

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 4 "Динамические системы"

по дисциплине Практическая линейная алгебра

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2023-2024

В этой лабораторной мы будем работать с непрерывными ($t \in \mathbb{R}$) и дискретными ($k \in \mathbb{Z}$) линейными динамическими системами второго порядка вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_3x_1(t) + a_4x_2(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_1x_1(k) + a_2x_2(k), \\ x_2(k+1) = a_3x_1(k) + a_4x_2(k) \end{cases} \quad (2)$$

в более компактной форме:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (3)$$

$$x(k+1) = Ax(k), \quad (4)$$

где $x(\cdot) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

1 задание. Придумать непрерывное.

Зададимся двумя неколлинеарными векторами $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, не лежащими на координатных осях:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Придумаем непрерывные динамические системы:

1.1

Система асимптотически устойчива, при этом если $x(0) = v_1$, то $x(t) \in \text{Span}\{v_1\}$, а если $x(0) = v_2$, то $x(t) \in \text{Span}\{v_2\}$ при всех $t \geq 0$.

Обратимся к уравнению $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$ и к его решению: $x(t) = e^{At}x_0$.

1. Система асимптотически устойчива, значит выполнено $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.
2. Выберем матрицу с двумя совпадающими **отрицательными** собственными числами, например:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Собственные числа $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$,
собственные векторы $w_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1.2

Система неустойчива, при этом у матрицы A не существует двух неколлинеарных собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 4$, собственные векторы соответственно $w_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1.3

Система неустойчива, при этом если $x(0) = v_1$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -16 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -4$, собственные векторы соответственно $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1.4

Система асимптотически устойчива, при этом матрица $A \in \mathbb{R}^2$ имеет комплексные собственные вектора вида $v_1 \pm v_2 i \in \mathbb{C}^2$.

Сначала запишем собственные векторы искомой матрицы:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 4 + 3i \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 4 - 3i \end{pmatrix} \quad (9)$$

Будем искать матрицу записав ее спектральное разложение $A = V \cdot D \cdot V^{-1}$, где V – матрица, составленная из собственных векторов матрицы A , D – матрица, на главной диагонали которой расположены собственные числа.

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 2i & 1 - 2i \\ 4 + 3i & 4 - 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + i & 0 \\ 0 & -1 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + 2i & 1 - 2i \\ 4 + 3i & 4 - 3i \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

1.5

Система неустойчива, при этом матрица A имеет такие же собственные вектора, как в предыдущем пункте.

Аналогично будем искать матрицу записав ее спектральное разложение $A = V \cdot D \cdot V^{-1}$, где V – матрица, составленная из собственных векторов матрицы A , D – матрица, на главной диагонали которой расположены собственные числа.

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 4+3i & 4-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 4+3i & 4-3i \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

1.6

Система не является асимптотически устойчивой, но не является и неустойчивой, при этом матрица A имеет собственные векторы такие же, как в пункте 4.

Вновь будем искать матрицу записав ее спектральное разложение $A = V \cdot D \cdot V^{-1}$, где V – матрица, составленная из собственных векторов матрицы A , D – матрица, на главной диагонали которой расположены собственные числа.

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 4+3i & 4-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 4+3i & 4-3i \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

2 задание. За моделировать непрерывное.

2.1

Система асимптотически устойчива, при этом если $x(0) = v_1$, то $x(t) \in \text{Span}\{v_1\}$, а если $x(0) = v_2$, то $x(t) \in \text{Span}\{v_2\}$ при всех $t \geq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

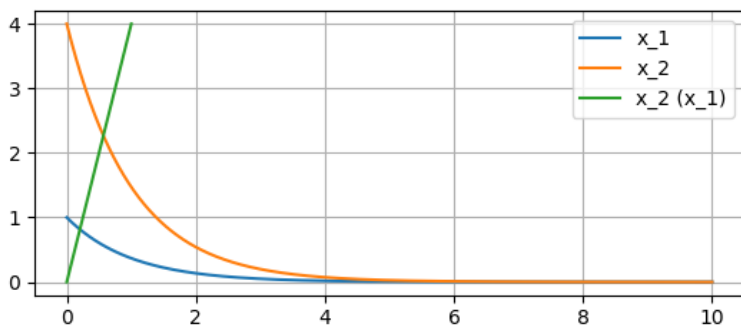


Рис. 1. Моделирование при $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.



Рис. 2. Моделирование при $x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.



Рис. 3. Моделирование при $x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

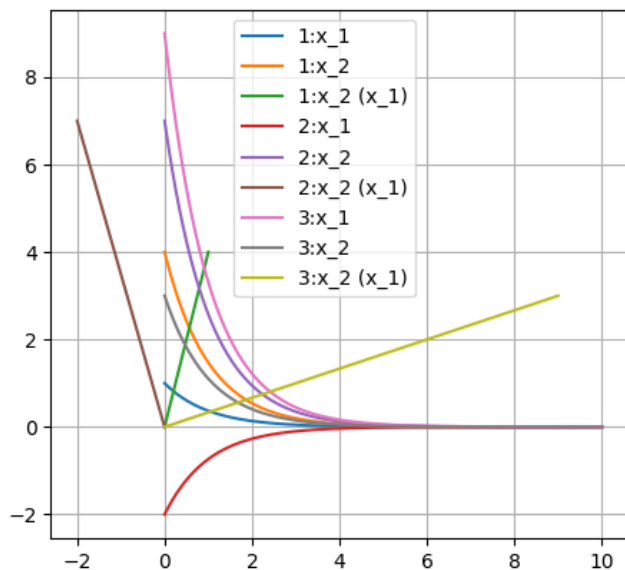


Рис. 4. Моделирование 1 при $1: x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $2: x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $3: x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

На приведенных выше графиках проиллюстрирована асимптотически устойчивая система, ведь $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$.

2.2

Система неустойчива, при этом у матрицы A не существует двух неколлинеарных собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (17)$$

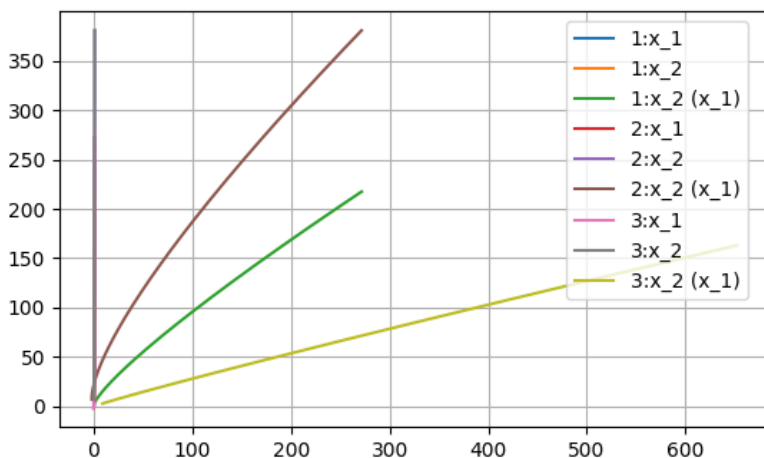


Рис. 5. Моделирование 2 при 1: $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, 2: $x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, 3: $x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Заметим, что система является неустойчивой, так как существуют такие начальные условия, что $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \infty$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \infty$.

2.3

Система неустойчива, при этом если $x(0) = v_1$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -16 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$



Рис. 6. Моделирование 3 при 1: $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, 2: $x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, 3: $x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

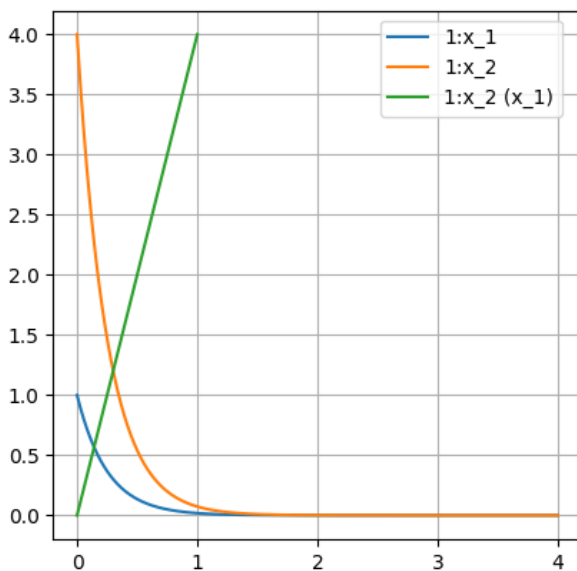


Рис. 7. Моделирование 3 при $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Система неустойчива в общем случае, но при $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

2.4

Система асимптотически устойчива, при этом матрица $A \in \mathbb{R}^2$ имеет комплексные собственные вектора вида $v_1 \pm v_2 i \in \mathbb{C}^2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

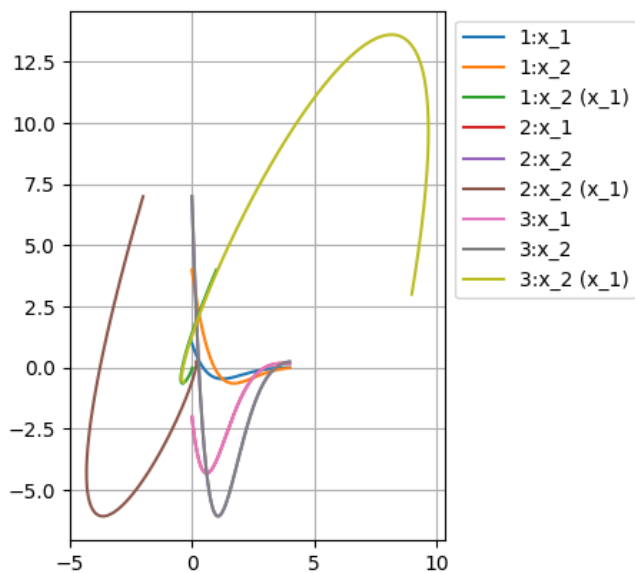


Рис. 8. Моделирование 4 при 1: $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, 2: $x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, 3: $x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

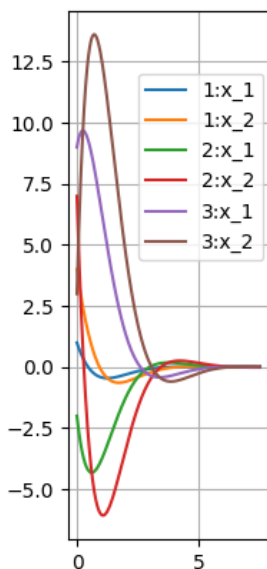


Рис. 9. Моделирование 4, только зависимости $x(t)$,
при 1 : $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, 2 : $x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, 3 : $x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Полученные графики подтверждают асимптотическую устойчивость системы, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$.

2.5

Система неустойчива, при этом матрица A имеет такие же собственные вектора, как в предыдущем пункте.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

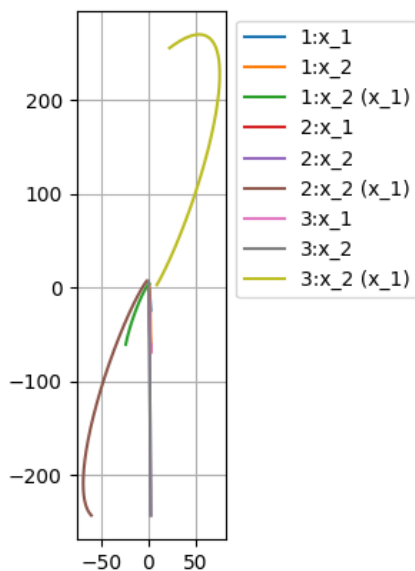


Рис. 10. Моделирование 5 при $1: x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $2: x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $3: x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.



Рис. 11. Моделирование 5, только зависимости $x(t)$,
при 1 : $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, 2 : $x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, 3 : $x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Заметим, что система действительно является неустойчивой, так как кривые $x_1(t)$, $x_2(t)$ стремятся к $-\infty$ для заданных начальных условий.

2.6

Система не является асимптотически устойчивой, но не является и неустойчивой, при этом матрица A имеет собственные векторы такие же, как в пункте 4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

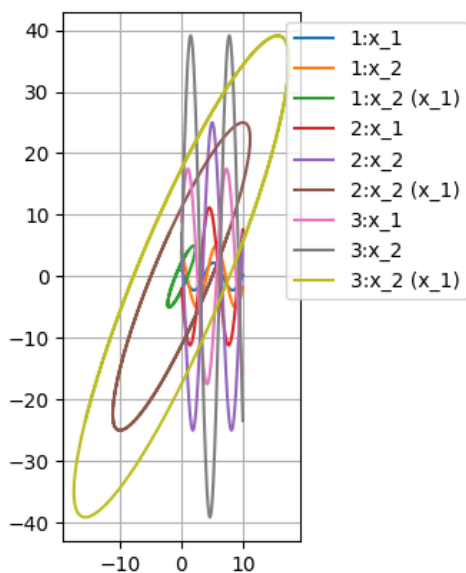


Рис. 12. Моделирование 6 при 1: $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, 2: $x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, 3: $x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

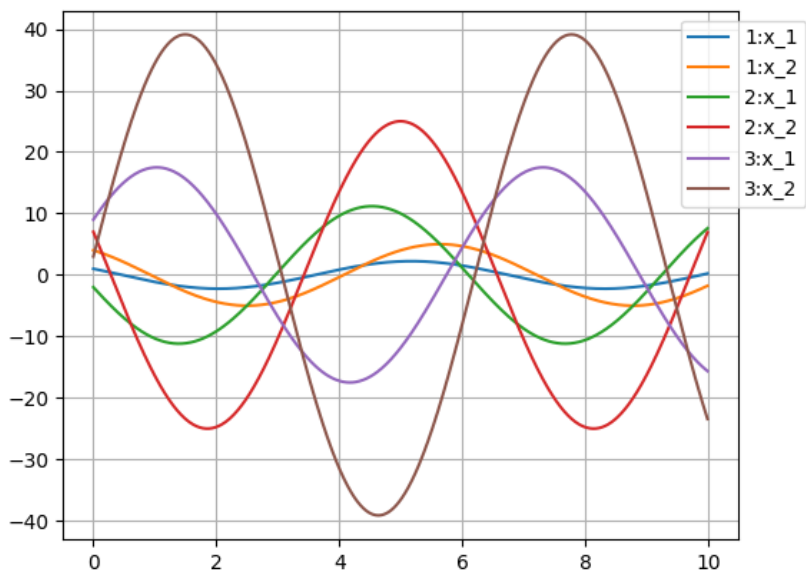


Рис. 13. Моделирование 6, только зависимости $x(t)$,
при 1: $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, 2: $x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, 3: $x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

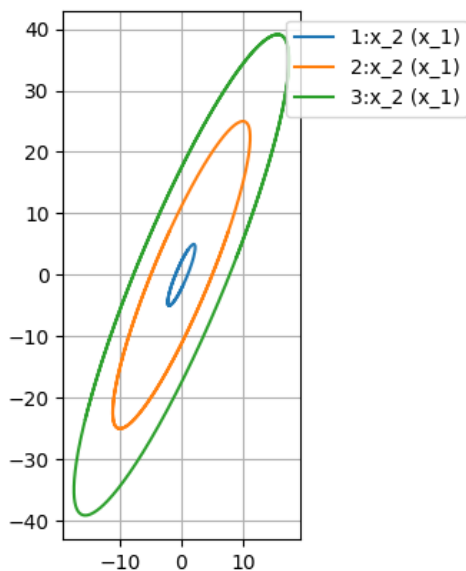


Рис. 14. Моделирование 6, только зависимости $x_2(x_1)$,
при 1 : $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, 2 : $x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, 3 : $x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Система является не является ни асимптотически устойчивой, ни неустойчивой. Во-первых, функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ не стремятся ни к нулю, ни к бесконечности при $t \rightarrow \infty$, а траектории $x_2(x_1)$ замкнуты, значит система обладает просто устойчивостью.

3 задание. Придумать дискретное.

Придумать дискретные динамические системы, обладающие следующими собственными числами (при этом ни одна из придуманных матриц A не должна быть диагональной):

3.1 $\lambda_{1,2} = -1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

3.2 $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$$\left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 0 \quad (23)$$

$$\lambda \left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}i \left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 0 \quad (24)$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}i\lambda + \lambda\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}i\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}}i\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\frac{1}{\sqrt{2}}i = 0 \quad (25)$$

$$\lambda^2 + \frac{2\lambda}{\sqrt{2}} + 1 = 0 \quad (26)$$

$$\left(\lambda^2 + \frac{2\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0 \quad (27)$$

$$\left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0 \quad (28)$$

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (29)$$

3.3 $\lambda_{1,2} = \pm i$

$$(\lambda + i)(\lambda - i) = 0 \quad (30)$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad (31)$$

Пусть искомая матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad (32)$$

Тогда характеристический полином:

$$(a - \lambda)(b - \lambda) - c = 0 \quad (33)$$

$$\lambda^2 - \lambda(a + b) + ab - c = \lambda^2 + 1 = 0 \quad (34)$$

$$\begin{cases} a = -b \\ ab - c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -b \\ -a^2 - c = 1 \end{cases} \quad (35)$$

Пусть $a = 1$, тогда $b = -1$, $c = -2$.

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

3.4 $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$$\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 0 \quad (37)$$

$$\lambda\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}i\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 0 \quad (38)$$

$$\lambda^2 - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}i - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} = 0 \quad (39)$$

$$\lambda^2 - \frac{2\lambda}{\sqrt{2}} + 1 = 0 \quad (40)$$

$$\left(\lambda^2 - \frac{2\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0 \quad (41)$$

$$\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0 \quad (42)$$

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (43)$$

3.5 $\lambda_{1,2} = 1$

$$(\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad (44)$$

Пусть искомая матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad (45)$$

Тогда характеристический полином:

$$(a - \lambda)(b - \lambda) - c = 0 \quad (46)$$

$$\lambda^2 - \lambda(a + b) + ab - c = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad (47)$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ ab - c = 1 \end{cases} \quad (48)$$

Пусть $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, тогда $c = -\frac{1}{4}$.

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad (49)$$

Для следующих пунктов выберем константы: $c = \frac{1}{2}$, $d = 2$.

3.6 $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (50)$$

3.7 $\lambda_{1,2} = \pm \frac{i}{2}$

$$\left(\lambda + \frac{i}{2}\right) \left(\lambda - \frac{i}{2}\right) = 0 \quad (51)$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{4} = 0 \quad (52)$$

Пусть искомая матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad (53)$$

Тогда характеристический полином:

$$(a - \lambda)(b - \lambda) - c = 0 \quad (54)$$

$$\lambda^2 - \lambda(a + b) + ab - c = \lambda^2 + \frac{1}{4} = 0 \quad (55)$$

$$\begin{cases} a = -b \\ ab - c = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -b \\ -a^2 - c = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (56)$$

Пусть $a = 1$, тогда $b = -1$, $c = -\frac{5}{4}$.

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (57)$$

3.8 $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$

$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0 \quad (58)$$

Пусть искомая матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad (59)$$

Тогда характеристический полином:

$$(a - \lambda)(b - \lambda) - c = 0 \quad (60)$$

$$\lambda^2 - \lambda(a + b) + ab - c = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0 \quad (61)$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ ab - c = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (62)$$

Пусть $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$, тогда $c = -\frac{1}{16}$.

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad (63)$$

3.9 $\lambda_{1,2} = -2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (64)$$

3.10 $\lambda_{1,2} = \pm 2i$

$$(\lambda + 2i)(\lambda - 2i) = 0 \quad (65)$$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad (66)$$

Пусть искомая матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad (67)$$

Тогда характеристический полином:

$$(a - \lambda)(b - \lambda) - c = 0 \quad (68)$$

$$\lambda^2 - \lambda(a + b) + ab - c = \lambda^2 + 4 = 0 \quad (69)$$

$$\begin{cases} a = -b \\ ab - c = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -b \\ -a^2 - c = 4 \end{cases} \quad (70)$$

Пусть $a = 1$, тогда $b = -1$, $c = -5$.

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (71)$$

3.11 $\lambda_{1,2} = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (72)$$

3.12 $\lambda_{1,2} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (73)$$

4 задание. За моделировать дискретное.