

Սեղմ նմուշառություն

Արմենակ Պետրոսյան
Vanderbilt University

Հարցերի և առաջարկությունների համար գրել՝ arm.petros@gmail.com

«Մաթեմատիկա և կիրառություններ» 4-րդ ամառային դպրոց
Ծաղկաձոր

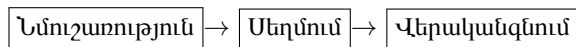
Հունիս, 2017

Բովանդակություն

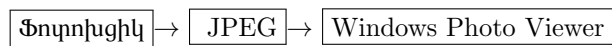
Ներածություն	3
Օր 1-ին	5
1. Օրթոնորմալ բազիս	5
2. Ձայնագրությունների սեղմում	6
3. Թվային նկարների սեղմում	7
4. Ցուցադրություն	8
5. Եզրահանգում	11
Օր 2-րդ	13
1. Գծային չափում	13
2. Մեղմ նմուշառության խնդրի ձևակերպումը	14
3. r -նոսր վեկտորը վերականգնելու նվազագույն չափումների քանակը	16
4. Մեղմ նմուշառության խնդիրը NP բարդ է	17
5. Եզրահանգում	17
Օր 3-րդ	18
1. Մեղմ նմուշառության խնդրի վերաձևակերպումը	18
2. Ուռուցիկ օպտիմիզացիա	19
3. Մեղմ նմուշառության խնդրի ուռուցիկ ռելակսացիա	20
4. Երկրաչափական մեկնաբանություն	21
5. r -NSP պայմանը	22
6. Ցուցադրություն	23
7. Եզրահանգում	24
Օր 4-րդ	25
1. r -RIP պայմանը	25
2. Պափահական մափրիցները և $2r$ -RIP պայմանը	28
3. Եզրահանգում	28
Գրականություն	29

Ներածություն

Թվային ազդանշանները մշակելիս, սովորաբար քայլերի հետևյալ հաջորդականությունն է պետի ունենում՝

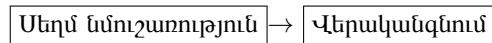


Օրինակ թվային տեսախցիկով նկարելիս



Սրացվում է, որ նմուշառություն կատարելիս մենք մեծ քանակությամբ ավելորդ ինֆորմացիա ենք հավաքում, ինչը ժամանակավար է և բացի այդ հիշողության մեծ ծավալ է զբաղեցնում:

Սեղմ նմուշառությունում նպատակ է հետապնդվում նմուշառության և սեղմման գործողությունները համապեղել, այսինքն կատարելով քիչ քանակությամբ ճիշտ ձևով ընտրված չափումներ՝ սպանալ բարձր որակի վերականգնում:



Չափումների քանակի քչացումը մասնավորապես մեծ կարևորություն ունի մագնիսաբեզոնանային տոմոգրաֆիայում (նվազեցնում է ժամանակահատվածը, որը այժմ 15-90 րոպե է, և ավելացնում է հարմարավետությունը):



2017 թվականի հունիսին, Siemens ընկերության կողմից սպեղծված սկանները, որը սկանավորման ժամանակը նվազեցնում է շուրջ փաստ անգամ և օգտագործում է սեղմ նմուշառություն, սրացել է ԱՄՆ Մենդի և Ղեղերի Գործակալության (FDA) հաստատումը և կարող է կիրառվել հիվանդանոցներում:

Compressed Sensing Cardiac Cine

Beyond speed. Beyond breath-holds.

Overview Features & Benefits



Compressed Sensing Cardiac Cine
Beyond speed. Beyond breath-holds.

With our disruptive speed technology – Compressed Sensing – you can accelerate MRI acquisition by a factor of up to 10, with no loss in image quality. This is possible, as we acquire only a fraction of the image data and generate high-resolution images with iterative reconstruction afterwards – based on our award-winning algorithm for Compressed Sensing. Due to the extremely fast acquisition, Compressed Sensing Cardiac Cine opens up Cardiac MRI to arrhythmic and dyspneic patients.

- Acquire free-breathing, high-resolution Cardiac Cine images
- Capture the whole cardiac cycle for precise quantification
- Expand patient population eligible for cardiac MRI

With our disruptive speed technology – Compressed Sensing – you can accelerate MRI acquisition by a factor of up to 10, with no loss in image quality. This

Նկար 1: Compressed Sensing Cardiac Cine: «Մեր կործանիչ արագությամբ փոխնությունը, որ կոչվում է սեղմ նմուշառություն, դուք կարող եք արագացնել էլեկտրոնագնիսական փոփոխականի պատկերների ստացումը մոտ 10 անգամ՝ առանց պատկերների որակի կորստի» Siemens ընկերության կայքից

Սեղմ նմուշառությունը (անգլ. compressed sampling կամ compressed sensing) մեթոդ է, որը հնարավորություն է տալիս վերականգնել անհայտ ֆունկցիան՝ հնարավորինս քիչ քանակությամբ չափումներով կադրերով: Կախված խնդրից, ֆունկցիան իրենից կարող է ներկայացնել ձայնագրված խոսք, թվային ֆոտոպատկեր կամ նկարագրել որևէ ֆիզիկական երևույթ: Նմանական ենթադրությունը կայանում է նրանում, որ ֆունկցիան ունի նոսր վերլուծության գործակիցներ ինչ-որ օրթոնորմալ բազիսում, այսինքն վերլուծության գործակիցների միայն փոքր մասն է 0-ից տարբեր: Բազիսի ընտրությունը կախված է խնդրից: Այս ենթադրության բնական լինելը ցույց է տալիս փորձնականորեն նկարների և ձայնագրությունների համար համապատասխանաբար Նաարի և կոսինուսային բազիսներում ուսումնասիրելով նրանց վերլուծությունը: Սա է այն հատկությունը, որ թույլ է տալիս կադրել թվային պատկերների և ձայնագրությունների սեղմում: Սեղմ նմուշառության ժամանակ ասում ենք, որ սեղմումը և նմուշառությունը կատարվում են միաժամանակ:

Սեղմ նմուշառության մաթեմատիկական տեսությունը սկիզբ է առել Թերենս Թաոյի, Էմանուել Կանդեսի, Դեյվիդ Դոնոհոյի և Զասթին Բոմբերգի 2004 թվականին տպագրված արդյունքներից (տես [3]) և համարվում է ժամանակակից կիրառական մաթեմատիկայի կայացած ճյուղերից մեկը¹:

Այս կարճ ծանոթագրությունը նախատեսված է ցածր կուրսի ուսանողների համար: Ավելի մանրամասն ծանոթանալու համար տես [1, 6]:

Տեղ գրած կոդը օգտագործում է Matlab ծրագրավորման լեզուն: Այն ամենից օպտիմալը չէ, սակայն բավարար է նյութին ծանոթանալու համար:

Նայեմ են LaTeX-ի համար օգտագործվել է armtext համակարգը:

¹Ներկայացված նյութը լիարժեք հասկանալու համար ծանոթությունը գծային հանրահաշվի և մաթ. անալիզի որոշ հիմնարար հասկացությունների հետ (վեկտոր, մատրից, գծային հավասարումների լուծում, գծային հարթություն, օրթոնորմալ բազիս, ֆունկցիայի ածանցյալ և այլն) նախընտրելի է: Միևնույն ժամանակ, որոշ այլ հասկացություններ կսահմանվեն ընթացքում:

Օր 1-ին

1. Օրթոնորմալ բազիս

N չափանի վեկտոր ասելով հասկանում ենք $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ N -յակ, որտեղ x_1, \dots, x_N իրական թվեր են (մեզ համար ավելի հարմար է վեկտորը վերցնել որպես սյուն այլ ոչ թե տող, սակայն դրանից լուրջ փարբերություն բնականաբար չի լինի): Բոլոր N չափանի վեկտորների փարածությունը նշանակում ենք \mathbb{R}^N -ով:

Ենթադրենք ունենք վեկտոր $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$.

▷ \vec{x}, \vec{y} -ի սկալյար արտադրյալը սահմանենք

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N :$$

▷ Վեկտորների $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ համակարգը կոչվում է **օրթոնորմալ բազիս**, եթե

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{եթե } i = j \\ 0 & \text{եթե } i \neq j \end{cases}.$$

Վարժություն 1. Յույց ցույց տալ, որ եթե $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ համակարգը օրթոնորմալ բազիս է ապա

$$U = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N]$$

մատրիցի համար, $UU^T = E$, որտեղ E -ն անկյունագծին 1-եր և մնացած տեղերում 0 մատրիցն է:

Օրինակ 1. $\vec{e}_k = (0, \dots, \overset{k}{1}, \dots, 0)$ -ի համար, $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ -ը օրթոնորմալ բազիս է \mathbb{R}^N -ում:

Վարժություն 2. Յույց ցույց տալ, որ ցանկացած $\vec{f} \in \mathbb{R}^N$ կարելի է գրել

$$\vec{f} = \sum_{k=1}^N \langle \vec{f}, \vec{e}_k \rangle \vec{e}_k$$

գումարի տեսքով:

▷ $\vec{f} = \sum_{k=1}^N \langle \vec{f}, \vec{e}_k \rangle \vec{e}_k \in \mathbb{R}^N$ վեկտորի ϵ -սեղմում կոչում է հետևյալ վեկտորը

$$\vec{f}_\epsilon = \sum_{k: |\langle \vec{f}, \vec{e}_k \rangle| \geq \epsilon} \langle \vec{f}, \vec{e}_k \rangle \vec{e}_k :$$

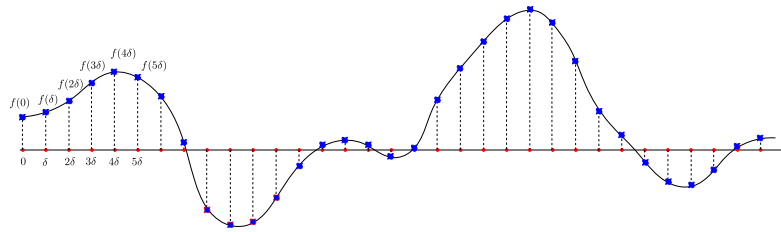
Այսինքն \vec{f} -ի վերլուծությունից հետագնում (զրոյացնում) ենք այն գործակիցները, որոնք բացարձակ արժեքով փոքր են նախասպես որոշված ϵ թվից:

Վեկտորների սեղմումը շաք կարևոր հասկացություն է կիրառություններում, քանի որ այն հնարավորություն է տալիս, օրինակ, նկարների չափեր փոքրացնել, առանց վնասելու նկարում եղած պատկերը: Եթե վեկտորի ու նրա սեղմված տարբերակի տարբերությունը փոքր է, ապա պահելով նրա սեղմված տարբերակը կարող ենք հիշողության լուրջ խնայողություններ անել: Իսկապես, այժմ բոլոր c_1, \dots, c_N գործակիցները պահելու փոխարեն, կպահենք միայն (k, c_k) զույգերը, որպեսզի $|c_k| \geq \epsilon$: Օրինակ, 1024×1024 պիքսել ունեցող նկարը պահելու համար պետք է պահենք $\geq 1.000.000$ գործակից: Սակայն եթե օրինակ թվային նկարի որևէ բազիսում սեղմումը ունի միայն 10.000 գործակից, ապա դա հնարավորություն կտա նկարը պահելու համար անհրաժեշտ հիշողությունը հիսնապատիկ կրճատել:

ϵ թիվը սովորաբար նախապես չի ընտրվում: Սեղմելիս, վերցնում են այն ϵ -ը որից փոքր են օրինակ գործակիցների 90%-ը: Այսինքն, արդյունքում տարբեր պատկերների համար այն կարող է լինել տարբեր: Այս տոկոսային արժեքը ընտրվում է ծրագիրը ստեղծողի կողմից:

2. Չայնագրությունների սեղմում

Չայնային ալիքը կարող ենք նկարագրել որպես անդհար ֆունկցիա՝ t ժամանակից կախված $(f(t))$ -ն իրենից ներկայացնում է ձայնի «ինտենսիվությունը» ժամանակի t պահին:



Թվային ձայնագրիչներում այդ անընդհար ֆունկցիան դիսկրետացվում է և փոխարենը պահվում են

$$f(0), f(\delta), f(2\delta), \dots, f(N\delta)$$

արժեքները վեկտորի տեսքով: Այս պրոցեսը կոչվում է ձայնի թվայնացում:

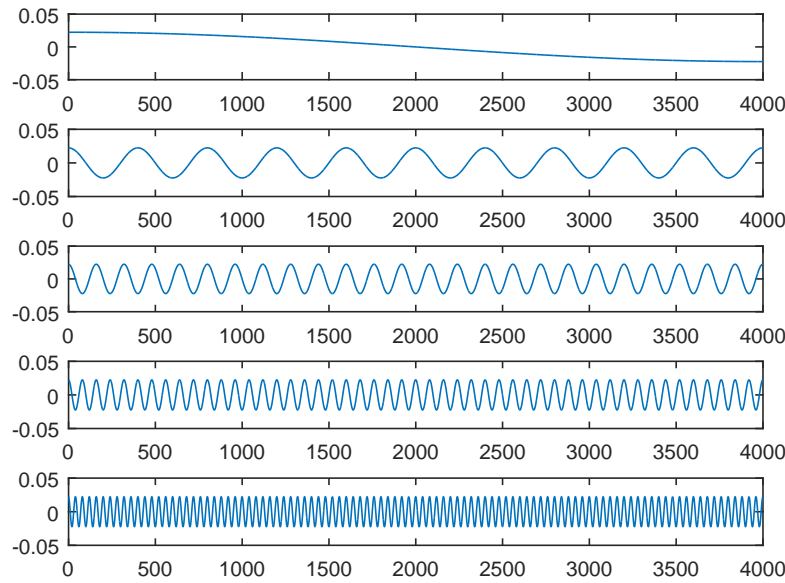
Երբ ձայնը գրանցվում է բարձր զգայականություն ունեցող սարքավորմամբ, չմշակված ձայնագրությունը կարող է լինել շաք մեծ չափի, երբ $\delta \ll 1$ և այդ ֆորմատով պահելը նպատակահարմար չէ:

Չայնագրությունները սեղմելիս սովորաբար օգտագործվում է **կոսինուսային բազիսը** (կամ ձևափոխությունը)

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

և $k = 1, \dots, N - 1$ -ի համար

$$e_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi(2 \cdot 0 + 1)k}{2N}\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{\pi(2(N-1) + 1)k}{2N}\right) \end{pmatrix}$$



Նկար 2: $N = 4000$ -ի համար կոսինուսային վեկտորի պարկերը, երբ $k = 1, 20, 50, 100, 200$

Կոսինուսային բազիսի գործակիցները չափում են համապարասխան հաճախականությունների ներդրումը ձայնային ալիքում: Այն նաև կիարառվում է թվային ձայնագրությունները և պարկերները սեղմելիս, մասնավորապես JPEG ֆորմատով ֆոտոպարկերների սեղմումը կատարվում է այս բազիսում:

Եթե ձայնային ալիքը շար երկար է, ապա այն բաժանում են ավելի փոքր կտորների և յուրաքանչյուր կտորի համար կատարում սեղմումը:

Վարժություն 3. Ցույց տալ, որ կոսինուսային բազիսը օրթոգոնալ բազիս է:

3. Թվային նկարների սեղմում

Թվային պարկերների դեպքում դիսկրետիզացումը կատարվում է երկչափ ցանցի վրա՝ մաթրիցի տեսքով: Գունավոր նկարների համար նման երեք հար մաթրից է պահվում, որոնք ցույց են տալիս կարմիր, դեղին և կապույտ գույների ներդրումը պարկերում (պարզվում է, որ միայն այս երեք գույներով կարելի է աչքի համար տեսանելի ցանկացած գույն ստանալ): Բայց մենք պարկերները կոդիարկենք սև և սպիտակ գույներով, և կպահենք միայն մեկ մաթրից, որի յուրաքանչյուր էլեմենտի արժեքը $[0, 1]$ հատվածից է և ցույց է տալիս, թե համապարասխան պիքսելը ինքնուրույն է մոխրագույն (0-ի դեպքում այն սև է, 1-ի դեպքում՝ սպիտակ):

Թվային ֆոտոպարկերները սեղմելիս սովորաբար օգտագործվում է երկչափ Նաարի բազիսը (կամ վեյվլեթը): Օրինակ, JPEG 2000-ը այս բազիսն է օգտագործում:

Նախքան Նաարի երկչափ բազիսին անցնելը, դիփարկենք Նաարի միաչափ բազիսը, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ: Դիցուք $N = 2^d$ որպես d -ն ինչ-որ բնական թիվ է, և դիփարկենք հետևյալ վեկտորները

$$h_0 = \frac{1}{2^{\frac{d}{2}}} (\overbrace{1, \dots, 1}^{2^d})^T$$

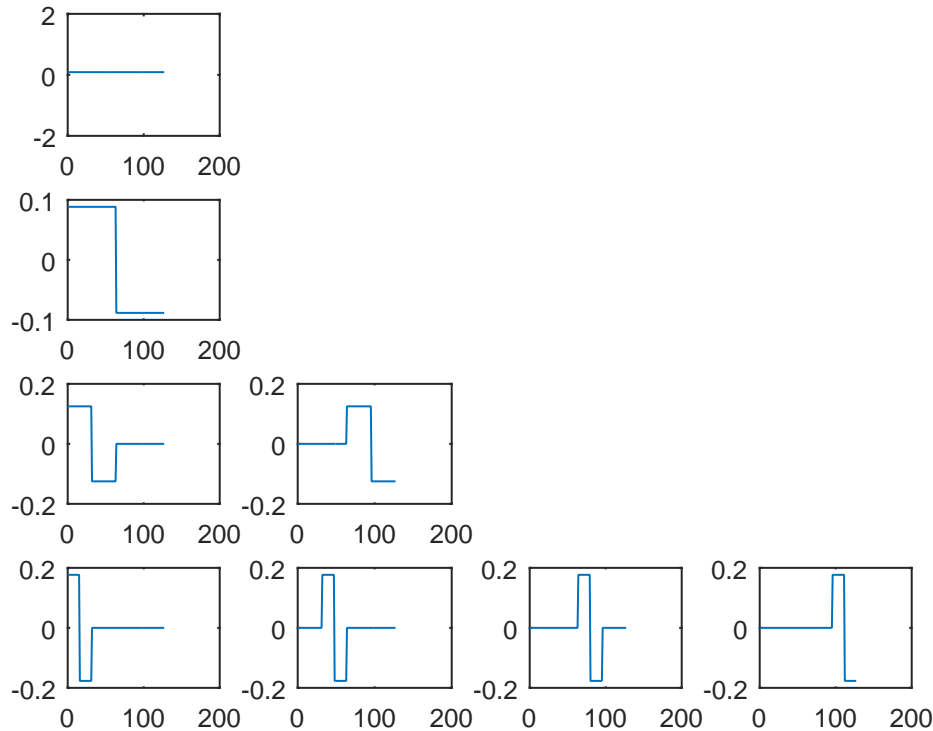
$$h_1 = \frac{1}{2^{\frac{d}{2}}} (\overbrace{1, \dots, 1}^{2^{d-1}}, \overbrace{-1, \dots, -1}^{2^{d-1}})^T$$

$$h_2 = \frac{1}{2^{\frac{d-1}{2}}} (\overbrace{1, \dots, 1}^{2^{d-2}}, \overbrace{-1, \dots, -1}^{2^{d-2}}, \overbrace{0, \dots, 0}^{2^{d-1}})^T \quad h_3 = \frac{1}{2^{\frac{d-1}{2}}} (\overbrace{0, \dots, 0}^{2^{d-1}}, \overbrace{1, \dots, 1}^{2^{d-2}}, \overbrace{-1, \dots, -1}^{2^{d-2}})^T$$

և այսպես շարունակ, մինչ

$$h_{2^d-2} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}(\overbrace{0, \dots, 0}^{2^d-4}, 1, -1, 0, 0)^T \quad h_{2^d-1} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}(\overbrace{0, \dots, 0}^{2^d-4}, 0, 0, 1, -1)^T :$$

Վարժություն 4. Յույց ցրակ, որ Հաարի բազիսը օրթոգոնալ բազիս է:



Նկար 3: $N = 128$ -ի համար Հաարի $h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8$ բազիսային վեկտորների պատկերները

Երկչափ Հաարի բազիսը սահմանվում է որպես

$$H_{i,j} = h_i h_j^T (= h_i \otimes h_j) :$$

Եթե $A \in R^{d \times d}$, ապա նրա գործակիցները երկչափ Հաարի բազիսում փրված են

$$C = [h_0, \dots, h_{2^N-1}] \cdot A \cdot [h_0, \dots, h_{2^N-1}]^T :$$

Այս դեպքում $C(i, j)$ -ն, որը C -ի (i, j) -ում գործակիցն է, կլինի հավասար $\langle C, H_{i,j} \rangle$, որպեսզի երկու մաթրիցների սկալյար արտադրյալը սահմանվում է ինչպես վեկտորների համար, անդամ առ անդամ բազմապատկելով և բոլորը գումարելով իրար:

Եթե թվային պատկերը շատ մեծ է, ապա այն բաժանում ենք ավելի փոքր մասերի և յուրաքանչյուր մասի համար կատարում սեղմումը:

4. Յուզադրություն

Չայնային ալիքի սեղմում

```
clear all
s=4000; % size of the analysis step
```



```

sec=9; % length of audio
D=dctmtx(s); % discrete cosine

THR=0.001; % the threshold
Fs=40000; % samples per sec
N=Fs*sec; % length of audio array

[y,Fss] = audioread('music.wav');
sound_arr=y(1:sec*Fs)';

%% Dividing to cells
N_cells=N/s;
vec=s*ones(1,N_cells);
sub_sound=mat2cell(sound_arr,vec,1); % subdivides
sub_sound_thr=sub_sound;
SQ=sub_sound;
SP=sub_sound;
NN=zeros(1,40);

%% Thresholding
for i=1:N_cells
    [SQ{i},SP{i},sub_sound_thr{i},NN(i)] = cosinecoef(sub_sound{i},D,THR);
end

%% From cell to array
thr_sound_arr=cell2mat(sub_sound_thr); % thresholded sound
sq=cell2mat(SQ); % the actual coef
sp=cell2mat(SP); % the thresholded coef

%% Plotting
figure;
xx=(0:N-1);
subplot(2,2,1), plot(xx,sound_arr);
subplot(2,2,3), plot(xx,sq);

subplot(2,2,2), plot(xx,thr_sound_arr);
subplot(2,2,4), plot(xx,sp);

%% The non zero elements
n_orig=length(find(sq~=0));
n_thrsh=length(find(sp~=0));

fprintf('the number of non-zero coefs in original is %d\n',...
n_orig);

fprintf('the number of non-zero coefs in thresholded is %d\n',...
n_thrsh);

fprintf('the percentage of survivors is %3.1f%%\n',...
(n_thrsh*100)/(sec*Fs));

%% Play back the recording.
pause; sound(sound_arr,Fs,8); % play original
pause;
sound(thr_sound_arr,Fs,8); % play thresholded

```

cosinecoef ֆունկցիայի սահմանումը

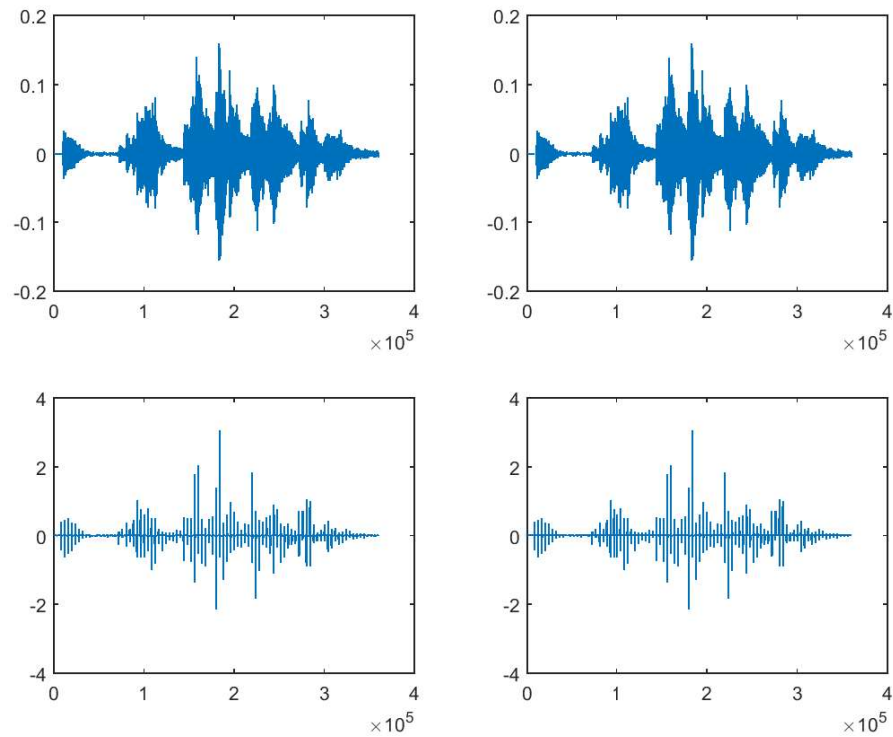
```

function [sqcoef,spcoef,spsound,nnzero] = cosinecoef(v,D,THR)
% sqcoef is the original coefs
% spcoef is the thresholded coef
% spound is recovered piece
sqcoef=D*v;
spcoef=sqcoef;
spcoef(abs(sqcoef)<THR)=0; % thresholded square coeff

spsound=D'*spcoef;
nnzero = length(find(abs(spcoef)>THR)); % the indeces where > THR
end

```

the number of non-zero coefs in original is 360000
the number of non-zero coefs in thresholded is 30050
the percentage of survivors is 8.3%



Նկար 4: Ճախից վերևը՝ բնօրինակը, աջից վերևը՝ սեղմված փաթեթը, ճախից ներքևը՝ բնօրինակի գործակիցները, աջից ներքևը՝ սեղմված գործակիցները

Թվային պարկերների սեղմում

```
clear all

load('HH128');
THR=0.2;

%% Read and grayscale the image
im=imread('pic1.jpg'); % read
I = mat2gray(rgb2gray(im)); % grayscale than to intensity matrix
IM=imresize(I,[1024, 1024]); %resize to the right size

%% Dividing to cells
submatr=mat2cell(IM,128*ones(1,8),128*ones(1,8)); % subdivides
submatrthr=submatr;
SQ=submatr;
SP=submatr;
NN=zeros(8,8);

%% Thresholding
for i=1:8
    for j=1:8
        [SQ{i,j},SP{i,j},submatrthr{i,j},NN(i,j)] = haarcoef(submatr{i,j},HH128,THR);
    end
end

%% From cell to mat
```

```
thrIM=cell2mat(submatrthr); % thresholded image
sq=cell2mat(SQ); % the actual coef
sp=cell2mat(SP); % the thresholded coef

%% Plotting
figure;
subplot(2,2,1), subimage(IM);
subplot(2,2,3), subimage(sq);

subplot(2,2,2), subimage(thrIM);
subplot(2,2,4), subimage(sp);

%% The non zero elements
n_orig=length(find(sq~=0));
n_thrsh=length(find(sp~=0));

fprintf('the number of non-zero coefs in original is %d\n',...
n_orig);

fprintf('the number of non-zero coefs in thresholded is %d\n',...
n_thrsh);

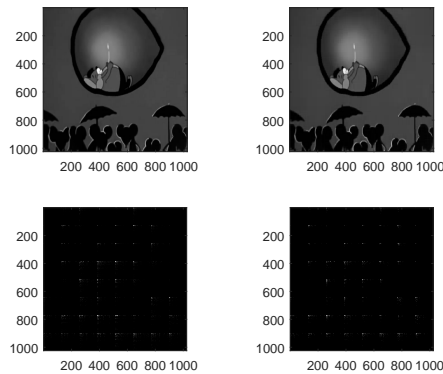
fprintf('the percentage of survivors is %3.1f%%\n',...
(n_thrsh*100)/(1024*1024));
```

haarcoef ֆունկցիայի սահմանումը

```
function [sqcoef,spcoef,sppic,nnzero] = haarcoef(v,HH,THR)
sqcoef=HH*v*HH';
spcoef=sqcoef;
spcoef(abs(sqcoef)<THR)=0; % thresholded square coeff

sppic=HH'*spcoef*HH; % recovered piece
nnzero = length(find(abs(spcoef)>THR)); % the indeces where > THR
end
```

the number of non-zero coefs in original is 1047824
the number of non-zero coefs in thresholded is 14511
the percentage of survivors is 1.4%



Նկար 5: (Պույ-պույ մկնիկի թաղումը) ձախից վերևը՝ բնօրինակը, աջից վերևը՝ սեղմված փարբերակը, ձախից ներքևը՝ բնօրինակի գործակիցները, աջից ներքևը՝ սեղմված գործակիցները

5. Եզրահանգում

Պարզվում է, որ վեկտորների որոշ դասերի համար կարելի է գտնել բազիսներ որպեսզի նրանք ունենան նույն վերլուծություն: Ինչպես տեսանք, թվային նկարների համար որոշ վեկտելեթ բազիսներ (մասնավորապես Վաարի բազիսը) նմանապիպ վերլուծություն էին թույլ տալիս: Կամ թվային ձայնագրությունների դեպքում կոսինուսային բազիսը:

Այսպիսով, սփանդարտ նմուշառության դեպքում, եթե վեկտորը նույն է ապա մենք մեծ քանակությամբ ավելորդ և անպետք չափումներ ենք կատարում, որովհետև վեկտորի ներքին չափողականությունը շատ ավելի փոքր է: Նարց է առաջանում, թե կարելի արդյոք քչացնել չափումների քանակը (այսինքն, 1024×1024 պիքսելի արժեք հաշվելու փոխարեն, կատարել ավելի քիչ կանակությամբ չափում) ու նորից կարողանալ գտնել անհայտ վեկտորը, կամ այլ կերպ ասած, նմուշառությունը և սեղմումը կատարել միաժամանակ:

Օր 2-րդ

1. Գծային չափում

Ենթադրեն ունենք վեկտոր $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$:

▷ $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ֆունկցիայի համար $\Phi(\vec{x}) = b$ թիվը կանվանենք \vec{x} վեկտորի **չափում** (երբեմն նաև **սկալար** կամ **նշան** անվանումն է օգտագործվում):

▷ $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ֆունկցիան կոչվում է **գծային**, եթե

$$\Phi(\vec{x}) = a_1 \cdot x_1 + \dots + a_N \cdot x_N,$$

ցանկացած $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ -ի համար, որտեղ $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ ինչ-որ ֆիքսված թվեր են:

Օրինակ՝ \vec{x} -ի միջին թվաբանականը՝

$$\frac{x_1 + \dots + x_N}{N}$$

գծային չափում է:

Նկատենք, որ եթե ունենք $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորի մի քանի տարբեր գծային չափումներ

$$\Phi_1(\vec{x}) = a_{1,1} \cdot x_1 + \dots + a_{1,N} \cdot x_N = b_1$$

$$\Phi_2(\vec{x}) = a_{2,1} \cdot x_1 + \dots + a_{2,N} \cdot x_N = b_2$$

$$\vdots$$

$$\Phi_M(\vec{x}) = a_{M,1} \cdot x_1 + \dots + a_{M,N} \cdot x_N = b_M$$

ապա դրանք կարող ենք գրել մատրիցային արտահայտությամբ որպես

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M,1} & \dots & a_{M,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \text{ կամ } A\vec{x} = \vec{b} :$$

Նաթ 1. Եթե $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ -ի մասին ոչինչ հայտնի չէ, ամենաքիչը քանի՞ չափում է անհրաժեշտ այն գրանցելու համար:

Ավելի կոնկրետ, եթե $Ax = \vec{b}$ համակարգից \vec{x} -ը միակ ձևով գտնվում է, ապա ի՞նչ կարող ենք ասել A մատրիցի տողերի քանակի մասին:

Գծային հանրահաշվից հայտնի է, որ A -ի տողերի քանակը պետք է լինի N -ից մեծ, հակառակ դեպքում համակարգը կունենա անվերջ քանակությամբ լուծում, այսինքն առնվազն N հար չափում է անհրաժեշտ: Սակայն միշտ չէ, որ հնարավորություն ունենք կամ ցանկանում ենք նման քանակությամբ չափումներ կատարել, մասնավորապես եթե N -ը շատ մեծ է և յուրաքանչյուր չափումը ժամանակավոր կամ ծախսատար է:

▷ A մատրիցը երբեմն անվանում են **բառարան** (dictionary) իսկ նրա տողերը՝ **արտմուծներ**:

Կիրառություններում հաճախ A -ն ստացվում է լինում, բայց երբեմն մենք հնարավորություն ունենք ինքներս ընտրել այն:

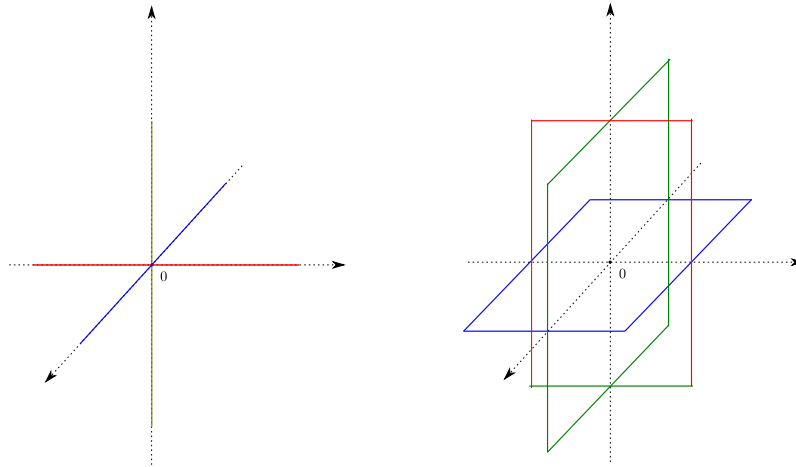
2. Սեղմ նմուշառության խնդրի ձևակերպումը

▷ Կասենք, որ $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորը $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ օրթոնորմալ բազիսում ունի r -նոսր վերլուծություն, եթե

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^N \langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle \vec{e}_k$$

վերլուծության մեջ ոչ զրոյական գործակիցները քանակը չի գերազանցում r -ը:

\mathbb{R}^N -ում $e_k = (0, \dots, \overset{k}{1}, \dots, 0)^T$, $k = 1, \dots, N$ բազիսում r -նոսր վեկտորների բազմությունը նշանակենք Σ_r^N -ով:



Նկար 6: Σ_1^3 և Σ_2^3 բազմությունները

Եթե վեկտորի նմուշների քանակը փոքր է, ապա այն միաբաժանվում է գրգռվող հնարավոր չէ, և չափումներից առաջացած հավասարումների համակարգը ունի անվերջ քանակությամբ լուծում: Ինչպես փաստանք շարք վեկտորների դասերի համար հնարավոր է գրնել բազիս որպես նրա սեղմումը, որը նոսր վեկտոր է, լավ մոտարկում է վեկտորին: Ներկայացնում ենք ենթադրել, որ մեր անհայտ վեկտորը հենց սեղմված փաթեթակն է և հեքսաբար ունի նոսր վերլուծություն: Պարզվում է, որ որոշ դեպքերում այս լրացուցիչ ենթադրությունը բավական է որպիսզի խնդրի լուծումը լինի միակը: Այսպիսով, սեղմ նմուշառության խնդիրն է քիչ քանակությամբ չափումներ կատարելով վերականգնել անհայտ վեկտորը, եթե հայտնի է, որ այն ունի նոսր վերլուծություն փվյալ բազիսում: Այսինքն,

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որպեսզի

- A -ն $M \times N$ մատրից է ($M \ll N$), $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$
- \vec{x} -ը r -նոսր է $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ բազիսում

Գրնել \vec{x} -ը:

Դիտողություն 1. Իրական կյանքում ինչպիսի բազիս էլ վերցնենք, միևնույն է գործակիցների մեծ մասը լինելու են ոչ զրոյական, սակայն նրանցից շատերը կլինեն զրոյին մոտ (ինչպես փաստանք, թվային նկարների և ձայնագրությունների դեպքում), ուստի կարող ենք համարել, որ զրո են: Այս պարմատով վերականգնված վեկտորը իրական վեկտորից որոշակի կերպով կտարբերվի և իդեալական դեպքում այդ տարբերությունը կլինի չնչին և աննկատելի:

Դիտողություն 2. Կիրառություններում r թիվը նախապես տրված չի լինում և ընտրվում է էմպիրիկ մեթոդով:

Դիպոդություն 3. Առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարող ենք ենթադրել, որ այն բազիսը որում վեկտորը ունի նույն վերլուծություն, \mathbb{R}^N -ի կանոնական բազիսն է $e_k = (0, \dots, \overset{k}{1}, \dots, 0)^T$, $k = 1, \dots, N$:
Այսինքն, ունենք այսպիսի պատկեր՝

$$A \times \vec{x} = \vec{b}$$

որտեղ A մատրիցը կարճ է ու լայն: Գունավոր վանդակները \vec{x} -ի ոչ զրոյական կոորդինատներն են:
Տակառուսկ դեպքում, եթե \vec{x} -ի վերլուծությունը նույն է $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ բազիսում, կնայենք

$$\tilde{A}\vec{z} = \vec{b},$$

որտեղ $\tilde{A} = A \cdot [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N]$ և $\vec{z} = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N]^T \cdot \vec{x}$ և \vec{z} -ը կլինի նույն \mathbb{R}^N -ի կանոնական բազիսում: Նկատենք, որ այս «պրոյեկտ»-ից հետո \vec{z} -ը կարող է նույն վերլուծություն չունենալ սկզբնական բազիսում: Միևնույն նույն վեկտորը չի կարող ունենալ նույն վերլուծություն երկու իրարից շատ տարբեր բազիսներում:

▷ $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ և $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N\}$ բազիսների համար, նրանց կոհերենտություն կոչվում է հետևյալ թիվը

$$C = \max_{1 \leq i, j \leq N} |\langle e_i, v_j \rangle| :$$

Թեորեմ 1 (Դոնոհո-Սթարքի անորոշության սկզբունք). Եթե $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորի վերլուծությունը r -նույն է $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ բազիսում և s -նույն է $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N\}$ բազիսում, ապա

$$s \cdot r \geq \frac{1}{C^2} \quad (\Rightarrow s + r \geq \frac{2}{C}) :$$

Դոնոհո-Սթարքի անորոշության սկզբունքի հետևում է, որ եթե մի բազիսում վեկտորը նույն է, ապա մյուս բազիսում շատ նույն չի կարող լինել, քանի որ նույնության գործակիցների գումարը մեծ է ֆիքսած թվից:

Նկատենք, որ կանոնական բազիսի ու Ֆուրիեյի բազիսի (կամ կոսինուսային) համար $C = \frac{1}{\sqrt{N}}$, ուստի

$$s \cdot r \geq N :$$

Այս թեորեմի մասնավոր դեպքը, երբ առաջին բազիսը \mathbb{R}^N -ի կանոնական բազիսն է, իսկ երկրորդը Ֆուրիեյի բազիսը, ապացուցվել է David Donoho-ի և Philip Stark-ի կողմից 1988-ին, իսկ ընդհանուր դեպքը Michael Elad-ի և Alfred Bruckstein-ի կողմից կողմից 2002-ին (տես [5], Theorem 1):

Դիպոդություն 4. Եթե հայրենի չլինել, որ \vec{x} -ը նույն է, պետք է առնվազն լինի $M = N$, հակառակ դեպքում $\vec{b} = A\vec{x}$ -ի համար $A\vec{z} = \vec{b}$ ունի անթիվ քանակությամբ լուծումներ:

Դիպոդություն 5. Եթե իմանայինք, թե \vec{x} -ի որ գործակիցներն են զրոյից տարբեր, ապա միայն $M = r$ քանակությամբ չափում անհրաժեշտ կլինի r -նույն \vec{x} վեկտորը գրանելու համար: Բոլոր, եթե \vec{x} -ի ոչ զրոյական գործակիցները x_{i_1}, \dots, x_{i_r} -ն են, ապա

$$Ax = (A[:, i_1], \dots, A[:, i_r]) \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} = \vec{b} :$$

$(A[:, i_1], \dots, A[:, i_r])$ մատրիցը քառակուսային է, և հետևաբար կարող ենք նայել նրա հակադարձը (վերցնելով այնպես, որ հակադարձը գոյություն ունի) և այդպեղից գրանել \vec{x} -ը : Սակայն, սեղմ նմուշառության խնդրում \vec{x} -ի ոչ զրոյական գործակիցների ինդեքսները **հայրենի չեն**:

Դիֆուզիայ 6. Ռեգուլյարիզացիան կիրառական մաթեմատիկայում և ճարտարագիտության մեջ լայնորեն կիրառվող մեթոդ է ոչ միարժեքորեն լուծվող խնդիրներին լուծում գտնելու համար:

Եթե տրված A -ի և g -ի համար $Af = g$, հավասարումը չունի միակ լուծում, ապա կարող ենք f -ի վրա դնել լրացուցիչ պայմաններ, որոնք կապահովեն լուծման միակությունը: Դրվող պայմանը կախված կլինի խնդրից:

Մասնավորապես, եթե f -ը ֆունկցիա է, ապա պահանջելով, որ նրա ածանցյալի նորմը լինի «փոքր» (օրինակ, Մորսի նորմերից մեկը), այսինքն դիֆուզիայի

$$\min \|f'\| \text{ այնպես որ } Af = g$$

ապա դա կարիայի, որ գտնվող ֆունկցիան լինի հնրավորինս ողորկ, և արդյունքում կստանանք խնդրի ողորկ լուծում, ինչը կարևոր պայման է կիրառություններում:

Երբեմն g չափումների վեկտորը պարունակում է աղմուկ $g = g_{\text{true}} + \epsilon$, որտեղ g_{true} իրական չափումն է, ϵ -ը՝ աղմուկն: Այդ դեպքում մենք ցանկանում ենք, որպիսի f -ը լինի $Af = g$ խնդրի լուծումը, այլ միայն մոտավոր լուծումը՝ $Af \approx g$: Այդ դեպքում, նայում են հետևյալ խնդրին

$$\min \{\|f\| + \|Af - g\|\},$$

որտեղ $\|\cdot\|$ և $\|\cdot\|$ կարող են լինել իրարից տարբեր նորմեր՝ որոշված տարբեր տարածությունների վրա: Այս խնդիրը լուծելով՝ մենք միաժամանակ մինիմիզացնում ենք f -ի նորմը և $Af - g$ տարբերությունը: Շատ դեպքերում հնարավոր է ցույց տալ, որ այս գտնված լուծումը իրական լուծումից քիչ է տարբերվում:

3. r -նոսր վեկտորը վերականգնելու նվազագույն չափումների քանակը

Երբ որևէ բան հայրնի չէ \vec{x} -ի մասին, ապա $Ax = \vec{b}$ հավասարումը լուծելու համար մեզ անհրաժեշտ է առնվազն $M = N$ չափում: Առաջին հարցը, որ կարող ենք փորձել պատասխանել r -նոսր վեկտորը վերականգնելու համար անհրաժեշտ նվազագույն չափումների քանակն է:

Նկատենք, ոչ եթե, հայրնի է միայն $\vec{b} = A\vec{x}$ -ը, որտեղ \vec{x} -ը անհայտ r -նոսր վեկտոր է, ապա \vec{x} -ը միարժեքորեն գտնվում է \vec{b} -ից, այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$$

ինյեկտիվ է:

Թեորեմ 2. Ներկայալ պայմանները համարժեք են

(1) $A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է,

(2) $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$,

(3) A -ի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են:

Ապացույց. (2) \implies (1): Ենթադրենք $\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$: Գրենք $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, որտեղ $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \Sigma_r^N$: Ներկայալ

$$A\vec{x} = A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = 0$$

և A -ի r -նոսր վեկտորների բազմության վրա ինյեկտիվ լինելուց $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$, որտեղից $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = 0$:

(1) \implies (2): Դիցուք

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \Sigma_r^N \text{ և } Ax_1 = Ax_2 :$$

Այդ դեպքում $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \Sigma_{2r}^N$ և

$$A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = 0,$$

հետևաբար $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$ և մեր պայմանից $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = 0$ կամ $\vec{x}_1 = \vec{x}_2 = 0$:

(2) \implies (3): Ենթադրենք

$$c_1 A[:, i_1] + \dots + c_{2s} A[:, i_{2r}] = 0 : \quad (1)$$

Դիցուք \vec{x} վեկտորի i_k -րդ գործակիցը հավասար է c_k -ի $k = 1, \dots, 2r$, իսկ մնացյալ գործակիցները՝ 0-ի: Նկատենք, որ (1)-ը համարժեք է $A\vec{x} = 0$: $\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$, հետևաբար $\vec{x} = 0$ ինչը նշանակում է, որ $c_1 = \dots = c_{2r} = 0$:

(3) \implies (2) Ենթադրենք $\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$ և $x_{i_1}, \dots, x_{i_{2r}}$ -ը \vec{x} -ի ոչ-զրոյական գործակիցներն են: Նկատենք, որ

$$A\vec{x} = x_{i_1} A[:, i_1] + \dots + x_{i_{2r}} A[:, i_{2r}] :$$

Քանի որ $\vec{x} \in \ker(A)$, ուստի $Ax = 0$ և սյուների գծորեն անկախությունից $x_{i_1} = \dots = x_{i_{2r}} = 0$, հետևաբար $\vec{x} = 0$: \square

Ներկայացում. Եթե $A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ -ը ինյեկտիվ է, ապա $M \geq 2r$:

Այսինքն, եթե ցանկանում ենք, որ r -նոսր վեկտորը միարժեքորեն որոշվի իր չափումներով, ապա չափումների քանակը պետք է լինի առնվազն $2r$: Նարք է առաջանում, արդյո՞ք հնարավոր է ճիշտ $2r$ չափումներով վերականգնել վեկտորը: Այդ հարցը ունի դրական պատասխան:

Դիտարկենք հետևյալ մատրիցը՝

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{2s-1} & \alpha_2^{2s-1} & \dots & \alpha_N^{2s-1} \end{pmatrix} :$$

Ցանկացած $\{i_1, \dots, i_{2r}\} \subseteq \{1, \dots, N\}$ բազմության համար, Վանդերմոնդի մատրիցի բանաձևից

$$\det(V[:, i_1], \dots, V[:, i_{2r}]) = \prod_{k < j} (\alpha_{i_j} - \alpha_{i_k}) :$$

Ներկայացնում, A մատրիցի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են, երբ $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ իրարից տարբեր են:

4. Մեղմ նմուշառության խնդիրը NP բարդ է

Ենթադրենք Թեորեմ 2-ի պայմանները բավարարված են, հետևաբար $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը ունի միակ r -նոսր լուծումը: Սակայն թեորեմը չի ասում, թե ինչպես գտնել այդ միակ լուծումը: Մեզ հայտնի չէ թե որտեղ են \vec{x} -ի ոչ զրոյական գործակիցները տեղակայված և նրանց արժեքները: Այսինքն, մեր խնդիրը նաև կայանում է ոչ զրոյական գործակիցների ինդեքսները գտնելը:

Պարզամիտ մոտեցումը խնդիրը լուծելու համար կլինեն

- Դիտարկել ինդեքսների $\{1, \dots, N\}$ բազմության յուրաքանչյուր r էլեմենտարնոց $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ ենթաբազմություն,
- Գտնել այն միակ I բազմությունը, որի համար

$$(A[:, i_1], \dots, A[:, i_r]) \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} = \vec{b}$$

հավասարումը ունի լուծում (այն ավելի շատ փող ունի քան սյուն և լուծումը գոյություն կունենա միայն մեկ I ինդեքսների բազմության դեպքում):

Վարագույն դեպքում պետք է լուծել $\binom{N}{r} = \frac{N!}{r!(N-r)!}$ հավասարում

Ենթադրենք, $N = 1000$, $r = 10$ և յուրաքանչյուր հավասարումը լուծելու համար պահանջվում է 10^{-10} վայրկյան, ապա հաջորդաբար լուծելու համար կպահանջվի

$$10^{-10} \frac{1000!}{10!(990)!} = 10^{-10} \frac{991}{1} \dots \frac{1000}{10} \geq 10^{-10} \left(\frac{1000}{10} \right)^{10} = 10^{10} \text{ վայրկյան} \geq 300 \text{ փարի:}$$

Պարզվում է, այս խնդրի լուծումը NP-բարդ է (ընդհանուր մատրիցների համար բազմանդամային արագությանը ալգորիթմ գոյություն չունի, սակայն որոշ կոնկրետ դեպքերում կարող է նման ալգորիթմ լինել, օրինակ օգտագործելով Reed-Solomon-ի մեթոդը), և դա միայն մեր մոտեցման պարզամիտ լինելու պարզաբան չէ (տես [6], Բաժին 2.3 և [7]):

5. Եզրահանգում

Այսպիսով, մենք սրացանք նոսր վեկտորը վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, սակայն այդ պայմանները շատ դժվար էին ստուգել և ամենից կարևորը, անգամ այն դեպքում, երբ այդ պայմանները բավարարված էին, հաշվողական տեսանկյունից որևէ արդյունավետ մեթոդներ չկային խնդիրը լուծելու համար:

Նախորդ բաժինը կնվիրվի մի այդպիսի մեթոդի մշակմանը, որը կոչվում է խնդրի ուռուցիկ ռեկոնստրուկցիա, և հնարավորություն է տալիս օպտիմալ կերպով լուծել խնդիրը, սակայն այս դեպքում չափումների մատրիցից լրացուցիչ պայմաններ պետք է պահանջենք: Կրեմենենք, որ պարահական մատրիցների դեպքում այդ պայմանները մեծ ճշտությամբ բավարարվում են:

Օր 3-րդ

Ինչպես տեսանք, պարզունակ լուծումը հաշվողական տեսանկյունից նպատակահարմար չէ, ավելին, ընդհանուր դեպքում որևէ օպտիմալ լուծում գտնելու հույս չկա, որովհետև խնդիրը NP բարդ է: Բայց միգուցե A -ի վրա (որին մենք ենք կառուցում) լրացուցիչ պայմաններ դնալով հնարավոր լինի գտնել այդպիսի մեթոդ:

1. Մեղմ նմուշառության խնդրի վերաձևակերպումը

▷ $q > 0$ թվի և $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ -ի համար սահմանենք

$$\|\vec{x}\|_q = \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} :$$

Ինչպես նաև

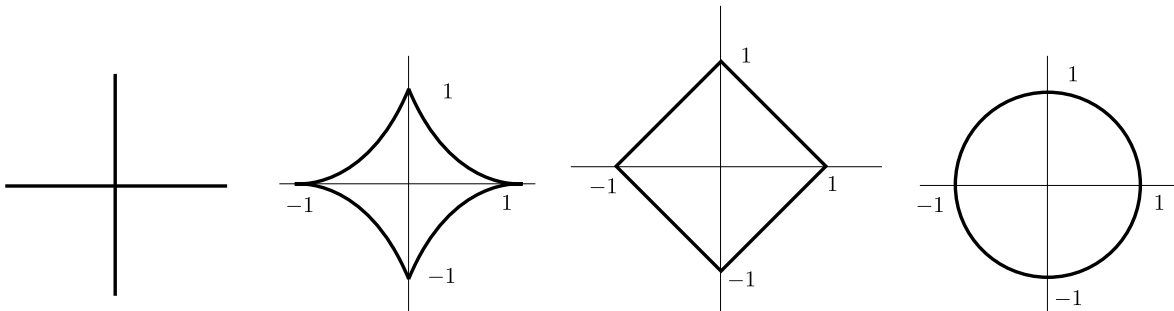
$$\|\vec{x}\|_0 = \#\{k : 1 \leq k \leq N \text{ և } x_k \neq 0\}$$

որտեղ $\#$ -ը բազմություն էլեմենտների քանակն է:

▷ Միավոր q -գունդ կոչվում է հետևյալ բազմությունը

$$B_q^N = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^N : \|\vec{x}\|_q \leq 1\} :$$

Նկատենք, որ B_0^N -ը անսահմանափակ բազմություն է:



Նկար 7: B_q^2 -ն $q = 0$, $0 < q < 1$, $q = 1$ և $q = 2$ -ի համար

Վարժություն 5. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ -ի համար գտնել

$$\arg \min_{u \in \Sigma_r^N} \|\vec{x} - \vec{u}\|_2$$

(մանրամասների համար տես [4]-ը):

Թեորեմ 3. $A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $\vec{x} \in \Sigma_r^N$ -ի համար \vec{x} -ը

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_0)$$

խնդրի միակ լուծումն է, որպեսզի $\vec{b} = A\vec{x}$:

Ապացույց. (\Rightarrow) Եթե \vec{y} -ը (P_0) -ի լուծում է, ապա $\|\vec{y}\|_0 \leq \|\vec{x}\|_0$ հետևաբար $\vec{y} \in \Sigma_r^N$ ուստի ինյեկտիվությունից $\vec{x} = \vec{y}$:

(\Leftarrow) Դիցուք $A\vec{y} = A\vec{x}$, որպեսզի $\vec{x}, \vec{y} \in \Sigma_r^N$: Եթե $\|\vec{x}\|_0 < \|\vec{y}\|_0$, ապա \vec{y}_0 -ն $\vec{b} = A\vec{y}$ -ի համար P_0 -ի լուծումը չէ: Նույն կերպ $\|\vec{x}\|_0 > \|\vec{y}\|_0$ չի կարող լինել, ուստի $\|\vec{x}\|_0 = \|\vec{y}\|_0$: Բայց քանի որ \vec{x} -ը P_0 -ի միակ լուծումն էր, ուստի $\vec{x} = \vec{y}$: \square

Այս վերաձևակերպումից հետո, (P_0) -ն հիշեցնում է ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրը, որին անդրադառնում ենք հաջորդիվ:

2. Ուռուցիկ օպտիմիզացիա

$\triangleright U \subseteq \mathbb{R}^N$ բազմությունը կոչվում է **ուռուցիկ**, եթե ցանկացած $0 \leq \alpha \leq 1$ և $\vec{x}, \vec{y} \in U$ -ի համար տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝ $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \in U$:

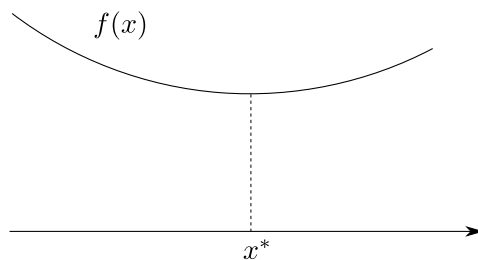
$\triangleright U \subseteq \mathbb{R}^N$ ուռուցիկ բազմության վրա որոշված $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ֆունկցիան կոչվում է **ուռուցիկ**, եթե

$$\phi(\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y}) \leq \alpha\phi(\vec{x}) + (1 - \alpha)\phi(\vec{y})$$

ցանկացած $0 \leq \alpha \leq 1$ -ի համար:

Դիցուք $U \subseteq \mathbb{R}^N$ ուռուցիկ բազմություն է և $\phi : C \rightarrow \mathbb{R}$ ուռուցիկ ֆունկցիա է: Ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրն է գտնել որևէ $x^* \in U$, որի դեպքում $\phi(x^*) \leq \phi(x)$ ցանկացած $x \in U$ -ի համար, ինչը սովորաբար գրվում է որպես

$$\arg \min_{\vec{u}} \phi(\vec{u}) \text{ այնպես որ } \vec{u} \in U :$$



\triangleright Ներկայիս խնդիրը կոչվում է **գծային ծրագրավորում**

$$\arg \min_{\vec{u}} \phi(\vec{u}) = c_1 u_1 + \dots + c_N u_N \text{ այնպես որ } C\vec{u} \leq \vec{b} \text{ և } \vec{u} \geq 0$$

որպեսզի C -ն ինչ-որ $M \times N$ մատրից է և $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$:

Գծային ծրագրավորումը օպտիմիզացիայի խնդրի մասնավոր դեպքն է, երբ ϕ -ն գծային է և U -ն ուռուցիկ բազմանիստ է

Գծային ծրագրավորման խնդրի լուծման բազմաթիվ արագ ալգորիթմներ կան: Երեք հիմնական ալգորիթմներ են Գծային ծրագրավորման խնդրի լուծման բազմաթիվ արագ ալգորիթմներ կան

- Միմալեքս մեթոդը (Դանցիգ 1947),
- Էլիպսոիդ մեթոդ (Խաչիյան, 1979),
- Ներքին կետի մեթոդ (Կամարկար, 1984):

Սակայն խնդիրը կայանում է նրանում, որ

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b}$$

խնդրում $\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_0$ -ն ուռուցիկ չէ, ուստի ուռուցիկ օպտիմիզացիայի մեթոդները կիրառել չենք կարող:

Պնդում 1. $\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_q$ -ն ուռուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ B_q^N -ը ուռուցիկ է:

$\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|_q$ -ի ուռուցիկությունը կարելի է ստուգել նաև այլ ձևերով, բայց այս պնդումից և Նկար 3-ից կարելի է նկատել, որ

- ուռուցիկ չէ $0 \leq q \leq 1$,
- ուռուցիկ է $q \geq 1$:

3. Սեղմ նմուշառության խնդրի ուռուցիկ ռեկոնստրուկցիա

Դիցուք $\vec{b} = A\vec{x}$ որպեսզի $\vec{x} \in \Sigma_r^N$: Նարգ է առաջանում, թե արդյոք հնարավոր է $\|\vec{u}\|_0$ -ն փոխարինել $\|\vec{u}\|_q$ -ով, և փորձել լուծել

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_q \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_q)$$

խնդիրը այն հույսով, որ միգուցե կգտնվի անհայտ r -նոսր \vec{x} վեկտորը:

Նկատենք, որ եթե $A : \Sigma_r^N \mapsto \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է և որևէ q -ի համար P_q խնդրի լուծումը r -նոսր վեկտոր է, ապա այն կլինի մեր կողմից որոնվող լուծումը, քանի որ այն բավարարում է $A\vec{u} = \vec{b}$ հավասարմանը և A -ն ինյեկտիվ է r -նոսր վեկտորների բազմության վրա:

Սակայն,

- $q < 1$ ուռուցիկ չէ և այս կերպ խնդիրը չենք հեշտացնում
- $q > 1$ -ի համար քիչ սպասելի է, որ գրաված լուծումը կլինի նոսր
- $q = 1$ -ի համար պարզվում է, մաթրիցների մեծ դասի համար գտնում է նոսր լուծում:

Այսպիսով, եթե ունենք $\vec{b} = A\vec{x}$ որպեսզի $\vec{x} \in \Sigma_r^N$

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_0 \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_0)$$

խնդիրը լուծելու փախարեն կլուծենք

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_1 \text{ այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_1)$$

Պնդում 2. (P_1) խնդիրը գծային ծրագրավորման խնդիր է:

Ապացույց. Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը

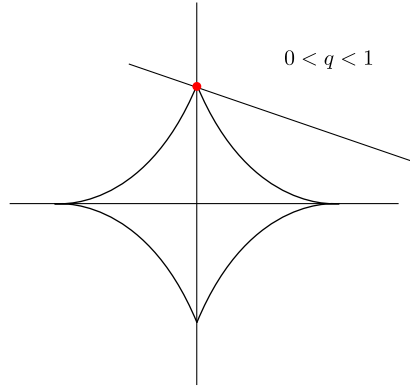
$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} (\vec{u}_+ + \vec{u}_-) \text{ այնպես որ } A\vec{u}_+ - A\vec{u}_- = \vec{b} \text{ և } \vec{u}_+ \geq 0, \vec{u}_- \geq 0$$

Նկատենք, որ եթե \vec{x}_+, \vec{x}_- -ը նրա լուծումներ են, ապա նրանց կրիչները չհաջորդ են, քանի որ ցանկացած վեկտորի համար, նրա բոլոր $\vec{x} = \vec{x}_+ - \vec{x}_-, \vec{x}_+, \vec{x}_- \geq 0$ ներկայացումների մեջ $\vec{x}_+ + \vec{x}_-$ -ն ամենափոքրն է, երբ կրիչները չեն հաջորդում: \square

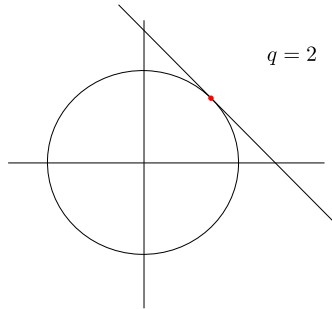
4. Երկրաչափական մեկնաբանություն

Ենթադրենք $M = 1, N = 2$, այսինքն A -ն 1×2 չափանի մատրից է: Նախ մոռանանք $A : \Sigma_R^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ -ի ինյեկտիվության մասին (այս դեպքում բնականաբար ինյեկտիվություն չունենք, քանի որ $M \geq 2r$ խախտվել է. դա կարելի է տեսնել նաև նկարի վրա քանի որ առնվազն երկու 1-նոսր կետերում հաբում կա), և փորձենք երկրաչափորեն հասկանալ, թե արդյոք P_q -ն կարող է ընդհանրապես միայն նոսր լուծում գտնել:

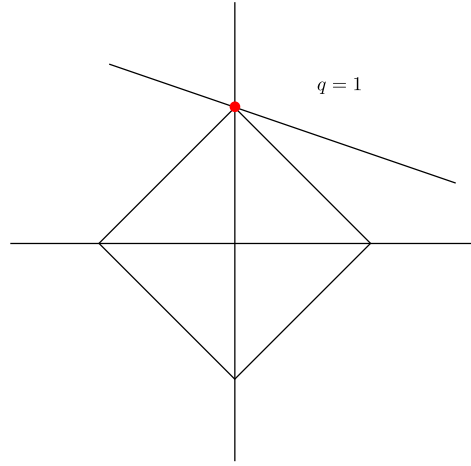
Այս դեպքում $A\vec{u} = b$ -ն իրենից ներկայացնում է ուղիղ, և P_q խնդրի լուծումը կլինի առաջին կետը (կետերը), որոնց հետ հավում է q -գումը, երբ նրա շառավիղը զրոյից սկսում ենք մեծացնել:



Նկար 8: Այս դեպքում P_q -ն վստահաբար կգտնի նոսր լուծում, սակայն խնդիրը ուռուցիկ չէ



Նկար 9: $q > 2$ -ի համար P_q -ն նոսր լուծում չի գտնի դեպքերից շարքերում



Նկար 10: P_1 -ը որոշ դեպքերում կգրնի նոսր լուծում, սակայն մեզ պետք է գրնել պայմաններ, որոնց դեպքում դա երաշխավորված է

5. r-NSP պայմանը

Դիցուք $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ և $I \subseteq \{1, \dots, N\}$: Նշանականք

$$\vec{x}_I(i) = \begin{cases} \vec{x}(i), & \text{երթն } i \in I \\ 0, & \text{երթն } i \notin I \end{cases} :$$

▷ **Կասենք**, որ A -ն բավարարում է **r-NSP** պայմանին (Null Space Property), եթե ցանկացած $I \subseteq \{1, \dots, N\}$, $|I| \leq r$ ինդեքսների բազմության և ցանկացած $\vec{x} \in \ker(A) \setminus \{0\}$ վեկտորի համար

$$\|\vec{x}_I\|_1 < \|\vec{x}_{I^c}\|_1 :$$

Նկատենք, որ $\|\vec{x}_I\|_1 + \|\vec{x}_{I^c}\|_1 = \|\vec{x}\|_1$, հետևաբար r-NSP պայմանը համարժեք է նրան, որ $\|\vec{x}\|_1 < 2\|\vec{x}_{I^c}\|_1$ կամ $2\|\vec{x}_I\|_1 < \|\vec{x}\|_1$:

Նաև, r-NSP-ից հետևում է, որ $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$, հակառակ դեպքում, եթե $\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$ և $\vec{x} \neq 0$, ապա, վերցնելով I -ն \vec{x} -ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ առաջին r գործակիցների ինդեքսների բազմությունը, կունենանք $\|\vec{x}_I\|_1 \geq \|\vec{x}_{I^c}\|_1$:

Թեորեմ 4. Յուրաքանչյուր $\vec{x} \in \Sigma_r^N$ -ի և $\vec{b} = A\vec{x}$ -ի համար

$$\arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_1 \quad \text{այնպես որ } A\vec{u} = \vec{b} \quad (P_1)$$

խնդիրը ունի միակ լուծումը \vec{x} -ն է այն և միայն այն դեպքում, երբ A -ն բավարարում է r-NSP պայմանին:

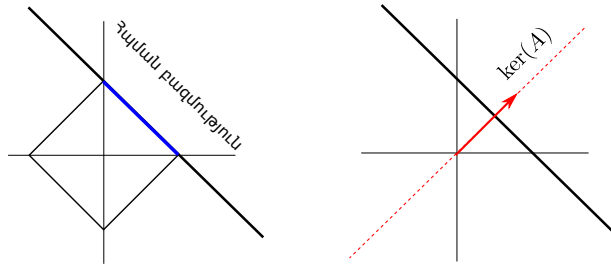
Ապացույց. (\Rightarrow) Դիցուք $\vec{x} \in \ker(A) \setminus \{0\}$ և $I \subseteq \{1, \dots, N\}$, $|I| \leq r$: $\vec{x}_I \in \Sigma_r^N$, ուստի \vec{x}_I -ը P_1 խնդրի միակ լուծումն է $\vec{b} = A\vec{x}_I$ -ի համար: Մյուս կողմից $A\vec{x}_I = A(-\vec{x}_{I^c})$, հետևաբար $\|\vec{x}_I\|_1 < \|-\vec{x}_{I^c}\|_1$:

(\Leftarrow) Դիցուք, $\vec{x} \in \Sigma_r^N$, հետևաբար $\vec{x} = \vec{x}_I$, ինչ որ $I \subseteq \{1, \dots, N\}$, $|I| \leq r$ բազմության համար: Ենթադրենք, $A\vec{x} = A\vec{y}$ ինչ-որ $\vec{y} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{y} \neq \vec{x}$ վեկտորի համար: Այդ դեպքում, $\vec{v} = \vec{x} - \vec{y}$ -ի համար $\vec{v}_I = \vec{x} - \vec{y}_I$ և $\vec{v}_{I^c} = -\vec{y}_{I^c}$, հետևաբար

$$\|\vec{x}\|_1 \leq \|\vec{x} - \vec{y}_I\|_1 + \|\vec{y}_I\|_1 = \|\vec{v}_I\|_1 + \|\vec{y}_I\|_1 < \|\vec{v}_{I^c}\|_1 + \|\vec{y}_I\|_1 = \|\vec{y}_{I^c}\|_1 + \|\vec{y}_I\|_1 = \|\vec{y}\|_1 :$$

□

Այս պայմանը երկրաչափորեն հասկանալու համար նայենք հետևյալ պարկերը $M = 1$, $N = 2$ -ի համար: Վարդ դեպքը սրացվում է, երբ հսկան բազմությունը ոչ նոսր կետեր ունի և NSP-ն ձախողվում է: Այս դեպքում կորիզի վեկտորի երկու կոորդինատները հավասար են բացարձակ արժեքով:



6. Ցուցադրություն

Օգտվելու ենք l1-magic փաթեթից [2], որը կիրառում է ներքին կերի մեթոդը ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրը լուծելիս: Մաթրիցներ գեներացնելու համար կօգտագործենք Matlab համակարգի պարամետրերի մաթրիցների փաթեթից: Չափումների մաթրիցը գեներացվել է՝ օգտագործելով նորմալ բաշխում: Թե ինչո՞ւ է նորմալ բաշխման համար $r=NSP$ պայմանը սպասելի, որ փեղի կունենա, կանդիդատներն այս բաժնում:

```
%% put key subdirectories in path if not already there
path(path, '\Optimization');

% signal length
N = 512;
% number of spikes in the signal
T = 20;
% number of observations to make
K = 120;

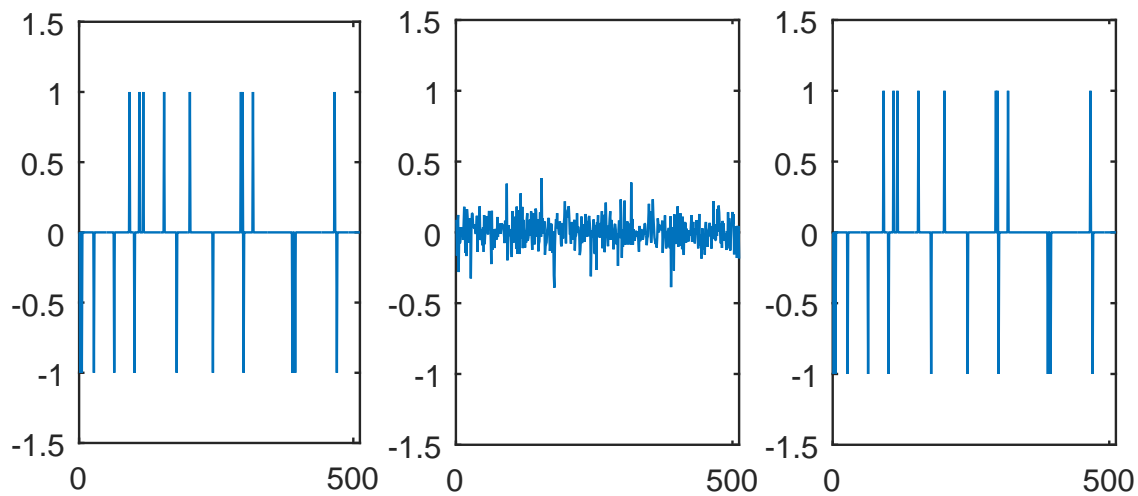
%% random +/- 1 signal
x = zeros(N,1);
q = randperm(N);
x(q(1:T)) = sign(randn(T,1));

%% measurement matrix
disp('Creating measurment matrix...');
A = randn(K,N);
A = orth(A)';
disp('Done. ');
% observations
y = A*x;
% initial guess = min energy
x0 = A'*y;

%% solve the LP
xp = l1eq_pd(x0, A, [], y, 1e-3);

%% plotting
figure;
subplot(1,2,1); plot(x, '—o');
subplot(1,2,2); plot(xp, '—o');

fprintf('the size of the original vector is %d\n', N);
fprintf('the number of measurements is %d\n', K);
fprintf('the sparsity of the original vector is %d\n', T);
```



Նկար 11: Ձախ կողմում բնօրինակ վեկտորն է, մեջքեղում՝ ℓ_2 մինիմիզացիայով վերականգնված վեկտորը և աջ կողմում՝ ℓ_1 մինիմիզացիայով վերականգնված վեկտորը

7. Եզրահանգում

Մեղմ նմուշառության խնդիրը ընդհանուր մաթրիցների դեպքում հաշվողական տեսանկյունից անհնար էր լուծել, սակայն որոշ մաթրիցների համար սեղմ նմուշառության խնդիրը ℓ_1 մինիմիզացիայի միջոցով բերվում էր գծային օպերիմիզացիայի խնդրի, որի լուծման համար բազմաթիվ թվային մեթոդներ գոյություն ունեն։ Թվային մեթոդներով նկարեցինք, որ պարզահասկ մաթրիցների համար, որոնք ունեն անկախ Գաուսյան բաշխումով գործակիցներ, այդ պայմանը տեղի ուներ։

Հաջորդ բաժնում կանդրադառնանք այս փաստին՝ տալով ավելի խիստ մաթեմատիկական մեկնաբանություն։

Օր 4-րդ

1. r-RIP պայմանը

▷ **Կասենք**, որ A մատրիցը բավարարում է **r-RIP** պայմանին, եթե գոյություն ունեն $\alpha, \beta > 0$ թվեր այնպես որ ցանկացած r -նոսր վեկտորի համար

$$\alpha \|\vec{x}\|_2^2 \leq \|A\vec{x}\|_2^2 \leq \beta \|\vec{x}\|_2^2 :$$

Եթե A -ն բավարարում է $2r$ -RIP պայմանին, ապա երկու r -նոսր վեկտորների չափումները լավ կտարբերակվեն, ու երկու տարբեր r -նոսր վեկտորներ չեն արտապարկերվի նույն չափումների վեկտորին, հետևաբան $A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է: Սակայն մենք ցույց կտանք, որ ավելին փեղի ունի, $2r$ -RIP պայմանից հետևում է r-NSP-ն, ուստի P_0 խնդրի լուծումը հնարավոր է գրել ℓ_1 մինիմիզացիայի միջոցով:

Այնուհետև մեր նպատակը կլինի ցույց տալ, որ նման մատրիցներ գոյություն ունեն, և նրանց քանակը շատ է: Նկատենք, որ եթե A -ն բազմապարկենք որևէ թվով, ապա դա նույնպես կբավարարի r-RIP պայմանին: Ուստի բավական է ցույց տալ, որ

$$(1 - \delta_r) \|\vec{x}\|_2 \leq \|A\vec{x}\|_2 \leq (1 + \delta_r) \|\vec{x}\|_2$$

բավարարող մատրիցների քանակն է շատ: Փոքրագույն δ_r -ը կոչվում է RIP-**հաստատություն**: Այս փեսքը ավելի նախընտրելի է, քանի որ օգտագործելու ենք պարահական մատրիցներ, և այն դասը, որը նայելու ենք, նրանց եզակի արժեքները բաշխված են 1-ի շուրջը և ապացույցը, որը մենք բաց կթողնենք, օգտագործում է եզակի արժեքների կոնցենտրացիան:

Թեորեմ 5. Եթե A մատրիցը բավարարում է $2s$ -RIP պայմանը և $\delta_{2r} < \frac{1}{3}$, ապա P_1 -ը միարժեքորեն վերականգնում է ցանկացած r -նոսր վեկտոր:

Նախ ապացուցենք հետևյալ լեմման:

Լեմմա 1. Եթե $\vec{u}, \vec{v} \in \Sigma_r^N$, $\text{supp}(\vec{u}) \cap \text{supp}(\vec{v}) = \emptyset$ և A -ն ունի $2r$ -RIP հատկությունը, ապա

$$|\langle A\vec{u}, A\vec{v} \rangle| \leq \delta_{2r} \|\vec{u}\|_2 \|\vec{v}\|_2 :$$

Ապացույց. $2r$ -RIP պայմանից

$$(1 - \delta_{2r}) \|\vec{u} \pm \vec{v}\|_2^2 \leq \|A\vec{u} \pm A\vec{v}\|_2^2 \leq (1 + \delta_{2r}) \|\vec{u} \pm \vec{v}\|_2^2 :$$

Քանի որ $\text{supp}(\vec{u}) \cap \text{supp}(\vec{v}) = \emptyset$, ուստի $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|_2^2 = \|\vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2$:

Օգտագործելով զուգահեռագծի կանոնից՝

$$|\langle A\vec{u}, A\vec{v} \rangle| = \frac{1}{4} |\|A\vec{u} + A\vec{v}\|_2^2 - \|A\vec{u} - A\vec{v}\|_2^2| \leq \frac{1}{4} 2\delta_{2r} (\|\vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2) \leq \delta_{2r} \|\vec{u}\|_2 \|\vec{v}\|_2$$

□

Թեորեմ 5-ի ապացույցը. Պետք է ցույց տալ, որ $\vec{x} \in \ker(A) \setminus \{0\}$ վեկտորի և $I \subseteq \{1, \dots, N\}$, $|I| \leq r$ բազմության համար $\|\vec{x}_I\|_1 < \|\vec{x}_{I^c}\|_1$, կամ համարժեքորեն $\|\vec{x}_I\|_1 < \frac{1}{2} \|\vec{x}\|_1$: Բավական է ցույց տալ, երբ I -ն \vec{x} -ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ գործակիցների ինդեքսների բազմությունն է:

Դիցուք $I_0 = I$, I_1 -ը $\vec{x}_{I_0^c}$ -ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ գործակիցների ինդեքսների բազմությունն է, I_2 -ը $\vec{x}_{(I_0 \cup I_1)^c}$ -ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ գործակիցների ինդեքսների բազմությունն է և այսպես շարունակ, մինչև $I_0^c = I_1 \cup \dots \cup I_k$:

Ներկայացնում,

$$\vec{x} = \vec{x}_{I_0} + \sum_{j=1}^k \vec{x}_{I_j} :$$

$\vec{x} \in \ker(A)$, ուստի

$$A(\vec{x}_{I_0}) = - \sum_{j=1}^k A(\vec{x}_{I_j}) :$$

Քանի որ $\vec{x}_{I_0} \in \Sigma_r^N$, r -RIP պայմանից

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_{I_0}\|_2^2 &\leq \frac{1}{1 - \delta_{2r}} \|A(\vec{x}_{I_0})\|_2^2 = \frac{1}{1 - \delta_{2r}} \langle A(\vec{x}_{I_0}), A(\vec{x}_{I_0}) \rangle = \frac{1}{1 - \delta_{2r}} \langle A(\vec{x}_{I_0}), - \sum_{j=1}^k A(\vec{x}_{I_j}) \rangle \\ &\leq \frac{1}{1 - \delta_{2r}} \sum_{j=1}^k |\langle A(\vec{x}_{I_0}), A(\vec{x}_{I_j}) \rangle| : \end{aligned}$$

Օգտվելով Լեմմա 1-ից՝

$$\frac{1}{1 - \delta_{2r}} \sum_{j=1}^k |\langle A(\vec{x}_{I_0}), A(\vec{x}_{I_j}) \rangle| \leq \frac{\delta_{2r}}{1 - \delta_{2r}} \sum_{j=1}^k \|\vec{x}_{I_0}\|_2 \|\vec{x}_{I_j}\|_2 = \frac{\delta_{2r}}{1 - \delta_{2r}} \|\vec{x}_{I_0}\|_2 \sum_{j=1}^k \|\vec{x}_{I_j}\|_2$$

ուստի

$$\|\vec{x}_{I_0}\|_2 \leq \frac{\delta_{2r}}{1 - \delta_{2r}} \sum_{j=1}^k \|\vec{x}_{I_j}\|_2 : \quad (2)$$

I_j -երի մեր ընտրությունից,

$$|\vec{x}_{I_j}(i)| \leq \frac{1}{|I_{j-1}|} \sum_{l \in I_j} |x_{I_{j-1}}(l)| = \frac{1}{r} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1$$

հետևաբար

$$\|\vec{x}_{I_j}\|_2^2 = \sum_{i \in I_j} |\vec{x}_{I_j}(i)|^2 \leq \frac{|I_j|}{r^2} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1^2 \leq \frac{1}{r} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1^2 :$$

Վերջինս համարելով (2)-ի հետ՝ ստանում ենք

$$\|\vec{x}_{I_0}\|_2 \leq \frac{\delta_{2r}}{1 - \delta_{2r}} \sum_{j=1}^k \|\vec{x}_{I_j}\|_2 \leq \frac{\delta_{2r}}{1 - \delta_{2r}} \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{r}} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1 \leq \frac{\delta_{2r}}{1 - \delta_{2r}} \frac{\|\vec{x}\|_1}{\sqrt{r}} \leq \frac{\delta_{2r}}{1 - \delta_{2r}} \|\vec{x}\|_2$$

(Նյուդերի անհավասարությունից $\|\vec{x}\|_1 \leq \sqrt{r} \|\vec{x}\|_2$):

Մեզ անհրաժեշտ է, որ

$$\frac{\delta_{2r}}{1 - \delta_{2r}} < \frac{1}{2}$$

վերջինս փեղի ունի, երբ $\delta_{2s} < \frac{1}{3}$:

□

□

Վարժություն 6. Ապացուցել զուգահեռանիստի կանոնը՝

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = \frac{1}{4} |\|\vec{u} + \vec{v}\|_2^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|_2^2| :$$

$\delta_{2r} < \frac{1}{3}$ պայմանը անհրաժեշտ պայման չէ, կան այլ պայմաններ ևս, որոնց դեպքում P_1 -ը միարժեքորեն վերականգնում է ցանկացած r -նոսր վեկտոր:

r -NSP պայմանի համար, ինչպես փաստվեց, մեզ անհրաժեշտ էին առնվազն $2r$ չափումներ: Նաջորդ թեորեմը ասում է թե քանի չափումներ են անհրաժեշտ, որպեսզի $2r$ -RIP պայմանը փեղի ունենա:

Թեորեմ 6. Եթե A մատրիցը բավարարում է 2r-RIP պայմանին և նրա RIP հաստատությունը հավասար է δ -ի, ապա

$$M \geq Cr \log \frac{N}{cr}$$

որտեղ C հաստատությունը կախված է միայն δ -ից, իսկ $c = 4$ (մի փոքր ավելի լավ անալիզ անելով՝ կարելի է դարձնել $c = 1$, տես [1], Լեմմա 3.2, հետևում է նաև այստեղից այն դեպքերում, երբ $\frac{N}{r} > 4$):

Ապացույց. Կօգտվենք հետևյալ կոմբինատորիալ արդյունքից:

Լեմմա 2. Կամայական $r \leq N$ -ի համար գոյություն ունեն $S_1, \dots, S_n \subset \{1, \dots, N\}$ բազմություններ, այնպես, որ

1. $|S_j| = r$
2. $n \geq \left(\frac{N}{4r}\right)^{\frac{r}{2}}$
3. $|S_i \cap S_j| < \frac{r}{2}$, $i \neq j$ -ի համար:

Ապացույց. U -ով նշանակենք $\{1, \dots, N\}$ -ի r էլեմենտ ունեցող ենթաբազմությունների բազմությունը: Ընտրենք $S_1 \in U$ բազմությունը կամայական ձևով: $S \in U$ բազմությունների քանակը, որոնց համար $|S \cap S_1| \geq \frac{r}{2}$, հավասար է

$$\begin{aligned} \sum_{i=\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1}^r \binom{r}{i} \binom{N-r}{r-i} &\leq \sum_{i=\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1}^r \binom{r}{i} \max_{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1 \leq i \leq r} \binom{N-r}{r-i} \\ &\leq 2^r \binom{N-r}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \end{aligned}$$

օգտվելով Նյուտոնի բինոմի բանաձևից՝

$$2^r = (1+1)^r = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} :$$

Սրացված թիվը գնահատում է «վար» S -երի քանակը, եթե ընտրել ենք S_1 -ը: Այժմ եթե ընտրել ենք S_1, S_2 -ը, «վար» S -երի քանակը այս գույգի համար չի գերազանցի $2^r \binom{N-r}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}$ -ը և այսպես շարունակ: Այսպես կարող ենք շարունակել ընտրել S_i բազմությունները, քանի դեռ «վար» բազմությունների գումարային քանակը չի գերազանցում $|U| = \binom{N}{r}$ -ը: Քանի որ սկսած երկրորդ բազմությունից, մեր գնահատականը շար կոպիտ էր, n -ի համար կունենք

$$n 2^r \binom{N-r}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \geq \binom{N}{r}$$

ուստի

$$n \geq \frac{\binom{N}{r}}{2^r \binom{N-r}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}} \geq \left(\frac{N}{4r}\right)^{\frac{r}{2}} :$$

□

Դիտարկենք նախորդ լեմմայի $S_1, \dots, S_n \subset \{1, \dots, N\}$ բազմությունները: Նայենք $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ վեկտորները, այնպես որ

$$\vec{x}_j(k) = \begin{cases} 1 & \text{եթե } k \in S_j \\ 0 & \text{եթե } k \notin S_j \end{cases} :$$

Այդ դեպքում, 2r-RIP պայմանից

$$\|A\vec{x}_i - A\vec{x}_j\|_2 \geq \sqrt{1 - \delta_{2r}} \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|_2 \geq \sqrt{1 - \delta_{2r}} \left(2r - \frac{r}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3(1 - \delta_{2r})}{2}} \sqrt{r}$$

և

$$\|A\vec{x}_i\|_2 \leq \sqrt{1 + \delta_{2r}} \sqrt{r} :$$

Առաջին գնահատականից հետևում է, որ եթե յուրաքանչյուր $A\vec{x}_i$ -ի շուրջը նայենք $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(1-\delta_{2r})}{2}}\sqrt{r}$ շառավղով գունդ, ապա այդ գնդերը չեն հասկի: Առաջին գնահատականից էլ, եթե նայենք

$$\sqrt{1+\delta_{2r}}\sqrt{r} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(1-\delta_{2r})}{2}}\sqrt{r}$$

շառավղով ու 0 կենտրոնով գունդը, ապա այն կպարունակի այդ գնդերը, որոնց քանակը n է: Ուստի գնահատելով ծավալները, կունենանք

$$\left(\sqrt{1+\delta_{2r}}\sqrt{r} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(1-\delta_{2r})}{2}}\sqrt{r}\right)^M \geq n \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(1-\delta_{2r})}{2}}\sqrt{r}\right)^M \geq \left(\frac{N}{4r}\right)^{\frac{r}{2}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(1-\delta_{2r})}{2}}\sqrt{r}\right)^M$$

Նշանակենք

$$C = \frac{\sqrt{1+\delta_{2r}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(1-\delta_{2r})}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(1-\delta_{2r})}{2}}},$$

ուստի

$$C^M \geq \left(\frac{N}{4r}\right)^{\frac{r}{2}}$$

կամ

$$M \geq \frac{1}{2\log C} r \log \left(\frac{N}{4r}\right) :$$

□

2. Պատահական մատրիցները և 2r-RIP պայմանը

Ներկայ թեորեմի ապացույցը կարելի է գրել [1]-ում (Theorem 7.3):

Թեորեմ 7 (Candés, Tao, Romberg, 2006). *Դիցուք A -ն պատահական մատրից է, որի գործակիցները անկախ պատահական մեծություններ են $N(0, 1)$ բաշխումով: Այդ դեպքում $M \geq Cr \log \frac{N}{r}$ -ի համար, որտեղ $C > 0$ —ն ցանկացած հաստատուն է, $\frac{1}{\sqrt{M}}A$ մատրիցը բավարարում է r -RIP պայմանին $1 - e^{-cM}$ հավանականությամբ, որտեղ*

$$c = \frac{(1 - \log 2)\delta^2}{4} - \frac{\log(\frac{42e}{\delta})}{C} :$$

Այսինքն, ինչքան մեծ վերցնենք M -ը, այնքան ավելի հավանական է, որ պատահական մատրիցը կբավարարի RIP պայմանին, ընդ որում այդ հավանականությունը մոտենում է 1-ի էքսպոնենցիալ արագությամբ M -ի աճման հետ:

3. Եզրահանգում

Սեղմ նմուշառության խնդիրը ընդհանուր մատրիցների դեպքում հաշվողական տեսանկյունից անհնար էր լուծել, սակայն որոշ մատրիցների համար սեղմ նմուշառության խնդիրը ℓ_1 մինիմիզացիայի միջոցով բերվում էր գծային օպտիմիզացիայի խնդրի, որի լուծման համար բազմաթիվ թվային մեթոդներ գոյություն ունեն:

Թվային մեթոդներով նկատեցինք, որ պատահական մատրիցների համար, որոնք ունեն անկախ Գաուսյան բաշխումով գործակիցներ, այդ պայմանը բերելի ուներ, և այդ փաստի մաթեմատիկական մեկնաբանությունը տրվեց RIP պայմանի միջոցով:

Ժամանակի սղության պարզաբանում մենք բաց թողեցին կարևոր թեմաներ, ինչպիսիք են սեղմ նմուշառության լուծման այլ մեթոդները (կոմբինատոր, գրիդի և այլն), որոնց որոշը ավելի կիրառելի են քան ℓ_1 մինիմիզացիան:

Չխոսեցինք նաև վերականգնման ճշգրտության մասին, երբ չափումներում առկա է աղմուկ կամ վեկտորը նոսր չէ, սակայն գրեթե նոսր և բազմաթիվ այլ թեմաների մասին, որոնց կարելի է ծանոթանալ հղված աղբյուրներից:

Գրականություն

- [1] R. Baraniuk, M. A Davenport, M. F. Duarte, Ch. Hegde, et al. [An introduction to compressive sensing](#). *Connexions e-textbook*, 2011.
- [2] E. Candès and J. Romberg. [l₁-magic: Recovery of Sparse Signals via Convex Programming](#). 2005.
- [3] E. J. Candès, J. Romberg, and T. Tao. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 52(2):489–509, 2006.
- [4] A. Cohen, W. Dahmen, and R. DeVore. Compressed sensing and best k -term approximation. *J. Amer. Math. Soc.*, 22(1):211–231, 2009.
- [5] M. Elad and A. M. Bruckstein. A generalized uncertainty principle and sparse representation in pairs of bases. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 48(9):2558–2567, 2002.
- [6] S. Foucart and H. Rauhut. *A mathematical introduction to compressive sensing*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, New York, 2013.
- [7] A. C. Gilbert. Sparse analysis lecture ii: Hardness results for sparse approximation problems.