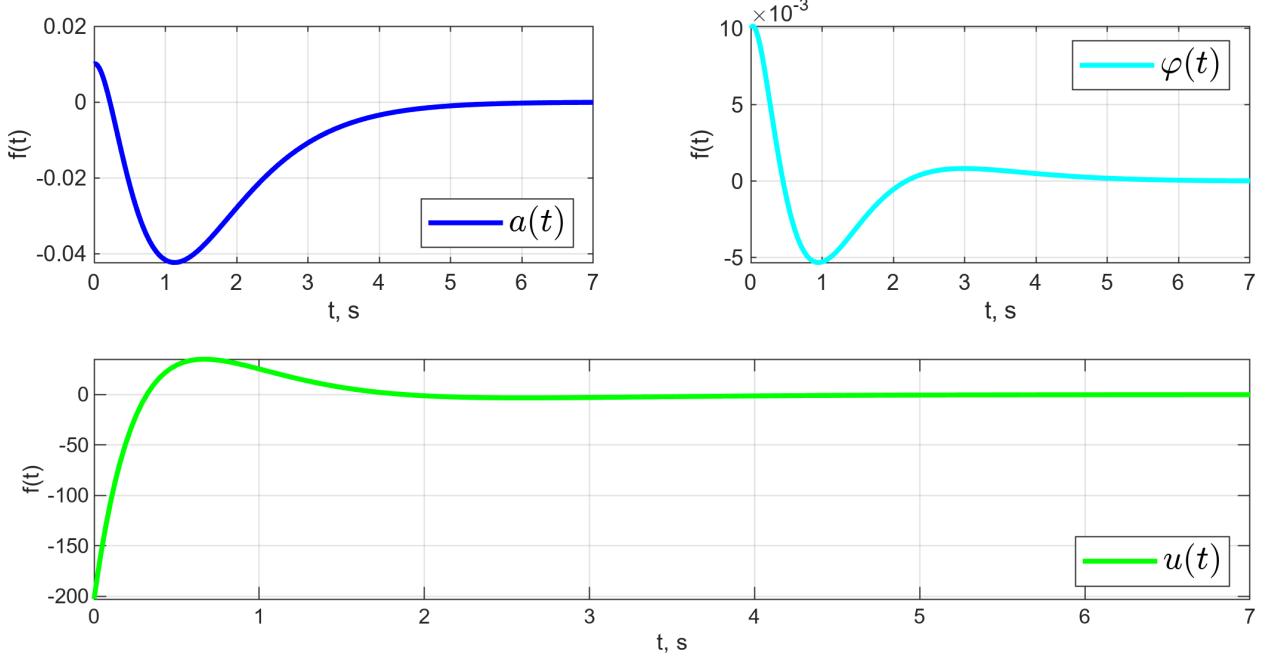


Рисунок 46 — Графики  $a(t)$ ,  $\varphi(t)$  и  $u(t)$  для  $\sigma_{reg} = \{-3, -2.5, -2, -1.5\}$ ,  $\sigma_{obs} = \{-1, -1.5\}$ .

## 4 СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: РЕГУЛЯТОРЫ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ

### 4.1 Синтез регулятора по состоянию

С помощью решения линейного матричного неравенства Ляпунова для экспоненциальной устойчивости

$$\begin{cases} PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \leq 0, \\ K = YP^+ \end{cases} \quad (37)$$

произведем расчет регулятора  $u = Kx$ , основываясь на линейной модели (12) и выбранной желаемой степенью устойчивости  $\alpha = 1$  замкнутой системой.

$$K = \begin{bmatrix} 3064 & 4364 & -26684 & -11174 \end{bmatrix} \quad (38)$$

График вектора состояния представлен на рисунке 47.

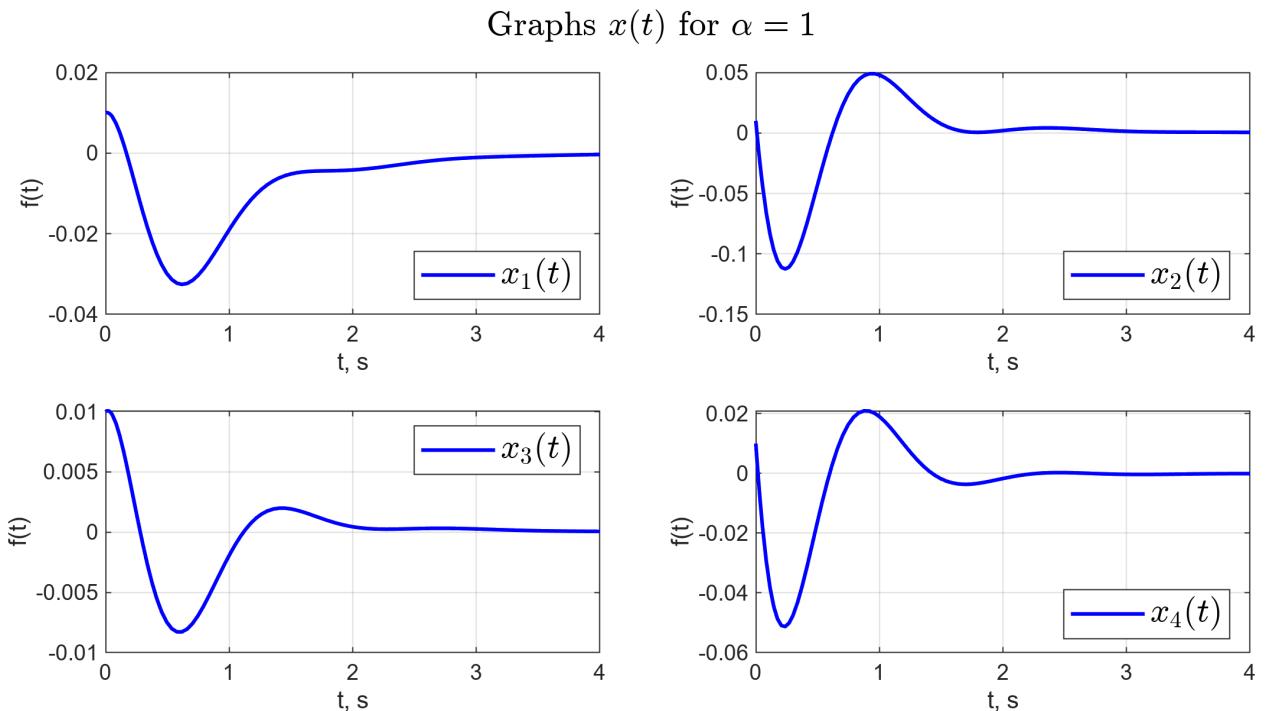


Рисунок 47 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 1$  и  $x(0) = [0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01]^T$ .

Исследуем работоспособность синтезированного регулятора при управлении нелинейной системой (8) в зависимости от начальных условий:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.01 & 3 & 0.01 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.01 & 1.5 \end{bmatrix},$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 & \pi/6 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 5 & 0.01 & 0.01 & 0.1 \end{bmatrix},$$

Graphs  $x(t)$  for  $\alpha = 1$

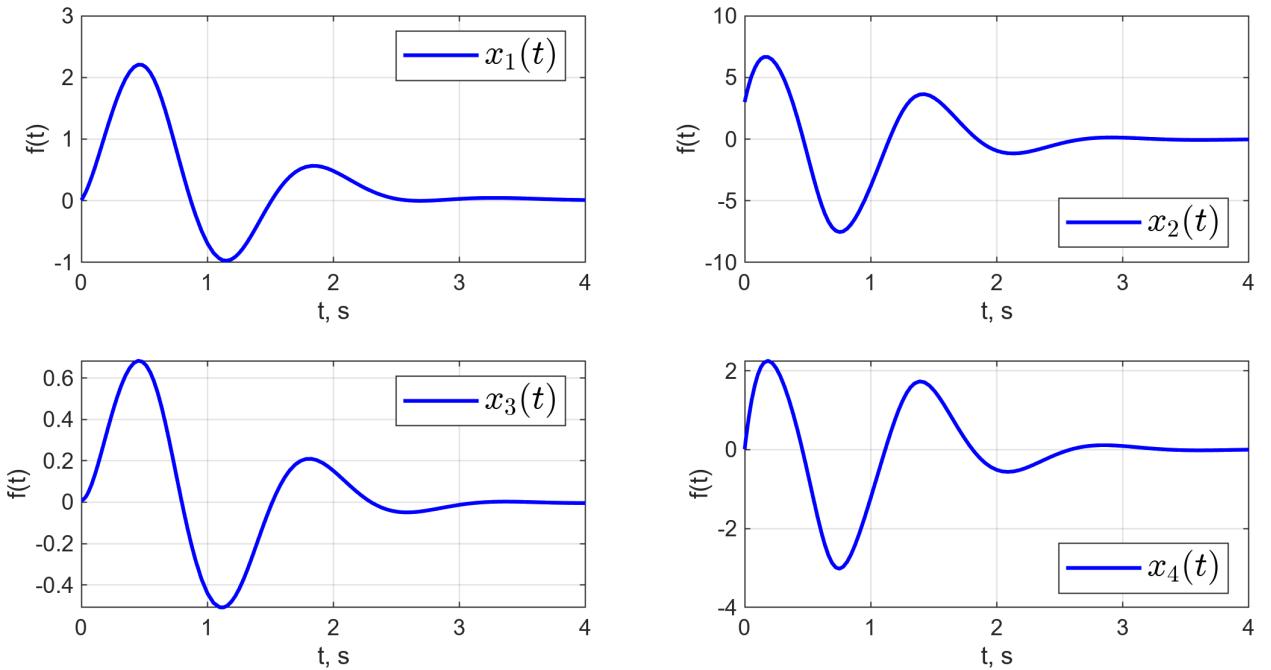


Рисунок 48 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 1$  и  $x(0) = [0.01 \ 3 \ 0.01 \ 0.01]^T$ .

Заметим, что при увеличении начального значения линейной скорости до 3 м/с (рисунок 48), амплитуда компонент  $x_i(t)$  возрастает примерно в 100 раз относительно начального значения 0.01 м/с.

Заметим, что при начальном значении угла отклонения маятника  $\pi/6$  регулятор еще стабилизирует систему (рисунок 50). Также видно, что для всех наборов начальных условий, вектор состояния системы становится визуально неотличим от нуля за одно и то же время  $t \approx 3.5$  с. Начальные условия в данном случае влияют на амплитуду и частоту колебаний компонент вектора состояния системы.

Также начальные условия выбраны неслучайно: это максимальные значения, при которых моделирование отрабатывает за время меньше минуты — для больших значений начальных условий не удается получить графики.

Graphs  $x(t)$  for  $\alpha = 1$

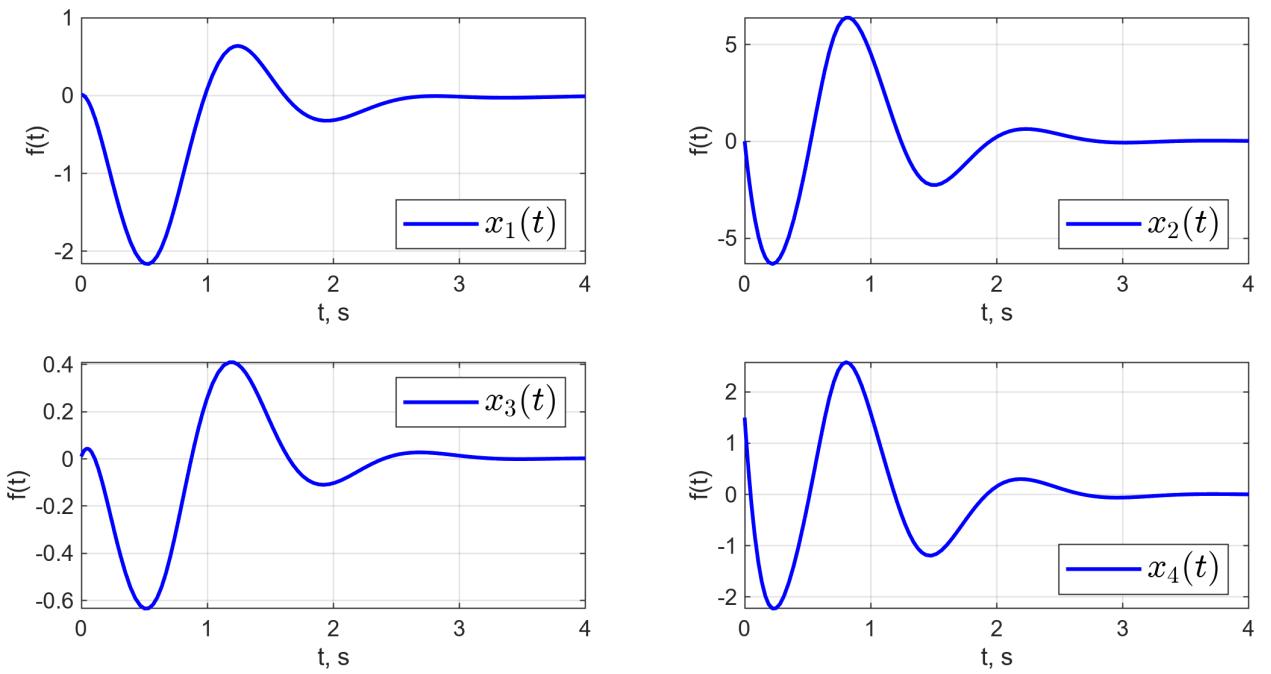


Рисунок 49 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 1$  и  $x(0) = [0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 1.5]^T$ .

Graphs  $x(t)$  for  $\alpha = 1$

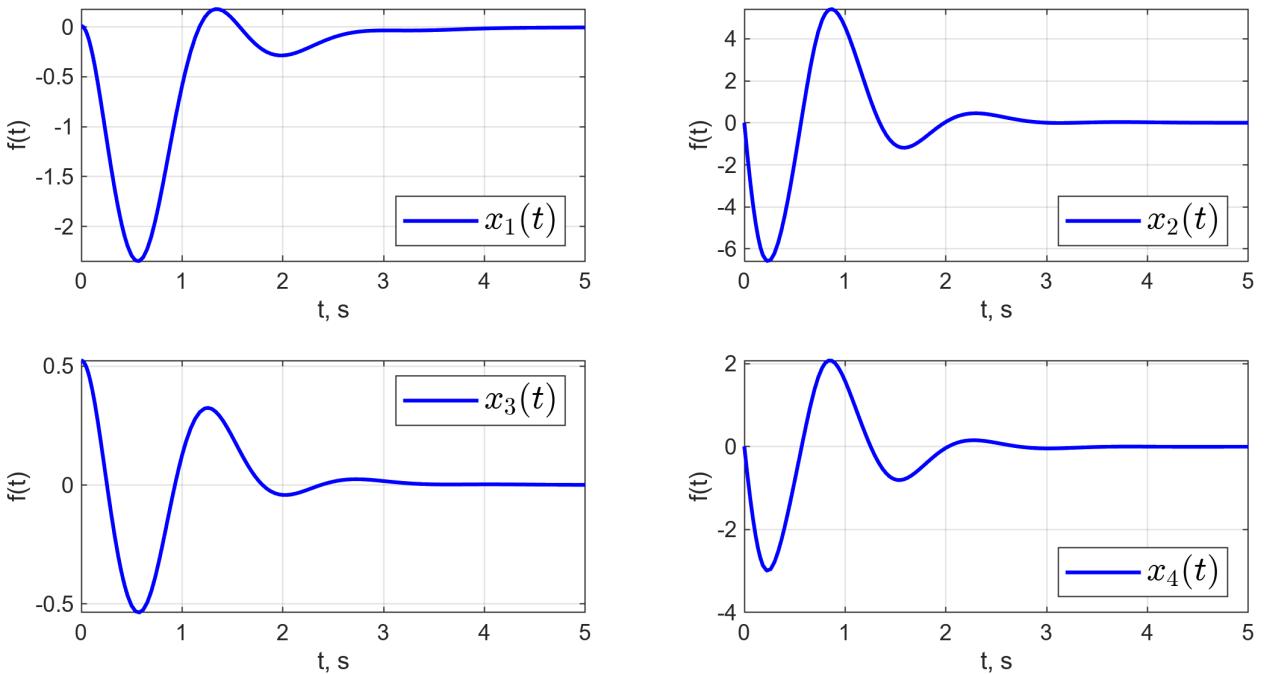


Рисунок 50 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 1$  и  $x(0) = [0.01 \ 0.01 \ \pi/6 \ 0.01]^T$ .

Graphs  $x(t)$  for  $\alpha = 1$

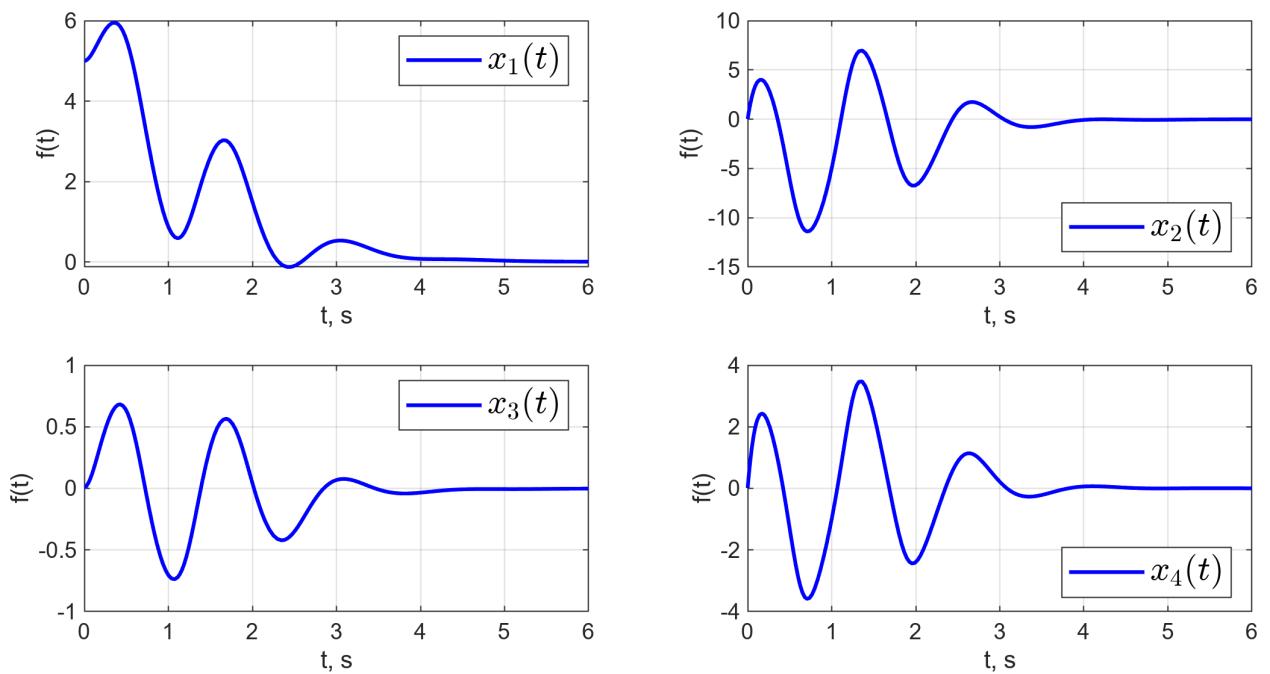


Рисунок 51 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 1$  и  $x(0) = [5 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01]^T$ .

## 4.2 Исследование регулятора по состоянию

Исследуем влияние параметра  $\alpha$  на максимальное отклонение маятника от вертикали, максимальное горизонтальное смещение тележки и максимальное значение управляющего сигнала при управлении нелинейной системой (8).

Моделирование выполнено при начальных условиях  $x(0) = [0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01]^T$ , результаты представлены в таблице 3.

Таблица 3 — Результаты моделирования при разных значениях параметра  $\alpha$ .

$\alpha$	$\max  \varphi $	$\max  a $	$\max  u $
0.1	0.012	0.16	66
0.5	0.01	0.04	246
1	0.01	0.03	304
2	0.01	0.025	942
3	0.01	0.03	2240
5	0.02	0.04	4732
10	0.06	0.11	79007

Данные таблицы 3 демонстрируют сначала уменьшение максимального горизонтального смещения тележки и максимального отклонения маятника от вертикали, при  $\alpha = 2$  достигается минимум этих показателей, при дальнейшем увеличении  $\alpha$  наблюдается их возрастание.

Максимальное значение управляющего сигнала с ростом  $\alpha$  также возрастает.

## 4.3 Синтез регулятора по состоянию с ограничением на управление

Зададимся следующими значениями параметра:  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\alpha_3 = 1$  и выполним расчет регулятора  $u = Kx$  такого, чтобы наибольшее значение модуля управляющего сигнала  $u$  было наименьшим из возможных, то есть при вычислении матрицы  $K$  будем также решать задачу минимизации управления

$$\left\{ \begin{array}{l} PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0, \\ K = YP^{-1} \\ P \succ 0 \\ \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \gamma \end{bmatrix} \succ 0 \\ \begin{bmatrix} P & x(0) \\ x^T(0) & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \end{array} \right. , \quad (39)$$

Для  $\alpha_1 = 0.1$  матрица регулятора

$$K = \begin{bmatrix} 4.5 & 49 & -3219 & -1334 \end{bmatrix} \quad (40)$$

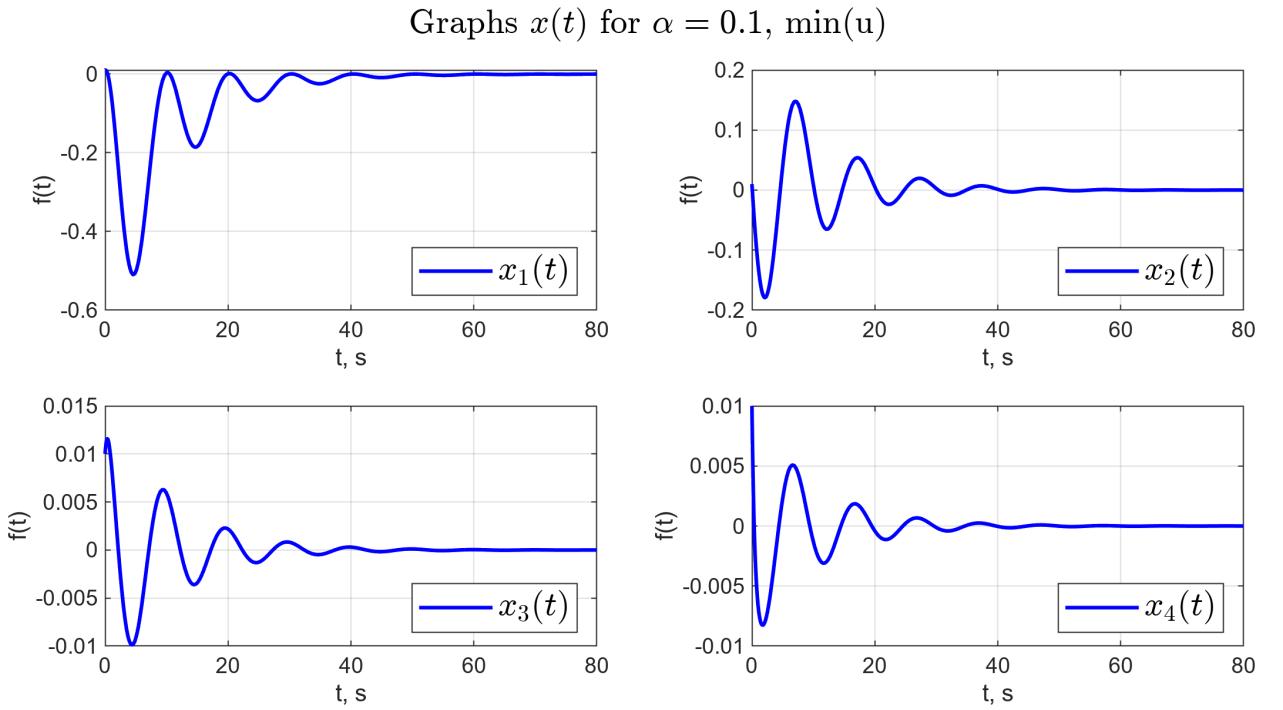


Рисунок 52 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 0.1$ .

Для  $\alpha_2 = 0.5$  матрица регулятора

$$K = \begin{bmatrix} 142.6 & 400.8 & -5986 & -2492 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Для  $\alpha_3 = 1$  матрица регулятора

$$K = \begin{bmatrix} 718 & 1242 & -11091 & -4631 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Graphs  $x(t)$  for  $\alpha = 0.5$ ,  $\min(u)$

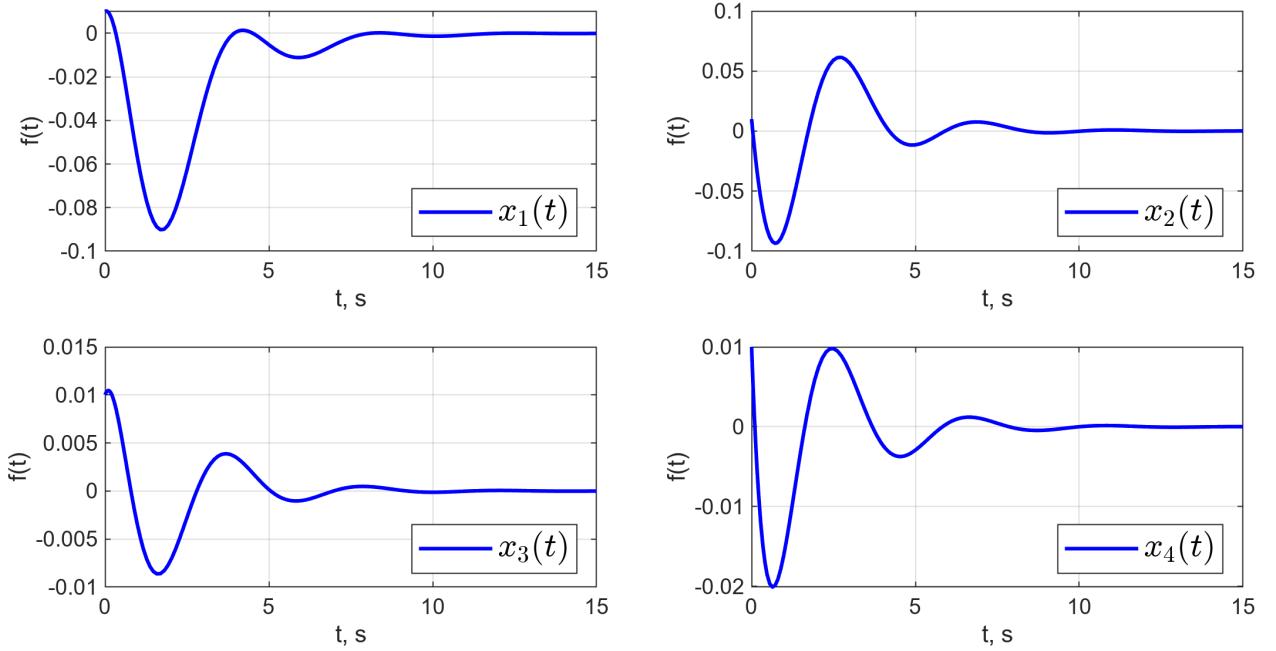


Рисунок 53 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 0.5$ .

Graphs  $x(t)$  for  $\alpha = 1$ ,  $\min(u)$

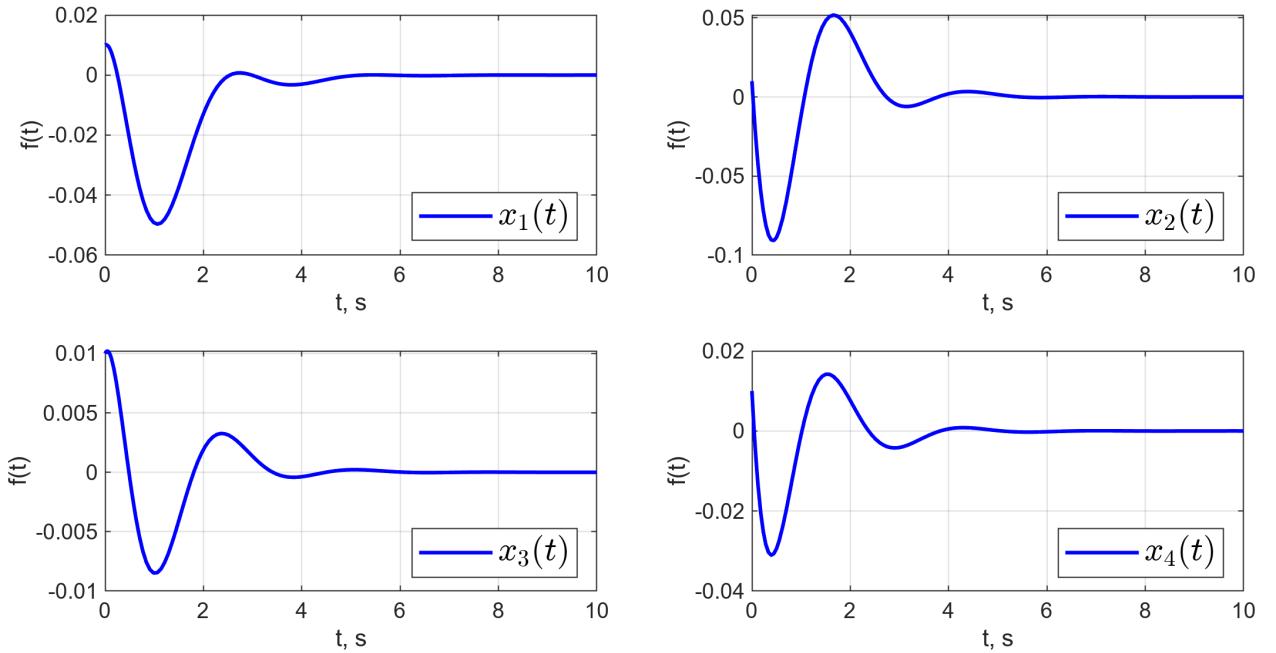


Рисунок 54 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 1$ .

При увеличении значения параметра  $\alpha$  увеличиваются и значения матрицы  $K$ , но уменьшается время переходного процесса.

Для наглядности минимизации управления составим таблицу для  $\alpha_{1,2,3}$  и соответствующих значений максимального модуля управления без реше-

ния задачи минимизации и после решения задачи (таблица 4). Заметим, что задача минимизации управления действительно выполнена.

Таблица 4 — Результаты моделирования при разных значениях параметра  $\alpha$ .

$\alpha$	$\max  u $	$\max  u $ with minimization
0.1	66	45
0.5	246	79
1	304	138

Исследуем работоспособность синтезированного регулятора при управлении нелинейной системой в зависимости от начальных условий

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.01 & 3 & 0.01 & 0.01 \end{bmatrix}^T, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.1 \end{bmatrix}^T,$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 & \pi/16 & 0.01 \end{bmatrix}^T, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 5 & 0.01 & 0.01 & 0.1 \end{bmatrix}^T,$$

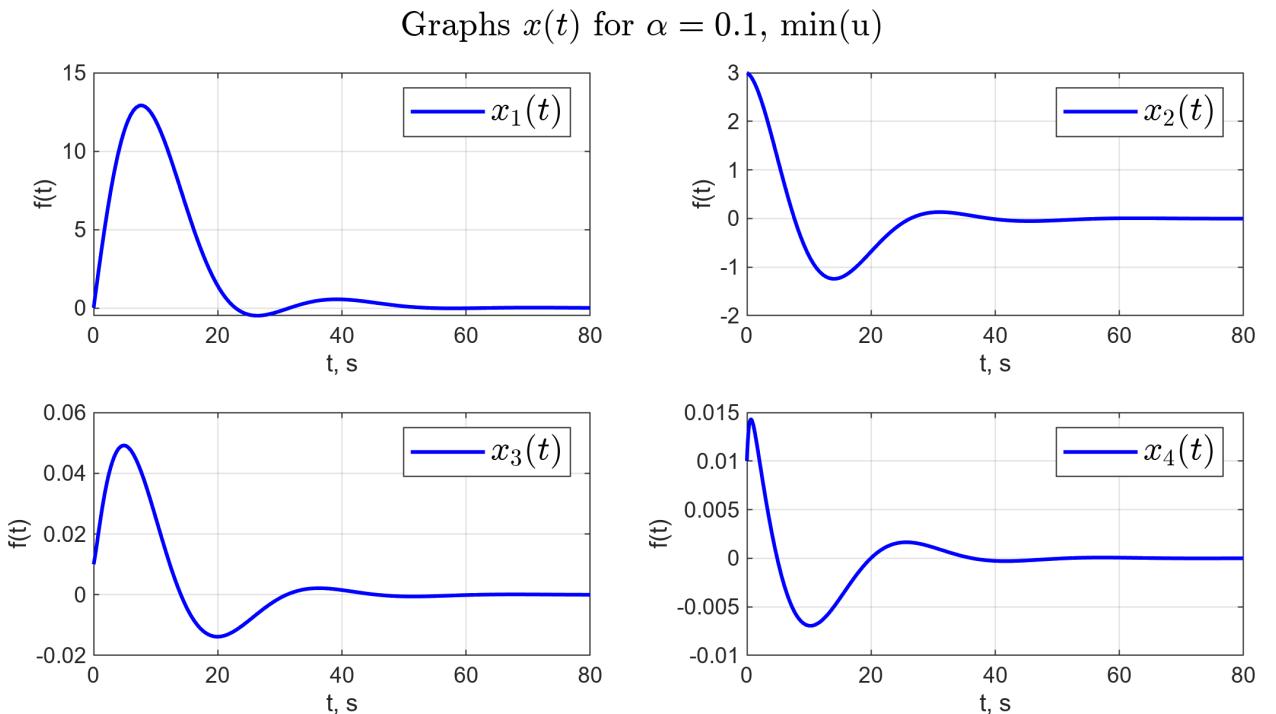


Рисунок 55 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 0.1$  и  $x(0) = [0.01 \ 3 \ 0.01 \ 0.01]^T$ .

Graphs  $x(t)$  for  $\alpha = 0.1$ ,  $\min(u)$

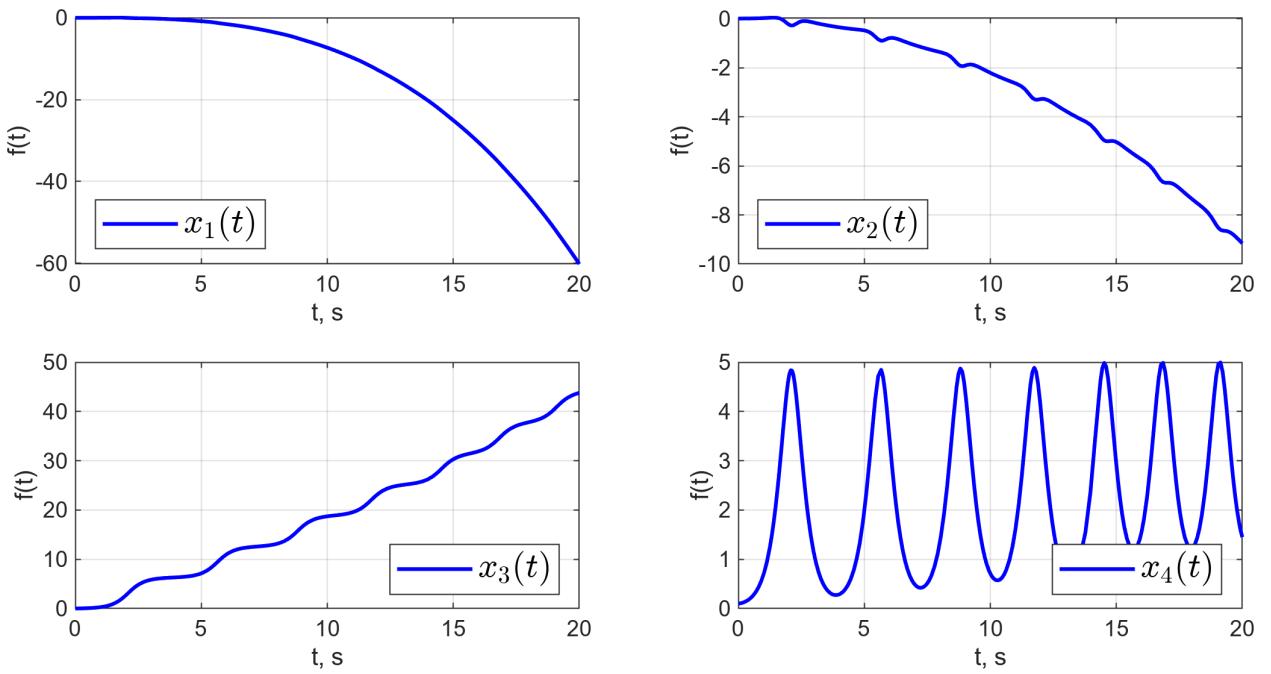


Рисунок 56 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 0.1$  и  $x(0) = [0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.1]^T$ .

Заметим, что значение начальной угловой скорости 0.1 рад/с оказывается слишком большим для регулятора (рисунок 56). Кроме того, для больших значений начальной угловой скорости решения не существует. Аналогичный случай с начальным углом: максимальное значение, при котором существует решение системы  $\pi/16$ , здесь регулятор также не справляется с задачей стабилизации (рисунок 57).

Graphs  $x(t)$  for  $\alpha = 0.1$ ,  $\min(u)$

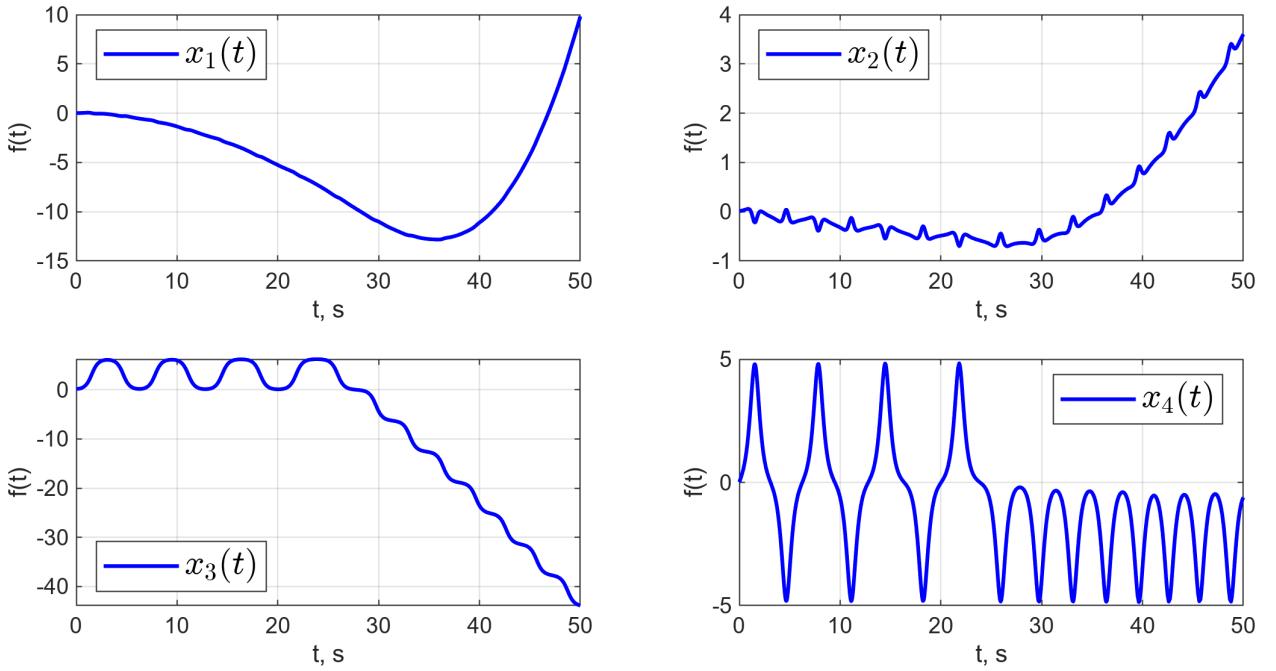


Рисунок 57 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 0.1$  и  $x(0) = [0.01 \ 0.01 \ \pi/16 \ 0.01]^T$ .

Graphs  $x(t)$  for  $\alpha = 0.1$ ,  $\min(u)$

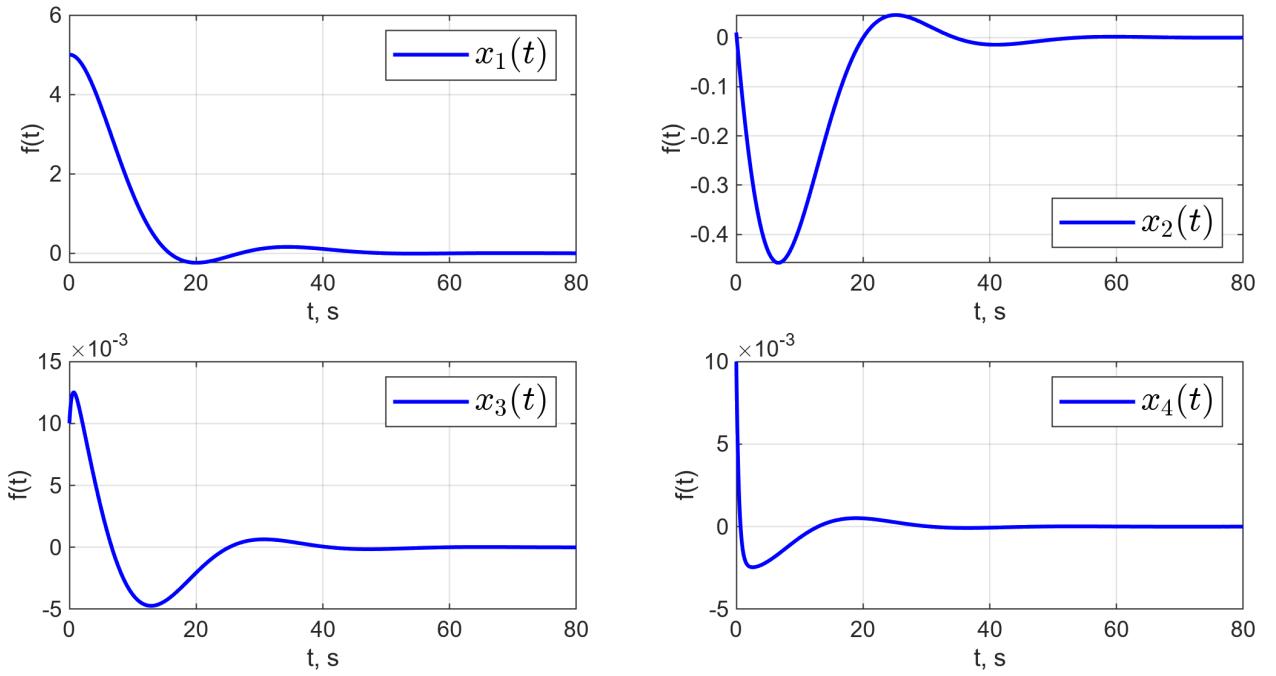


Рисунок 58 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 0.1$  и  $x(0) = [5 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01]^T$ .

Для начального условия  $x(0) = [0.01 \ 3 \ 0.01 \ 0.01]^T$  не существует решения для  $\alpha_2 = 0.5$ , поэтому выполним моделирование для  $x(0) = [0.01 \ 1 \ 0.01 \ 0.01]^T$

Graphs  $x(t)$  for  $\alpha = 0.5$ ,  $\min(u)$

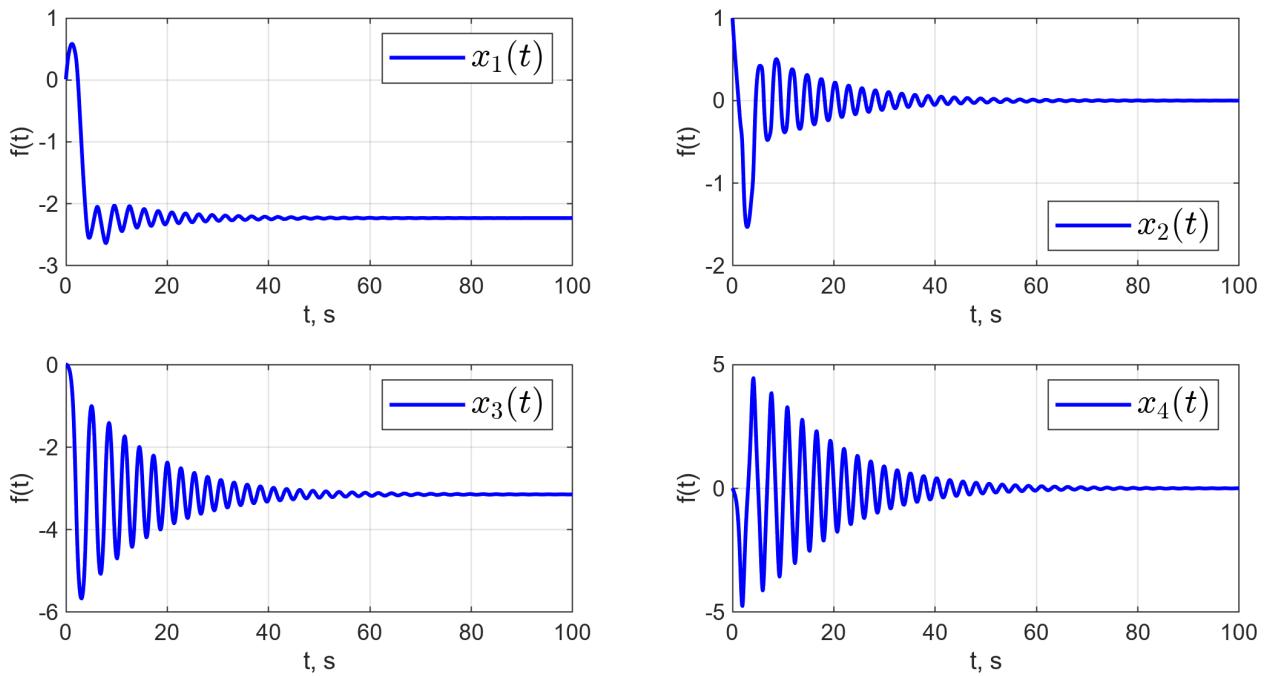


Рисунок 59 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 0.5$  и  $x(0) = [0.01 \ 1 \ 0.01 \ 0.01]^T$ .

Graphs  $x(t)$  for  $\alpha = 0.5$ ,  $\min(u)$

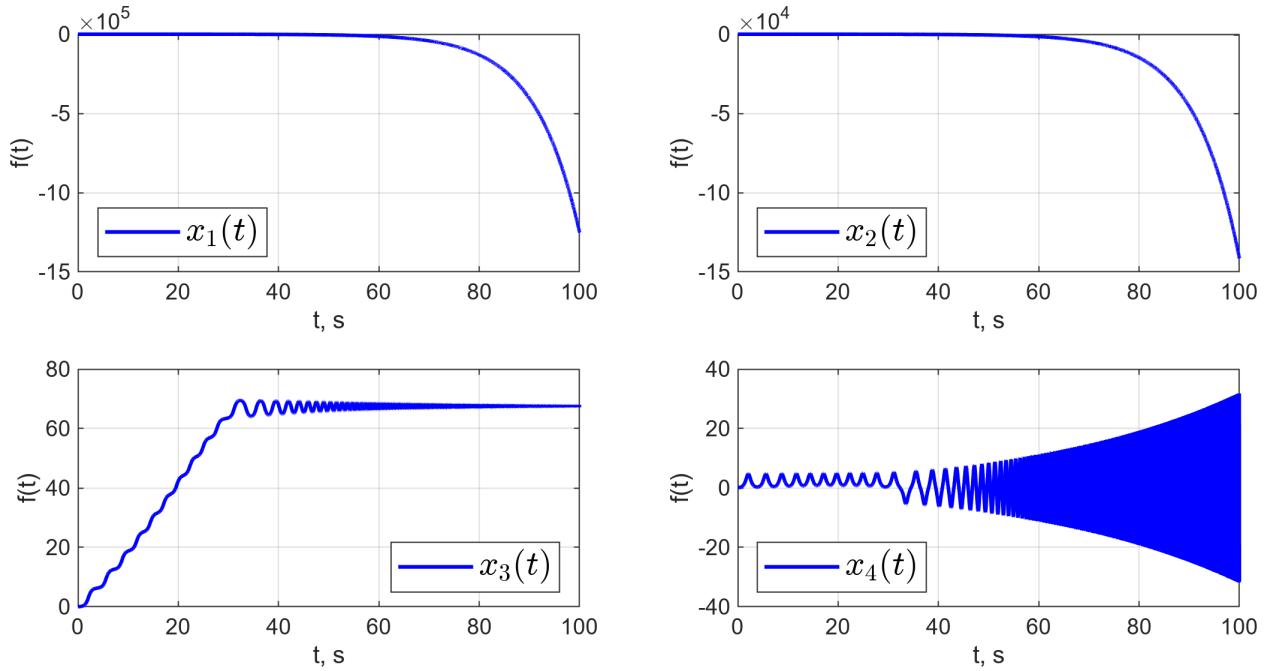


Рисунок 60 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 0.5$  и  $x(0) = [0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.1]^T$ .

Заметим, что начальная угловая скорость 0.1 рад/с, слишком большая для того, чтобы регулятор с  $\alpha_2 = 0.5$  и минимальным управлением справился с задачей стабилизации (рисунок 60).

Для начального значения угла отклонения маятника  $\pi/16$  также не существует решения системы неравенств, возьмем максимальный угол, при котором система имеет решение  $\pi/17$ , однако система расходится (рисунок 61)

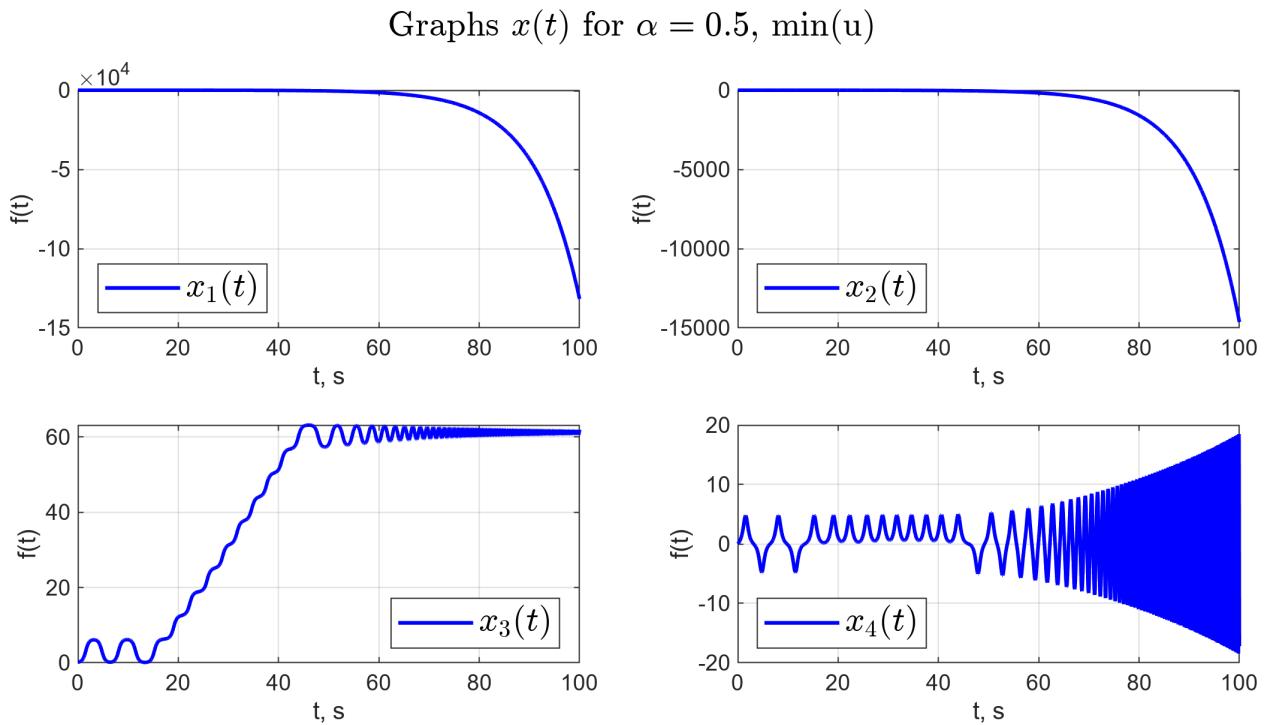


Рисунок 61 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 0.5$  и  $x(0) = [0.01 \ 0.01 \ \pi/17 \ 0.01]^T$ .

Аналогично для начального значения координаты тележки 5 м система неравенств не имеет решения, возьмем значение 2 м в качестве начальной координаты тележки

Graphs  $x(t)$  for  $\alpha = 0.5$ ,  $\min(u)$

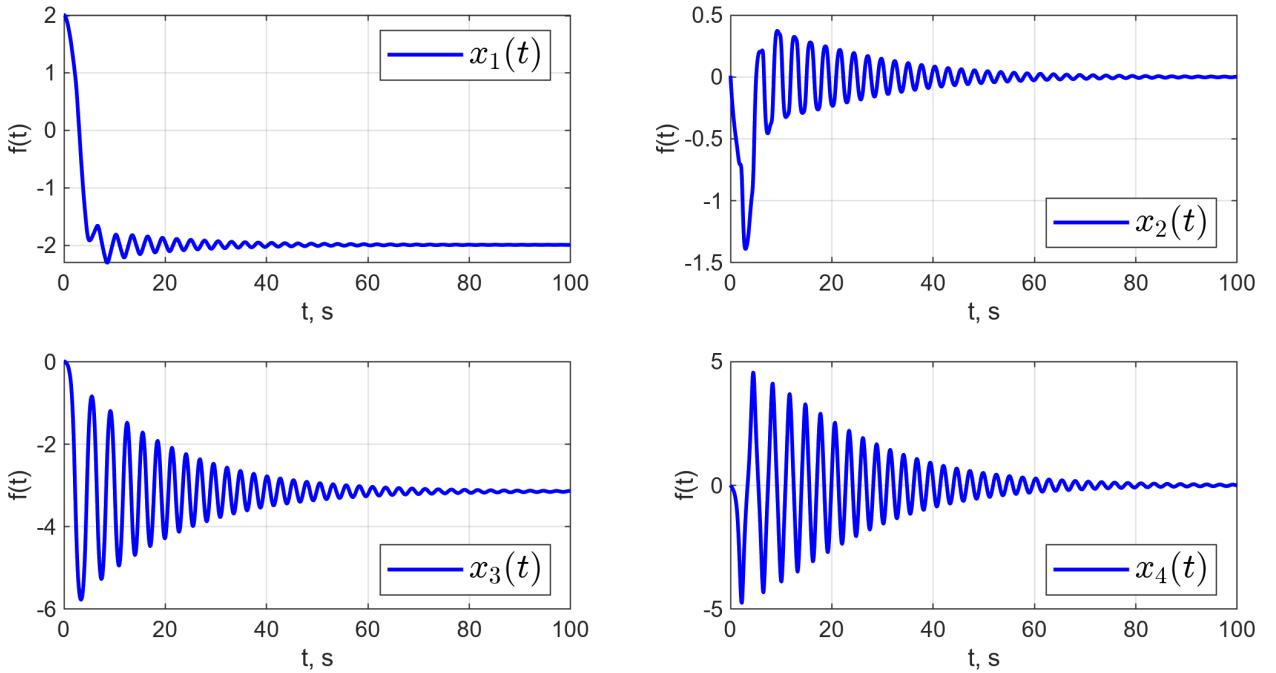


Рисунок 62 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 0.5$  и  $x(0) = [2 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01]^T$ .

Для  $\alpha_3 = 1$  не существует решений системы неравенств при начальном значении линейной скорости 1 м/с, поэтому возьмем новый вектор начальных условий  $x(0) = [0.01 \ 0.1 \ 0.01 \ 0.01]^T$

Graphs  $x(t)$  for  $\alpha = 1$ ,  $\min(u)$

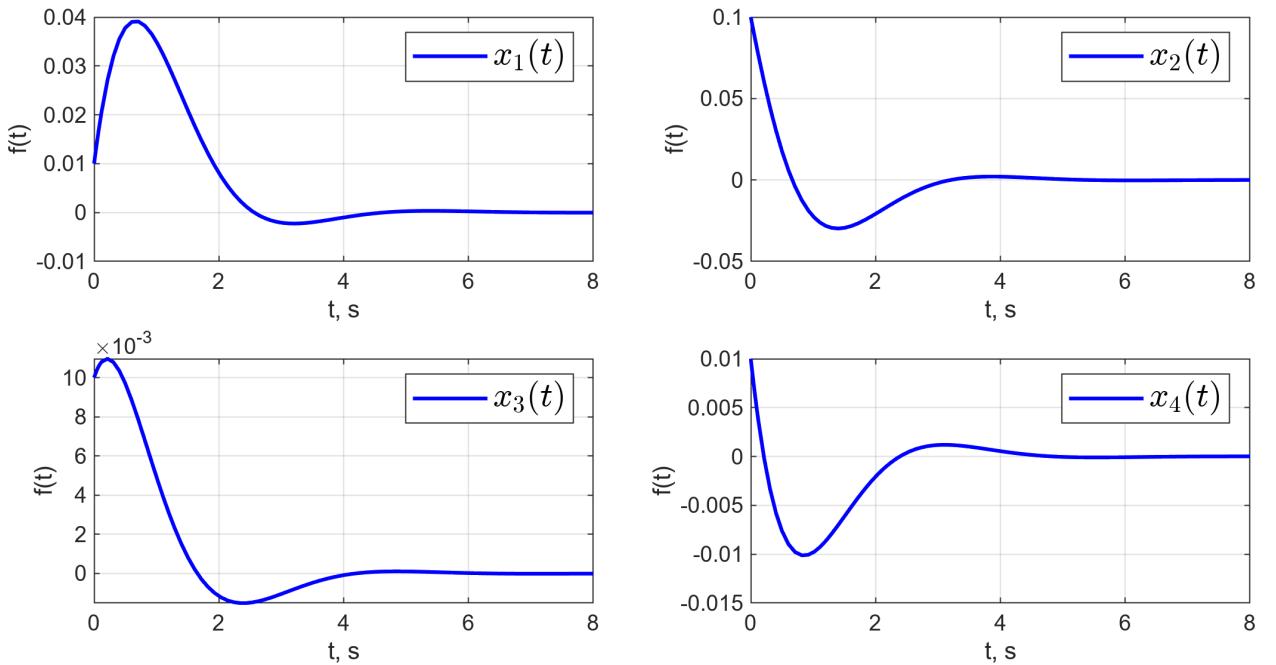


Рисунок 63 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 1$  и  $x(0) = [0.01 \ 0.1 \ 0.01 \ 0.01]^T$ .

Для второго вектора начальных условий (с большим значением угловой скорости) тоже выберем вектор с меньшим значением угловой начальной

скорости, потому что при 1 рад/с для  $\alpha_3 = 1$  также не удается найти решение системы, новый вектор:  $x(0) = [0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.1]^T$

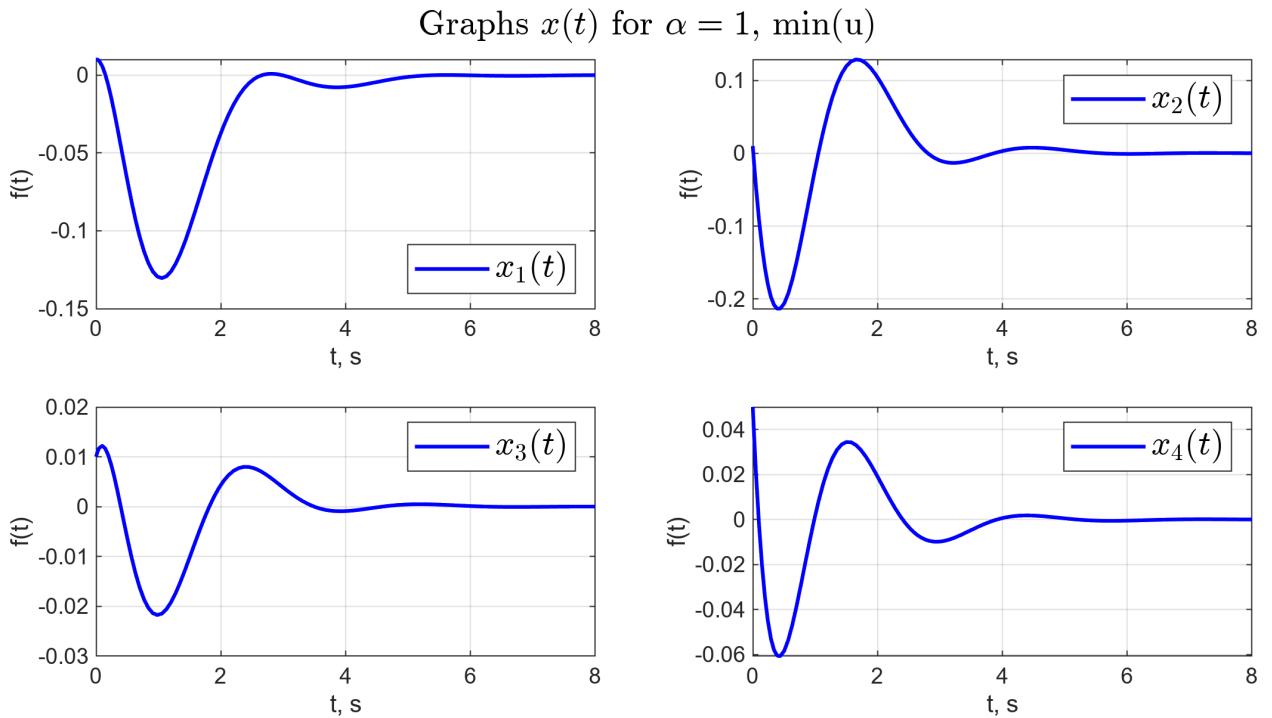


Рисунок 64 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 1$  и  $x(0) = [0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.1]^T$ .

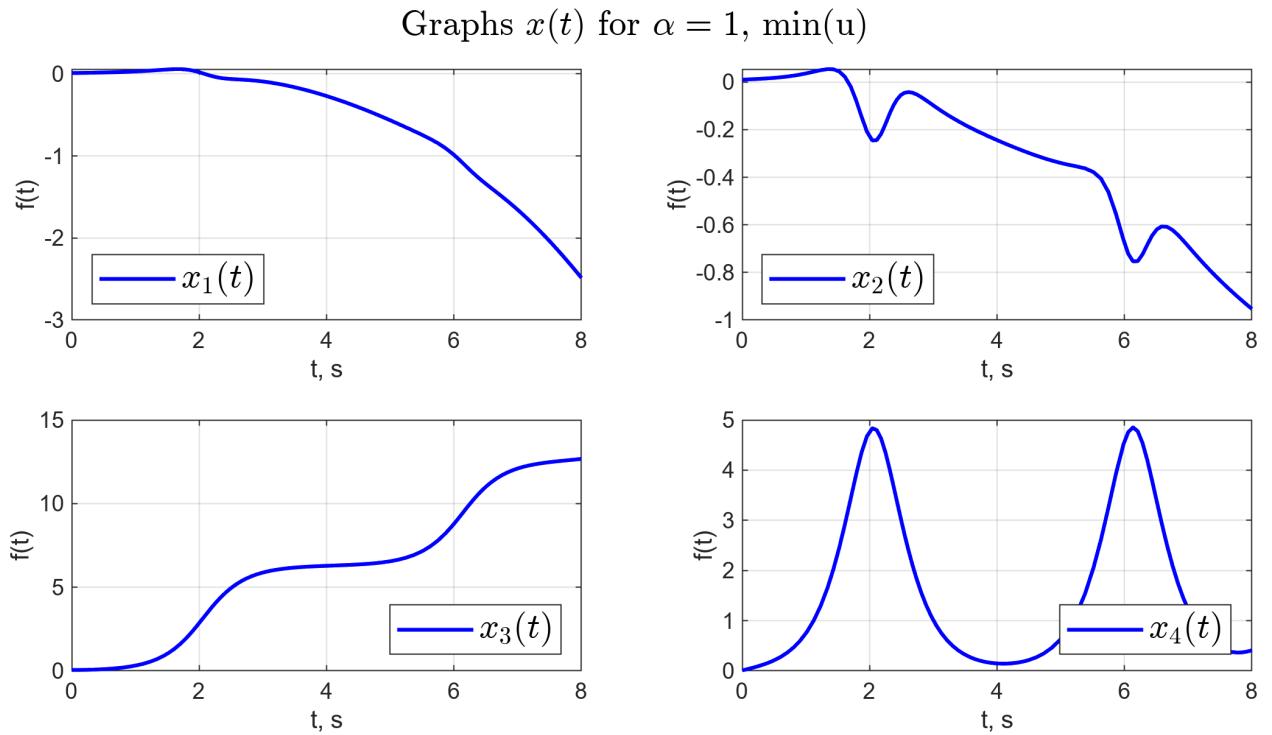


Рисунок 65 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 1$  и  $x(0) = [0.01 \ 0.01 \ \pi/60 \ 0.01]^T$ .

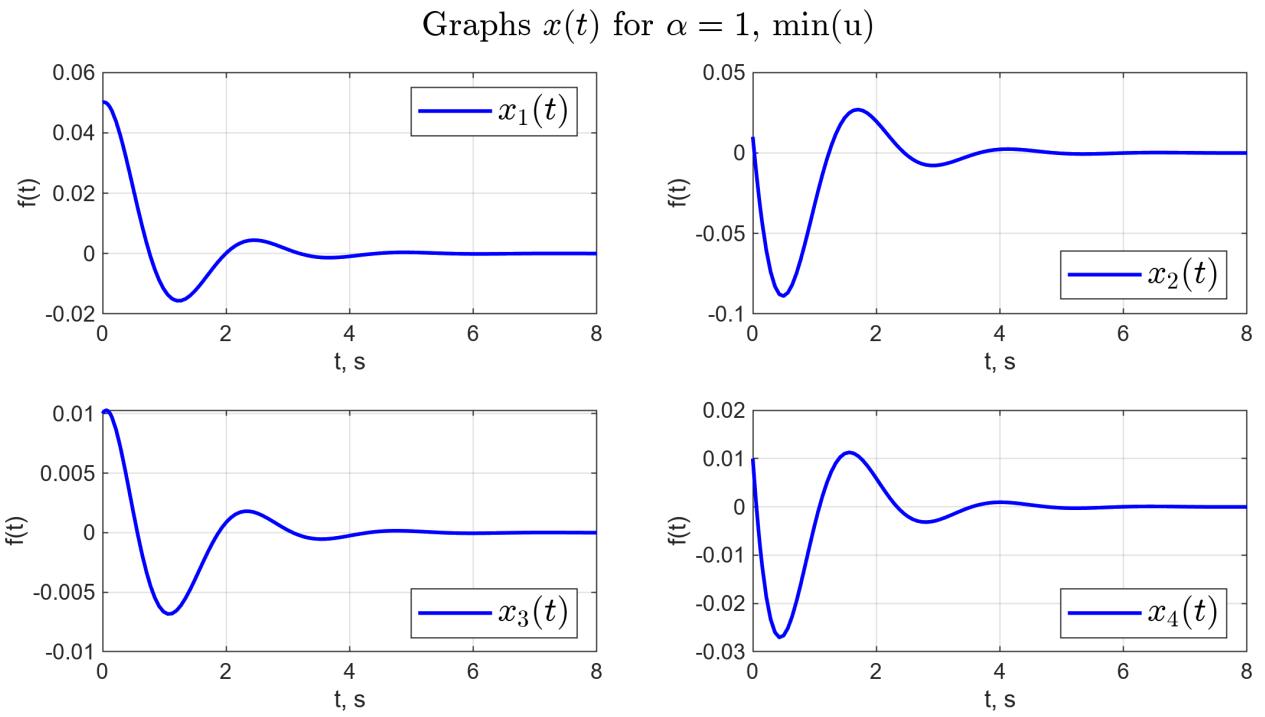


Рисунок 66 — Графики  $x(t)$ , при  $\alpha = 1$  и  $x(0) = [0.05 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01]^T$ .

С ростом значения  $\alpha$  существенно сужалась область допустимых начальных условий, при которых система матричных неравенств имеет решение.

#### 4.4 Исследование регулятора по состоянию с ограничением на управление

Исследуем влияние параметра  $\alpha$  на максимальное отклонение маятника от вертикали, максимальное горизонтальное смещение тележки и максимальное значение сигнала при управлении нелинейной системой (8), результаты представим в таблице 5

Таблица 5 — Результаты моделирования при разных значениях параметра  $\alpha$ .

$\alpha$	$\max  \varphi $	$\max  a $	$\max  u $
0.1	0.012	0.51	45
0.5	0.01	0.09	79
1	0.01	0.05	138
2	31.37	10	4.7

До значения  $\alpha = 2$  мы видим снижение таких параметров как максимальное отклонение маятника от вертикали и максимальное горизонтальное смещение тележки. Также с ростом  $\alpha$  (также до значения 2) мы наблюдаем рост максимального значения управляющего сигнала. При  $\alpha = 2$  регулятор не обеспечивает стабилизацию системы, поэтому мы получаем большие значения угла и координаты и малые управления.

## 4.5 Синтез наблюдателя

С помощью решения линейного матричного неравенства Ляпунова для экспоненциальной устойчивости произведем расчет наблюдателя полной размерности  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y)$  основываясь на линейной модели (12) и выбранной степени сходимости  $\alpha = 1.2$  динамики ошибки наблюдателя.

$$\begin{cases} A^T Q + QA + 2\alpha Q + C^T Y^T + YC \preceq 0, \\ L = Q^{-1}Y \end{cases} \quad (43)$$

После решения системы получим

$$L = \begin{bmatrix} -9.8432 & -0.4422 \\ -23.3319 & -1.2561 \\ 0.4422 & -9.8432 \\ 1.0032 & -29.1714 \end{bmatrix} \quad (44)$$

## 4.6 Синтез регулятора по выходу

На основе линейных матричных неравенств построим регулятор, стабилизирующий маятник и тележку в условиях, когда измерению доступны только сигналы  $y_1, y_2$ .

Зададимся значениями степеней устойчивости:  $\alpha_K = 0.5$  – для регулятора и  $\alpha_L = 1.2$  – для наблюдателя и проведем компьютерное моделирование с нулевыми начальными условиями наблюдателя и  $x(0) = [0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01]^T$  – начальными условиями вектора состояния системы.

Graph  $x(t)$  and  $\hat{x}(t)$  for  $\alpha_L = 1.2$ ,  $\alpha_K = 0.5$ , nonlinear

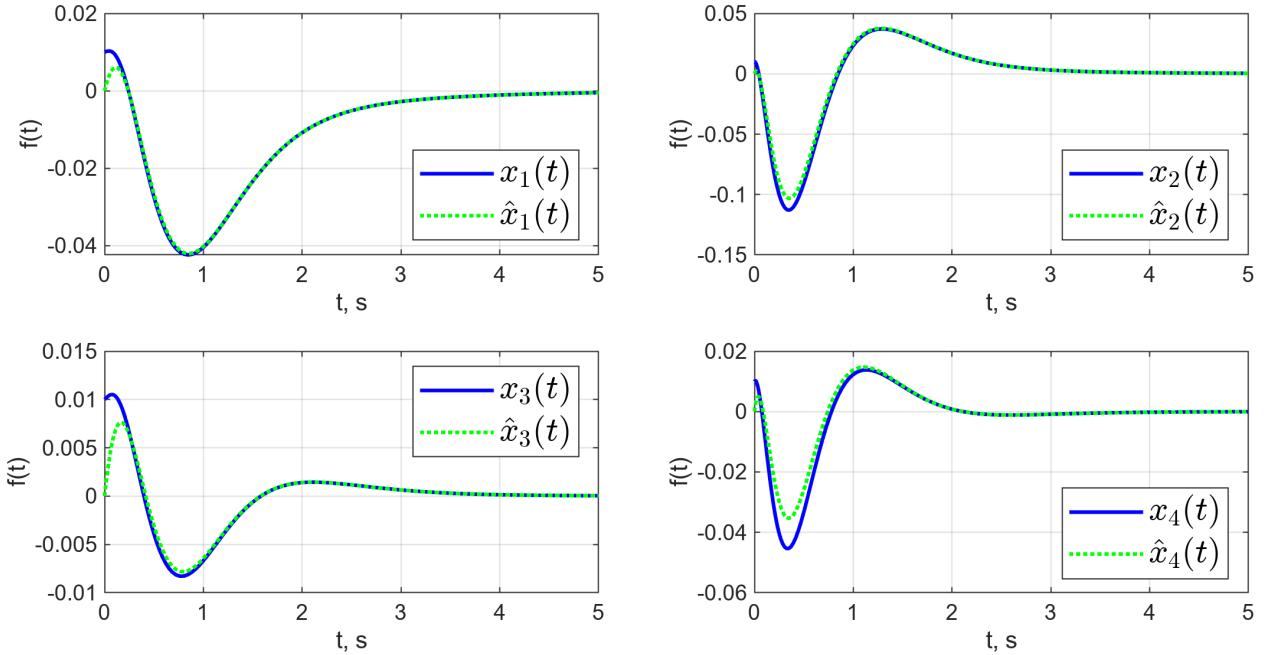


Рисунок 67 — Графики  $\hat{x}(t)$  и  $x(t)$ , при  $\alpha_L = 1.2$  и  $\alpha_K = 0.5$ .

Graph  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  for  $\alpha_L = 1.2$ ,  $\alpha_K = 0.5$ , nonlinear

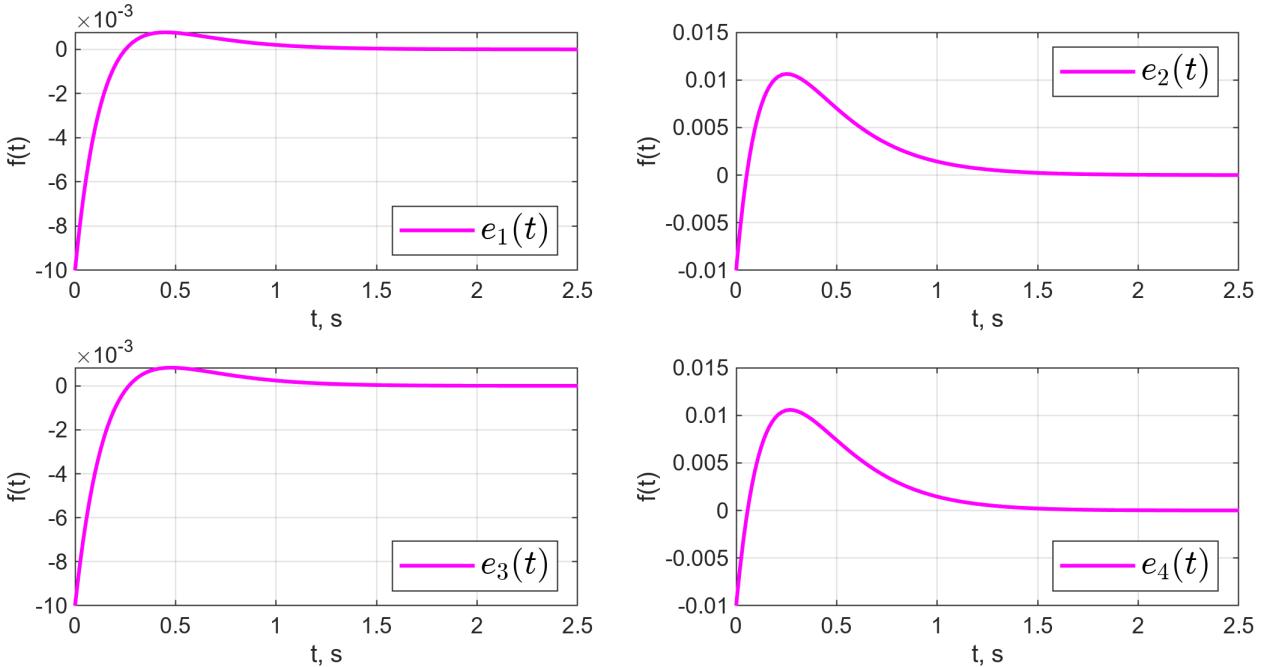


Рисунок 68 — Графики  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ , при  $\alpha_L = 1.2$  и  $\alpha_K = 0.5$ .

Проведем исследование работоспособности построенного регулятора при управлении нелинейной системой (8) в зависимости от выбранных степеней устойчивости. Зададимся следующими наборами степеней устойчивости и выполним моделирование

$$\begin{aligned} & \left[ \alpha_K = 0.5 \quad \alpha_L = 0.5 \right], \left[ \alpha_K = 5 \quad \alpha_L = 0.5 \right], \\ & \left[ \alpha_K = 0.5 \quad \alpha_L = 5 \right], \left[ \alpha_K = 5 \quad \alpha_L = 5 \right] \end{aligned} \quad (45)$$

Graph  $x(t)$  and  $\hat{x}(t)$  for  $\alpha_L = 0.5$ ,  $\alpha_K = 0.5$ , nonlinear

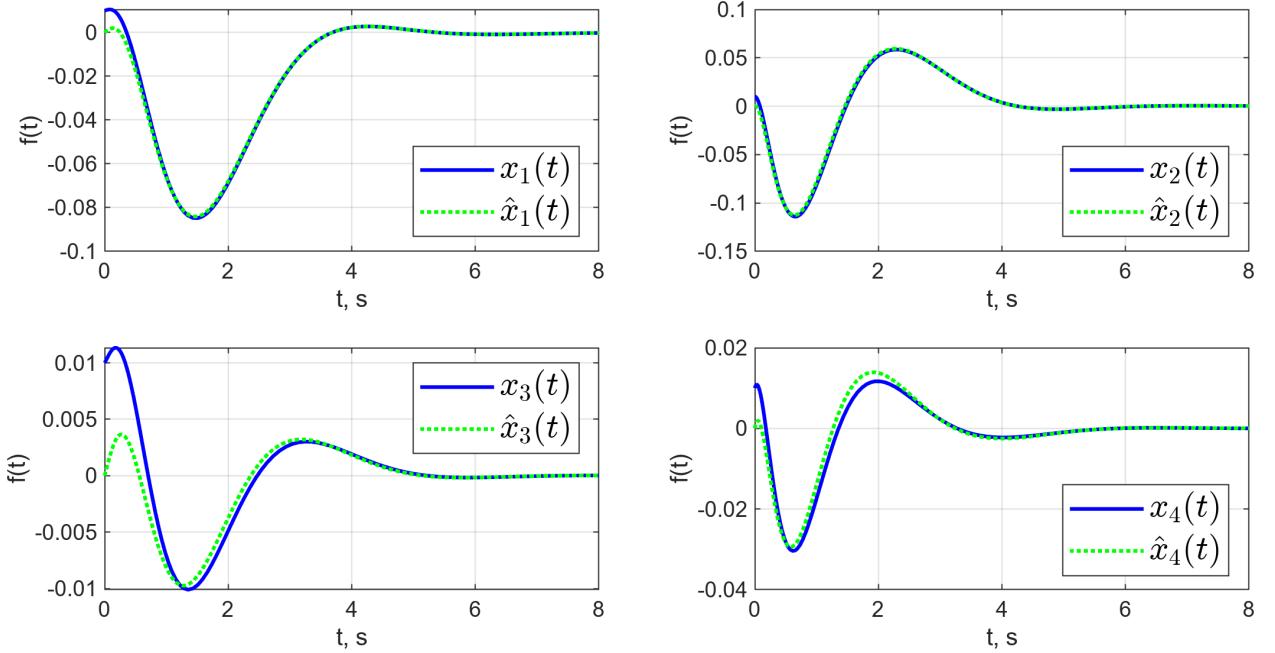


Рисунок 69 — Графики  $\hat{x}(t)$  и  $x(t)$ , при  $\alpha_L = 0.5$  и  $\alpha_K = 0.5$ .

Graph  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  for  $\alpha_L = 0.5$ ,  $\alpha_K = 0.5$ , nonlinear

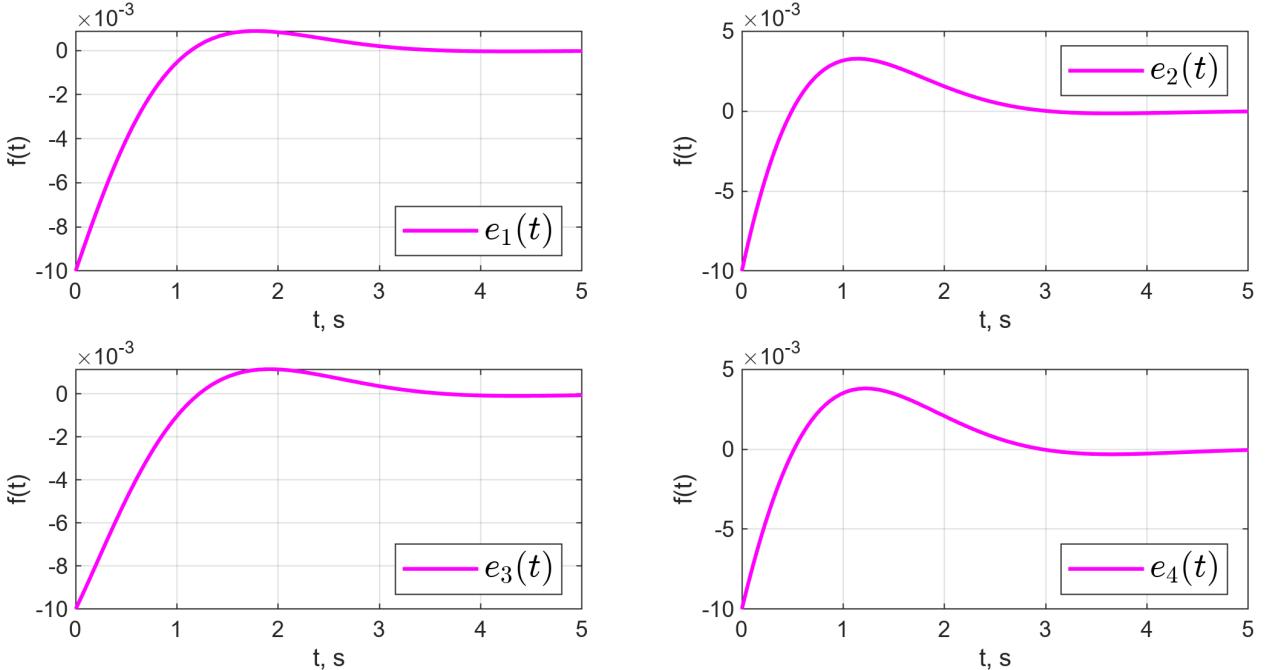


Рисунок 70 — Графики  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ , при  $\alpha_L = 0.5$  и  $\alpha_K = 0.5$ .

Graph  $x(t)$  and  $\hat{x}(t)$  for  $\alpha_L = 5$ ,  $\alpha_K = 0.5$ , nonlinear

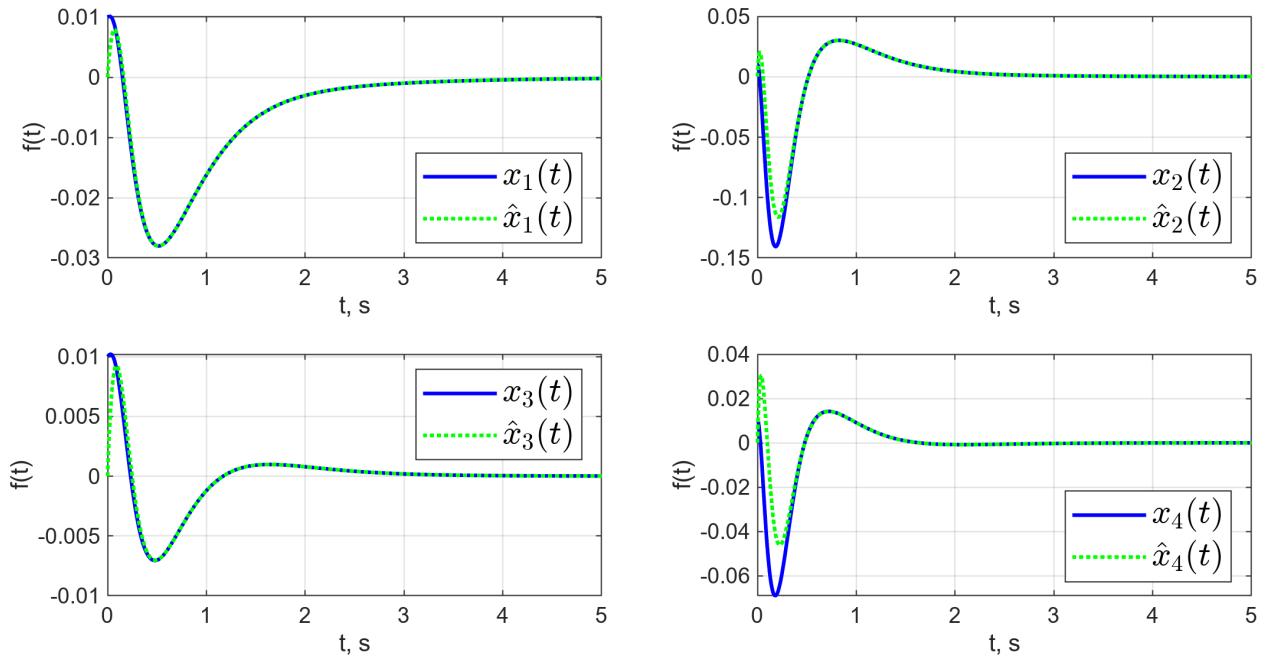


Рисунок 71 — Графики  $\hat{x}(t)$  и  $x(t)$ , при  $\alpha_L = 5$  и  $\alpha_K = 0.5$ .

Graph  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  for  $\alpha_L = 5$ ,  $\alpha_K = 0.5$ , nonlinear

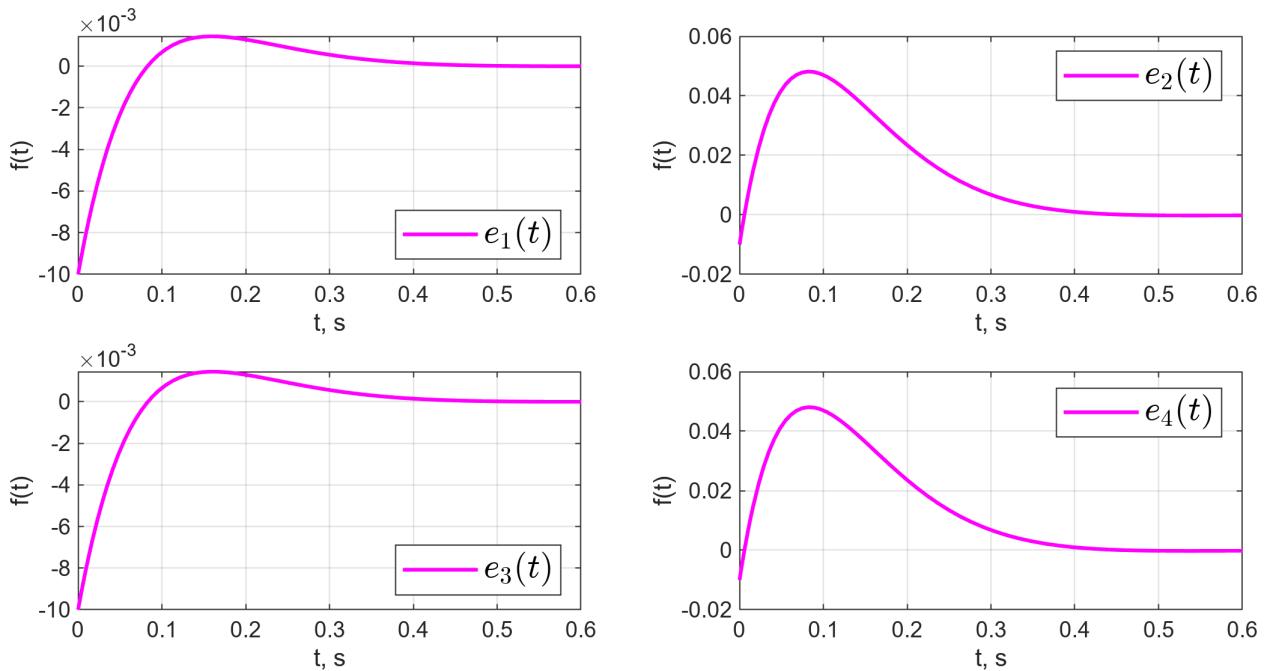


Рисунок 72 — Графики  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ , при  $\alpha_L = 5$  и  $\alpha_K = 0.5$ .

Graph  $x(t)$  and  $\hat{x}(t)$  for  $\alpha_L = 0.5$ ,  $\alpha_K = 5$ , nonlinear

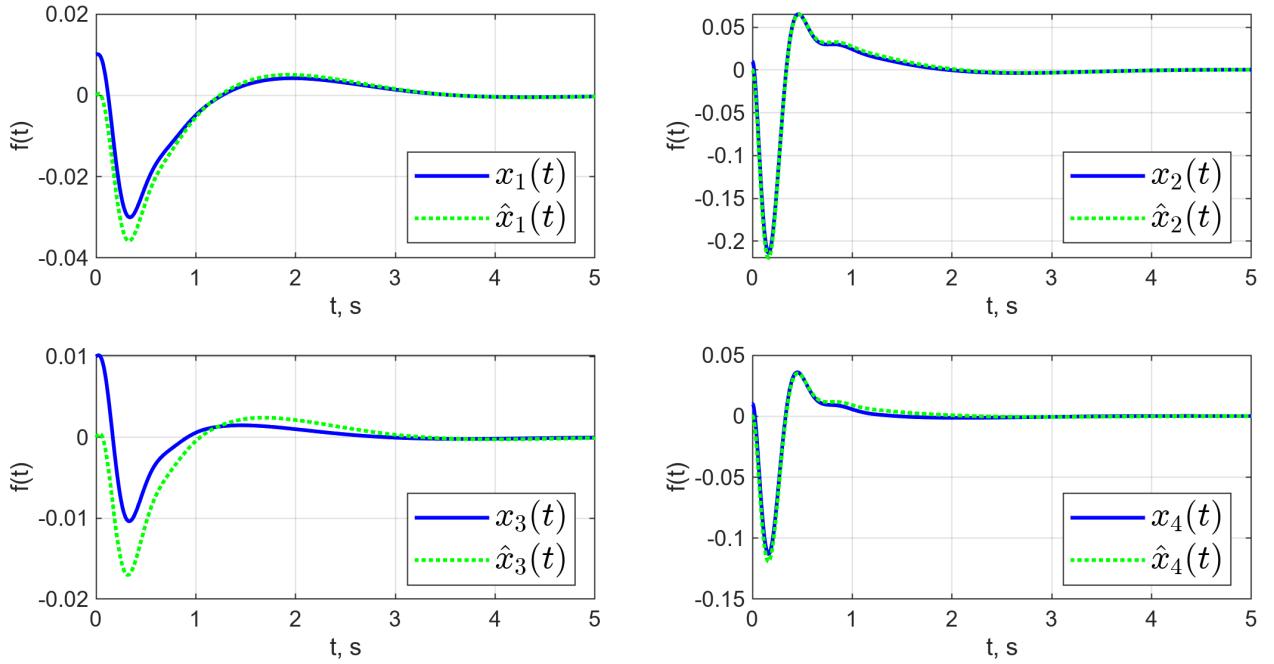


Рисунок 73 — Графики  $\hat{x}(t)$  и  $x(t)$ , при  $\alpha_L = 0.5$  и  $\alpha_K = 5$ .

Graph  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  for  $\alpha_L = 0.5$ ,  $\alpha_K = 5$ , nonlinear

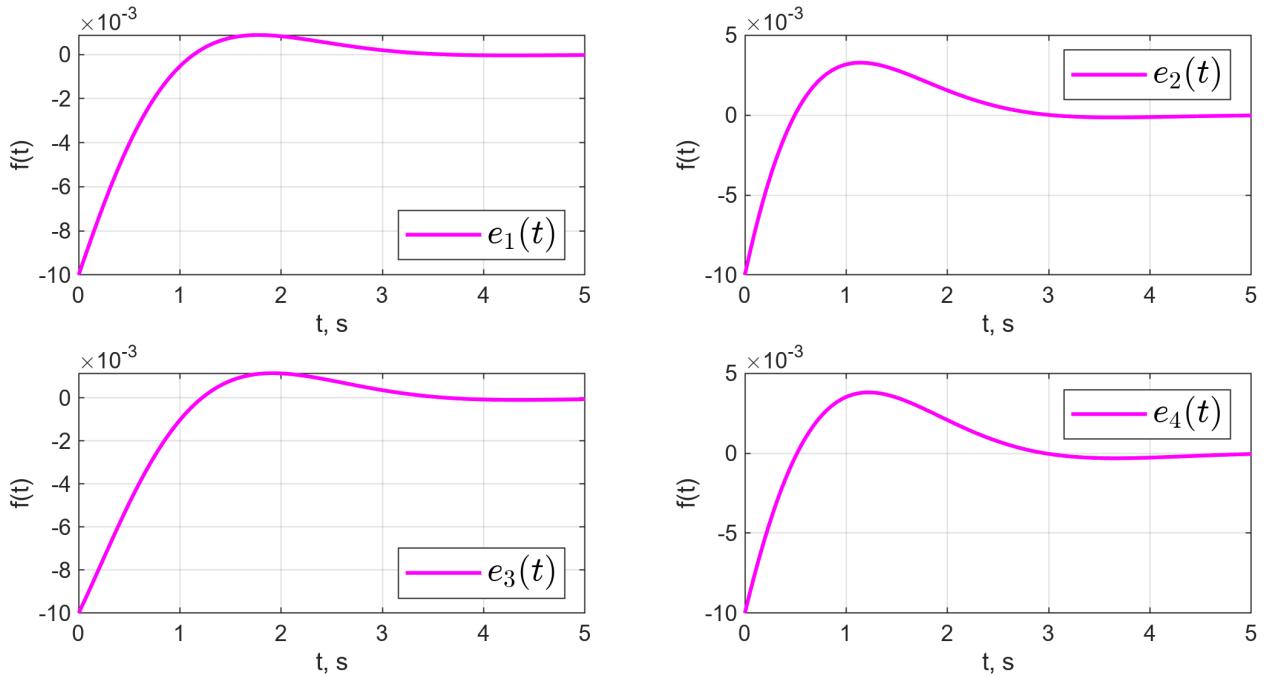


Рисунок 74 — Графики  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ , при  $\alpha_L = 0.5$  и  $\alpha_K = 5$ .

Graph  $x(t)$  and  $\hat{x}(t)$  for  $\alpha_L = 5$ ,  $\alpha_K = 5$ , nonlinear

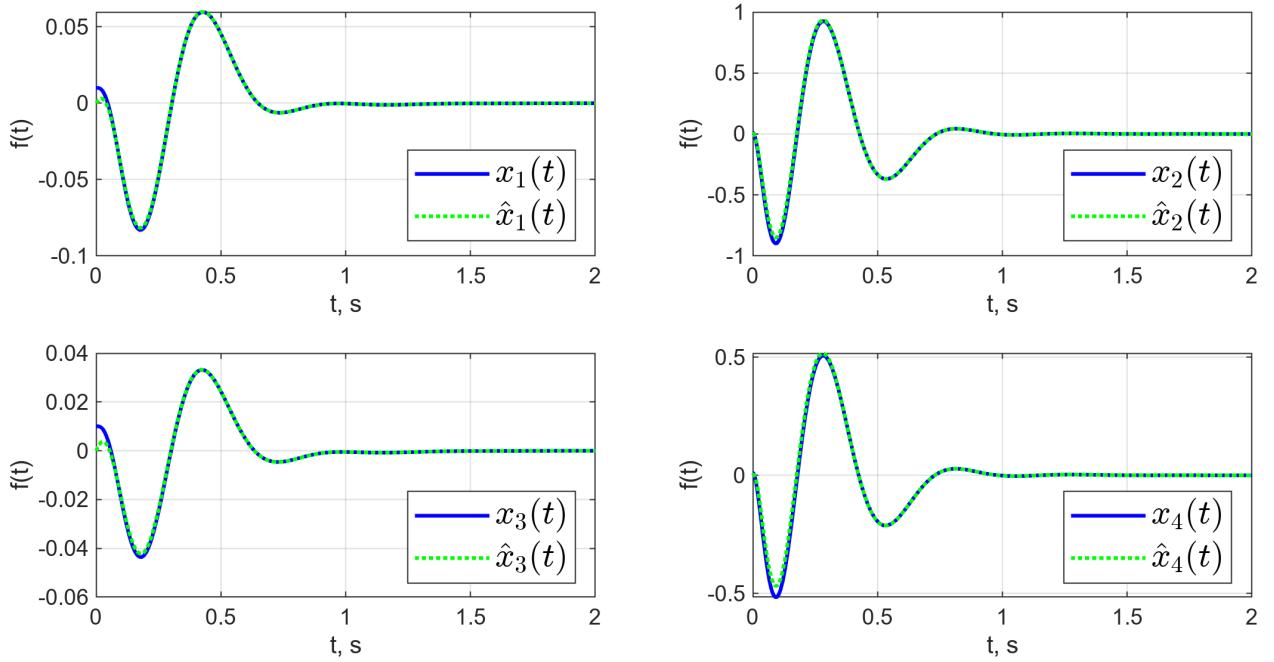


Рисунок 75 — Графики  $\hat{x}(t)$  и  $x(t)$ , при  $\alpha_L = 5$  и  $\alpha_K = 5$ .

Graph  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  for  $\alpha_L = 5$ ,  $\alpha_K = 5$ , nonlinear

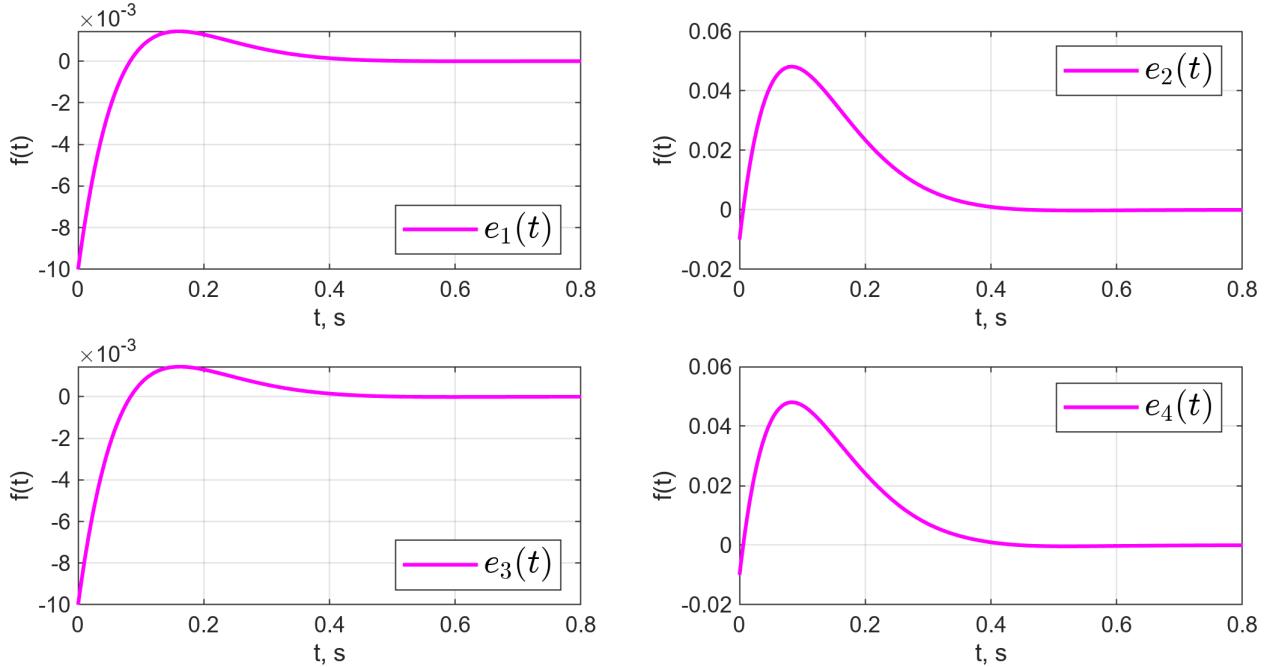


Рисунок 76 — Графики  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ , при  $\alpha_L = 5$  и  $\alpha_K = 5$ .

Как можно заметить для различных комбинаций значений степеней устойчивости 0.5 и 5 регулятор по выходу справляется с задачей стабилизации. Чем выше  $\alpha_L$ , тем быстрее ошибка между  $\hat{x}(t)$  и  $x(t)$  сходится к нулю ( $\approx 0.5$  секунды для  $\alpha_L = 5$  и  $\approx 4.5$  секунды для  $\alpha_L = 0.5$ ), сочетание большо-

го значения  $\alpha_{L,K} = 5$  приводит к меньшему времени стабилизации системы, но к большей амплитуде  $x(t)$ .

## 5 СЛЕЖЕНИЕ И КОМПЕНСАЦИЯ

### 5.1 Решение задачи компенсации

Зададим сигнал  $f$  в модели

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (46)$$

виде суммы гармоник

$$f(t) = \sum_{k=1}^5 A_k \sin(\omega_k t + \phi_k), \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, & \omega_1 &= 0.5, & \phi_1 &= 0 \\ A_2 &= 0.8, & \omega_2 &= 1, & \phi_2 &= \pi/4 \\ A_3 &= 0.6, & \omega_3 &= 1.5, & \phi_3 &= \pi/3 \\ A_4 &= 0.4, & \omega_4 &= 2, & \phi_4 &= -\pi/4 \\ A_5 &= 0.2, & \omega_5 &= 2.5, & \phi_5 &= \pi/6 \end{aligned} \quad (48)$$

Построим компенсирующий регулятор, гарантирующий выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t)\| = 0, \quad (49)$$

Запишем возмущение  $f$  через генератор

$$\begin{cases} \dot{w} = \Gamma_f w \\ f = Y_f w \end{cases} \quad (50)$$

Теперь нам необходимо определить значения  $\Gamma_f$ ,  $Y_f$  и  $w(0)$

$$\Gamma_f = \text{block diag} \left( \begin{bmatrix} 0 & -w_1 \\ w_1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & -w_5 \\ w_5 & 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

При переходе к матричной экспоненте  $e^{\Gamma_f t}$  каждый блок

$$\begin{bmatrix} 0 & -w_i \\ w_i & 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

перейдет в

$$\begin{bmatrix} \cos(w_i t) & -\sin(w_i t) \\ \sin(w_i t) & \cos(w_i t) \end{bmatrix} \quad (53)$$

Запишем  $f(t)$  и упростим его компоненты

$$\begin{aligned} f(t) = & \sin(0.5t) + 0.8 \sin(t + \pi/4) + 0.6 \sin(1.5t + \pi/3) + \\ & + 0.4 \sin(2t - \pi/4) + 0.2 \sin(2.5t + \pi/6) = \sin(0.5t) + 0.4\sqrt{2} \sin t + \\ & + 0.4\sqrt{2} \cos t + 0.3 \sin(1.5t) + 0.3\sqrt{3} \cos(1.5t) + 0.2\sqrt{2} \sin(2t) - \\ & - 0.2\sqrt{2} \cos(2t) + 0.1\sqrt{3} \sin(2.5t) + 0.1 \cos(2.5t) \end{aligned} \quad (54)$$

Основываясь на следующей системе уравнений, найдем подходящие значения  $w(0)$  и  $Y_f$

$$\begin{cases} w = e^{\Gamma_f t} w(0) \\ f = Y_f e^{\Gamma_f t} w(0) \end{cases} \quad (55)$$

$$w(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (56)$$

$$Y_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.4\sqrt{2} & 0.4\sqrt{2} & 0.3\sqrt{3} & 0.3 & -0.2\sqrt{2} & 0.2\sqrt{2} & 0.1 & 0.1\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Запишем общий вид необходимого регулятора

$$u = Kx + K_f w \quad (58)$$

В качестве  $K$  возьмем ранее вычисленный в пункте 4.1 регулятор

$$K = \begin{bmatrix} 3064 & 4364 & -26684 & -11174 \end{bmatrix} \quad (59)$$

теперь нам необходимо вычислить компенсирующую компоненту  $K_f$  регулятора. Запишем систему матричных уравнений Франкиса-Дэвисона

$$\begin{cases} P_f \Gamma_f - (A + BK)P_f - DY_f = BK_f \\ CP_f = 0 \end{cases} \quad (60)$$

Проверим условие существования решения системы уравнений (60).

Решение относительно  $P_f$  и  $K_f$  есть, если

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A + BK - I\lambda_i \Gamma_f & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \text{число строк} \quad (61)$$

В ходе проверки этого условия было выяснено, что ранг искомых матриц равен 5, что меньше числа строк в матрицах, 6. От нас требуется компенсировать только значение угла (49), то есть  $y_2(t) = \varphi(t)$ . Будем работать с матрицей  $\tilde{C}$  вместо  $C$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

Вновь проверим, условие (61) только теперь вместо матрицы  $C$  будем использовать  $\tilde{C}$ . Условие существования решения выполнено ранг каждой исследованной матрицы равен 5, что совпадает с количеством строк в матрицах.

В результате решения системы (60) получим значение компенсирующей компоненты регулятора

$$K_f = \begin{bmatrix} -736.0530 \\ -1056.7 \\ -367.4171 \\ 48.9573 \\ -145.2753 \\ 86.1095 \\ -27.2456 \\ -76.8480 \\ -31.9406 \\ 3.5614 \end{bmatrix}^T \quad (63)$$

Проведем моделирование для линейной модели

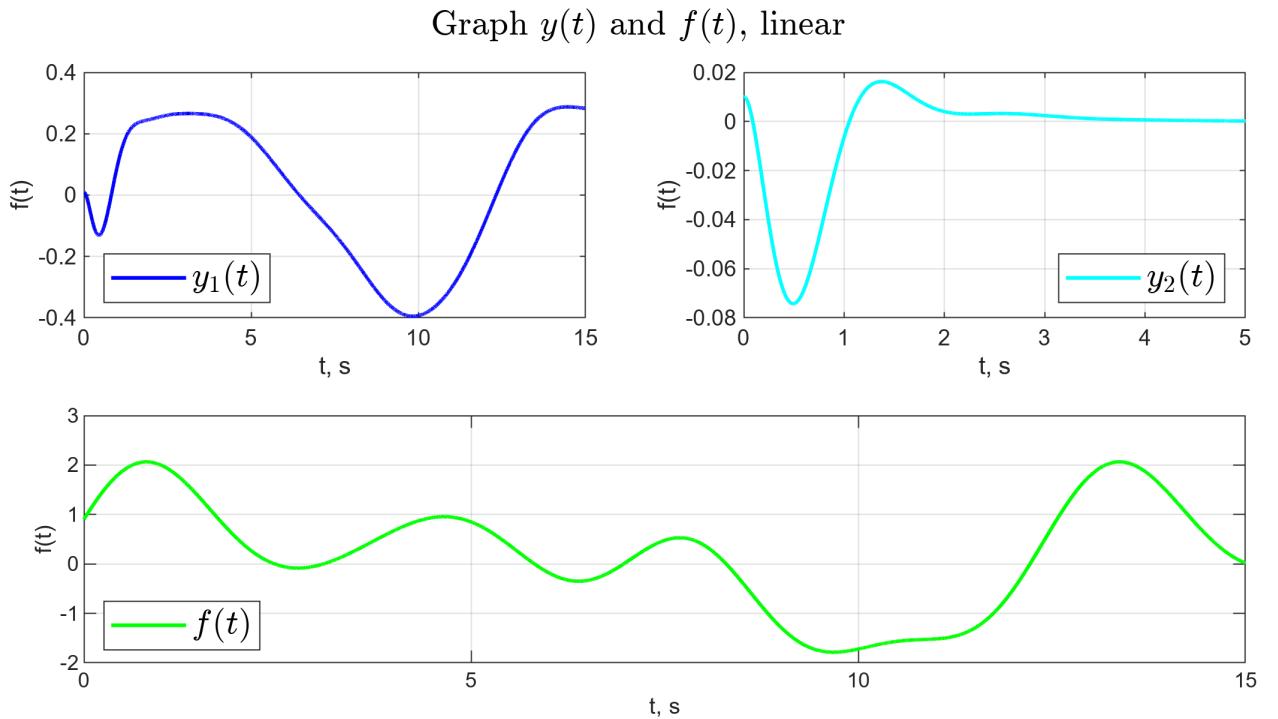


Рисунок 77 — Графики выходного сигнала  $y(t)$  и внешнего воздействия  $f(t)$  для линейной системы.

Заметим, что целевое условие (49) действительно выполнено, компонента выхода  $y_2(t) = \varphi(t)$  сходится к нулю с течением времени. Задача компенсации для линейной системы выполнена.

Исследуем поведение регулятора для нелинейного случая.

Для нелинейного случая при начальных условиях системы  $x(0) = [0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01]^T$  синтезированный компенсирующий регулятор также справляется с задачей (рисунок 78).

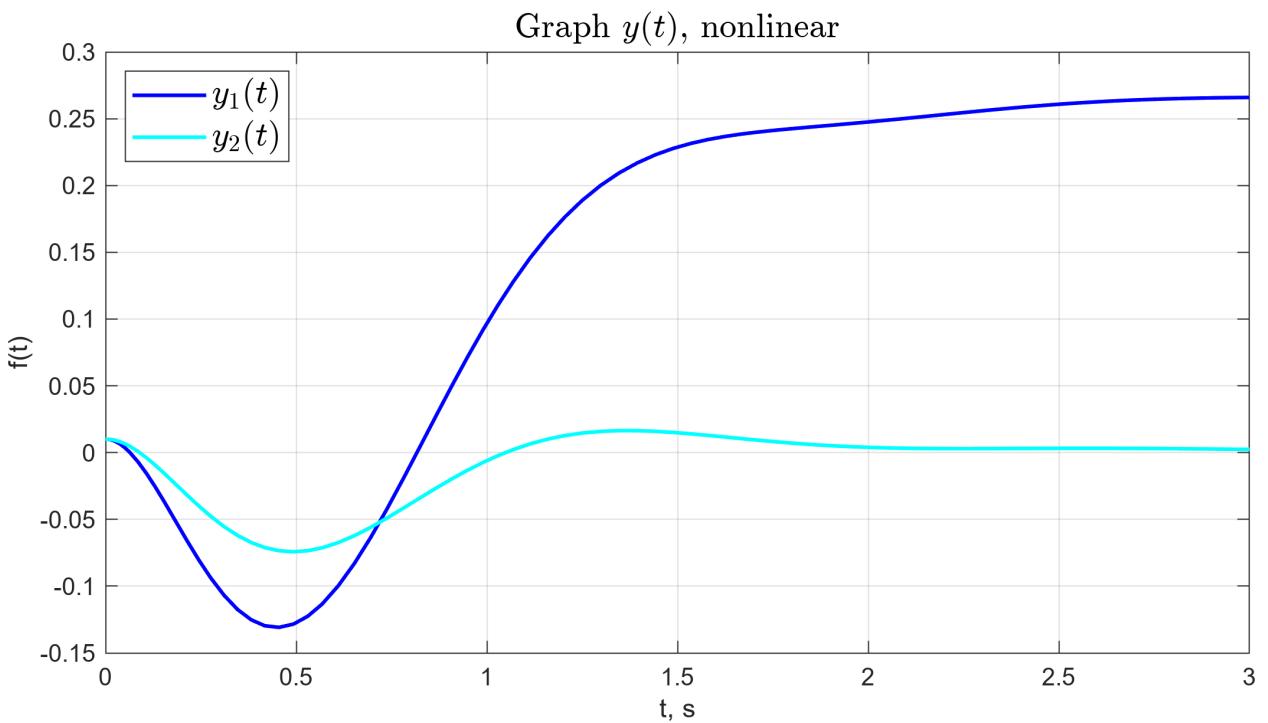


Рисунок 78 — График выходного сигнала  $y(t)$  для нелинейной системы при  
 $x(0) = [0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01]^T$ .

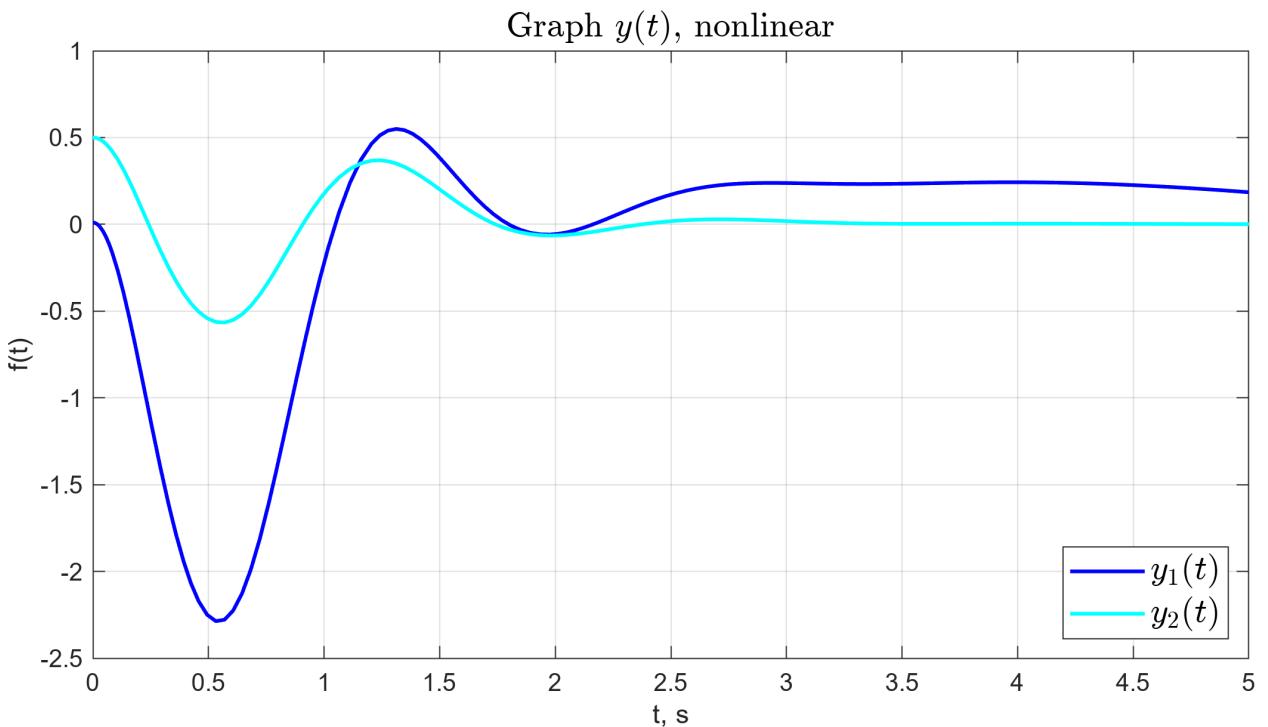


Рисунок 79 — График выходного сигнала  $y(t)$  для нелинейной системы при  
 $x(0) = [0.01 \ 0.01 \ 0.5 \ 0.01]^T$ .

При увеличении начального значения угла отклонения амплитуда  $y_2(t)$  и время, за которое он сходится к нулю возрастают (рисунок 79). Кроме того,

не удается получить результаты моделирования при задании больших значений начального угла за ограниченное время.

## 5.2 Решение задачи слежения

Пусть  $f = 0$ . Зададимся целевым сигналом  $g(t)$ , который описывает желаемое поведение  $\varphi(t)$

$$g(t) = \sum_{k=1}^5 A_k \sin(\omega_k t + \phi_k), \quad (64)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, & \omega_1 &= 0.5, & \phi_1 &= 0 \\ A_2 &= 0.8, & \omega_2 &= 1, & \phi_2 &= \pi/4 \\ A_3 &= 0.6, & \omega_3 &= 1.5, & \phi_3 &= \pi/3 \\ A_4 &= 0.4, & \omega_4 &= 2, & \phi_4 &= -\pi/4 \\ A_5 &= 0.2, & \omega_5 &= 2.5, & \phi_5 &= \pi/6 \end{aligned} \quad (65)$$

Построим следящий регулятор, гарантирующий выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t) - g(t)\| = 0 \quad (66)$$

Запишем целевой сигнал  $g$  через генератор

$$\begin{cases} \dot{w}_g = \Gamma_g w_g \\ g = Y_g w_g \end{cases} \quad (67)$$

Значения матриц  $\Gamma_g, Y_g, w_g(0)$  совпадают соответственно с  $\Gamma_f, Y_f, w(0)$ , так как сигналы  $g(t)$  и  $f(t)$  одинаковы.

Необходимый регулятор будет иметь вид

$$u = Kx + K_g w_g \quad (68)$$

Стабилизирующую компоненту  $K$  выберем такой же как и в прошлом пункте. Запишем систему уравнений Франкиса-Дэвисона

$$\begin{cases} P_g \Gamma_g - (A + BK) P_g = BK_g \\ CP_g = Y_g \end{cases} \quad (69)$$

Условие существование здесь будет то же, что и в прошлом пункте.

Синтезируем матрицу следящей компоненты регулятора

$$K_g = \begin{bmatrix} -83795 \\ -101630 \\ -28825 \\ 15476 \\ -4671 \\ 13280 \\ -6636.1 \\ -1338.9 \\ -280.4743 \\ 2710.3 \end{bmatrix}^T \quad (70)$$

И выполним моделирование для линейной системы

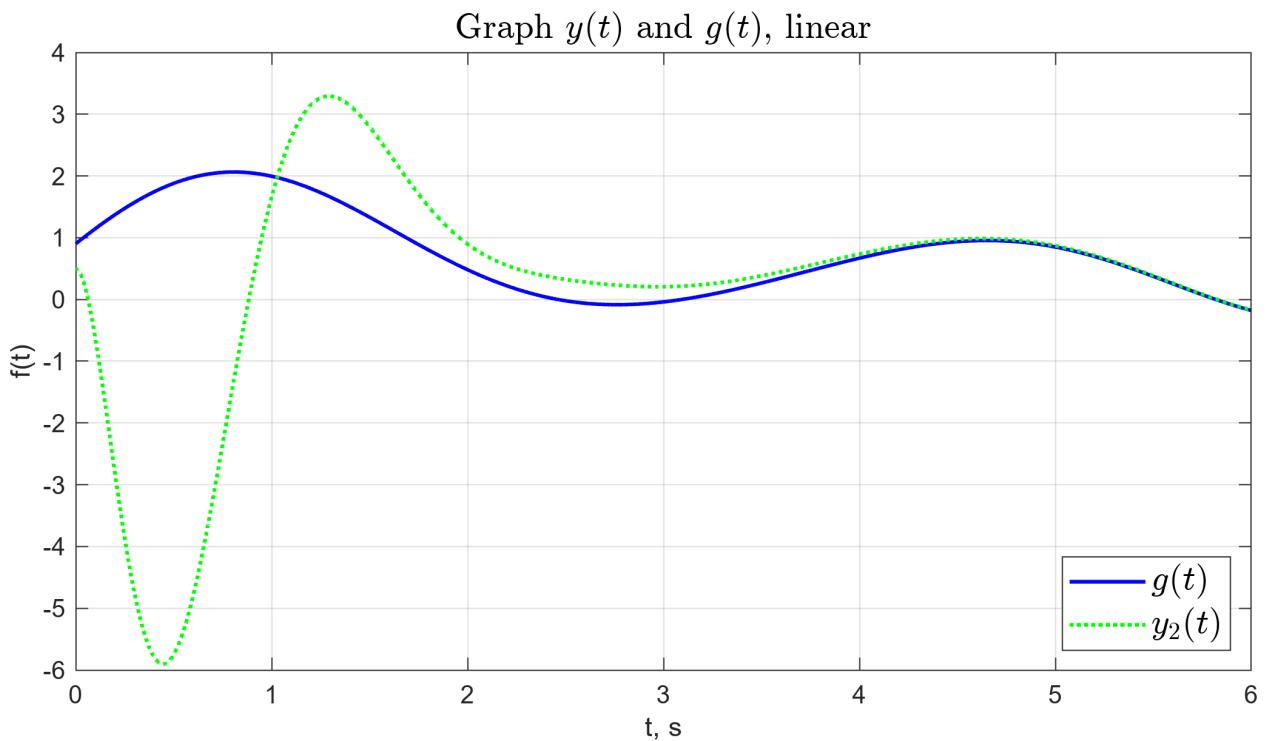


Рисунок 80 — Графики выходного сигнала  $y_2(t)$  и задающего сигнала  $g(t)$  для линейной системы.

Как видно из рисунков 81 и 80 задача слежения для линейной системы с помощью синтезированного регулятора выполнена.

Перейдем к моделированию работы регулятора в случае нелинейной системы.

Как можно заметить, задача слежения с использованием данного регулятора для нелинейной системы не решена. Возможно, значения  $K_g$  оказались

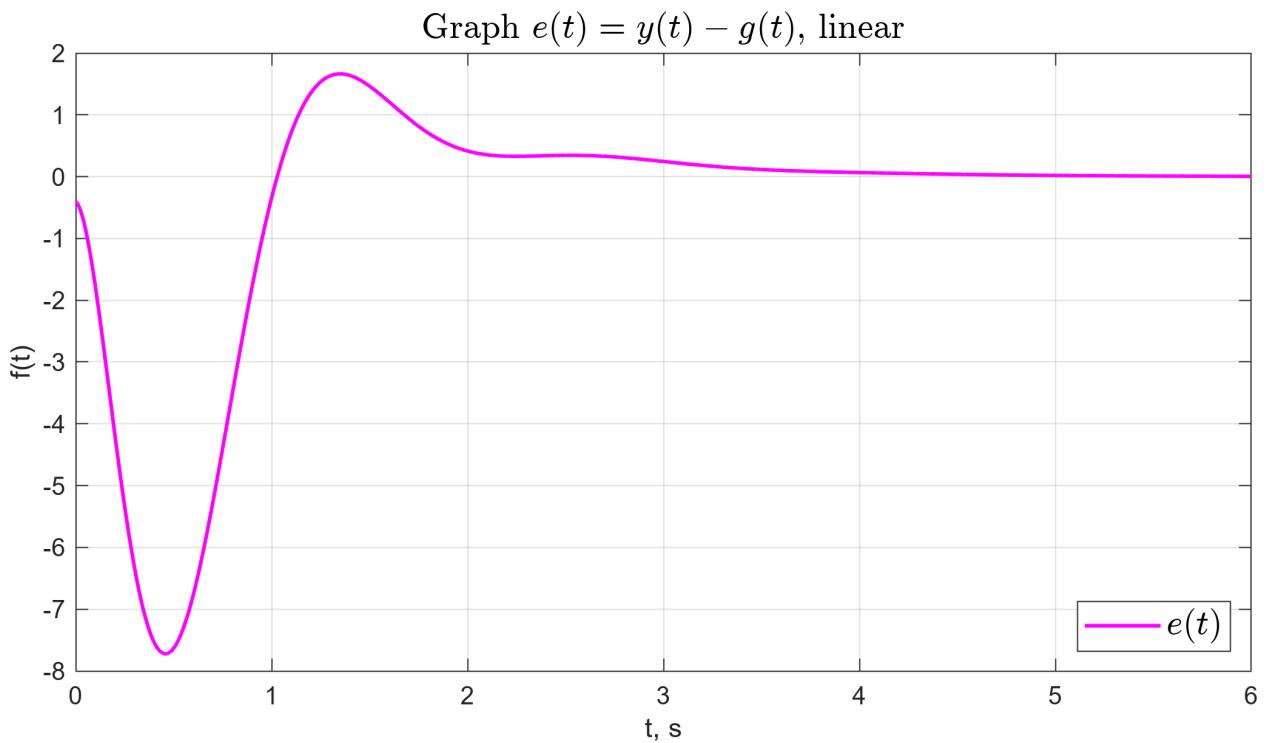


Рисунок 81 — График ошибки сложения  $e(t) = y_2(t) - g(t)$  для линейной системы.

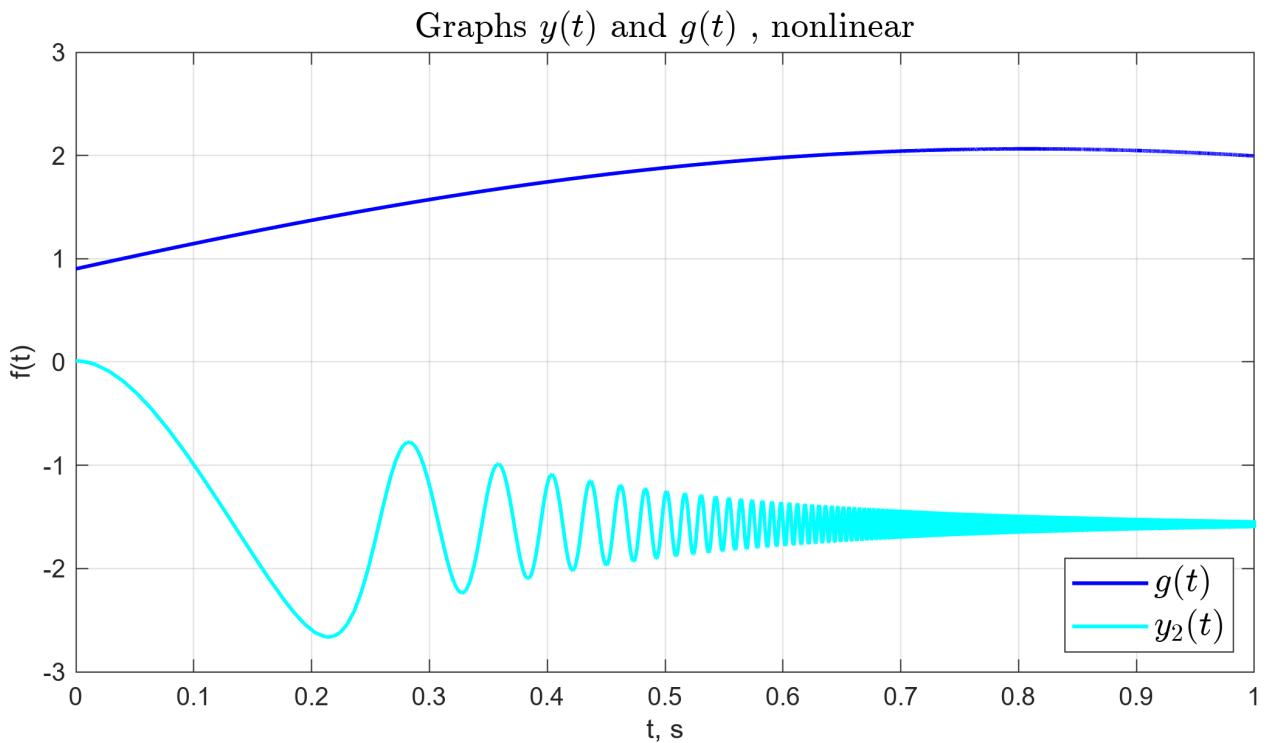


Рисунок 82 — Графики выходного сигнала  $y_2(t)$  и задающего сигнала  $g(t)$  для нелинейной системы.

слишком большими по модулю. Попробуем подобрать другой регулятор. Из пункта 4.3 возьмем матрицу регулятора

$$K = \begin{bmatrix} 4.5 & 49 & -3219 & -1334 \end{bmatrix}$$

Соответствующая матрица следящей компоненты

$$K_g = \begin{bmatrix} -336.6 \\ 234.0905 \\ 447.1551 \\ -422.7219 \\ 191.4115 \\ -966.0481 \\ 1013.6 \\ 264.1078 \\ 272.1893 \\ -701.2038 \end{bmatrix}^T$$

График для данного варианта регулятора представлен на рисунке 83.

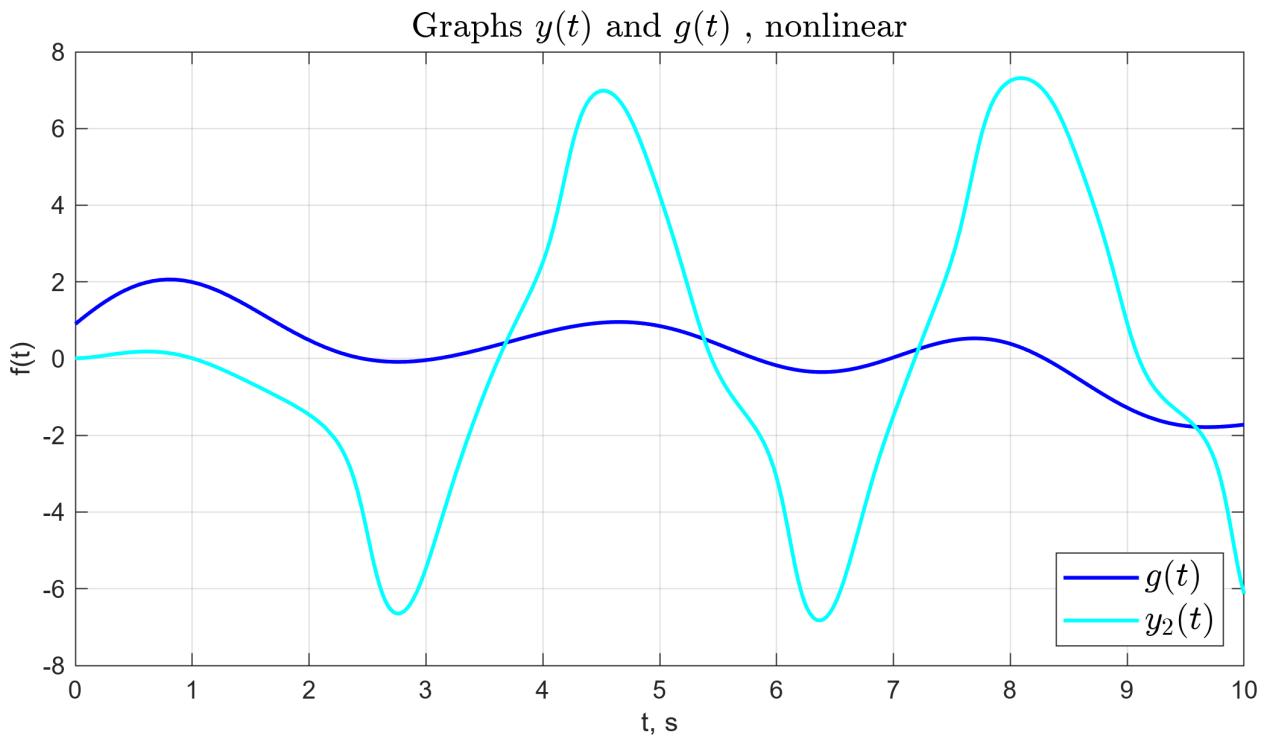


Рисунок 83 — Графики выходного сигнала  $y_2(t)$  и задающего сигнала  $g(t)$  для нелинейной системы.

На рисунке 84 представлен результат моделирования системы при

$$K = [10.7930 \ 127.0276 \ -4567.3 \ -1894.6] \quad (71)$$

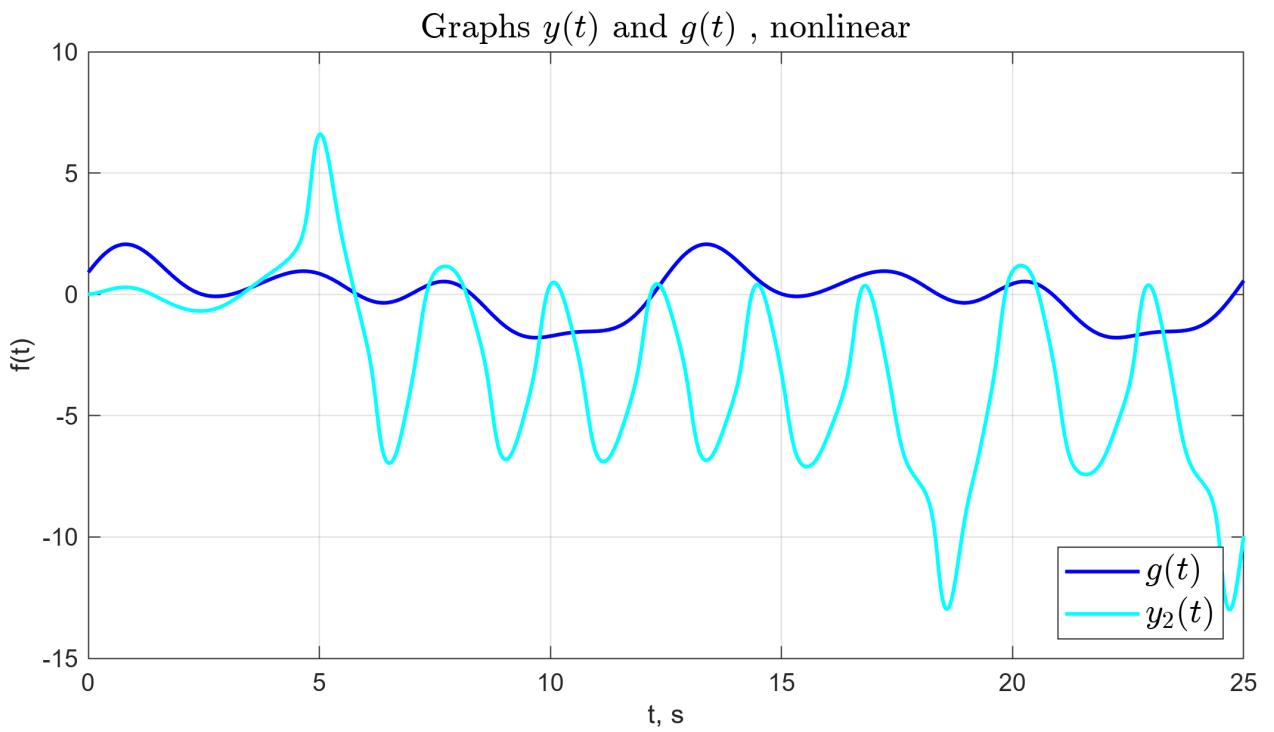


Рисунок 84 — Графики выходного сигнала  $y_2(t)$  и задающего сигнала  $g(t)$  для нелинейной системы.

и соответственно

$$K_g = \begin{bmatrix} -1654.4 \\ 1324.6 \\ 976.8675 \\ 490.8794 \\ 910.7887 \\ -640.0242 \\ 772.5327 \\ 770.8408 \\ 536.4382 \\ -547.1769 \end{bmatrix}^T \quad (72)$$

Для рассмотренных вариантов следящих регуляторов не удалось решить задачу слежения для нелинейной системы для заданного сигнала  $g(t)$ . Возможно, для данной системы необходимо применять другие подходы к синтезу следящих регуляторов. Либо подбирать другие базовые параметры системы: массу тележки и маятника, например или менять гармоники сигнала  $g(t)$ .

## 6 СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: LQR И ФИЛЬТР КАЛМАНА

### 6.1 Синтез линейно-квадратичного регулятора

Синтезируем LQR-регулятор на основе линейной модели (12).

Зададимся матрицами  $Q \succ 0$ ,  $R \succ 0$ , чем больше значения первой матрицы, тем выше скорость переходного процесса, второй – меньше сила управления.

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, R = 1 \quad (73)$$

Синтезируем регулятор, минимизирующий функционал качества

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (74)$$

путем решения соответствующего матричного уравнения Риккати при  $\nu = 1$ :

$$\begin{cases} A^T P + PA + Q - \nu PBR^{-1}B^T P = 0, \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases} \quad (75)$$

Условия существования решения  $P$  выполнено:  $Q \succeq 0$ ,  $R \succ 0$ ,  $(A, B)$  – стабилизируемы,  $(Q, A)$  – наблюдаемы.

Получим следующее значение матрицы  $K$

$$K = \begin{bmatrix} 3.2 & 44.3 & -5720.8 & -2369.3 \end{bmatrix} \quad (76)$$

применим данный регулятор для управления нелинейной системой (8), задавшись начальными условиями  $x(0) = [0.01, 0.01, 0.01, 0.01]$ , рисунок 85. Как видим, система стабилизируется, причем компоненты вектора  $x(t)$  сходятся к нулю за разное время.

Graphs  $x(t)$  for  $Q = \text{diag}(10)$ ,  $R = 1$

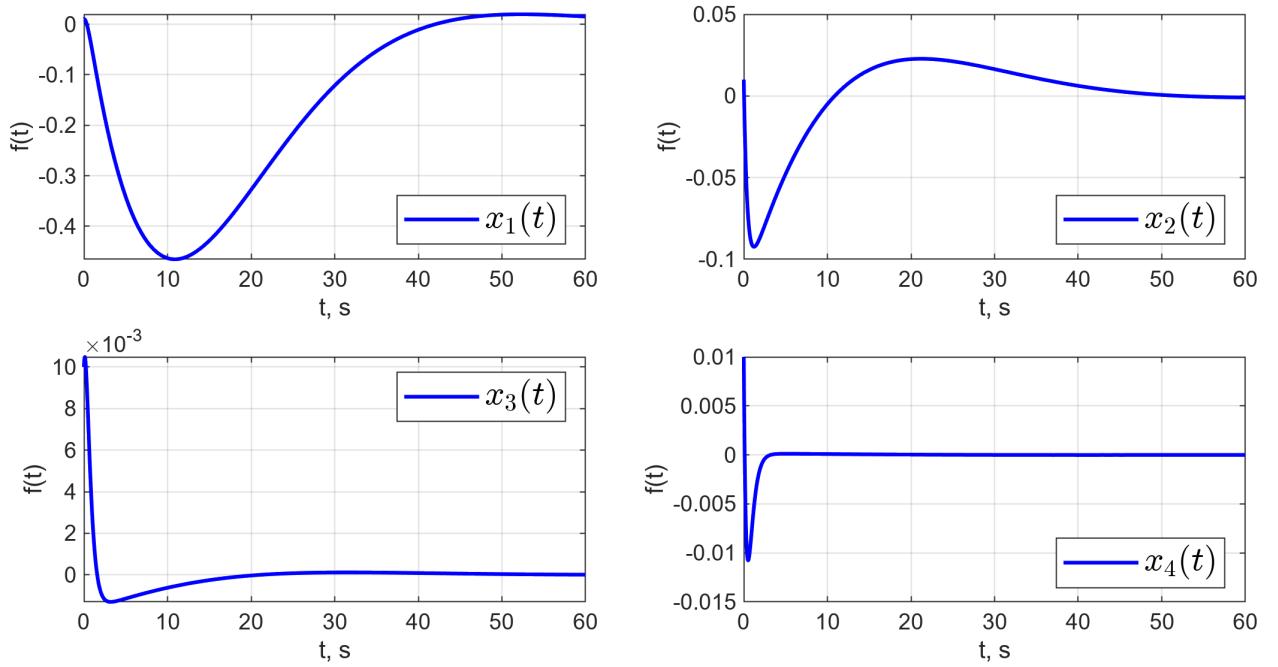


Рисунок 85 — Графики  $x(t)$  для нелинейной системы.

Исследуем работоспособность синтезированного регулятора при управлении нелинейной системой в зависимости от начальных условий.

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.01 & 3 & 0.01 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.01 & 1.5 \end{bmatrix},$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 & \pi/6 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 5 & 0.01 & 0.01 & 0.1 \end{bmatrix},$$

Graphs  $x(t)$  for  $Q = \text{diag}(10)$ ,  $R = 1$

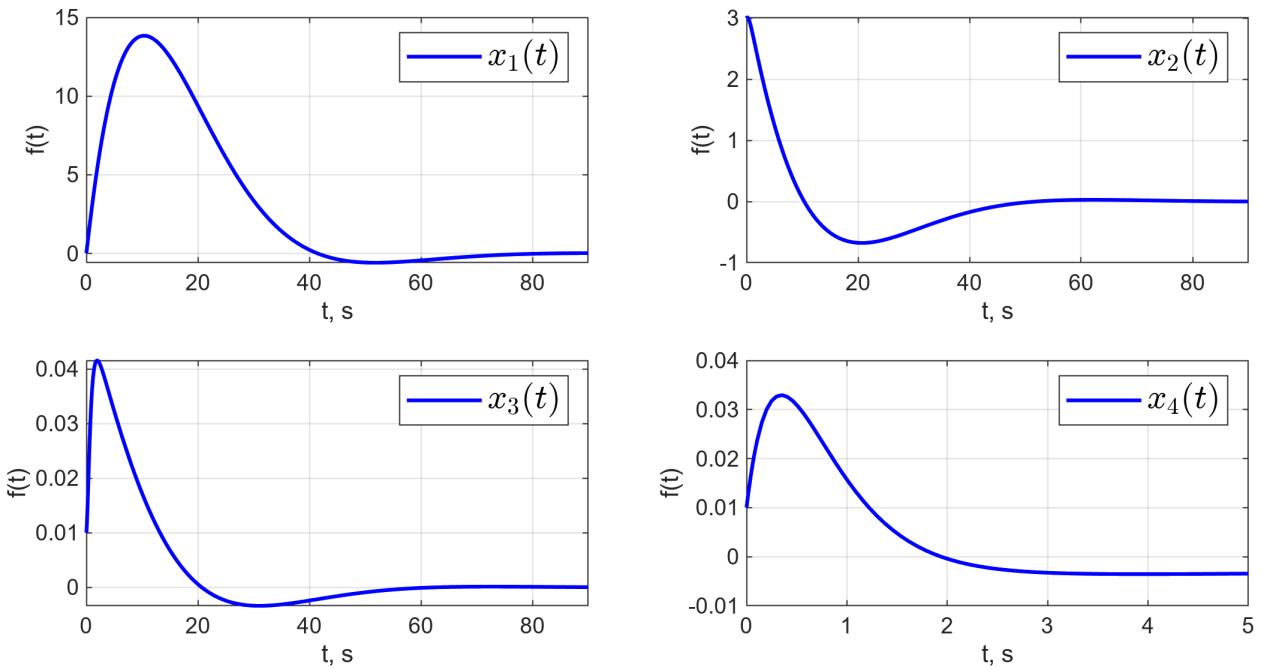


Рисунок 86 — Графики  $x(t)$  для нелинейной системы при  $x(0) = [0.01, 3, 0.01, 0.01]$ .

Graphs  $x(t)$  for  $Q = \text{diag}(10)$ ,  $R = 1$

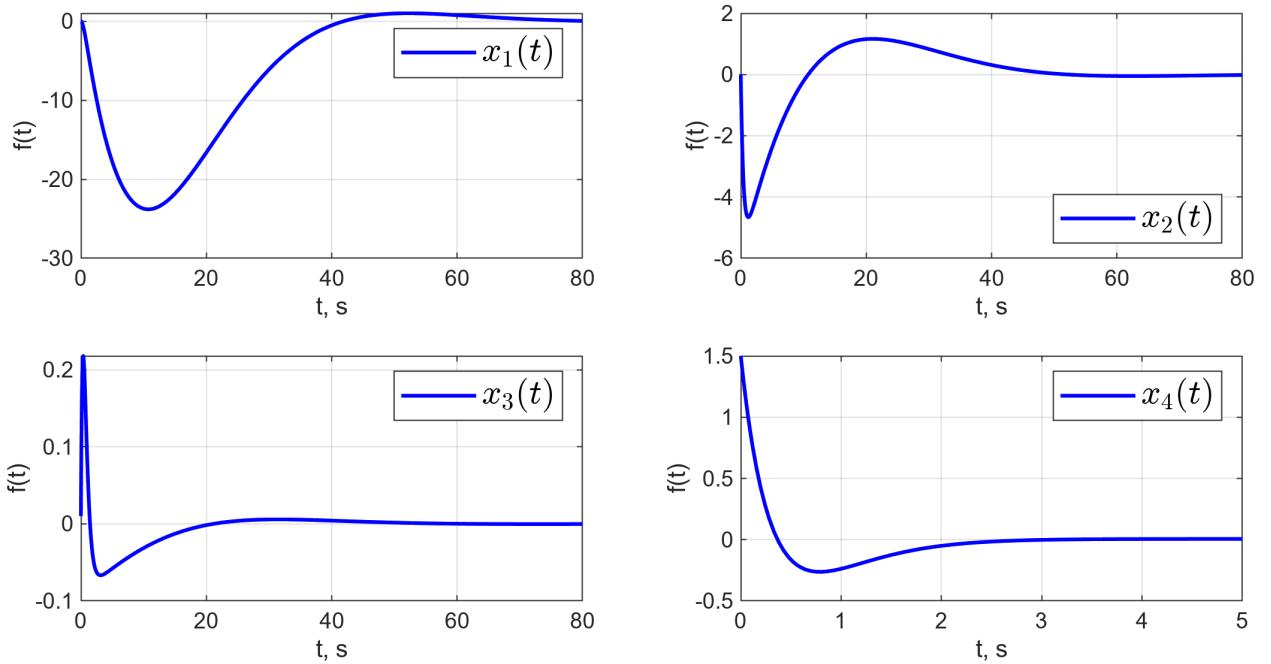


Рисунок 87 — Графики  $x(t)$  для нелинейной системы при  $x(0) = [0.01, 0.01, 0.01, 1.5]$ .

Graphs  $x(t)$  for  $Q = \text{diag}(10)$ ,  $R = 1$

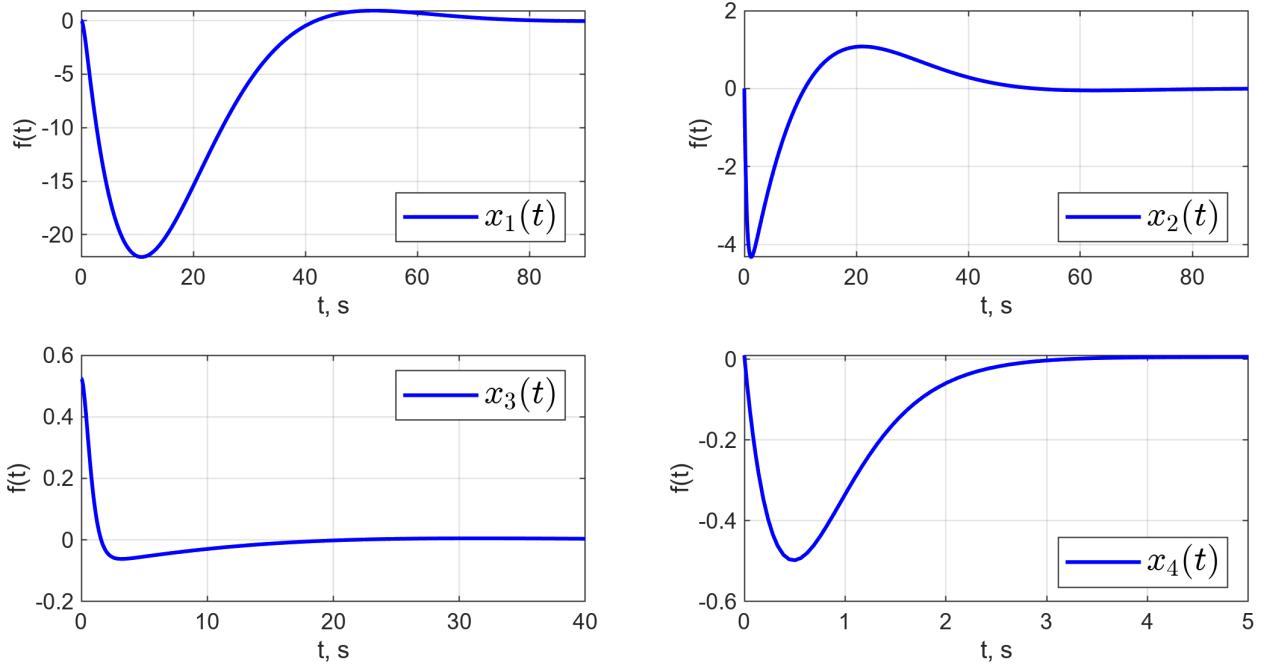


Рисунок 88 — Графики  $x(t)$  для нелинейной системы при  $x(0) = [0.01, 0.01, \pi/6, 1.5]$ .

Graphs  $x(t)$  for  $Q = \text{diag}(10)$ ,  $R = 1$

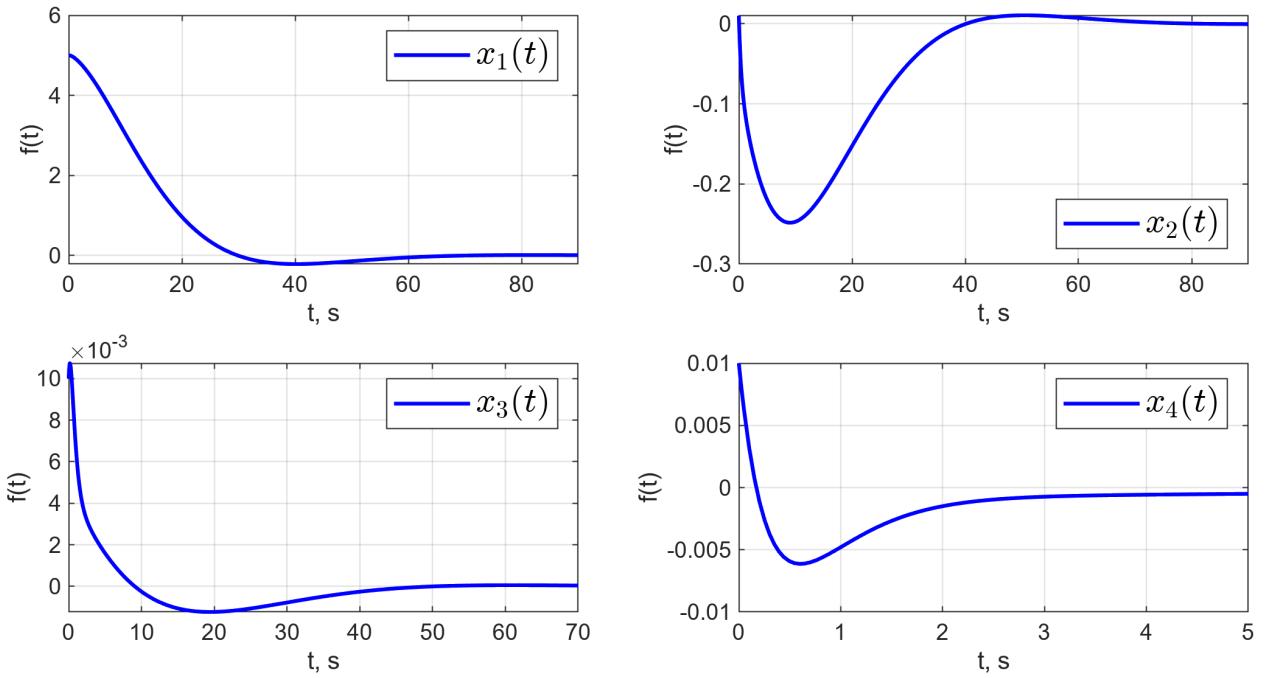


Рисунок 89 — Графики  $x(t)$  для нелинейной системы при  $x(0) = [5, 0.01, 0.01, 1.5]$ .

Для рассмотренных начальных условий синтезированный регулятор справляется с задачей стабилизации. Кроме того, амплитуда компонент вектора состояния минимальна (рисунки 86, 87, 88, 89).

## 6.2 Исследование линейно-квадратичного регулятора

Исследуем влияние весовых матриц LQR-регулятора на максимальное отклонение маятника от вертикали, максимальное горизонтальное смещение тележки и максимальное значение управляющего сигнала при управлении нелинейной системой. Результаты представим в виде таблицы 6.

Таблица 6 — Результаты моделирования при разных значениях весовых матриц.

$Q$ , diag	$R$	$\max  \varphi $	$\max  a $	$\max  u $
1	10	0.01	1.43	77
10	10	0.01	0.81	78
25	10	0.01	0.65	79
50	10	0.01	0.55	80
50	1	0.01	0.32	83
25	1	0.01	0.37	82
1	1	0.01	0.81	78

Заметим, что для двух наборов, состоящих из одинаковых  $Q$  и  $R$ , показатели  $\max |\varphi|$ ,  $\max |a|$  и  $\max |u|$  для одного набора совпадают с соответствующими показателями другого набора. Уменьшение  $\max |a|$  происходит одновременно с повышением  $\max |u|$ .

## 6.3 Синтез фильтра Калмана

Синтезируем фильтр Калмана в непрерывном времени на основе линейной модели (12) и применим его для оценки вектора состояния нелинейной системы (8).

Запишем систему с учетом белых шумов  $f$  и  $\xi$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f, \\ y = Cx + \xi \end{cases} \quad (77)$$

Пусть  $f(t) \sim \mathcal{N}(0,1)$ ,  $\xi(t) \sim \mathcal{N}(0,0.5)$ , тогда выбор матриц  $Q$  и  $R$  основывается на заданной дисперсии для помех и шумов

$$\left\{ \begin{array}{l} E(f(t)f^T(t)) = \delta(t-\tau) \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_4^2 \end{bmatrix} = \delta(t-\tau)Q_L \\ E(\xi(t)\xi^T(t)) = \delta(t-\tau) \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \delta(t-\tau)R_L \end{array} \right. \quad (78)$$

С учетом  $f(t) \sim \mathcal{N}(0,0.1)$  и  $\xi(t) \sim \mathcal{N}(0,0.01)$  получаем

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Запишем соответствующее уравнение Риккати

$$\begin{cases} PA^T + AP + Q - \nu PC^T R^{-1} CP = 0, \\ L = -PC^T R^{-1} \end{cases} \quad (80)$$

Запишем условия существования  $P \succ 0$ :  $Q \succeq 0$ ,  $R \succ 0$ ,  $(C,A)$  – обнаруживаема,  $(A,Q)$  – управляема, заметим, что все условия выполнены.

Найдем значение матрицы  $L$

$$L = \begin{bmatrix} -4.0417 & -0.0563 \\ -3.1691 & -0.3975 \\ -0.0563 & -5.9121 \\ -0.1632 & -12.4782 \end{bmatrix} \quad (81)$$

Выберем из предыдущего пункта регулятор с матрицей  $K$ , соответствующей  $Q_K = \text{diag}(10)$ ,  $R_K = 1$

$$K = [3.2 \ 44.3 \ -5720.8 \ -2369.3] \quad (82)$$

и выполним моделирование

Graphs  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$

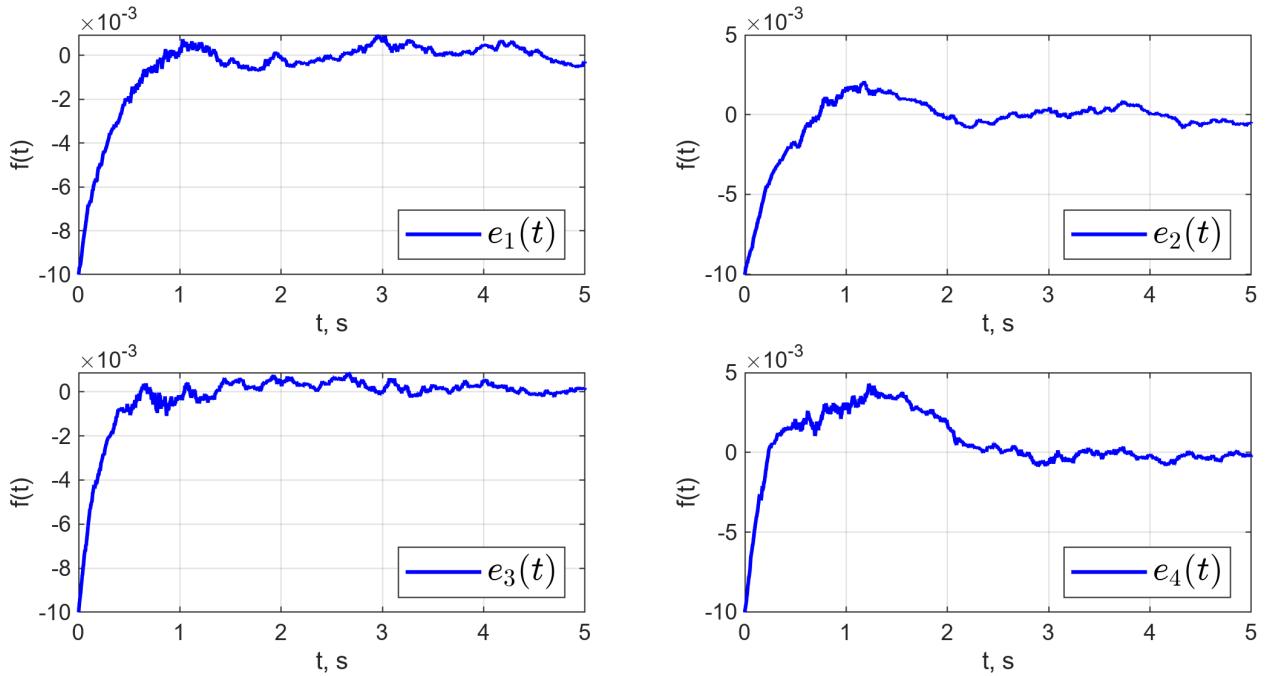


Рисунок 90 — Графики  $e(t) = \hat{x} - x(t)$  для нелинейной системы.

Graphs  $\hat{x}(t)$  and  $x(t)$

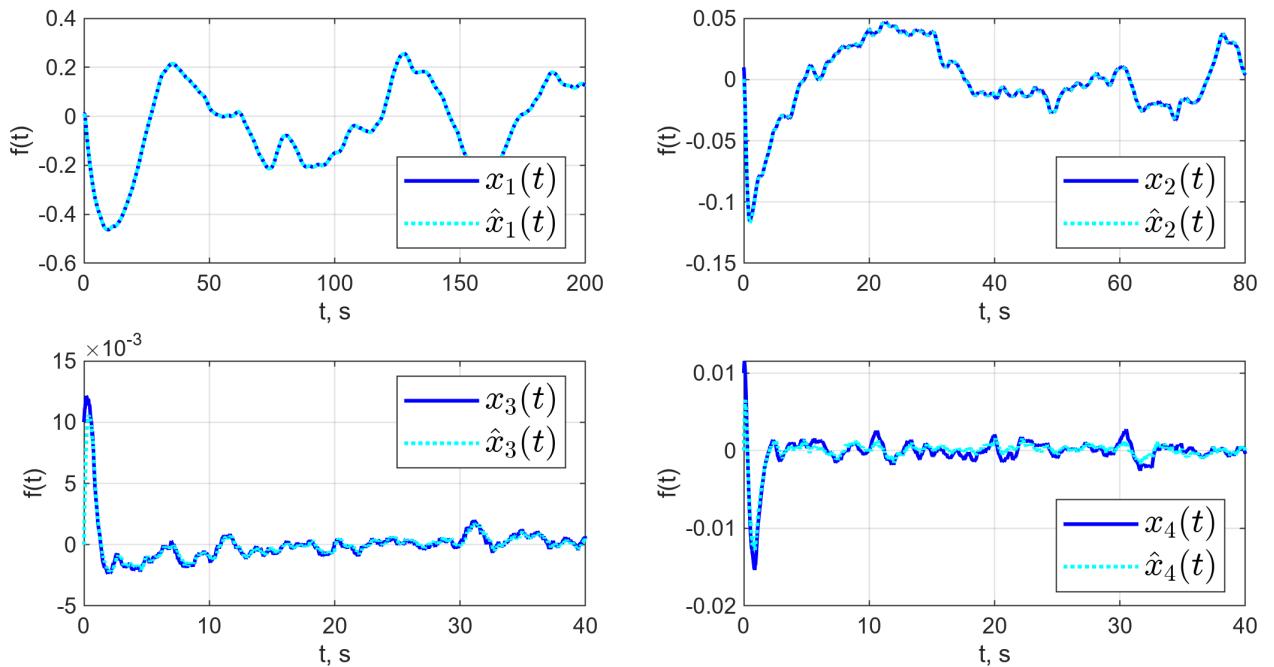


Рисунок 91 — Графики  $\hat{x}$  и  $x(t)$  для нелинейной системы.

## 6.4 LQG для линейной модели

## 6.5 LQG для нелинейной модели

## **7 ВЫВОД**

В ходе выполнения работы