Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Индивидуальное задание № 2

по дисциплине "Математический анализ"

Вариант № 20

Выполнила: студентка гр. **R3138**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Бойцев А.А.*

Санкт-Петербург, 2023

> Работайте, работайте — а понимание придёт потом.
>
> Жан Ле Рон Д'Аламбер

1 Сходимость числовых рядов

Исследовать ряды на сходимость. Для знакопеременных рядов исследовать абсолютную и условную сходимость.

1.1 а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^{n+\frac{3}{2}}} \cdot ln\frac{2^n+1}{2^n} \tag{1}$$

1. Ряд знакопостоянный
2. Воспрользуемся признаком Д'Аламбера в предельной форме

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!! \cdot ln\frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}} \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{(2n)!! \cdot ln\frac{2^n+1}{2^n} \cdot (n+1)^{n+1+\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!! \cdot (2n+2) \cdot ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{(2n)!! \cdot (n+1) \cdot ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \cdot (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2^n} \cdot (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right)^{-\frac{n+\frac{3}{2}}{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{e} < 1$$

<u>Ответ:</u> ряд **сходится** по признаку Д'Аламбера

1.2 б

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{n+1}{n^2}-ln\left(1+tg\frac{1}{n}\right)\right)^2 \tag{2}$$

1. Ряд знакопостоянный
2. Воспользуемся разложением функций в ряд Маклорена при $n\to\infty$

$$arctg\frac{n+1}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$tg\frac{1}{n}=\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$ln\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Тогда подставляя получаем:

$$\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)^2=\left(\frac{3}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2=$$
$$=\frac{9}{4n^4}+\frac{3}{n^2}\cdot O\left(\frac{1}{n^3}\right)+O\left(\frac{1}{n^6}\right) \tag{3}$$

В силу сходимости рядов $\frac{9}{4n^4}$, $\frac{3}{n^2}\cdot o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ и $o\left(\frac{1}{n^6}\right)$ и согласно арифметическим свойствам рядов их сумма тоже сходится.

<u>Ответ:</u> ряд **сходится**

1.3 в

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos 2n}{n^2 - \ln n} \tag{4}$$

1. Ряд знакопеременный
Заметим, что перемена знака вызвано только $\cos 2n$, так как $n^2 > \ln n$.
2. Исследуем его на *абсолютную сходимость.*

$$\frac{(n+1)\left|\cos 2n\right|}{n^2 - \ln n} \geq \frac{(n+1)\left(\cos 2n\right)^2}{n^2 - \ln n} = \frac{(n+1)}{n^2 - \ln n} - \frac{(n+1)\left(\sin 2n\right)^2}{n^2 - \ln n} \tag{5}$$

Отдельно рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^2 - \ln n}$

$$\frac{(n+1)}{n^2 - \ln n} \geq \frac{(n+1)}{n^2 + n} = \frac{1}{n} \tag{6}$$

По признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^2 - \ln n}$ расходится, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)|\cos 2n|}{n^2 - \ln n}$ также расходится. **Абсолютной сходимости нет.**

3. Исследуем ряд на *условную сходимость.* Применим признак Дирихле, $a_n = \frac{n+1}{n^2 - \ln n}$, $b_n = \cos 2n$. a_n - положительна и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$|B_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \cos 2k\right| = \left|\frac{\sin(n)\cos(n+1)}{\sin(1)}\right| \leq \frac{1}{\sin(1)} \tag{7}$$

Следовательно, ряд сходится условно по признаку Дирихле.

<u>Ответ:</u> ряд **сходится условно**

1.4 г

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \tag{8}$$

1. Ряд знакопостоянный
2. Проверим, выполнен ли *необходимый* признак сходимости числового ряда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \left\|0 \le 1-\frac{1}{n} \le 1\right\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{n}+O\frac{1}{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2n}\cdot\ln\frac{2}{n}} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\cdot\ln\frac{2}{n}}$$

Далее вычислим предел степени экспоненты, применив теорему Штольца

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{2}{n}-\ln\frac{2}{n-1}}{2n-2n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n-1}{n}}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}}{2} = 0$$

Подставляя вычисленное значение, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1 \ne 0 \tag{9}$$

Следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд **расходится**

1.5 д

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+3n} \tag{10}$$

1. Ряд знакопостоянный
2. Проверим, выполнен ли *необходимый* признак сходимости числового ряда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} e^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+3n} = \lim_{n\to\infty} e^n \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{n^2+3n}{-n-1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^n \cdot e^{\frac{n^2+3n}{-n-1}} = \lim_{n\to\infty} e^n \cdot e^{-n} = 1 \neq 0$$

Следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд **расходится**

Рис. 1. Процесс исследования числовых рядов на сходимость

1.6 e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x \cdot \cos nx \, dx \tag{11}$$

Вычислим неопределенный интеграл:

$$\int x \cdot \cos nx \, dx = \left\| \begin{matrix} u = x, \, dv = \cos nx \, dx \\ du = dx, \, v = \frac{\sin nx}{n} \end{matrix} \right\| = \frac{x \sin nx}{n} - \int \frac{\sin nx}{n} \, dx = \\ = \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + C$$

Теперь можем найти определенный:

$$\int\limits_0^1 x \cdot \cos nx \, dx = \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \bigg|_0^1 = \frac{\sin n}{n} + \frac{\cos n}{n^2} - \frac{1}{n^2}$$

Запишем сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n} + \frac{\cos n - 1}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{12}$$

1. Условная сходимость
Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ сходятся по признаку Дирихле, ряд $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится вместе с эталонным рядом. **Условная** сходимость есть.
2. Абсолютная сходимость

$$\frac{1}{n} \left| \sin n + \frac{\cos n - 1}{n} \right| \geq ???$$

в методичке не трогают абсолютную сходимость
Ответ: ряд **сходится условно**

2 Область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)\cdot\cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} \tag{13}$$

1. Нахождение области абсолютной сходимости ряда

Заметим, что все члены ряда определены для всех вещественных значений x, причем при $\cos(nx) = 0$ и $\cos(3nx) = 0$ все члены ряда равны нулю, поэтому в точках $x = \frac{\pi}{2}\cdot(2k+1),\ k \in Z$ и $x = \frac{\pi}{6}\cdot(2m+1),\ m \in Z$ ряд сходится (абсолютно).
2. Преобразуем числитель в сумму

$$\cos(nx)\cdot\cos(3nx) = \frac{1}{2}\left(\cos(2nx)+\cos(4nx)\right)$$

Тогда

$$\frac{\cos(nx)\cdot\cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} = \frac{\cos(2nx)}{2n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(4nx)}{2n^{\frac{x}{3}}}$$

К каждому из полученных рядов применим признак Дирихле.
Суммы

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2nx)\right| = \left|\frac{\sin(nx)\cos((n+1)x)}{\sin x}\right| = \left|\frac{-\sin(x)+\sin((2n+1)x)}{2\sin x}\right| \leq \frac{1}{|\sin x|}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\cos(4nx)\right| = \left|\frac{-\sin(2x)+\sin(2x(2n+1))}{2\sin 2x}\right| \leq \frac{1}{|\sin 2x|}$$

ограничены при всех значениях n для каждого фиксированого значения $x \neq \pi k,\ k \in Z$ и $x \neq \frac{\pi m}{2},\ m \in Z$.
Заметим, что последовательность $\frac{1}{n^{\frac{x}{3}}}$, монотонно убывает, стемясь к нулю, при $x > 0$.
Тогда исходный ряд сходится условно по признаку Дирихле
при $x \in (0,+\infty)\setminus\left\{\pi k,\ \frac{\pi m}{2}; k, m \in N\right\}$.

Исследуем сходимость ряда в точках $x = \pi k,\ k \in N$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2n\cdot\pi k) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(4n \cdot \pi k) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Подставляя в исходную сумму ряда:

$$\frac{\cos(2nx)}{2n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(4nx)}{2n^{\frac{x}{3}}} = \frac{1}{2n^{\frac{x}{3}}} + \frac{1}{2n^{\frac{x}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{x}{3}}}$$

Сходится при $n^{\frac{x}{3}} > n \to x > 3$, для других x – расходится.

Рассмотрим поведение ряда в точках $x = \frac{\pi m}{2}$, $m \in N$. В точках вида $x = \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1),\ k \in Z$ ряд сходится абсолютно (см. в начале решения), а сходимость ряда при четных значениях $m \in N$ доказана выше.

Область **условной** сходимости

$$x \in (0, +\infty) \cup \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1), \frac{\pi}{6} \cdot (2m+1);\ k, m \in Z \right\}$$

Исследуем ряд на абсолютную сходимость в точках $x \neq \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1),\ k \in Z$ и $x \neq \frac{\pi}{6} \cdot (2m+1),\ m \in Z$.

$$\left| \frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} \right| = \frac{|\cos(nx) \cdot \cos(3nx)|}{n^{\frac{x}{3}}} \geq \frac{(\cos(nx) \cdot \cos(3nx))^2}{n^{\frac{x}{3}}} =$$
$$= \frac{(1+\cos(2nx)) \cdot (1+\cos(6nx))}{4n^{\frac{x}{3}}} = \frac{1}{4n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(2nx)}{4n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(6nx)}{4n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(2nx) \cdot \cos(6nx)}{4n^{\frac{x}{3}}}$$

Сумма рядов выше расходится при $0 < x \leq 3$, так как расходится ряд $\frac{1}{4n^{\frac{x}{3}}}$, а $\frac{\cos(2nx)}{4n^{\frac{x}{3}}}$, $\frac{\cos(6nx)}{4n^{\frac{x}{3}}}$, $\frac{\cos(2nx) \cdot \cos(6nx)}{4n^{\frac{x}{3}}}$ сходятся по признаку Дирихле.

Исследуем при $x \leq 0$
Далее, будем рассматривать $x > 3$.

$$\left| \frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{x}{3}}}$$

Следовательно, при $x > 3$ ряд сходится **абсолютно**.

Ответ: при $x \in (0, +\infty) \cup \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1), \frac{\pi}{6} \cdot (2m+1);\ k, m \in Z \right\}$ ряд сходится **условно**, при $x \in (3, +\infty) \cup \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1), \frac{\pi}{6} \cdot (2m+1);\ k, m \in Z \right\}$ – **абсолютно**.

3 Равномерная сходимость функциональной последовательности

$$f_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right)$$

Найдем функцию $\phi(x)$, к которой сходится данная последовательность при фиксированном x и $n \to \infty$:

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{nx} = \frac{1}{x} \qquad (14)$$

а) $x \in (0, 2)$. Докажем, что на этом промежутке последовательность сходится к предельной функции неравномерно. Последовательность функции $f_n(x)$ сходится к предельной функции неравномерно на промежутке $\langle a, b\rangle$, если существует $\epsilon_0 > 0$ такое, что какое бы значение $n_0 \in N$ мы ни взяли, можно найти значения $n \geq n_0, n \in N$ и $x_n \in \langle a, b\rangle$ такие, что $|f_n(x) - \phi(x)| \geq \epsilon_0$.
Возьмем $x_n = \frac{1}{n}$ и $\epsilon_0 = 1$. Тогда

$$|f_n(x_n) - \phi(x_n)| = n\left(\frac{1}{nx_n} - \ln\left(1 + \frac{1}{nx_n}\right)\right) = n\left(1 - \ln\left(2\right)\right)$$

Так как последняя величина стремится к бесконечности, то, начиная с некоторого n, выполняется неравенство $n\left(1 - \ln\left(2\right)\right) > \epsilon_0 = 1$, следовательно, последовательность сходится к предельной функции **неравномерно**.

б) $x \in (2, +\infty)$. Равномерная сходимость будет доказана, если мы докажем, что $\sup\limits_{x\in(2,+\infty)} |f_n(x) - \phi(x)|$ стремится к нулю, при $n \to \infty$.

$$\sup_{x\in(2,+\infty)} |f_n(x) - \phi(x)| = \sup_{x\in(2,+\infty)} \left|n \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right) - \frac{1}{x}\right| =$$
$$= \sup_{x\in(2,+\infty)} n\left|\ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right) - \frac{1}{nx}\right| = \sup_{x\in(2,+\infty)} n\left(\frac{1}{nx} - \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right)\right) \qquad (15)$$

Так как функция, стоящая под знаком супремума, дифференцируема на данном промежутке и, следовательно, непрерывна, то

$$\sup_{x\in(2,+\infty)} |f_n(x) - \phi(x)| = \max_{x\in(2,+\infty)} n\left(\frac{1}{nx} - \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right)\right),$$

и этот максимум можно найти методами дифференциального исчисления:

$$n\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{nx}-\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)\right)=\frac{n}{nx^2+x}-\frac{1}{x^2}=\frac{nx^2-nx^2-x}{nx^4+x^3}=\frac{-x}{nx^4+x^3}<0$$

Функция монотонно убывает на промежутке $x\in(2,+\infty)$. Заметим, что в точке $x=2$, $n\left(\frac{1}{nx}-\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)\right)$ определена и при $x\in[2,+\infty)$ имеет тот же характер монотонности, что и $x\in(2,+\infty)$

$$0\le\max_{x\in(2,+\infty)}n\left(\frac{1}{nx}-\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)\right)\le\max_{x\in[2,+\infty)}n\left(\frac{1}{nx}-\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)\right)=$$
$$=n\left(\frac{1}{2n}-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)$$

$$0\le\lim_{n\to\infty}|f_n(x)-\phi(x)|\le\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{2n}-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)=\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)=0$$

Следовательно, при $x\in(2,+\infty)$ сходится **равномерно**.

<u>Ответ:</u> а) **не сходится равномерно**, б) **сходится равномерно**.

Рис. 2. Исследование функциональных последовательностей

4 Равномерная сходимость ряда

4.1 а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$$

при $x \in [0, +\infty)$. Применим признак Дирихле. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+x}}$, $b_n = \sin x \sin nx$. Заметим, что a_n – положительна и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Далее покажем ограниченность модулей частичных сумм b_n.

$$|B_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin x \sin kx\right| = \left|2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}(n+1)\right)\right| \leq 2$$

Значит, по признаку Дирихле данный ряд сходится при $x \in [0, +\infty)$.
Исследуем на равномерную сходимость.
При $x = 2\pi k$, $k \in N$ все частичные суммы равны нулю, следовательно, ограничены по модулю $C = 2$.

$$\exists C = 2 \forall n \in N : \left|\sum_{k=1}^{n} \sin x \sin kx\right| =$$
$$= \begin{cases} \left|2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}(n+1)\right)\right| \leq 2, & x \neq 2\pi m,\ m \in N \\ 0 \leq 2, & x = 2\pi m, m \in N. \end{cases}$$

Последовательность $\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ – монотонна при каждом $x \geq 0$, так как $\left(\sqrt{n+x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{n+x}} > 0$.
Так как $\left|\frac{1}{\sqrt{n+x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, то $\frac{1}{\sqrt{n+x}} \rightrightarrows 0$ по Д.У.
Значит, по признаку Дирихле **ряд сходится равномерно** при $x \in [0, +\infty)$.

<u>Ответ:</u> **сходится равномерно**.

4.2 б

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln \frac{3+x\sqrt{n^5}}{2+x\sqrt{n^5}}$$

1. Поточечная сходимость.

Исследуем на сходимость при фиксированном $x = x_0 \in (0,+\infty)$. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k \ln \frac{3+x_0\sqrt{k^5}}{2+x_0\sqrt{k^5}}$ – сходится по признаку Лейбница, следовательно, функциональный ряд сходится поточечно.

2. $E_1 = (1,+\infty)$

Докажем равномерную сходимость ряда.

$$|f_k(x)| = \left|\ln \frac{3+x\sqrt{k^5}}{2+x\sqrt{k^5}}\right| \le \ln \frac{3+\sqrt{k^5}}{2+\sqrt{k^5}} = \ln\left(1+\frac{1}{2+\sqrt{k^5}}\right) \le \frac{1}{2+\sqrt{k^5}} \le \frac{1}{\sqrt{k^5}}$$

Последовательность $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5}}$ сходится, следовательно, исходный функциональный ряд равномерно сходится на $E_1 = (1,+\infty)$.

3. $E_2 = (0,1]$

Докажем, что на этом промежутке ряд сходится неравномерно. Воспользуемся отрицанием критерия Коши: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ не равномерно на промежутке $\langle a,b\rangle$, если существует $\epsilon_0 > 0$ такое, что какое бы значение $n_0 \in N$ мы ни взяли, можно найти значения $m \ge n_0, m \in N, k \in Z_+$ и $x_n \in \langle a,b\rangle$ так, что $\left|\sum\limits_{n=m}^{m+k}u_n(x_n)\right| > \epsilon_0$.

Возьмем $k=0$ и $x_m = m^{-\frac{5}{2}}$. Тогда

$$\left|\sum_{n=m}^{m+k}u_n(x_n)\right| = \left|(-1)^m \ln \frac{3+m^{-\frac{5}{2}}\sqrt{m^5}}{2+m^{-\frac{5}{2}}\sqrt{m^5}}\right| = \left|\ln\frac{4}{3}\right| > \ln\frac{7}{6} = \epsilon_0$$

<u>Ответ:</u> $E_1 = (1,+\infty)$ **сходится равномерно**, $E_2 = (0,1]$ **не сходится равномерно**.

5 Сумма функционального ряда

$$\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{x}{3\cdot 4}+\frac{x^2}{4\cdot 5}-...+\frac{(-1)^n x^n}{(n+2)\cdot(n+3)}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+2)\cdot(n+3)}$$

Найдем область сходимости данного ряда. Применяя признак д'Аламбера, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}(n+2)(n+3)}{(n+3)(n+4)(-1)^n x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}|-x|=|x|<1$$

По признаку д'Аламбера ряд сходится при $x\in(-1,1)$. Дополнительно исследуем сходимость в точках ± 1. Применим признак Гаусса

$$\left|\frac{u_n(\pm 1)}{u_{n+1}(\pm 1)}\right|=\frac{n+4}{n+2}=1+\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

В признаке Гаусса $\mu=2>1$, следовательно при $x=\pm 1$ ряд сходится. Область **сходимости** – промежуток $[-1,1]$.

Ряд сходится к функции $f(x)$. По теореме о дифференцировании степенного ряда на промежутке $(-1,1)$ этот ряд можно продиффиренцировать почленно. Следовательно,

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n+2)\cdot(n+3)}=0-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{2x}{4\cdot 5}-\frac{3x^2}{5\cdot 6}+...+\frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n+2)\cdot(n+3)}+...$$

Теперь рассмотрим сумму:

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n+2)\cdot(n+3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A}{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B}{n+3}=$$

$$=\left\|\begin{matrix}A(n+3)+B(n+2)=n(-1)^n x^{n-1}\rightarrow\\ \rightarrow\begin{cases}A=-2(-1)^n x^{n-1}\\ B=3(-1)^n x^{n-1}\end{cases}\end{matrix}\right\|=3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{n+3}-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{n+2}$$

Заметим, что оба ряда напоминают разложение натурального логарифма в степенной ряд, $|\alpha|<1$:

$$\ln(1+\alpha)=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+...+(-1)^{n-1}\frac{\alpha^n}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\alpha^n}{n}$$

Поочередно преобразуем суммы первого и второго рядов и выразим их через формулу логарифма:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{n+3}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-3}x^{n-4}}{n}=\frac{1}{x^4}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=$$
$$=\frac{1}{x^4}\left(\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{n+2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-2}x^{n-3}}{n}=-\frac{1}{x^3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=$$
$$=-\frac{1}{x^3}\left(\ln(1+x)-x\right)$$

Вернемся к выражению для S:

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n+2)\cdot(n+3)}=3\cdot\frac{1}{x^4}\left(\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right)+2\cdot\frac{1}{x^3}\left(\ln(1+x)-x\right)=$$
$$=\frac{6\ln(1+x)-6x-x^2+4x\ln(1+x)}{2x^4}$$

Сумма S не существует при $x=0$.
Поэтому выразим сумму для $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$, через интегрирование S:

$$\widetilde{S}=\int S\,dx=\int\frac{6\ln(1+x)-6x-x^2+4x\ln(1+x)}{2x^4}\,dx=3\int\frac{\ln(1+x)}{x^4}\,dx-$$
$$-3\int\frac{1}{x^3}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}\,dx+2\int\frac{\ln(1+x)}{x^3}\,dx$$

Отдельно вычислим интегралы $\int\frac{\ln(1+x)}{x^4}\,dx$ и $\int\frac{\ln(1+x)}{x^3}\,dx$:

$$\int\frac{\ln(1+x)}{x^4}\,dx=\left\|\begin{matrix}u=\ln(1+x) & dv=\frac{dx}{x^4}\\ du=\frac{dx}{1+x} & v=-\frac{1}{3x^3}\end{matrix}\right\|=-\frac{\ln(1+x)}{3x^3}+\frac{1}{3}\int\frac{1}{(1+x)x^3}\,dx=$$
$$=-\frac{\ln(1+x)}{3x^3}+\frac{1}{3}\left(\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{1}{x^2}\,dx+\int\frac{1}{x^3}\,dx-\int\frac{1}{1+x}\,dx\right)=-\frac{\ln(1+x)}{3x^3}+$$
$$+\frac{ln(x)}{3}+\frac{1}{3x}-\frac{1}{6x^2}-\frac{ln(1+x)}{3}+C$$

$$\int \frac{\ln(1+x)}{x^3}\,dx = \left\| \begin{matrix} u=\ln(1+x) & dv=\frac{dx}{x^3} \\ du=\frac{dx}{1+x} & v=-\frac{1}{2x^2} \end{matrix} \right\| = -\frac{\ln(1+x)}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x)x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{\ln(1+x)}{2x^2} + \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{1+x}\,dx\right) = -\frac{\ln(1+x)}{2x^2} +$$

$$+ \frac{ln(1+x)}{2} - \frac{1}{2x} - \frac{ln(x)}{2} + C$$

Подставляем в исходное выражение:

$$\widetilde{S} = -\frac{\ln(1+x)}{x^3} + \ln(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \ln(1+x) - \frac{\ln(1+x)}{x^2} + \ln(1+x) - \frac{1}{x} - \ln(x) +$$

$$+ \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{2x} + C = -\frac{\ln(1+x)}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} + \frac{1}{2x} + C = \frac{x^2+2x-2(1+x)\ln(1+x)}{2x^3} + C$$

Так как степенной ряд сходится в точке $x = 1$, то ... его сумма в этой точке также выражается $f(x) = \frac{x^2+2x-2(1+x)\ln(1+x)}{2x^3}$
Сумма, к которой сходится ряд при $x \in (-1, 1] \setminus \{0\}$

$$f(x) = \frac{x^2+2x-2(1+x)\ln(1+x)}{2x^3}$$

Отдельно рассмотрим сумму ряда для $x = -1$ и $x = 0$

$$f(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{(n+2)(n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

Составим частичную сумму:

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} \to f(-1) = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 0^n}{(n+2)(n+3)} = 0$$

Ответ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+2)\cdot(n+3)} = \begin{cases} \frac{x^2+2x-2(1+x)\ln(1+x)}{2x^3}, & x \in (-1,1]\setminus\{0\} \\ \frac{1}{2}, & x=-1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Рис. 3. Нахождение суммы функционального ряда