

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 2 "2D-преобразования "

по дисциплине Практическая линейная алгебра

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2023-2024

Перед началом выполнения работы выберем 4 различных числа:

$$a = 2$$

$$b = 8$$

$$c = 5$$

$$d = 3$$

Отображение имеет вид:

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{old} \\ y_{old} \end{bmatrix} \quad (1)$$

1 Задание.

Придумать матрицы 2×2 , которые задают:

1.1

Отражение (симметрию) плоскости относительно прямой $y = ax$, в нашем случае после подстановки $a = 2$, получаем $y = 2x$. Задача – найти матрицу вида:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Рассмотрим отражение 2 точек плоскости относительно прямой $y = 2x$.

Для точки $A(2; 2)$:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 2.8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2(m_{00} + m_{01}) = 0.4 \\ 2(m_{10} + m_{11}) = 2.8 \end{cases} \quad (3)$$

И, соответственно, для точки $B(1; 2)$:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} m_{00} + 2m_{01} = 1 \\ m_{10} + 2m_{11} = 2 \end{cases} \quad (4)$$

Объединим, системы уравнений:

$$\begin{cases} 2(m_{00} + m_{01}) = 0.4 \\ 2(m_{10} + m_{11}) = 2.8 \\ m_{00} + 2m_{01} = 1 \\ m_{10} + 2m_{11} = 2 \end{cases} \quad (5)$$

И получим ответ:

$$\begin{cases} m_{00} = -0.6 \\ m_{01} = 0.8 \\ m_{10} = 0.8 \\ m_{11} = 0.6 \end{cases} \quad (6)$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (7)$$

1.2

Отображение всей плоскости в прямую $y = bx$ ($y = 8x$). Предположим, что все точки плоскости сохраняют координату x и меняют только координату y по закону $y = 8x$. Рассмотрим также преобразование для двух точек.

Для точки $A(1; 5)$:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} m_{00} + 5m_{01} = 1 \\ m_{10} + 5m_{11} = 8 \end{cases} \quad (8)$$

И, соответственно, для точки $B(3; 7)$:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 24 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3m_{00} + 7m_{01} = 3 \\ 3m_{10} + 7m_{11} = 24 \end{cases} \quad (9)$$

Заметим, что решением будет:

$$\begin{cases} m_{00} = 1 \\ m_{01} = 0 \\ m_{10} = 8 \\ m_{11} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

1.3

*Поворот плоскости на $10 * 5 = 50$ градусов против часовой стрелки.*
Запишем матрицу поворота при движении по часовой стрелке на угол ϕ :

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (12)$$

И преобразуем матрицу для поворота против часовой стрелки (на угол $-\phi$):

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (13)$$

Перед подстановкой угла, запишем преобразование его из градусов в радианы:

$$\phi = \frac{50\pi}{180} = \frac{5\pi}{18} \quad (14)$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{5\pi}{18} & -\sin \frac{5\pi}{18} \\ \sin \frac{5\pi}{18} & \cos \frac{5\pi}{18} \end{bmatrix} \quad (15)$$

1.4

Центральную симметрию плоскости относительно начала координат
Матрица, задающая центральную симметрию:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Убедимся в этом на примере точки $A(2; 3)$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

1.5

Отображение, которое можно описать так: сначала отражение относительно прямой $y = 2x$, потом поворот на 30 градусов по часовой стрелке.

Пусть A – матрица отражения относительно прямой $y = 2x$, B – матрица поворота на 30 градусов по часовой стрелке, C_{old} , C_{new} – матрицы координат до преобразования и после соответственно. Запишем необходимое преобразование координат:

$$B(AC_{old}) = C_{new} \quad (19)$$

Воспользуемся свойством ассоциативности умножения матриц:

$$(BA)C_{old} = C_{new} \quad (20)$$

Согласно п. 1.1 матрица A :

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Найдем матрицу B , подставив в выражение (12) из пункта 1.3 $\phi = \frac{\pi}{6}$:

$$B = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{6} \\ -\sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Перемножим матрицы B и A :

$$BA = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3\sqrt{3} + 0.4 & 0.4\sqrt{3} + 0.3 \\ 0.3 + 0.4\sqrt{3} & -0.4 + 0.3\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} -0.3\sqrt{3} + 0.4 & 0.4\sqrt{3} + 0.3 \\ 0.3 + 0.4\sqrt{3} & -0.4 + 0.3\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (24)$$

1.6

Отображение, которое переводит прямую $y = 0$ в $y = 2x$ и прямую $x = 0$ в $y = 8x$

Пусть A – матрица, переводящая прямую $y = 0$ в $y = 2x$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

B – матрица, переводящая прямую $x = 0$ в $y = 8x$:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

1.7

Отображение, которое переводит прямую $y = 2x$ в $y = 0$ и прямую $y = 8x$ в $x = 0$

Так как преобразование – обратное, проводимому в пункте 1.6. Матрицу можно найти, вычислив обратную.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{8} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Искомая матрица:

$$\frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{8} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

1.8

Отображение, которое меняет местами $y = 2x$ и $y = 8x$.

Пусть M – искомая матрица. Запишем 2 преобразования:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2m_{00} + 4m_{01} = 2 \\ 2m_{10} + 4m_{11} = 16 \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3m_{00} + 24m_{01} = 3 \\ 3m_{10} + 24m_{11} = 6 \end{cases} \quad (31)$$

Пусть $m_{00} = 1$, $m_{01} = 0$. Решим систему, чтобы найти оставшиеся компоненты:

$$\begin{cases} 2m_{10} + 4m_{11} = 16 \\ 3m_{10} + 24m_{11} = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_{10} = 10 \\ m_{11} = -1 \end{cases} \quad (32)$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

1.9

Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в круг площади $s = 5$.

Определитель матрицы преобразования – множитель площади, то есть в нашем случае определитель искомой матрицы равен 5.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \quad (35)$$

1.10

Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в некруг площади $d = 3$.

Определитель матрицы преобразования – множитель площади, то есть в нашем случае определитель искомой матрицы равен 3.

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

1.11

Отображение, у которого собственные вектора перпендикулярны, и ни один из них не лежит на прямой $y = 0$ или $y = x$.

Пусть собственные векторы:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (37)$$

И собственные числа, соответствующие им $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$. По этим данным восстановим матрицу отображения M :

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} m_{00} + 2m_{01} = 2 \\ m_{10} + 2m_{11} = 4 \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -6m_{00} + 3m_{01} = -6 \\ -6m_{10} + 3m_{11} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2m_{00} - m_{01} = 2 \\ 2m_{10} - m_{11} = -1 \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} m_{00} + 2m_{01} = 2 \\ m_{10} + 2m_{11} = 4 \\ 2m_{00} - 2 = m_{01} \\ 2m_{10} + 1 = m_{11} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_{00} = \frac{6}{5} \\ m_{10} = \frac{2}{5} \\ m_{01} = \frac{2}{5} \\ m_{11} = \frac{9}{5} \end{cases} \quad (40)$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \quad (41)$$

1.12

Отображение, у которого нет двух неколлинеарных собственных векторов.

Пусть задана матрица:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Найдем ее собственные числа: $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = 4$. Соответствующие собственные векторы: $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Такие векторы всегда будут коллинеарны.

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (43)$$

1.13

Отображение, у которого нет ни одного вещественного собственного вектора (но при этом само отображение задается вещественной матрицей).

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Собственные числа и соответствующие им собственные вектры:

$$\lambda_1 = 2i, v_1 = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = -2i, v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

1.14

Отображение, для которого любой ненулевой вектор является собственным.

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

1.15

Пару отображений, последовательное применение которых дает различные результаты в зависимости от порядка $AB \neq BA$.

Искомые матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad (48)$$

1.16

Пару отображений, последовательное применение которых дает одинаковый результат независимо от порядка $AB = BA$.

Пусть матрица A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Найдем какую-нибудь коммутативную к ней матрицу B :

$$B = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$AB = BA \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\begin{cases} b_{00} + 4b_{10} = b_{00} \\ b_{01} + 4b_{11} = 4b_{00} + 2b_{01} \\ 2b_{10} = b_{10} \\ 2b_{11} = 2b_{11} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b_{10} = 0 \\ b_{00} = b_{00} \\ b_{01} + 4b_{11} = 4b_{00} + 2b_{01} \\ 2b_{11} = 2b_{11} \end{cases} \quad (52)$$

Пусть $b_{00} = 9$ и $b_{11} = 11$

$$\begin{cases} b_{10} = 0 \\ b_{00} = 9 \\ b_{01} + 4b_{11} = 4b_{00} + 2b_{01} \\ b_{11} = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b_{10} = 0 \\ b_{00} = 9 \\ b_{01} = 8 \\ b_{11} = 11 \end{cases} \quad (53)$$

Искомые матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \quad (54)$$

2 Анализ

2.1

Найти образ и ядро придуманных отображений из пунктов 1, 2, 13, 14.

Для пункта 1:

$$A = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Найдем образ, для этого приведем матрицу к приведённому ступенчатому виду:

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.2 & 1.4 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$Range(A) = Span \left\{ \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix} \right\} \quad (57)$$

Найдем ядро отображения – множество векторов, отображающихся в ноль:

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 & | & 0 \\ 0.8 & 0.6 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & | & 0 \\ 0 & -25 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad (59)$$

$$Nullspace(A) = \emptyset \quad (60)$$

Для пункта 2:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Найдем образ, для этого приведем матрицу к приведённому ступенчатому виду:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$Range(B) = Span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \right\} \quad (63)$$

Найдем ядро отображения – множество векторов, отображающихся в ноль:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_2 \end{cases} \quad (65)$$

$$\text{Nullspace}(B) = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (66)$$

Для пункта 13:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Найдем образ, для этого приведем матрицу к приведённому ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \quad (68)$$

$$\text{Range}(C) = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (69)$$

Найдем ядро отображения – множество векторов, отображающихся в ноль:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad (71)$$

$$\text{Nullspace}() = \emptyset \quad (72)$$

Для пункта 14:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (73)$$

Найдем образ, для этого приведем матрицу к приведённому ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \quad (74)$$

$$\text{Range}(D) = \emptyset \quad (75)$$

Найдем ядро отображения – множество векторов, отображающихся в ноль:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \end{cases} \quad (77)$$

$$\text{Nullspace}(D) = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right\}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad (78)$$

2.2

Найти собственные числа и собственные векторы придуманных отображений из пунктов 1, 2, 3, 4, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Для пункта 1:

$$A = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -0.6 - \lambda & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \quad (80)$$

Найдем собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad (81)$$

Найдем собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad (82)$$

Аналогично найдем собственные числа и собственные векторы для остальных отображений.

Для пункта 2:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

$$\lambda_1 = 0, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 1, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (84)$$

Для пункта 3:

$$C = \begin{bmatrix} \cos \frac{5\pi}{18} & -\sin \frac{5\pi}{18} \\ \sin \frac{5\pi}{18} & \cos \frac{5\pi}{18} \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$\lambda_1 \approx 0.643 - i0.766, \quad v_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 \approx 0.643 + i0.766, \quad v_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (86)$$

Для пункта 4:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (87)$$

$$\lambda_1 = -1, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = -1, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (88)$$

Для пункта 8:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \quad (89)$$

$$\lambda_1 = 1, \quad v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = -1, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (90)$$

Для пункта 11:

$$G = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \quad (91)$$

$$\lambda_1 = 1, \quad v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 2, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (92)$$

Для пункта 12:

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (93)$$

$$\lambda_1 = 4, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 4, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (94)$$

Для пункта 13:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (95)$$

$$\lambda_1 = 2i, \ v_1 = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \ \lambda_2 = -2i, \ v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (96)$$

Для пункта 14:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (97)$$

$$\lambda_1 = 0, \ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \lambda_2 = 0, \ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (98)$$

Для пункта 15:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (99)$$

$$\lambda_1 = \frac{-\sqrt{33}+5}{2}, \ v_1 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{33}-3}{6} \\ 1 \end{bmatrix}, \ \lambda_2 = \frac{\sqrt{33}+5}{2}, \ v_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{33}-3}{6} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (100)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$\lambda_1 = \frac{-\sqrt{177}+13}{2}, \ v_1 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{177}-3}{14} \\ 1 \end{bmatrix}, \ \lambda_2 = \frac{\sqrt{177}+13}{2}, \ v_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{177}-3}{14} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (102)$$

Для пункта 16:

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (103)$$

$$\lambda_1 = 1, \ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \lambda_2 = 2, \ v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \ N_2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \quad (104)$$

$$\lambda_1 = 9, \ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \lambda_2 = 11, \ v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (105)$$

2.3

Найти определитель матриц из пунктов 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10

Для пункта 1:

$$\det A = \begin{vmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{vmatrix} = -1 \quad (106)$$

Для пункта 2:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (107)$$

Для пункта 3:

$$\det C = \begin{vmatrix} \cos \frac{5\pi}{18} & -\sin \frac{5\pi}{18} \\ \sin \frac{5\pi}{18} & \cos \frac{5\pi}{18} \end{vmatrix} = 1 \quad (108)$$

Для пункта 4:

$$\det D = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad (109)$$

Для пункта 5:

$$\det F = \begin{vmatrix} -0.3\sqrt{3} + 0.4 & 0.4\sqrt{3} + 0.3 \\ 0.4\sqrt{3} + 0.3 & 0.3\sqrt{3} - 0.4 \end{vmatrix} = -1 \quad (110)$$

Для пункта 9:

$$\det G = \begin{vmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{vmatrix} = 5 \quad (111)$$

Для пункта 10:

$$\det H = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad (112)$$

2.4

В каких пунктах матрица обязательно получается симметричной?

Ответ: в пунктах 1, 4, 5, 9, 10, 11, 14.

3 Визуализация

В качестве многоугольника был выбран ромб, координаты точек которого: $(-1, 0)$, $(0, -0.5)$, $(1, 0)$, $(0, 0.5)$.

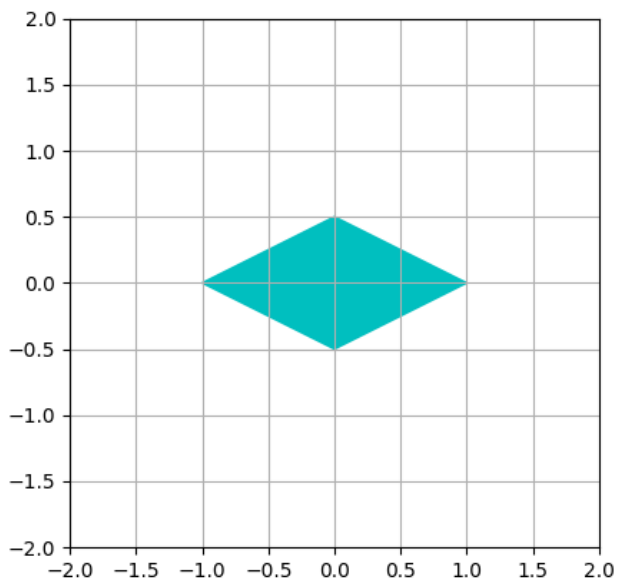


Рис. 1. Оригинал.

3.1 Для отображения 1

$$A = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (113)$$

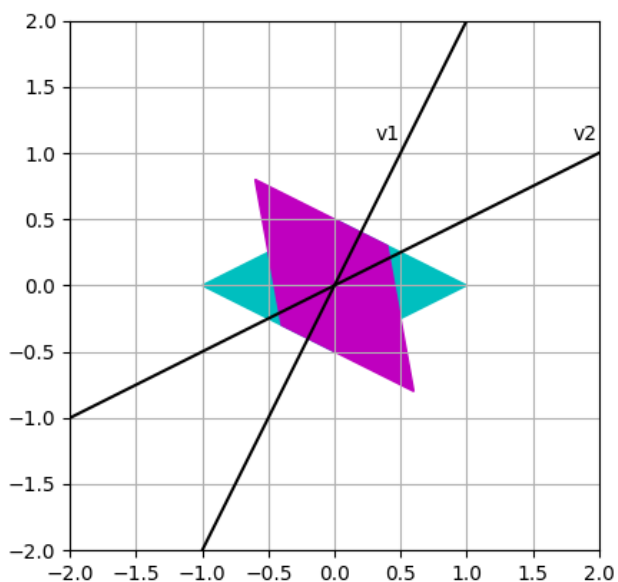


Рис. 2. Образ 1 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

3.2 Для отображения 2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \quad (114)$$

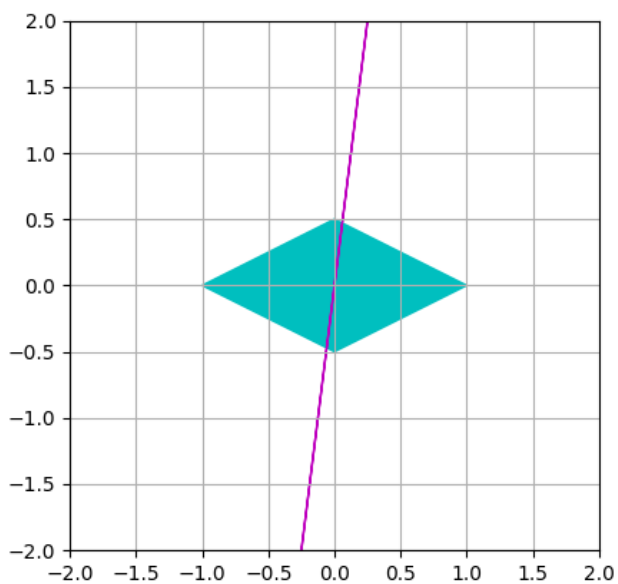


Рис. 3. Образ 2 (фиолетовый), оригинал (голубой).

3.3 Для отображения 3

$$C = \begin{bmatrix} \cos \frac{5\pi}{18} & -\sin \frac{5\pi}{18} \\ \sin \frac{5\pi}{18} & \cos \frac{5\pi}{18} \end{bmatrix} \quad (115)$$

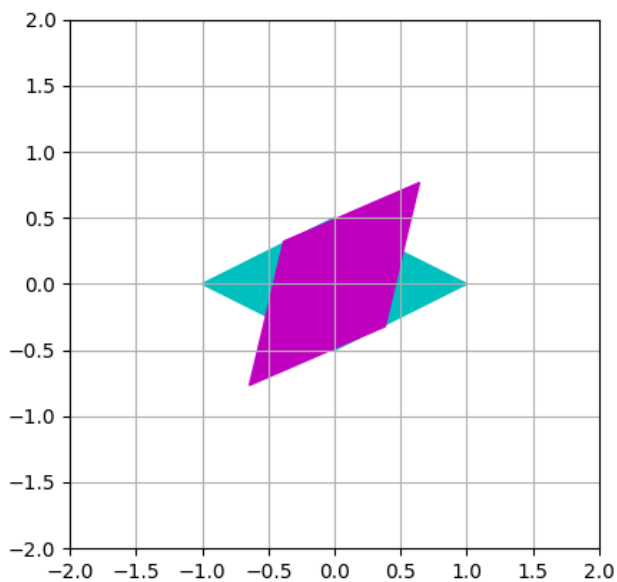


Рис. 4. Образ 3 (фиолетовый), оригинал (голубой).

3.4 Для отображения 4

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (116)$$

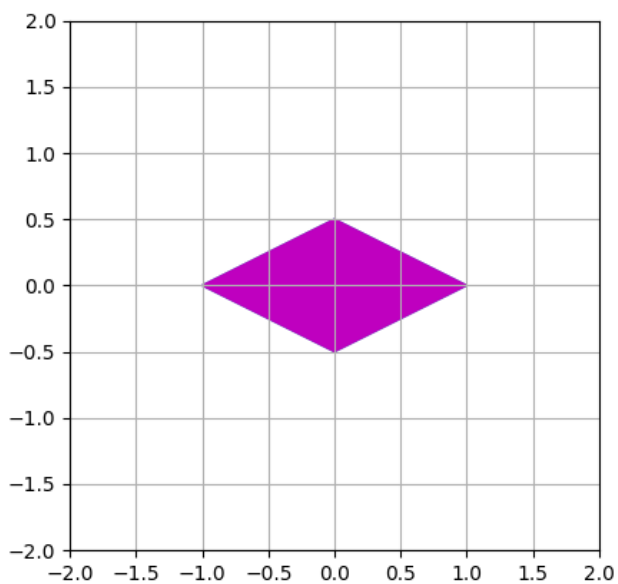


Рис. 5. Образ 4 (фиолетовый).

3.5 Для отображения 5

$$F = \begin{bmatrix} -0.3\sqrt{3} + 0.4 & 0.4\sqrt{3} + 0.3 \\ 0.4\sqrt{3} + 0.3 & 0.3\sqrt{3} - 0.4 \end{bmatrix} \quad (117)$$

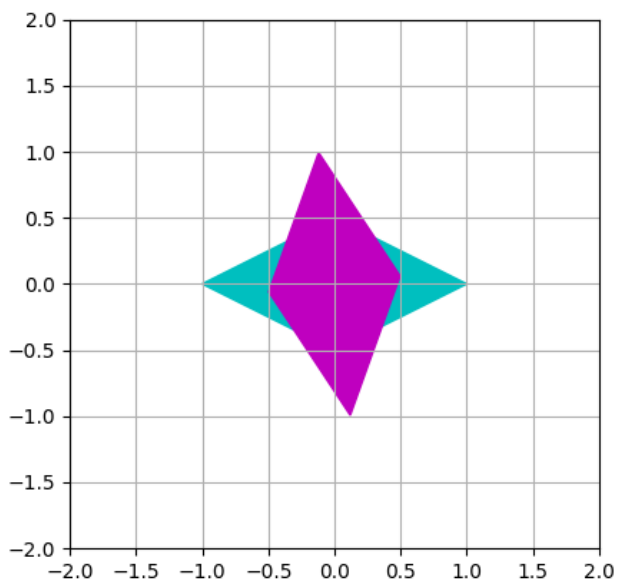


Рис. 6. Образ 5 (фиолетовый), оригинал (голубой).

3.6 Для отображения 6

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (118)$$

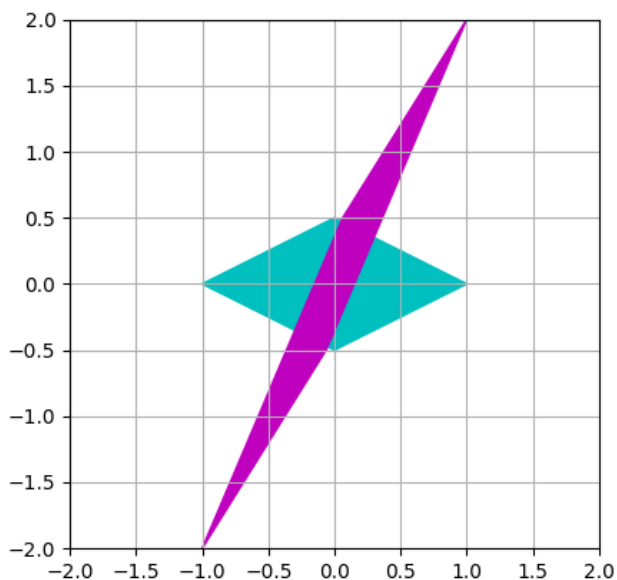


Рис. 7. Образ 6 (фиолетовый), оригинал (голубой).

3.7 Для отображения 7

$$H = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad (119)$$

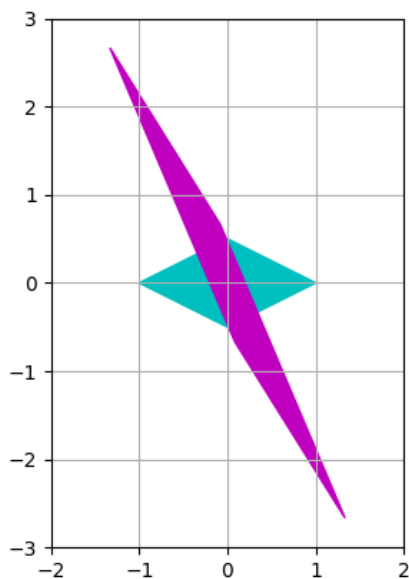


Рис. 8. Образ 7 (фиолетовый), оригинал (голубой).

3.8 Для отображения 8

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \quad (120)$$

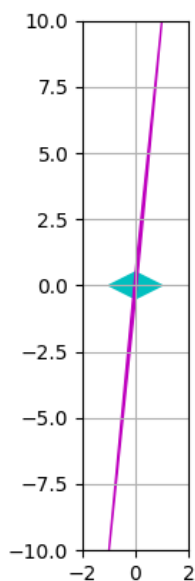


Рис. 9. Образ 8 (фиолетовый), оригинал (голубой).

3.9 Для отображения 9

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \quad (121)$$

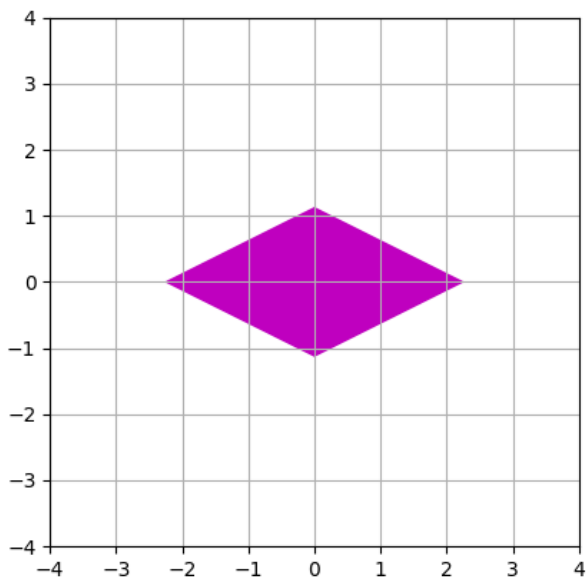


Рис. 10. Образ 9 (фиолетовый).

3.10 Для отображения 10

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (122)$$

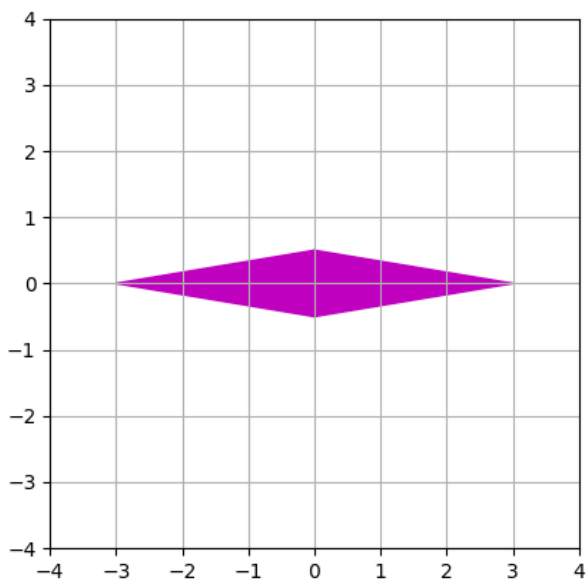


Рис. 11. Образ 10 (фиолетовый).

3.11 Для отображения 11

$$N = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (123)$$

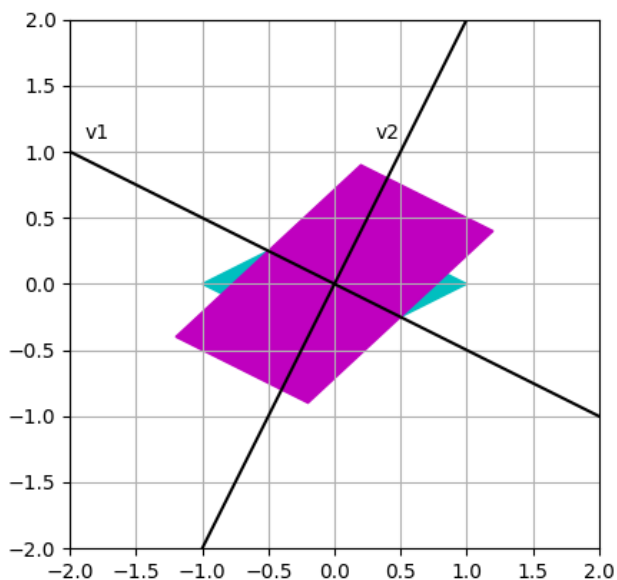


Рис. 12. Образ 11 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

3.12 Для отображения 12

$$O = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (124)$$

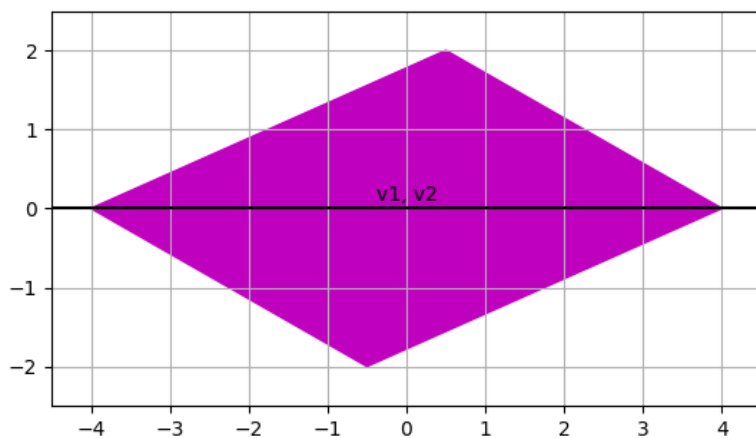


Рис. 13. Образ 12 (фиолетовый) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

3.13 Для отображения 13

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (125)$$

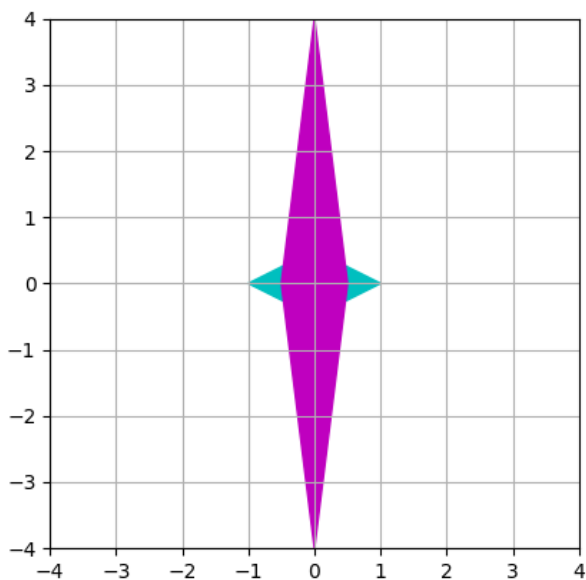


Рис. 14. Образ 13 (фиолетовый), оригинал (голубой).

3.14 Для отображения 14

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (126)$$

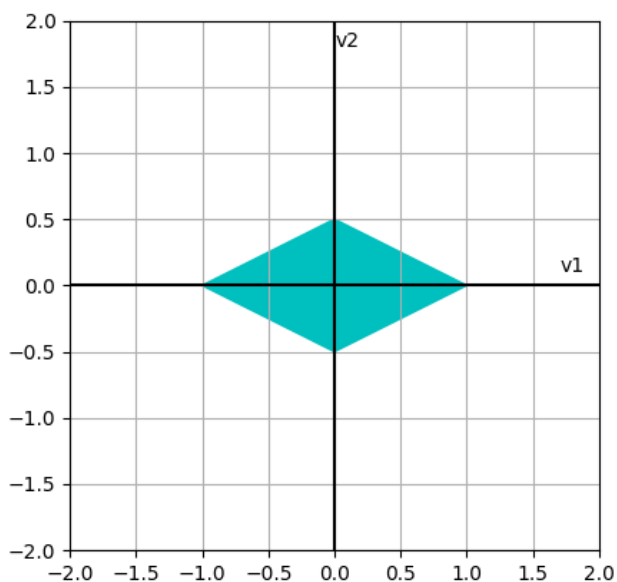


Рис. 15. Образ 14 (точка $(0, 0)$), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

3.15 Для отображения 15

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad (127)$$

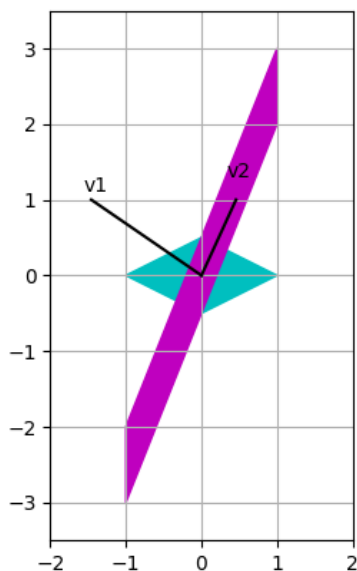


Рис. 16. Образ 15 для матрицы S_1 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

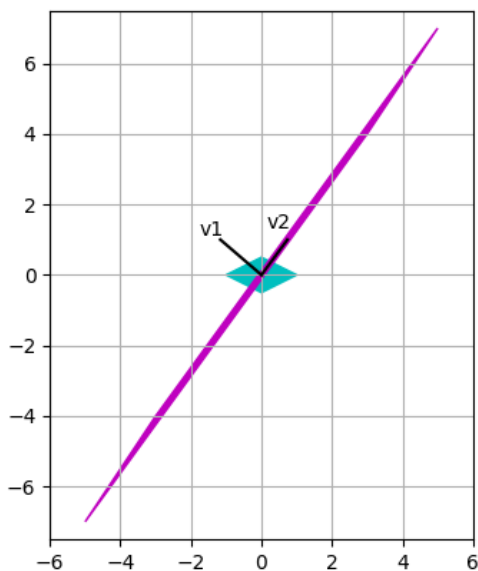


Рис. 17. Образ 15 для матрицы S_2 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

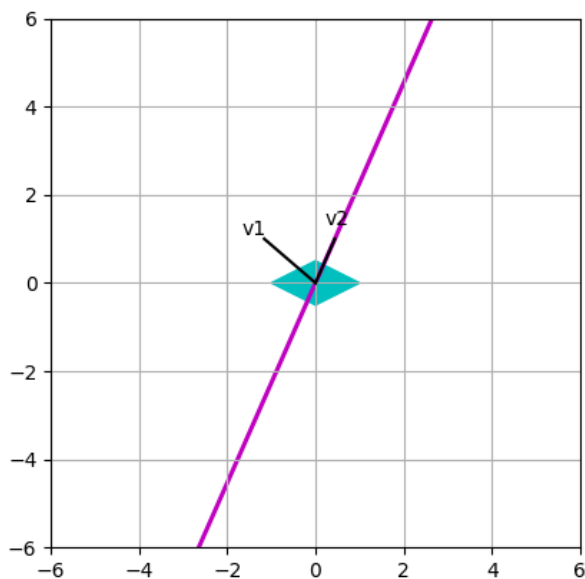


Рис. 18. Образ 15 для матрицы S_1S_2 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

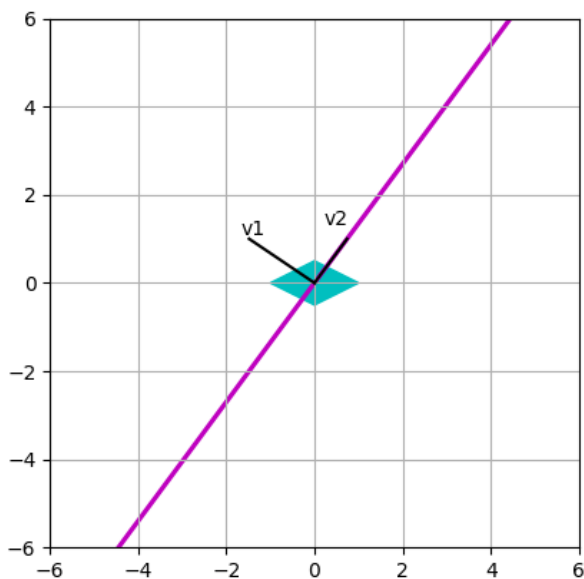


Рис. 19. Образ 15 для матрицы S_2S_1 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

3.16 Для отображения 16

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \quad (128)$$

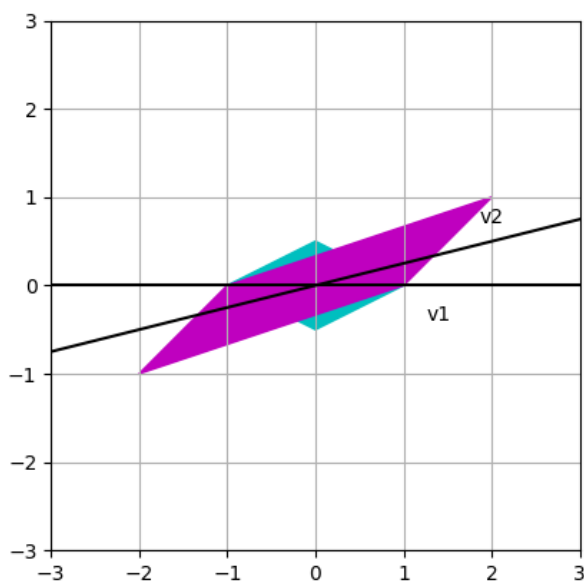


Рис. 20. Образ 16 для матрицы T_1 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

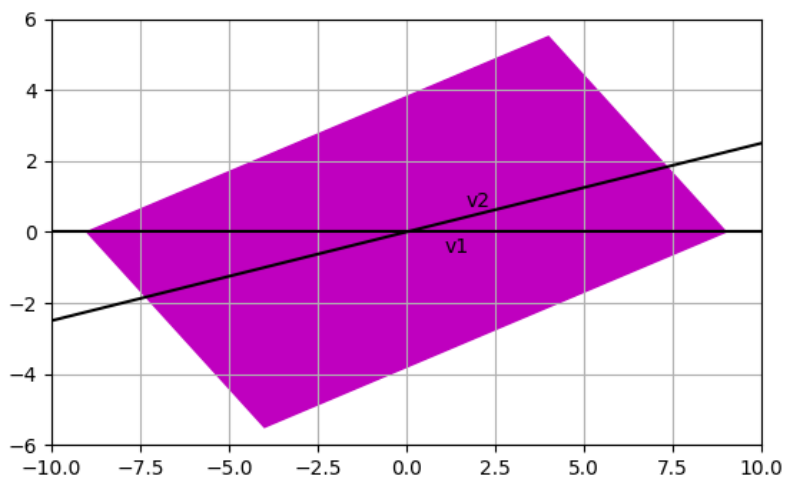


Рис. 21. Образ 16 для матрицы T_2 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

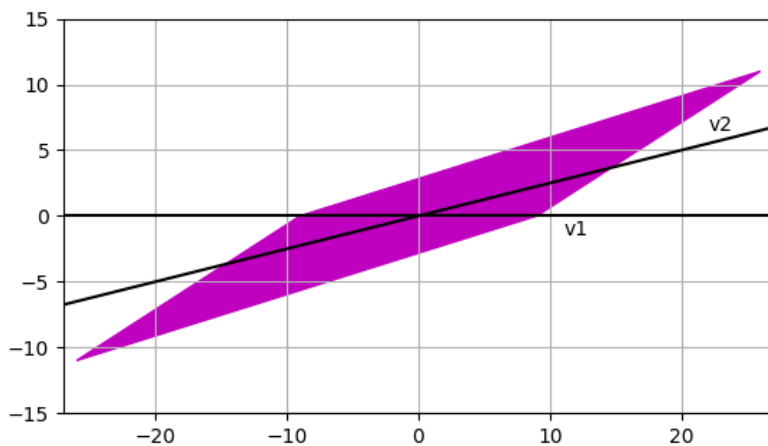


Рис. 22. Образ 16 для матрицы T_1T_2 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

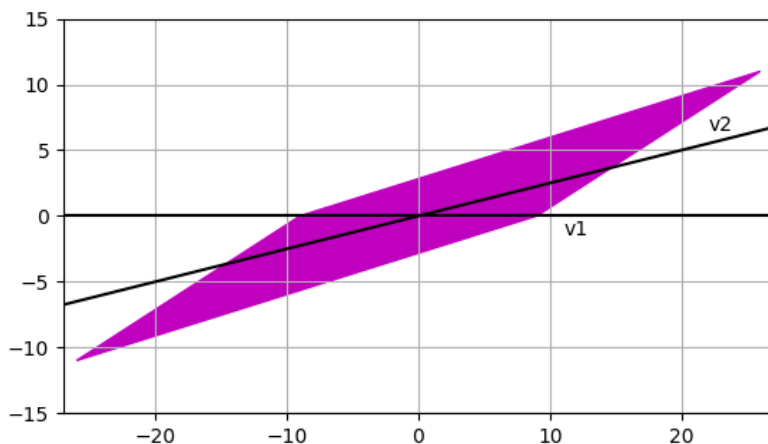


Рис. 23. Образ 16 для матрицы T_2T_1 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

Для визуализации был написан код на языке *Python* с использованием библиотек *Matplotlib* и *Numpy*.

Код расположен на **GitHub**.