

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

## Индивидуальное задание № 2

по дисциплине "Математический анализ"

**Вариант № 20**

Выполнила: студентка гр. **R3138**

**Нечаева А. А.**

Преподаватель: <ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ>

Санкт-Петербург, 2023

# 1 Сходимость числовых рядов

Исследовать ряды на сходимость. Для знакопеременных рядов исследовать абсолютную и условную сходимость.

## 1.1 а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^{n+\frac{3}{2}}} \cdot \ln \frac{2^n + 1}{2^n} \quad (1)$$

1. Ряд знакопостоянный

2. Воспользуемся признаком д'Аламбера в предельной форме

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!! \cdot \ln \frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}} \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{(2n)!! \cdot \ln \frac{2^n+1}{2^n} \cdot (n+1)^{n+1+\frac{3}{2}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!! \cdot (2n+2) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{(2n)!! \cdot (n+1) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \cdot (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2^n} \cdot (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right)^{-\frac{n+\frac{3}{2}}{n+1}} = \\ &= \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

Ответ: ряд **сходится** по признаку д'Аламбера

## 1.2 6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^2} - \ln \left( 1 + \operatorname{tg} \frac{1}{n} \right) \right)^2 \quad (2)$$

1. Ряд знакопостоянный

2. Воспользуемся разложением функций в ряд Маклорена при  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^2} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \operatorname{tg} \frac{1}{n} &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \ln \left( 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

Тогда подставляя получаем:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \right)^2 &= \left( \frac{3}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)^2 = \\ &= \frac{9}{4n^4} + \frac{3}{n^2} \cdot O\left(\frac{1}{n^3}\right) + O\left(\frac{1}{n^6}\right) \quad (3) \end{aligned}$$

В силу сходимости рядов  $\frac{9}{4n^4}$ ,  $\frac{3}{n^2} \cdot o\left(\frac{1}{n^3}\right)$  и  $o\left(\frac{1}{n^6}\right)$  и согласно арифметическим свойствам рядов их сумма тоже сходится.

Ответ: ряд **сходится**

### 1.3 в

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cos 2n}{n^2 - \ln n} \quad (4)$$

1. Ряд знакопеременный

Заметим, что перемена знака вызвано только  $\cos 2n$ , так как  $n^2 > \ln n$ .

2. Исследуем его на *абсолютную сходимость*.

$$\frac{(n+1) |\cos 2n|}{n^2 - \ln n} \geq \frac{(n+1) (\cos 2n)^2}{n^2 - \ln n} = \frac{(n+1)}{n^2 - \ln n} - \frac{(n+1) (\sin 2n)^2}{n^2 - \ln n} \quad (5)$$

Отдельно рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^2 - \ln n}$

$$\frac{(n+1)}{n^2 - \ln n} \geq \frac{(n+1)}{n^2 + n} = \frac{1}{n} \quad (6)$$

По признаку сравнения ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^2 - \ln n}$  расходится, следовательно,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) |\cos 2n|}{n^2 - \ln n}$

также расходится. **Абсолютной сходимости нет.**

3. Исследуем его на *условную сходимость* Рассмотрим соответствующий несобственный интеграл.

$$\int_1^{\infty} \frac{(x+1) \cos 2x}{x^2 - \ln x} dx \quad (7)$$

Обозначим  $f(x) = \cos 2x$  и  $g(x) = \frac{(x+1)}{x^2 - \ln x}$ . Первообразная  $F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$  ограничена и непрерывна на промежутке интегрирования. Установим монотонность убывания функции  $g(x)$  для этого вычислим производную.

$$g'(x) = \frac{x^2 - \ln x - (2x - \frac{1}{x})(x+1)}{(x^2 - \ln x)^2} = -\frac{x^2 + \ln x - 1 - \frac{1}{x} + 2x}{(x^2 - \ln x)^2} \quad (8)$$

На промежутке  $[1, \infty)$  выполнено неравенство  $g'(x) < 0$  и

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)}{x^2 - \ln x} = 0$ . Значит, по признаку Дирихле интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{(x+1) \cos 2x}{x^2 - \ln x} dx$  сходится условно, вместе с ним условно сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cos 2n}{n^2 - \ln n}$ .

Ответ: ряд **сходится условно**

## 1.4 г

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \arccos \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \quad (9)$$

1. Ряд знакопостоянный

2. Проверим, выполнен ли *необходимый* признак сходимости числового ряда да  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \arccos \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}} &= \left\| 0 \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1 \right\| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \arcsin \sqrt{1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \arcsin \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} \right)^{\frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{2}{n}} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{2n} \cdot \ln \frac{2}{n}} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \cdot \ln \frac{2}{n}} \end{aligned}$$

Далее вычислим предел степени экспоненты, применив теорему Штольца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{2}{n} - \ln \frac{2}{n-1}}{2n - 2n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{n-1}{n}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n}}{2} = 0$$

Подставляя вычисленное значение, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \arccos \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1 \neq 0 \quad (10)$$

Следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд **расходится**

**1.5 д**

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2+3n} \quad (11)$$

1. Ряд знакопостоянный

2. Проверим, выполнен ли *необходимый* признак сходимости числового ряда  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2+3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-(n+1) \cdot \frac{n^2+3n}{-n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \cdot e^{\frac{n^2+3n}{-n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \cdot e^{-n} = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд **расходится**

**1.6 e\***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x \cdot \cos nx \, dx \tag{12}$$

## 2 Область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} \quad (13)$$

### 1. Нахождение области абсолютной сходимости ряда

Заметим, что все члены ряда определены для всех вещественных значений  $x$ , причем при  $\cos(nx) = 0$  и  $\cos(3nx) = 0$  все члены ряда равны нулю, поэтому в точках  $x = \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 1)$ ,  $k \in Z$  и  $x = \frac{\pi}{6} \cdot (2m + 1)$ ,  $m \in Z$  ряд сходится (абсолютно).

Преобразуем числитель в сумму

$$\cos(nx) \cdot \cos(3nx) = \frac{1}{2} (\cos(2nx) + \cos(4nx))$$

Тогда

$$\frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} = \frac{\cos(2nx)}{2n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(4nx)}{2n^{\frac{x}{3}}}$$

К каждому из полученных рядов применим признак Дирихле.

Суммы

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2nx) \right| = \left| \frac{\sin(nx) \cos((n+1)x)}{\sin x} \right| = \left| \frac{-\sin(x) + \sin((2n+1)x)}{2 \sin x} \right| \leq \frac{1}{|\sin x|}$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \cos(4nx) \right| = \left| \frac{-\sin(2x) + \sin(2x(2n+1))}{2 \sin 2x} \right| \leq \frac{1}{|\sin 2x|}$$

ограничены при всех значениях  $n$  для каждого фиксированного значения  $x \neq \pi k$ ,  $k \in Z$  и  $x \neq \frac{\pi m}{2}$ ,  $m \in Z$ .

Заметим, что последовательность  $\frac{1}{n^{\frac{x}{3}}}$ , монотонно убывает, стремясь к нулю, при  $x > 0$ .

Тогда исходный ряд сходится условно по признаку Дирихле при  $x \in (0, +\infty) \setminus \left\{ \pi k, \frac{\pi m}{2}; k, m \in N \right\}$ .

Исследуем сходимость ряда в точках  $x = \pi k$ ,  $k \in N$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n \cdot \pi k) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(4n \cdot \pi k) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Подставляя в исходную сумму ряда:

$$\frac{\cos(2nx)}{2n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(4nx)}{2n^{\frac{x}{3}}} = \frac{1}{2n^{\frac{x}{3}}} + \frac{1}{2n^{\frac{x}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{x}{3}}}$$

Сходится при  $n^{\frac{x}{3}} > n \rightarrow x > 3$ , для других  $x$  – расходится.

Рассмотрим поведение ряда в точках  $x = \frac{\pi m}{2}$ ,  $m \in N$ . В точках вида  $x = \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 1)$ ,  $k \in N$  ряд сходится абсолютно (см. в начале решения), а сходимость ряда при четных значениях  $m \in N$  доказана выше.

Область **условной** сходимости

$$x \in (0, +\infty) \cup \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 1), \frac{\pi}{6} \cdot (2m + 1); k, m \in Z \right\}$$

Исследуем ряд на абсолютную сходимость в точках  $x \neq \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 1)$ ,  $k \in Z$  и  $x \neq \frac{\pi}{6} \cdot (2m + 1)$ ,  $m \in Z$ .

$$\begin{aligned} \left| \frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} \right| &= \frac{|\cos(nx) \cdot \cos(3nx)|}{n^{\frac{x}{3}}} \geq \frac{(\cos(nx) \cdot \cos(3nx))^2}{n^{\frac{x}{3}}} = \\ &= \frac{(1 + \cos(2nx)) \cdot (1 + \cos(6nx))}{4n^{\frac{x}{3}}} = \frac{1}{4n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(2nx)}{4n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(6nx)}{4n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(2nx) \cdot \cos(6nx)}{4n^{\frac{x}{3}}} \end{aligned}$$

Сумма рядов выше расходится при  $x \leq 3$ , так как расходится ряд  $\frac{1}{4n^{\frac{x}{3}}}$ .  
Далее, будем рассматривать  $x > 3$ .

$$\left| \frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{x}{3}}}$$

Следовательно, при  $x > 3$  ряд сходится **абсолютно**.

Ответ: при  $x \in (0, +\infty) \cup \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 1), \frac{\pi}{6} \cdot (2m + 1); k, m \in Z \right\}$  ряд сходится **условно**, при  $x \in (3, +\infty) \cup \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 1), \frac{\pi}{6} \cdot (2m + 1); k, m \in Z \right\}$  – **абсолютно**.