

Սեղմ նմուշառություն: III

Արմենակ Պետրոսյան

«Մաթեմատիկա և Կիրառություններ» 4-րդ ամառային դպրոց

29 Հունիսի, 2017 թ.

Ծաղկաձոր

VANDERBILT  UNIVERSITY

Նախք:

Կարող է արդյո՞ք \mathbb{Z} վեկտորի վերլուծությունը միաժամանակ լինել նույն երկու
փարբեր օրթոնորմալ բազիսներում:

Բոնուս

Նախք:

Կարող է արդյո՞ք \vec{x} վեկտորի վերլուծությունը միաժամանակ լինել նույն երկու փարբեր օրթոնորմալ բազիսներում:

Սահմանում:

$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ և $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N\}$ բազիսների համար, նրանց կոհերենությունն կոչվում է հետևյալ թիվը

$$C = \max_{1 \leq i, j \leq N} |\langle \vec{e}_i, \vec{v}_j \rangle|$$

Բոնուս

Նաբց:

Կարող է արդյո՞ք \vec{x} վեկտորի վերլուծությունը միաժամանակ լինել նույն երկու փարբեր օրթոնորմալ բազիսներում:

Սահմանում:

$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ և $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N\}$ բազիսների համար, նրանց կոհերենությունն կոչվում է հետևյալ թիվը

$$C = \max_{1 \leq i, j \leq N} |\langle \vec{e}_i, \vec{v}_j \rangle|$$

Թեորեմ: (Անորոշության սկզբունք)

Եթե $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորի վերլուծությունը r -նույն է $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ բազիսում և s -նույն է $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N\}$ բազիսում, ապա

$$s \cdot r \geq \frac{1}{C^2} \quad (\Rightarrow s + r \geq \frac{2}{C}) :$$

Նաբց:

Կարող է արդյո՞ք \vec{x} վեկտորի վերլուծությունը միաժամանակ լինել նույն երկու փարբեր օրթոնորմալ բազիսներում:

Սահմանում:

$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ և $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N\}$ բազիսների համար, նրանց կոհերենությունն կոչվում է հետևյալ թիվը

$$C = \max_{1 \leq i, j \leq N} |\langle \vec{e}_i, \vec{v}_j \rangle|$$

Թեորեմ: (Անորոշության սկզբունք)

Եթե $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորի վերլուծությունը r -նույն է $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ բազիսում և s -նույն է $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N\}$ բազիսում, ապա

$$s \cdot r \geq \frac{1}{C^2} \quad (\Rightarrow s + r \geq \frac{2}{C}) :$$

- Donoho, Stark (1988, Ֆուրիեյի ձևափոխության համար), Elad, Bruckstein (2002, ընդհանուր դեպք)

Նաբց:

Կարող է արդյո՞ք \vec{x} վեկտորի վերլուծությունը միաժամանակ լինել նույն երկու փարբեր օրթոնորմալ բազիսներում:

Սահմանում:

$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ և $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N\}$ բազիսների համար, նրանց կոհերենությունն կոչվում է հեղուկալ թիվը

$$C = \max_{1 \leq i, j \leq N} |\langle \vec{e}_i, \vec{v}_j \rangle|$$

Թեորեմ: (Անորոշության սկզբունք)

Եթե $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորի վերլուծությունը r -նույն է $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ բազիսում և s -նույն է $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N\}$ բազիսում, ապա

$$s \cdot r \geq \frac{1}{C^2} \quad (\Rightarrow s + r \geq \frac{2}{C}) :$$

- ▶ Donoho, Stark (1988, Ֆուրիեյի ձևափոխության համար), Elad, Bruckstein (2002, ընդհանուր դեպք)
- ▶ Ֆուրիեյի մապրիցի (կամ կոսինուսային) ու սփանդարս բազիսի համար $C = \frac{1}{\sqrt{N}}$:

Բովանդակություն

Նիշեցում երեկվանից

Սեղմ նմուշառության խնդրի վերաձևակերպումը

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

- ▶ A -ն $M \times N$ մատրից է ($M \ll N$), $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

- ▶ A -ն $M \times N$ մատրից է ($M \ll N$), $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$
- ▶ \vec{x} -ը r -նոսր վեկտոր է

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

▶ A -ն $M \times N$ մատրից է ($M \ll N$), $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$

▶ \vec{x} -ը r -նոսր վեկտոր է

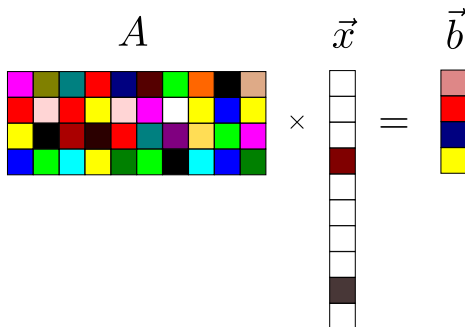
Գտնել \vec{x} -ը:

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

- ▶ A -ն $M \times N$ մատրից է ($M \ll N$), $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$
- ▶ \vec{x} -ը r -նոսր վեկտոր է

Գտնել \vec{x} -ը:

$$A \times \vec{x} = \vec{b}$$


- ▶ Ստացանք նույն վեկտորը միակ ձևով վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ

- ▶ Ստացանք նույն վեկտորը միակ ձևով վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ

Թեորեմ:

Ներկյալ պայմանները համարժեք են

- ▶ Ստացանք նորսր վեկտորը միակ ձևով վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ

Թեորեմ:

Ներկյալ պայմանները համարժեք են

(1) $A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է,

- ▶ Ստացանք նորսր վեկտորը միակ ձևով վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ

Թեորեմ:

Ներկյալ պայմանները համարժեք են

- (1) $A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է,
- (2) $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$,

- ▶ Սրացանք նոսր վեկտորը միակ ձևով վերականգնելու համար անհրաժեշտ է բավարար պայմաններ

Թեորեմ:

Ներկյալ պայմանները համարժեք են

- (1) $A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է,
- (2) $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$,
- (3) A -ի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են:

- ▶ Սրացանք նոսր վեկտորը միակ ձևով վերականգնելու համար անհրաժեշտ է բավարար պայմաններ

Թեորեմ:

Ներկյալ պայմանները համարժեք են

- (1) $A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է,
- (2) $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$,
- (3) A -ի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են:

- ▶ Անգամ այն դեպքերում, երբ այդ պայմանները բավարարված էին, պարզունակ լուծումը հաշվողական փեսանկյունից իրագործելի չէ

- ▶ Սրացանք նոսր վեկտորը միակ ձևով վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ

Թեորեմ:

Ներկյալ պայմանները համարժեք են

- (1) $A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է,
- (2) $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$,
- (3) A -ի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են:

- ▶ Անգամ այն դեպքերում, երբ այդ պայմանները բավարաված էին, պարզունակ լուծումը հաշվողական փեսանկյունից իրագործելի չէ
- ▶ Ավելին, ընդհանուր դեպքում որևէ օպտիմալ լուծում գտնելու հույս չկա, որովհետև խնդիրը NP բարդ է

Ընդհանուր դեպքում վերականգնման խելամիտ մեթոդ չկա, բայց միգուցե A -ի վրա (որին մենք ենք կառուցում) լրացուցիչ պայմաններ դնալով հնարավոր լինի գտնել այդպիսի մեթոդ:

Բովանդակություն

Նիշեցում երեկվանից

Սեղմ նմուշառության խնդրի վերաձևակերպումը

Սահմանում:

$q > 0$ թվի և $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ -ի համար սահմանենք

$$\|\vec{x}\|_q = \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} :$$

Սահմանում:

$q > 0$ թվի u $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ -ի համար սահմանենք

$$\|\vec{x}\|_q = \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} :$$

Բնչական նաև

$$\|\vec{x}\|_0 = \#\{k : 1 \leq k \leq N \text{ և } x_k \neq 0\}$$

որտեղ $\#$ -ը բազմություն էլեմենտների քանակն է:

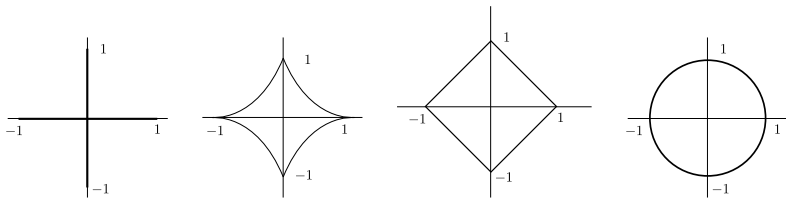
q -գումար

- ▶ Միավոր q -գումար

$$B_q^N = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^N : \|\vec{x}\|_q \leq 1\} :$$

► Միավոր q -գունդ

$$B_q^N = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^N : \|\vec{x}\|_q \leq 1\} :$$



B_q^2 -ն $q = 0$, $0 < q < 1$, $q = 1$ և $q = 2$ -ի համար

Թեորեմ:

$A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $\vec{x} \in \Sigma_r^N$ -ի համար \vec{x} -ը

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_0)$$

խնդրի միակ լուծումն է, որպեսզի $\vec{b} = A\vec{x}$:

Թեորեմ:

$A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $\vec{x} \in \Sigma_r^N$ -ի համար \vec{x} -ը

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_0)$$

խնդրի միակ լուծումն է, որպեսզի $\vec{b} = A\vec{x}$:

- ▶ $\arg \min$ -ը վերադարձնում է արգումենտի այն արժեքները, որոնց դեպքում արպահայությունը ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը

Թեորեմ:

$A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $\vec{x} \in \Sigma_r^N$ -ի համար \vec{x} -ը

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_0)$$

խնդրի միակ լուծումն է, որպեսզի $\vec{b} = A\vec{x}$:

- ▶ $\arg \min$ -ը վերադարձնում է արգումենտի այն արժեքները, որոնց դեպքում արպահայությունը ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը
- ▶ Այս վերաձևակերպումից հետո, P_0 -ն հիշեցնում է ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրը

Թեորեմ:

$A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $\vec{x} \in \Sigma_r^N$ -ի համար \vec{x} -ը

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \quad \text{այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_0)$$

խնդրի միակ լուծումն է, որպեսզի $\vec{b} = A\vec{x}$:

- ▶ $\arg \min$ -ը վերադարձնում է արգումենտի այն արժեքները, որոնց դեպքում արտահայտությունը ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը
- ▶ Այս վերաձևակերպումից հետո, P_0 -ն հիշեցնում է ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրը

Ապացույց.

(\Rightarrow) Եթե \vec{y} -ը (P_0) -ի լուծում է, ապա $\|\vec{u}\|_0 \leq \|\vec{x}\|_0$ հետևաբար $\vec{u} \in \Sigma_r^N$ ուստի ինյեկտիվությունից $\vec{x} = \vec{u}$:

Թեորեմ:

$A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $\vec{x} \in \Sigma_r^N$ -ի համար \vec{x} -ը

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_0)$$

խնդրի միակ լուծումն է, որպեսզի $\vec{b} = A\vec{x}$:

- ▶ $\arg \min$ -ը վերադարձնում է արգումենտի այն արժեքները, որոնց դեպքում արտահայտությունը ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը
- ▶ Այս վերաձևակերպումից հետո, P_0 -ն հիշեցնում է ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրը

Ապացույց.

(\Rightarrow) Եթե \vec{y} -ը (P_0)-ի լուծում է, ապա $\|\vec{u}\|_0 \leq \|\vec{x}\|_0$ հետևաբար $\vec{u} \in \Sigma_r^N$ ուստի ինյեկտիվությունից $\vec{x} = \vec{u}$:

(\Leftarrow) Դիցուք $A\vec{y} = A\vec{x}$, որպեսզի $\vec{x}, \vec{y} \in \Sigma_r^N$: Եթե $\|\vec{x}\|_0 < \|\vec{y}\|_0$, ապա \vec{y}_0 -ն $\vec{b} = A\vec{y}$ -ի համար P_0 -ի լուծումը չէ: Նույն կերպ $\|\vec{x}\|_0 > \|\vec{y}\|_0$ չի կարող լինել, ուստի $\vec{x} = \vec{y}$: Բայց քանի որ \vec{x} -ը P_0 -ի միակ լուծումն էր, ուստի $\vec{x} = \vec{y}$: □

Սահմանում:

$U \subseteq \mathbb{R}^N$ բազմությունը կոչվում է **ուռուցիկ**, եթե ցանկացած $0 \leq \alpha \leq 1$ -ի և $\vec{x}, \vec{y} \in U$ -ի համար, $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \in U$:

Սահմանում:

$U \subseteq \mathbb{R}^N$ բազմությունը կոչվում է **ուռուցիկ**, եթե ցանկացած $0 \leq \alpha \leq 1$ -ի և $\vec{x}, \vec{y} \in U$ -ի համար, $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \in U$:

Սահմանում:

$U \subseteq \mathbb{R}^N$ ուռուցիկ բազմության վրա որոշված $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ֆունկցիան կոչվում է **ուռուցիկ**, եթե

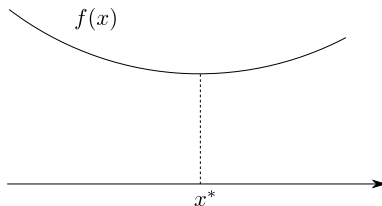
$$\phi(\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y}) \leq \alpha\phi(\vec{x}) + (1 - \alpha)\phi(\vec{y})$$

ցանկացած $0 \leq \alpha \leq 1$ -ի համար:

Ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրը

Դիցուք $U \subseteq \mathbb{R}^N$ ուռուցիկ բազմություն է և $\phi : C \rightarrow \mathbb{R}$ ուռուցիկ ֆունկցիա է:
Ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրն է

$$\arg \min_{\vec{u}} \phi(\vec{u}) \text{ այնպես որ } \vec{u} \in U :$$



Ներկայալ խնդիրը կոչվում է **գծային ծրագրավորում**

$$\arg \min_{\vec{u}} \phi(\vec{u}) = c_1 u_1 + \cdots + c_N u_N \quad \text{այնպես որ} \quad C\vec{u} \leq \vec{b} \text{ և } \vec{u} \geq 0$$

որպեսզ C -ն ինչ-որ $M \times N$ մատրից է և $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$:

(Այսպես ϕ -ն գծային է և U -ն ուռուցիկ բազմանիստ է):

Գծային ծրագրավորում

Ներկայալ խնդիրը կոչվում է **գծային ծրագրավորում**

$$\arg \min_{\vec{u}} \phi(\vec{u}) = c_1 u_1 + \dots + c_N u_N \quad \text{այնպես որ} \quad C\vec{u} \leq \vec{b} \text{ և } \vec{u} \geq 0$$

որտեղ C -ն ինչ-որ $M \times N$ մատրից է և $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$:

(Այսպեղ ϕ -ն գծային է և U -ն ուռուցիկ բազմանիստ է):

Գծային ծրագրավորման խնդրի լուծման բազմաթիվ արագ ալգորիթմներ կան

Ներկայալ խնդիրը կոչվում է **գծային ծրագրավորում**

$$\arg \min_{\vec{u}} \phi(\vec{u}) = c_1 u_1 + \dots + c_N u_N \quad \text{այնպես որ} \quad C\vec{u} \leq \vec{b} \text{ և } \vec{u} \geq 0$$

որտեղ C -ն ինչ-որ $M \times N$ մատրից է և $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$:

(Այսպեղ ϕ -ն գծային է և U -ն ուռուցիկ բազմանիստ է):

Գծային ծրագրավորման խնդրի լուծման բազմաթիվ արագ ալգորիթմներ կան

► **Սիմպլեքս մեթոդը** (Դանցիգ 1947)

Ներկայալ խնդիրը կոչվում է **գծային ծրագրավորում**

$$\arg \min_{\vec{u}} \phi(\vec{u}) = c_1 u_1 + \dots + c_N u_N \quad \text{այնպես որ} \quad C\vec{u} \leq \vec{b} \text{ և } \vec{u} \geq 0$$

որտեղ C -ն ինչ-որ $M \times N$ մատրից է և $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$:

(Այսպեղ ϕ -ն գծային է և U -ն ուռուցիկ բազմանիստ է):

Գծային ծրագրավորման խնդրի լուծման բազմաթիվ արագ ալգորիթմներ կան

- ▶ **Սիմպլեքս մեթոդը** (Դանցիգ 1947)
- ▶ **Էլիպսոիդ մեթոդ** (Խաչիյան, 1979)

Ներկայալ խնդիրը կոչվում է **գծային ծրագրավորում**

$$\arg \min_{\vec{u}} \phi(\vec{u}) = c_1 u_1 + \dots + c_N u_N \quad \text{այնպես որ} \quad C\vec{u} \leq \vec{b} \text{ և } \vec{u} \geq 0$$

որտեղ C -ն ինչ-որ $M \times N$ մատրից է և $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$:

(Այսպեղ ϕ -ն գծային է և U -ն ուռուցիկ բազմանիստ է):

Գծային ծրագրավորման խնդրի լուծման բազմաթիվ արագ ալգորիթմներ կան

- ▶ **Սիմպլեքս մեթոդը** (Դանցիգ 1947)
- ▶ **Էլիպսոիդ մեթոդ** (Խաչիյան, 1979)
- ▶ **Ներքին կերի մեթոդ** (Կամարկար, 1984)

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b}$$

խնդրում $\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_0$ -ն **նուշուցիկ** է, ուստի նուշուցիկ օպտիմիզացիայի մեթոդները կիրառել չենք կարող:

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b}$$

խնդրում $\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_0$ -ն **նուշուցիկ** է, ուստի նուշուցիկ օպտիմիզացիայի մեթոդները կիրառել չենք կարող:

Պնդում:

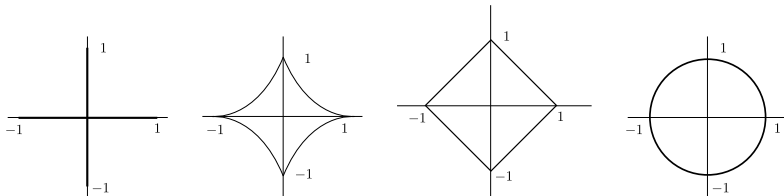
$\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_p$ -ն նուշուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ B_p^N -ը նուշուցիկ է:

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b}$$

խնդրում $\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_0$ -ն **նուռուցիկ չէ**, ուստի նուռուցիկ օպտիմիզացիայի մեթոդները կիրառել չենք կարող:

Պնդում:

$\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_p$ -ն **նուռուցիկ է** այն և միայն այն դեպքում, երբ B_p^N -ը **նուռուցիկ է**:



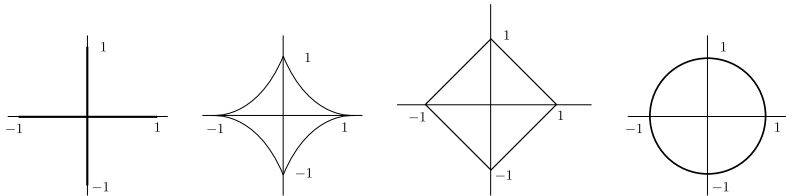
B_q^2 -ն $q = 0$, $0 < q < 1$, $q = 1$ և $q = 2$ -ի համար

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b}$$

խնդրում $\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_0$ -ն **նորմուցիկ չէ**, ուստի նորմուցիկ օպտիմիզացիայի մեթոդները կիրառել չենք կարող:

Պնդում:

$\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_p$ -ն **նորմուցիկ է** այն և միայն այն դեպքում, երբ B_p^N -ը **նորմուցիկ է**:



B_q^2 -ն $q = 0$, $0 < q < 1$, $q = 1$ և $q = 2$ -ի համար

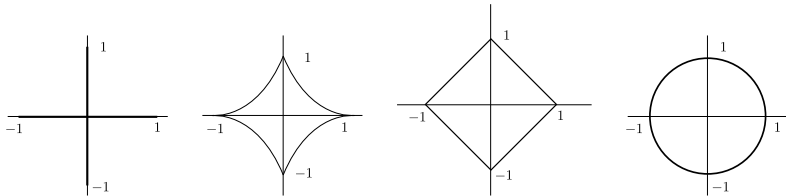
► Ունիցիկ չէ $0 \leq q \leq 1$

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b}$$

խնդրում $\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_0$ -ն **նորմուցիկ չէ**, ուստի նորմուցիկ օպտիմիզացիայի մեթոդները կիրառել չենք կարող:

Պնդում:

$\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_p$ -ն նորմուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ B_p^N -ը նորմուցիկ է:



B_q^2 -ն $q = 0$, $0 < q < 1$, $q = 1$ և $q = 2$ -ի համար

- ▶ Ունիտարիկ չէ $0 \leq q \leq 1$
- ▶ Ունիտարիկ է $q \geq 1$

Դիցուք $\vec{b} = A\vec{x}$ որպեսզի $\vec{x} \in \Sigma_r^N$: Կարելի է արդյո՞ք $\|\vec{u}\|_0$ -ն փոխարինել $\|\vec{u}\|_q$ -ով,
և փորձել լուծել

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_q \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_q)$$

խնդիրը այն հույսով որ միգուցե կգտնի անհայտ r -նոսր \vec{x} վեկտորը:

Դիցուք $\vec{b} = A\vec{x}$ որպեսզի $\vec{x} \in \Sigma_r^N$: Կարելի է արդյո՞ք $\|\vec{u}\|_0$ -ն փոխարինել $\|\vec{u}\|_q$ -ով, և փորձել լուծել

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_q \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_q)$$

խնդիրը այն հույսով որ միգուցե կգտնի անհայտ r -նոսր \vec{x} վեկտորը:

Ենթադրենք $A : \Sigma_r^N \mapsto \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է: Եթե որևէ q -ի համար (P_q) խնդրի լուծումը r -նոսր վեկտոր է, ապա այն կլինի մեր կողմից որոնվող լուծումը:

Դիցուք $\vec{b} = A\vec{x}$ որպեսզի $\vec{x} \in \Sigma_r^N$: Կարելի է արդյո՞ք $\|\vec{u}\|_0$ -ն փոխարինել $\|\vec{u}\|_q$ -ով, և փորձել լուծել

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_q \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_q)$$

խնդիրը այն հույսով որ միգուցե կգտնի անհայտ r -նոսր \vec{x} վեկտորը:

Ենթադրենք $A : \Sigma_r^N \mapsto \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է: Եթե որևէ q -ի համար (P_q) խնդրի լուծումը r -նոսր վեկտոր է, ապա այն կլինի մեր կողմից որոնվող լուծումը:

- ▶ $q < 1$ ուռուցիկ չէ

Դիցուք $\vec{b} = A\vec{x}$ որպեսզի $\vec{x} \in \Sigma_r^N$: Կարելի է արդյո՞ք $\|\vec{u}\|_0$ -ն փոխարինել $\|\vec{u}\|_q$ -ով, և փորձել լուծել

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_q \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_q)$$

խնդիրը այն հույսով որ միգուցե կգտնվի անհայտ r -նոսր \vec{x} վեկտորը:

Ենթադրենք $A : \Sigma_r^N \mapsto \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է: Եթե որևէ q -ի համար (P_q) խնդրի լուծումը r -նոսր վեկտոր է, ապա այն կլինի մեր կողմից որոնվող լուծումը:

- ▶ $q < 1$ ուռուցիկ չէ
- ▶ $q > 1$ -ի համար քիչ սպասելի է, որ գտնված լուծումը կլինի նոսր

Դիցուք $\vec{b} = A\vec{x}$ որպեսզի $\vec{x} \in \Sigma_r^N$: Կարելի է արդյո՞ք $\|\vec{u}\|_0$ -ն փոխարինել $\|\vec{u}\|_q$ -ով, և փորձել լուծել

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_q \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_q)$$

խնդիրը այն հույսով որ միգուցե կգտնվի անհայտ r -նոսր \vec{x} վեկտորը:

Ենթադրենք $A : \Sigma_r^N \mapsto \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է: Եթե որևէ q -ի համար (P_q) խնդրի լուծումը r -նոսր վեկտոր է, ապա այն կլինի մեր կողմից որոնվող լուծումը:

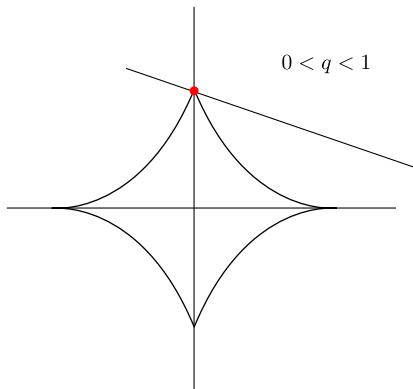
- ▶ $q < 1$ ուռուցիկ չէ
- ▶ $q > 1$ -ի համար քիչ սպասելի է, որ գտնված լուծումը կլինի նոսր
- ▶ $q = 1$ -ի համար պարզվում է, մաքրիցների մեծ դասի համար գտնում է նոսր լուծում

Երկրաչափական մեկնաբանություն

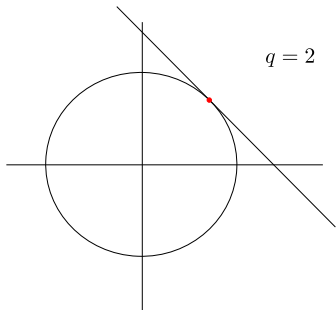
Ենթադրենք $M = 1, N = 2$ (A -ն 1×2 չափանի մատրից է): Այդ դեպքում $A\vec{u} = \vec{b}$ -ն իրենից ներկայացնում է ուղիղ:

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_q \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b}$$

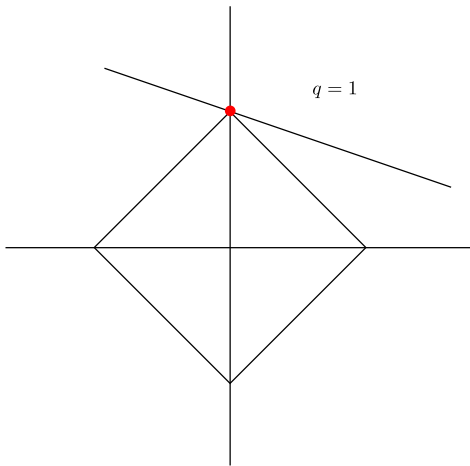
խնդրի լուծումը կլինի առաջին կետը (կետերը), որի հետք հավում է q -գունդը, երբ նրա շառավիղը զրոյից սկսում ենք մեծացնել:



Այս դեպքում P_q -ն վարահաբար կգտնի նույն լուծում, սակայն խնդիրը ուռուցիկ չէ



$q > 2$ -ի համար P_q -ն նուր լուծում չի գտնի դեպքերից շարքերում



P_1 -ը որոշ դեպքերում կգտնվի նույն լուծում, սակայն մեզ պետք է գտնել պայմաններ որոնց դեպքում դա երաշխավորված է

Եզրահանգում

Այսպիսով, եթե ունենք $\vec{b} = A\vec{x}$ որպեսզի $\vec{x} \in \Sigma_r^N$

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_0)$$

խնդիրը լուծելու փախարեն կլուծենք

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_1 \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_1)$$

Եզրահանգում

Այսպիսով, եթե ունենք $\vec{b} = A\vec{x}$ որպեսզի $\vec{x} \in \Sigma_r^N$

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_0)$$

խնդիրը լուծելու փախարեն կլուծենք

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_1 \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_1)$$

Պնդում:

(P_1) խնդիրը գծային ծրագրավորման խնդիր է:

Եզրահանգում

Այսպիսով, եթե ունենք $\vec{b} = A\vec{x}$ որպեսզի $\vec{x} \in \Sigma_r^N$

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_0)$$

խնդիրը լուծելու փախարեն կլուծենք

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_1 \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_1)$$

Պնդում:

(P_1) խնդիրը գծային ծրագրավորման խնդիր է:

Ապացույց.

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} (\vec{u}_+ + \vec{u}_-) \text{ այնպես որ } A\vec{u}_+ - A\vec{u}_- = \vec{b} \text{ և } \vec{u}_+ \geq 0, \vec{u}_- \geq 0$$

Նկատենք, որ եթե \vec{x}_+, \vec{x}_- -ը նրա լուծումներ են, ապա նրանց կրիչները չհաջորդում են, քանի որ ցանկացած վեկտորի համար, նրա բոլոր $\vec{x} = \vec{x}_+ - \vec{x}_-$, $\vec{x}_+, \vec{x}_- \geq 0$ ներկայացումների մեջ $\vec{x}_+ + \vec{x}_-$ -ն ամենափոքրն է, երբ կրիչները չեն հաջորդում: □

Շնորհակալություն: