

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №5

"Стабилизация перевернутого маятника"

по дисциплине "Введение в профессиональную деятельность. Проектная
деятельность."

Выполнили: студенты гр. R3138

Иванов А. К.
Нечаева А. А.
Велюго К. О.
Воротников А. А.

Преподаватель: *Перегудин А.А.*

Санкт-Петербург, 2023

1 Цель работы

Стабилизация перевернутого маятника с помощью выведенного закона управления.

2 Теоретическая часть

В данной работе все построения выполняются для простой модели перевернутого маятника на тележке, движение которого осуществляется в плоскости.

2.1 Вывод формул и построение математической модели

Основные величины, необходимые для построения математической модели перевернутого маятника (Рисунок 1):

Θ – угловое отклонение маятника от положения равновесия;

l – длина маятника;

m_1 – масса груза (считаем, что вся масса маятника сосредоточена на его конце);

m_2 – масса тележки, на которой закреплен маятник;

F – сила, действующая на тележку.

Второй закон Ньютона в случае вращательного движения запишется:

$$\ddot{\Theta} I = M, \quad (1)$$

где $\ddot{\Theta}$ – угловое ускорение маятника, I – момент инерции маятника, M – момент вращающей силы.

Момент инерции для стержня, вращающегося вокруг одного из концов:

$$I = m_1 \cdot l^2, \quad (2)$$

m_1 – масса груза, l – длина стержня.

Вращающая сила, действующая на маятник – сила тяжести, поэтому момент силы перепишется в следующем виде:

$$M = m_1 g l \sin \Theta \quad (3)$$

Далее подставляем выражения для момента инерции (2) и момента силы (3) в уравнение (1):

$$\ddot{\Theta} m_1 \cdot l^2 = m_1 g l \sin \Theta \rightarrow \ddot{\Theta} = \frac{g}{l} \sin \Theta \quad (4)$$

Далее запишем кинетическую энергию системы "тележка-маятник":

$$E_{sum} = E_{pen} + E_{cart} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{(m_2 + m_1) v_2^2}{2}, \quad (5)$$

где E_{pen} – кинетическая энергия маятника, E_{cart} – кинетическая энергия тележки, v_1 – скорость груза, v_2 – скорость тележки.

Запишем выражения для соответствующих скоростей:

скорость тележки – изменение ее координаты по времени

$$v_2 = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad (6)$$

скорость груза – изменение его координат по времени:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\left(\frac{d(x + l \sin \Theta)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dl \cos \Theta}{dt}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(\dot{x} + \dot{\Theta} l \cos \Theta)^2 + (-\dot{\Theta} l \sin \Theta)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\Theta} l \cos \Theta + \dot{\Theta}^2 l^2} \end{aligned} \quad (7)$$

В итоге получаем выражение для полной кинетической энергии системы:

$$E_{sum} = E_{pen} + E_{cart} = \frac{m_1(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\Theta} l \cos \Theta + \dot{\Theta}^2 l^2)}{2} + \frac{(m_2 + m_1)\dot{x}^2}{2} \quad (8)$$

Далее выразим силу, действующую на систему:

$$F = (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_1 l \ddot{\Theta} \cos \Theta - m_1 l \dot{\Theta}^2 \sin \Theta \quad (9)$$

И, воспользовавшись уравнениями Лагранжа, получим систему:

$$\begin{cases} F = (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_1 l \ddot{\Theta} \cos \Theta - m_1 l \dot{\Theta}^2 \sin \Theta, \\ l \ddot{\Theta} + g \sin \Theta = \ddot{x} \cos \Theta \end{cases} \quad (10)$$

Проведем математические преобразования:

$$l \ddot{\Theta} + g \sin \Theta = \ddot{x} \cos \Theta \rightarrow \ddot{x} = \frac{l \ddot{\Theta} + g \sin \Theta}{\cos \Theta} \quad (11)$$

$$F = (m_1 + m_2) \frac{l \ddot{\Theta} + g \sin \Theta}{\cos \Theta} + m_1 l \ddot{\Theta} \cos \Theta - m_1 l \dot{\Theta}^2 \sin \Theta \quad (12)$$

Выразим угловое ускорение:

$$\ddot{\Theta} = \frac{\left(F - \frac{(m_1 + m_2)g \sin \Theta}{\cos \Theta} + m_1 l \dot{\Theta}^2 \sin \Theta\right) \cos \Theta}{l(m_1 + m_2 + m_1 \cos^2 \Theta)} \quad (13)$$

3 Практическая часть

3.1 Управляющий закон

Для стабилизации маятника использовался ПИД-регулятор.

3.2 Построение схемы в Simulink

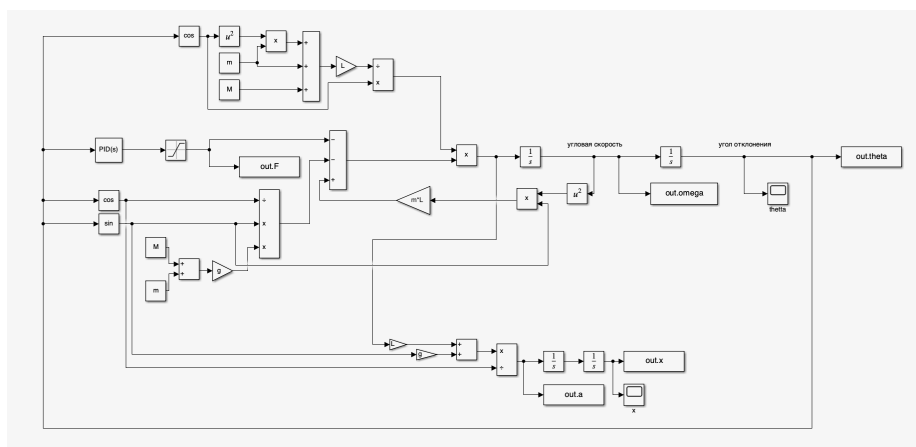


Рис. 1. Схема

Для моделирования процесса стабилизации маятника использовалась схема, приведенная на рисунке 1.

3.3 Результаты

В результате были получены графики (рисунки 2 - 9) зависимости угла отклонения маятника от вертикали ($\Theta(t)$) и координаты центра тележки ($x(t)$) для различных наборов коэффициентов ПИД-регулятора.

3.4 Вывод

В процессе выполнения лабораторной работы была выведена математическая модель перевернутого маятника на основе уравнений механики,

синтезирован закон управления и проведен подбор параметров для стабилизации маятника. Наиболее оптимальными коэффициентами для стабилизации маятника в данной работе были выбраны $p = 20$, $i = 10$, $d = 0$ (Рисунок 6), где p – коэффициент пропорциональности, i – коэффициент перед интегральной составляющей, d – перед дифференциальной составляющей. Об успешной стабилизации говорит отсутствие видимой на графике установившейся ошибки, относительно небольшое перерегулирование и короткое время стабилизации процесса.

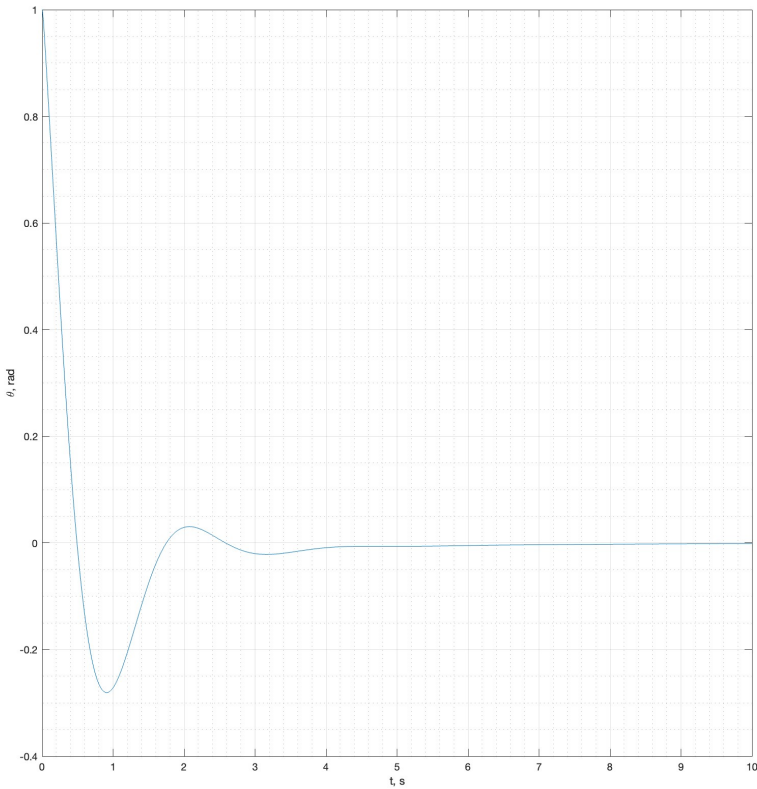


Рис. 2. $\Theta(t)$ при $p = 20$, $i = 10$, $d = 10$

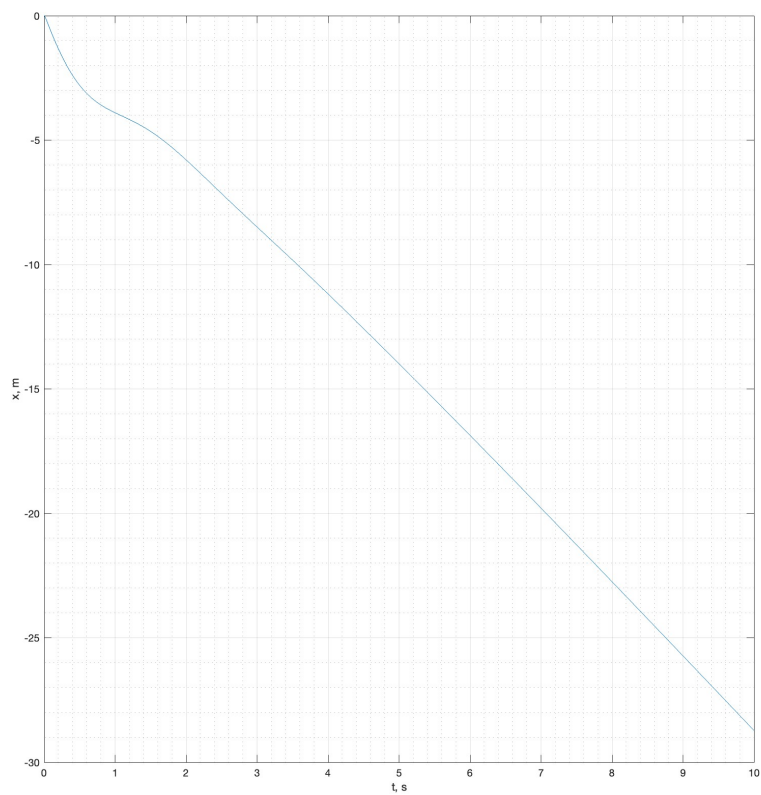


Рис. 3. $x(t)$ при $p = 20$, $i = 10$, $d = 10$

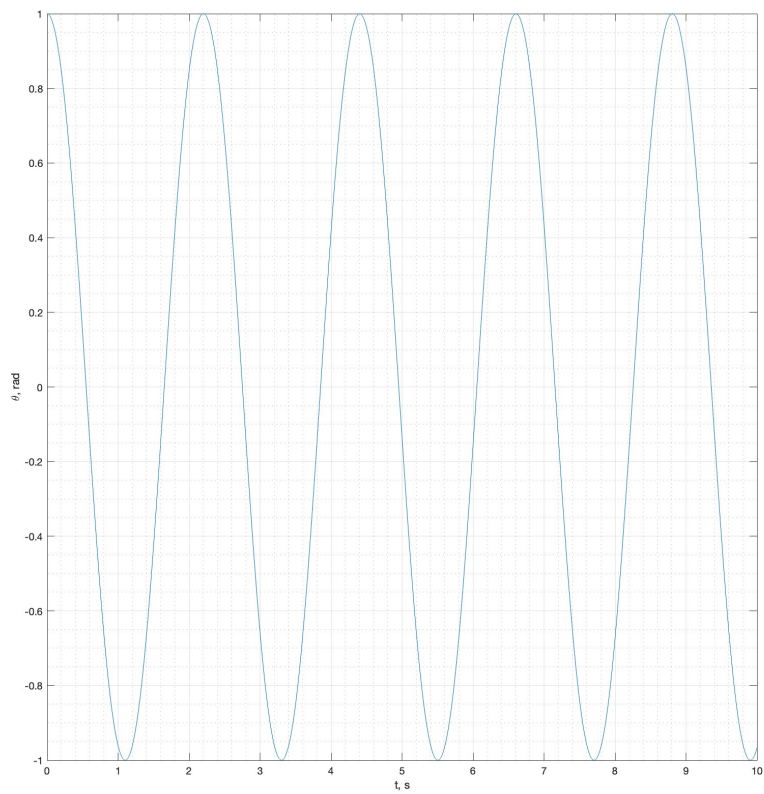


Рис. 4. $\Theta(t)$ при $p = 20$, $i = 0$, $d = 0$

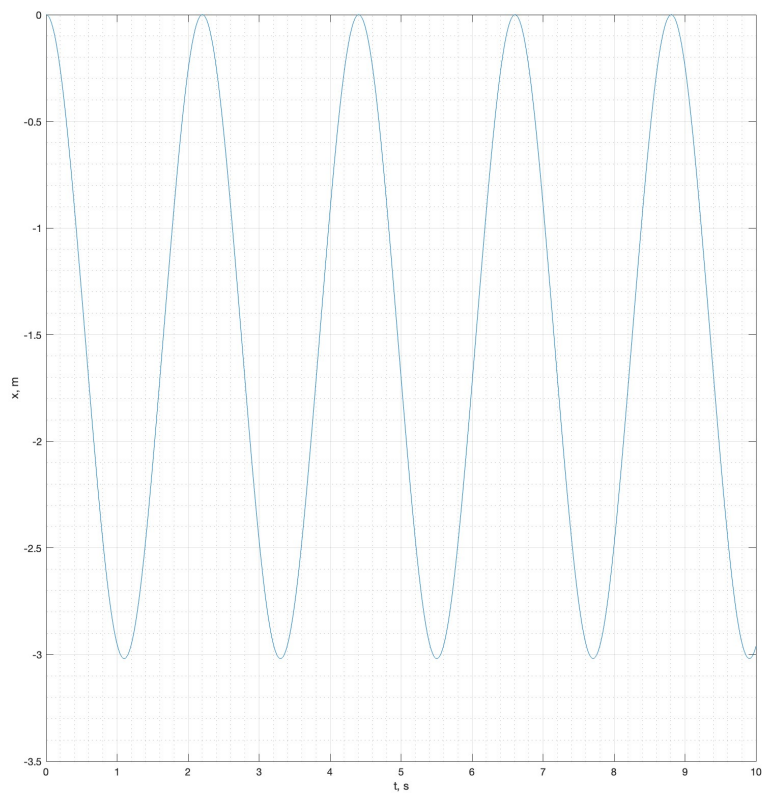


Рис. 5. $x(t)$ при $p = 20$, $i = 0$, $d = 0$

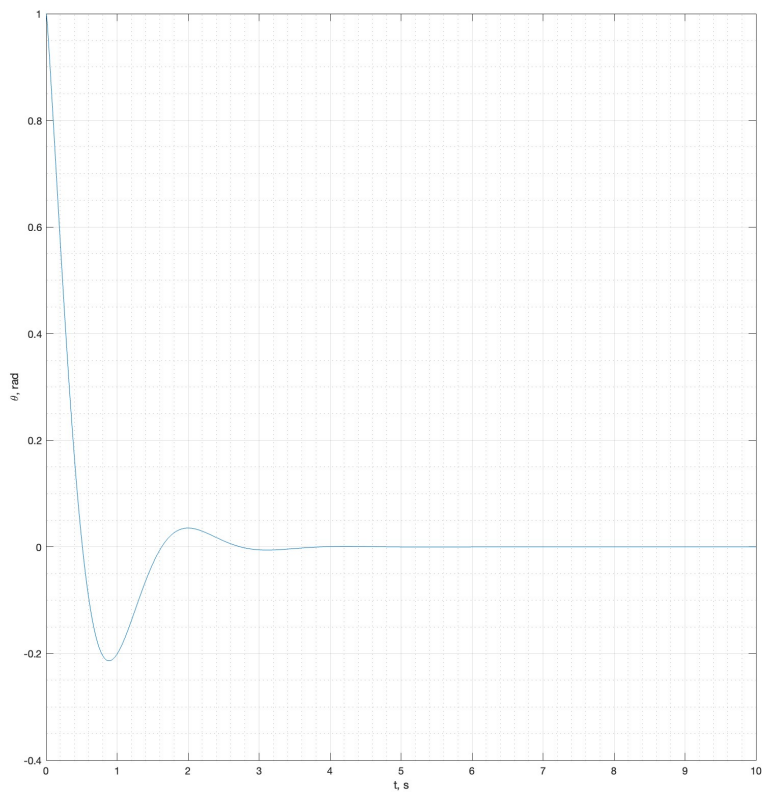


Рис. 6. $\Theta(t)$ при $p = 20$, $i = 10$, $d = 0$

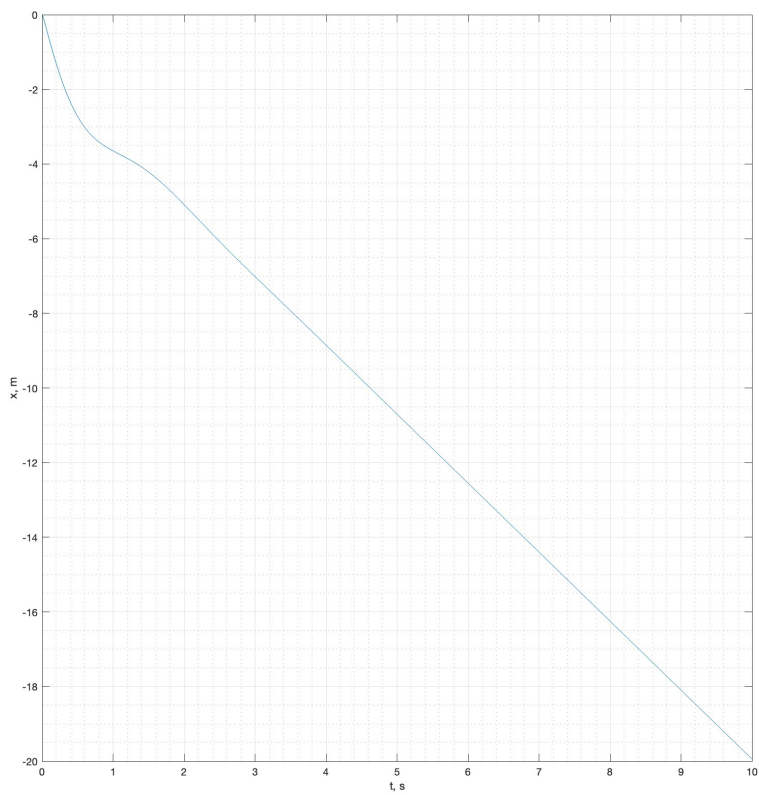


Рис. 7. $x(t)$ при $p = 20$, $i = 10$, $d = 0$

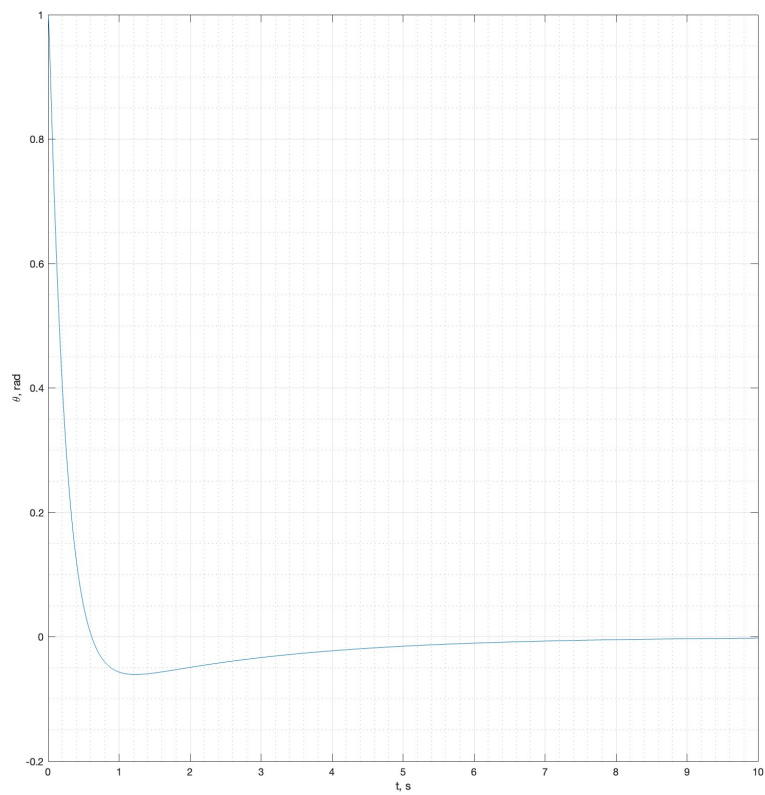


Рис. 8. $\Theta(t)$ при $p = 20$, $i = 10$, $d = 20$

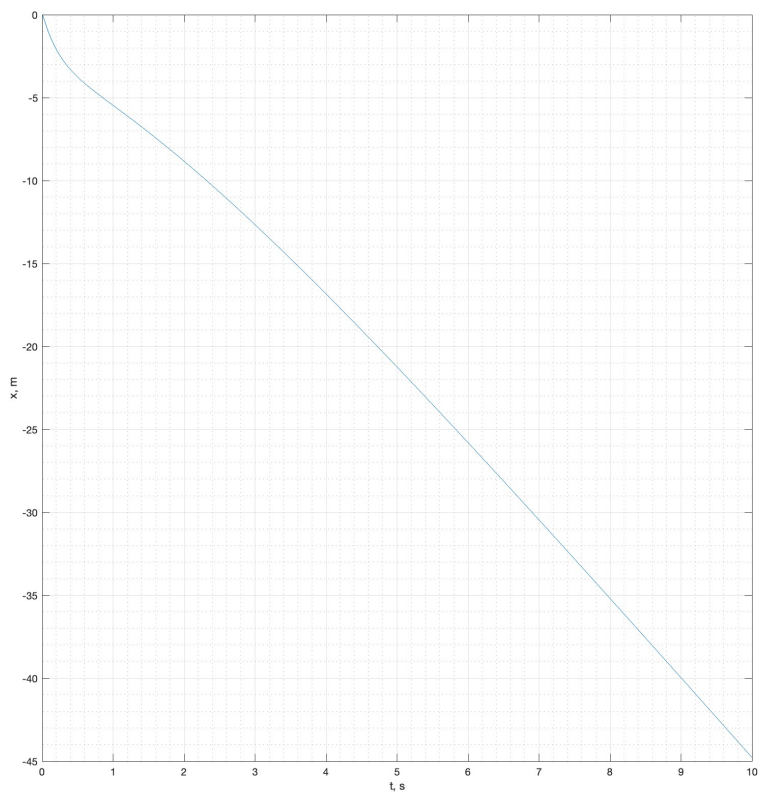


Рис. 9. $x(t)$ при $p = 20$, $i = 10$, $d = 20$