Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 2
"2D-преобразования "

по дисциплине Практическая линейная алгебра

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2023-2024

Перед началом выполнения работы выберем 4 различных числа:

$$a = 2$$

$$b = 8$$

$$c = 5$$

$$d = 3$$

Отображение имеет вид:

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{old} \\ y_{old} \end{bmatrix} \tag{1}$$

1 Задание.

Придумать матрицы 2×2, которые задают:

1.1

Отражение (симметрию) плоскости относительно прямой $y = ax$*, в нашем случае после подстановки* $a = 2$*, получаем* $y = 2x$*. Задача – найти матрицу вида*:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Рассмотрим отражение 2 точек плоскости относительно прямой $y = 2x$.
Для точки $A(2;2)$:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 2.8 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 2(m_{00} + m_{01}) = 0.4 \\ 2(m_{10} + m_{11}) = 2.8 \end{cases} \tag{3}$$

И, соотвественно, для точки $B(1;2)$:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{cases} m_{00} + 2m_{01} = 1 \\ m_{10} + 2m_{11} = 2 \end{cases} \tag{4}$$

Объединим, системы уравнений:

$$\begin{cases} 2(m_{00} + m_{01}) = 0.4 \\ 2(m_{10} + m_{11}) = 2.8 \\ m_{00} + 2m_{01} = 1 \\ m_{10} + 2m_{11} = 2 \end{cases} \tag{5}$$

И получим ответ:

$$\begin{cases} m_{00} = -0.6 \\ m_{01} = 0.8 \\ m_{10} = 0.8 \\ m_{11} = 0.6 \end{cases} \tag{6}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \tag{7}$$

1.2

Отображение всей плоскости в прямую $y = bx$ $(y = 8x)$. Предположим, что все точки плоскости сохраняют координату x и меняют только координату y по закону $y = 8x$. Рассмотрим также преобразование для двух точек.
Для точки $A(1;5)$:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \to \begin{cases} m_{00} + 5m_{01} = 1 \\ m_{10} + 5m_{11} = 8 \end{cases} \tag{8}$$

И, соотвественно, для точки $B(3;7)$:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 24 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 3m_{00} + 7m_{01} = 3 \\ 3m_{10} + 7m_{11} = 24 \end{cases} \tag{9}$$

Заметим, что решением будет:

$$\begin{cases} m_{00} = 1 \\ m_{01} = 0 \\ m_{10} = 8 \\ m_{11} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

1.3

Поворот плоскости на $10 * 5 = 50$ *градусов против часовой стрелки.* Запишем матрицу поворота при движении по часовой стрелке на угол ϕ:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{12}$$

И преобразуем матрицу для поворота против часовой стрелки (на угол $-\phi$):

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{13}$$

Перед подстановкой угла, запишем преобразование его из градусов в радианы:

$$\phi = \frac{50\pi}{180} = \frac{5\pi}{18} \tag{14}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{5\pi}{18} & -\sin\frac{5\pi}{18} \\ \\ \sin\frac{5\pi}{18} & \cos\frac{5\pi}{18} \end{bmatrix} \tag{15}$$

1.4

Центральную симметрию плоскости относительно начала координат Матрица, заадющая центральную симметрию:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Убедимся в этом на примере точки $A(2; 3)$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

1.5

Отображение, которое можно описать так: сначала отражение относительно прямой $y = 2x$, потом поворот на 30 градусов по часовой стрелке.

Пусть A – матрица отражения относительно прямой $y = 2x$, B – матрица поворота на 30 градусов по часовой стрелке, C_{old}, C_{new} – матрицы координат до преобразования и после соотвественно. Запишем необходимое преобразование координат:

$$B(AC_{old}) = C_{new} \tag{19}$$

Воспользуемся свойством ассоциативности умножения матриц:

$$(BA)C_{old} = C_{new} \tag{20}$$

Согласно п. 1.1 матрица A:

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Найдем матрицу B, подставив в выражение (12) из пункта 1.3 $\phi = \frac{\pi}{6}$:

$$B = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \tag{22}$$

Перемножим матрицы B и A:

$$BA = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3\sqrt{3} + 0.4 & 0.4\sqrt{3} + 0.3 \\ 0.3 + 0.4\sqrt{3} & -0.4 + 0.3\sqrt{3} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} -0.3\sqrt{3} + 0.4 & 0.4\sqrt{3} + 0.3 \\ 0.3 + 0.4\sqrt{3} & -0.4 + 0.3\sqrt{3} \end{bmatrix} \tag{24}$$

1.6

Отображение, которое переводит прямую $y = 0$ в $y = 2x$ и прямую $x = 0$ в $y = 8x$
Пусть A – матрица, переводящая прямую $y = 0$ в $y = 2x$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

B – матрица, переводящая прямую $x = 0$ в $y = 8x$:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

1.7

Отображение, которое переводит прямую $y = 2x$ в $y = 0$ и прямую $y = 8x$ в $x = 0$
Так как преобразование – обратное, проводимому в пункте 1.6. Матрицу можно найти, вычислив обратную.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{8} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Искомая матрица:

$$\frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{8} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

1.8

Отображение, которое меняет местами $y = 2x$ и $y = 8x$.
Пусть M – искомая матрица. Запишем 2 преобразования:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 2m_{00} + 4m_{01} = 2 \\ 2m_{10} + 4m_{11} = 16 \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 3m_{00} + 24m_{01} = 3 \\ 3m_{10} + 24m_{11} = 6 \end{cases} \tag{31}$$

Пусть $m_{00} = 1$, $m_{01} = 0$. Решим систему, чтобы найти оставшиеся компоненты:

$$\begin{cases} 2m_{10} + 4m_{11} = 16 \\ 3m_{10} + 24m_{11} = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_{10} = 10 \\ m_{11} = -1 \end{cases} \tag{32}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

1.9

Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в круг площади $c = 5$.

Определитель матрицы преобразования – множитель площади, то есть в нашем случае определитель искомой матрицы равен 5.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \tag{34}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \tag{35}$$

1.10

Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в некруг площади $d = 3$.

Определитель матрицы преобразования – множитель площади, то есть в нашем случае определитель искомой матрицы равен 3.

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

1.11

Отображение, у которого собственные вектора перпендикулярны, и ни один из них не лежит на прямой $y = 0$ или $y = x$.

Пусть собственные векторы:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{37}$$

И собственные числа, соотвествующие им $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$. По этим данным восстановим матрицу отображения M:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} m_{00} + 2m_{01} = 2 \\ m_{10} + 2m_{11} = 4 \end{cases} \tag{38}$$

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -6m_{00} + 3m_{01} = -6 \\ -6m_{10} + 3m_{11} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2m_{00} - m_{01} = 2 \\ 2m_{10} - m_{11} = -1 \end{cases} \tag{39}$$

$$\begin{cases} m_{00} + 2m_{01} = 2 \\ m_{10} + 2m_{11} = 4 \\ 2m_{00} - 2 = m_{01} \\ 2m_{10} + 1 = m_{11} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_{00} = \frac{6}{5} \\ m_{10} = \frac{2}{5} \\ m_{01} = \frac{2}{5} \\ m_{11} = \frac{9}{5} \end{cases} \tag{40}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ \\ \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \tag{41}$$

1.12

Отображение, у которого нет двух неколлинеарных собственных векторов.

Пусть задана матрица:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Найдем ее собственные числа: $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = 4$. Соответствующие собственные векторы: $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Такие векторы всегда будут коллинеарны.

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{43}$$

1.13

Отображение, у которого нет ни одного вещественного собственного вектора (но при этом само отображение задается вещественной матрицей).

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \tag{44}$$

Собственные числа и соотвествующие им собственные вектры:

$$\lambda_1 = 2i,\ v_1 = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = -2i,\ v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{45}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \tag{46}$$

1.14

Отображение, для которого любой ненулевой вектор является собственным.

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{47}$$

1.15

Пару отображений, последовательное применение которых дает различные результаты в зависимости от порядка $AB \neq BA$.

Искомые матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \tag{48}$$

1.16

Пару отображений, последовательное применение которых дает одинаковый результат независимо от порядка $AB = BA$.
Пусть матрица A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{49}$$

Найдем какую-нибудь коммутативную к ней матрицу B:

$$B = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{bmatrix} \tag{50}$$

$$AB = BA \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{51}$$

$$\begin{cases} b_{00} + 4b_{10} = b_{00} \\ b_{01} + 4b_{11} = 4b_{00} + 2b_{01} \\ 2b_{10} = b_{10} \\ 2b_{11} = 2b_{11} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b_{10} = 0 \\ b_{00} = b_{00} \\ b_{01} + 4b_{11} = 4b_{00} + 2b_{01} \\ 2b_{11} = 2b_{11} \end{cases} \tag{52}$$

Пусть $b_{00} = 9$ и $b_{11} = 11$

$$\begin{cases} b_{10} = 0 \\ b_{00} = 9 \\ b_{01} + 4b_{11} = 4b_{00} + 2b_{01} \\ b_{11} = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b_{10} = 0 \\ b_{00} = 9 \\ b_{01} = 8 \\ b_{11} = 11 \end{cases} \tag{53}$$

Искомые матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \tag{54}$$

2 Анализ

2.1

Найти образ и ядро придуманных отображений из пунктов 1, 2, 13, 14.

$$A = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \tag{55}$$