Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 4
"Динамические системы"

по дисциплине Практическая линейная алгебра

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2023-2024

В этой лабораторной мы будем работать с непрерывными ($t \in \mathbb{R}$) *и дискретными* ($k \in \mathbb{Z}$) *линейными динамическими системами второго порядка вида*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_3 x_1(t) + a_4 x_2(t) \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_1 x_1(k) + a_2 x_2(k), \\ x_2(k+1) = a_3 x_1(k) + a_4 x_2(k) \end{cases} \tag{2}$$

в более компактной форме:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{3}$$

$$x(k+1) = Ax(k), \tag{4}$$

где $x(\cdot) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

1 задание. Придумать непрерывное.

Зададимся двумя неколлинеарными векторами v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^2$, не лежащими на координатных осях:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Придумаем непрерывные динамические системы:

1.1

Система ассимптотически устойчива, при этом если $x(0) = v_1$, то $x(t) \in Span\{v_1\}$, а если $x(0) = v_2$, то $x(t) \in Span\{v_2\}$ при всех $t \geq 0$.

Обратимся к уравнению $\dot{x}(t) = Ax(t),\ \ x(0) = x_0$ и к его решению:
$x(t) = e^{At}x_0$.

1. Система асимптотически устойчива, значит выполнено $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.
2. Выберем матрицу с двумя совпадающими **отрицательными** собственными числами, например:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Собственные числа $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$,
собственные векторы $w_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1.2

Система неустойчива, при этом у матрицы A не существует двух неколлинеарных собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 4$, собственные векторы соответственно $w_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1.3

Система неустойчива, при этом если $x(0) = v_1$, то $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -16 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -4$, собственные векторы соответственно $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1.4

Система асимптотически устойчива, при этом матрица $A \in \mathbb{R}^2$ имеет комплексные собственные вектора вида $v_1 \pm v_2 i \in \mathbb{C}^2$.

Сначала запишем собственные векторы искомой матрицы:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 4+3i \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 4-3i \end{pmatrix} \tag{9}$$

Будем искать матрицу записав ее спектральное разложение $A = V \cdot D \cdot V^{-1}$, где V – матрица, составленная из собственных векторов матрицы A, D – матрица, на главной диагонали которой расположены собственные числа.

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 4+3i & 4-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 4+3i & 4-3i \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \tag{11}$$

1.5

Система неустойчива, при этом матрица A имеет такие же слбственные вектора, как в предыдущем пункте.

Аналогично будем искать матрицу записав ее спектральное разложение $A = V \cdot D \cdot V^{-1}$, где V – матрица, составленная из собственных векторов матрицы A, D – матрица, на главной диагонали которой расположены собственные числа.

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 4+3i & 4-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 4+3i & 4-3i \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

1.6

Система не является асимптотически устойчивой, но не является и неустойчивой, при этом матрица A имеет собственные векторы такие же, как в пункте 4.

Вновь будем искать матрицу записав ее спектральное разложение $A = V \cdot D \cdot V^{-1}$, где V – матрица, составленная из собственных векторов матрицы A, D – матрица, на главной диагонали которой расположены собственные числа.

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 4+3i & 4-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 4+3i & 4-3i \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

2 задание. Замоделировать непрерывное.

2.1

Система ассимптотически устойчива, при этом если $x(0) = v_1$, то $x(t) \in Span\{v_1\}$, а если $x(0) = v_2$, то $x(t) \in Span\{v_2\}$ при всех $t \geq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

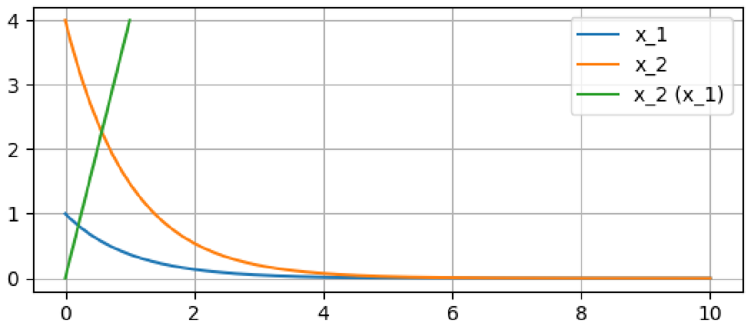

Рис. 1. Моделирование при $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

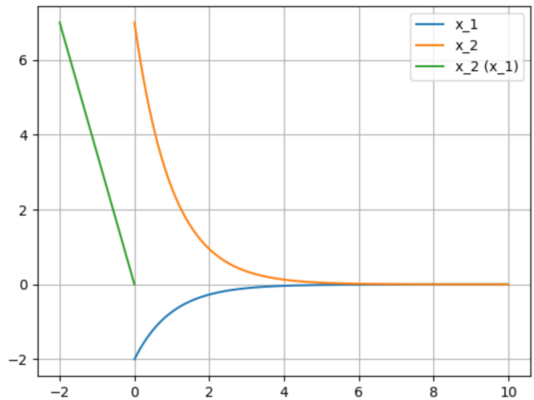

Рис. 2. Моделирование при $x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

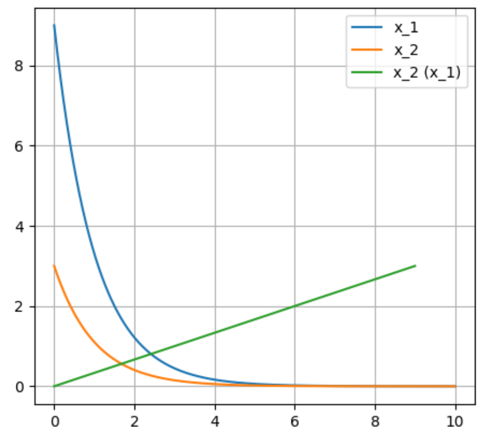

Рис. 3. Моделирование при $x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

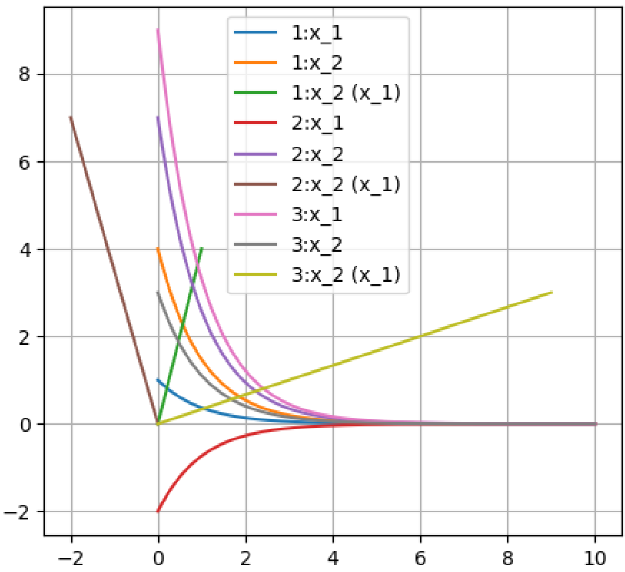

Рис. 4. Моделирование 1 при $1: \, x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \, 2: \, x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \, 3: \, x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

На приведенных выше графиках проиллюстрирована асимптотически устойчивая система, ведь $\lim\limits_{t \to \infty} x_1(t) = 0$ и $\lim\limits_{t \to \infty} x_2(t) = 0$.

2.2

Система неустойчива, при этом у матрицы A не существует двух неколлинеарных собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{17}$$

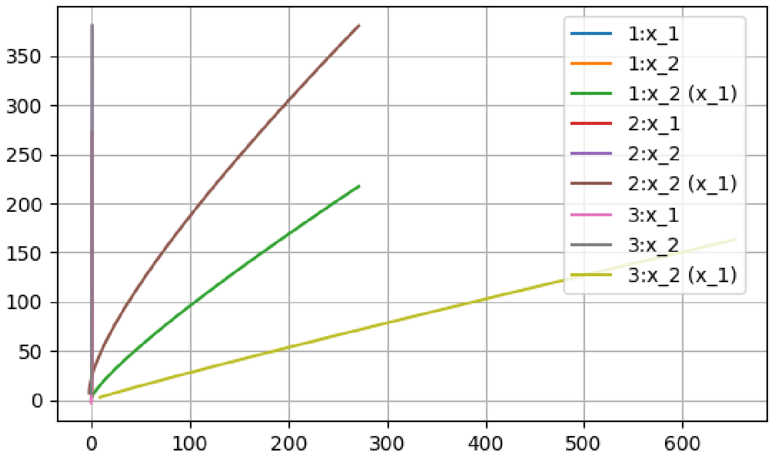

Рис. 5. Моделирование 2 при $1: x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $2: x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $3: x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Заметим, что система является неустойчивой, так как существуют такие начальные условия, что $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = \infty$ и $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = \infty$.

2.3

Система неустойчива, при этом если $x(0) = v_1$*, то* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -16 & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

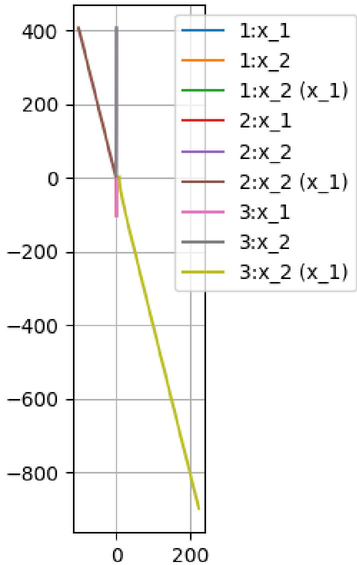

Рис. 6. Моделирование 3 при $1: x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $2: x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $3: x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

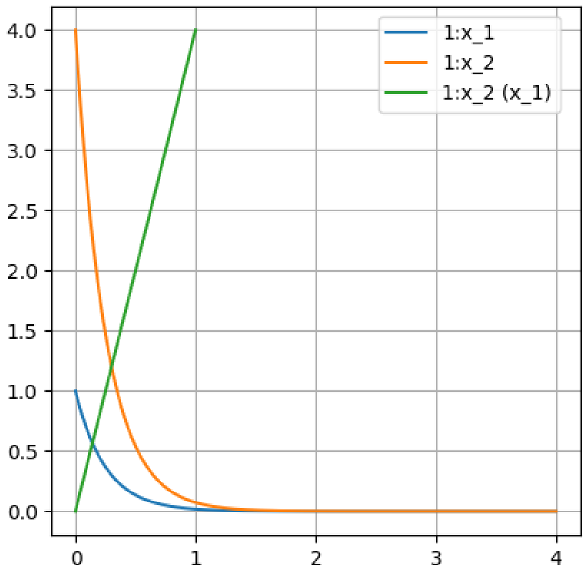

Рис. 7. Моделирование 3 при $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Система неустойчива в общем случае, но при $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$

2.4

Система асимптотически устойчива, при этом матрица $A \in \mathbb{R}^2$ имеет комплексные собственные вектора вида $v_1 \pm v_2 i \in \mathbb{C}^2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \tag{19}$$

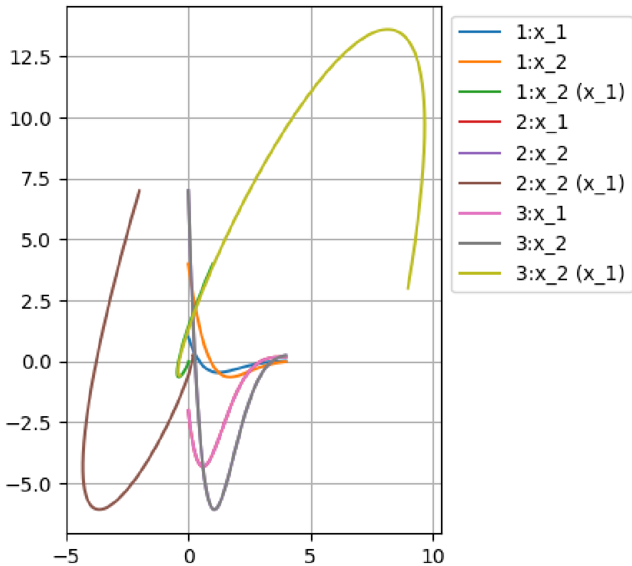

Рис. 8. Моделирование 4 при $1: x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $2: x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $3: x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

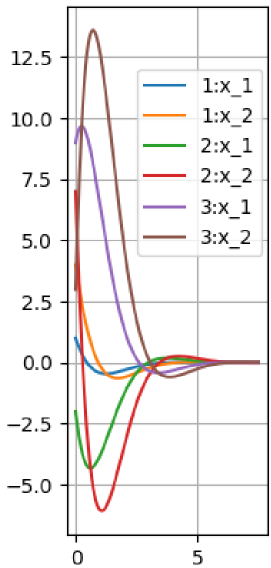

Рис. 9. Моделирование 4, только зависимости $x(t)$,
при $1: \; x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $2: \; x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $3: \; x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Полученные графики подтверждают асимптотическую устойчивость системы, $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = 0$.

2.5

Система неустойчива, при этом матрица A имеет такие же собственные вектора, как в предыдущем пункте.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

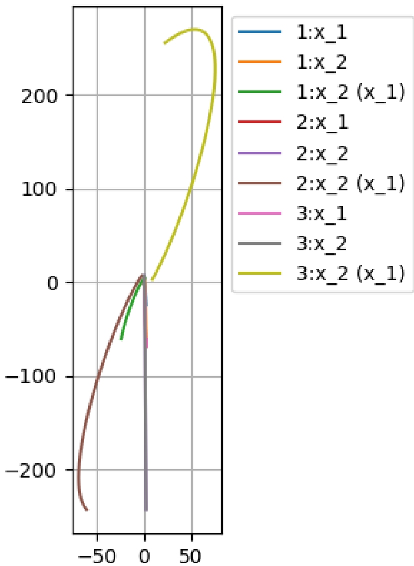

Рис. 10. Моделирование 5 при $1: x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $2: x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $3: x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

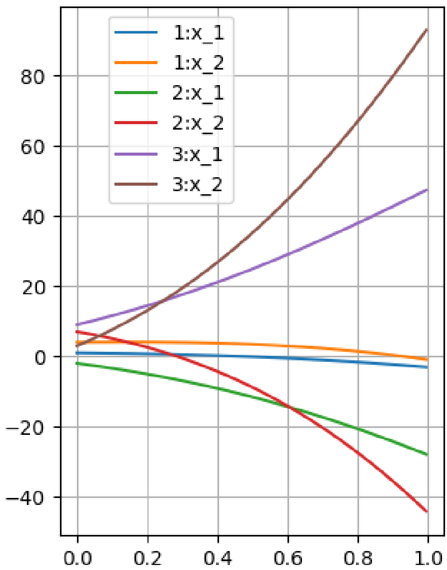

Рис. 11. Моделирование 5, только зависимости $x(t)$,
при $1:\ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $2:\ x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $3:\ x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Заметим, что система действительно является неустойчивой, так как кривые $x_1(t)$, $x_2(t)$ стремятся к $-\infty$ для заданных начальных условий.

2.6

Система не является асимптотически устойчивой, но не является и неустойчивой, при этом матрица A имеет собственные векторы такие же, как в пункте 4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

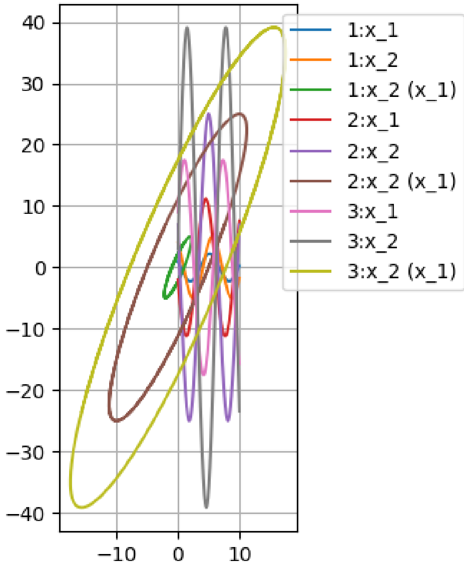

Рис. 12. Моделирование 6 при $1: x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $2: x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $3: x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

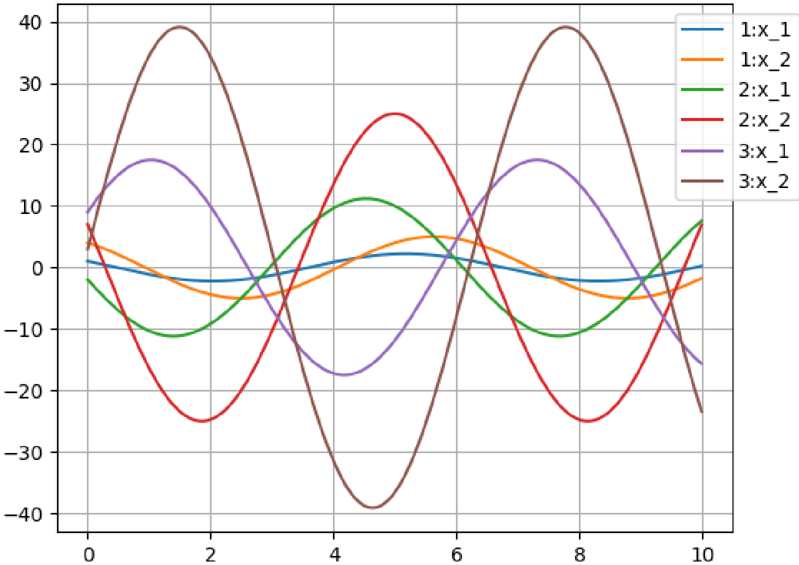

Рис. 13. Моделирование 6, только зависимости $x(t)$*,*
при $1: x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $2: x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $3: x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

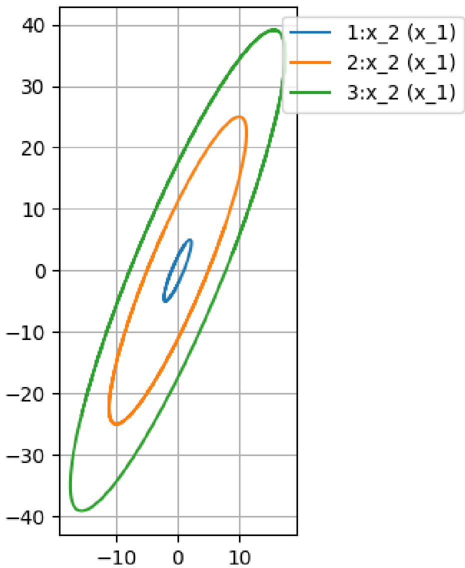

Рис. 14. Моделирование 6, только зависимости $x_2(x_1)$,
при $1: x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $2: x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $3: x_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Система является не является ни асимптотически устойчивой, ни неустойчивой. Во-первых, функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ не стремятся ни к нулю, ни к бесконечности при $t \to \infty$, а траектории $x_2(x_1)$ замкнуты, значит система обладает просто устойчивостью.

3 задание. Придумать дискретное.

Придумать дискретные динамические системы, обладающие следующими собственными числами (при этом ни одна из придуманных матриц A не должна быть диагональной:

3.1 $\lambda_{1,2} = -1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

3.2 $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$$\left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 0 \tag{23}$$

$$\lambda\left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}i\left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 0 \tag{24}$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}i\lambda + \lambda\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}i\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}}i\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\frac{1}{\sqrt{2}}i = 0 \tag{25}$$

$$\lambda^2 + \frac{2\lambda}{\sqrt{2}} + 1 = 0 \tag{26}$$

$$\left(\lambda^2 + \frac{2\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0 \tag{27}$$

$$\left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0 \tag{28}$$

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{29}$$

3.3 $\lambda_{1,2} = \pm i$

$$(\lambda + i)\,(\lambda - i) = 0 \tag{30}$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \tag{31}$$

Пусть искомая матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 1 & b \end{pmatrix} \tag{32}$$

Тогда характеристический полином:

$$(a - \lambda)\,(b - \lambda) - c = 0 \tag{33}$$

$$\lambda^2 - \lambda(a + b) + ab - c = \lambda^2 + 1 = 0 \tag{34}$$

$$\begin{cases} a = -b \\ ab - c = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = -b \\ -a^2 - c = 1 \end{cases} \tag{35}$$

Пусть $a = 1$, тогда $b = -1$, $c = -2$.
Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

3.4 $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$$\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 0 \tag{37}$$

$$\lambda\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}i\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 0 \tag{38}$$

$$\lambda^2 - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}i - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} = 0 \tag{39}$$

$$\lambda^2 - \frac{2\lambda}{\sqrt{2}} + 1 = 0 \tag{40}$$

$$\left(\lambda^2 - \frac{2\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0 \tag{41}$$

$$\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0 \tag{42}$$

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{43}$$

3.5 $\lambda_{1,2} = 1$

$$(\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \tag{44}$$

Пусть искомая матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 1 & b \end{pmatrix} \tag{45}$$

Тогда характеристический полином:

$$(a - \lambda)(b - \lambda) - c = 0 \tag{46}$$

$$\lambda^2 - \lambda(a + b) + ab - c = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \tag{47}$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ ab - c = 1 \end{cases} \tag{48}$$

Пусть $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, тогда $c = -\frac{1}{4}$.

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \tag{49}$$

Для следующих пунктов выберем константы: $c = \frac{1}{2}$, $d = 2$.

3.6 $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{50}$$

3.7 $\lambda_{1,2} = \pm\frac{i}{2}$

$$\left(\lambda + \frac{i}{2}\right)\left(\lambda - \frac{i}{2}\right) = 0 \tag{51}$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{4} = 0 \tag{52}$$

Пусть искомая матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 1 & b \end{pmatrix} \tag{53}$$

Тогда характеристический полином:

$$(a - \lambda)(b - \lambda) - c = 0 \tag{54}$$

$$\lambda^2 - \lambda(a + b) + ab - c = \lambda^2 + \frac{1}{4} = 0 \tag{55}$$

$$\begin{cases} a = -b \\ ab - c = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -b \\ -a^2 - c = \frac{1}{4} \end{cases} \tag{56}$$

Пусть $a = 1$, тогда $b = -1$, $c = -\frac{5}{4}$.
Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{4} \\ \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{57}$$

3.8 $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$

$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0 \tag{58}$$

Пусть искомая матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 1 & b \end{pmatrix} \tag{59}$$

Тогда характеристический полином:

$$(a - \lambda)\,(b - \lambda) - c = 0 \tag{60}$$

$$\lambda^2 - \lambda(a + b) + ab - c = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0 \tag{61}$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ ab - c = \frac{1}{4} \end{cases} \tag{62}$$

Пусть $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$, тогда $c = -\frac{1}{16}$.

Искомая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} \\ \\ 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \tag{63}$$

3.9 $\lambda_{1,2} = -2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{64}$$

3.10 $\lambda_{1,2} = \pm 2i$

3.11 $\lambda_{1,2} = 2$

3.12 $\lambda_{1,2} = 0$

4 задание. Замоделировать дискретное.