

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

## Лабораторная работа № 4 "Динамические системы"

по дисциплине Практическая линейная алгебра

Выполнила: студентка гр. **R3238**

**Нечаева А. А.**

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2023-2024

*В этой лабораторной мы будем работать с непрерывными ( $t \in \mathbb{R}$ ) и дискретными ( $k \in \mathbb{Z}$ ) линейными динамическими системами второго порядка вида*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_3x_1(t) + a_4x_2(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_1x_1(k) + a_2x_2(k), \\ x_2(k+1) = a_3x_1(k) + a_4x_2(k) \end{cases} \quad (2)$$

в более компактной форме:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (3)$$

$$x(k+1) = Ax(k), \quad (4)$$

где  $x(\cdot) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

# 1 задание. Придумать непрерывное.

Зададимся двумя неколлинеарными векторами  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ , не лежащими на координатных осях:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Придумаем непрерывные динамические системы:

## 1.1

*Система асимптотически устойчива, при этом если  $x(0) = v_1$ , то  $x(t) \in \text{Span}\{v_1\}$ , а если  $x(0) = v_2$ , то  $x(t) \in \text{Span}\{v_2\}$  при всех  $t \geq 0$ .*

Обратимся к уравнению  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ,  $x(0) = x_0$  и к его решению:  $x(t) = e^{At}x_0$ .

1. Система асимптотически устойчива, значит выполнено  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .
2. Выберем матрицу с двумя совпадающими **отрицательными** собственными числами, например:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Собственные числа  $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$ ,  
собственные векторы  $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

## 1.2

*Система неустойчива, при этом у матрицы  $A$  не существует двух неколлинеарных собственных векторов.*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Собственные числа:  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 4$ , собственные векторы соответственно  $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

### 1.3

*Система неустойчива, при этом если  $x(0) = v_1$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .*

### 1.4

*Система асимптотически устойчива, при этом матрица  $A \in \mathbb{R}^2$  имеет комплексные собственные вектора вида  $v_1 \pm v_2 i \in \mathbb{C}^2$ .*

### 1.5

*Система неустойчива, при этом матрица  $A$  имеет такие же собственные вектора, как в предыдущем пункте.*

### 1.6

*Система не является асимптотически устойчивой, но не является и неустойчивой, при этом матрица  $A$  имеет собственные векторы такие же, как в пункте 4.*

## 2 задание. За моделировать непрерывное.

### 2.1

Система асимптотически устойчива, при этом если  $x(0) = v_1$ , то  $x(t) \in \text{Span}\{v_1\}$ , а если  $x(0) = v_2$ , то  $x(t) \in \text{Span}\{v_2\}$  при всех  $t \geq 0$ .

### 2.2

Система неустойчива, при этом у матрицы  $A$  не существует двух неколлинеарных собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (8)$$

### 2.3

Система неустойчива, при этом если  $x(0) = v_1$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

### 2.4

Система асимптотически устойчива, при этом матрица  $A \in \mathbb{R}^2$  имеет комплексные собственные вектора вида  $v_1 \pm v_2 i \in \mathbb{C}^2$ .

### 2.5

Система неустойчива, при этом матрица  $A$  имеет такие же собственные вектора, как в предыдущем пункте.

### 2.6

Система не является асимптотически устойчивой, но не является и неустойчивой, при этом матрица  $A$  имеет собственные векторы такие же, как в пункте 4.

### 3 задание. Придумать дискретное.

*Придумать дискретные динамические системы, обладающие следующими собственными числами (при этом ни одна из придуманных матриц  $A$  не должна быть диагональной):*

## 4 задание. За моделировать дискретное.