

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

## Индивидуальное задание № 2

по дисциплине "Математический анализ"

**Вариант № 20**

Выполнила: студентка гр. **R3138**

**Нечаева А. А.**

Преподаватель: <ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ>

Санкт-Петербург, 2023

# 1 Сходимость числовых рядов

Исследовать ряды на сходимость. Для знакопеременных рядов исследовать абсолютную и условную сходимость.

## 1.1 а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^{n+\frac{3}{2}}} \cdot \ln \frac{2^n + 1}{2^n} \quad (1)$$

1. Ряд знакопостоянный

2. Воспользуемся признаком д'Аламбера в предельной форме

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!! \cdot \ln \frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}} \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{(2n)!! \cdot \ln \frac{2^n+1}{2^n} \cdot (n+1)^{n+1+\frac{3}{2}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!! \cdot (2n+2) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{(2n)!! \cdot (n+1) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \cdot (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2^n} \cdot (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right)^{-\frac{n+\frac{3}{2}}{n+1}} = \\ &= \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

Ответ: ряд **сходится** по признаку д'Аламбера

## 1.2 б

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^2} - \ln \left( 1 + tg \frac{1}{n} \right) \right)^2 \quad (2)$$

1. Ряд знакопостоянный

2. Воспользуемся разложением функций в ряд Маклорена при  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^2} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \operatorname{tg} \frac{1}{n} &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \ln\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

Тогда подставляя получаем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)^2 &= \left(\frac{3}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2 = \\ &= \frac{9}{4n^4} + \frac{3}{n^2} \cdot O\left(\frac{1}{n^3}\right) + O\left(\frac{1}{n^6}\right) \quad (3) \end{aligned}$$

В силу сходимости рядов  $\frac{9}{4n^4}$ ,  $\frac{3}{n^2} \cdot o\left(\frac{1}{n^3}\right)$  и  $o\left(\frac{1}{n^6}\right)$  и согласно арифметическим свойствам рядов их сумма тоже сходится.

Ответ: ряд **сходится**

### 1.3 в

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cos 2n}{n^2 - \ln n} \quad (4)$$

1. Ряд знакопеременный

Заметим, что перемена знака вызвано только  $\cos 2n$ , так как  $n^2 > \ln n$

2. Исследуем его на *абсолютную сходимость*

3. Исследуем его на *условную сходимость*

## 1.4 г

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \arccos \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \quad (5)$$

1. Ряд знакопостоянный

2. Проверим, выполнен ли *необходимый* признак сходимости числового ряда  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \arccos \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}} &= \left\| 0 \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1 \right\| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \arcsin \sqrt{1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \arcsin \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} \right)^{\frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{2}{n}} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{2n} \cdot \ln \frac{2}{n}} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \cdot \ln \frac{2}{n}} \end{aligned}$$

Далее вычислим предел степени экспоненты, применив теорему Штольца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{2}{n} - \ln \frac{2}{n-1}}{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{n-1}{n}}{\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n}}{\frac{1}{2}} = 0$$

Подставляя вычисленное значение, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \arccos \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1 \neq 0 \quad (6)$$

Следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд **расходится**

## 1.5 д

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2+3n} \quad (7)$$

1. Ряд знакопостоянный

2. Проверим, выполнен ли *необходимый* признак сходимости числового ряда  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2+3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-(n+1) \cdot \frac{n^2+3n}{-n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \cdot e^{\frac{n^2+3n}{-n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \cdot e^{-n} = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд **расходится**

**1.6**  $e^*$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x \cdot \cos nx \, dx \quad (8)$$

## 2 Область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} \quad (9)$$

1. Нахождение области абсолютной сходимости ряда

Заметим, что все члены ряда определены для всех вещественных значений  $x$ , причем в точках  $x = \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in Z$  все члены ряда равны нулю, поэьлму в этих точках ряд сходится (абсолютно).

Преобразуем числитель в сумму

$$\cos(nx) \cdot \cos(3nx) = \frac{1}{2} (\cos(2nx) + \cos(4nx)) \quad (10)$$

Тогда

$$\frac{\cos(2nx)}{n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(4nx)}{n^{\frac{x}{3}}} \quad (11)$$