

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 5
"Спектральная теория графов"

по дисциплине Практическая линейная алгебра

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2023-2024

1 Кластеризация социальной сети

Для начала построим модель небольшой социальной сети, где каждый пользователь обозначен одной из 18 вершин графа, а ребра показывают дружбу между людьми.

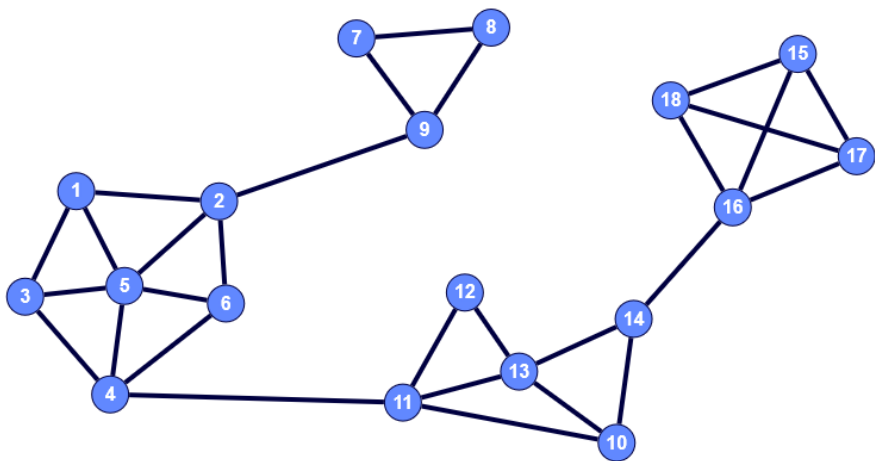


Рис. 1. Модель социальной небольшой сети

Соответствующая графу на рисунке 1 матрица Лапласа: Все собственные числа и соответствующие им собственные векторы приведены в разделе *Приложение* в конце документа.

$$\begin{pmatrix}
 3 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1
 \end{pmatrix}$$

Рис. 2. Матрица Лапласа

Выберем $k = 4$ компоненты кластеризации графа. И составим матрицу из 4 собственных векторов матрицы Лапласа, соответствующих самым маленьким собственным числам.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -0,541 & -0,569 & 1,766 \\ 1 & -0,609 & -0,184 & 1,141 \\ 1 & -0,470 & -0,736 & 1,718 \\ 1 & -0,329 & -0,803 & 0,976 \\ 1 & -0,497 & -0,614 & 1,569 \\ 1 & -0,493 & -0,594 & 1,470 \\ 1 & -0,933 & 1,570 & -1,573 \\ 1 & -0,933 & 1,570 & -1,573 \\ 1 & -0,850 & 1,096 & -0,799 \\ 1 & 0,375 & -0,885 & -1,742 \\ 1 & 0,173 & -1,026 & -1,333 \\ 1 & 0,276 & -1,160 & -2,090 \\ 1 & 0,355 & -0,944 & -1,819 \\ 1 & 0,564 & -0,419 & -1,217 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,911 & 0,698 & 0,508 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Рассмотрим строки составленной матрицы V как точки пространства R^4

$$\begin{pmatrix} (-0,541) \\ (-0,609) \\ (-0,470) \\ (-0,329) \\ (-0,497) \\ (-0,493) \\ (-0,933) \\ (-0,933) \\ (-0,850) \\ (0,375) \\ (0,173) \\ (0,276) \\ (0,355) \\ (0,564) \\ 1 \\ (0,911) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_5 = 0.089
 \quad
 \begin{pmatrix} (-0,569) \\ (-0,184) \\ (-0,736) \\ (-0,803) \\ (-0,614) \\ (-0,594) \\ (1,570) \\ (1,570) \\ (1,096) \\ (-0,885) \\ (-1,026) \\ (-1,160) \\ (-0,944) \\ (-0,419) \\ 1 \\ (0,698) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_6 = 0.302
 \quad
 \begin{pmatrix} (1,766) \\ (1,141) \\ (1,718) \\ (0,976) \\ (1,569) \\ (1,470) \\ (-1,573) \\ (-1,573) \\ (-0,799) \\ (-1,742) \\ (-1,333) \\ (-2,090) \\ (-1,819) \\ (-1,217) \\ 1 \\ (0,508) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_7 = 0.492$$

$$\begin{pmatrix} (-0,483) \\ (-0,304) \\ (-0,109) \\ (0,480) \\ (-0,117) \\ (0,055) \\ (0,102) \\ (0,102) \\ (-0,092) \\ (-3,902) \\ (1,177) \\ (6,448) \\ (-0,559) \\ (-4,895) \\ 1 \\ (-0,904) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_8 = 1.904
 \quad
 \begin{pmatrix} (-112,670) \\ (51,599) \\ (-122,421) \\ (36,220) \\ (5,800) \\ (162,222) \\ (-18,290) \\ (-18,290) \\ (26,025) \\ (2,964) \\ (11,522) \\ (-16,445) \\ (-4,567) \\ (-5,244) \\ 1 \\ (-1,423) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_9 = 2.423
 \quad
 \begin{pmatrix} (-15,810) \\ (-19,115) \\ (13,664) \\ (19,505) \\ (0,545) \\ (3,014) \\ (7,572) \\ (7,572) \\ (-12,795) \\ (2,437) \\ (8,335) \\ (-8,656) \\ (-2,365) \\ (-5,214) \\ 1 \\ (-1,690) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_{10} = 2.690$$

$$\begin{pmatrix} (0, 661) \\ (0, 984) \\ (-0, 783) \\ (0, 071) \\ (-0, 445) \\ (-1, 660) \\ (-0, 872) \\ (-0, 872) \\ (2, 065) \\ (3, 889) \\ (2, 932) \\ (-2, 241) \\ (0, 133) \\ (-4, 497) \\ 1 \\ (-2, 368) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_{11} = 3.368
 \quad
 \begin{pmatrix} (9, 817) \\ (-0, 245) \\ (-8, 229) \\ (-5, 286) \\ (1, 399) \\ (5, 733) \\ (6, 255) \\ (6, 255) \\ (-17, 018) \\ (4, 618) \\ (-0, 381) \\ (-0, 251) \\ (0, 812) \\ (-3, 760) \\ 1 \\ (-2, 721) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_{12} = 3.721
 \quad
 \begin{pmatrix} (-3, 665) \\ (-0, 297) \\ (5, 560) \\ (-4, 796) \\ (0, 190) \\ (3, 295) \\ (-0, 093) \\ (-0, 093) \\ (0, 324) \\ (5, 299) \\ (-6, 706) \\ (2, 647) \\ (0, 121) \\ (-1, 299) \\ 1 \\ (-3, 488) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_{13} = 4.488$$

$$\begin{pmatrix} (-0, 288) \\ (0, 067) \\ (0, 517) \\ (-0, 629) \\ (-0, 047) \\ (0, 327) \\ (0, 013) \\ (0, 013) \\ (-0, 050) \\ (-3, 826) \\ (-0, 251) \\ (-2, 370) \\ (7, 043) \\ (0, 348) \\ 1 \\ (-3, 866) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_{14} = 4.866
 \quad
 \begin{pmatrix} (1, 758) \\ (-2, 275) \\ (-1, 818) \\ (2, 390) \\ (0, 041) \\ (-0, 068) \\ (-0, 287) \\ (-0, 287) \\ (1, 236) \\ (0, 292) \\ (-1, 273) \\ (0, 995) \\ (-2, 016) \\ (2, 616) \\ 1 \\ (-4, 305) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_{15} = 5.305
 \quad
 \begin{pmatrix} (-6, 448) \\ (10, 339) \\ (-0, 417) \\ (2, 122) \\ (5, 312) \\ (-7, 523) \\ (1, 245) \\ (1, 245) \\ (-5, 430) \\ (-0, 064) \\ (-0, 263) \\ (0, 831) \\ (-2, 531) \\ (2, 945) \\ 1 \\ (-4, 363) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_{16} = 5.363$$

$$\begin{pmatrix} (-0, 141) \\ (2, 993) \\ (5, 426) \\ (-6, 661) \\ (-8, 035) \\ (4, 280) \\ (0, 273) \\ (0, 273) \\ (-1, 295) \\ (-3, 217) \\ (9, 878) \\ (-0, 961) \\ (-6, 291) \\ (5, 209) \\ 1 \\ (-4, 734) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_{17} = 5.734
 \quad
 \begin{pmatrix} (-13, 211) \\ (-42, 779) \\ (-7, 706) \\ (-55, 201) \\ (93, 510) \\ (1, 373) \\ (-2, 829) \\ (-2, 829) \\ (14, 873) \\ (-10, 039) \\ (37, 402) \\ (-5, 598) \\ (-13, 572) \\ (8, 864) \\ 1 \\ (-5, 257) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_{18} = 6.257$$