Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 2
"2D-преобразования "

по дисциплине Практическая линейная алгебра

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2023-2024

Перед началом выполнения работы выберем 4 различных числа:

$$a = 2$$

$$b = 8$$

$$c = 5$$

$$d = 3$$

Отображение имеет вид:

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{old} \\ y_{old} \end{bmatrix} \tag{1}$$

1 Задание.

Придумать матрицы 2×2, которые задают:

1.1

Отражение (симметрию) плоскости относительно прямой $y = ax$, в нашем случае после подстановки $a = 2$, получаем $y = 2x$. Задача – найти матрицу вида:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Рассмотрим отражение 2 точек плоскости относительно прямой $y = 2x$.
Для точки $A(2; 2)$:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 2.8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2(m_{00} + m_{01}) = 0.4 \\ 2(m_{10} + m_{11}) = 2.8 \end{cases} \tag{3}$$

И, соотвественно, для точки $B(1; 2)$:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} m_{00} + 2m_{01} = 1 \\ m_{10} + 2m_{11} = 2 \end{cases} \tag{4}$$

Объединим, системы уравнений:

$$\begin{cases} 2(m_{00} + m_{01}) = 0.4 \\ 2(m_{10} + m_{11}) = 2.8 \\ m_{00} + 2m_{01} = 1 \\ m_{10} + 2m_{11} = 2 \end{cases} \tag{5}$$

И получим ответ:

$$\begin{cases} m_{00} = -0.6 \\ m_{01} = 0.8 \\ m_{10} = 0.8 \\ m_{11} = 0.6 \end{cases} \tag{6}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \tag{7}$$

1.2

Отображение всей плоскости в прямую $y = bx$ $(y = 8x)$. Предположим, что все точки плоскости сохраняют координату x и меняют только координату y по закону $y = 8x$. Рассмотрим также преобразование для двух точек.
Для точки $A(1; 5)$:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} m_{00} + 5m_{01} = 1 \\ m_{10} + 5m_{11} = 8 \end{cases} \tag{8}$$

И, соотвественно, для точки $B(3; 7)$:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 24 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3m_{00} + 7m_{01} = 3 \\ 3m_{10} + 7m_{11} = 24 \end{cases} \tag{9}$$

Заметим, что решением будет:

$$\begin{cases} m_{00} = 1 \\ m_{01} = 0 \\ m_{10} = 8 \\ m_{11} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

1.3

Поворот плоскости на $10 * 5 = 50$ *градусов против часовой стрелки.* Запишем матрицу поворота при движении по часовой стрелке на угол ϕ:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{12}$$

И преобразуем матрицу для поворота против часовой стрелки (на угол $-\phi$):

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{13}$$

Перед подстановкой угла, запишем преобразование его из градусов в радианы:

$$\phi = \frac{50\pi}{180} = \frac{5\pi}{18} \tag{14}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{5\pi}{18} & -\sin\frac{5\pi}{18} \\ \\ \sin\frac{5\pi}{18} & \cos\frac{5\pi}{18} \end{bmatrix} \tag{15}$$

1.4

Центральную симметрию плоскости относительно начала координат Матрица, заадющая центральную симметрию:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Убедимся в этом на примере точки $A(2;3)$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

1.5

Отображение, которое можно описать так: сначала отражение относительно прямой $y = 2x$, потом поворот на 30 градусов по часовой стрелке.

Пусть A – матрица отражения относительно прямой $y = 2x$, B – матрица поворота на 30 градусов по часовой стрелке, C_{old}, C_{new} – матрицы координат до преобразования и после соотвественно. Запишем необходимое преобразование координат:

$$B(AC_{old}) = C_{new} \tag{19}$$

Воспользуемся свойством ассоциативности умножения матриц:

$$(BA)C_{old} = C_{new} \tag{20}$$

Согласно п. 1.1 матрица A:

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Найдем матрицу B, подставив в выражение (12) из пункта 1.3 $\phi = \frac{\pi}{6}$:

$$B = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \tag{22}$$

Перемножим матрицы B и A:

$$BA = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3\sqrt{3} + 0.4 & 0.4\sqrt{3} + 0.3 \\ 0.3 + 0.4\sqrt{3} & -0.4 + 0.3\sqrt{3} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} -0.3\sqrt{3} + 0.4 & 0.4\sqrt{3} + 0.3 \\ 0.3 + 0.4\sqrt{3} & -0.4 + 0.3\sqrt{3} \end{bmatrix} \tag{24}$$