Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 2
"2D-преобразования "

по дисциплине Практическая линейная алгебра

Выполнила: студентка гр. **R3238**

Нечаева А. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2023-2024

Перед началом выполнения работы выберем 4 различных числа:

$$a = 2$$

$$b = 8$$

$$c = 5$$

$$d = 3$$

Отображение имеет вид:

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{old} \\ y_{old} \end{bmatrix} \tag{1}$$

1 Задание.

Придумать матрицы 2×2, которые задают:

1.1

Отражение (симметрию) плоскости относительно прямой $y = ax$*, в нашем случае после подстановки* $a = 2$*, получаем* $y = 2x$*. Задача – найти матрицу вида*:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Рассмотрим отражение 2 точек плоскости относительно прямой $y = 2x$.
Для точки $A(2; 2)$:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 2.8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2(m_{00} + m_{01}) = 0.4 \\ 2(m_{10} + m_{11}) = 2.8 \end{cases} \tag{3}$$

И, соотвественно, для точки $B(1; 2)$:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} m_{00} + 2m_{01} = 1 \\ m_{10} + 2m_{11} = 2 \end{cases} \tag{4}$$

Объединим, системы уравнений:

$$\begin{cases} 2(m_{00} + m_{01}) = 0.4 \\ 2(m_{10} + m_{11}) = 2.8 \\ m_{00} + 2m_{01} = 1 \\ m_{10} + 2m_{11} = 2 \end{cases} \tag{5}$$

И получим ответ:

$$\begin{cases} m_{00} = -0.6 \\ m_{01} = 0.8 \\ m_{10} = 0.8 \\ m_{11} = 0.6 \end{cases} \tag{6}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \tag{7}$$

1.2

Отображение всей плоскости в прямую $y = bx$ $(y = 8x)$. Предположим, что все точки плоскости сохраняют координату x и меняют только координату y по закону $y = 8x$. Рассмотрим также преобразование для двух точек.
Для точки $A(1; 5)$:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} m_{00} + 5m_{01} = 1 \\ m_{10} + 5m_{11} = 8 \end{cases} \tag{8}$$

И, соотвественно, для точки $B(3; 7)$:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 24 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3m_{00} + 7m_{01} = 3 \\ 3m_{10} + 7m_{11} = 24 \end{cases} \tag{9}$$

Заметим, что решением будет:

$$\begin{cases} m_{00} = 1 \\ m_{01} = 0 \\ m_{10} = 8 \\ m_{11} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

1.3

Поворот плоскости на $10 * 5 = 50$ *градусов против часовой стрелки.* Запишем матрицу поворота при движении по часовой стрелке на угол ϕ:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{12}$$

И преобразуем матрицу для поворота против часовой стрелки (на угол $-\phi$):

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{13}$$

Перед подстановкой угла, запишем преобразование его из градусов в радианы:

$$\phi = \frac{50\pi}{180} = \frac{5\pi}{18} \tag{14}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{5\pi}{18} & -\sin\frac{5\pi}{18} \\ \\ \sin\frac{5\pi}{18} & \cos\frac{5\pi}{18} \end{bmatrix} \tag{15}$$

1.4

Центральную симметрию плоскости относительно начала координат
Матрица, заадющая центральную симметрию:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Убедимся в этом на примере точки $A(2;3)$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

1.5

Отображение, которое можно описать так: сначала отражение относительно прямой $y = 2x$, потом поворот на 30 градусов по часовой стрелке.

Пусть A – матрица отражения относительно прямой $y = 2x$, B – матрица поворота на 30 градусов по часовой стрелке, C_{old}, C_{new} – матрицы координат до преобразования и после соотвественно. Запишем необходимое преобразование координат:

$$B(AC_{old}) = C_{new} \tag{19}$$

Воспользуемся свойством ассоциативности умножения матриц:

$$(BA)C_{old} = C_{new} \tag{20}$$

Согласно п. 1.1 матрица A:

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Найдем матрицу B, подставив в выражение (12) из пункта 1.3 $\phi = \frac{\pi}{6}$:

$$B = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \tag{22}$$

Перемножим матрицы B и A:

$$BA = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3\sqrt{3} + 0.4 & 0.4\sqrt{3} + 0.3 \\ 0.3 + 0.4\sqrt{3} & -0.4 + 0.3\sqrt{3} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} -0.3\sqrt{3} + 0.4 & 0.4\sqrt{3} + 0.3 \\ 0.3 + 0.4\sqrt{3} & -0.4 + 0.3\sqrt{3} \end{bmatrix} \tag{24}$$

1.6

Отображение, которое переводит прямую $y = 0$ в $y = 2x$ и прямую $x = 0$ в $y = 8x$
Пусть A – матрица, переводящая прямую $y = 0$ в $y = 2x$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

B – матрица, переводящая прямую $x = 0$ в $y = 8x$:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

1.7

Отображение, которое переводит прямую $y = 2x$ в $y = 0$ и прямую $y = 8x$ в $x = 0$
Так как преобразование – обратное, проводимому в пункте 1.6. Матрицу можно найти, вычислив обратную.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{8} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Искомая матрица:

$$\frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{8} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

1.8

Отображение, которое меняет местами $y = 2x$ и $y = 8x$.
Пусть M – искомая матрица. Запишем 2 преобразования:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2m_{00} + 4m_{01} = 2 \\ 2m_{10} + 4m_{11} = 16 \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3m_{00} + 24m_{01} = 3 \\ 3m_{10} + 24m_{11} = 6 \end{cases} \tag{31}$$

Пусть $m_{00} = 1$, $m_{01} = 0$. Решим систему, чтобы найти оставшиеся компоненты:

$$\begin{cases} 2m_{10} + 4m_{11} = 16 \\ 3m_{10} + 24m_{11} = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_{10} = 10 \\ m_{11} = -1 \end{cases} \tag{32}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

1.9

Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в круг площади $c = 5$.

Определитель матрицы преобразования – множитель площади, то есть в нашем случае определитель искомой матрицы равен 5.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \tag{34}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \tag{35}$$

1.10

Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в некруг площади $d = 3$.

Определитель матрицы преобразования – множитель площади, то есть в нашем случае определитель искомой матрицы равен 3.

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

1.11

Отображение, у которого собственные вектора перпендикулярны, и ни один из них не лежит на прямой $y = 0$ или $y = x$.

Пусть собственные векторы:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{37}$$

И собственные числа, соотвествующие им $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$. По этим данным восстановим матрицу отображения M:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} m_{00} + 2m_{01} = 2 \\ m_{10} + 2m_{11} = 4 \end{cases} \tag{38}$$

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -6m_{00} + 3m_{01} = -6 \\ -6m_{10} + 3m_{11} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2m_{00} - m_{01} = 2 \\ 2m_{10} - m_{11} = -1 \end{cases} \tag{39}$$

$$\begin{cases} m_{00} + 2m_{01} = 2 \\ m_{10} + 2m_{11} = 4 \\ 2m_{00} - 2 = m_{01} \\ 2m_{10} + 1 = m_{11} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_{00} = \frac{6}{5} \\ m_{10} = \frac{2}{5} \\ m_{01} = \frac{2}{5} \\ m_{11} = \frac{9}{5} \end{cases} \tag{40}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ \\ \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \tag{41}$$

1.12

Отображение, у которого нет двух неколлинеарных собственных векторов.

Пусть задана матрица:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Найдем ее собственные числа: $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = 4$. Соответствующие собственные векторы: $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Такие векторы всегда будут коллинеарны.

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{43}$$

1.13

Отображение, у которого нет ни одного вещественного собственного вектора (но при этом само отображение задается вещественной матрицей).

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \tag{44}$$

Собственные числа и соотвествующие им собственные вектры:

$$\lambda_1 = 2i,\ v_1 = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = -2i,\ v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{45}$$

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \tag{46}$$

1.14

Отображение, для которого любой ненулевой вектор является собственным.

Искомая матрица:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{47}$$

1.15

Пару отображений, последовательное применение которых дает различные результаты в зависимости от порядка $AB \neq BA$.

Искомые матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ \ B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \tag{48}$$

1.16

Пару отображений, последовательное применение которых дает одинаковый результат независимо от порядка $AB = BA$.
Пусть матрица A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{49}$$

Найдем какую-нибудь коммутативную к ней матрицу B:

$$B = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{bmatrix} \tag{50}$$

$$AB = BA \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{51}$$

$$\begin{cases} b_{00} + 4b_{10} = b_{00} \\ b_{01} + 4b_{11} = 4b_{00} + 2b_{01} \\ 2b_{10} = b_{10} \\ 2b_{11} = 2b_{11} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b_{10} = 0 \\ b_{00} = b_{00} \\ b_{01} + 4b_{11} = 4b_{00} + 2b_{01} \\ 2b_{11} = 2b_{11} \end{cases} \tag{52}$$

Пусть $b_{00} = 9$ и $b_{11} = 11$

$$\begin{cases} b_{10} = 0 \\ b_{00} = 9 \\ b_{01} + 4b_{11} = 4b_{00} + 2b_{01} \\ b_{11} = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b_{10} = 0 \\ b_{00} = 9 \\ b_{01} = 8 \\ b_{11} = 11 \end{cases} \tag{53}$$

Искомые матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \tag{54}$$

2 Анализ

2.1

Найти образ и ядро придуманных отображений из пунктов 1, 2, 13, 14.

Для пункта 1:

$$A = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \tag{55}$$

Найдем образ, для этого приведем матрицу к приведённому ступенчатому виду:

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.2 & 1.4 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{56}$$

$$Range(A) = Span\left\{ \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix} \right\} \tag{57}$$

Найдем ядро отображения – множество векторов, отображающихся в ноль:

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{58}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \end{array}\right] \to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \tag{59}$$

$$Nullspace(A) = \varnothing \tag{60}$$

Для пункта 2:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \tag{61}$$

Найдем образ, для этого приведем матрицу к приведённому ступенчатому виду:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{62}$$

$$Range(B) = Span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \right\} \tag{63}$$

Найдем ядро отображения – множество векторов, отображающихся в ноль:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{64}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 8 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_2 \end{cases} \tag{65}$$

$$Nullspace(B) = Span\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \tag{66}$$

Для пункта 13:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \tag{67}$$

Найдем образ, для этого приведем матрицу к приведённому ступенчатому виду:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{68}$$

$$Range(C) = Span\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \tag{69}$$

Найдем ядро отображения – множество векторов, отображающихся в ноль:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{70}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & | & 0 \\ 4 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \tag{71}$$

$$Nullspace() = \varnothing \tag{72}$$

Для пункта 14:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{73}$$

Найдем образ, для этого приведем матрицу к приведённому ступенчатому виду:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{74}$$

$$Range(D) = \varnothing \tag{75}$$

Найдем ядро отображения – множество векторов, отображающихся в ноль:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{76}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \end{cases} \tag{77}$$

$$Nullspace(D) = Span\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right\}\ ,\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R} \tag{78}$$

2.2

Найти собственные числа и собственные векторы придуманных отображений из пунктов 1, 2, 3, 4, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Для пункта 1:

$$A = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \tag{79}$$

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -0.6 - \lambda & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0\ \rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1 \tag{80}$$

Найдем собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\ \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases} \tag{81}$$

Найдем собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\ \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \tag{82}$$

Аналогично найдем собственные числа и собственные векторы для остальных отображений.

Для пункта 2:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \tag{83}$$

$$\lambda_1 = 0,\ v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \lambda_2 = 1,\ v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{84}$$

Для пункта 3:

$$C = \begin{bmatrix} \cos\frac{5\pi}{18} & -\sin\frac{5\pi}{18} \\ \\ \sin\frac{5\pi}{18} & \cos\frac{5\pi}{18} \end{bmatrix} \tag{85}$$

$$\lambda_1 \approx 0.643 - i0.766,\ v_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix},\ \lambda_2 \approx 0.643 + i0.766,\ v_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \tag{86}$$

Для пункта 4:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{87}$$

$$\lambda_1 = -1,\ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \lambda_2 = -1,\ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{88}$$

Для пункта 8:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \tag{89}$$

$$\lambda_1 = 1,\ v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix},\ \lambda_2 = -1,\ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{90}$$

Для пункта 11:

$$G = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ \\ \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \tag{91}$$

$$\lambda_1 = 1,\ v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \lambda_2 = 2,\ v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{92}$$

Для пункта 12:

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{93}$$

$$\lambda_1 = 4,\ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \lambda_2 = 4,\ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{94}$$

Для пункта 13:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \tag{95}$$

$$\lambda_1 = 2i,\ v_1 = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \end{bmatrix},\ \lambda_2 = -2i,\ v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{96}$$

Для пункта 14:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{97}$$

$$\lambda_1 = 0,\ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \lambda_2 = 0,\ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{98}$$

Для пункта 15:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{99}$$

$$\lambda_1 = \frac{-\sqrt{33}+5}{2},\ v_1 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{33}-3}{6} \\ 1 \end{bmatrix},\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{33}+5}{2},\ v_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{33}-3}{6} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{100}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \tag{101}$$

$$\lambda_1 = \frac{-\sqrt{177}+13}{2},\ v_1 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{177}-3}{14} \\ 1 \end{bmatrix},\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{177}+13}{2},\ v_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{177}-3}{14} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{102}$$

Для пункта 16:

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{103}$$

$$\lambda_1 = 1,\ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \lambda_2 = 2,\ v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} N_2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \tag{104}$$

$$\lambda_1 = 9,\ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \lambda_2 = 11,\ v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{105}$$

2.3

Найти определитель матриц из пунктов 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10

Для пункта 1:

$$detA = \begin{vmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{vmatrix} = -1 \tag{106}$$

Для пункта 2:

$$detB = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{107}$$

Для пункта 3:

$$detC = \begin{vmatrix} \cos\frac{5\pi}{18} & -\sin\frac{5\pi}{18} \\ \\ \sin\frac{5\pi}{18} & \cos\frac{5\pi}{18} \end{vmatrix} = 1 \tag{108}$$

Для пункта 4:

$$detD = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \tag{109}$$

Для пункта 5:

$$detF = \begin{vmatrix} -0.3\sqrt{3}+0.4 & 0.4\sqrt{3}+0.3 \\ 0.4\sqrt{3}+0.3 & 0.3\sqrt{3}-0.4 \end{vmatrix} = -1 \tag{110}$$

Для пункта 9:

$$detG = \begin{vmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{vmatrix} = 5 \tag{111}$$

Для пункта 10:

$$detH = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \tag{112}$$

2.4

В каких пунктах матрица обязательно получается симметричной?

Ответ: в пунктах 1, 4, 5, 9, 10, 11, 14.

3 Визуализация

В качестве многоугольника был выбран ромб, координаты точек которого: $(-1, 0)$, $(0, -0.5)$, $(1, 0)$, $(0, 0.5)$.

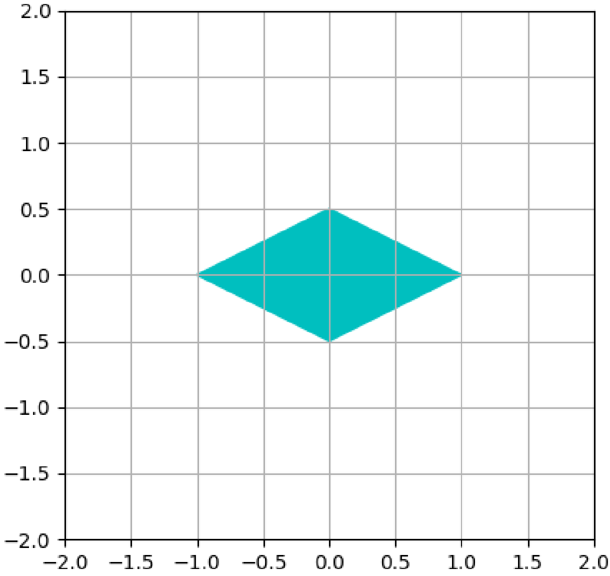

Рис. 1. Оригинал.

3.1 Для отображения 1

$$A = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \tag{113}$$

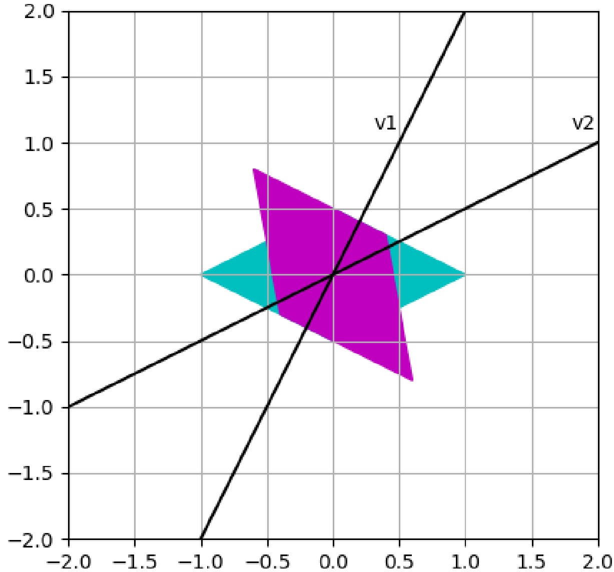

Рис. 2. Образ 1 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

3.2 Для отображения 2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \tag{114}$$

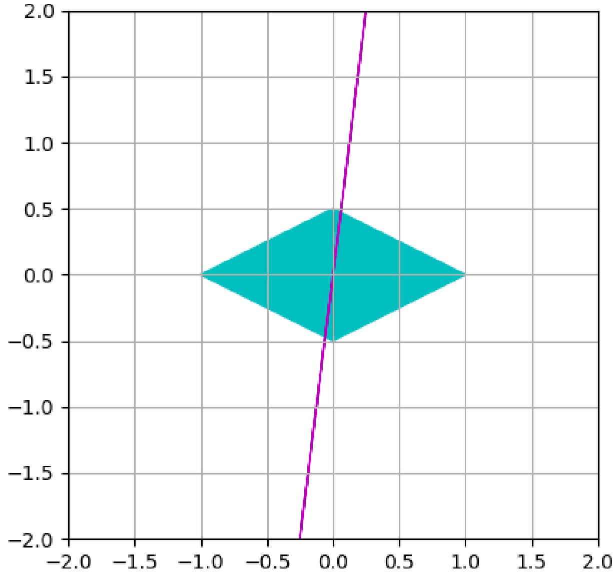

Рис. 3. Образ 2 (фиолетовый), оригинал (голубой).

3.3 Для отображения 3

$$C = \begin{bmatrix} \cos\frac{5\pi}{18} & -\sin\frac{5\pi}{18} \\ \sin\frac{5\pi}{18} & \cos\frac{5\pi}{18} \end{bmatrix} \tag{115}$$

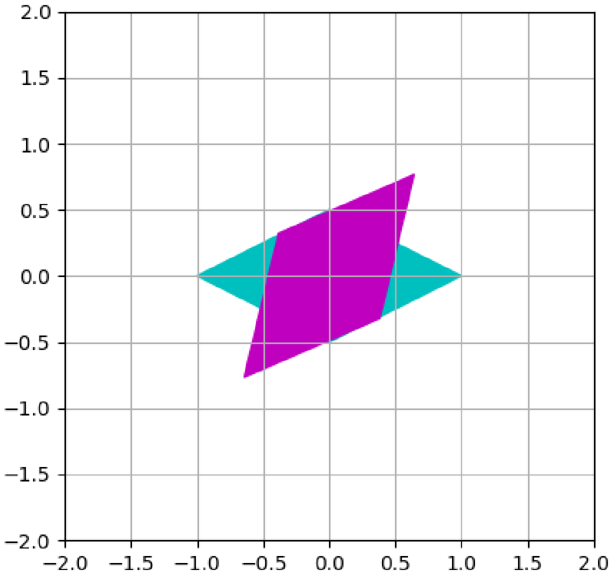

Рис. 4. Образ 3 (фиолетовый), оригинал (голубой).

3.4 Для отображения 4

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{116}$$

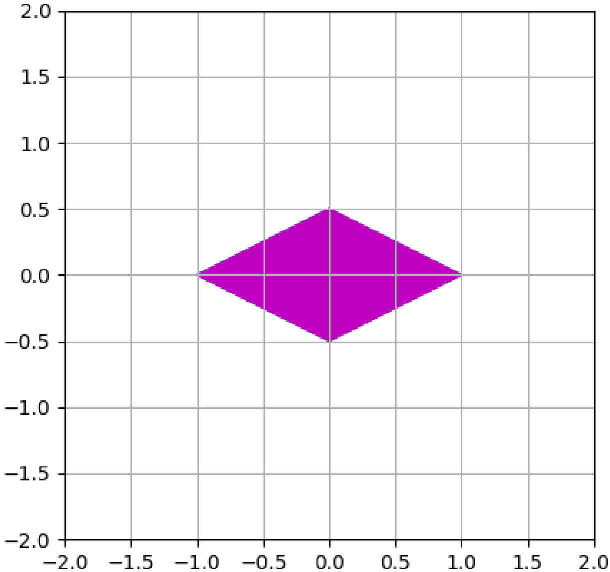

Рис. 5. Образ 4 (фиолетовый).

3.5 Для отображения 5

$$F = \begin{bmatrix} -0.3\sqrt{3}+0.4 & 0.4\sqrt{3}+0.3 \\ 0.4\sqrt{3}+0.3 & 0.3\sqrt{3}-0.4 \end{bmatrix} \tag{117}$$

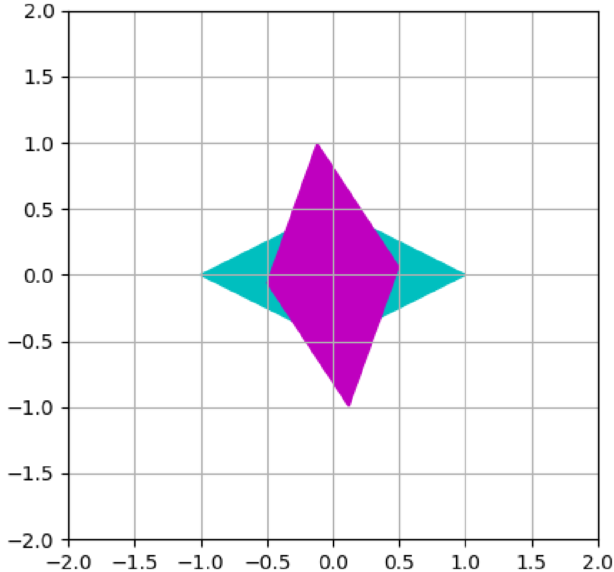

Рис. 6. Образ 5 (фиолетовый), оригинал (голубой).

3.6 Для отображения 6

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{118}$$

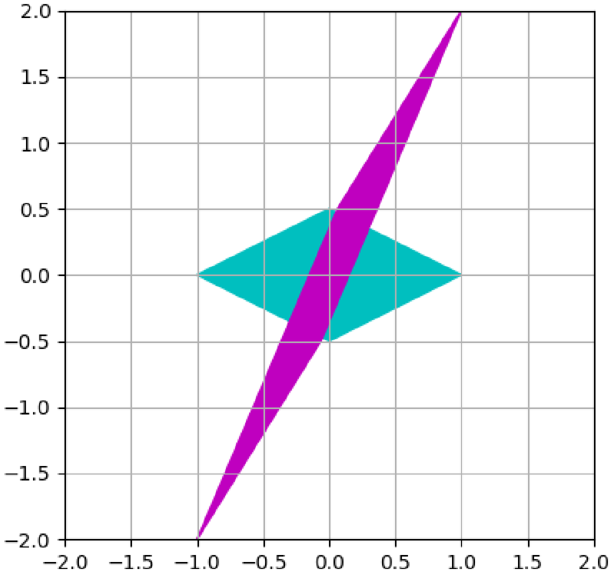

Рис. 7. Образ 6 (фиолетовый), оригинал (голубой).

3.7 Для отображения 7

$$H = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \tag{119}$$

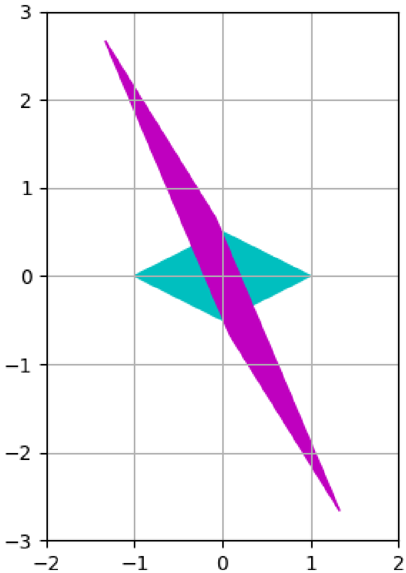

Рис. 8. Образ 7 (фиолетовый), оригинал (голубой).

3.8 Для отображения 8

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \tag{120}$$

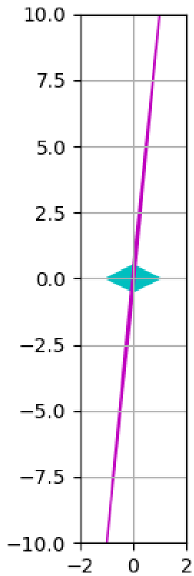

Рис. 9. Образ 8 (фиолетовый), оригинал (голубой).

3.9 Для отображения 9

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \tag{121}$$

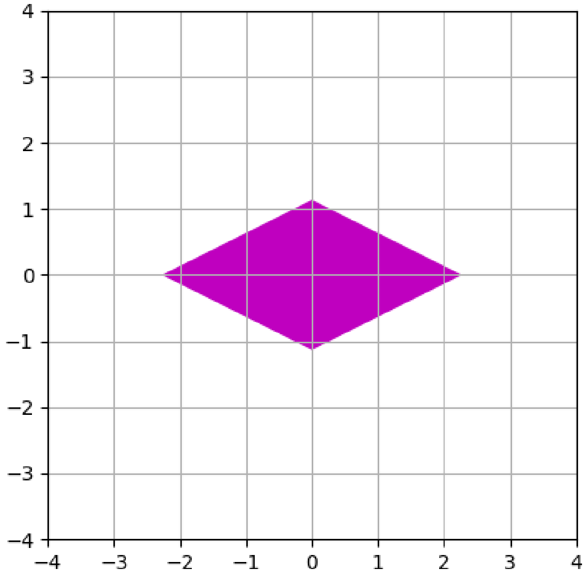

Рис. 10. Образ 9 (фиолетовый).

3.10 Для отображения 10

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{122}$$

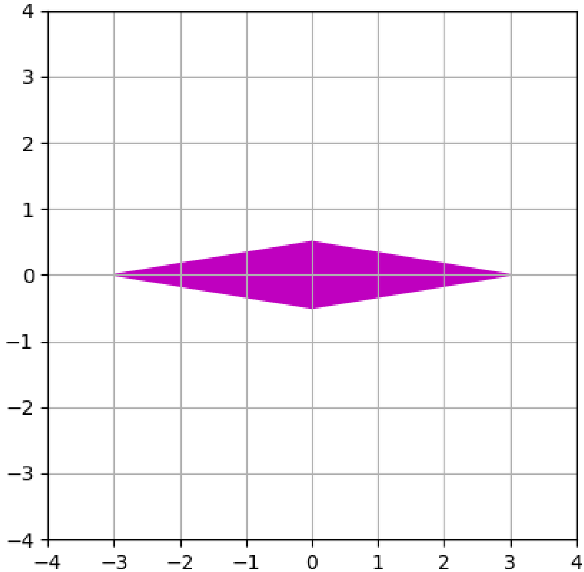

Рис. 11. Образ 10 (фиолетовый).

3.11 Для отображения 11

$$N = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \tag{123}$$

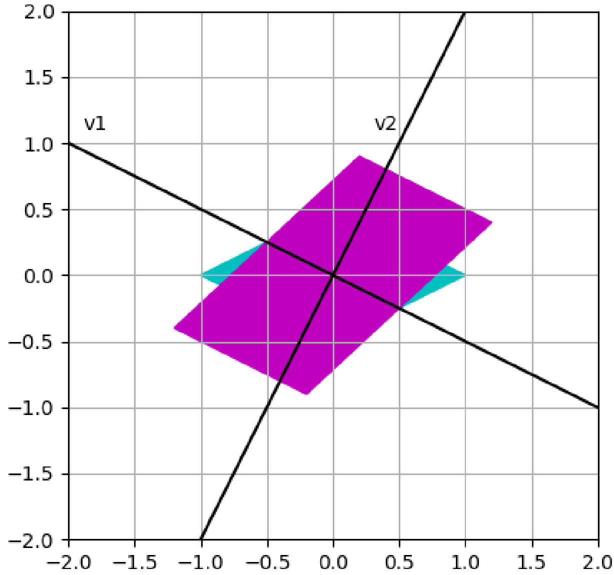

Рис. 12. Образ 11 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

3.12 Для отображения 12

$$O = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{124}$$

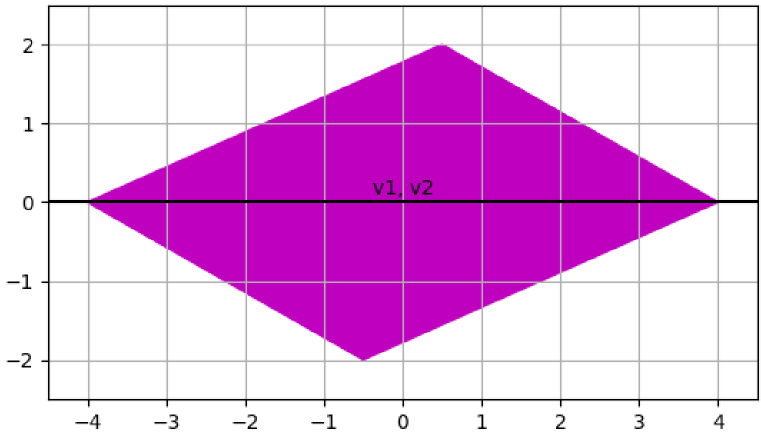

Рис. 13. Образ 12 (фиолетовый) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

3.13 Для отображения 13

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \tag{125}$$

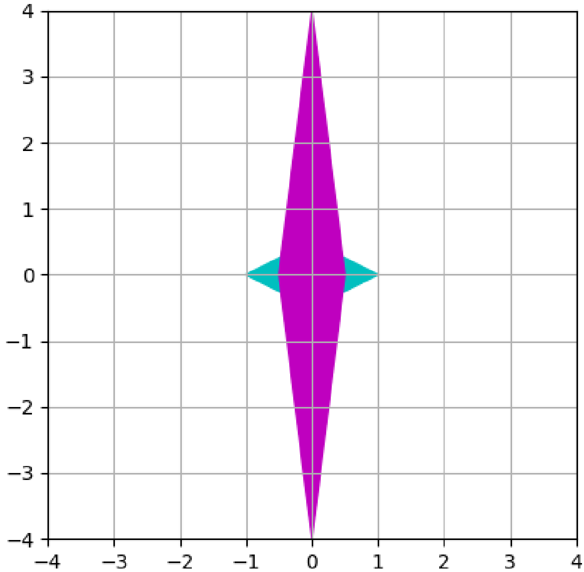

Рис. 14. Образ 13 (фиолетовый), оригинал (голубой).

3.14 Для отображения 14

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{126}$$

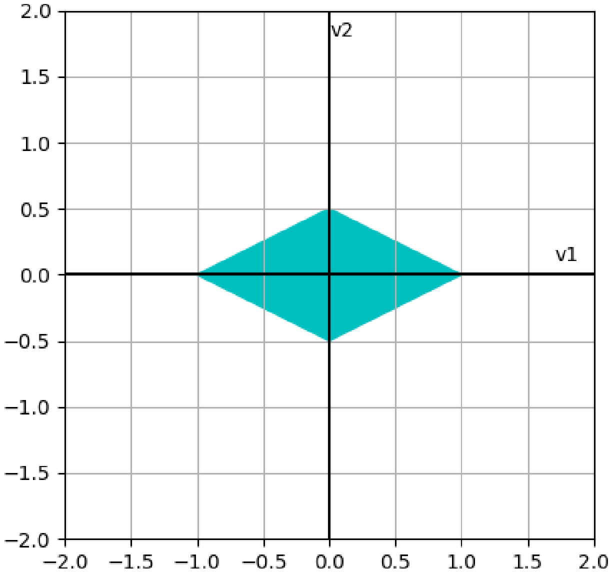

Рис. 15. Образ 14 (точка (0, 0)), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

3.15 Для отображения 15

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ S_2 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \tag{127}$$

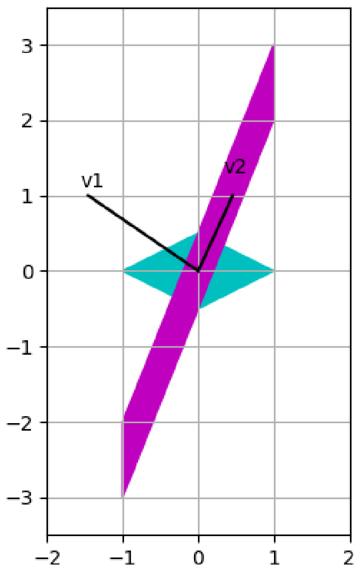

Рис. 16. Образ 15 для матрицы S_1 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

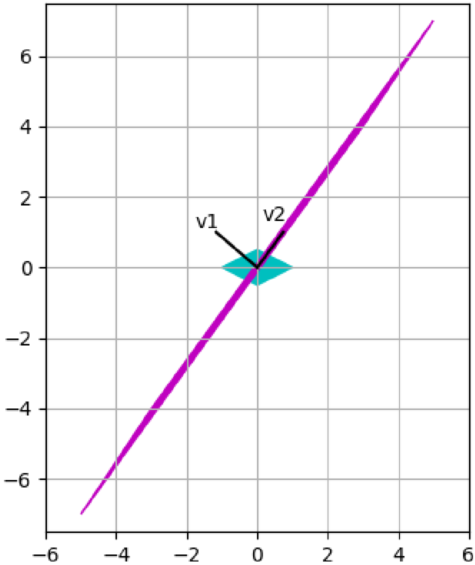

Рис. 17. Образ 15 для матрицы S_2 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

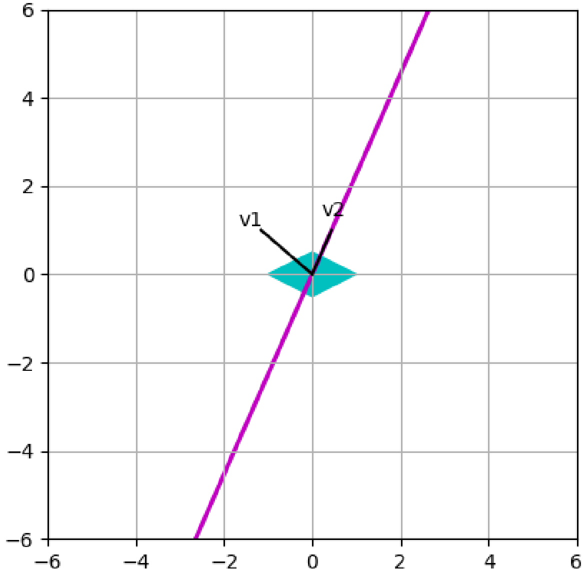

Рис. 18. Образ 15 для матрицы S_1S_2 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

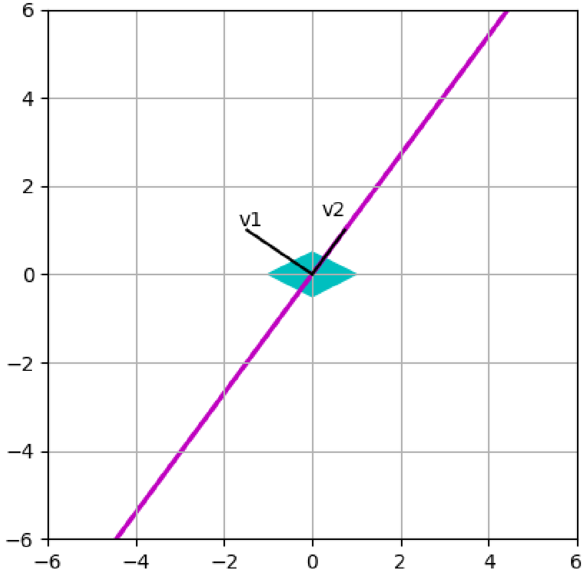

Рис. 19. Образ 15 для матрицы S_2S_1 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

3.16 Для отображения 16

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; T_2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \tag{128}$$

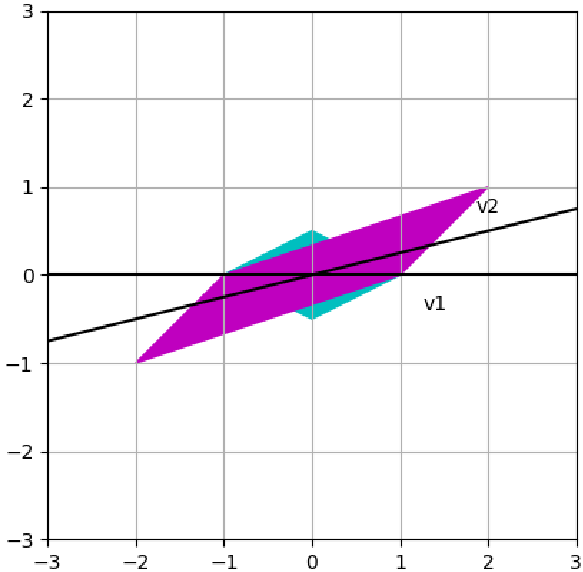

Рис. 20. Образ 16 для матрицы T_1 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

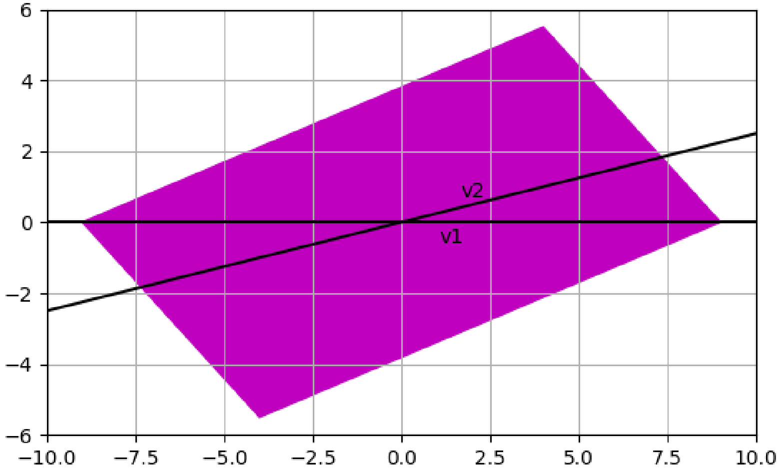

Рис. 21. Образ 16 для матрицы T_2 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

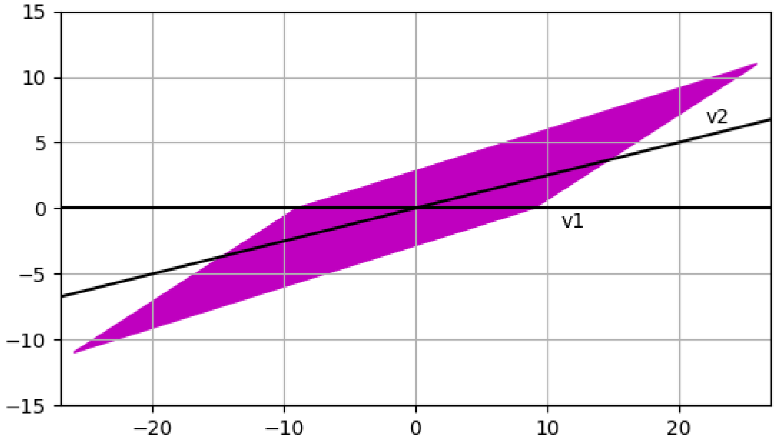

Рис. 22. Образ 16 для матрицы T_1T_2 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

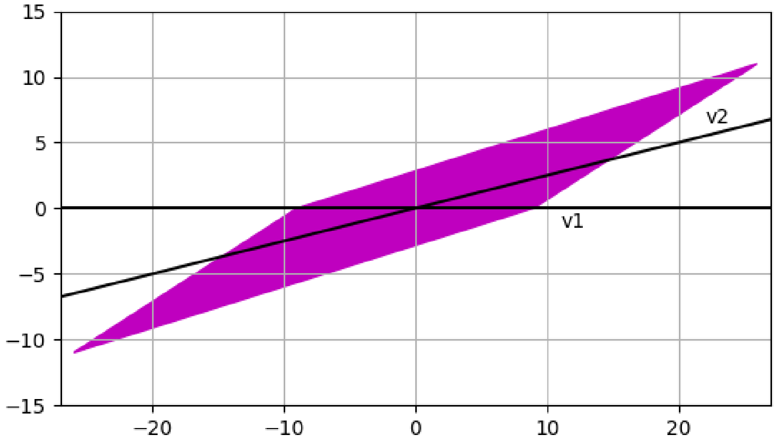

Рис. 23. Образ 16 для матрицы T_2T_1 (фиолетовый), оригинал (голубой) и прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.