Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Индивидуальное задание № 2

по дисциплине "Математический анализ"

Вариант № 20

Выполнила: студентка гр. **R3138**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *<ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ>*

Санкт-Петербург, 2023

1 Сходимость числовых рядов

Исследовать ряды на сходимость. Для знакопеременных рядов исследовать абсолютную и условную сходимость.

1.1 а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^{n+\frac{3}{2}}} \cdot ln\frac{2^n+1}{2^n} \tag{1}$$

1. Ряд знакопостоянный
2. Воспрользуемся признаком д'Аламбера в предельной форме

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!! \cdot ln\frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}} \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{(2n)!! \cdot ln\frac{2^n+1}{2^n} \cdot (n+1)^{n+1+\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!! \cdot (2n+2) \cdot ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{(2n)!! \cdot (n+1) \cdot ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \cdot (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2^n} \cdot (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right)^{-\frac{n+\frac{3}{2}}{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{e} < 1$$

<u>Ответ:</u> ряд **сходится** по признаку д'Аламбера

1.2 б

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(arctg\frac{n+1}{n^2} - ln\left(1+tg\frac{1}{n}\right)\right)^2 \tag{2}$$

1. Ряд знакопостоянный

2. Воспрользуемся разложением функций в ряд Маклорена при $n \to \infty$

$$arctg\frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$tg\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$ln\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Тогда подставляя получаем:

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)^2 = \left(\frac{3}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2 =$$
$$= \frac{9}{4n^4} + \frac{3}{n^2} \cdot O\left(\frac{1}{n^3}\right) + O\left(\frac{1}{n^6}\right) \quad (3)$$

В силу сходимости рядов $\frac{9}{4n^4}$, $\frac{3}{n^2} \cdot o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ и $o\left(\frac{1}{n^6}\right)$ и согласно арифметическим свойствам рядов их сумма тоже сходится.

Ответ: ряд **сходится**

1.3 в

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos 2n}{n^2 - \ln n} \quad (4)$$

1. Ряд знакопеременный
Заметим, что перемена знака вызвано только $\cos 2n$, так как $n^2 > \ln n$.
2. Исследуем его на *абсолютную сходимость*.

$$\frac{(n+1)\left|\cos 2n\right|}{n^2 - \ln n} \geq \frac{(n+1)\left(\cos 2n\right)^2}{n^2 - \ln n} = \frac{(n+1)}{n^2 - \ln n} - \frac{(n+1)\left(\sin 2n\right)^2}{n^2 - \ln n} \quad (5)$$

Отдельно рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^2 - \ln n}$

$$\frac{(n+1)}{n^2 - \ln n} \geq \frac{(n+1)}{n^2 + n} = \frac{1}{n} \quad (6)$$

По признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{n^2-\ln n}$ расходится, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)|\cos 2n|}{n^2-\ln n}$ также расходится. **Абсолютной сходимости нет.**
3. Исследуем его на *условную сходимость* Рассмотрим соотвествующий несобственный интеграл.

$$\int_1^{\infty}\frac{(x+1)\cos 2x}{x^2-\ln x}\,dx \tag{7}$$

Обозначим $f(x)=\cos 2x$ и $g(x)=\frac{(x+1)}{x^2-\ln x}$. Первообразная $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ ограничена и непрерывна на промежутке интегрирования. Установим монотонность убывания функции $g(x)$ для этого вычислим производную.

$$g'(x)=\frac{x^2-\ln x-\left(2x-\frac{1}{x}\right)(x+1)}{\left(x^2-\ln x\right)^2}=-\frac{x^2+\ln x-1-\frac{1}{x}+2x}{\left(x^2-\ln x\right)^2} \tag{8}$$

На промежутке $[1,\infty)$ выполнено неравенство $g'(x)<0$ и $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)}{x^2-\ln x}=0$. Значит, по признаку Дирихле интеграл $\int_1^{\infty}\frac{(x+1)\cos 2x}{x^2-\ln x}\,dx$ сходится условно, вместе с ним условно сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cos 2n}{n^2-\ln n}$.

<u>Ответ:</u> ряд **сходится условно**

1.4 г

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \tag{9}$$

1. Ряд знакопостоянный
2. Проверим, выполнен ли *необходимый* признак сходимости числового ря-

да $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \left\|0 \le 1-\frac{1}{n} \le 1\right\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{n}+O\frac{1}{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2n}\cdot\ln\frac{2}{n}} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\cdot\ln\frac{2}{n}}$$

Далее вычислим предел степени экспоненты, применив теорему Штольца

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{2}{n}-\ln\frac{2}{n-1}}{2n-2n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n-1}{n}}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}}{2} = 0$$

Подставляя вычисленное значение, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1 \ne 0 \tag{10}$$

Следовательно, ряд расходится.

<u>Ответ:</u> ряд **расходится**

1.5 д

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+3n} \tag{11}$$

1. Ряд знакопостоянный
2. Проверим, выполнен ли *необходимый* признак сходимости числового ря-

да $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} e^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+3n} = \lim_{n\to\infty} e^n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{n^2+3n}{-n-1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^n \cdot e^{\frac{n^2+3n}{-n-1}} = \lim_{n\to\infty} e^n \cdot e^{-n} = 1 \neq 0$$

Следовательно, ряд расходится.

<u>Ответ:</u> ряд **расходится**

1.6 e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x \cdot \cos nx \, dx \tag{12}$$

2 Область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)\cdot\cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} \tag{13}$$

1. Нахождение области абсолютной сходимости ряда
Заметим, что все члены ряда определены для всех вещественных значений x, причем в точках $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$ все члены ряда равны нулю, поэьлму в этих точках ряд сходится (абсолютно).
Преобразуем числитель в сумму

$$\cos(nx)\cdot\cos(3nx) = \frac{1}{2}\left(\cos(2nx) + \cos(4nx)\right) \tag{14}$$

Тогда

$$\frac{\cos(2nx)}{n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(4nx)}{n^{\frac{x}{3}}} \tag{15}$$