

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ  
по производственной (научно-исследовательской) практике:

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ  
БИОЛОГИЧЕСКИХ НЕЙРОНОВ

Студент:  
*Группа № R3338*

*A.A. Нечаева*

Руководитель практики:  
*ассистент факультета СУиР, к. ф.-м. н.*

*Д.М. Семенов*

Санкт-Петербург 2025

# СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ .....	3
1.1 Цель работы .....	3
1.2 Задачи .....	3
2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БИОЛОГИЧЕСКОГО НЕЙРОНА..	4
2.1 Модель Ижикевича .....	4
2.2 Виды нейронов.....	5
2.2.1 Регулярно-спайковые (Regular spiking).....	5
2.2.2 Быстро-спайковые (Fast spiking) .....	5
2.2.3 Низкопороговые спайковые (Low-threshold spiking).....	6
2.2.4 Резиллерно-спаковые (Resonator) .....	6
2.2.5 Интринсивно-всплесковые (Intrinsically bursting).....	6
2.2.6 Частотные (Chattering) .....	6
3 МОДЕЛИРОВАНИЕ. ....	7
3.1 Визуализация.....	7
3.2 Листинг кода .....	16
4 ВЫВОД .....	19
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	20

# **1 ВВЕДЕНИЕ**

## **1.1 Цель работы**

Выполнить математическое моделирование динамики выбранной модели биологического нейрона.

## **1.2 Задачи**

1. Изучить характеристики электрической активности биологических нейронов
2. Выбрать модель биологического нейрона для выполнения математического моделирования
3. Изучить параметры модели и их связь с электрическими процессами в биологических нейронах
4. Провести численное моделирование выбранной модели при различных значениях параметров

## 2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БИОЛОГИЧЕСКОГО НЕЙРОНА

### 2.1 Модель Ижикевича

Нейронная модель Ижикевича описывает изменение электрического потенциала в мембране нейрона в зависимости от тока, протекающего через ионные каналы мембранны. Изменения электрического потенциала представлены следующими дифференциальными уравнениями

$$\frac{dv}{dt} = 0.04v^2 + 5v + 140 - u + I, \quad (1)$$

$$\frac{du}{dt} = a(bv - u), \quad (2)$$

вспомогательный сброс

$$\text{если } v \geq 30 \text{ mV, то } \begin{cases} v \leftarrow c \\ u \leftarrow u + d, \end{cases} \quad (3)$$

где  $v$  – мембранный потенциал нейрона,  $u$  – вспомогательная переменная, которая восстанавливает мембранный потенциал: отвечает за активацию ионных токов  $K^+$  и инактивацию ионных токов  $Na^+$  и обеспечивает отрицательную обратную связь с  $v$  [1].

Введем следующий важный термин. Спайк (или потенциал действия) – это кратковременное ( 1-2 мс) резкое увеличение мембранныго потенциала нейрона ( $v$ ), которое возникает при достижении порогового значения и служит для передачи информации между нейронами. В модели Ижикевича спайки формализованы через пороговый сброс переменных  $v$  и  $u$ .

Приведем описание для каждого из параметров модели.

Параметр  $a$  описывает временной масштаб переменной восстановления  $u$ . Чем меньше значение  $a$ , тем медленнее восстановление. Значение по умолчанию  $a = 0.02$  [1].

Параметр  $b$  описывает чувствительность переменной восстановления  $u$  к подпороговым колебаниям мембранныго потенциала  $v$ . Большие значения связывают  $v$  и  $u$  сильнее, что приводит к возможным подпороговым колебаниям и низкопороговой динамике спайков. Значение по умолчанию  $b = 0.2$  [1].

Параметр  $c$  описывает значение сброса мембранныго потенциала  $v$  после скачка, вызванного быстрыми высокопороговыми проводимостями  $K^+$ . Значение по умолчанию  $c = -65$  мВ [1].

Параметр  $d$  описывает сброс переменной восстановления  $u$  после скачка, вызванный медленными высокопороговыми проводимостями  $Na^+$  и  $K^+$ . Значение по умолчанию  $d = 2$  [1].

С помощью вариации параметров  $a, b, c, d$  можно добиться моделирования различных типов нейронов.

## 2.2 Виды нейронов

Рассмотрим модели нейронов, которые можно получить при определенных значениях параметров.

### 2.2.1 Регулярно-спайковые (Regular spiking)

Стандартные возбуждающиеся нейроны (например, пирамидные нейроны коры)

Параметры модели Ижикевича:  $a = 0.02, b = 0.2, c = -65, d = 8$ .

Начальные условия:  $v_0 = -65, u_0 = b \cdot v_0 = -13$ .

Ток:  $I \in [5; 15]$  нА.

При постоянном стимуле генерируют регулярные спайки с адаптацией частоты.

### 2.2.2 Быстро-спайковые (Fast spiking)

Быстрые ГАМК-ergicические интернейроны (например, корзинчатые клетки)

Параметры модели Ижикевича:  $a = 0.1, b = 0.2, c = -65, d = 2$ .

Начальные условия:  $v_0 = -70, u_0 = b \cdot v_0 = -14$ .

Ток:  $I \in [10; 20]$  нА.

Высокочастотные спайки без адаптации.

### **2.2.3 Низкопороговые спайковые (Low-threshold spiking)**

Низкопороговые интернейроны (например, соматостатинположительные).

Параметры модели Ижикевича:  $a = 0.02$ ,  $b = 0.25$ ,  $c = -65$ ,  $d = 2$ .

Начальные условия:  $v_0 = -70$ ,  $u_0 = b \cdot v_0 = -17.5$ .

Ток:  $I \in [5; 10]$  нА.

задержка перед первым спайком, затем всплеск активности.

### **2.2.4 Резиллерно-спаковые (Resonator)**

Нейроны с резонансными свойствами (например, таламические релейные нейроны)

Параметры модели Ижикевича:  $a = 0.1$ ,  $b = 0.26$ ,  $c = -65$ ,  $d = 2$ .

Начальные условия:  $v_0 = -65$ ,  $u_0 = b \cdot v_0 = -16.9$ .

Ток:  $I \in [5; 15]$  нА.

Генерация спайков только на определенных частотах стимула.

### **2.2.5 Интринсивно-всплесковые (Intrinsically bursting)**

Нейроны с аутохтонными всплесками (например, в таламусе).

Параметры модели Ижикевича:  $a = 0.02$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = -55$ ,  $d = 4$ .

Начальные условия:  $v_0 = -60$ ,  $u_0 = b \cdot v_0 = -12$ . Ток:  $I \in [5; 15]$ .

Автоматические пачки спайков даже без стимула.

### **2.2.6 Частотные (Chattering)**

Нейроны с хаотической динамикой.

Параметры модели Ижикевича:  $a = 0.02$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = -50$ ,  $d = 2$ .

Начальные условия:  $v_0 = -65$ ,  $u_0 = b \cdot v_0 = -13$ .

Ток:  $I \in [5; 10]$ .

Высокочастотные пачки спайков.

### 3 МОДЕЛИРОВАНИЕ

#### 3.1 Визуализация

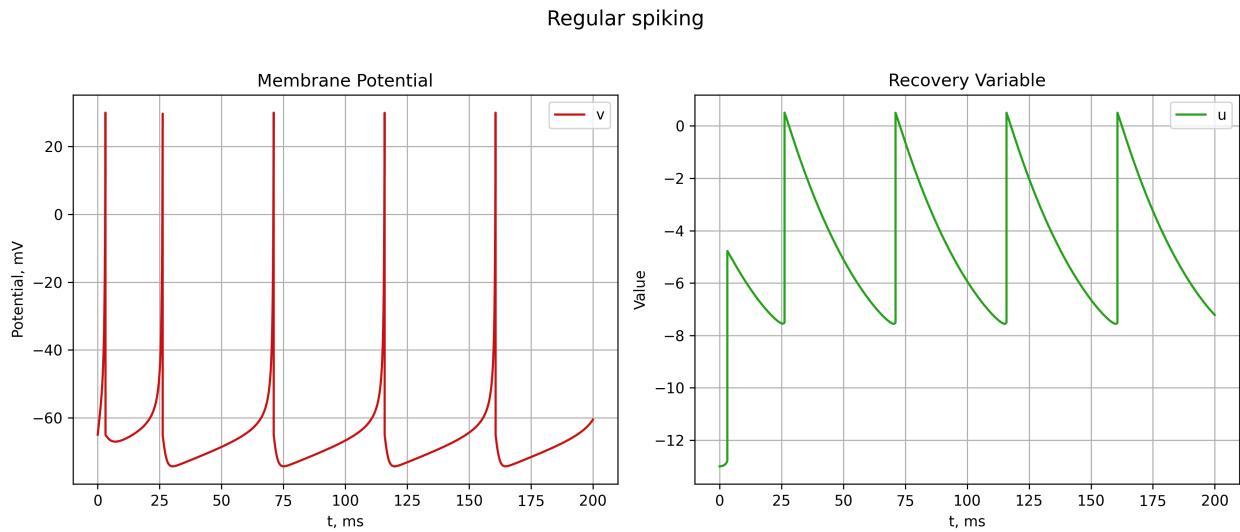


Рисунок 1 — Визуализация регулярно-спайкового нейрона при  $I = 10$  нА.

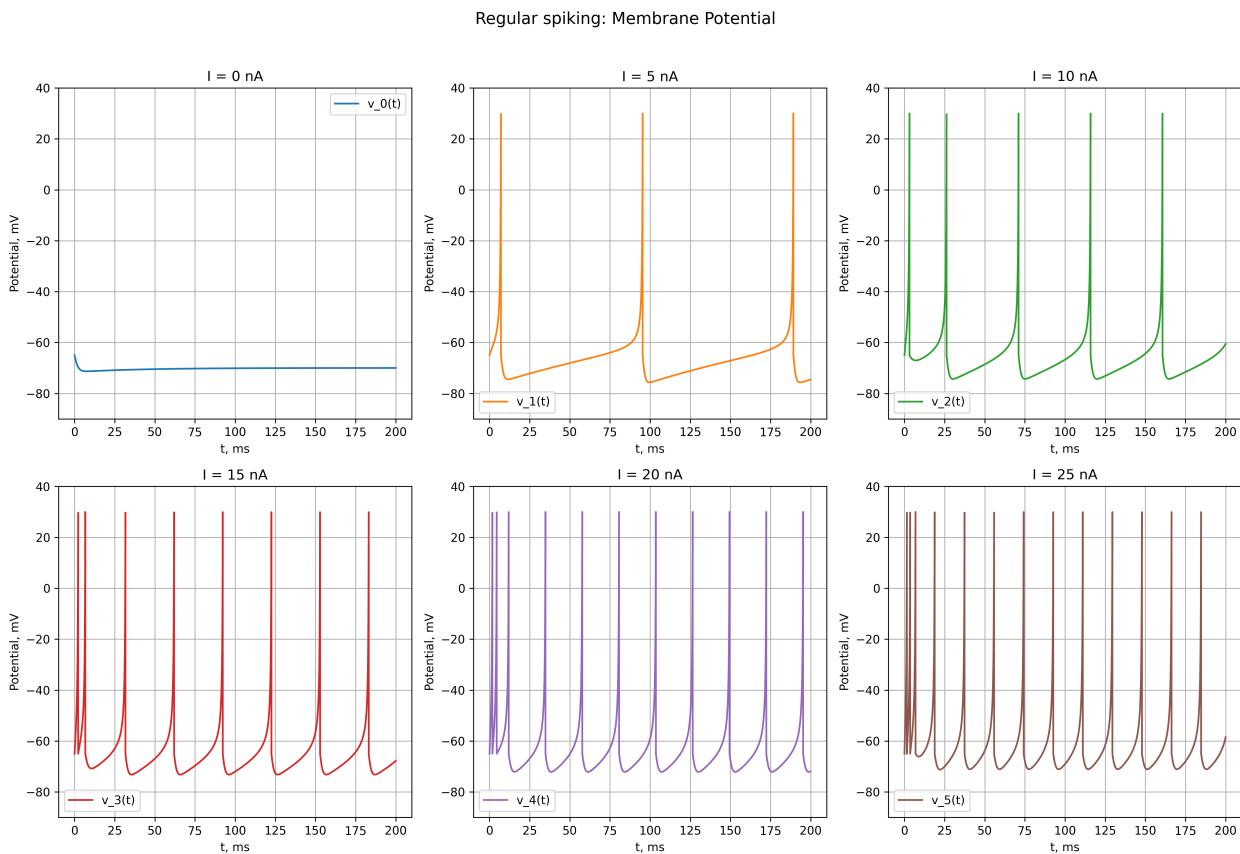


Рисунок 2 — Визуализация  $v(t)$  регулярно-спайкового нейрона для разных значений  $I$ .

Regular spiking: Recovery Variable

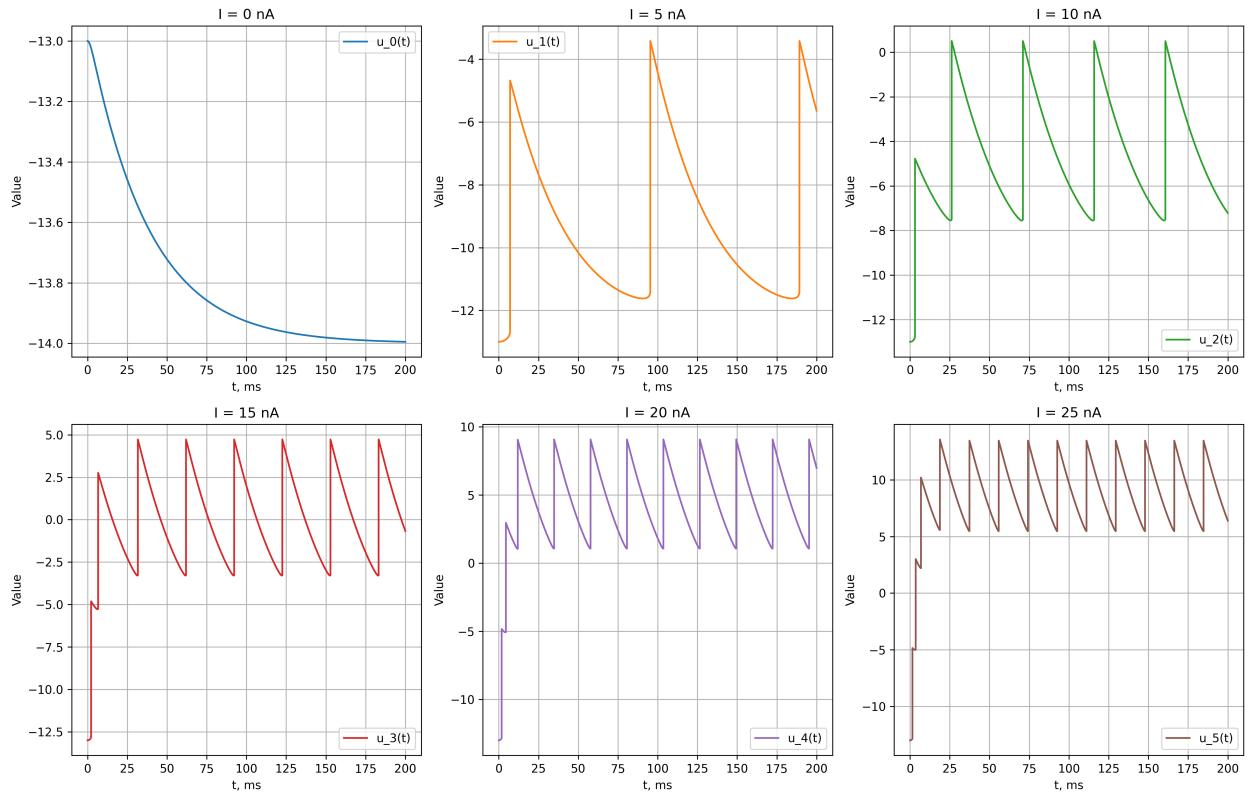


Рисунок 3 — Визуализация  $u(t)$  регулярно-спайкового нейрона для разных значений  $I$ .

Fast spiking

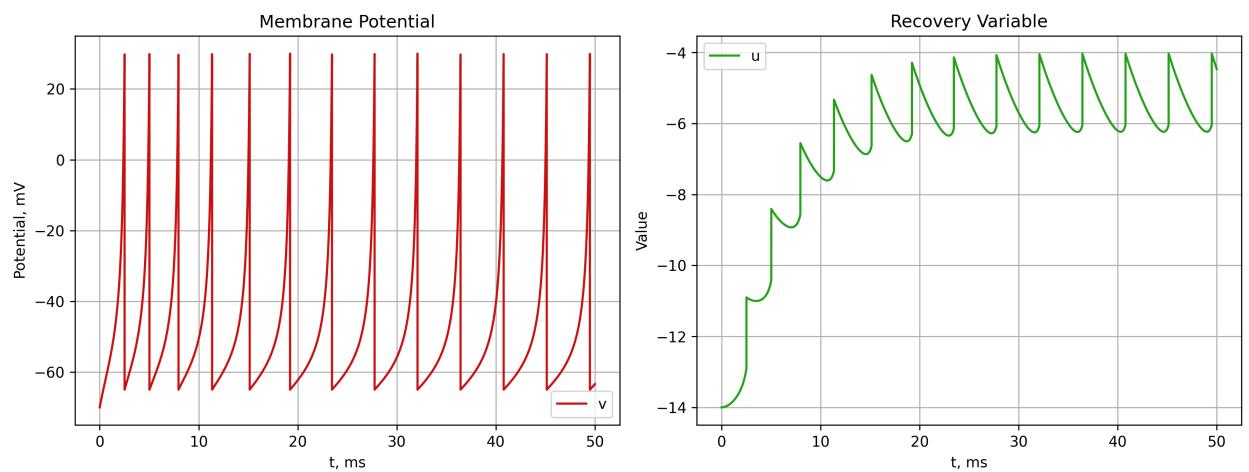


Рисунок 4 — Визуализация быстро-спайкового нейрона при  $I = 15 \text{ нА}$ .

Fast spiking: Membrane Potential

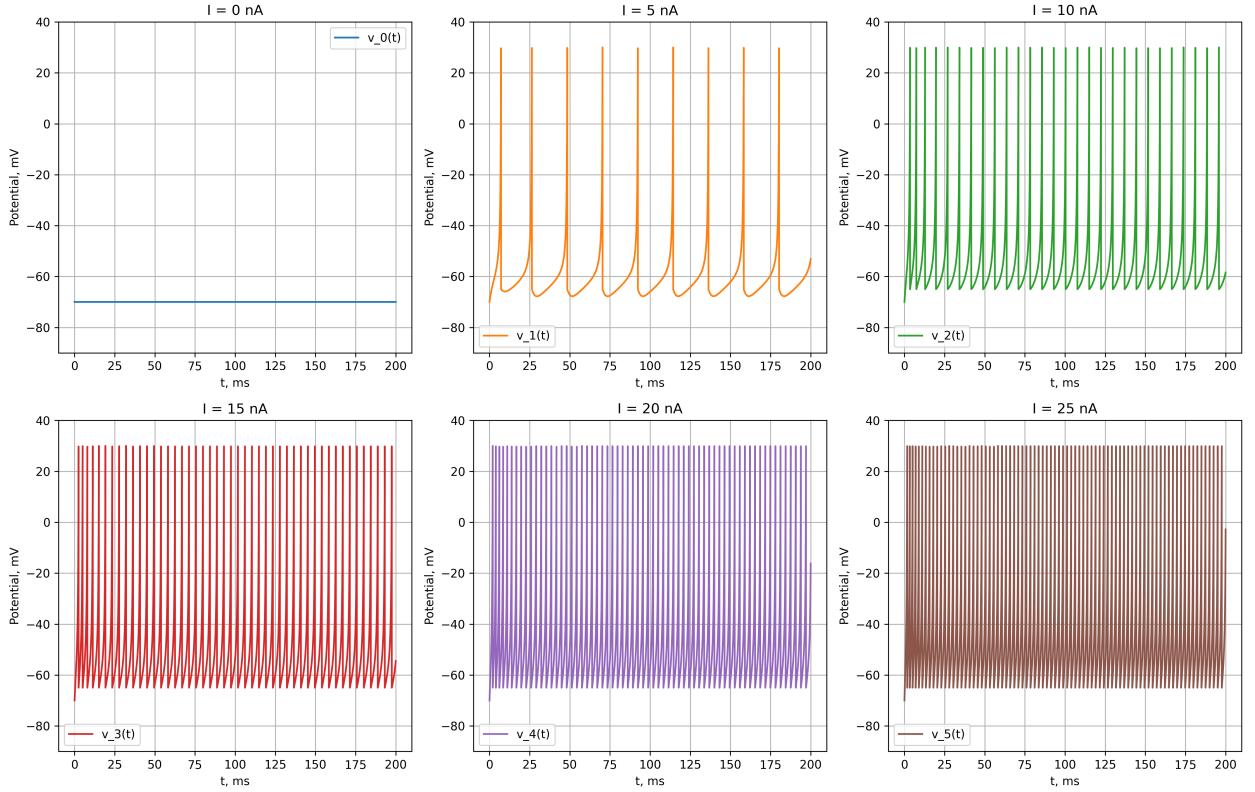


Рисунок 5 — Визуализация  $v(t)$  быстро-спайкового нейрона для разных значений  $I$ .

Fast spiking: Recovery Variable

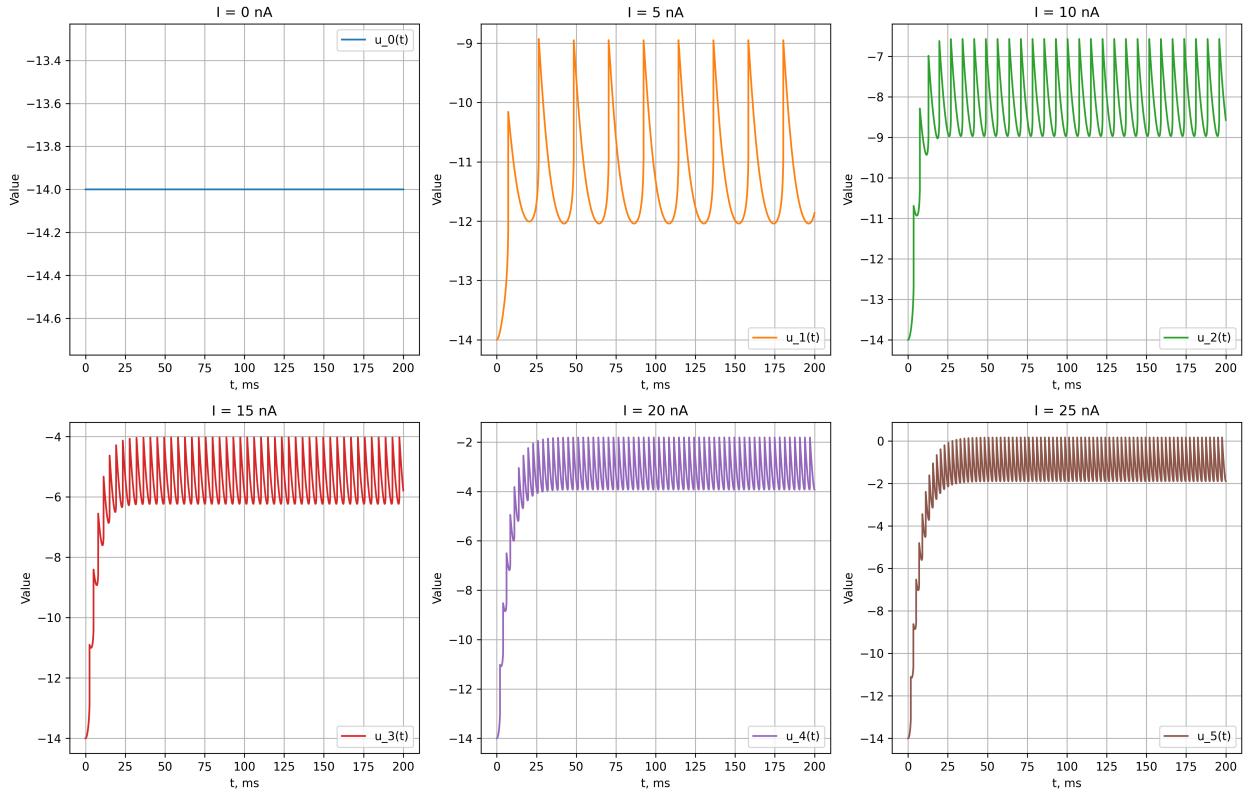


Рисунок 6 — Визуализация  $u(t)$  быстро-спайкового нейрона для разных значений  $I$ .

Low-threshold spiking

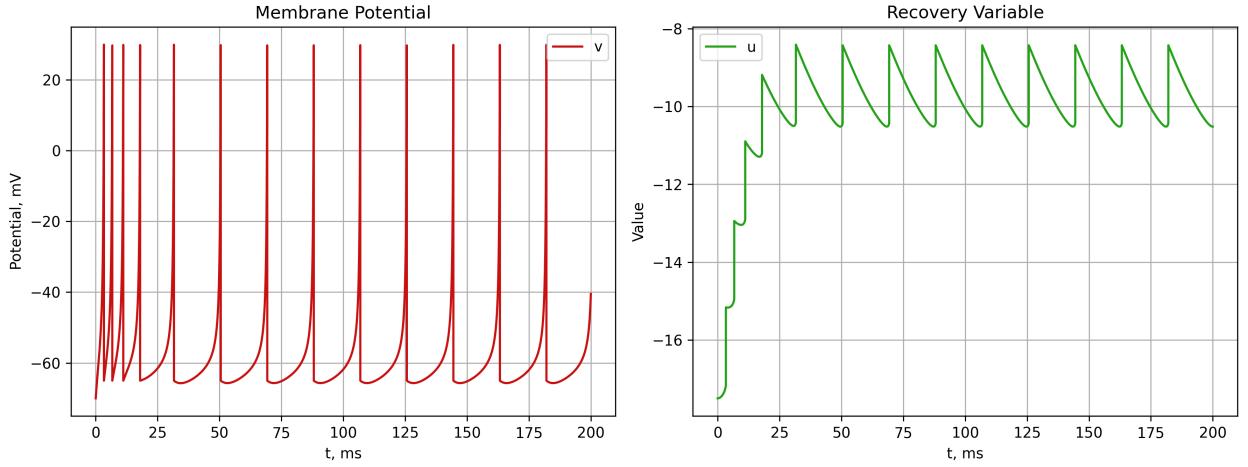


Рисунок 7 — Визуализация низкопорогового спайкового нейрона при  $I = 7 \text{ нA}$ .

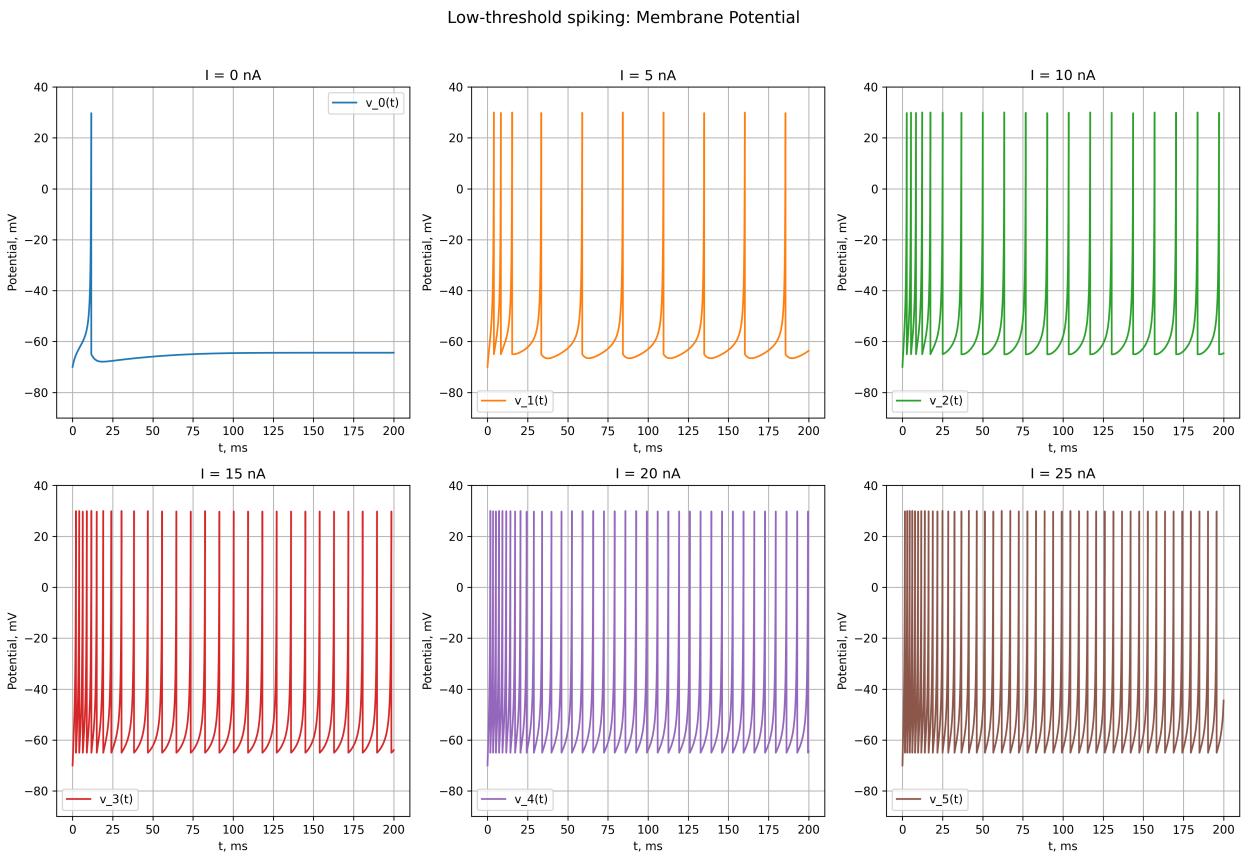


Рисунок 8 — Визуализация  $v(t)$  низкопорогового спайкового нейрона для разных значений  $I$ .

Low-threshold spiking: Recovery Variable

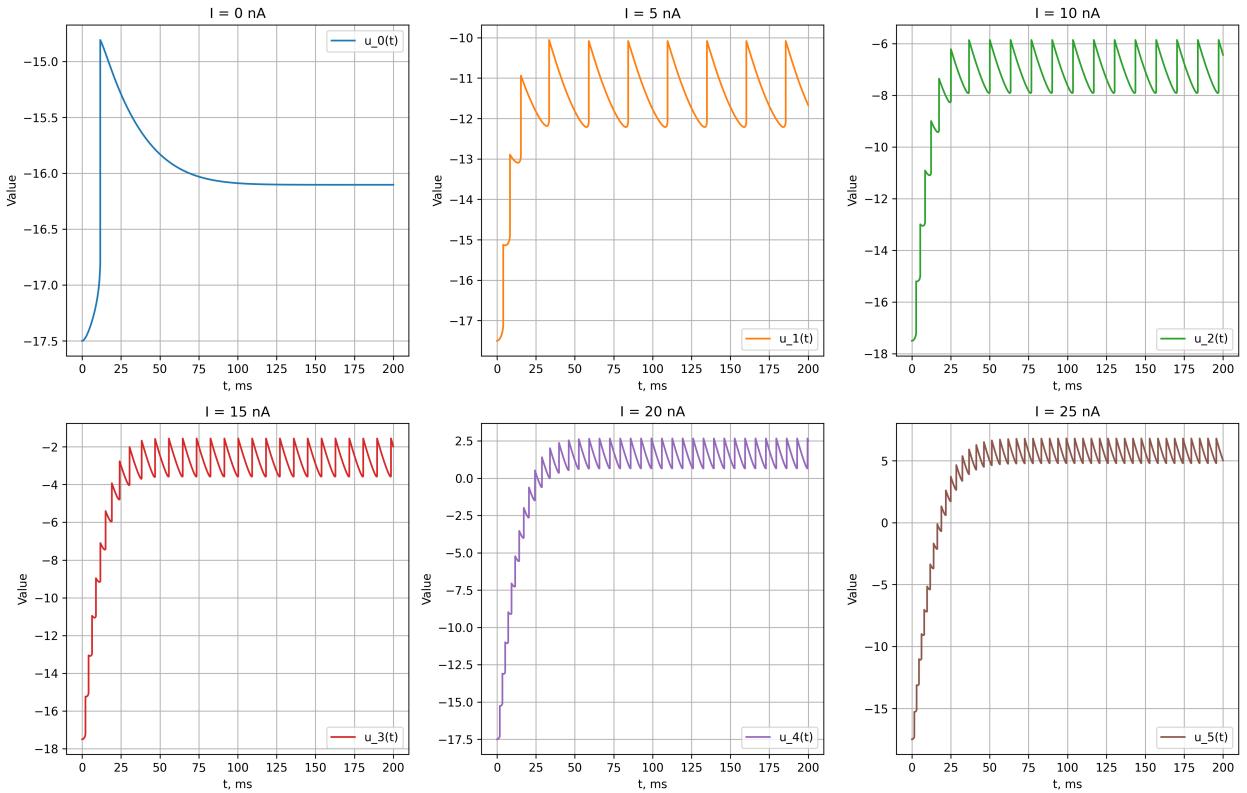


Рисунок 9 — Визуализация  $u(t)$  низкопорогового спайкового нейрона для разных значений  $I$ .

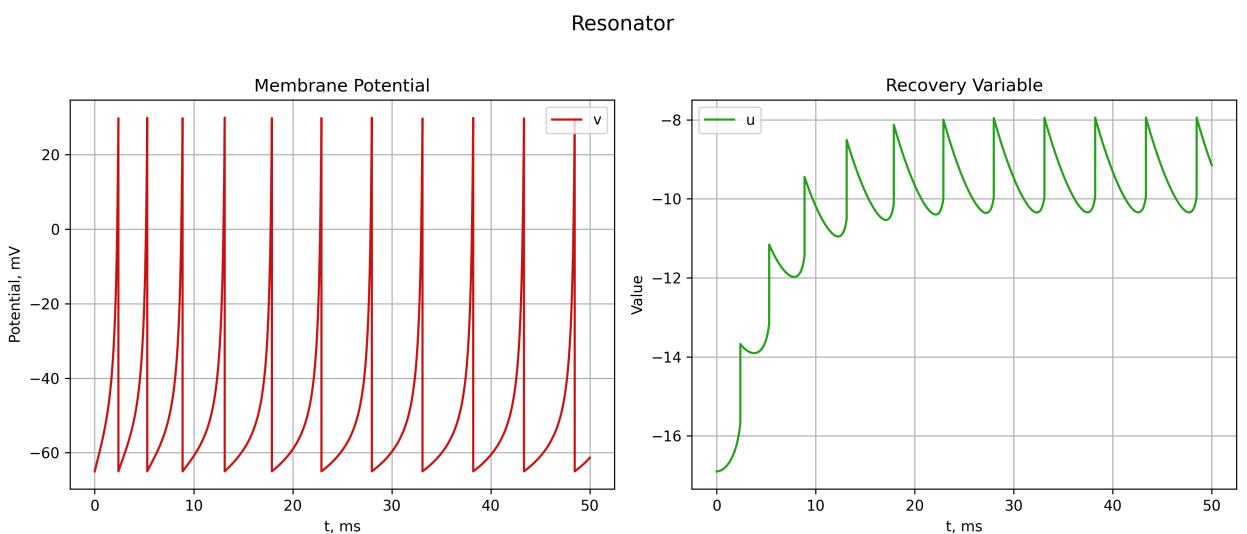


Рисунок 10 — Визуализация резиллерно-спайкового нейрона при  $I = 10$  нА.

### Resonator: Membrane Potential

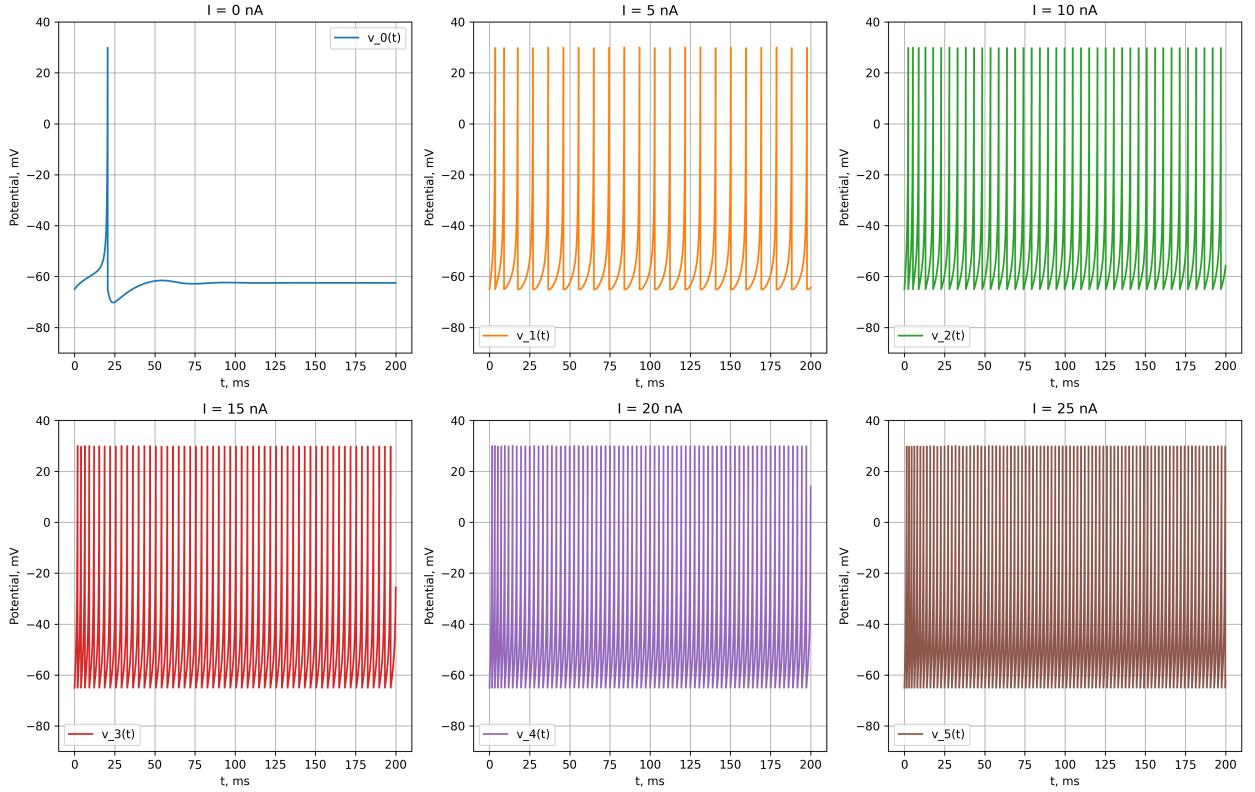


Рисунок 11 — Визуализация  $v(t)$  резиллерно-спайкового нейрона для разных значений  $I$ .

### Resonator: Recovery Variable

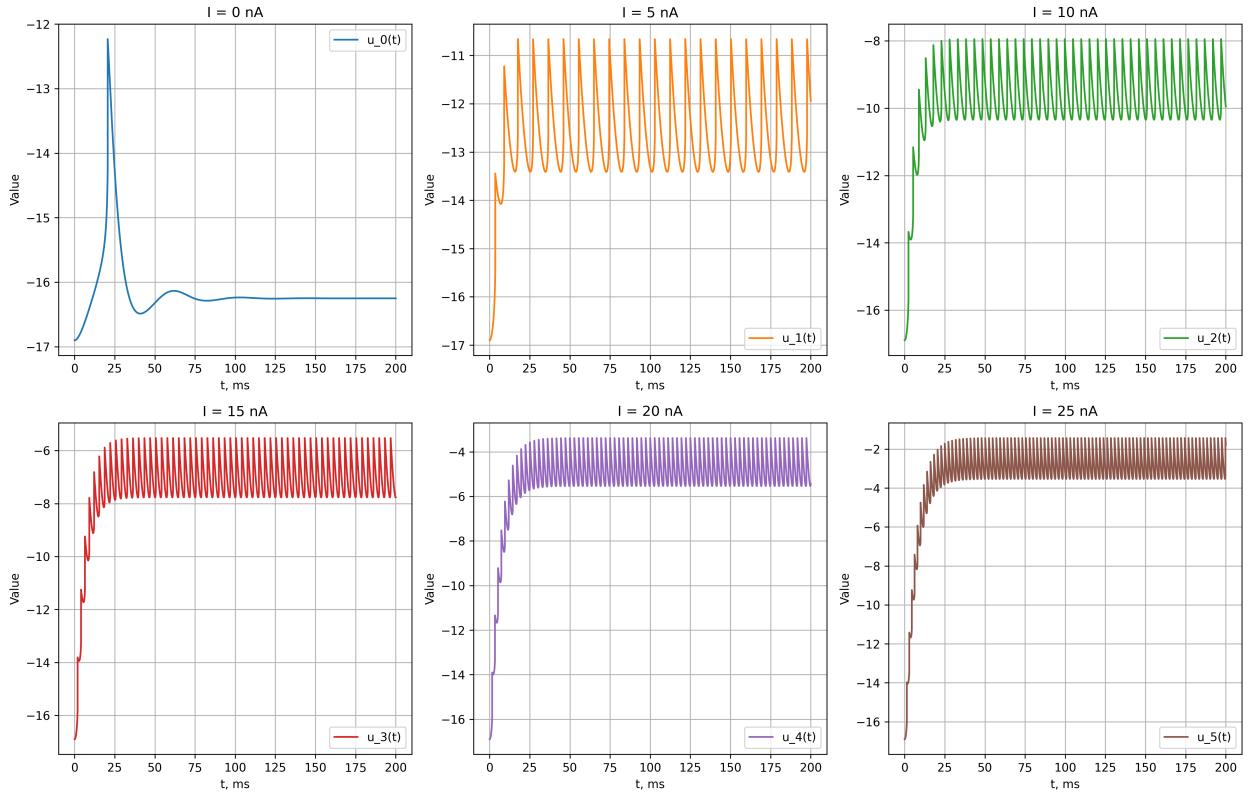


Рисунок 12 — Визуализация  $u(t)$  резиллерно-спайкового нейрона для разных значений  $I$ .

Intrinsically bursting

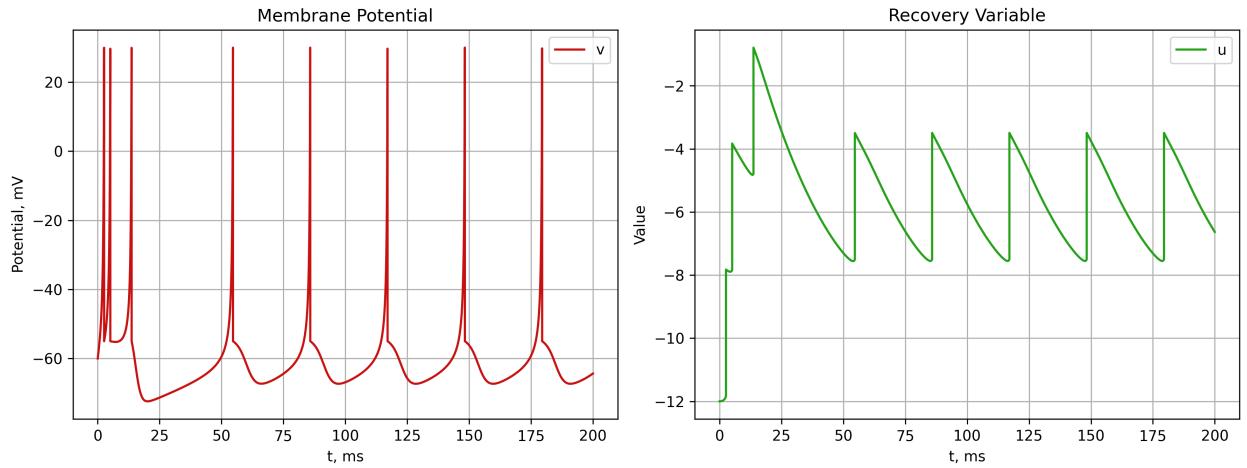


Рисунок 13 — Визуализация интринсивно-всплескового нейрона при  $I = 10$  нА.

Intrinsically bursting: Membrane Potential

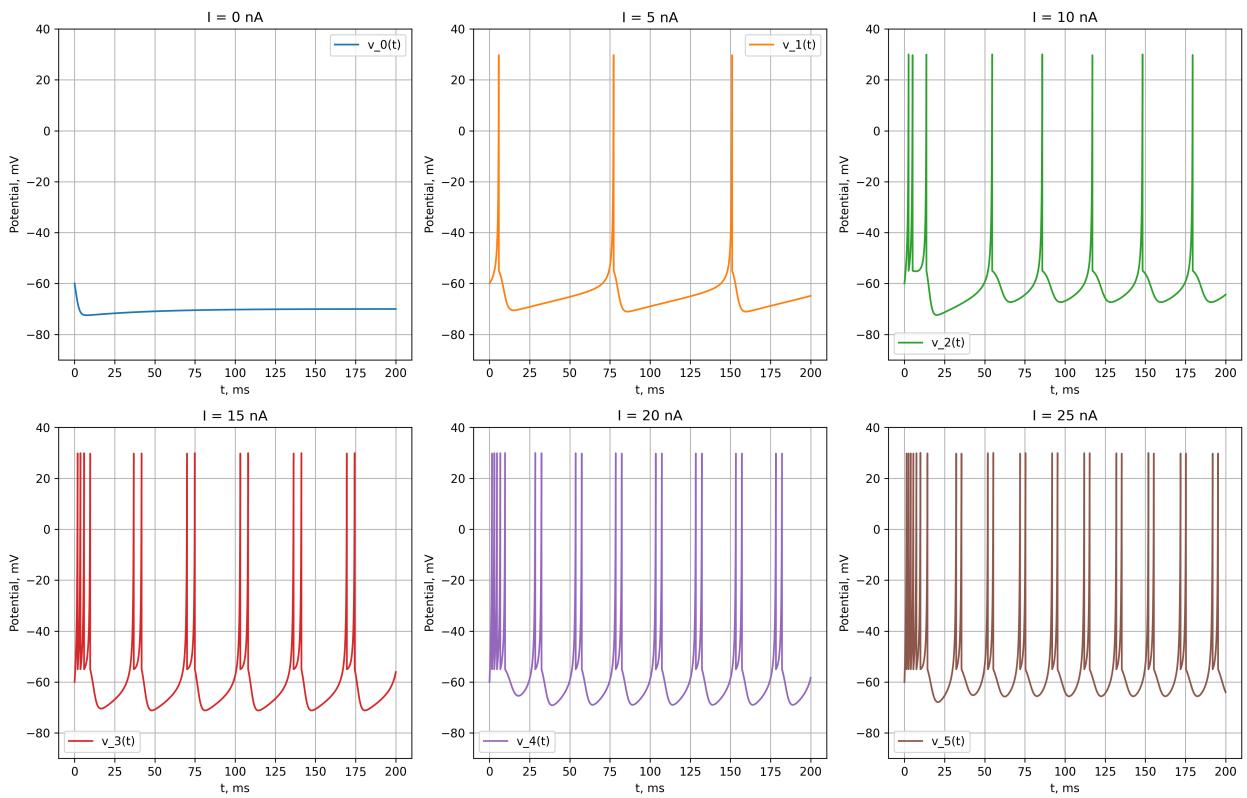


Рисунок 14 — Визуализация  $v(t)$  интринсивно-всплескового нейрона для разных значений  $I$ .

Intrinsically bursting: Recovery Variable

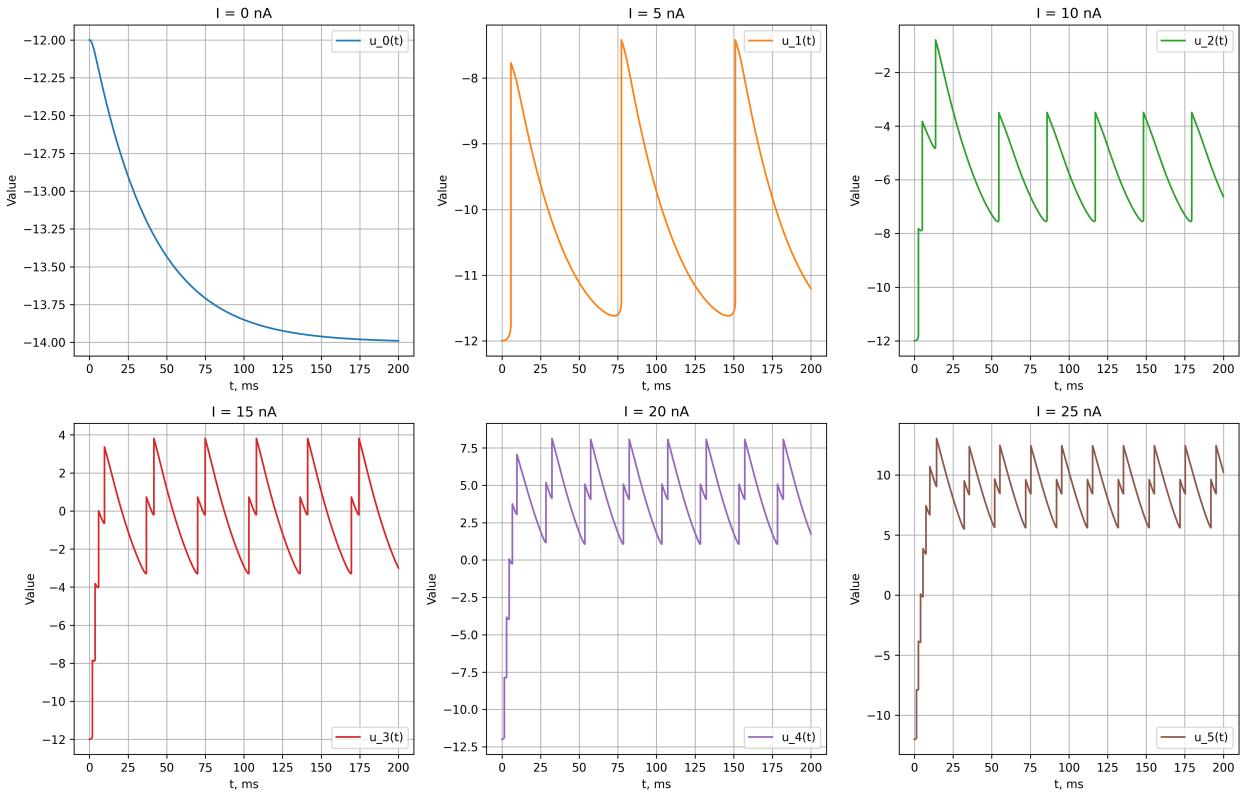


Рисунок 15 — Визуализация  $u(t)$  интринсивно-всплескового нейрона для разных значений  $I$ .

Chattering

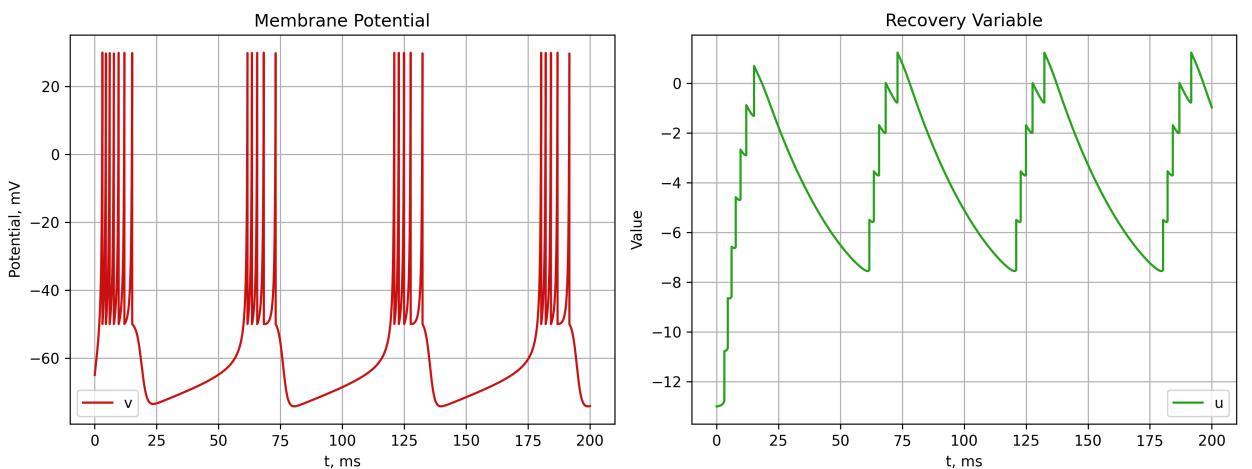


Рисунок 16 — Визуализация частотного нейрона при  $I = 10 \text{ нA}$ .

Chattering: Membrane Potential

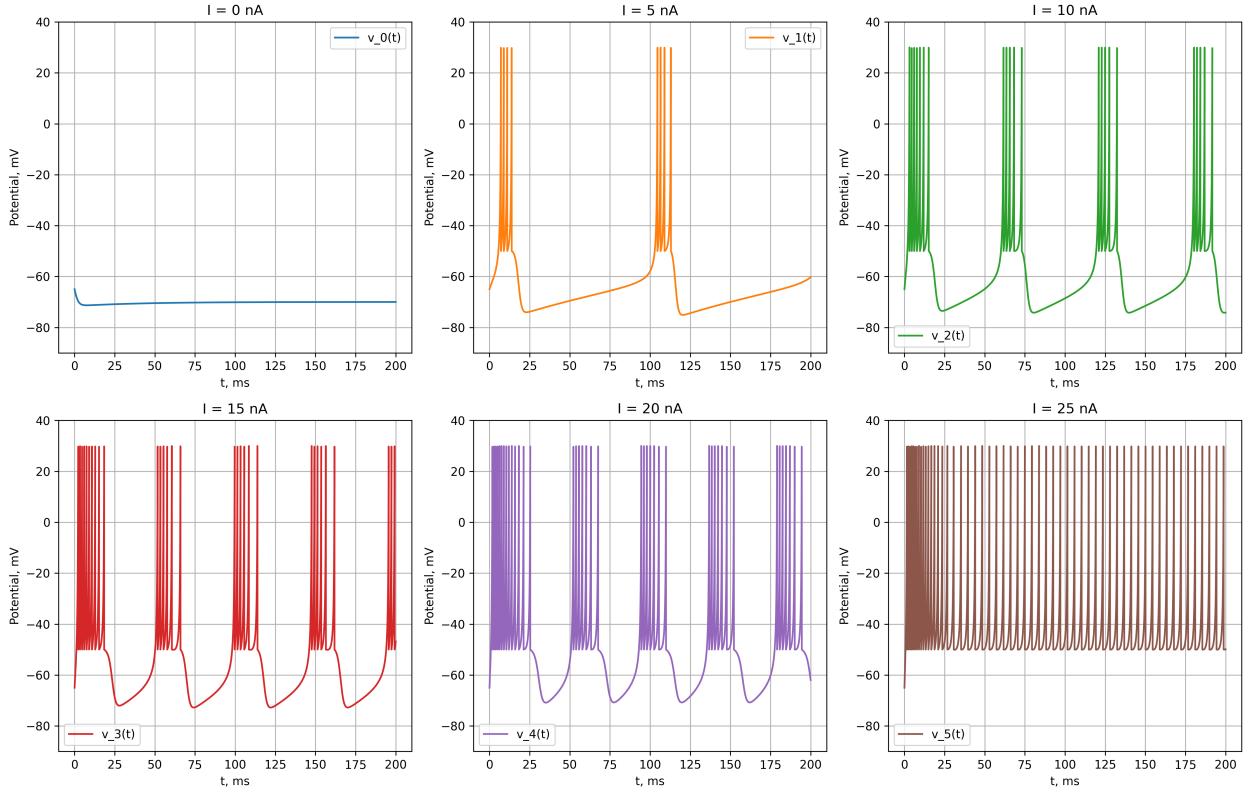


Рисунок 17 — Визуализация  $v(t)$  частотного нейрона для разных значений  $I$ .

Chattering: Recovery Variable

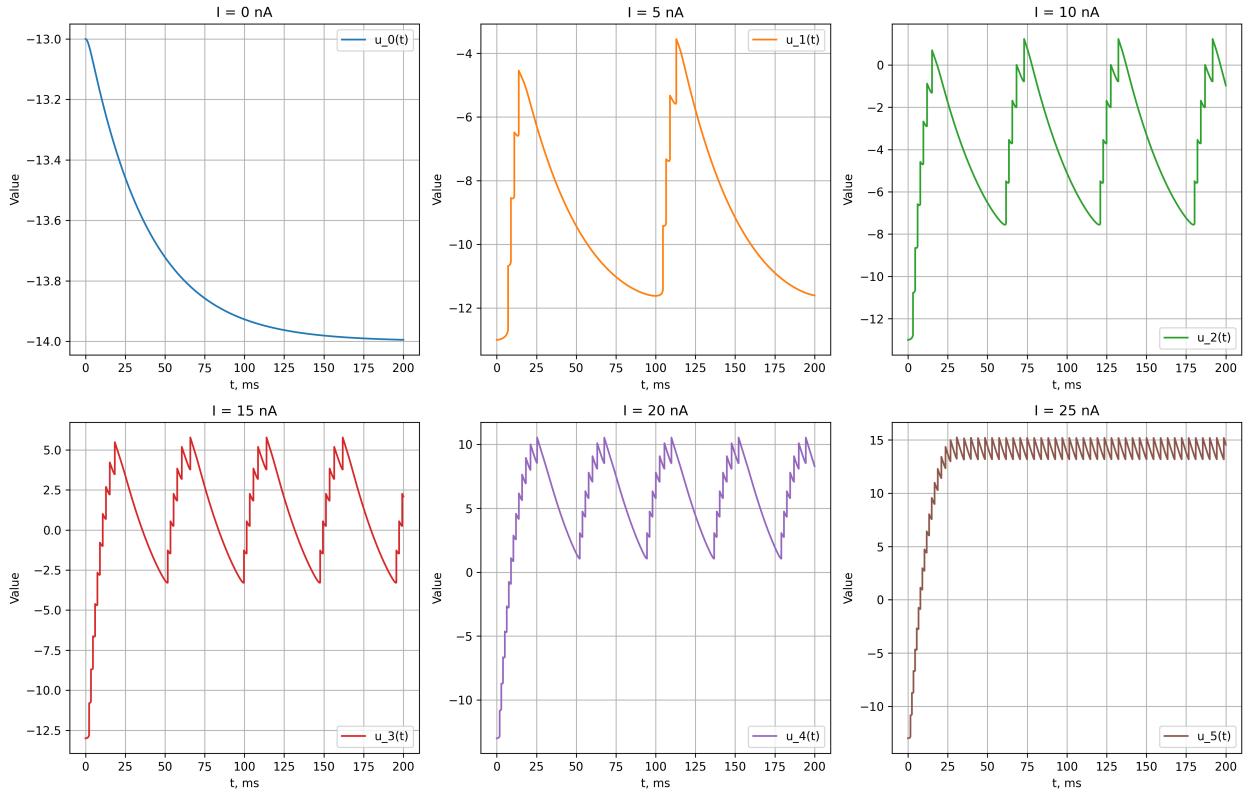


Рисунок 18 — Визуализация  $u(t)$  частотного нейрона для разных значений  $I$ .

## 3.2 Листинг кода

---

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import odeint
4 from typing import Tuple, Dict
5
6 # Regular spiking
7 regular_spiking_params = {
8     'a': 0.02,
9     'b': 0.2,
10    'c': -65,
11    'd': 8,
12    'v0': -65,
13    'I': 10,
14    'tt': 'Regular spiking'
15 }
16
17 # Fast spiking
18 fast_spiking_params = {
19     'a': 0.1,
20     'b': 0.2,
21     'c': -65,
22     'd': 2,
23     'v0': -70,
24     'I': 15,
25     'tt': 'Fast spiking'
26 }
27
28 # Low-threshold spiking
29 low_threshold_spiking_params = {
30     'a': 0.02,
31     'b': 0.25,
32     'c': -65,
33     'd': 2,
34     'v0': -70,
35     'I': 7,
36     'tt': 'Low-threshold spiking'
37 }
38
39 # Resonator
40 resonator_params = {
41     'a': 0.1,
42     'b': 0.26,
43     'c': -65,
44     'd': 2,
45     'v0': -65,
46     'I': 10,
47     'tt': 'Resonator'
48 }
49
50 # Intrinsically bursting
51 intrinsically_bursting_params = {
52     'a': 0.02,
53     'b': 0.2,
54     'c': -55,
55     'd': 4,
56     'v0': -60,
57     'I': 10,
58     'tt': 'Intrinsically bursting'
59 }
60
61 # Chattering
62 chattering_params = {
63     'a': 0.02,
64     'b': 0.2,
```

```

65     'c': -50,
66     'd': 2,
67     'v0': -65,
68     'I': 10,
69     'tt': 'Chattering'
70 }
71
72 # Izhikevich model
73 def izhikevich_model(state, t, params):
74     v, u = state
75     a, b, I = params['a'], params['b'], params['I']
76
77     dvdt = 0.04 * v**2 + 5 * v + 140 - u + I
78     dudt = a * (b * v - u)
79     return [dvdt, dudt]
80
81
82 def simulate_izhikevich(params, t_max=200, dt=0.001):
83
84     a, b, c, d = params['a'], params['b'], params['c'], params['d']
85     v0, u0 = params['v0'], params['b'] * params['v0']
86     I = params['I']
87
88     t = np.arange(0, t_max, dt)
89     n_steps = len(t)
90
91     v = np.zeros(n_steps)
92     u = np.zeros(n_steps)
93     v[0], u[0] = v0, u0
94
95     # Integration
96     for i in range(1, n_steps):
97         state = [v[i-1], u[i-1]]
98         new_state = odeint(izhikevich_model, state, [0, dt], args=(params,))[1]
99
100        v[i], u[i] = new_state
101
102        # After-spike resetting
103        if v[i] >= 30:
104            v[i] = c
105            u[i] += d
106
107    return t, v, u
108
109
110 t, v, u = simulate_izhikevich(chattering_params)
111
112
113 DARK_RED = '#c91010'
114 DARK_GREEN = '#23a118'
115
116 plt.figure(figsize=(12, 5))
117 plt.suptitle(chattering_params['tt'], fontsize=14, y=1.02)
118
119 plt.subplot(1, 2, 1)
120 plt.plot(t, v, color=DARK_RED)
121 plt.title('Membrane Potential')
122 plt.legend('v(t)')
123 plt.xlabel('t, ms')
124 plt.ylabel('Potential, mV')
125 plt.grid(True)
126
127 plt.subplot(1, 2, 2)
128 plt.plot(t, u, color=DARK_GREEN)
129 plt.title('Recovery Variable')
130 plt.legend('u(t)')
131 plt.xlabel('t, ms')
132 plt.ylabel('Value')

```

```

133 plt.grid(True)
134
135 plt.tight_layout()
136 plt.savefig('chattering.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
137 plt.show()
138
139 from google.colab import files
140 files.download('chattering.png')
141
142 I_values = [0, 5, 10, 15, 20, 25]
143 colors = ['#1f77b4', '#ff7f0e', '#2ca02c', '#d62728', '#9467bd', '#8c564b']
144
145 plt.figure(figsize=(15, 10))
146
147 for idx, I in enumerate(I_values):
148     params = regular_spiking_params.copy()
149     params['I'] = I
150     params['tt'] = f'I = {I}'
151
152     t, v, u = simulate_izhikevich(params)
153
154     plt.subplot(2, 3, idx+1)
155     plt.plot(t, v, color=colors[idx])
156     plt.title(f'I = {I} nA')
157     plt.xlabel('t, ms')
158     plt.ylabel('Potential, mV')
159     plt.legend([f'v_{idx}(t)'])
160     plt.grid(True)
161     plt.ylim(-90, 40)
162
163
164 plt.suptitle(f'{regular_spiking_params["tt"]}: Membrane Potential", fontsize=14,
165               y=1.02)
165 plt.tight_layout()
166 plt.savefig('rs_different_I_potentials.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
167
168 files.download('rs_different_I_potentials.png')
169
170
171 plt.figure(figsize=(15, 10))
172
173 for idx, I in enumerate(I_values):
174     params = regular_spiking_params.copy()
175     params['I'] = I
176     params['tt'] = f'I = {I}'
177
178     t, v, u = simulate_izhikevich(params)
179
180     plt.subplot(2, 3, idx+1)
181     plt.plot(t, u, color=colors[idx])
182     plt.title(f'I = {I} nA')
183     plt.xlabel('t, ms')
184     plt.ylabel('Value')
185     plt.legend([f'u_{idx}(t)'])
186     plt.grid(True)
187
188 plt.suptitle(f'{regular_spiking_params["tt"]}: Recovery Variable", fontsize=14,
189               y=1.02)
189 plt.tight_layout()
190 plt.savefig('rs_different_I_recovery.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
191 files.download('rs_different_I_recovery.png')
192
193 plt.show()

```

---

Листинг 1 — Исходный код программы

## **4 ВЫВОД**

В ходе выполнения работы была изучена математическая модель биологического нейрона Ижикевича. Рассмотрено влияние параметров модели на характеристики моделируемого нейрона. Выполнено численное моделирование изменения мембранных потенциала нейрона, а также вспомогательной переменной, отвечающей за восстановление мембранных потенциала.

## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. *Izhikevich E.M.* Simple Model of Spiking Neurons // IEEE TRANSACTIONS ON NEURAL NETWORKS. — 2003. — Vol. 14, no. 6. — P. 1569–1572.