Սեղմ նմուշառություն: III

Արմենակ Պետրոսյան

«Մաթեմատիկա և Կիրառություններ» 4-րդ ամառային դպրոց

29 Հունիսի, 2017 թ.
Ծաղկաձոր

VANDERBILT UNIVERSITY

Բոնուս

Հարց:

Կարող է արդյո՞ք $\vec{x}$ վեկտորի վերլուծությունը միաժամանակ լինել նույն երկու տարբեր օրթոնորմալ բազիսներում:

Բոնուս

Հարց:

Կարող է արդյո՞ք $\vec{x}$ վեկտորի վերլուծությունը միաժամանակ լինել նոսր երկու տարբեր օրթոնորմալ բազիսներում:

Սահմանում:

$\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N\}$ և $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_N\}$ բազիսների համար, նրանց կոհերենտություն կոչվում է հետևյալ թիվը

$$C = \max_{1 \le i,j \le N} |\langle e_i, v_j \rangle|$$

Բոնուս

Հարց:

Կարող է արդյո՞ք $\vec{x}$ վեկտորի վերլուծությունը միաժամանակ լինել նոսր երկու տարբեր օրթոնորմալ բազիսներում:

Սահմանում:

$\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N\}$ և $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_N\}$ բազիսների համար, նրանց կոհերենտություն կոչվում է հետևյալ թիվը

$$C = \max_{1 \le i,j \le N} |\langle e_i, v_j \rangle|$$

Թեորեմ: (Անորոշության սկզբունք)

Եթե $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորի վերլուծությունը r-նոսր է $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N\}$ բազիսում և s-նոսր է $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_N\}$ բազիսում, ապա

$$s \cdot r \ge \frac{1}{C^2} \; \left(\Rightarrow s + r \ge \frac{2}{C}\right):$$

Բոնուս

Հարց:

Կարող է արդյո՞ք $\vec{x}$ վեկտորի վերլուծությունը միաժամանակ լինել նոսր երկու տարբեր օրթոնորմալ բազիսներում:

Սահմանում:

$\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N\}$ և $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_N\}$ բազիսների համար, նրանց կոհերենտությունն կոչվում է հետևյալ թիվը

$$C = \max_{1 \le i,j \le N} |\langle e_i, v_j \rangle|$$

Թեորեմ: (Անորոշության սկզբունք)

Եթե $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորի վերլուծությունը r-նոսր է $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N\}$ բազիսում և s-նոսր է $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_N\}$ բազիսում, ապա

$$s \cdot r \ge \frac{1}{C^2} \;\; (\Rightarrow s + r \ge \frac{2}{C}):$$

- Donoho, Stark (1988, Ֆուրիեյի ձևափոխության համար), Elad, Bruckstein (2002, ընդհանուր դեպք)

Բոնուս

Հարց:

Կարող է արդյո՞ք $\vec{x}$ վեկտորի վերլուծությունը միաժամանակ լինել նոսր երկու տարբեր օրթոնորմալ բազիսներում:

Սահմանում:

$\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N\}$ և $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_N\}$ բազիսների համար, նրանց կոհերենտություն կոչվում է հետևյալ թիվը

$$C = \max_{1 \le i,j \le N} |\langle e_i, v_j \rangle|$$

Թեորեմ: (Անորոշության սկզբունք)

Եթե $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորի վերլուծությունը r-նոսր է $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N\}$ բազիսում և s-նոսր է $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_N\}$ բազիսում, ապա

$$s \cdot r \ge \frac{1}{C^2} \ \left(\Rightarrow s + r \ge \frac{2}{C}\right):$$

- Donoho, Stark (1988, Ֆուրիեյի ձևափոխության համար), Elad, Bruckstein (2002, ընդհանուր դեպք)
- Ֆուրիեյի բազիսի (կամ կոսինուսային) ու ստանդարտ բազիսի համար $C = \frac{1}{\sqrt{N}}$:

Բովանդակություն

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

- A-ն $M \times N$ մատրից է ($M << N$), $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

- A-ն $M \times N$ մատրից է ($M << N$), $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$
- $\vec{x}$-ը r-նոսր վեկտոր է

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

- A-ն $M \times N$ մատրից է ($M << N$), $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$
- $\vec{x}$-ը r-նոսր վեկտոր է

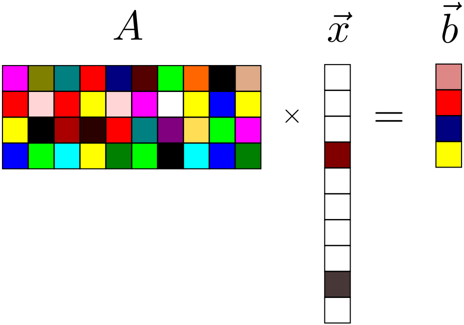
Գտնել $\vec{x}$-ը:

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

- A-ն $M \times N$ մատրից է ($M << N$), $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$
- $\vec{x}$-ը r-նոսր վեկտոր է

Գտնել $\vec{x}$-ը:



Եզրահանգում

Եզրահանգում

- Սպացանք նոսր վեկտորը միակ ձևով վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ

Եզրահանգում

- Սպացանք նոսր վեկտորը միակ ձևով վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ

Թեորեմ:

Հետևյալ պայմանները համարժեք են

Եզրահանգում

- Ստացանք նոսր վեկտորը միակ ձևով վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ

Թեորեմ:

Հետևյալ պայմանները համարժեք են

(1) $A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$ *ինյեկտիվ է,*

Եզրահանգում

- Ստացանք նոսր վեկտորը միակ ձևով վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ

Թեորեմ:

Հետևյալ պայմանները համարժեք են

(1) $A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$ *ինյեկտիվ է,*

(2) $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$,

Եզրահանգում

- Սպացանք նոսր վեկտորը միակ ձևով վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ

Թեորեմ:

Հետևյալ պայմանները համարժեք են

(1) $A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$ *ինյեկտիվ է,*

(2) $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$,

(3) A*-ի ցանկացած* $2r$ *սյուն գծորեն անկախ են:*

Եզրահանգում

- Սպացանք նոսր վեկտորը միակ ձևով վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ

Թեորեմ:

Հետևյալ պայմանները համարժեք են

(1) $A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$ *ինյեկտիվ է,*

(2) $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$,

(3) A*-ի ցանկացած* $2r$ *սյուն գծորեն անկախ են:*

- Անգամ այն դեպքերում, երբ այդ պայմանները բավարարված էին, պարզունակ լուծումը հաշվողական տեսանկյունից իրագործելի չէ

Եզրահանգում

- Սպացանք նոսր վեկտորը միակ ձևով վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ

Թեորեմ:

Հետևյալ պայմանները համարժեք են

(1) $A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$ *ինյեկտիվ է,*

(2) $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$,

(3) *A-ի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են:*

- Անգամ այն դեպքերում, երբ այդ պայմանները բավարարված էին, պարզունակ լուծումը հաշվողական տեսանկյունից իրագործելի չէ
- Ավելին, ընդհանուր դեպքում որևէ օպտիմալ լուծում գտնելու հույս չկա, որովհետև խնդիրը NP բարդ է

Ընդհանուր դեպքում վերականգնման խելամիտ մեթոդ չկա, բայց միգուցե A-ի վրա (որին մենք ենք կառուցում) լրացուցիչ պայմաններ դնալով հնարավոր լինի գտնել այդպիսի մեթոդ:

Բովանդակություն

Սահմանում:

$q > 0$ *թվի և* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$*-ի համար սահմանենք*

$$\|\vec{x}\|_q = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} :$$

Հիշեցում

Սահմանում:

$q > 0$ *թվի և* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$*-ի համար սահմանենք*

$$\|\vec{x}\|_q = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} :$$

Ինչպես նաև

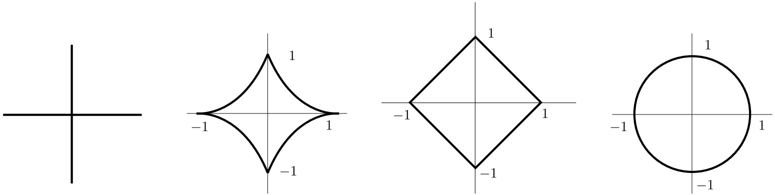
$$\|\vec{x}\|_0 = \#\{k : 1 \leq k \leq N \text{ և } x_k \neq 0\}$$

որտեղ $\#$*-ը բազմության էլեմենտների քանակն է:*

- Միավոր q-գունդ
$$B_q^N = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^N : \ \|\vec{x}\|_q \leq 1\} :$$

q-գունդը

- Միավոր q-գունդ
$$B_q^N = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^N : \ \|\vec{x}\|_q \leq 1\} :$$



B_q^2-ն $q = 0$, $0 < q < 1$, $q = 1$ և $q = 2$-ի համար

Թեորեմ:

$A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$ *ինյեկտիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած* $\vec{x} \in \Sigma_r^N$*-ի համար* $\vec{x}$*-ը*

$$\underset{\vec{u} \in \mathbb{R}^N}{\arg\min} \|\vec{u}\|_0 \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \qquad (P_0)$$

խնդրի միակ լուծումն է, որտեղ $\vec{b} = A\vec{x}$*:*

Թեորեմ:

$A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $\vec{x} \in \Sigma_r^N$-ի համար $\vec{x}$-ը

$$\operatorname*{arg\,min}_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \qquad (P_0)$$

խնդրի միակ լուծումն է, որտեղ $\vec{b} = A\vec{x}$:

- arg min-ը վերադարձնում է արգումենտի այն արժեքները, որոնց դեպքում արտահայտությունը ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը

Թեորեմ:

$A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$ *ինյեկտիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած* $\vec{x} \in \Sigma_r^N$*-ի համար* $\vec{x}$*-ը*

$$\arg\min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \ \ \text{այնպես որ} \ \ A\vec{u} = \vec{b} \qquad (P_0)$$

խնդրի միակ լուծումն է, որտեղ $\vec{b} = A\vec{x}$*:*

- arg min-ը վերադարձնում է արգումենտի այն արժեքները, որոնց դեպքում արտահայտությունը ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը
- Այս վերաձևակերպումից հետո, P_0-ն հիշեցնում է ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրը

Թեորեմ:

$A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $\vec{x} \in \Sigma_r^N$-ի համար $\vec{x}$-ը

$$\underset{\vec{u} \in \mathbb{R}^N}{\arg\min} \|\vec{u}\|_0 \quad \textit{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \tag{P_0}$$

խնդրի միակ լուծումն է, որտեղ $\vec{b} = A\vec{x}$:

- arg min-ը վերադարձնում է արգումենտի այն արժեքները, որոնց դեպքում արտահայտությունը ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը
- Այս վերաձևակերպումից հետո, P_0-ն հիշեցնում է ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրը

Ապացույց.

($\Rightarrow$) Եթե $\vec{y}$-ը (P_0)-ի լուծում է, ապա $\|\vec{y}\|_0 \leq \|\vec{x}\|_0$ հետևաբար $\vec{y} \in \Sigma_r^N$ ուստի ինյեկտիվությունից $\vec{x} = \vec{y}$:

Թեորեմ:

$A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $\vec{x} \in \Sigma_r^N$-ի համար $\vec{x}$-ը

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \quad \textit{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \tag{P_0}$$

խնդրի միակ լուծումն է, որտեղ $\vec{b} = A\vec{x}$:

- arg min-ը վերադարձնում է արգումենտի այն արժեքները, որոնց դեպքում արտահայտությունը ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը
- Այս վերաձևակերպումից հետո, P_0-ն հիշեցնում է ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրը

Ապացույց.

($\Rightarrow$) Եթե $\vec{y}$-ը (P_0)-ի լուծում է, ապա $\|\vec{y}\|_0 \le \|\vec{x}\|_0$ հետևաբար $\vec{y} \in \Sigma_r^N$ ուստի ինյեկտիվությունից $\vec{x} = \vec{y}$:
($\Leftarrow$) Դիցուք $A\vec{y} = A\vec{x}$, որտեղ $\vec{x}, \vec{y} \in \Sigma_r^N$: Եթե $\|\vec{x}\|_0 < \|\vec{y}\|_0$, ապա $\vec{y}_0$-ն $\vec{b} = A\vec{y}$-ի համար P_0-ի լուծումը չէ: Նույն կերպ $\|\vec{x}\|_0 > \|\vec{y}\|_0$ չի կարող լինել, ուստի $\|\vec{x}\|_0 = \|\vec{y}\|_0$: Բայց քանի որ $\vec{x}$-ը P_0-ի միակ լուծումն էր, ուստի $\vec{x} = \vec{y}$: $\square$

Սահմանում:
$U \subseteq \mathbb{R}^N$ *բազմությունը կոչվում է* ***ուռուցիկ****, եթե ցանկացած* $0 \leq \alpha \leq 1$*-ի և* $\vec{x}, \vec{y} \in U$*-ի համար,* $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in U$*:*

Սահմանում:
$U \subseteq \mathbb{R}^N$ բազմությունը կոչվում է ***ուռուցիկ****, եթե ցանկացած $0 \leq \alpha \leq 1$-ի և $\vec{x}, \vec{y} \in U$-ի համար, $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in U$:*

Սահմանում:
$U \subseteq \mathbb{R}^N$ ուռուցիկ բազմության վրա որոշված $\phi : U \to \mathbb{R}$ ֆունկցիան կոչվում է ***ուռուցիկ****, եթե*

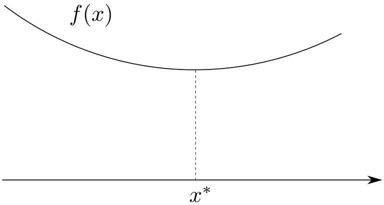
$$\phi(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) \leq \alpha\phi(\vec{x}) + (1-\alpha)\phi(\vec{y})$$

ցանկացած $0 \leq \alpha \leq 1$-ի համար:

Ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրը

Դիցուք $U \subseteq \mathbb{R}^N$ ուռուցիկ բազմություն է և $\phi : C \to \mathbb{R}$ ուռուցիկ ֆունկցիա է:
Ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրն է

$$\arg\min_{\vec{u}} \phi(\vec{u}) \text{ այնպես որ } \vec{u} \in U :$$



Հետևյալ խնդիրը կոչվում է **գծային ծրագրավորում**

$$\arg\min_{\vec{u}} \phi(\vec{u}) = c_1 u_1 + \cdots + c_N u_N \quad \text{այնպես որ} \quad C\vec{u} \leq \vec{b} \text{ և } \vec{u} \geq 0$$

որտեղ C-ն ինչ-որ $M \times N$ մատրից է և $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$:

(Այստեղ ϕ-ն գծային է և U-ն ուռուցիկ բազմանիստ է):

Հետևյալ խնդիրը կոչվում է **գծային ծրագրավորում**

$$\arg\min_{\vec{u}} \phi(\vec{u}) = c_1 u_1 + \cdots + c_N u_N \quad \text{այնպես որ} \quad C\vec{u} \leq \vec{b} \text{ և } \vec{u} \geq 0$$

որտեղ C-ն ինչ-որ $M \times N$ մատրից է և $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$:

(Այստեղ ϕ-ն գծային է և U-ն ուռուցիկ բազմանիստ է):
Գծային ծրագրավորման խնդրի լուծման բազմաթիվ արագ ալգորիթմներ կան

Հետևյալ խնդիրը կոչվում է **գծային ծրագրավորում**

$$\arg\min_{\vec{u}} \phi(\vec{u}) = c_1 u_1 + \cdots + c_N u_N \quad \text{այնպես որ} \quad C\vec{u} \leq \vec{b} \text{ և } \vec{u} \geq 0$$

որտեղ C-ն ինչ-որ $M \times N$ մատրից է և $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$:

(Այստեղ ϕ-ն գծային է և U-ն ուռուցիկ բազմանիստ է):
Գծային ծրագրավորման խնդրի լուծման բազմաթիվ արագ ալգորիթմներ կան

- **Սիմպլեքս մեթոդը** (Դանցիգ 1947)

Հետևյալ խնդիրը կոչվում է **գծային ծրագրավորում**

$$\arg\min_{\vec{u}} \phi(\vec{u}) = c_1 u_1 + \cdots + c_N u_N \quad \text{այնպես որ} \quad C\vec{u} \leq \vec{b} \text{ և } \vec{u} \geq 0$$

որտեղ C-ն ինչ-որ $M \times N$ մատրից է և $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$:

(Այստեղ ϕ-ն գծային է և U-ն ուռուցիկ բազմանիստ է):
Գծային ծրագրավորման խնդրի լուծման բազմաթիվ արագ ալգորիթմներ կան

- **Սիմպլեքս մեթոդը** (Դանցիգ 1947)
- **Էլիպսոիդ մեթոդ** (Խաչիյան, 1979)

Հետևյալ խնդիրը կոչվում է **գծային ծրագրավորում**

$$\arg\min_{\vec{u}} \phi(\vec{u}) = c_1 u_1 + \cdots + c_N u_N \quad \text{այնպես որ} \quad C\vec{u} \leq \vec{b} \text{ և } \vec{u} \geq 0$$

որտեղ C-ն ինչ-որ $M \times N$ մատրից է և $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$:

(Այստեղ ϕ-ն գծային է և U-ն ուռուցիկ բազմանիստ է):
Գծային ծրագրավորման խնդրի լուծման բազմաթիվ արագ ալգորիթմներ կան

- **Սիմպլեքս մեթոդը** (Դանցիգ 1947)
- **Էլիպսոիդ մեթոդ** (Խաչիյան, 1979)
- **Ներքին կետի մեթոդ** (Կամարկար, 1984)

$$\underset{\vec{u}\in\mathbb{R}^N}{\arg\min}\, \|\vec{u}\|_0 \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b}$$

խնդրում $\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_0$-ն ուռուցիկ չէ, ուստի ուռուցիկ օպտիմիզացիայի մեթոդները կիրառել չենք կարող:

$$\underset{\vec{u}\in\mathbb{R}^N}{\arg\min}\,\|\vec{u}\|_0 \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u}=\vec{b}$$

խնդրում $\vec{u}\mapsto\|\vec{u}\|_0$-ն ուռուցիկ չէ, ուստի ուռուցիկ օպտիմիզացիայի մեթոդները կիրառել չենք կարող:

Պնդում:

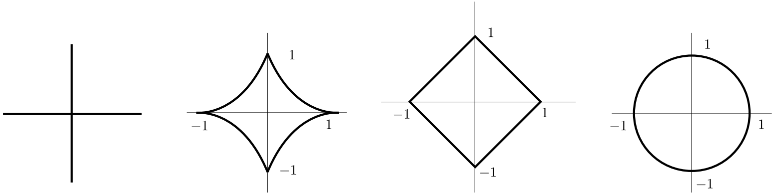
$\vec{u}\mapsto\|\vec{u}\|_p$-ն ուռուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ B_p^N-ը ուռուցիկ է:

$$\underset{\vec{u}\in\mathbb{R}^N}{\arg\min} \|\vec{u}\|_0 \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b}$$

խնդրում $\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_0$-ն ուռուցիկ չէ, ուստի ուռուցիկ օպտիմիզացիայի մեթոդները կիրառել չենք կարող:

Պնդում:

$\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_p$-ն ուռուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ B_p^N-ը ուռուցիկ է:



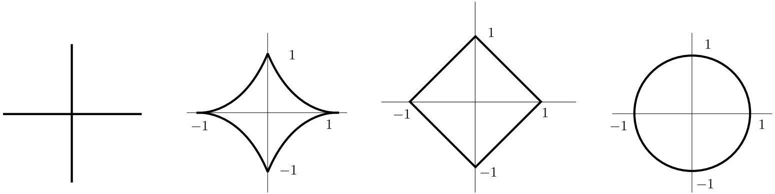
B_q^2-ն $q = 0$, $0 < q < 1$, $q = 1$ և $q = 2$-ի համար

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b}$$

խնդրում $\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_0$-ն ուռուցիկ չէ, ուստի ուռուցիկ օպտիմիզացիայի մեթոդները կիրառել չենք կարող:

Պնդում:

$\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_p$-ն ուռուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ B_p^N-ը ուռուցիկ է:



B_q^2-ն $q = 0$, $0 < q < 1$, $q = 1$ և $q = 2$-ի համար

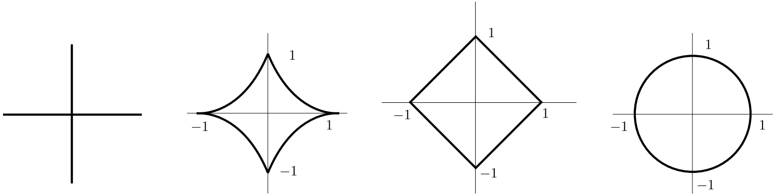
- Ուռուցիկ չէ $0 \leq q \leq 1$

$$\underset{\vec{u}\in\mathbb{R}^N}{\arg\min} \|\vec{u}\|_0 \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b}$$

խնդրում $\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_0$-ն ուռուցիկ չէ, ուստի ուռուցիկ օպտիմիզացիայի մեթոդները կիրառել չենք կարող:

Պնդում:

$\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_p$-ն ուռուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ B_p^N-ը ուռուցիկ է:



B_q^2-ն $q = 0$, $0 < q < 1$, $q = 1$ և $q = 2$-ի համար

- Ուռուցիկ չէ $0 \leq q \leq 1$
- Ուռուցիկ է $q \geq 1$

Ուռուցիկ ռելակսացիա

Դիցուք $\vec{b} = A\vec{x}$ որտեղ $\vec{x} \in \Sigma_r^N$: Կարելի է արդյո՞ք $\|\vec{u}\|_0$-ն փոխարինել $\|\vec{u}\|_q$-ով, և փորձել լուծել

$$\operatorname*{arg\,min}_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_q \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \qquad (P_q)$$

խնդիրը այն հույսով որ միգուցե կգտնի անհայտ r-նոսր $\vec{x}$ վեկտորը:

Դիցուք $\vec{b} = A\vec{x}$ որտեղ $\vec{x} \in \Sigma_r^N$: Կարելի է արդյո՞ք $\|\vec{u}\|_0$-ն փոխարինել $\|\vec{u}\|_q$-ով, և փորձել լուծել

$$\operatorname*{arg\,min}_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_q \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \tag{P_q}$$

խնդիրը այն հույսով որ միգուցե կգտնի անհայտ r-նոսր $\vec{x}$ վեկտորը:

Ենթադրենք $A : \Sigma_r^N \mapsto \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է: Եթե որևէ q-ի համար (P_q) խնդրի լուծումը r-նոսր վեկտոր է, ապա այն կլինի մեր կողմից որոնվող լուծումը:

Դիցուք $\vec{b} = A\vec{x}$ որտեղ $\vec{x} \in \Sigma_r^N$: Կարելի է արդյո՞ք $\|\vec{u}\|_0$-ն փոխարինել $\|\vec{u}\|_q$-ով, և փորձել լուծել

$$\underset{\vec{u}\in\mathbb{R}^N}{\arg\min} \|\vec{u}\|_q \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \qquad (P_q)$$

խնդիրը այն հույսով որ միգուցե կգտնի անհայտ r-նոսր $\vec{x}$ վեկտորը:

Ենթադրենք $A : \Sigma_r^N \mapsto \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է: Եթե որևէ q-ի համար (P_q) խնդրի լուծումը r-նոսր վեկտոր է, ապա այն կլինի մեր կողմից որոնվող լուծումը:

- $q < 1$ ուռուցիկ չէ

Դիցուք $\vec{b} = A\vec{x}$ որտեղ $\vec{x} \in \Sigma_r^N$: Կարելի է արդյոք $\|\vec{u}\|_0$-ն փոխարինել $\|\vec{u}\|_q$-ով, և փորձել լուծել

$$\underset{\vec{u}\in\mathbb{R}^N}{\arg\min} \|\vec{u}\|_q \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \qquad (P_q)$$

խնդիրը այն հույսով որ միգուցե կգտնի անհայտ r-նոսր $\vec{x}$ վեկտորը:

Ենթադրենք $A : \Sigma_r^N \mapsto \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է: Եթե որևէ q-ի համար (P_q) խնդրի լուծումը r-նոսր վեկտոր է, ապա այն կլինի մեր կողմից որոնվող լուծումը:

- $q < 1$ ուռուցիկ չէ
- $q > 1$-ի համար քիչ սպասելի է, որ գտնված լուծումը կլինի նոսր

Դիցուք $\vec{b} = A\vec{x}$ որտեղ $\vec{x} \in \Sigma_r^N$: Կարելի է արդյոք $\|\vec{u}\|_0$-ն փոխարինել $\|\vec{u}\|_q$-ով, և փորձել լուծել

$$\operatorname*{arg\,min}_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_q \;\; \text{այնպես որ} \;\; A\vec{u} = \vec{b} \qquad (P_q)$$

խնդիրը այն հույսով որ միգուցե կգտնի անհայտ r-նոսր $\vec{x}$ վեկտորը:

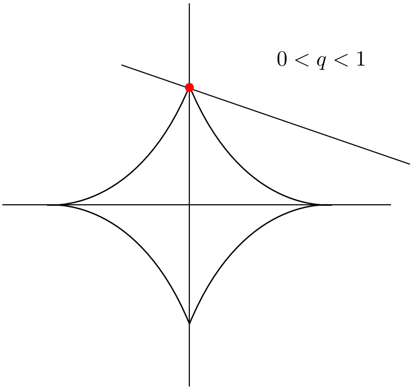
Ենթադրենք $A : \Sigma_r^N \mapsto \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է: Եթե որևէ q-ի համար (P_q) խնդրի լուծումը r-նոսր վեկտոր է, ապա այն կլինի մեր կողմից որոնվող լուծումը:

- $q < 1$ ուռուցիկ չէ
- $q > 1$-ի համար քիչ սպասելի է, որ գտնված լուծումը կլինի նոսր
- $q = 1$-ի համար պարզվում է, մատրիցների մեծ դասի համար գտնում է նոսր լուծում

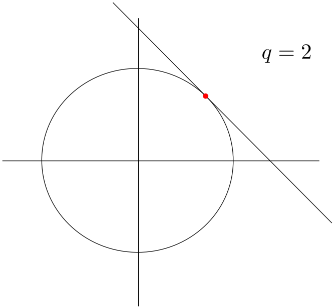
Ենթադրենք $M = 1, N = 2$ (A-ն 1×2 չափանի մատրից է)։ Այդ դեպքում $A\vec{u} = b$-ն իրենից ներկայացնում է ուղիղ։

$$\underset{\vec{u} \in \mathbb{R}^N}{\arg\min} \|\vec{u}\|_q \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b}$$

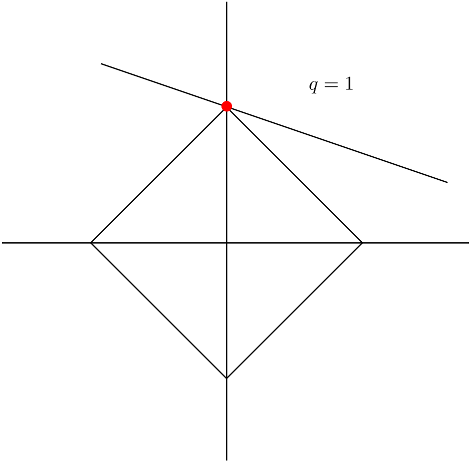
խնդրի լուծումը կլինի առաջին կետը (կետերը), որի հետ հպվում է q-գունդը, երբ նրա շառավիղը զրոյից սկսում ենք մեծացնել։



Այս դեպքում P_q-ն վստահաբար կգտնի նոր լուծում, սակայն խնդիրը ուռուցիկ չէ



$q > 2$-ի համար P_q-ն նոր լուծում չի գտնի դեպքերից շատերում



P_1-ը որոշ դեպքերում կգտնի նոսր լուծում, սակայն մեզ պետք է գտնել պայմաններ որոնց դեպքում դա երաշխավորված է

Եզրահանգում

Այսպիսով, եթե ունենք $\vec{b} = A\vec{x}$ որտեղ $\vec{x} \in \Sigma_r^N$

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \tag{P_0}$$

խնդիրը լուծելու փախարեն կլուծենք

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_1 \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \tag{P_1}$$

Եզրահանգում

Այսպիսով, եթե ունենք $\vec{b} = A\vec{x}$ որտեղ $\vec{x} \in \Sigma_r^N$

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \ \text{ այնպես որ } \ A\vec{u} = \vec{b} \tag{P_0}$$

խնդիրը լուծելու փոխարեն կլուծենք

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_1 \ \text{ այնպես որ } \ A\vec{u} = \vec{b} \tag{P_1}$$

Պնդում:

(P_1) խնդիրը գծային ծրագրավորման խնդիր է:

Եզրահանգում

Այսպիսով, եթե ունենք $\vec{b} = A\vec{x}$ որտեղ $\vec{x} \in \Sigma_r^N$

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \ \text{ այնպես որ } \ A\vec{u} = \vec{b} \tag{P_0}$$

խնդիրը լուծելու փոխարեն կլուծենք

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_1 \ \text{ այնպես որ } \ A\vec{u} = \vec{b} \tag{P_1}$$

Պնդում:

(P_1) խնդիրը գծային ծրագրավորման խնդիր է:

Ապացույց.

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N}(\vec{u}_+ + \vec{u}_-) \ \text{ այնպես որ } \ A\vec{u}_+ - A\vec{u}_- = \vec{b} \text{ և } \vec{u}_+ \geq 0, \vec{u}_- \geq 0$$

Նկատենք, որ եթե $\vec{x}_+, \vec{x}_-$-ը նրա լուծումներ են, ապա նրանց կրիչները չհատվող են, քանի որ ցանկացած վեկտորի համար, նրա բոլոր $\vec{x} = \vec{x}_+ - \vec{x}_-$, $\vec{x}_+, \vec{x}_- \geq 0$ներկայացումների մեջ $\vec{x}_+ + \vec{x}_-$-ն ամենափոքրն է, երբ կրիչները չեն հատվում: □

Շնորհակալություն: