Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Индивидуальное задание № 2

по дисциплине "Математический анализ"

Вариант № 20

Выполнила: студентка гр. **R3138**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *<ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ>*

Санкт-Петербург, 2023

1 Сходимость числовых рядов

Исследовать ряды на сходимость. Для знакопеременных рядов исследовать абсолютную и условную сходимость.

1.1 a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^{n+\frac{3}{2}}} \cdot ln\frac{2^n+1}{2^n} \tag{1}$$

1. Ряд знакопостоянный
2. Воспользуемся признаком д'Аламбера в предельной форме

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!! \cdot ln\frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}} \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{(2n)!! \cdot ln\frac{2^n+1}{2^n} \cdot (n+1)^{n+1+\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!! \cdot (2n+2) \cdot ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{(2n)!! \cdot (n+1) \cdot ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \cdot (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot n^{n+\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2^n} \cdot (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right)^{-\frac{n+\frac{3}{2}}{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{e} < 1$$

<u>Ответ:</u> ряд **сходится** по признаку д'Аламбера

1.2 б

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{n+1}{n^2}-ln\left(1+tg\frac{1}{n}\right)\right)^2 \tag{2}$$

1. Ряд знакопостоянный
2. Воспользуемся разложением функций в ряд Маклорена при $n \to \infty$

$$arctg\frac{n+1}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$tg\frac{1}{n}=\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$ln\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Тогда подставляя получаем:

$$\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)^2=\left(\frac{3}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2=$$
$$=\frac{9}{4n^4}+\frac{3}{n^2}\cdot O\left(\frac{1}{n^3}\right)+O\left(\frac{1}{n^6}\right) \tag{3}$$

В силу сходимости рядов $\frac{9}{4n^4}$, $\frac{3}{n^2}\cdot o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ и $o\left(\frac{1}{n^6}\right)$ и согласно арифметическим свойствам рядов их сумма тоже сходится.

Ответ: ряд **сходится**

1.3 в

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos 2n}{n^2 - \ln n} \tag{4}$$

1. Ряд знакопеременный
Заметим, что перемена знака вызвано только $\cos 2n$, так как $n^2 > \ln n$.
2. Исследуем его на *абсолютную сходимость.*

$$\frac{(n+1)\,|\cos 2n|}{n^2 - \ln n} \geq \frac{(n+1)\,(\cos 2n)^2}{n^2 - \ln n} = \frac{(n+1)}{n^2 - \ln n} - \frac{(n+1)\,(\sin 2n)^2}{n^2 - \ln n} \tag{5}$$

Отдельно рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^2 - \ln n}$

$$\frac{(n+1)}{n^2 - \ln n} \geq \frac{(n+1)}{n^2 + n} = \frac{1}{n} \tag{6}$$

По признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^2 - \ln n}$ расходится, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)|\cos 2n|}{n^2 - \ln n}$ также расходится. **Абсолютной сходимости нет.**
3. Исследуем его на *условную сходимость* Рассмотрим соотвествующий несобственный интеграл.

$$\int_1^{\infty} \frac{(x+1)\cos 2x}{x^2 - \ln x}\, dx \tag{7}$$

Обозначим $f(x) = \cos 2x$ и $g(x) = \frac{(x+1)}{x^2 - \ln x}$. Первообразная $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ ограничена и непрерывна на промежутке интегрирования. Установим монотонность убывания функции $g(x)$ для этого вычислим производную.

$$g'(x) = \frac{x^2 - \ln x - \left(2x - \frac{1}{x}\right)(x+1)}{\left(x^2 - \ln x\right)^2} = -\frac{x^2 + \ln x - 1 - \frac{1}{x} + 2x}{\left(x^2 - \ln x\right)^2} \tag{8}$$

На промежутке $[1, \infty)$ выполнено неравенство $g'(x) < 0$ и
$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)}{x^2 - \ln x} = 0$. Значит, по признаку Дирихле интеграл $\int_1^{\infty} \frac{(x+1)\cos 2x}{x^2 - \ln x}\, dx$ сходится условно, вместе с ним условно сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos 2n}{n^2 - \ln n}$.

<u>Ответ:</u> ряд **сходится условно**

1.4 г

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \tag{9}$$

1. Ряд знакопостоянный
2. Проверим, выполнен ли *необходимый* признак сходимости числового ряда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \left\|0 \le 1-\frac{1}{n} \le 1\right\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{n}+O\frac{1}{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2n}\cdot\ln\frac{2}{n}} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\cdot\ln\frac{2}{n}}$$

Далее вычислим предел степени экспоненты, применив теорему Штольца

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{2}{n}-\ln\frac{2}{n-1}}{2n-2n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n-1}{n}}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}}{2} = 0$$

Подставляя вычисленное значение, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1 \ne 0 \tag{10}$$

Следовательно, ряд расходится.

<u>Ответ:</u> ряд **расходится**

1.5 д

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+3n} \tag{11}$$

1. Ряд знакопостоянный
2. Проверим, выполнен ли *необходимый* признак сходимости числового ряда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} e^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+3n} = \lim_{n\to\infty} e^n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{n^2+3n}{-n-1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^n \cdot e^{\frac{n^2+3n}{-n-1}} = \lim_{n\to\infty} e^n \cdot e^{-n} = 1 \neq 0$$

Следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд **расходится**

1.6 e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x \cdot \cos nx \, dx \tag{12}$$

2 Область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} \tag{13}$$

1. Нахождение области абсолютной сходимости ряда

Заметим, что все члены ряда определены для всех вещественных значений x, причем при $\cos(nx) = 0$ и $\cos(3nx) = 0$ все члены ряда равны нулю, поэтому в точках $x = \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1),\ k \in Z$ и $x = \frac{\pi}{6} \cdot (2m+1),\ m \in Z$ ряд сходится (абсолютно).

Преобразуем числитель в сумму

$$\cos(nx) \cdot \cos(3nx) = \frac{1}{2}\left(\cos(2nx) + \cos(4nx)\right)$$

Тогда

$$\frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}} = \frac{\cos(2nx)}{2n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(4nx)}{2n^{\frac{x}{3}}}$$

К каждому из полученных рядов применим признак Дирихле.
Суммы

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2nx)\right| = \left|\frac{\sin(nx)\cos((n+1)x)}{\sin x}\right| = \left|\frac{-\sin(x) + \sin((2n+1)x)}{2\sin x}\right| \leq \frac{1}{|\sin x|}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \cos(4nx)\right| = \left|\frac{-\sin(2x) + \sin(2x(2n+1))}{2\sin 2x}\right| \leq \frac{1}{|\sin 2x|}$$

ограничены при всех значениях n для каждого фиксированого значения $x \neq \pi k,\ k \in Z$ и $x \neq \frac{\pi m}{2},\ m \in Z$.
Заметим, что последовательность $\frac{1}{n^{\frac{x}{3}}}$, монотонно убывает, стемясь к нулю, при $x > 0$.
Тогда исходный ряд сходится условно по признаку Дирихле
при $x \in (0, +\infty) \setminus \left\{\pi k,\ \frac{\pi m}{2}; k, m \in N\right\}$.

Исследуем сходимость ряда в точках $x = \pi k,\ k \in N$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n \cdot \pi k) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(4n \cdot \pi k) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Подставляя в исходную сумму ряда:

$$\frac{\cos(2nx)}{2n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(4nx)}{2n^{\frac{x}{3}}} = \frac{1}{2n^{\frac{x}{3}}} + \frac{1}{2n^{\frac{x}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{x}{3}}}$$

Сходится при $n^{\frac{x}{3}} > n \to x > 3$, для других x – расходится.

Рассмотрим поведение ряда в точках $x = \frac{\pi m}{2}$, $m \in N$. В точках вида $x = \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1),\ k \in Z$ ряд сходится абсолютно (см. в начале решения), а сходимость ряда при четных значениях $m \in N$ доказана выше.

Область **условной** сходимости

$$x \in (0, +\infty) \cup \left\{\frac{\pi}{2} \cdot (2k+1), \frac{\pi}{6} \cdot (2m+1);\ k, m \in Z\right\}$$

Исследуем ряд на абсолютную сходимость в точках $x \neq \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1),\ k \in Z$ и $x \neq \frac{\pi}{6} \cdot (2m+1),\ m \in Z$.

$$\left|\frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}}\right| = \frac{|\cos(nx) \cdot \cos(3nx)|}{n^{\frac{x}{3}}} \geq \frac{(\cos(nx) \cdot \cos(3nx))^2}{n^{\frac{x}{3}}} =$$

$$= \frac{(1 + \cos(2nx)) \cdot (1 + \cos(6nx))}{4n^{\frac{x}{3}}} = \frac{1}{4n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(2nx)}{4n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(6nx)}{4n^{\frac{x}{3}}} + \frac{\cos(2nx) \cdot \cos(6nx)}{4n^{\frac{x}{3}}}$$

Сумма рядов выше расходится при $x \leq 3$, так как расходится ряд $\frac{1}{4n^{\frac{x}{3}}}$. Далее, будем рассматривать $x > 3$.

$$\left|\frac{\cos(nx) \cdot \cos(3nx)}{n^{\frac{x}{3}}}\right| \leq \frac{1}{n^{\frac{x}{3}}}$$

Следовательно, при $x > 3$ ряд сходится **абсолютно**.

Ответ: при $x \in (0, +\infty) \cup \left\{\frac{\pi}{2} \cdot (2k+1), \frac{\pi}{6} \cdot (2m+1);\ k, m \in Z\right\}$ ряд сходится **условно**, при $x \in (3, +\infty) \cup \left\{\frac{\pi}{2} \cdot (2k+1), \frac{\pi}{6} \cdot (2m+1);\ k, m \in Z\right\}$ – **абсолютно**.

3 Равномерная сходимость функциональной последовательности

$$f_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right)$$

Найдем функцию $\phi(x)$, к которой сходится данная последовательность при фиксированном x и $n \to \infty$:

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{nx} = \frac{1}{x} \tag{14}$$

а) $x \in (0, 2)$. Докажем, что на этом промежутке последовательность сходится к предельной функции неравномерно. Последовательность функции $f_n(x)$ сходится к предельной функции неравномерно на промежутке $\langle a, b\rangle$, если существует $\epsilon_0 > 0$ такое, что какое бы значение $n_0 \in N$ мы ни взяли, можно найти значения $n \geq n_0, n \in N$ и $x_n \in \langle a, b\rangle$ такие, что $|f_n(x) - \phi(x)| \geq \epsilon_0$.
Возьмем $x_n = \frac{1}{n}$ и $\epsilon_0 = 1$. Тогда

$$|f_n(x_n) - \phi(x_n)| = n\left(\frac{1}{nx_n} - \ln\left(1 + \frac{1}{nx_n}\right)\right) = n\left(1 - \ln\left(2\right)\right)$$

Так как последняя величина стремится к бесконечности, то, начиная с некоторого n, выполняется неравенство $n\left(1 - \ln\left(2\right)\right) > \epsilon_0 = 1$, следовательно, последовательность сходится к предельной функции **неравномерно**.

б) $x \in (2, +\infty)$. Равномерная сходимость будет доказана, если мы докажем, что $\sup\limits_{x\in(2,+\infty)} |f_n(x) - \phi(x)|$ стремится к нулю, при $n \to \infty$.

$$\sup_{x\in(2,+\infty)} |f_n(x) - \phi(x)| = \sup_{x\in(2,+\infty)} \left|n \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right) - \frac{1}{x}\right| =$$
$$= \sup_{x\in(2,+\infty)} n\left|\ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right) - \frac{1}{nx}\right| = \sup_{x\in(2,+\infty)} n\left(\frac{1}{nx} - \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right)\right) \tag{15}$$

Так как функция, стоящая под знаком супремума, дифференцируема на данном промежутке и, следовательно, непрерывна, то

$$\sup_{x\in(2,+\infty)} |f_n(x) - \phi(x)| = \max_{x\in(2,+\infty)} n\left(\frac{1}{nx} - \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right)\right),$$

и этот максимум можно найти методами дифференциального исчисления:

$$n\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{nx}-\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)\right)=\frac{n}{nx^2+x}-\frac{1}{x^2}=\frac{nx^2-nx^2-x}{nx^4+x^3}=\frac{-x}{nx^4+x^3}<0$$

Функция монотонно убывает на промежутке $x\in(2,+\infty)$. Заметим, что в точке $x=2$, $n\left(\frac{1}{nx}-\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)\right)$ определена и при $x\in[2,+\infty)$ имеет тот же характер монотонности, что и $x\in(2,+\infty)$

$$0\le\max_{x\in(2,+\infty)}n\left(\frac{1}{nx}-\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)\right)\le\max_{x\in[2,+\infty)}n\left(\frac{1}{nx}-\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)\right)=$$
$$=n\left(\frac{1}{2n}-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)$$

$$0\le\lim_{n\to\infty}|f_n(x)-\phi(x)|\le\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{2n}-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)=\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)=0$$

Следовательно, при $x\in(2,+\infty)$ сходится **равномерно**.

Ответ: а) **сходится неравномерно**, б) **сходится равномерно**.

4 Равномерная сходимость ряда

4.1 a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$$

при $x \in [0, +\infty)$.

5 Сумма функционального ряда

$$\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{x}{3\cdot 4} + \frac{x^2}{4\cdot 5} - ... + \frac{(-1)^n x^n}{(n+2)\cdot(n+3)} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+2)\cdot(n+3)}$$

Найдем область сходимости данного ряда. Применяя признак д'Аламбера, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}(n+2)(n+3)}{(n+3)(n+4)(-1)^n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|-x| = |x| < 1$$

По признаку д'Аламбера ряд сходится при $x \in (-1, 1)$. Дополнительно исследуем сходимость в точках ± 1. Применим признак Гаусса

$$\left|\frac{u_{n+1}(\pm 1)}{u_n(\pm 1)}\right| = \frac{n+2}{n+4} = 1 - \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

В признаке Гаусса $\mu = -2 < -1$, следовательно при $x = \pm 1$ ряд сходится.
Область **сходимости** – промежуток $[-1, 1]$.
Ряд сходится к функции $f(x)$. По теореме о дифференцировании степенного ряда на промежутке $(-1, 1)$ этот ряд можно родиффиренцировать почленно. Следовательно,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n+2)\cdot(n+3)} = 0 - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{2x}{4\cdot 5} - \frac{3x^2}{5\cdot 6} + ... + \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n+2)\cdot(n+3)} + ...$$