Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 4
"Динамические системы"

по дисциплине Практическая линейная алгебра

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2023-2024

В этой лабораторной мы будем работать с непрерывными ($t \in \mathbb{R}$) *и дискретными* ($k \in \mathbb{Z}$) *линейными динамическими системами второго порядка вида*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_3 x_1(t) + a_4 x_2(t) \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_1 x_1(k) + a_2 x_2(k), \\ x_2(k+1) = a_3 x_1(k) + a_4 x_2(k) \end{cases} \tag{2}$$

в более компактной форме:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{3}$$

$$x(k+1) = Ax(k), \tag{4}$$

где $x(\cdot) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

1 задание. Придумать непрерывное.

Зададимся двумя неколлинеарными векторами v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^2$, не лежащими на координатных осях:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Придумаем непрерывные динамические системы:

1.1

Система ассимптотически устойчива, при этом если $x(0) = v_1$, то $x(t) \in Span\{v_1\}$, а если $x(0) = v_2$, то $x(t) \in Span\{v_2\}$ при всех $t \geq 0$.

Обратимся к уравнению $\dot{x}(t) = Ax(t),\ \ x(0) = x_0$ и к его решению:
$x(t) = e^{At}x_0$.

1. Система асимптотически устойчива, значит выполнено $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.
2. Выберем матрицу с двумя совпадающими **отрицательными** собственными числами, например:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Собственные числа $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$,
собственные векторы $w_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1.2

Система неустойчива, при этом у матрицы A не существует двух неколлинеарных собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 4$, собственные векторы соответственно $w_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1.3

Система неустойчива, при этом если $x(0) = v_1$, то $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -16 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -4$, собственные векторы соответственно $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1.4

Система асимптотически устойчива, при этом матрица $A \in \mathbb{R}^2$ имеет комплексные собственные вектора вида $v_1 \pm v_2 i \in \mathbb{C}^2$.

Сначала запишем собственные векторы искомой матрицы:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 4+3i \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 4-3i \end{pmatrix} \tag{9}$$

Будем искать матрицу записав ее спектральное разложение $A = V \cdot D \cdot V^{-1}$, где V – матрица, составленная из собственных векторов матрицы A, D – матрица, на главной диагонали которой расположены собственные числа.

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 4+3i & 4-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 4+3i & 4-3i \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \tag{11}$$

1.5

Система неустойчива, при этом матрица A имеет такие же слбственные вектора, как в предыдущем пункте.

Аналогично будем искать матрицу записав ее спектральное разложение $A = V \cdot D \cdot V^{-1}$, где V – матрица, составленная из собственных векторов матрицы A, D – матрица, на главной диагонали которой расположены собственные числа.

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 4+3i & 4-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 4+3i & 4-3i \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

1.6

Система не является асимптотически устойчивой, но не является и неустойчивой, при этом матрица A имеет собственные векторы такие же, как в пункте 4.

Вновь будем искать матрицу записав ее спектральное разложение $A = V \cdot D \cdot V^{-1}$, где V – матрица, составленная из собственных векторов матрицы A, D – матрица, на главной диагонали которой расположены собственные числа.

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 4+3i & 4-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 4+3i & 4-3i \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

2 задание. Замоделировать непрерывное.

2.1

Система ассимптотически устойчива, при этом если $x(0) = v_1$, *то* $x(t) \in Span\{v_1\}$, *а если* $x(0) = v_2$, *то* $x(t) \in Span\{v_2\}$ *при всех* $t \geq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

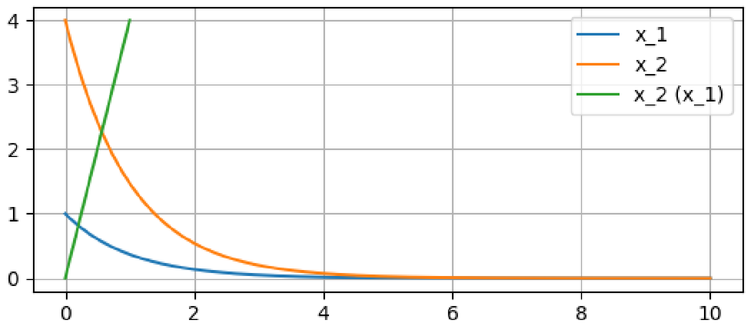

Рис. 1. Моделирование при $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

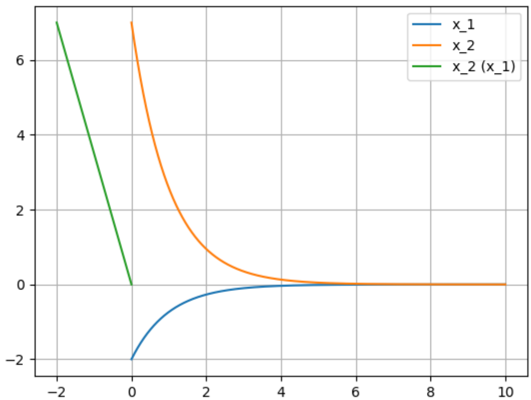

Рис. 2. Моделирование при $x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

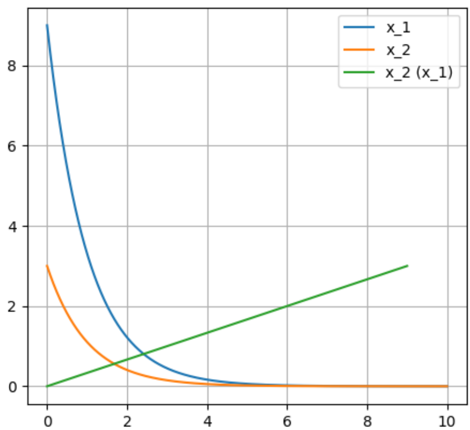

Рис. 3. Моделирование при $x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

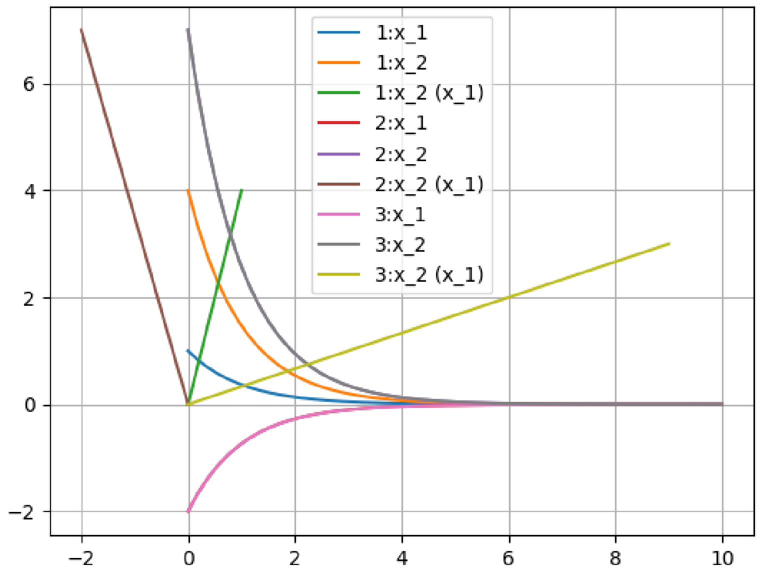

Рис. 4. Моделирование 1 при $1: \ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $2: \ x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $3: \ x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

На приведенных выше графиках проиллюстрирована асимптотически устойчивая система, ведь $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = 0$.

2.2

Система неустойчива, при этом у матрицы A не существует двух неколлинеарных собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{17}$$

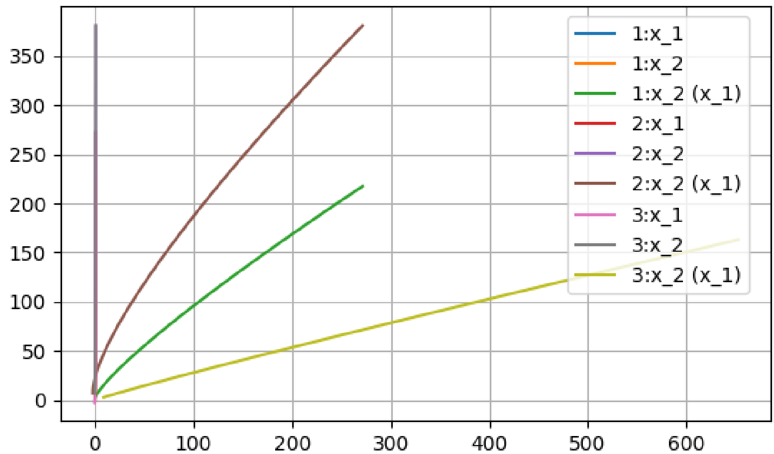

Рис. 5. Моделирование 2 при $1:\ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ 2:\ x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix},\ 3:\ x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Заметим, что система является неустойчивой, так как существуют такие начальные условия, что $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = \infty$ и $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = \infty$.

2.3

Система неустойчива, при этом если $x(0) = v_1$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -16 & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

2.4

Система асимптотически устойчива, при этом матрица $A \in \mathbb{R}^2$ *имеет комплексные собственные вектора вида* $v_1 \pm v_2 i \in \mathbb{C}^2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \tag{19}$$

2.5

Система неустойчива, при этом матрица A *имеет такие же слбственные вектора, как в предыдущем пункте.*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

2.6

Система не является асимптотически устойчивой, но не является и неустойчивой, при этом матрица A *имеет собственные векторы такие же, как в пункте 4.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

3 задание. Придумать дискретное.

Придумать дискретные динамические системы, обладающие следующими собственными числами (при этом ни одна из придуманных матриц A не должна быть диагональной:

4 задание. Замоделировать дискретное.