Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

# Индивидуальное задание № 2

по дисциплине "Математический анализ"

## Вариант № 20

Выполнила: студентка гр. **R3138**

**Нечаева А. А.**

Преподаватель: *<ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ>*

Санкт-Петербург, 2023

# 1 Сходимость числовых рядов

Исследовать ряды на сходимость. Для знакопеременных рядов исследовать абсолютную и условную сходимость.

## 1.1 a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^{n+\frac{3}{2}}} \cdot ln \frac{2^n+1}{2^n} \tag{1}$$

1. Ряд знакопостоянный
2. Воспрользуемся признаком д'Аламбера в предельной форме

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!! \cdot ln \frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}} \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{(2n)!! \cdot ln \frac{2^n+1}{2^n} \cdot (n+1)^{n+1+\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!! \cdot (2n+2) \cdot ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{(2n)!! \cdot (n+1) \cdot ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \cdot (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2^n} \cdot (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right)^{-\frac{n+\frac{3}{2}}{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{e} < 1$$

Ответ: ряд **сходится** по признаку д'Аламбера

## 1.2 б

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{n+1}{n^2}-ln\left(1+tg\frac{1}{n}\right)\right)^2 \tag{2}$$

1. Ряд знакопостоянный
2. Воспрользуемся разложением функций в ряд Маклорена при $n \to \infty$

$$arctg\frac{n+1}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$tg\frac{1}{n}=\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$ln\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Тогда подставляя получаем:

$$\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)^2=\left(\frac{3}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2=$$
$$=\frac{9}{4n^4}+\frac{3}{n^2}\cdot O\left(\frac{1}{n^3}\right)+O\left(\frac{1}{n^6}\right) \tag{3}$$

В силу сходимости рядов $\frac{9}{4n^4}$, $\frac{3}{n^2}\cdot o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ и $o\left(\frac{1}{n^6}\right)$ и согласно арифметическим свойствам рядов их сумма тоже сходится.

Ответ: ряд **сходится**

## 1.3 в

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos 2n}{n^2 - \ln n} \tag{4}$$

1. Ряд знакопеременный
Заметим, что перемена знака вызвано только $\cos 2n$, так как $n^2 > \ln n$.
2. Исследуем его на *абсолютную сходимость.*

$$\frac{(n+1)\left|\cos 2n\right|}{n^2 - \ln n} \geq \frac{(n+1)\left(\cos 2n\right)^2}{n^2 - \ln n} = \frac{(n+1)}{n^2 - \ln n} - \frac{(n+1)\left(\sin 2n\right)^2}{n^2 - \ln n} \tag{5}$$

Отдельно рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^2 - \ln n}$

$$\frac{(n+1)}{n^2 - \ln n} \geq \frac{(n+1)}{n^2 + n} = \frac{1}{n} \tag{6}$$

По признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^2 - \ln n}$ расходится, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\left|\cos 2n\right|}{n^2 - \ln n}$ также расходится. **Абсолютной сходимости нет.**

3. Исследуем ряд на *условную сходимость.* Применим признак Дирихле, $a_n = \frac{n+1}{n^2 - \ln n}$, $b_n = \cos 2n$. $a_n$ - положительна и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$\left|B_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \cos 2k\right| = \left|\frac{\sin(n)\cos(n+1)}{\sin(1)}\right| \leq \frac{1}{\sin(1)} \tag{7}$$

Следовательно, ряд сходится условно по признаку Дирихле.

<u>Ответ:</u> ряд **сходится условно**

## 1.4 г

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \tag{8}$$

1. Ряд знакопостоянный
2. Проверим, выполнен ли *необходимый* признак сходимости числового ряда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \left\|0 \le 1-\frac{1}{n} \le 1\right\| =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{n}+O\frac{1}{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2n}\cdot\ln\frac{2}{n}} =$$
$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\cdot\ln\frac{2}{n}}$$

Далее вычислим предел степени экспоненты, применив теорему Штольца

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{2}{n}-\ln\frac{2}{n-1}}{2n-2n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n-1}{n}}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}}{2} = 0$$

Подставляя вычисленное значение, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1 \ne 0 \tag{9}$$

Следовательно, ряд расходится.

<u>Ответ:</u> ряд **расходится**

## 1.5 д

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+3n} \tag{10}$$

1. Ряд знакопостоянный
2. Проверим, выполнен ли *необходимый* признак сходимости числового ряда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} e^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+3n} = \lim_{n\to\infty} e^n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{n^2+3n}{-n-1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^n \cdot e^{\frac{n^2+3n}{-n-1}} = \lim_{n\to\infty} e^n \cdot e^{-n} = 1 \neq 0$$

Следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд **расходится**

## 1.6 e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x \cdot \cos nx \, dx \tag{11}$$

# 2 Область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} \tag{12}$$

1. Нахождение области абсолютной сходимости ряда

Заметим, что все члены ряда определены для всех вещественных значений $x$, причем при $\cos(nx) = 0$ и $\cos(3nx) = 0$ все члены ряда равны нулю, поэтому в точках $x = \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1),\ k \in Z$ и $x = \frac{\pi}{6} \cdot (2m+1),\ m \in Z$ ряд сходится (абсолютно).

Преобразуем числитель в сумму

$$\cos(nx) \cdot \cos(3nx) = \frac{1}{2} \left(\cos(2nx) + \cos(4nx)\right)$$

Тогда

$$\frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} = \frac{\cos(2nx)}{2n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(4nx)}{2n^{\frac{x}{3}}}$$

К каждому из полученных рядов применим признак Дирихле.
Суммы

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2nx)\right| = \left|\frac{\sin(nx)\cos((n+1)x)}{\sin x}\right| = \left|\frac{-\sin(x) + \sin((2n+1)x)}{2\sin x}\right| \leq \frac{1}{|\sin x|}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \cos(4nx)\right| = \left|\frac{-\sin(2x) + \sin(2x(2n+1))}{2\sin 2x}\right| \leq \frac{1}{|\sin 2x|}$$

ограничены при всех значениях $n$ для каждого фиксированого значения $x \neq \pi k$, $k \in Z$ и $x \neq \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$.
Заметим, что последовательность $\frac{1}{n^{\frac{x}{3}}}$, монотонно убывает, стемясь к нулю, при $x > 0$.
Тогда исходный ряд сходится условно по признаку Дирихле
при $x \in (0, +\infty) \backslash \left\{\pi k,\ \frac{\pi m}{2}; k, m \in N\right\}$.

Исследуем сходимость ряда в точках $x = \pi k$, $k \in N$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n \cdot \pi k) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(4n \cdot \pi k) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Подставляя в исходную сумму ряда:

$$\frac{\cos(2nx)}{2n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(4nx)}{2n^{\frac{x}{3}}} = \frac{1}{2n^{\frac{x}{3}}} + \frac{1}{2n^{\frac{x}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{x}{3}}}$$

Сходится при $n^{\frac{x}{3}} > n \to x > 3$, для других $x$ – расходится.

Рассмотрим поведение ряда в точках $x = \frac{\pi m}{2}$, $m \in N$. В точках вида $x = \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1),\ k \in Z$ ряд сходится абсолютно (см. в начале решения), а сходимость ряда при четных значениях $m \in N$ доказана выше.

Область **условной** сходимости

$$x \in (0, +\infty) \cup \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1), \frac{\pi}{6} \cdot (2m+1);\ k, m \in Z \right\}$$

Исследуем ряд на абсолютную сходимость в точках $x \neq \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1),\ k \in Z$ и $x \neq \frac{\pi}{6} \cdot (2m+1),\ m \in Z$.

$$\left| \frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} \right| = \frac{|\cos(nx) \cdot \cos(3nx)|}{n^{\frac{x}{3}}} \geq \frac{(\cos(nx) \cdot \cos(3nx))^2}{n^{\frac{x}{3}}} =$$

$$= \frac{(1 + \cos(2nx)) \cdot (1 + \cos(6nx))}{4n^{\frac{x}{3}}} = \frac{1}{4n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(2nx)}{4n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(6nx)}{4n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(2nx) \cdot \cos(6nx)}{4n^{\frac{x}{3}}}$$

Сумма рядов выше расходится при $x \leq 3$, так как расходится ряд $\frac{1}{4n^{\frac{x}{3}}}$. Далее, будем рассматривать $x > 3$.

$$\left| \frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{x}{3}}}$$

Следовательно, при $x > 3$ ряд сходится **абсолютно**.

Ответ: при $x \in (0, +\infty) \cup \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1), \frac{\pi}{6} \cdot (2m+1);\ k, m \in Z \right\}$ ряд сходится **условно**, при $x \in (3, +\infty) \cup \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1), \frac{\pi}{6} \cdot (2m+1);\ k, m \in Z \right\}$ – **абсолютно**.

# 3 Равномерная сходимость функциональной последовательности

$$f_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right)$$

Найдем функцию $\phi(x)$, к которой сходится данная последовательность при фиксированном $x$ и $n \to \infty$:

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{nx} = \frac{1}{x} \tag{13}$$

а) $x \in (0, 2)$. Докажем, что на этом промежутке последовательность сходится к предельной функции неравномерно. Последовательность функции $f_n(x)$ сходится к предельной функции неравномерно на промежутке $\langle a, b\rangle$, если существует $\epsilon_0 > 0$ такое, что какое бы значение $n_0 \in N$ мы ни взяли, можно найти значения $n \geq n_0, n \in N$ и $x_n \in \langle a, b\rangle$ такие, что $|f_n(x) - \phi(x)| \geq \epsilon_0$.
Возьмем $x_n = \frac{1}{n}$ и $\epsilon_0 = 1$. Тогда

$$|f_n(x_n) - \phi(x_n)| = n\left(\frac{1}{nx_n} - \ln\left(1 + \frac{1}{nx_n}\right)\right) = n\left(1 - \ln\left(2\right)\right)$$

Так как последняя величина стремится к бесконечности, то, начиная с некоторого $n$, выполняется неравенство $n\left(1 - \ln\left(2\right)\right) > \epsilon_0 = 1$, следовательно, последовательность сходится к предельной функции **неравномерно**.

б) $x \in (2, +\infty)$. Равномерная сходимость будет доказана, если мы докажем, что $\sup\limits_{x\in(2,+\infty)} |f_n(x) - \phi(x)|$ стремится к нулю, при $n \to \infty$.

$$\begin{aligned}\sup_{x\in(2,+\infty)} |f_n(x) - \phi(x)| &= \sup_{x\in(2,+\infty)} \left|n \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right) - \frac{1}{x}\right| = \\ = \sup_{x\in(2,+\infty)} n\left|\ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right) - \frac{1}{nx}\right| &= \sup_{x\in(2,+\infty)} n\left(\frac{1}{nx} - \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right)\right)\end{aligned} \tag{14}$$

Так как функция, стоящая под знаком супремума, дифференцируема на данном промежутке и, следовательно, непрерывна, то

$$\sup_{x\in(2,+\infty)} |f_n(x) - \phi(x)| = \max_{x\in(2,+\infty)} n\left(\frac{1}{nx} - \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right)\right),$$

и этот максимум можно найти методами дифференциального исчисления:

$$n\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{nx}-\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)\right)=\frac{n}{nx^2+x}-\frac{1}{x^2}=\frac{nx^2-nx^2-x}{nx^4+x^3}=\frac{-x}{nx^4+x^3}<0$$

Функция монотонно убывает на промежутке $x\in(2,+\infty)$. Заметим, что в точке $x=2$, $n\left(\frac{1}{nx}-\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)\right)$ определена и при $x\in[2,+\infty)$ имеет тот же характер монотонности, что и $x\in(2,+\infty)$

$$0\le\max_{x\in(2,+\infty)}n\left(\frac{1}{nx}-\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)\right)\le\max_{x\in[2,+\infty)}n\left(\frac{1}{nx}-\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)\right)=$$
$$=n\left(\frac{1}{2n}-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)$$

$$0\le\lim_{n\to\infty}|f_n(x)-\phi(x)|\le\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{2n}-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)=\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)=0$$

Следовательно, при $x\in(2,+\infty)$ сходится **равномерно**.

Ответ: а) **сходится неравномерно**, б) **сходится равномерно**.

# 4 Равномерная сходимость ряда

## 4.1 а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$$

при $x \in [0, +\infty)$. Применим признак Дирихле. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+x}}$, $b_n = \sin x \sin nx$. Заметим, что $a_n$ – положительна и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Далее покажем ограниченность модулей частичных сумм $b_n$.

$$|B_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin x \sin kx\right| = \left|2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}(n+1)\right)\right| \leq 2$$

Значит, по признаку Дирихле данный ряд сходится при $x \in [0, +\infty)$.
Исследуем на равномерную сходимость.

Докажем, что на этом промежутке ряд сходится неравномерно. Воспользуемся отрицанием критерия Коши: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не равномерно на промежутке $\langle a, b\rangle$, если существует $\epsilon_0 > 0$ такое, что какое бы значение $n_0 \in N$ мы ни взяли, можно найти значения $m \geq n_0, m \in N, k \in Z_+$ и $x_n \in \langle a, b\rangle$ так, что $\left|\sum\limits_{n=m}^{m+k} u_n(x_n)\right| > \epsilon_0$.
Возьмем $k = 0$ и $x_m =$. Тогда

# 5 Сумма функционального ряда

$$\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{x}{3\cdot 4}+\frac{x^2}{4\cdot 5}-...+\frac{(-1)^n x^n}{(n+2)\cdot(n+3)}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+2)\cdot(n+3)}$$

Найдем область сходимости данного ряда. Применяя признак д'Аламбера, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}(n+2)(n+3)}{(n+3)(n+4)(-1)^n x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}|-x|=|x|<1$$

По признаку д'Аламбера ряд сходится при $x\in(-1,1)$. Дополнительно исследуем сходимость в точках $\pm 1$. Применим признак Гаусса

$$\left|\frac{u_{n+1}(\pm 1)}{u_n(\pm 1)}\right|=\frac{n+2}{n+4}=1-\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

В признаке Гаусса $\mu=-2<-1$, следовательно при $x=\pm 1$ ряд сходится. Область **сходимости** – промежуток $[-1,1]$.

Ряд сходится к функции $f(x)$. По теореме о дифференцировании степенного ряда на промежутке $(-1,1)$ этот ряд можно продиффиренцировать почленно. Следовательно,

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n+2)\cdot(n+3)}=0-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{2x}{4\cdot 5}-\frac{3x^2}{5\cdot 6}+...+\frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n+2)\cdot(n+3)}+...$$

Теперь рассмотрим сумму:

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n+2)\cdot(n+3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A}{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B}{n+3}=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}A(n+3)+B(n+2)=n(-1)^n x^{n-1}\to\\ \qquad\to\begin{cases}A=-2(-1)^n x^{n-1}\\ B=3(-1)^n x^{n-1}\end{cases}\end{array}\right\|=3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{n+3}-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{n+2}$$