Սեղմ նմուշառություն

Արմենակ Պետրոսյան
Vanderbilt University

Հարցերի և առաջարկությունների համար գրել՝ arm.petros@gmail.com

«Մաթեմատիկա և կիրառություններ» 4-րդ ամառային դպրոց
Ծաղկաձոր

Հունիս, 2017

Բովանդակություն

Ներածություն

Թվային ազդանշանները մշակելիս, սովորաբար քայլերի հետևյալ հաջորդականությունն է տեղի ունենում՝

Նմուշառություն → Սեղմում → Վերականգնում

Օրինակ թվային տեսախցիկով նկարելիս

Ֆոտոխցիկ → JPEG → Windows Photo Viewer

Սպացվում է, որ նմուշառություն կատարելիս մենք մեծ քանակությամբ ավելորդ ինֆորմացիա ենք հավաքում, ինչը ժամանակատար է և բացի այդ հիշողության մեծ ծավալ է զբաղեցնում:

Սեղմ նմուշառությունում նպատակ է հետապնդվում նմուշառության և սեղմման գործողությունները համատեղել, այսինքն կատարելով քիչ քանակությամբ ճիշտ ձևով ընտրված չափումներ՝ ստանալ բարձր որակի վերականգնում:

Սեղմ նմուշառություն → Վերականգնում

Չափումների քանակի քչացումը մասնավորապես մեծ կարևորություն ունի մագնիսառեզոնանսային տոմոգրաֆիայում (նվազեցնում է ժամանակահատվածը, որը այժմ 15-90 րոպե է, և ավելացնում է հարմարավետությունը):

2017 թվականի հունիսին, Siemens ընկերության կողմից ստեղծված սկանները, որը սկանավորման ժամանակը նվազեցնում է շուրջ տաս անգամ և օգտագործում է սեղմ նմուշառություն, ստացել է ԱՄՆ Սննդի և Դեղերի Գործակալության (FDA) հաստատումը և կարող է կիրառվել հիվանդանոցներում:

Նկար 1: Compressed Sensing Cardiac Cine: «Մեր կործանիչ արագությամբ փոխնոլոգիայով, որ կոչվում է սեղմ նմուշառություն, դուք կարող եք արագացնել էլեկտրոմագնիսական տոմոգրաֆիայի պատկերների ստացումը մոտ տաս անգամ՝ առանց պատկերների որակի կորստի» Siemens ընկերության կայքից

Սեղմ նմուշառությունը (անգլ. compressed sampling կամ compressed sensing) մեթոդ է, որը հնարավորություն է տալիս վերականգնել անհայտ վեկտորը՝ հնարավորինս քիչ քանակությամբ չափումներով կապարելով: Կախված խնդրից, վեկտորը իրենից կարող է ներկայացնել ձայնագրված խոսք, թվային փոտոպատկեր կամ նկարագրել որևէ ֆիզիկական երևույթ: Հիմնական ենթադրությունը կայանում է նրանում, որ վեկտորը ունի նոսր վերլուծության գործակիցներ ինչ-որ օրթոնորմալ բազիսում, այսինքն վերլուծության գործակիցների միայն փոքր մասն է 0-ից տարբեր: Բազիսի ընտրությունը կախված է խնդրից: Այս ենթադրության բնական լինելը ցույց է տրվում փորձնականում՝ նկարների և ձայնագրությունների համար համապատասխանաբար Հաարի և կոսինուսային բազիսներում ուսումնասիրելով նրանց վերլուծությունը: Սա է այն հատկությունը, որ թույլ է տալիս կատարել թվային պատկերների և ձայնագրությունների սեղմում: Սեղմ նմուշառության ժամանակ ասում ենք, որ սեղմումը և նմուշառությունը կատարվում են միաժամանակ:

Սեղմ նմուշառության մաթեմատիկական տեսությունը սկիզբ է առել Թերենս Թաօյի, Էմանուել Կանդեսի, Դեյվիդ Դոնոհոի և Ջասթին Ռոմբերգի 2004 թվականին տպագրված արդյունքներից (տես [3]) և համարվում է ժամանակակից կիրառական մաթեմատիկայի կայացած ճյուղերից մեկը[1]:

Այս կարճ ծանոթագրությունը նախատեսված է ցածր կուրսի ուսանողների համար: Ավելի մանրամասն ծանոթանալու համար, տես [1, 6]:

Տեղ գտած կոդը օգտագործում է Matlab ծրագրավորման լեզուն: Այն միգուցե ամենից օպտիմալը չէ, սակայն բավարար է նյութին ծանոթանալու համար:

Հայերեն LaTex-ի համար օգտագործվել է armtex համակարգը:

[1]Ներկայացված նյութը լիարժեք հասկանալու համար ծանոթությունը գծային հանրահաշվի և մաթ. անալիզի որոշ հիմնարար հասկացությունների հետ (վեկտոր, մատրից, գծային հավասարումների լուծում, գծային հարթություն, օրթոնորմալ բազիս, ֆունկցիայի ածանցյալ և այլն) նախընտրելի է: Միևնույն ժամանակ, որոշ այլ հասկացություններ կսահմանվեն ընթացքում:

Օր 1-ին

1. Օրթոնորմալ բազիս

N չափանի վեկտոր ասելով հասկանում ենք $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ N-յակ, որտեղ $x_1, \ldots, x_N$ իրական թվեր են (մեզ համար ավելի հարմար է վեկտորը վերցնել որպես սյուն այլ ոչ թե տող, սակայն դրանից լուրջ տարբերություն բնականաբար չի լինի): Բոլոր N չափանի վեկտորների տարածությունը նշանակում ենք $\mathbb{R}^N$-ով:

Ենթադրենք ունենք վեկտոր $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$.

▷ *$\vec{x}, \vec{y}$-ի սկալյար արտադրյալը սահմանենք*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots x_N y_N :$$

▷ *Վեկտորների $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N\}$ համակարգը կոչվում է **օրթոնորմալ բազիս**, եթե*

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{երբ } i = j \\ 0 & \text{երբ } i \neq j \end{cases}.$$

Վարժություն 1. *Ցույց տալ, որ եթե $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N\}$ համակարգը օրթոնորմալ բազիս է ապա*

$$U = [\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N]$$

մատրիցի համար, $UU^T = E$, որտեղ E-ն անկյունագծին 1-եր և մնացած տեղերում 0 մատրիցն է:

Օրինակ 1. $\vec{e}_k = (0, \ldots, \overset{k}{1}, \ldots, 0)$*–ի համար, $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N\}$-ը օրթոնորմալ բազիս է $\mathbb{R}^N$-ում:*

Վարժություն 2. *Ցույց տալ, որ ցանկացած $\vec{f} \in \mathbb{R}^N$ կարելի է գրել*

$$\vec{f} = \sum_{k=1}^{N} \langle \vec{f}, \vec{e}_k \rangle e_k$$

գումարի տեսքով:

▷ *$\vec{f} = \sum_{k=1}^{N} \langle \vec{f}, \vec{e}_k \rangle e_k \in \mathbb{R}^N$ վեկտորի ϵ-**սեղմում** կոչում է հետևյալ վեկտորը*

$$\vec{f}_\epsilon = \sum_{k:|c_k| \geq \epsilon} \langle \vec{f}, \vec{e}_k \rangle \vec{e}_k :$$

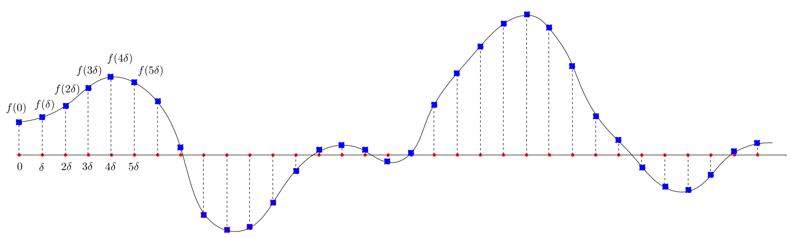
Այսինքն $\vec{f}$-ի վերլուծությունից հեռացնում (զրոյացնում) ենք այն գործակիցները, որոնք բացարձակ արժեքով փոքր են նախապես որոշված ϵ թվից:

Վեկտորների սեղմումը շատ կարևոր հասկացություն է կիրառություններում, քանի որ այն հնարավորություն է տալիս, օրինակ, նկարների չափսը փոքրացնել, առանց վնասելու նկարում եղած պատկերը: Եթե վեկտորի ու նրա սեղմված տարբերակի տարբերությունը փոքր է, ապա պահելով նրա սեղմված տարբերակը կարող ենք հիշողության լուրջ խնայողություններ անել: Իսկապես, այժմ բոլոր $c_1, \dots c_N$ գործակիցները պահելու փոխարեն, կպահենք միայն (k, c_k) զույգերը, որտեղ $|c_k| \geq \epsilon$. Օրինակ, 1024×1024 պիքսել ունեցող նկարը պահելու համար պետք է պահենք $\geq 1.000.000$ գործակից: Սակայն եթե օրինակ թվային նկարի որևէ բազիսում սեղմումը ունի միայն 10.000 գործակից, ապա դա հնարավորություն կտա նկարը պահելու համար անհրաժեշտ հիշողությունը հիսնապատիկ կրճատել:

ϵ թիվը սովորաբար նախապես չի ընտրվում: Սեղմելիս, վերցնում են այն ϵ-ը որից փոքր են օրինակ գործակիցների 90%-ը: Այսինքն, արդյունքում տարբեր պատկերների համար այն կարող է լինել տարբեր: Այս տոկոսային արժեքը ընտրվում է ծրագիրը ստեղծողի կողմից:

2. Ձայնագրությունների սեղմում

Ձայնային ալիքը կարող ենք նկարագրել որպես անդիափ ֆունկցիա՝ t ժամանակից կախված ($f(t)$-ն իրենից ներկայացնում է ձայնի «ինտենսիվությունը» ժամանակի t պահին):



Թվային ձայնագրիչներում այդ անընդհատ ֆունցկիան դիսկրետացվում է և փոխարենը պահվում են

$$f(0), f(\delta), f(2\delta), \dots, f(N\delta)$$

արժեքները վեկտորի տեսքով: Այս պրոցեսը կոչվում է ձայնի թվայնացում:

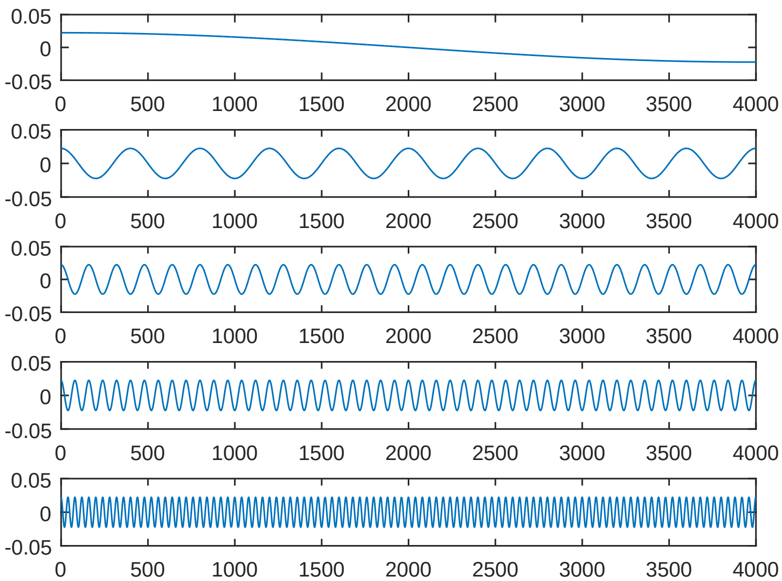
Երբ ձայնը գրանցվում է բարձր զգայականություն ունեցող սարքավորմամբ, չմշակված ձայնագրությունը կարող է լինել շատ մեծ չափսի, երբ $\delta << 1$ և այդ ֆորմատով պահելը նպատակահարմար չէ:

Ձայնագրությունները սեղմելիս սովորաբար օգտագործվում է **կոսինուսային բազիսը** (կամ ձևափոխությունը)՝

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

և $k = 1, \dots, N-1$-ի համար

$$e_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi(2 \cdot 0 + 1)k}{2N}\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{\pi(2(N-1)+1)k}{2N}\right) \end{pmatrix}$$



Նկար 2: $N = 4000$-ի համար կոսինուսային վեկտորի պատկերը, երբ $k = 1, 20, 50, 100, 200$

Կոսինուսային բազիսի գործակիցները չափում են համապատասխան հաճախականությունների ներդրումը ձայնային ալիքում: Այն նաև կիրառվում է թվային ձայնանագրությունները և պատկերները սեղմելիս, մասնավորապես JPEG ֆորմատով փոտոպատկերների սեղմումը կատարվում է այս բազիսում:

Եթե ձայնային ալիքը շատ երկար է, ապա այն բաժանում են ավելի փոքր կտորների և յուրաքանչյուր կտորի համար կատարում սեղմումը:

Վարժություն 3. *Ցույց տալ, որ կոսինուսային բազիսը օրթոգոնալ բազիս է:*

3. Թվային նկարների սեղմում

Թվային պատկերների դեպքում դիսկրետացումը կատարվում է երկչափ ցանցի վրա՝ մատրիցի տեսքով: Գունավոր նկարների համար նման երեք հատ մատրից է պահվում, որոնք ցույց են տալիս կարմիր, դեղին և կապույտ գույների ներդրումը պատկերում (պարզվում է, որ միայն այս երեք գույներով կարելի է աչքի համար տեսանելի ցանկացած գույն ստանալ): Բայց մենք պատկերները կդիտարկենք սև և սպիտակ գույներով, և կպահենք միայն մեկ մատրից, որի յուրաքանչյուր էլեմենտի արժեքը $[0, 1]$ հատվածից է և ցույց է տալիս, թե համապատասխան պիքսելը ինքանով է մոխրագույն (0-ի դեպքում այն սև է, 1-ի դեպքում՝ սպիտակ):

Թվային փոտոպատկերները սեղմելիս սովորաբար օգտագործվում է երկչափ Հաարի բազիսը (կամ վեյվլեթը): Օրինակ, JPEG 2000-ը այս բազիսն է օգտագործում:

Նախքան Հաարի երկչափ բազիսին անցնելը, դիտարկենք Հաարի միաչափ բազիսը, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ: Դիցուք $N = 2^d$ որտեղ d-ն ինչ-որ բնական թիվ է, և դիտարկենք հետևյալ վեկտորները

$$h_0 = \frac{1}{2^{\frac{d}{2}}}(\overbrace{1, \ldots, 1}^{2^d})^T$$

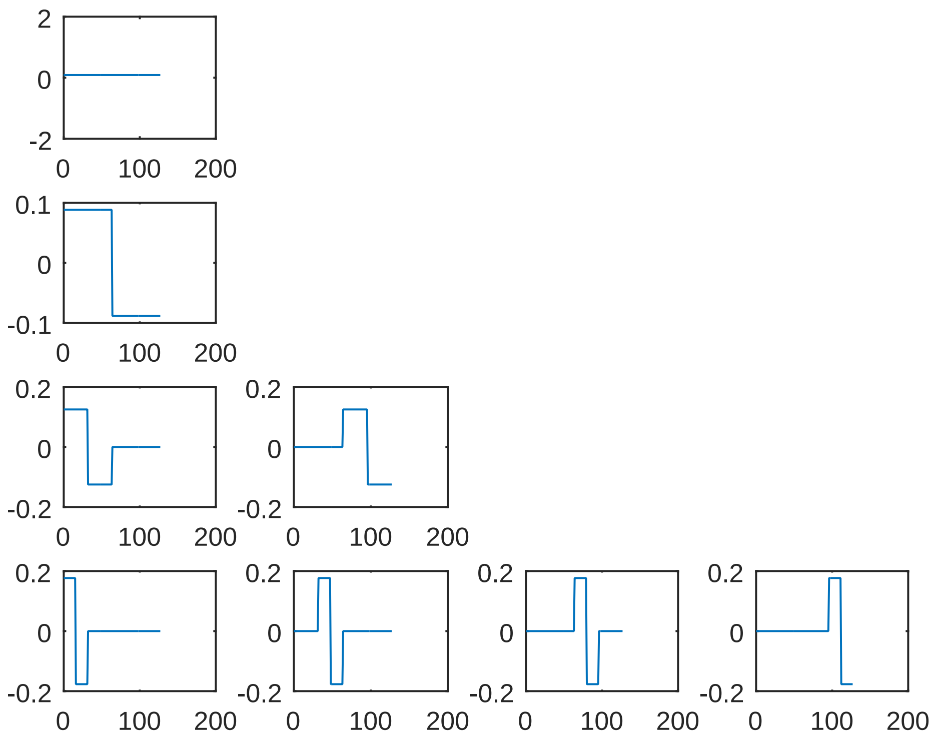
$$h_1 = \frac{1}{2^{\frac{d}{2}}}(\overbrace{1, \ldots, 1}^{2^{d-1}}, \overbrace{-1, \ldots, -1}^{2^{d-1}})^T$$

$$h_2 = \frac{1}{2^{\frac{d-1}{2}}}(\overbrace{1, \ldots, 1}^{2^{d-2}}, \overbrace{-1, \ldots, -1}^{2^{d-2}}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{2^{d-1}})^T \qquad h_3 = \frac{1}{2^{\frac{d-1}{2}}}(\overbrace{0, \ldots, 0}^{2^{d-1}}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{2^{d-2}}, \overbrace{-1, \ldots, -1}^{2^{d-2}})^T$$

և այսպես շարունակ, մինչ

$$h_{2^d-2} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}(\overbrace{0,\ldots,0}^{2^d-4},1,-1,0,0)^T \qquad h_{2^d-1} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}(\overbrace{0,\ldots,0}^{2^d-4},0,0,1,-1)^T :$$

Վարժություն 4. *Ցույց տալ, որ Հաարի բազիսը օրթոգոնալ բազիս է:*



Նկար 3: $N = 128$-ի համար Հաարի $h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8$ բազիսային վեկտորների պատկերները

Երկչափ Հաարի բազիսը սահմանվում է որպես

$$H_{i,j} = h_i h_j^T (= h_i \otimes h_j) :$$

Եթե $A \in R^{d\times d}$, ապա նրա գործակիցները երկչափ Հաարի բազիսում տրված են

$$C = [h_0, \ldots, h_{2^N-1}] \cdot A \cdot [h_0, \ldots, h_{2^N-1}]^T :$$

Այս դեպքում $C(i,j)$-ն, որը C-ի (i,j)-ում գործակիցն է, կլինի հավասար $\langle C, H_{i,j}\rangle$, որտեղ երկու մատրիցների սկալյար արտադրյալը սահմանվում է ինչպես վեկտորների համար, անդամ առ անդամ բազմապատկելով և բոլորը գումարելով իրար:

Եթե թվային պատկերը շատ մեծ է, ապա այն բաժանում ենք ավելի փոքր մասերի և յուրաքանչյուր մասի համար կատարում սեղմումը:

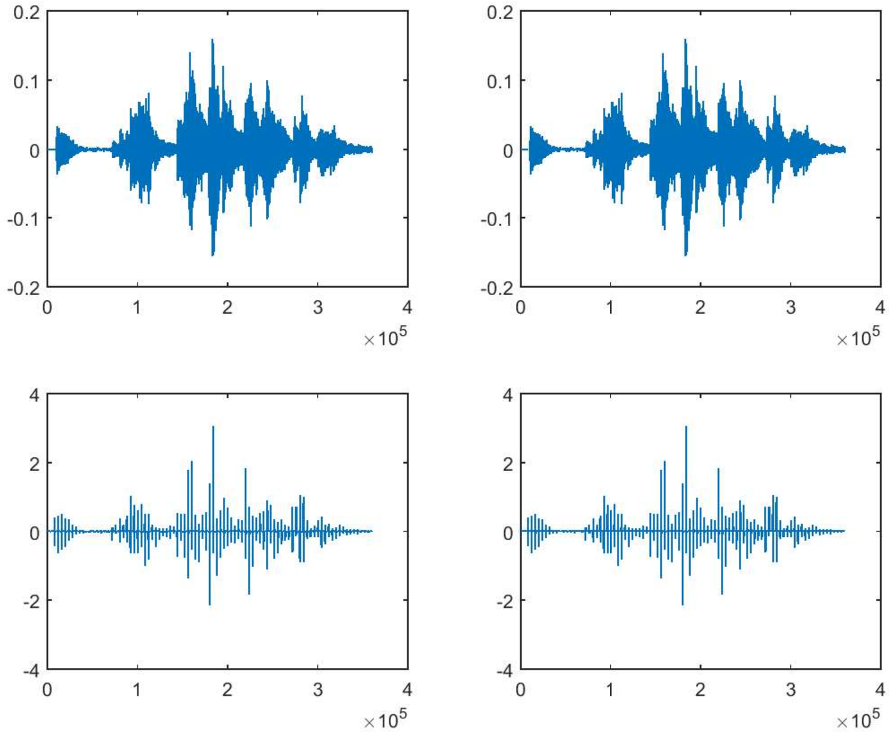
4. Ցուցադրություն

Ձայնային ալիքի սեղմում

Matlab-ի միջոցով աշխատեցնելով soundtrsh.m ֆայլը, ստանում ենք հետևյալ արդյունքը՝

the number of non-zero coefs in original is 360000

the number of non-zero coefs in thresholded is 30050 the percentage of survivors is 8.3%



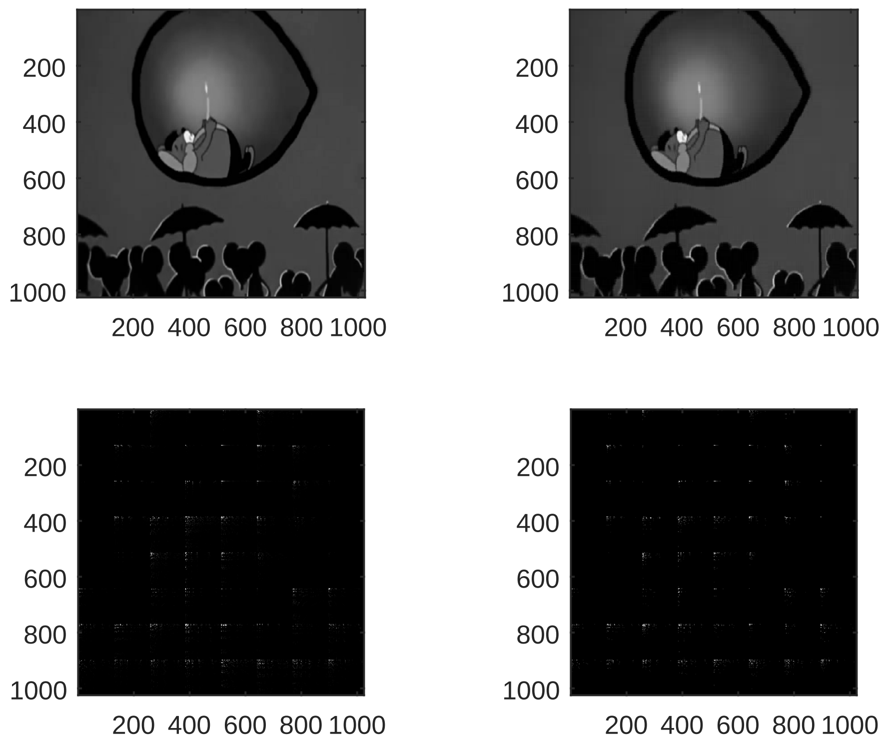
Նկար 4: Ձախից վերևը՝ բնօրինակը, աջից վերևը՝ սեղմված փարբերակը, ձախից ներքևը՝ բնօրինակի գործակիցները, աջից ներքևը՝ սեղմված գործակիցները

Թվային պապկերների սեղմում

Matlab-ի միջոցով աշխապեցնելով haar2dtrsh.m ֆայլը, սպանում ենք հեպևյալ արդյունքը՝ the number of non-zero coefs in original is 1047824

the number of non-zero coefs in thresholded is 14511

the percentage of survivors is 1.4%



Նկար 5: (Պույ-պույ մկնիկի թաղումը) ձախից վերևը՝ բնօրինակը, աջից վերևը՝ սեղմված տարբերակը, ձախից ներքևը՝ բնօրինակի գործակիցները, աջից ներքևը՝ սեղմված գործակիցները

5. Եզրահանգում

Պարզվում է, որ վեկտորների որոշ դասերի համար կարելի է գտնել բազիսներ որտեղ նրանք ունեն նոսր վերլուծություն: Ինչպես տեսանք, թվային նկարների համար որոշ վեյվլեթ բազիսներ (մասնավորապես Հաարի բազիսը) նմանատիպ վերլուծություն էին թույլ տալիս: Կամ թվային ձայնագրությունների դեպքում՝ կոսինուսային բազիսը:

Այսպիսով, ստանդարտ նմուշառության դեպքում, եթե վեկտորը նոսր է ապա մենք մեծ քանակությամբ ավելորդ և անպետք չափումներ ենք կատարում, որովհետև վեկտորի ներքին չափողականությունը շատ ավելի փոքր է: Հարց է առաջանում, թե կարելի արդյոք քչացնել չափումների քանակը (այսինքն, 1024×1024 պիքսելի արժեք հաշվելու փոխարեն, կատարել ավելի քիչ կանակությամբ չափում) ու նորից կարողանալ գտնել անհայտ վեկտորը, կամ այլ կերպ ասած, նմուշառությունը և սեղմումը կատարել միաժամանակ:

Օր 2-րդ

1. Գծային չափում

Ենթադրենք ունենք վեկտոր $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ ։

▷ *$\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ֆունկցիայի համար $\Phi(\vec{x}) = b$ թիվը կանվանենք $\vec{x}$ վեկտորի **չափում** (երբեմն նաև **պվկյալ** կամ **նմուշ** անվանումն է օգտագործվում):*

▷ *$\Phi : \mathbb{R}^N \to R$ ֆունկցիան կոչվում է **գծային**, եթե*

$$\Phi(\vec{x}) = a_1 \cdot x_1 + \cdots + a_N \cdot x_N,$$

ցանկացած $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$-ի համար, որտեղ $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ ինչ-որ ֆիքսված թվեր են:

Օրինակ՝ $\vec{x}$-ի միջին թվաբանականը՝

$$\frac{x_1 + \cdots + x_N}{N}$$

գծային չափում է:

Նկատենք, որ եթե ունենք $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորի մի քանի տարբեր գծային չափումներ

$$\begin{gathered} \Phi_1(\vec{x}) = a_{1,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{1,N} \cdot x_N = b_1 \\ \Phi_2(\vec{x}) = a_{2,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{2,N} \cdot x_N = b_2 \\ \vdots \\ \Phi_M(\vec{x}) = a_{M,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{M,N} \cdot x_N = b_M \end{gathered}$$

ապա դրանք կարող ենք գրել մատրիցային արտադրյալի տեսքով որպես

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,N} \\ & \vdots & \\ a_{M,1} & \cdots & a_{M,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \text{ կամ } A\vec{x} = \vec{b}\,:$$

Հարց 1. *Եթե $\vec{x} \in F^N$-ի մասին ոչինչ հայտնի չէ, ամենաքիչը քանի՞ չափում է անհրաժեշտ այն գտնելու համար:*

Ավելի կոնկրետ, եթե $Ax = \vec{b}$ համակարգից $\vec{x}$-ը միակ ձևով գտնվում է, ապա ի՞նչ կարող ենք ասել A մատրիցի տողերի քանակի մասին:

Գծային հանրահաշվից հայտնի է, որ A-ի տողերի քանակը պետք է լինի N-ից մեծ, հակառակ դեպքում համակարգը կունենա անվերջ քանակությամբ լուծում, այսինքն առնվազն N հատ չափում է անհրաժեշտ: Սակայն միշտ չէ, որ հնարավորություն ունենք կամ ցանկանում ենք նման քանակությամբ չափումներ կատարել, մասնավորապես եթե N-ը շատ մեծ է և յուրաքանչյուր չափումը ժամանակատար կամ ծախսատար է:

▷ *A մատրիցը երբեմն անվանում են բառարան* (dictionary) *իսկ նրա տողերը՝ ատոմներ:*

Կիրառություններում հաճախ A-ն տրված է լինում, բայց երբեմն մենք հնարավորություն ունենք ինքներս ընտրել այն:

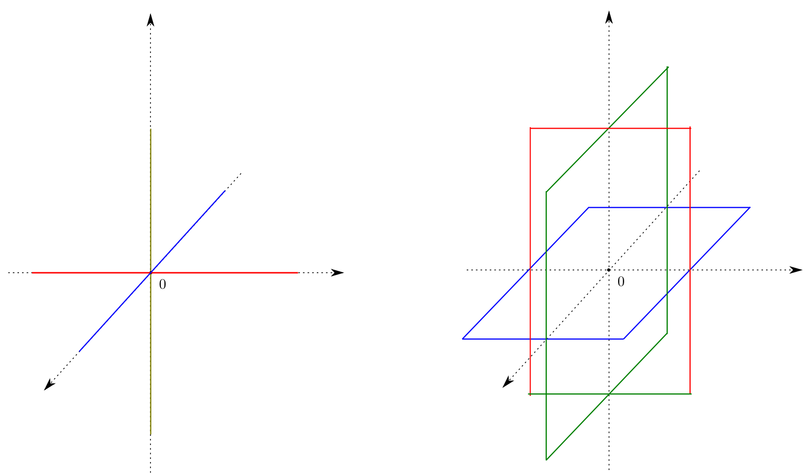
2. Սեղմ նմուշառության խնդրի ձևակերպումը

▷ *Կասենք, որ $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորը $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ օրթոնորմալ բազիսում ունի r-նոսր վերլուծություն, եթե*

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{N} \langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle \vec{e}_k$$

վերլուծության մեջ ոչ զրոյական գործակիցները քանակը չի գերազանցում r-ը:

$\mathbb{R}^N$-ում $e_k = (0, \dots, \overset{k}{1}, \dots, 0)^T$, $k = 1, \dots, N$ բազիսում r-նոսր վեկտորների բազմությունը նշանակենք Σ_r^N-ով:



Նկար 6: Σ_1^3 և Σ_2^3 բազմությունները

Եթե վեկտորի նմուշների քանակը փոքր է, ապա այն միարժեքորեն գտնել հնարավոր չէ, և չափումներից առաջացած հավասարումների համակարգը ունի անվերջ քանակությամբ լուծում: Ինչպես տեսանք շատ վեկտորների դասերի համար հնարավոր է գտնել բազիս որտեղ նրա սեղմումը, որը նոսր վեկտոր է, լավ մոտարկում է վեկտորին: Հետևաբար կարող ենք ենթադրել, որ մեր անհայտ վեկտորը հենց սեղմված տարբերակն է և հետևաբար ունի նոսր վերլուծություն: Պարզվում է, որ որոշ դեպքերում այս լրացուցիչ ենթադրությունը բավական է որպեսզի խնդրի լուծումը լինի միակը: Այսպիսով, սեղմ նմուշառության խնդիրն է քիչ քանակությամբ չափումներ կատարելով վերականգնել անհայտ վեկտորը, եթե հայտնի է, որ այն ունի նոսր վերլուծություն տվյալ բազիսում: Այսինքն,

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

- A-ն $M \times N$ մատրից է ($M << N$), $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$
- $\vec{x}$-ը r-նոսր է $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ բազիսում

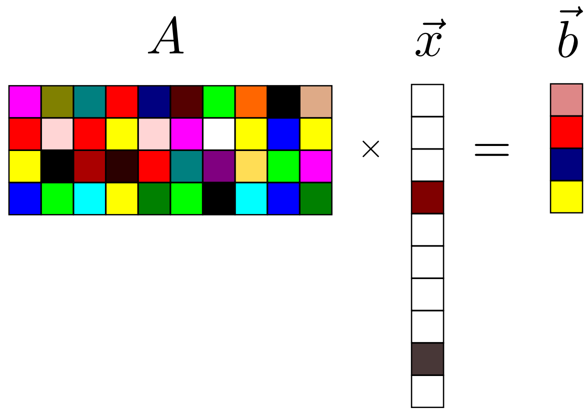
Գտնել $\vec{x}$-ը:

Դիտողություն 1. *Իրական կյանքում ինչպիսի բազիս էլ վերցնենք, միևնույն է գործակիցների մեծ մասը լինելու են ոչ զրոյական, սակայն նրանցից շատերը կլինեն զրոյին մոտ (ինչպես տեսանք, թվային նկարների և ձայնագրությունների դեպքում), ուստի կարող ենք համարել, որ զրո են: Այս պատճառով վերականգնված վեկտորը իրական վեկտորից որոշակի կերպով կտարբերվի և իդեալական դեպքում այդ տարբերությունը կլինի չնչին և աննկատելի:*

Դիտողություն 2. *Կիրառություններում r թիվը նախապես տրված չի լինում և ընտրվում է էմպիրիկ մեթոդով:*

Դիտողություն 3. *Առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարող ենք ենթադրել, որ այն բազիսը որում վեկտորը ունի նոսր վերլուծություն, $\mathbb{R}^N$-ի կանոնական բազիսն է՝ $e_k = (0,\dots,\overset{k}{1},\dots,0)^T$, $k=1,\dots,N$:*

Այսինքն, ունենք այսպիսի պատկեր՝



որտեղ A մատրիցը կարճ է ու լայն: Գունավոր վանդակները $\vec{x}$-ի ոչ զրոյական կոորդինատներն են:

Հակառակ դեպքում, Եթե $\vec{x}$-ի վերլուծությունը նոսր է $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_N\}$ բազիսում, կնայենք

$$\tilde{A}\vec{z}=\vec{b},$$

որտեղ $\tilde{A} = A\cdot[\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_N]$ և $\vec{z}=[\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_N]^T\cdot\vec{x}$ և $\vec{z}$-ը կլինի նոսր $\mathbb{R}^N$-ի կանոնական բազիսում: Նկատենք, որ այս «պտույտ»—ից հետո $\vec{z}$-ը կարող է նոսր վերլուծություն չունենալ սկզբնական բազիսում: Միևնույն նույն վեկտորը չի կարող ունենալ նոսր վերլուծություն երկու իրարից շատ տարբեր բազիսներում:

▷ *$\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_N\}$ և $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_N\}$ բազիսների համար, նրանց կոհերենտություն կոչվում է հետևյալ թիվը*

$$C=\max_{1\le i,j\le N}|\langle e_i,v_j\rangle| :$$

Թեորեմ 1 (Դոնոհո-Սթարքի անորոշության սկզբունք). *Եթե $\vec{x}\in\mathbb{R}^N$ վեկտորի վերլուծությունը r-նոսր է $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_N\}$ բազիսում և s-նոսր է $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_N\}$ բազիսում, ապա*

$$s\cdot r\ge \frac{1}{C^2}\ \ (\Rightarrow s+r\ge\frac{2}{C}) :$$

Դոնոհո-Սթարքի անորոշության սկզբունքի հետևում է, որ եթե մի բազիսում վեկտորը նոսր է, ապա մյուս բազիսում շատ նոսր չի կարող լինել, քանի որ նոսրության գործակիցների գումարը մեծ է փիքսած թվից:

Նկատենք, որ կանոնական բազիսի ու Ֆուրիեյի բազիսի (կամ կոսինուսային) համար $C=\frac{1}{\sqrt{N}}$, ուստի

$$s\cdot r\ge N :$$

Այս թեորեմի մասնավոր դեպքը, երբ առաջին բազիսը $\mathbb{R}^N$-ի կանոնական բազիսն է, իսկ երկրորդը Ֆուրիեյի բազիսը, ապացուցվել է David Donoho*-ի և* Philip Stark*-ի կողմից 1988-ին, իսկ ընդհանուր դեպքը* Michael Elad*-ի և* Alfred Bruckstein*-ի կողմից կողմից 2002-ին (տես [5],* Theorem 1*):*

Դիտողություն 4. *Եթե հայտնի չլիներ, որ $\vec{x}$-ը նոսր է, պետք է առնվազն լինի $M=N$, հակառակ դեպքում $\vec{b}=A\vec{x}$-ի համար $A\vec{z}=\vec{b}$ ունի անթիվ քանակությամբ լուծումներ:*

Դիտողություն 5. *Եթե իմանայինք, թե $\vec{x}$-ի որ գործակիցներն են զրոյից տարբեր, ապա միայն $M=r$ քանակությամբ չափում անհրաժեշտ կլինի r-նոսր $\vec{x}$ վեկտորը գտնելու համար: Իրոք, եթե $\vec{x}$-ի ոչ զրոյական գործակիցները $x_{i_1},\dots,x_{i_r}$-ն են, ապա*

$$Ax=(A[:,i_1],\dots,A[:,i_r])\begin{pmatrix}x_{i_1}\\ \vdots\\ x_{i_r}\end{pmatrix}=\vec{b} :$$

*$(A[:,i_1],\dots,A[:,i_r])$ մատրիցը քառակուսային է, և հետևաբար կարող ենք նայել նրա հակադարձը (վերցնելով այնպես, որ հակադարձը գոյություն ունի) և այդտեղից գտնել $\vec{x}$-ը : Սակայն, սեղմ նմուշառության խնդրում $\vec{x}$-ի ոչ զրոյական գործակիցների ինդեքսները **հայտնի չեն**:*

Դիտողություն 6. *Ռեգուլյարիզացիան կիրառական մաթեմատիկայում և ճարտարագիտության մեջ լայնորեն կիրառվող մեթոդ է՝ ոչ միարժեքորեն լուծվող խնդիրների լուծում գտնելու համար:*

Եթե տրված A-ի և g-ի համար $Af = g$, հավասարումը չունի միակ լուծում, ապա կարող ենք f-ի վրա դնել լրացուցիչ պայմաններ, որոնք կապահովեն լուծման միակությունը: Դրվող պայմանը կախված կլինի խնդրից:

Մասնավորապես, եթե f-ը ֆունկցիա է, ապա պահանջելով, որ նրա ածանցյալի նորմը լինի «փոքր» (օրինակ, Սոբոլևի նորմերից մեկը), այսինքն դիտարկենք

$$\min \|f'\| \text{ այնպես որ } Af = g$$

ապա դա կստիպի, որ գտնվող ֆունկցիան լինի հնարավորինս ողորկ, և արդյունքում կստանանք խնդրի ողորկ լուծում, ինչը կարևոր պայման է կիրառություններում:

Երբեմն g չափումների վեկտորը պարունակում է աղմուկ $g = g_{true} + \epsilon$, որտեղ g_{true} իրական չափումն է, ϵ-ը՝ աղմուկն: Այդ դեպքում մենք ցանկանում ենք, որպեսզի ոչ թե f-ը լինի $Af = g$ խնդրի լուծումը, այլ միայն մոտավոր լուծումը՝ $Af \approx g$: Այդ դեպքում, նայում են հետևյալ խնդրին

$$\min\{\|f\| + |||Af - g|||\},$$

որտեղ $\|\cdot\|$ և $|||\cdot|||$ կարող են լինել իրարից տարբեր նորմեր՝ որոշված տարբեր տարածությունների վրա: Այս խնդիրը լուծելով՝ մենք միաժամանակ մինիմիզացնում ենք f-ի նորմը և $Af - g$ տարբերությունը: Շատ դեպքերում հնարավոր է ցույց տալ, որ այս գտնված լուծումը իրական լուծումից քիչ է տարբերվում:

3. r-նոսր վեկտորը վերականգնելու նվազագույն չափումների քանակը

Երբ որևէ բան հայտնի չէ $\vec{x}$-ի մասին, ապա $Ax = \vec{b}$ հավասարումը լուծելու համար մեզ անհրաժեշտ է առնվազն $M = N$ չափում: Առաջին հարցը, որ կարող ենք փորձել պատասխանել r-նոսր վեկտորը վերականգնելու համար անհրաժեշտ նվազագույն չափումների քանակն է:

Նկատենք, ոչ եթե, հայտնի է միայն $\vec{b} = A\vec{x}$-ը, որտեղ $\vec{x}$-ը անհայտ r-նոսր վեկտոր է, ապա $\vec{x}$-ը միարժեքորեն գտնվում է $\vec{b}$-ից, այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$$

ինյեկտիվ է:

Թեորեմ 2. *Հետևյալ պայմանները համարժեք են*

(1) $A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$ *ինյեկտիվ է,*

(2) $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$,

(3) A-ի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են:

Ապացույց. (2) $\implies$ (1): Ենթադրենք $\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$: Գրենք $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, որտեղ $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \Sigma_r^N$: Հետևաբար

$$A\vec{x} = A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = 0$$

և A-ի r-նոսր վեկտորների բազմության վրա ինյեկտիվ լինելուց $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$, որտեղից $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = 0$:

(1) $\implies$ (2): Դիցուք

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \Sigma_r^N \text{ և } Ax_1 = Ax_2 :$$

Այդ դեպքում $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \Sigma_{2r}^N$ և

$$A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = 0,$$

հետևաբար $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$ և մեր պայմանից $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = 0$ կամ $\vec{x}_1 = \vec{x}_2 = 0$:

(2) $\implies$ (3): Ենթադրենք

$$c_1 A[:, i_1] + \cdots + c_{2s} A[:, i_{2r}] = 0 : \tag{1}$$

Դիցուք $\vec{x}$ վեկտորի i_k-րդ գործակիցը հավասար է c_k-ի $k = 1, \ldots, 2r$, իսկ մնացյալ գործակիցները՝ 0-ի: Նկատենք, որ (1)-ը համարժեք է $A\vec{x} = 0$: $\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$, հետևաբար $\vec{x} = 0$ ինչը նշանակում է, որ $c_1 = \cdots = c_{2r} = 0$:

(3) $\implies$ (2) Ենթադրենք $\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$ և $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{2r}}$-ը $\vec{x}$-ի ոչ-զրոյական գործակիցներն են: Նկատենք, որ

$$A\vec{x} = x_{i_1} A[:, i_1] + \cdots + x_{i_{2r}} A[:, i_{2r}] :$$

Քանի որ $\vec{x} \in \ker(A)$, ուստի $Ax = 0$ և սյուների գծորեն անկախությունից $x_{i_1} = \cdots = x_{i_{2r}} = 0$, հետևաբար $\vec{x} = 0$: $\square$

Հետևանք. *Եթե $A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$-ը ինյեկտիվ է, ապա $M \geq 2r$:*

Այսինքն, եթե ցանկանում ենք, որ r-նոսր վեկտորը միարժեքորեն որոշվի իր չափումներով, ապա չափումների քանակը պետք է լինի առնվազն $2r$: Հարց է առաջանում, արդյո՞ք հնարավոր է ճիշտ $2r$ չափումներով վերականգնել վեկտորը: Այդ հարցը ունի դրական պատասխան:

Դիտարկենք հետևյալ մատրիցը՝

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N \\ & \vdots & & \\ \alpha_1^{2s-1} & \alpha_2^{2s-1} & \cdots & \alpha_N^{2s-1} \end{pmatrix}:$$

Ցանկացած $\{i_1, \ldots, i_{2r}\} \subseteq \{1,]dots, N\}$ բազմության համար, Վանդերմոնդի մատրիցի բանաձևից

$$\det(V[:, i_1], \ldots, V[:, i_{2r}]) = \prod_{k<j} (a_{i_j} - a_{i_k}):$$

Հետևաբար, A մատրիցի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են, երբ $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ իրարից տարբեր են:

4. Սեղմ նմուշառության խնդիրը NP բարդ է

Ենթադրենք Թեորեմ 2-ի պայմանները բավարարված են, հետևաբար $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը ունի միակ r-նոսր լուծումը: Սակայն թեորեմը չի ասում, թե ինչպես գտնել այդ միակ լուծումը: Մեզ հայտնի չէ թե որտեղ են $\vec{x}$-ի ոչ զրոյական գործակիցները տեղակայված և նրանց արժեքները: Այսինքն, մեր խնդիրը նաև կայանում է ոչ զրոյական գործակիցների ինդեքսները գտնելը:

Պարզամիտ մոտեցումը խնդիրը լուծելու համար կլիներ

- Դիտարկել ինդեքսների $\{1, \ldots, N\}$ բազմության յուրաքանչյուր r էլեմենտանոց $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ ենթաբազմություն,
- Գտնել այն միակ I բազմությունը, որի համար

$$(A[:, i_1], \ldots, A[:, i_r]) \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} = \vec{b}$$

  հավասարումը ունի լուծում (այն ավելի շատ տող ունի քան սյուն և լուծումը գոյություն կունենա միայն մեկ I ինդեքսների բազմության դեպքում):

Վատագույն դեպքում պետք է լուծել $\binom{N}{r} = \frac{N!}{r!(N-r)!}$ հավասարում

Ենթադրենք, $N = 1000, r = 10$ և յուրաքանչյուր հավասարումը լուծելու համար պահանջվում է 10^{-10} վայրկյան, ապա հաջորդաբար լուծելու համար կպահանջվի

$$10^{-10} \frac{1000!}{10!(990)!} = 10^{-10} \frac{991}{1} \cdots \frac{1000}{10} \geq 10^{-10} \left(\frac{1000}{10}\right)^{10} = 10^{10} \text{ վայրկյան} \geq 300 \text{ տարի:}$$

Պարզվում է, այս խնդրի լուծումը NP-բարդ է (ընդհանուր մատրիցների համար բազմանդամային արագությամբ ալգորիթմ գոյություն չունի, սակայն որոշ կոնկրետ դեպքերում կարող է նման ալգորիթմ լինել, օրինակ օգտագործելով Reed-Solomon-ի մեթոդը), և դա միայն մեր մոտեցման պարզամիտ լինելու պատճառով չէ (տես [6], Բաժին 2.3 և [7]):

5. Եզրահանգում

Այսպիսով, մենք ստացանք նոսր վեկտորը վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, սակայն այդ պայմանները շատ դժվար էին ստուգել և ամենից կարևորը, անգամ այն դեպքում, երբ այդ պայմանները բավարարված էին, հաշվողական տեսանկյունից որևէ արդյունավետ մեթոդներ չկային խնդիրը լուծելու համար:

Հաջորդ բաժինը կնվիրվի մի այդպիսի մեթոդի մշակմանը, որը կոչվում է խնդրի ուռուցիկ ռելակսացիա, և հնարավորություն է տալիս օպտիմալ կերպով լուծել խնդիրը, սակայն այս դեպքում չափումների մատրիցից լրացուցիչ պայմաններ պետք է պահանջենք: Կտեսնենք, որ պատահական մատրիցների դեպքում այդ պայմանները մեծ ճշտությամբ բավարարվում են:

Օր 3-րդ

Ինչպես տեսանք, պարզունակ լուծումը հաշվողական տեսանկյունից նպատակահարմար չէ, ավելին, ընդհանուր դեպքում որևէ օպտիմալ լուծում գտնելու հույս չկա, որովհետև խնդիրը NP բարդ է: Բայց միգուցե A-ի վրա (որին մենք ենք կառուցում) լրացուցիչ պայմաններ դնելով հնարավոր լինի գտնել այդպիսի մեթոդ:

1. Սեղմ նմուշառության խնդրի վերաձևակերպումը

▷ *$q > 0$ թվի և* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$*-ի համար սահմանենք*

$$\|\vec{x}\|_q = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} :$$

Ինչպես նաև

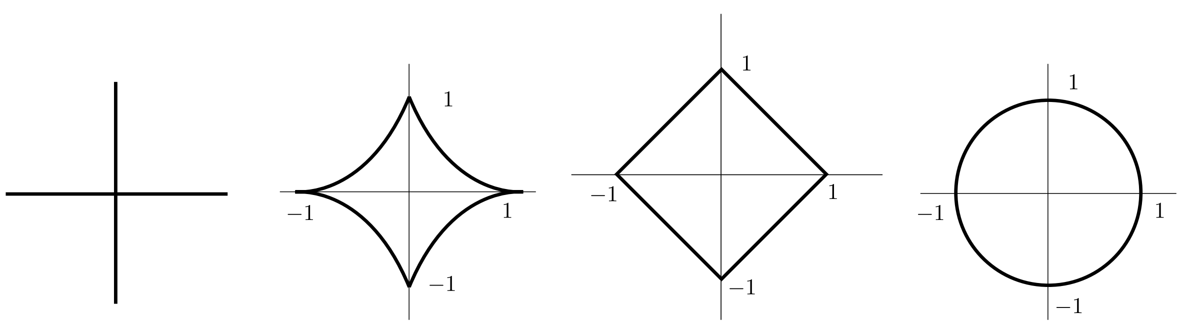
$$\|\vec{x}\|_0 = \#\{k : \ 1 \le k \le N \ \text{և} \ x_k \ne 0\}$$

որտեղ #-ը բազմության էլեմենտների քանակն է:

▷ *Միավոր q-գունդ կոչվում է հետևյալ բազմությունը*

$$B_q^N = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^N : \ \|\vec{x}\|_q \le 1\} :$$

Նկատենք, որ B_0^N-ը անսահմանափակ բամություն է:



Նկար 7: B_q^2-ն $q = 0$, $0 < q < 1$, $q = 1$ և $q = 2$-ի համար

Վարժություն 5. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$*-ի համար գտնել*

$$\arg\min_{u \in \Sigma_r^N} \|\vec{x} - \vec{u}\|_2$$

(մանրամասների համար, տես [4]-ը):

Թեորեմ 3. *$A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $\vec{x} \in \Sigma_r^N$-ի համար $\vec{x}$-ը*

$$\arg\min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \ \text{ այնպես որ } \ A\vec{u} = \vec{b} \tag{P_0}$$

խնդրի միակ լուծումն է, որտեղ $\vec{b} = A\vec{x}$:

Ապացույց. $(\Rightarrow)$ Եթե $\vec{y}$-ը (P_0)-ի լուծում է, ապա $\|\vec{y}\|_0 \leq \|\vec{x}\|_0$ հետևաբար $\vec{y} \in \Sigma_r^N$ ուստի ինյեկտիվությունից $\vec{x} = \vec{y}$:

$(\Leftarrow)$ Դիցուք $A\vec{y} = A\vec{x}$, որտեղ $\vec{x}, \vec{y} \in \Sigma_r^N$: Եթե $\|\vec{x}\|_0 < \|\vec{y}\|_0$, ապա $\vec{y}_0$-ն $\vec{b} = A\vec{y}$-ի համար P_0-ի լուծումը չէ: Նույն կերպ $\|\vec{x}\|_0 > \|\vec{y}\|_0$ չի կարող լինել, ուստի $\|\vec{x}\|_0 = \|\vec{y}\|_0$: Բայց քանի որ $\vec{x}$-ը P_0-ի միակ լուծումն էր, ուստի $\vec{x} = \vec{y}$: □

Այս վերաձևակեպրպումից հետո, (P_0)-ն հիշեցնում է ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրը, որին անդրադառնում ենք հաջորդիվ:

2. Ուռուցիկ օպտիմիզացիա

▷ *$U \subseteq \mathbb{R}^N$ բազմությունը կոչվում է **ուռուցիկ**, եթե ցանկացած $0 \leq \alpha \leq 1$ և $\vec{x}, \vec{y} \in U$-ի համար տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝ $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in U$:*

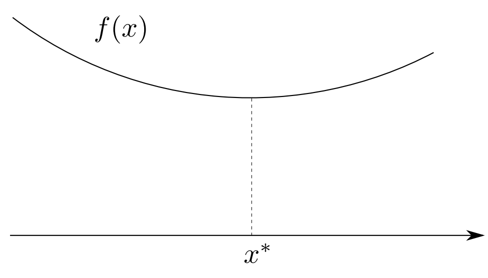
▷ *$U \subseteq \mathbb{R}^N$ ուռուցիկ բազմության վրա որոշված $\phi : U \to \mathbb{R}$ ֆունկցիան կոչվում է **ուռուցիկ**, եթե*

$$\phi(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) \leq \alpha\phi(\vec{x}) + (1-\alpha)\phi(\vec{y})$$

ցանկացած $0 \leq \alpha \leq 1$-ի համար:

Դիցուք $U \subseteq \mathbb{R}^N$ ուռուցիկ բազմություն է և $\phi : C \to \mathbb{R}$ ուռուցիկ ֆունկցիա է: Ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրն է գտնել որևէ $x* \in U$, որի դեպքում $\phi(x^*) \leq \phi(x)$ ցանկացած $x \in U$-ի համար, ինչը սովորաբար գրվում է որպես

$$\arg\min_{\vec{u}} \phi(\vec{u}) \ \text{ այնպես որ } \ \vec{u} \in U :$$



▷ *Հետևյալ խնդիրը կոչվում է **գծային ծրագրավորում***

$$\arg\min_{\vec{u}} \phi(\vec{u}) = c_1 u_1 + \cdots + c_N u_N \ \text{ այնպես որ } \ C\vec{u} \leq \vec{b} \text{ և } \vec{u} \geq 0$$

որտեղ C-ն ինչ-որ $M \times N$ մատրից է և $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$:

Գծային ծրագրավորումը օպտիմիզացայի խնդրի մասնավոր դեպքն է, երբ ϕ-ն գծային է և U-ն ուռուցիկ բազմանիստ է

Գծային ծրագրավորման խնդրի լուծման բազմաթիվ արագ ալգորիթմներ կան: Երեք հիմնական ալգորիթմներ են Գծային ծրագրավորման խնդրի լուծման բազմաթիվ արագ ալգորիթմներ կան

- **Սիմպլեքս մեթոդը** (Դանցիգ 1947),
- **Էլիպսոիդ մեթոդ** (Խաչիյան, 1979),
- **Ներքին կետի մեթոդ** (Կամարկար, 1984)։

Սակայն խնդիրը կայանում է նրանում, որ

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \ \text{ այնպես որ } \ A\vec{u}=\vec{b}$$

խնդրում $\vec{u}\mapsto\|\vec{u}\|_0$-ն ուռուցիկ չէ, ուստի ուռուցիկ օպտիմիզացիայի մեթոդները կիրառել չենք կարող։

Պնդում 1. *$\vec{u}\mapsto\|\vec{u}\|_q$-ն ուռուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ B_q^N-ը ուռուցիկ է։*

$\vec{u}\mapsto\|\vec{u}\|_q$-ի ուռուցիկությունը կարելի է ստուգել նաև այլ ձևերով, բայց այս պնդումից և Նկար ??-ից կարելի է նկատել, որ

- ուռուցիկ չէ $0\le q\le 1$,
- ուռուցիկ է $q\ge 1$։

3. Սեղմ նմուշառության խնդրի ուռուցիկ ռելակսացիա

Դիցուք $\vec{b}=A\vec{x}$ որտեղ $\vec{x}\in\Sigma_r^N$։ Հարց է առաջանում, թե արդյոք հնարավոր է $\|\vec{u}\|_0$-ն փոխարինել $\|\vec{u}\|_q$-ով, և փորձել լուծել

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_q \ \text{ այնպես որ } \ A\vec{u}=\vec{b} \tag{P_q}$$

խնդիրը այն հույսով, որ միգուցե կգտնի անհայտ r-նոսր $\vec{x}$ վեկտորը։

Նկատենք, որ եթե $A:\Sigma_r^N\mapsto\mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է և որևէ q-ի համար P_q խնդրի լուծումը r-նոսր վեկտոր է, ապա այն կլինի մեր կողմից որոնվող լուծումը, քանի որ այն բավարարում է $A\vec{u}=\vec{b}$ հավասարմանը և A-ն ինյեկտիվ է r-նոսր վեկտորների բազմության վրա։

Սակայն,

- $q<1$ ուռուցիկ չէ և այս կերպ խնդիրը չենք հեշտացնում
- $q>1$-ի համար քիչ սպասելի է, որ գտնված լուծումը կլինի նոսր
- $q=1$-ի համար պարզվում է, մատրիցների մեծ դասի համար գտնում է նոսր լուծում։

Այսպիսով, եթե ունենք $\vec{b}=A\vec{x}$ որտեղ $\vec{x}\in\Sigma_r^N$

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \ \text{ այնպես որ } \ A\vec{u}=\vec{b} \tag{P_0}$$

խնդիրը լուծելու փախարեն կլուծենք

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_1 \ \text{ այնպես որ } \ A\vec{u}=\vec{b} \tag{P_1}$$

Պնդում 2. *(P_1) խնդիրը գծային ծրագրավորման խնդիր է։*

Ապացույց. Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը

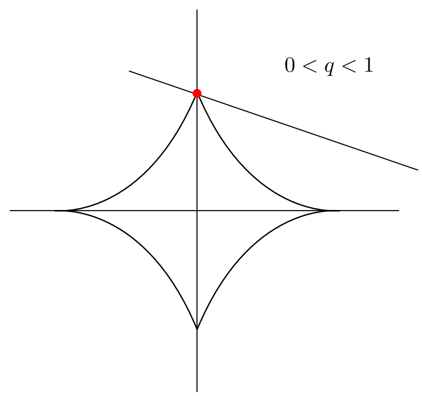
$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N}(\vec{u}_+ + \vec{u}_-) \ \text{ այնպես որ } \ A\vec{u}_+ - A\vec{u}_- = \vec{b} \text{ և } \vec{u}_+\ge 0, \vec{u}_-\ge 0$$

Նկատենք, որ եթե $\vec{x}_+,\vec{x}_-$-ը նրա լուծումներ են, ապա նրանց կրիչները չհատվող են, քանի որ ցանկացած վեկտորի համար, նրա բոլոր $\vec{x}=\vec{x}_+-\vec{x}_-$, $\vec{x}_+,\vec{x}_-\ge 0$ներկայացումների մեջ $\vec{x}_++\vec{x}_-$-ն ամենափոքրն է, երբ կրիչները չեն հատվում։ □

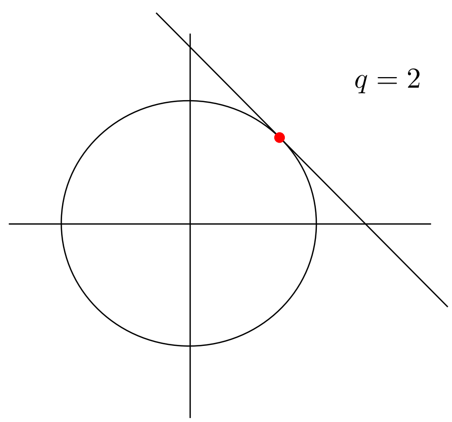
4. Երկրաչափական մեկնաբանություն

Ենթադրենք $M = 1, N = 2$, այսինքն A-ն 1×2 չափանի մատրից է: Նախ մոռանանք $A : \Sigma_R^N \to \mathbb{R}^M$-ի ինյեկտիվության մասին (այս դեպքում բնականաբար ինյեկտիվություն չունենք, քանի որ $M \geq 2r$ խախտվել է. դա կարելի է տեսնել նաև նկարի վրա քանի որ առնվազն երկու 1-նոսր կետերում հատում կա), և փորձենք երկրաչափորեն հասկանալ, թե արդյոք P_q-ն կարող է ընդհանրապես միայն նոսր լուծում գտնել:

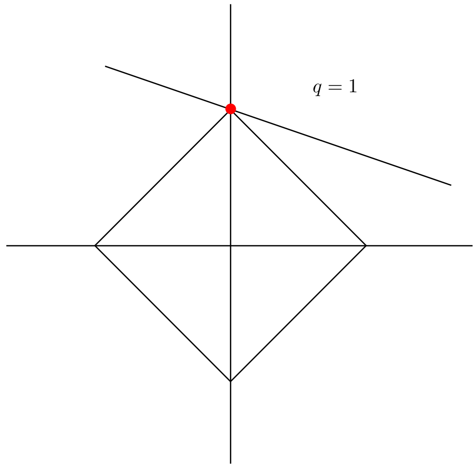
Այս դեպքում $A\vec{u} = b$-ն իրենից ներկայացնում է ուղիղ, և P_q խնդրի լուծումը կլինի առաջին կետը (կետերը), որոնց հետ հպվում է q-գունդը, երբ նրա շառավիղը զրոյից սկսում ենք մեծացնել:



Նկար 8: Այս դեպքում P_q-ն վստահաբար կգտնի նոսր լուծում, սակայն խնդիրը ուռուցիկ չէ



Նկար 9: $q > 2$-ի համար P_q-ն նոսր լուծում չի գտնի դեպքերից շատերում



Նկար 10: P_1-ը որոշ դեպքերում կգտնի նոսր լուծում, սակայն մեզ պետք է գտնել պայմաններ, որոնց դեպքում դա երաշխավորված է

5. r-NSP պայմանը

Դիցուք $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ և $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$: Նշանակենք

$$\vec{x}_I(i) = \begin{cases} \vec{x}(i), & \text{եթե } i \in I \\ 0, & \text{եթե } i \notin I \end{cases} :$$

▷ *Կասենք, որ A-ն բավարարում է* **r-NSP** *պայմանին (*Null Space Property*), եթե ցանկացած $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$, $|I| \leq r$ ինդեքսների բազմության և ցանկացած $\vec{x} \in \ker(A) \setminus \{0\}$ վեկտորի համար*

$$\|\vec{x}_I\|_1 < \|\vec{x}_{I^c}\|_1 :$$

Նկատենք, որ $\|\vec{x}_I\|_1 + \|\vec{x}_{I^c}\|_1 = \|\vec{x}\|_1$, հետևաբար r-NSP պայմանը համարժեք է նրան, որ $\|\vec{x}\|_1 < 2\|\vec{x}_{I^c}\|_1$ կամ $2\|\vec{x}_I\|_1 < \|\vec{x}\|_1$:

Նաև, r-NSP-ից հետևում է, որ $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$, հակառակ դեպքում, եթե $\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$ և $\vec{x} \neq 0$, ապա, վերցնելով I-ն $\vec{x}$-ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ առաջին r գործակիցների ինդեքսների բազմությունը, կունենանք $\|\vec{x}_I\|_1 \geq \|\vec{x}_{I^c}\|_1$:

Թեորեմ 4. *Յուրաքանչյուր $\vec{x} \in \Sigma_r^N$-ի և $\vec{b} = A\vec{x}$-ի համար*

$$\arg\min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_1 \;\; \text{այնպես որ} \;\; A\vec{u} = \vec{b} \tag{P_1}$$

խնդիրը ունի միակ լուծումը $\vec{x}$-ն է այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն բավարարում է r-NSP *պայմանին:*

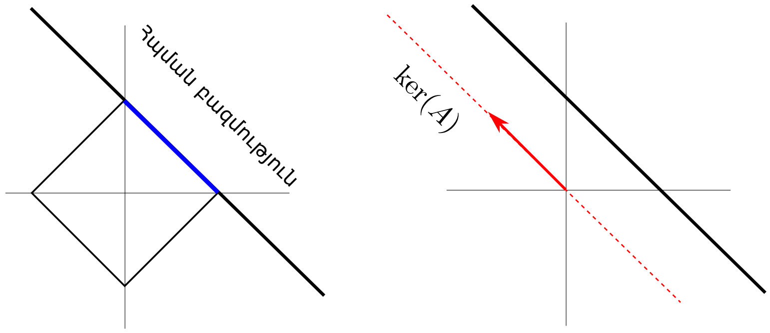
Ապացույց. ($\Rightarrow$) Դիցուք $\vec{x} \in \ker(A) \setminus \{0\}$ և $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$, $|I| \leq r$: $\vec{x}_I \in \Sigma_r^N$, ուստի $\vec{x}_I$-ը P_1 խնդրի միակ լուծումն է $\vec{b} = A\vec{x}_I$-ի համար: Մյուս կողմից $A\vec{x}_I = A(-\vec{x}_{I^c})$, հետևաբար $\|\vec{x}_I\|_1 < \|-\vec{x}_{I^c}\|_1$:

($\Leftarrow$) Դիցուք, $\vec{x} \in \Sigma_r^N$, հետևաբար $\vec{x} = \vec{x}_I$, ինչ որ $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$, $|I| \leq r$ բազմության համար: Ենթադրենք, $A\vec{x} = A\vec{y}$ ինչ-որ $\vec{y} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{y} \neq \vec{x}$ վեկտորի համար: Այդ դեպքում, $\vec{v} = \vec{x} - \vec{y}$-ի համար $\vec{v}_I = \vec{x} - \vec{y}_I$ և $\vec{v}_{I^c} = -\vec{y}_{I^c}$, հետևաբար

$$\|x\|_1 \leq \|\vec{x} - \vec{y}_I\|_1 + \|\vec{y}_I\|_1 = \|\vec{v}_I\|_1 + \|\vec{y}_I\|_1 < \|\vec{v}_{I^c}\|_1 + \|\vec{y}_I\|_1 = \|\vec{y}_{I^c}\|_1 + \|\vec{y}_I\|_1 = \|y\|_1 :$$

□

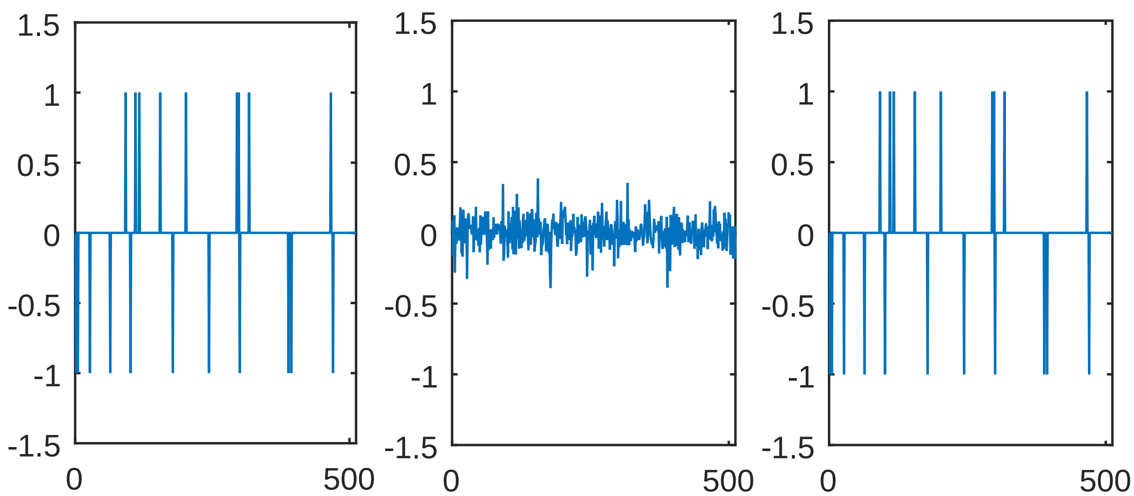
Այս պայմանը երկրաչափորեն հասկանալու համար նայենք հետևյալ պատկերը $M = 1, N = 2$-ի համար:



Նկար 11: Վատ դեպքը ստացվում է, երբ հպման բազմությունը ոչ նոսր կետեր ունի և NSP-ն ձախողվում է: Այս դեպքում կորիզի վեկտորի երկու կոորդինատները հավասար են բացարձակ արժեքով:

6. Ցուցադրություն

Matlab-ի միջոցով աշխատեցնում ենք CSmodified.m ֆայլը: Օգտվելու ենք l1-magic փաթեթից [2], որը պետք է առանձին ներբեռնել փաթեթի կայքից [2]: Նրանում կիրառվում է ներքին կետի մեթոդը գծային ծրագրի խնդիրը լուծելիս: Մատրիցներ գեներացնելու համար կօգտագործենք Matlab համակարգի պատահական մատրիցների փաթեթից: Չափումների մատրիցը գեներացվել է՝ օգտագործելով նորմալ բաշխում: Թե ինչու՞ է նորմալ բաշխման համար r=NSP պայմանը սպասելի, որ տեղի կունենա, կանդրադառնանք մյուս բաժնում:



Նկար 12: Ձախ կողմում բնօրինակ վեկտորն է, մեջտեղում՝ ℓ_2 մինիմիզացիայով վերականգնված վեկտորը և աջ կողմում՝ ℓ_1 մինիմիզացիայով վերականգնված վեկտորը

7. Եզրահանգում

Սեղմ նմուշառության խնդիրը ընդհանուր մատրիցների դեպքում հաշվողական տեսանկյունից անհնար էր լուծել, սակայն որոշ մատրիցների համար սեղմ նմուշառության խնդիրը ℓ_1 մինիմիզացիայի միջոցով բերվում էր գծային օպտիմիզացիայի խնդրի, որի լուծման համար բազմաթիվ թվային մեթոդներ գոյություն ունեն: Թվային մեթոդներով նկատեցինք, որ պատահական մատրիցների համար, որոնք ունեն անկախ Գաուսյան բաշխումով գործակիցներ, այդ պայմանը տեղի ուներ:

Հաջորդ բաժնում կանդրադառնանք այս փաստին՝ տալով ավելի խիստ մաթեմատիկական մեկնաբանություն:

Օր 4-րդ

1. r-RIP պայմանը

▷ *Կասենք, որ A մատրիցը բավարարում է* **r-RIP** *պայմանին, եթե գոյություն ունեն $\alpha, \beta > 0$ թվեր այնպես որ ցանկացած r-նոսր վեկտորի համար*

$$\alpha\|\vec{x}\|_2^2 \leq \|A\vec{x}\|_2^2 \leq \beta\|\vec{x}\|_2^2 :$$

Եթե A-ն բավարարում է $2r$-RIP պայմանին, ապա երկու r-նոսր վեկտորների չափումները լավ կտարբերակվեն, ու երկու տարբեր r-նոսր վեկտորներ չեն արտապատկերվի նույն չափումների վեկտորին, հետևաբար $A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է: Սակայն մենք ցույց կտանք, որ ավելին տեղի ունի, $2r$-RIP պայմանից հետևում է r-NSP-ն, ուստի P_0 խնդրի լուծումը հնարավոր է գտնել ℓ_1 մինիմիզացիայի միջոցով:

Այնուհետև մեր նպատակը կլինի ցույց տալ, որ նման մատրիցներ գոյություն ունեն, և նրանց քանակը շատ է: Նկատենք, որ եթե A-ն բազմապատկենք որևէ թվով, ապա դա նույնպես կբավարարի r-RIP պայմանին: Ուստի բավական է ցույց տալ, որ

$$(1 - \delta_r)\|\vec{x}\|_2 \leq \|A\vec{x}\|_2 \leq (1 + \delta_r)\|\vec{x}\|_2$$

բավարարող մատրիցների քանակն է շատ: Փոքրագույն δ_r-ը կոչվում է RIP-**հաստատուն**: Այս տեսքը ավելի նախընտրելի է, քանի որ օգտագործելու ենք պատահական մատրիցներ, և այն դասը, որը նայելու ենք, նրանց եզակի արժեքները բաշխված են 1-ի շուրջը և ապացույցը, որը մենք բաց կթողնենք, օգտագործում է եզակի արժեքների կոնցենտրացիան:

Թեորեմ 5. *Եթե A մատրիցը բավարարում է 2s-RIP պայմանը և $\delta_{2r} < \frac{1}{3}$, ապա P_1-ը միարժեքորեն վերականգնում է ցանկացած r-նոսր վեկտոր:*

Նախ ապացուցենք հետևյալ լեմման:

Լեմմա 1. *Եթե $\vec{u}, \vec{v} \in \Sigma_r^N$, $\operatorname{supp}(\vec{u}) \cap \operatorname{supp}(\vec{v}) = \emptyset$ և A-ն ունի 2r-RIP հատկությունը, ապա*

$$|\langle A\vec{u}, A\vec{v}\rangle| \leq \delta_{2r}\|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2 :$$

Ապացույց. 2r-RIP պայմանից

$$(1 - \delta_{2r})\|\vec{u} \pm \vec{v}\|_2^2 \leq \|A\vec{u} \pm A\vec{v}\|_2^2 \leq (1 + \delta_{2r})\|\vec{u} \pm \vec{v}\|_2^2 :$$

Քանի որ $\operatorname{supp}(\vec{u}) \cap \operatorname{supp}(\vec{v}) = \emptyset$, ուստի $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|_2^2 = \|\vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2$:

Օգտագործելով զուգահեռագծի կանոնից՝

$$|\langle A\vec{u}, A\vec{v}\rangle| = \frac{1}{4}|\|A\vec{u} + A\vec{v}\|_2^2 - \|A\vec{u} - A\vec{v}\|_2^2| \leq \frac{1}{4}2\delta_{2r}(\|\vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2) \leq \delta_{2r}\|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2$$

□

Թեորեմ 5-ի ապացույցը. Պետք է ցույց տալ, որ $\vec{x} \in \ker(A)\setminus\{0\}$ վեկտորի և $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$, $|I| \leq r$ բազմության համար $\|\vec{x}_I\|_1 < \|\vec{x}_{I^c}\|_1$, կամ համարժեքորեն $\|\vec{x}_I\|_1 < \frac{1}{2}\|\vec{x}\|_1$: Բավական է ցույց տալ, երբ I-ն $\vec{x}$-ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ գործակիցների ինդեքսների բազմությունն է:

Դիցուք $I_0 = I$, I_1-ը $\vec{x}_{I_0^c}$-ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ գործակիցների ինդեքսների բազմությունն է, I_2-ը $\vec{x}_{(I_0 \cup I_1)^c}$-ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ գործակիցների ինդեքսների բազմությունն է և այսպես շարունակ, մինչև $I_0^c = I_1 \cup \cdots \cup I_k$:

Հետևաբար,

$$\vec{x} = \vec{x}_{I_0} + \sum_{j=1}^{k} \vec{x}_{I_j} \, :$$

$\vec{x} \in \ker(A)$, ուստի

$$A(\vec{x}_{I_0}) = -\sum_{j=1}^{k} A(\vec{x}_{I_j}) \, :$$

Քանի որ $\vec{x}_{I_0} \in \Sigma_r^N$, r-RIP պայմանից

$$\|\vec{x}_{I_0}\|_2^2 \leq \frac{1}{1-\delta_{2r}} \|A(\vec{x}_{I_0})\|_2^2 = \frac{1}{1-\delta_{2r}} \langle A(\vec{x}_{I_0}), A(\vec{x}_{I_0}) \rangle = \frac{1}{1-\delta_{2r}} \langle A(\vec{x}_{I_0}), -\sum_{j=1}^{k} A(\vec{x}_{I_j}) \rangle$$

$$\leq \frac{1}{1-\delta_{2r}} \sum_{j=1}^{k} |\langle A(\vec{x}_{I_0}), A(\vec{x}_{I_j}) \rangle| \, :$$

Օգտվելով Լեմմա 1-ից՝

$$\frac{1}{1-\delta_{2r}} \sum_{j=1}^{k} |\langle A(\vec{x}_{I_0}), A(\vec{x}_{I_j}) \rangle| \leq \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}} \sum_{j=1}^{k} \|\vec{x}_{I_0}\|_2 \|\vec{x}_{I_j}\|_2 = \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}} \|\vec{x}_{I_0}\|_2 \sum_{j=1}^{k} \|\vec{x}_{I_j}\|_2$$

ուստի

$$\|\vec{x}_{I_0}\|_2 \leq \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}} \sum_{j=1}^{k} \|\vec{x}_{I_j}\|_2 \, : \tag{2}$$

I_j-երի մեր ընտրությունից,

$$|\vec{x}_{I_j}(i)| \leq \frac{1}{|I_{j-1}|} \sum_{l \in I_J} |x_{I_{j-1}}(l)| = \frac{1}{r} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1$$

հետևաբար

$$\|\vec{x}_{I_j}\|_2^2 = \sum_{i \in I_j} |\vec{x}_{I_j}(i)|^2 \leq \frac{|I_j|}{r^2} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1^2 \leq \frac{1}{r} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1^2 \, :$$

Վերջինս համադրելով (2)-ի հետ՝ ստանում ենք

$$\|\vec{x}_{I_0}\|_2 \leq \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}} \sum_{j=1}^{k} \|\vec{x}_{I_j}\|_2 \leq \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{r}} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1 \leq \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}} \frac{\|\vec{x}\|_1}{\sqrt{r}} \leq \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}} \|\vec{x}\|_2$$

(Հյոլդերի անհավասարությունից $\|\vec{x}\|_1 \leq \sqrt{r}\|\vec{x}\|_2$):

Մեզ անհրաժեշտ է, որ

$$\frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}} < \frac{1}{2}$$

վերջինս տեղի ունի, երբ $\delta_{2s} < \frac{1}{3}$: □ □

Վարժություն 6. *Ապացուցել զուգահեռանիստի կանոնը՝*

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = \frac{1}{4} |\|\vec{u}+\vec{v}\|_2^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|_2^2| \, :$$

$\delta_{2r} < \frac{1}{3}$ պայմանը անհրաժեշտ պայման չէ, կան այլ պայմաններ ևս, որոնց դեպքում P_1-ը միարժեքորեն վերականգնում է ցանկացած r-նոսր վեկտոր:

r-NSP պայմանի համար, ինչպես տեսանք, մեզ անհրաժեշտ էին առնվազն $2r$ չափումներ: Հաջորդ թեորեմը ասում է թե քանի չափումներ են անհրաժեշտ, որպեսզի 2r-RIP պայմանը տեղի ունենա:

Թեորեմ 6. *Եթե A մատրիցը բավարարում է 2r-RIP պայմանին և նրա RIP հաստատունը հավասար է δ-ի, ապա*

$$M \geq Cr \log \frac{N}{cr}$$

որտեղ C հաստատունը կախված է միայն δ-ից, իսկ $c = 4$ (մի փոքր ավելի լավ անալիզ անելով՝ կարելի է դարձնել $c = 1$, տես [1], Լեմմա 3.2, հետևում է նաև այստեղից այն դեպքերում, երբ $\frac{N}{r} > 4$):

Ապացույց. Կօգտվենք հետևյալ կոմբինատորիալ արդյունքից:

Լեմմա 2. *Կամայական $r \leq N$-ի համար գոյություն ունեն $S_1, \ldots, S_n \subset \{1, \ldots, N\}$ բազմություններ, այնպես, որ*

1. $|S_j| = r$
2. $n \geq \left(\frac{N}{4r}\right)^{\frac{r}{2}}$
3. $|S_i \cap S_j| < \frac{r}{2}$, *$i \neq j$-ի համար:*

Ապացույց. U-ով նշանակենք $\{1, \ldots, N\}$-ի r էլեմենտ ունեցող ենթաբազմությունների բազմությունը: Ընտրենք $S_1 \in U$ բազմությունը կամայական ձևով: $S \in U$ բազմությունների քանակը, որոնց համար $|S \cap S_1| \geq \frac{r}{2}$, հավասար է

$$\sum_{i=\lfloor \frac{r}{2} \rfloor+1}^{r} \binom{r}{i}\binom{N-r}{r-i} \leq \sum_{i=\lfloor \frac{r}{2} \rfloor+1}^{r} \binom{r}{i} \max_{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor+1 \leq i \leq r} \binom{N-r}{r-i}$$

$$\leq 2^r \binom{N-r}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}$$

օգտվելով Նյուտոնի բինոմի բանաձևից՝

$$2^r = (1+1)^r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} :$$

Ստացված թիվը գնահատում է «վատ» S-երի քանակը, եթե ընտրել ենք S_1-ը: Այժմ եթե ընտրել ենք S_1, S_2-ը, «վատ» S-երի քանակը այս զույգի համար չի գերազանցի $2^r \binom{N-r}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}$-ը և այսպես շարունակ: Այսպես կարող ենք շարունակել ընտրել S_i բազմությունները, քանի դեռ «վատ» բազմությունների գումարային քանակը չի գերազանցում $|U| = \binom{N}{r}$-ը: Քանի որ սկսած երկրորդ բազմությունից, մեր գնահատականը շատ կոպիտ էր, n-ի համար կունենք

$$n 2^r \binom{N-r}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \geq \binom{N}{r}$$

ուստի

$$n \geq \frac{\binom{N}{r}}{2^r \binom{N-r}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}} \geq \left(\frac{N}{4r}\right)^{\frac{r}{2}} :$$

□

Դիտարկենք նախորդ լեմմայի $S_1, \ldots, S_n \subset \{1, \ldots, N\}$ բազմությունները: Նայենք $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ վեկտորները, այնպես որ

$$\vec{x}_j(k) = \begin{cases} 1 & \text{եթե } k \in S_j \\ 0 & \text{եթե } k \notin S_j \end{cases} :$$

Այդ դեպքում, 2r-RIP պայմանից

$$\|A\vec{x}_i - A\vec{x}_j\|_2 \geq \sqrt{1-\delta_{2r}} \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|_2 \geq \sqrt{1-\delta_{2r}} \left(2r - \frac{r}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3(1-\delta_{2r})}{2}} \sqrt{r}$$

և

$$\|A\vec{x}_i\|_2 \leq \sqrt{1+\delta_{2r}} \sqrt{r} :$$

Առաջին գնահատականից հետևում է, որ եթե յուրաքանչյուր $A\vec{x}_i$-ի շուրջը նայենք $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(1-\delta_{2r})}{2}}\sqrt{r}$ շառավղով գունդ, ապա այդ գնդերը չեն հատվի: Առաջին գնահատակնից էլ, եթե նայենք

$$\sqrt{1+\delta_{2r}}\sqrt{r}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(1-\delta_{2r})}{2}}\sqrt{r}$$

շառավիղով ու 0 կենտրոնով գունդը, ապա այն կպարունակի այդ գնդերը, որոնց քանակը n է: Ուստի գնահատելով ծավալները, կունենանք

$$\left(\sqrt{1+\delta_{2r}}\sqrt{r}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(1-\delta_{2r})}{2}}\sqrt{r}\right)^M \geq n\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(1-\delta_{2r})}{2}}\sqrt{r}\right)^M \geq \left(\frac{N}{4r}\right)^{\frac{r}{2}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(1-\delta_{2r})}{2}}\sqrt{r}\right)^M$$

Նշանակենք

$$C=\frac{\sqrt{1+\delta_{2r}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(1-\delta_{2r})}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(1-\delta_{2r})}{2}}},$$

ուստի

$$C^M \geq \left(\frac{N}{4r}\right)^{\frac{r}{2}}$$

կամ

$$M \geq \frac{1}{2\log C} r \log\left(\frac{N}{4r}\right):$$

□

2. Պատահական մատրիցները և 2r-RIP պայմանը

Հետևյալ թեորեմի ապացույցը կարելի է գտնել [1]-ում (Theorem 7.3):

Թեորեմ 7 (Candés, Tao, Romberg, 2006). *Դիցուք A-ն պատահական մատրից է, որի գործակիցները անկախ պատահական մեծություններ են $N(0,1)$ բաշխումով: Այդ դեպքում $M \geq Cr\log\frac{N}{r}$-ի համար, որտեղ $C>0$—ն ցանկացած հաստատուն է, $\frac{1}{\sqrt{M}}A$ մատրիցը բավարարում է r-RIP պայմանին $1-e^{-cM}$ հավանականությամբ, որտեղ*

$$c=\frac{(1-\log 2)\delta^2}{4}-\frac{\log(\frac{42e}{\delta})}{C}:$$

Այսինքն, ինչքան մեծ վերցնենք M-ը, այնքան ավելի հավանական է, որ պատահական մատրիցը կբավարարի RIP պայմանին, ընդ որում այդ հավանականությունը մոտենում է 1-ի էքսպոնենցիալ արագությամբ M-ի աճման հետ:

3. Եզրահանգում

Սեղմ նմուշառության խնդիրը ընդհանուր մատրիցների դեպքում հաշվողական տեսանկյունից անհնար էր լուծել, սակայն որոշ մատրիցների համար սեղմ նմուշառության խնդիրը ℓ_1 մինիմիզացիայի միջոցով բերվում էր գծային օպտիմիզացիայի խնդրի, որի լուծման համար բազմաթիվ թվային մեթոդներ գոյություն ունեն:

Թվային մեթոդներով նկատեցինք, որ պատահակամ մատրիցների համար, որոնք ունեն անկախ Գաուսյան բաշխումով գործակիցներ, այդ պայմանը տեղի ուներ, և այդ փաստի մաթեմատիկական մեկնաբանությունը տրվեց RIP պայմանի միջոցով:

Ժամանակի սղության պատճառով մենք բաց թողեցին կարևոր թեմաներ, ինչպիսիք են սեղմ նմուշառության լուծման այլ մեթոդները (կոմբինատոր, գրիդի և այլն),որոնց որոշը ավելի կիրառելի են քան ℓ_1 մինիմիզացիան:

Չխոսեցինք նաև վերականգնման ճշտության մասին, երբ չափումներում առկա է աղմուկ կամ վեկտորը նոսր չէ, սակայն գրեթե նոսր և բազմաթիվ այլ թեմաների մասին, որոնց կարելի է ծանոթանալ հղված աղբյուրներից:

Գրականություն

[1] R. Baraniuk, M. A Davenport, M. F. Duarte, Ch. Hegde, et al. An introduction to compressive sensing. *Connexions e-textbook*, 2011.

[2] E. Candès and J. Romberg. l_1-magic: Recovery of Sparse Signals via Convex Programming, https://statweb.stanford.edu/ candes/l1magic/. 2005.

[3] E. J. Candès, J. Romberg, and T. Tao. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 52(2):489–509, 2006.

[4] A. Cohen, W. Dahmen, and R. DeVore. Compressed sensing and best k-term approximation. *J. Amer. Math. Soc.*, 22(1):211–231, 2009.

[5] M. Elad and A. M. Bruckstein. A generalized uncertainty principle and sparse representation in pairs of bases. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 48(9):2558–2567, 2002.

[6] S. Foucart and H. Rauhut. *A mathematical introduction to compressive sensing.* Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, New York, 2013.

[7] A. C. Gilbert. Sparse analysis lecture ii: Hardness results for sparse approximation problems.