

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Индивидуальное задание № 2

по дисциплине "Математический анализ"

Вариант № 20

Выполнила: студентка гр. **R3138**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Бойцев А.А.*

Санкт-Петербург, 2023

Работайте, работайте — а
понимание придёт потом.

Жан Ле Рон Д'Аламбер

1 Сходимость числовых рядов

Исследовать ряды на сходимость. Для знакопеременных рядов исследовать абсолютную и условную сходимость.

1.1 а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^{n+\frac{3}{2}}} \cdot \ln \frac{2^n + 1}{2^n} \quad (1)$$

1. Ряд знакопостоянный
2. Воспользуемся признаком Д'Аламбера в предельной форме

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!! \cdot \ln \frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}} \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{(2n)!! \cdot \ln \frac{2^n+1}{2^n} \cdot (n+1)^{n+1+\frac{3}{2}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!! \cdot (2n+2) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{(2n)!! \cdot (n+1) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \cdot (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2^n} \cdot (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right)^{-\frac{n+\frac{3}{2}}{n+1}} = \\ &= \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

Ответ: ряд **сходится** по признаку Д'Аламбера

1.2 6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^2} - \ln \left(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{n} \right) \right)^2 \quad (2)$$

1. Ряд знакопостоянный

2. Воспользуемся разложением функций в ряд Маклорена при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^2} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \operatorname{tg} \frac{1}{n} &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \ln \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

Тогда подставляя получаем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \right)^2 &= \left(\frac{3}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)^2 = \\ &= \frac{9}{4n^4} + \frac{3}{n^2} \cdot O\left(\frac{1}{n^3}\right) + O\left(\frac{1}{n^6}\right) \quad (3) \end{aligned}$$

В силу сходимости рядов $\frac{9}{4n^4}$, $\frac{3}{n^2} \cdot o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ и $o\left(\frac{1}{n^6}\right)$ и согласно арифметическим свойствам рядов их сумма тоже сходится.

Ответ: ряд **сходится**

1.3 в

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cos 2n}{n^2 - \ln n} \quad (4)$$

1. Ряд знакопеременный

Заметим, что перемена знака вызвано только $\cos 2n$, так как $n^2 > \ln n$.

2. Исследуем его на *абсолютную сходимость*.

$$\frac{(n+1) |\cos 2n|}{n^2 - \ln n} \geq \frac{(n+1) (\cos 2n)^2}{n^2 - \ln n} = \frac{(n+1)}{n^2 - \ln n} - \frac{(n+1) (\sin 2n)^2}{n^2 - \ln n} \quad (5)$$

Отдельно рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^2 - \ln n}$

$$\frac{(n+1)}{n^2 - \ln n} \geq \frac{(n+1)}{n^2 + n} = \frac{1}{n} \quad (6)$$

По признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^2 - \ln n}$ расходится, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) |\cos 2n|}{n^2 - \ln n}$ также расходится. **Абсолютной сходимости нет.**

3. Исследуем ряд на *условную сходимость*. Применим признак Дирихле, $a_n = \frac{n+1}{n^2 - \ln n}$, $b_n = \cos 2n$. a_n - положительна, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и убывает монотонно при $n \in N$.

$$|B_n| = \left| \sum_{k=1}^n \cos 2k \right| = \left| \frac{\sin(n) \cos(n+1)}{\sin(1)} \right| \leq \frac{1}{\sin(1)} \quad (7)$$

Следовательно, ряд сходится условно по признаку Дирихле.

Ответ: ряд **сходится условно**

1.4 г

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arccos \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \quad (8)$$

1. Ряд знакопостоянный

2. Проверим, выполнен ли *необходимый* признак сходимости числового ряда да $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arccos \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}} &= \left\| 0 \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1 \right\| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arcsin \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} \right)^{\frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{2}{n}} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{2n} \cdot \ln \frac{2}{n}} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \cdot \ln \frac{2}{n}} \end{aligned}$$

Далее вычислим предел степени экспоненты, применив теорему Штольца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{2}{n} - \ln \frac{2}{n-1}}{2n - 2n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{n-1}{n}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n}}{2} = 0$$

Подставляя вычисленное значение, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arccos \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1 \neq 0 \quad (9)$$

Следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд **расходится**

1.5 д

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2+3n} \quad (10)$$

1. Ряд знакопостоянный

2. Проверим, выполнен ли *необходимый* признак сходимости числового ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2+3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-(n+1) \cdot \frac{n^2+3n}{-n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \cdot e^{\frac{n^2+3n}{-n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \cdot e^{-n} = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд **расходится**



Рис. 1. Процесс исследования числовых рядов на сходимость

1.6 e^*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x \cdot \cos nx \, dx \quad (11)$$

Вычислим неопределенный интеграл:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \cos nx \, dx &= \left\| \begin{array}{l} u = x, \, dv = \cos nx \, dx \\ du = dx, \, v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right\| = \frac{x \sin nx}{n} - \int \frac{\sin nx}{n} \, dx = \\ &= \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + C \end{aligned}$$

Теперь можем найти определенный:

$$\int_0^1 x \cdot \cos nx \, dx = \left. \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right|_0^1 = \frac{\sin n}{n} + \frac{\cos n}{n^2} - \frac{1}{n^2}$$

Запишем сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n} + \frac{\cos n - 1}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (12)$$

1. Условная сходимость

Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ сходятся по признаку Дирихле, ряд $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится вместе с эталонным рядом. **Условная** сходимость есть.

2. Абсолютная сходимость

$$\frac{1}{n} \left| \sin n + \frac{\cos n - 1}{n} \right| \geq ???$$

в методичке не трогают абсолютную сходимость

Ответ: ряд **сходится условно**

2 Область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} \quad (13)$$

1. Нахождение области абсолютной сходимости ряда

Заметим, что все члены ряда определены для всех вещественных значений x , причем при $\cos(nx) = 0$ и $\cos(3nx) = 0$ все члены ряда равны нулю, поэтому в точках $x = \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 1)$, $k \in Z$ и $x = \frac{\pi}{6} \cdot (2m + 1)$, $m \in Z$ ряд сходится (абсолютно).

2. Преобразуем числитель в сумму

$$\cos(nx) \cdot \cos(3nx) = \frac{1}{2} (\cos(2nx) + \cos(4nx))$$

Тогда

$$\frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} = \frac{\cos(2nx)}{2n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(4nx)}{2n^{\frac{x}{3}}}$$

К каждому из полученных рядов применим признак Дирихле.

Суммы

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2nx) \right| = \left| \frac{\sin(nx) \cos((n+1)x)}{\sin x} \right| = \left| \frac{-\sin(x) + \sin((2n+1)x)}{2 \sin x} \right| \leq \frac{1}{|\sin x|}$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \cos(4nx) \right| = \left| \frac{-\sin(2x) + \sin(2x(2n+1))}{2 \sin 2x} \right| \leq \frac{1}{|\sin 2x|}$$

ограничены при всех значениях n для каждого фиксированного значения $x \neq \pi k$, $k \in Z$ и $x \neq \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$.

Заметим, что последовательность $\frac{1}{n^{\frac{x}{3}}}$, монотонно убывает, стремясь к нулю, при $x > 0$.

Тогда исходный ряд сходится условно по признаку Дирихле при $x \in (0, +\infty) \setminus \left\{ \pi k, \frac{\pi m}{2}; k, m \in N \right\}$.

Исследуем сходимость ряда в точках $x = \pi k$, $k \in N$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n \cdot \pi k) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(4n \cdot \pi k) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Подставляя в исходную сумму ряда:

$$\frac{\cos(2nx)}{2n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(4nx)}{2n^{\frac{x}{3}}} = \frac{1}{2n^{\frac{x}{3}}} + \frac{1}{2n^{\frac{x}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{x}{3}}}$$

Сходится при $n^{\frac{x}{3}} > n \rightarrow x > 3$, для других x – расходится.

Рассмотрим поведение ряда в точках $x = \frac{\pi m}{2}$, $m \in N$. В точках вида $x = \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 1)$, $k \in Z$ ряд сходится абсолютно (см. в начале решения), а сходимость ряда при четных значениях $m \in N$ доказана выше.

Область **условной** сходимости

$$x \in (0, +\infty) \cup \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 1), \frac{\pi}{6} \cdot (2m + 1); k, m \in Z \right\}$$

Исследуем ряд на абсолютную сходимость в точках $x \neq \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 1)$, $k \in Z$ и $x \neq \frac{\pi}{6} \cdot (2m + 1)$, $m \in Z$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} \right| &= \frac{|\cos(nx) \cdot \cos(3nx)|}{n^{\frac{x}{3}}} \geq \frac{(\cos(nx) \cdot \cos(3nx))^2}{n^{\frac{x}{3}}} = \\ &= \frac{(1 + \cos(2nx)) \cdot (1 + \cos(6nx))}{4n^{\frac{x}{3}}} = \frac{1}{4n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(2nx)}{4n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(6nx)}{4n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(2nx) \cdot \cos(6nx)}{4n^{\frac{x}{3}}} \end{aligned}$$

Сумма рядов выше расходится при $x \leq 3$, так как расходится ряд $\frac{1}{4n^{\frac{x}{3}}}$.

Далее, будем рассматривать $x > 3$.

$$\left| \frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{x}{3}}}$$

Следовательно, при $x > 3$ ряд сходится **абсолютно**.

Ответ: при $x \in (0, +\infty) \cup \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 1), \frac{\pi}{6} \cdot (2m + 1); k, m \in Z \right\}$ ряд сходится **условно**, при $x \in (3, +\infty) \cup \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 1), \frac{\pi}{6} \cdot (2m + 1); k, m \in Z \right\}$ – **абсолютно**.

3 Равномерная сходимость функциональной последовательности

$$f_n(x) = n \ln \left(1 + \frac{1}{nx} \right)$$

Найдем функцию $\phi(x)$, к которой сходится данная последовательность при фиксированном x и $n \rightarrow \infty$:

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{nx} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1}{nx} = \frac{1}{x} \quad (14)$$

а) $x \in (0, 2)$. Докажем, что на этом промежутке последовательность сходится к предельной функции неравномерно. Последовательность функции $f_n(x)$ сходится к предельной функции неравномерно на промежутке $\langle a, b \rangle$, если существует $\epsilon_0 > 0$ такое, что какое бы значение $n_0 \in N$ мы ни взяли, можно найти значения $n \geq n_0, n \in N$ и $x_n \in \langle a, b \rangle$ такие, что $|f_n(x) - \phi(x)| \geq \epsilon_0$.

Возьмем $x_n = \frac{1}{n}$ и $\epsilon_0 = 1 - \ln 2$. Тогда

$$|f_n(x_n) - \phi(x_n)| = n \left(\frac{1}{nx_n} - \ln \left(1 + \frac{1}{nx_n} \right) \right) = n (1 - \ln(2))$$

Так как последняя величина стремится к бесконечности, то, начиная с некоторого n , выполняется неравенство $n (1 - \ln(2)) > \epsilon_0 = 1 - \ln 2$, следовательно, последовательность сходится к предельной функции **неравномерно**.

б) $x \in (2, +\infty)$. Равномерная сходимость будет доказана, если мы докажем, что $\sup_{x \in (2, +\infty)} |f_n(x) - \phi(x)|$ стремится к нулю, при $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (2, +\infty)} |f_n(x) - \phi(x)| &= \sup_{x \in (2, +\infty)} \left| n \ln \left(1 + \frac{1}{nx} \right) - \frac{1}{x} \right| = \\ &= \sup_{x \in (2, +\infty)} n \left| \ln \left(1 + \frac{1}{nx} \right) - \frac{1}{nx} \right| = \sup_{x \in (2, +\infty)} n \left(\frac{1}{nx} - \ln \left(1 + \frac{1}{nx} \right) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Так как функция, стоящая под знаком супремума, дифференцируема на данном промежутке и, следовательно, непрерывна, то

$$\sup_{x \in (2, +\infty)} |f_n(x) - \phi(x)| = \max_{x \in (2, +\infty)} n \left(\frac{1}{nx} - \ln \left(1 + \frac{1}{nx} \right) \right),$$

3 РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

и этот максимум можно найти методами дифференциального исчисления:

$$n \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{nx} - \ln \left(1 + \frac{1}{nx} \right) \right) = \frac{n}{nx^2 + x} - \frac{1}{x^2} = \frac{nx^2 - nx^2 - x}{nx^4 + x^3} = \frac{-x}{nx^4 + x^3} < 0$$

Функция монотонно убывает на промежутке $x \in (2, +\infty)$. Заметим, что в точке $x = 2$, $n \left(\frac{1}{nx} - \ln \left(1 + \frac{1}{nx} \right) \right)$ определена и при $x \in [2, +\infty)$ имеет тот же характер монотонности, что и $x \in (2, +\infty)$

$$\begin{aligned} 0 \leq \max_{x \in (2, +\infty)} n \left(\frac{1}{nx} - \ln \left(1 + \frac{1}{nx} \right) \right) &\leq \max_{x \in [2, +\infty)} n \left(\frac{1}{nx} - \ln \left(1 + \frac{1}{nx} \right) \right) = \\ &= n \left(\frac{1}{2n} - \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \right) \end{aligned}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - \phi(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{2n} - \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \right) = \frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) = 0$$

Следовательно, при $x \in (2, +\infty)$ сходится **равномерно**.

Ответ: а) не сходится равномерно, б) сходится равномерно.



Рис. 2. Исследование функциональных последовательностей

4 Равномерная сходимость ряда

4.1 а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$$

при $x \in [0, +\infty)$. Применим признак Дирихле. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+x}}$, $b_n = \sin x \sin nx$. Заметим, что a_n – положительна и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Далее покажем ограниченность модулей частичных сумм b_n .

$$|B_n| = \left| \sum_{k=1}^n \sin x \sin kx \right| = \left| 2 \cos \left(\frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{nx}{2} \right) \sin \left(\frac{x}{2} (n+1) \right) \right| \leq 2$$

Значит, по признаку Дирихле данный ряд сходится при $x \in [0, +\infty)$.

Исследуем на равномерную сходимость.

При $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$ все частичные суммы равны нулю, следовательно, ограничены по модулю $C = 2$.

$$\begin{aligned} \exists C = 2 \forall n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=1}^n \sin x \sin kx \right| &= \\ &= \begin{cases} \left| 2 \cos \left(\frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{nx}{2} \right) \sin \left(\frac{x}{2} (n+1) \right) \right| \leq 2, & x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{N} \\ 0 \leq 2, & x = 2\pi m, m \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Последовательность $\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ – монотонна при каждом $x \geq 0$, так как $(\sqrt{n+x})' = \frac{1}{2\sqrt{n+x}} > 0$.

Так как $\left| \frac{1}{\sqrt{n+x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то $\frac{1}{\sqrt{n+x}} \rightrightarrows 0$ по Д.У.

Значит, по признаку Дирихле **ряд сходится равномерно** при $x \in [0, +\infty)$.

Ответ: **сходится равномерно.**

4.2 6

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{3 + x\sqrt{n^5}}{2 + x\sqrt{n^5}}$$

1. Поточечная сходимость.

Исследуем на сходимость при фиксированном $x = x_0 \in (0, +\infty)$. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln \frac{3+x_0\sqrt{k^5}}{2+x_0\sqrt{k^5}}$

– сходится по признаку Лейбница, следовательно, функциональный ряд сходится поточечно.

2. $E_1 = (1, +\infty)$

Докажем равномерную сходимость ряда.

$$|f_k(x)| = \left| \ln \frac{3 + x\sqrt{k^5}}{2 + x\sqrt{k^5}} \right| \leq \ln \frac{3 + \sqrt{k^5}}{2 + \sqrt{k^5}} = \ln \left(1 + \frac{1}{2 + \sqrt{k^5}} \right) \leq \frac{1}{2 + \sqrt{k^5}} \leq \frac{1}{\sqrt{k^5}}$$

Последовательность $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5}}$ сходится, следовательно, исходный функциональный ряд равномерно сходится на $E_1 = (1, +\infty)$.

3. $E_2 = (0, 1]$

Докажем, что на этом промежутке ряд сходится неравномерно. Воспользуемся отрицанием критерия Коши: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не равномерно на промежутке $\langle a, b \rangle$, если существует $\epsilon_0 > 0$ такое, что какое бы значение $n_0 \in \mathbb{N}$ мы ни взяли, можно найти значения $m \geq n_0, m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+$ и $x_n \in \langle a, b \rangle$

так, что $\left| \sum_{n=m}^{m+k} u_n(x_n) \right| > \epsilon_0$.

Возьмем $k = 0$ и $x_m = m^{-\frac{5}{2}}$. Тогда

$$\left| \sum_{n=m}^{m+k} u_n(x_n) \right| = \left| (-1)^m \ln \frac{3 + m^{-\frac{5}{2}} \sqrt{m^5}}{2 + m^{-\frac{5}{2}} \sqrt{m^5}} \right| = \left| \ln \frac{4}{3} \right| > \ln \frac{7}{6} = \epsilon_0$$

Ответ: $E_1 = (1, +\infty)$ **сходится равномерно**, $E_2 = (0, 1]$ **не сходится равномерно**.

5 Сумма функционального ряда

$$\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{x}{3 \cdot 4} + \frac{x^2}{4 \cdot 5} - \dots + \frac{(-1)^n x^n}{(n+2) \cdot (n+3)} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+2) \cdot (n+3)}$$

Найдем область сходимости данного ряда. Применяя признак д'Аламбера, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1} (n+2)(n+3)}{(n+3)(n+4)(-1)^n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |-x| = |x| < 1$$

По признаку д'Аламбера ряд сходится при $x \in (-1, 1)$. Дополнительно исследуем сходимость в точках ± 1 . Применим признак Гаусса

$$\left| \frac{u_n(\pm 1)}{u_{n+1}(\pm 1)} \right| = \frac{n+4}{n+2} = 1 + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

В признаке Гаусса $\mu = 2 > 1$, следовательно при $x = \pm 1$ ряд сходится. Область **сходимости** – промежуток $[-1, 1]$.

Ряд сходится к функции $f(x)$. По теореме о дифференцировании степенного ряда на промежутке $(-1, 1)$ этот ряд можно продифференцировать почленно. Следовательно,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n+2) \cdot (n+3)} = 0 - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{2x}{4 \cdot 5} - \frac{3x^2}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n+2) \cdot (n+3)} + \dots$$

Теперь рассмотрим сумму:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n+2) \cdot (n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B}{n+3} = \\ &= \left\| \begin{aligned} &A(n+3) + B(n+2) = n(-1)^n x^{n-1} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} A = -2(-1)^n x^{n-1} \\ B = 3(-1)^n x^{n-1} \end{cases} \end{aligned} \right\| = 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n+3} - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n+2} \end{aligned}$$

Заметим, что оба ряда напоминают разложение натурального логарифма в степенной ряд, $|\alpha| < 1$:

$$\ln(1 + \alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\alpha^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \alpha^n}{n}$$

Поочередно преобразуем суммы первого и второго рядов и выразим их через формулу логарифма:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n+3} &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3} x^{n-4}}{n} = \frac{1}{x^4} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \\ &= \frac{1}{x^4} \left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n+2} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2} x^{n-3}}{n} = -\frac{1}{x^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \\ &= -\frac{1}{x^3} (\ln(1+x) - x)\end{aligned}$$

Вернемся к выражению для S :

$$\begin{aligned}S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n+2) \cdot (n+3)} = 3 \cdot \frac{1}{x^4} \left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right) + 2 \cdot \frac{1}{x^3} (\ln(1+x) - x) = \\ &= \frac{6 \ln(1+x) - 6x - x^2 + 4x \ln(1+x)}{2x^4}\end{aligned}$$

Сумма S не существует при $x = 0$.

Поэтому выразим сумму для $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, через интегрирование S :

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \int S dx = \int \frac{6 \ln(1+x) - 6x - x^2 + 4x \ln(1+x)}{2x^4} dx = 3 \int \frac{\ln(1+x)}{x^4} dx - \\ &- 3 \int \frac{1}{x^3} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2} dx + 2 \int \frac{\ln(1+x)}{x^3} dx\end{aligned}$$

Отдельно вычислим интегралы $\int \frac{\ln(1+x)}{x^4} dx$ и $\int \frac{\ln(1+x)}{x^3} dx$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(1+x)}{x^4} dx &= \left\| \begin{array}{l} u = \ln(1+x) \\ du = \frac{dx}{1+x} \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = \frac{dx}{x^4} \\ v = -\frac{1}{3x^3} \end{array} \right\| = -\frac{\ln(1+x)}{3x^3} + \frac{1}{3} \int \frac{1}{(1+x)x^3} dx = \\ &= -\frac{\ln(1+x)}{3x^3} + \frac{1}{3} \left(\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^3} dx - \int \frac{1}{1+x} dx \right) = -\frac{\ln(1+x)}{3x^3} + \\ &+ \frac{\ln(x)}{3} + \frac{1}{3x} - \frac{1}{6x^2} - \frac{\ln(1+x)}{3} + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(1+x)}{x^3} dx &= \left\| \begin{array}{l} u = \ln(1+x) \\ du = \frac{dx}{1+x} \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = \frac{dx}{x^3} \\ v = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right\| = -\frac{\ln(1+x)}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1+x)x^2} dx = \\ &= -\frac{\ln(1+x)}{2x^2} + \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{1+x} dx \right) = -\frac{\ln(1+x)}{2x^2} + \\ &\quad + \frac{\ln(1+x)}{2} - \frac{1}{2x} - \frac{\ln(x)}{2} + C \end{aligned}$$

Подставляем в исходное выражение:

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= -\frac{\ln(1+x)}{x^3} + \ln(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \ln(1+x) - \frac{\ln(1+x)}{x^2} + \ln(1+x) - \frac{1}{x} - \ln(x) + \\ &+ \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{2x} + C = -\frac{\ln(1+x)}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} + \frac{1}{2x} + C = \frac{x^2 + 2x - 2(1+x)\ln(1+x)}{2x^3} + C \end{aligned}$$

Так как степенной ряд сходится в точке $x = 1$, то ... его сумма в этой точке также выражается $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2(1+x)\ln(1+x)}{2x^3}$

Сумма, к которой сходится ряд при $x \in (-1, 1] \setminus \{0\}$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2(1+x)\ln(1+x)}{2x^3}$$

Отдельно рассмотрим сумму ряда для $x = -1$ и $x = 0$

$$\begin{aligned} f(-1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{(n+2)(n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \end{aligned}$$

Составим частичную сумму:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} \rightarrow f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \\ f(0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 0^n}{(n+2)(n+3)} = 0 \end{aligned}$$

Ответ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+2) \cdot (n+3)} = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 2(1+x) \ln(1+x)}{2x^3}, & x \in (-1, 1] \setminus \{0\} \\ \frac{1}{2}, & x = -1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



Рис. 3. Нахождение суммы функционального ряда