

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

## Индивидуальное задание № 2

по дисциплине "Математический анализ"

**Вариант № 20**

Выполнила: студентка гр. **R3138**

**Нечаева А. А.**

Преподаватель: <ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ>

Санкт-Петербург, 2023

# 1 Сходимость числовых рядов

Исследовать ряды на сходимость. Для знакопеременных рядов исследовать абсолютную и условную сходимость.

## 1.1 а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^{n+\frac{3}{2}}} \cdot \ln \frac{2^n + 1}{2^n} \quad (1)$$

1. Ряд знакопостоянный

2. Воспользуемся признаком д'Аламбера в предельной форме

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!! \cdot \ln \frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}} \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{(2n)!! \cdot \ln \frac{2^n+1}{2^n} \cdot (n+1)^{n+1+\frac{3}{2}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!! \cdot (2n+2) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{(2n)!! \cdot (n+1) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \cdot (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2^n} \cdot (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right)^{-\frac{n+\frac{3}{2}}{n+1}} = \\ &= \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

Ответ: ряд **сходится** по признаку д'Аламбера

## 1.2 б

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^2} - \ln \left( 1 + \operatorname{tg} \frac{1}{n} \right) \right)^2 \quad (2)$$

1. Ряд знакопостоянный

2. Воспользуемся разложением функций в ряд Маклорена при  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^2} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \operatorname{tg} \frac{1}{n} &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \ln \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

Тогда подставляя получаем:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)^2 &= \left(\frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2 = \\ &= \frac{9}{4n^4} + \frac{3}{n^2} \cdot o\left(\frac{1}{n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^6}\right) \quad (3)\end{aligned}$$

В силу сходимости рядов  $\frac{9}{4n^4}$ ,  $\frac{3}{n^2} \cdot o\left(\frac{1}{n^3}\right)$  и  $o\left(\frac{1}{n^6}\right)$  и согласно арифметическим свойствам рядов их сумма тоже сходится.

Ответ: ряд **сходится**