# Սեղմ նմուշառություն: IV

Արմենակ Պետրոսյան

«Մաթեմատիկա և Կիրառություններ» 4-րդ ամառային դպրոց

30 Հունիսի, 2017 թ.
Ծաղկաձոր

VANDERBILT UNIVERSITY

# Բովանդակություն

## Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

## Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

- $A$-ն $M \times N$ մատրից է ($M << N$), $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$

# Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

- $A$-ն $M \times N$ մատրից է $(M << N)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$
- $\vec{x}$-ը $r$-նոսր վեկտոր է

# Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

- $A$-ն $M \times N$ մատրից է ($M << N$), $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$
- $\vec{x}$-ը $r$-նոսր վեկտոր է

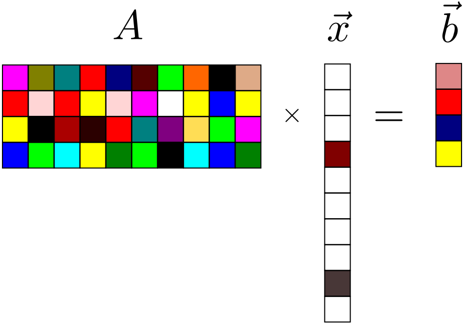
Գտնել $\vec{x}$-ը:

## Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

- $A$-ն $M \times N$ մատրից է ($M << N$), $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$
- $\vec{x}$-ը $r$-նոսր վեկտոր է

Գտնել $\vec{x}$-ը:



## Ուռուցիկ ռելակսացիա

Դիցուք $\vec{b} = A\vec{x}$ որտեղ $\vec{x} \in \Sigma_r^N$: Դիտարկենք

$$\operatorname*{arg\,min}_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_q \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \tag{$P_q$}$$

# Ուռուցիկ ռելակսացիա

Դիցուք $\vec{b} = A\vec{x}$ որտեղ $\vec{x} \in \Sigma_r^N$: Դիտարկենք

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_q \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \tag{$P_q$}$$

Ենթադրենք $A : \Sigma_r^N \mapsto \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է: Եթե որևէ $q$-ի համար $(P_q)$ խնդրի լուծումը $r$-նոսր վեկտոր է, ապա այն կլինի մեր կողմից որոնվող լուծումը (հետևում է ինյեկտիվությունից):

## Ուռուցիկ ռելաքսացիա

Դիցուք $\vec{b} = A\vec{x}$ որտեղ $\vec{x} \in \Sigma_r^N$: Դիտարկենք

$$\operatorname*{arg\,min}_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_q \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \qquad (P_q)$$

Ենթադրենք $A : \Sigma_r^N \mapsto \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է: Եթե որևէ $q$-ի համար $(P_q)$ խնդրի լուծումը $r$-նոսր վեկտոր է, ապա այն կլինի մեր կողմից որոնվող լուծումը (հետևում է ինյեկտիվությունից):

- $q < 1$ ուռուցիկ չէ

## Ասոցիկ ռելակսացիա

Դիցուք $\vec{b} = A\vec{x}$ որտեղ $\vec{x} \in \Sigma_r^N$: Դիտարկենք

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_q \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \tag{$P_q$}$$

Ենթադրենք $A : \Sigma_r^N \mapsto \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է: Եթե որևէ $q$-ի համար $(P_q)$ խնդրի լուծումը $r$-նոսր վեկտոր է, ապա այն կլինի մեր կողմից որոնվող լուծումը (հետևում է ինյեկտիվությունից):

- $q < 1$ ուռուցիկ չէ
- $q > 1$-ի համար քիչ սպասելի է, որ գտնված լուծումը կլինի նոսր

## Ուռուցիկ ռելաքսացիա

Դիցուք $\vec{b} = A\vec{x}$ որտեղ $\vec{x} \in \Sigma_r^N$: Դիտարկենք

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_q \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \qquad (P_q)$$

Ենթադրենք $A : \Sigma_r^N \mapsto \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է: Եթե որևէ $q$-ի համար $(P_q)$ խնդրի լուծումը $r$-նոսր վեկտոր է, ապա այն կլինի մեր կողմից որոնվող լուծումը (հետևում է ինյեկտիվությունից):

- $q < 1$ ուռուցիկ չէ
- $q > 1$-ի համար քիչ սպասելի է, որ գտնված լուծումը կլինի նոսր
- $q = 1$-ի համար պարզվում է, մատրիցների մեծ դասի համար գտնում է նոսր լուծում

## Ուռուցիկ ռելաքսացիա

Դիցուք $\vec{b} = A\vec{x}$ որտեղ $\vec{x} \in \Sigma_r^N$: Դիտարկենք

$$\arg\min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_q \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \qquad (P_q)$$

Ենթադրենք $A : \Sigma_r^N \mapsto \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է: Եթե որևէ $q$-ի համար $(P_q)$ խնդրի լուծումը $r$-նոսր վեկտոր է, ապա այն կլինի մեր կողմից որոնվող լուծումը (հետևում է ինյեկտիվությունից):

- $q < 1$ ուռուցիկ չէ
- $q > 1$-ի համար քիչ սպասելի է, որ գտնված լուծումը կլինի նոսր
- $q = 1$-ի համար պարզվում է, մատրիցների մեծ դասի համար գտնում է նոսր լուծում

Այսպիսով, մեր նպատակը կլինի գտնել պայմաններ որոնց դեպքում

$$\arg\min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_1 \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \qquad (P_1)$$

խնդրի միակ լուծումը $\vec{x}$-ն է:

Պնդում:

$(P_1)$ խնդիրը գծային ծրագրավորման խնդիր է:

Պնդում:

$(P_1)$ խնդիրը գծային ծրագրավորման խնդիր է:

Ապացույց.

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N}(\vec{u}_+ + \vec{u}_-) \text{ այնպես որ } A\vec{u}_+ - A\vec{u}_- = \vec{b} \text{ և } \vec{u}_+ \geq 0, \vec{u}_- \geq 0$$

Նկատենք, որ եթե $\vec{x}_+, \vec{x}_-$-ը նրա լուծումներ են, ապա նրանց կրիչները չհատվող են, քանի որ ցանկացած վեկտորի համար, նրա բոլոր $\vec{x} = \vec{x}_+ - \vec{x}_-$, $\vec{x}_+, \vec{x}_- \geq 0$ներկայացումների մեջ $\vec{x}_+ + \vec{x}_-$-ն ամենափոքրն է, երբ կրիչները չեն հատվում: □

# Բովանդակություն

# $r$-NSP պայմանը

Դիցուք $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ և $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$: Նշանակենք

$$\vec{x}_I(i) = \begin{cases} \vec{x}(i), & \text{եթե } i \in I \\ 0, & \text{եթե } i \notin I \end{cases} :$$

## $r$-NSP պայմանը

Դիցուք $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ և $I \subseteq \{1, \dots, N\}$: Նշանակենք

$$\vec{x}_I(i) = \begin{cases} \vec{x}(i), & \text{եթե } i \in I \\ 0, & \text{եթե } i \notin I \end{cases} :$$

Սահմանում:

*Կասենք, որ $A$-ն բավարարում է* **r-NSP** *պայմանին (*Null Space Property*), եթե ցանկացած $I \subseteq \{1, \dots, N\}$, $|I| \le r$ ինդեքսների բազմության և ցանկացած $\vec{x} \in \ker(A) \setminus \{0\}$ վեկտորի համար*

$$\|\vec{x}_I\|_1 < \|\vec{x}_{I^c}\|_1 :$$

## Համարժեքություն

## Համարժեքություն

### Թեորեմ:

*Յուրաքանչյուր* $\vec{x} \in \Sigma_r^N$*-ի և* $\vec{b} = A\vec{x}$*-ի համար*

$$\operatorname*{arg\,min}_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_1 \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \tag{$P_1$}$$

*խնդիրը ունի միակ լուծումը* $\vec{x}$*-ն է այն և միայն այն դեպքում, երբ* $A$*-ն բավարարում է* r-NSP *պայմանին:*

## Համարժեքություն

**Թեորեմ:**

*Յուրաքանչյուր $\vec{x} \in \Sigma_r^N$-ի և $\vec{b} = A\vec{x}$-ի համար*

$$\arg\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_1 \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \tag{$P_1$}$$

*խնդիրը ունի միակ լուծումը $\vec{x}$-ն է այն և միայն այն դեպքում, երբ $A$-ն բավարարում է r-NSP պայմանին:*

**Ապացույց.**

($\Rightarrow$) Դիցուք $\vec{x} \in \ker(A) \setminus \{0\}$ և $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$, $|I| \leq r$:
$\vec{x}_I \in \Sigma_r^N$, ուստի $\vec{x}_I$-ը $P_1$ խնդրի միակ լուծումն է $\vec{b} = A\vec{x}_I$-ի համար:
Մյուս կողմից $A\vec{x}_I = A(-\vec{x}_{I^c})$, հետևաբար $\|\vec{x}_I\|_1 < \|-\vec{x}_{I^c}\|_1$ :

## Համարժեքություն

**Թեորեմ:**

*Յուրաքանչյուր* $\vec{x} \in \Sigma_r^N$*-ի և* $\vec{b} = A\vec{x}$*-ի համար*

$$\operatorname*{arg\,min}_{\vec{u} \in \mathbb{R}^N} \|\vec{u}\|_1 \quad \text{այնպես որ} \quad A\vec{u} = \vec{b} \tag{$P_1$}$$

*խնդիրը ունի միակ լուծումը* $\vec{x}$*-ն է այն և միայն այն դեպքում, երբ* $A$*-ն բավարարում է* r-NSP *պայմանին:*

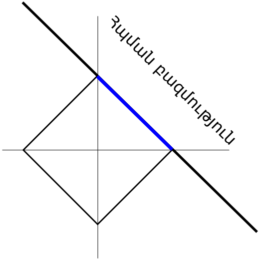
**Ապացույց.**

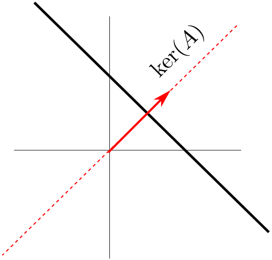
($\Rightarrow$) Դիցուք $\vec{x} \in \ker(A) \setminus \{0\}$ և $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$, $|I| \leq r$:
$\vec{x}_I \in \Sigma_r^N$, ուստի $\vec{x}_I$-ը $P_1$ խնդրի միակ լուծումն է $\vec{b} = A\vec{x}_I$-ի համար:
Մյուս կողմից $A\vec{x}_I = A(-\vec{x}_{I^c})$, հետևաբար $\|\vec{x}_I\|_1 < \|-\vec{x}_{I^c}\|_1$ :
($\Leftarrow$) Դիցուք, $\vec{x} \in \Sigma_r^N$, հետևաբար $\vec{x} = \vec{x}_I$, ինչ որ $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$, $|I| \leq r$ բազմության համար:
Ենթադրենք, $A\vec{x} = A\vec{y}$ ինչ-որ $\vec{y} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{y} \neq \vec{x}$ վեկտորի համար:
Այդ դեպքում, $\vec{v} = \vec{x} - \vec{y}$-ի համար $\vec{v}_I = \vec{x} - \vec{y}_I$ և $\vec{v}_{I^c} = -\vec{y}_{I^c}$, հետևաբար

$$\|x\|_1 \leq \|\vec{x} - \vec{y}_I\|_1 + \|\vec{y}_I\|_1 = \|\vec{v}_I\|_1 + \|\vec{y}_I\|_1$$

$$< \|\vec{v}_{I^c}\|_1 + \|\vec{y}_I\|_1 = \|\vec{y}_{I^c}\|_1 + \|\vec{y}_I\|_1 = \|y\|_1 :$$

□




Վատ դեպքը, երբ հպման բազմությունը ոչ նոսր կետեր ունի և NSP-ն ձախողվում է: Այս դեպքում կորիզի վեկտորի երկու կոորդինատները հավասար են բացարձակ արժեքով:

# Բովանդակություն

# l1-magic

- Օգտվելու ենք l1-magic փաթեթից, որը կիրառում է ներքին կետի մեթոդը ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրը լուծելիս

- Օգտվելու ենք l1-magic փաթեթից, որը կիրառում է ներքին կետի մեթոդը ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրը լուծելիս
- Մապրիցներ գեներացնելու համար կօգտագործենք Matlab համակրգի պատահական մատրիցների փաթեթից

# l1-magic

- Օգտվելու ենք l1-magic փաթեթից, որը կիրառում է ներքին կետի մեթոդը ուռուցիկ օպտիմիզացիայի խնդիրը լուծելիս
- Մատրիցներ գեներացնելու համար կօգտագործենք Matlab համակրգի պատահական մատրիցների փաթեթից
- Չափումների մատրիցը գեներացվել է օգտագործելով $N(0,1)$ նորմալ բաշխումը

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

# Բովանդակություն

# r-RIP պայմանը

Սահմանում:

*Կասենք, որ* $A$ *մատրիցը բավարարում է* **r-RIP** *պայմանին, եթե գոյություն ունեն* $\alpha, \beta > 0$ *թվեր այնպես որ ցանկացած* $r$*-նոսր վեկտորի համար*

$$\alpha\|\vec{x}\|_2^2 \leq \|A\vec{x}\|_2^2 \leq \beta\|\vec{x}\|_2^2 :$$

## r-RIP պայմանը

Սահմանում:

*Կասենք, որ $A$ մատրիցը բավարարում է* **r-RIP** *պայմանին, եթե գոյություն ունեն $\alpha, \beta > 0$ թվեր այնպես որ ցանկացած $r$-նոսր վեկտորի համար*

$$\alpha \|\vec{x}\|_2^2 \le \|A\vec{x}\|_2^2 \le \beta \|\vec{x}\|_2^2 :$$

- Նկատենք, որ 2r-RIP $\Rightarrow A : \Sigma_r^N$-ը ինյեկտիվ է, քանի որ $\vec{x}, \vec{y} \in \Sigma_r^N$-ի համար, եթե $A\vec{x} = A\vec{y}$ ապա $\vec{x} - \vec{y} \in \Sigma_{2r}^N$ ուստի $\alpha\|\vec{x} - \vec{y}\|_2^2 \le \|A(\vec{x} - \vec{y})\|_2^2 = 0$:

Սահմանում:
*Կասենք, որ $A$ մատրիցը բավարարում է* **r-RIP** *պայմանին, եթե գոյություն ունեն $\alpha, \beta > 0$ թվեր այնպես որ ցանկացած $r$-նոսր վեկտորի համար*

$$\alpha\|\vec{x}\|_2^2 \leq \|A\vec{x}\|_2^2 \leq \beta\|\vec{x}\|_2^2 :$$

- Նկատենք, որ 2r-RIP $\Rightarrow A : \Sigma_r^N$-ը ինյեկտիվ է, քանի որ $\vec{x}, \vec{y} \in \Sigma_r^N$-ի համար, եթե $A\vec{x} = A\vec{y}$ ապա $\vec{x} - \vec{y} \in \Sigma_{2r}^N$ ուստի $\alpha\|\vec{x} - \vec{y}\|_2^2 \leq \|A(\vec{x} - \vec{y})\|_2^2 = 0$:
- Մենք ավելին ցույց կտանք, որ $2r$-RIP $\Rightarrow$ r-NSP

## Նկարառում

# Նկապառում

- Մեր նպապակը կլինի ցույց պալ, որ 2r-RIP պայմանին բավարարող մապրիցներ գոյություն ունեն և նրանց քանակը շապ է

# Նկատառում

- Մեր նպատակը կլինի ցույց տալ, որ 2r-RIP պայմանին բավարարող մատրիցներ գոյություն ունեն և նրանց քանակը շատ է
- Նկատենք, որ եթե $A$-ն բազմապատկենք որևէ թվով, ապա դա նույնպես կբավարարի r-RIP պայմանին: Ուստի բավական է ցույց տալ, որ

$$(1-\delta_r)\|\vec{x}\|_2 \leq \|A\vec{x}\|_2 \leq (1+\delta_r)\|\vec{x}\|_2$$

բավարարող մատրիցների քանակն է շատ

- Մեր նպատակը կլինի ցույց տալ, որ 2r-RIP պայմանին բավարարող մատրիցներ գոյություն ունեն և նրանց քանակը շատ է
- Նկատենք, որ եթե $A$-ն բազմապատկենք որևէ թվով, ապա դա նույնպես կբավարարի r-RIP պայմանին: Ուստի բավական է ցույց տալ, որ

  $$(1-\delta_r)\|\vec{x}\|_2 \leq \|A\vec{x}\|_2 \leq (1+\delta_r)\|\vec{x}\|_2$$

  բավարարող մատրիցների քանակն է շատ

Փոքրագույն $\delta_r$-ը կոչվում է RIP-**հաստատուն**: Այս տեսքը ավելի նախընտրելի է, քանի որ պատահական մատրիցները հենց այս պայմանին են բավարարում մեծ հավանականությամբ, երբ գործակիցները ունեն նույն բաշխումը:

Թեորեմ:

*Եթե* $A$ *մատրիցը բավարարում է* 2s-RIP *պայմանը և* $\delta_{2r} < \frac{1}{3}$, *ապա* $P_1$*-ը միարժեքորեն վերականգնում է ցանկացած* $r$*-նոսր վեկտոր:*

Թեորեմ:

*Եթե $A$ մատրիցը բավարարում է 2s-RIP պայմանը և $\delta_{2r} < \frac{1}{3}$, ապա $P_1$-ը միարժեքորեն վերականգնում է ցանկացած $r$-նոսր վեկտոր:*

- $\delta_{2r} < \frac{1}{3}$ պայմանը անհրաժեշտ պայման չէ, կան այլ պայմաններ ևս, որոնց դեպքում $P_1$-ը միարժեքորեն վերականգնում է ցանկացած $r$-նոսր վեկտոր:

Թեորեմ:

*Եթե $A$ մատրիցը բավարարում է 2s-RIP պայմանը և $\delta_{2r} < \frac{1}{3}$, ապա $P_1$-ը միարժեքորեն վերականգնում է ցանկացած $r$-նոսր վեկտոր:*

- $\delta_{2r} < \frac{1}{3}$ պայմանը անհրաժեշտ պայման չէ, կան այլ պայմաններ ևս, որոնց դեպքում $P_1$-ը միարժեքորեն վերականգնում է ցանկացած $r$-նոսր վեկտոր:

Նախնական լեմմա

Թեորեմ:

*Եթե* $A$ *մատրիցը բավարարում է* 2s-RIP *պայմանը և* $\delta_{2r} < \frac{1}{3}$, *ապա* $P_1$*-ը միարժեքորեն վերականգնում է ցանկացած* $r$*-նոսր վեկտոր:*

- $\delta_{2r} < \frac{1}{3}$ պայմանը անհրաժեշտ պայման չէ, կան այլ պայմաններ ևս, որոնց դեպքում $P_1$-ը միարժեքորեն վերականգնում է ցանկացած $r$-նոսր վեկտոր:

Նախնական լեմմա

Լեմա:

*Եթե* $\vec{u}, \vec{v} \in \Sigma_r^N$, $\mathrm{supp}(\vec{u}) \cap \mathrm{supp}(\vec{v}) = \emptyset$ *և* $A$*-ն ունի* 2r-RIP *հատկությունը, ապա*

$$|\langle A\vec{u}, A\vec{v}\rangle| \leq \delta_{2r}\|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2 :$$

**Թեորեմ:**

*Եթե $A$ մատրիցը բավարարում է 2s-RIP պայմանը և $\delta_{2r} < \frac{1}{3}$, ապա $P_1$-ը միարժեքորեն վերականգնում է ցանկացած $r$-նոսր վեկտոր:*

- $\delta_{2r} < \frac{1}{3}$ պայմանը անհրաժեշտ պայման չէ, կան այլ պայմաններ ևս, որոնց դեպքում $P_1$-ը միարժեքորեն վերականգնում է ցանկացած $r$-նոսր վեկտոր:

Նախնական լեմմա

**Լեմմա:**

*Եթե $\vec{u}, \vec{v} \in \Sigma_r^N$, $\mathrm{supp}(\vec{u}) \cap \mathrm{supp}(\vec{v}) = \emptyset$ և $A$-ն ունի 2r-RIP հատկությունը, ապա*

$$|\langle A\vec{u}, A\vec{v}\rangle| \leq \delta_{2r}\|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2 :$$

**Ապացույց.**

2r-RIP պայմանից

$$(1-\delta_{2r})\|\vec{u}\pm\vec{v}\|_2^2 \leq \|A\vec{u}\pm A\vec{v}\|_2^2 \leq (1+\delta_{2r})\|\vec{u}\pm\vec{v}\|_2^2 :$$

### Թեորեմ:

*Եթե $A$ մատրիցը բավարարում է 2s-RIP պայմանը և $\delta_{2r} < \frac{1}{3}$, ապա $P_1$-ը միարժեքորեն վերականգնում է ցանկացած $r$-նոսր վեկտոր:*

- $\delta_{2r} < \frac{1}{3}$ պայմանը անհրաժեշտ պայման չէ, կան այլ պայմաններ ևս, որոնց դեպքում $P_1$-ը միարժեքորեն վերականգնում է ցանկացած $r$-նոսր վեկտոր:

Նախնական լեմմա

### Լեմա:

*Եթե $\vec{u}, \vec{v} \in \Sigma_r^N$, $\operatorname{supp}(\vec{u}) \cap \operatorname{supp}(\vec{v}) = \emptyset$ և $A$-ն ունի 2r-RIP հատկությունը, ապա*

$$|\langle A\vec{u}, A\vec{v}\rangle| \leq \delta_{2r}\|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2 :$$

### Ապացույց.

2r-RIP պայմանից

$$(1-\delta_{2r})\|\vec{u}\pm\vec{v}\|_2^2 \leq \|A\vec{u}\pm A\vec{v}\|_2^2 \leq (1+\delta_{2r})\|\vec{u}\pm\vec{v}\|_2^2 :$$

Քանի որ $\operatorname{supp}(\vec{u}) \cap \operatorname{supp}(\vec{v}) = \emptyset$, ուստի $\|\vec{u}\pm\vec{v}\|_2^2 = \|\vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2$ :

Թեորեմ:

*Եթե $A$ մատրիցը բավարարում է 2s-RIP պայմանը և $\delta_{2r} < \frac{1}{3}$, ապա $P_1$-ը միարժեքորեն վերականգնում է ցանկացած $r$-նոսր վեկտոր:*

- $\delta_{2r} < \frac{1}{3}$ պայմանը անհրաժեշտ պայման չէ, կան այլ պայմաններ ևս, որոնց դեպքում $P_1$-ը միարժեքորեն վերականգնում է ցանկացած $r$-նոսր վեկտոր:

Նախնական լեմմա

Լեմմա:

*Եթե $\vec{u}, \vec{v} \in \Sigma_r^N$, $\mathrm{supp}(\vec{u}) \cap \mathrm{supp}(\vec{v}) = \emptyset$ և $A$-ն ունի 2r-RIP հատկությունը, ապա*

$$|\langle A\vec{u}, A\vec{v}\rangle| \leq \delta_{2r}\|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2 :$$

Ապացույց.

2r-RIP պայմանից

$$(1-\delta_{2r})\|\vec{u} \pm \vec{v}\|_2^2 \leq \|A\vec{u} \pm A\vec{v}\|_2^2 \leq (1+\delta_{2r})\|\vec{u} \pm \vec{v}\|_2^2 :$$

Քանի որ $\mathrm{supp}(\vec{u}) \cap \mathrm{supp}(\vec{v}) = \emptyset$, ուստի $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|_2^2 = \|\vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2$ :
Օգտագործելով զուգահեռագծի կանոնը

$$|\langle A\vec{u}, A\vec{v}\rangle| = \frac{1}{4}\left|\|A\vec{u}+A\vec{v}\|_2^2 - \|A\vec{u}-A\vec{v}\|_2^2\right| \leq \frac{1}{4}2\delta_{2r}(\|\vec{u}\|_2^2+\|\vec{v}\|_2^2) \leq \delta_{2r}\|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2$$

□

Թեորեմի ապացույցը:

## Թեորեմի ապացույցը:

- Պետք է ցույց տալ, որ $\vec{x} \in \ker(A) \setminus \{0\}$ վեկտորի և $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$, $|I| \leq r$ բազմության համար $\|\vec{x}_I\|_1 < \|\vec{x}_{I^c}\|_1$, կամ համարժեքորեն $\|\vec{x}_I\|_1 < \frac{1}{2}\|\vec{x}\|_1$

## Թեորեմի ապացույցը:

- Պետք է ցույց տալ, որ $\vec{x} \in \ker(A) \setminus \{0\}$ վեկտորի և $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$, $|I| \leq r$ բազմության համար $\|\vec{x}_I\|_1 < \|\vec{x}_{I^c}\|_1$, կամ համարժեքորեն $\|\vec{x}_I\|_1 < \frac{1}{2}\|\vec{x}\|_1$
- Բավական է ցույց տալ, երբ $I$-ն $\vec{x}$-ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ գործակիցների ինդեքսների բազմությունն է:

# Թեորեմի ապացույցը:

- Պետք է ցույց տալ, որ $\vec{x} \in \ker(A) \setminus \{0\}$ վեկտորի և $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$, $|I| \leq r$ բազմության համար $\|\vec{x}_I\|_1 < \|\vec{x}_{I^c}\|_1$, կամ համարժեքորեն $\|\vec{x}_I\|_1 < \frac{1}{2}\|\vec{x}\|_1$
- Բավական է ցույց տալ, երբ $I$-ն $\vec{x}$-ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ գործակիցների ինդեքսների բազմությունն է:

Դիցուք $I_0 = I$, $I_1$-ը $\vec{x}_{I_0^c}$-ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ գործակիցների ինդեքսների բազմությունն է, $I_2$-ը $\vec{x}_{(I_0 \cup I_1)^c}$-ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ գործակիցների ինդեքսների բազմությունն է և այսպես շարունակ մինչև $I_0^c = I_1 \cup \cdots \cup I_k$:

## Թեորեմի ապացույցը:

- Պետք է ցույց տալ, որ $\vec{x} \in \ker(A) \setminus \{0\}$ վեկտորի և $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$, $|I| \leq r$ բազմության համար $\|\vec{x}_I\|_1 < \|\vec{x}_{I^c}\|_1$, կամ համարժեքորեն $\|\vec{x}_I\|_1 < \frac{1}{2}\|\vec{x}\|_1$
- Բավական է ցույց տալ, երբ $I$-ն $\vec{x}$-ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ գործակիցների ինդեքսների բազմությունն է:

Դիցուք $I_0 = I$, $I_1$-ը $\vec{x}_{I_0^c}$-ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ գործակիցների ինդեքսների բազմությունն է, $I_2$-ը $\vec{x}_{(I_0 \cup I_1)^c}$-ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ գործակիցների ինդեքսների բազմությունն է և այսպես շարունակ մինչև $I_0^c = I_1 \cup \cdots \cup I_k$:
Հետևաբար,

$$\vec{x} = \vec{x}_{I_0} + \sum_{j=1}^{k} \vec{x}_{I_j} \ :$$

## Թեորեմի ապացույցը:

- Պետք է ցույց տալ, որ $\vec{x} \in \ker(A) \setminus \{0\}$ վեկտորի և $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$, $|I| \leq r$ բազմության համար $\|\vec{x}_I\|_1 < \|\vec{x}_{I^c}\|_1$, կամ համարժեքորեն $\|\vec{x}_I\|_1 < \frac{1}{2}\|\vec{x}\|_1$
- Բավական է ցույց տալ, երբ $I$-ն $\vec{x}$-ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ գործակիցների ինդեքսների բազմությունն է:

Դիցուք $I_0 = I$, $I_1$-ը $\vec{x}_{I_0^c}$-ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ գործակիցների ինդեքսների բազմությունն է, $I_2$-ը $\vec{x}_{(I_0 \cup I_1)^c}$-ի բացարձակ արժեքով ամենամեծ գործակիցների ինդեքսների բազմությունն է և այսպես շարունակ մինչև $I_0^c = I_1 \cup \cdots \cup I_k$:
Հետևաբար,

$$\vec{x} = \vec{x}_{I_0} + \sum_{j=1}^{k} \vec{x}_{I_j} :$$

$\vec{x} \in \ker(A)$, ուստի

$$A(\vec{x}_{I_0}) = -\sum_{j=1}^{k} A(\vec{x}_{I_j}) :$$

Թեորեմի ապացույցը (շրնկ II):

## Թեորեմի ապացույցը (շրնկ II):

Քանի որ $\vec{x}_{I_0} \in \Sigma_r^N$, r-RIP պայմանից

$$\|\vec{x}_{I_0}\|_2^2 \leq \frac{1}{1-\delta_{2r}}\|A(\vec{x}_{I_0})\|_2^2 = \frac{1}{1-\delta_{2r}}\langle A(\vec{x}_{I_0}), A(\vec{x}_{I_0})\rangle = \frac{1}{1-\delta_{2r}}\langle A(\vec{x}_{I_0}), -\sum_{j=1}^{k} A(\vec{x}_{I_j})\rangle$$

$$\leq \frac{1}{1-\delta_{2r}}\sum_{j=1}^{k}|\langle A(\vec{x}_{I_0}), A(\vec{x}_{I_j})\rangle| :$$

# Թեորեմի ապացույցը (շրնկ II):

Քանի որ $\vec{x}_{I_0} \in \Sigma_r^N$, r-RIP պայմանից

$$\|\vec{x}_{I_0}\|_2^2 \leq \frac{1}{1-\delta_{2r}}\|A(\vec{x}_{I_0})\|_2^2 = \frac{1}{1-\delta_{2r}}\langle A(\vec{x}_{I_0}), A(\vec{x}_{I_0})\rangle = \frac{1}{1-\delta_{2r}}\langle A(\vec{x}_{I_0}), -\sum_{j=1}^{k} A(\vec{x}_{I_j})\rangle$$

$$\leq \frac{1}{1-\delta_{2r}}\sum_{j=1}^{k}|\langle A(\vec{x}_{I_0}), A(\vec{x}_{I_j})\rangle| :$$

Օգտվելով Լեմմա 1-ից,

$$\frac{1}{1-\delta_{2r}}\sum_{j=1}^{k}|\langle A(\vec{x}_{I_0}), A(\vec{x}_{I_j})\rangle| \leq \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}}\sum_{j=1}^{k}\|\vec{x}_{I_0}\|_2\|\vec{x}_{I_j}\|_2 = \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}}\|\vec{x}_{I_0}\|_2\sum_{j=1}^{k}\|\vec{x}_{I_j}\|_2$$

## Թեորեմի ապացույցը (շրնկ II):

Քանի որ $\vec{x}_{I_0} \in \Sigma_r^N$, r-RIP պայմանից

$$\|\vec{x}_{I_0}\|_2^2 \leq \frac{1}{1-\delta_{2r}}\|A(\vec{x}_{I_0})\|_2^2 = \frac{1}{1-\delta_{2r}}\langle A(\vec{x}_{I_0}), A(\vec{x}_{I_0})\rangle = \frac{1}{1-\delta_{2r}}\langle A(\vec{x}_{I_0}), -\sum_{j=1}^{k} A(\vec{x}_{I_j})\rangle$$

$$\leq \frac{1}{1-\delta_{2r}}\sum_{j=1}^{k}|\langle A(\vec{x}_{I_0}), A(\vec{x}_{I_j})\rangle| :$$

Օգտվելով Լեմմա 1-ից,

$$\frac{1}{1-\delta_{2r}}\sum_{j=1}^{k}|\langle A(\vec{x}_{I_0}), A(\vec{x}_{I_j})\rangle| \leq \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}}\sum_{j=1}^{k}\|\vec{x}_{I_0}\|_2\|\vec{x}_{I_j}\|_2 = \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}}\|\vec{x}_{I_0}\|_2\sum_{j=1}^{k}\|\vec{x}_{I_j}\|_2$$

ուստի

$$\|\vec{x}_{I_0}\|_2 \leq \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}}\sum_{j=1}^{k}\|\vec{x}_{I_j}\|_2 : \tag{1}$$

Թեորեմի ապացույցը (շրնկ II):

## Թեորեմի ապացույցը (շրնկ II):

$I_j$-երի մեր ընտրությունից,

$$|\vec{x}_{I_j}(i)| \leq \frac{1}{|I_{j-1}|} \sum_{l \in I_J} |x_{I_{j-1}}(l)| = \frac{1}{r} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1$$

## Թեորեմի ապացույցը (շրնկ II):

$I_j$-երի մեր ընտրությունից,

$$|\vec{x}_{I_j}(i)| \leq \frac{1}{|I_{j-1}|} \sum_{l \in I_J} |x_{I_{j-1}}(l)| = \frac{1}{r} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1$$

հետևաբար

$$\|\vec{x}_{I_j}\|_2^2 = \sum_{i \in I_j} |\vec{x}_{I_j}(i)|^2 \leq \frac{|I_j|}{r^2} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1^2 \leq \frac{1}{r} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1^2 :$$

## Թեորեմի ապացույցը (շրնկ II):

$I_j$-երի մեր ընտրությունից,

$$|\vec{x}_{I_j}(i)| \leq \frac{1}{|I_{j-1}|} \sum_{l \in I_J} |x_{I_{j-1}}(l)| = \frac{1}{r} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1$$

հետևաբար

$$\|\vec{x}_{I_j}\|_2^2 = \sum_{i \in I_j} |\vec{x}_{I_j}(i)|^2 \leq \frac{|I_j|}{r^2} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1^2 \leq \frac{1}{r} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1^2 :$$

Վերջինս համապտեղելով (1)-ի հետ, սպանում ենք

$$\|\vec{x}_{I_0}\|_2 \leq \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}} \sum_{j=1}^{k} \|\vec{x}_{I_j}\|_2 \leq \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{r}} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1 \leq \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}} \frac{\|\vec{x}\|_1}{\sqrt{r}} \leq \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}} \|\vec{x}\|_2$$

## Թեորեմի ապացույցը (շրնկ II):

$I_j$-երի մեր ընտրությունից,

$$|\vec{x}_{I_j}(i)| \leq \frac{1}{|I_{j-1}|} \sum_{l \in I_J} |x_{I_{j-1}}(l)| = \frac{1}{r} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1$$

հետևաբար

$$\|\vec{x}_{I_j}\|_2^2 = \sum_{i \in I_j} |\vec{x}_{I_j}(i)|^2 \leq \frac{|I_j|}{r^2} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1^2 \leq \frac{1}{r} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1^2 :$$

Վերջինս համապտեղելով (1)-ի հետ, ստանում ենք

$$\|\vec{x}_{I_0}\|_2 \leq \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}} \sum_{j=1}^{k} \|\vec{x}_{I_j}\|_2 \leq \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{r}} \|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1 \leq \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}} \frac{\|\vec{x}\|_1}{\sqrt{r}} \leq \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}} \|\vec{x}\|_2$$

(Հյուղերի անհավասարությունից $\|\vec{x}\|_1 \leq \sqrt{r}\|\vec{x}\|_2$):

## Թեորեմի ապացույցը (շրնկ II):

$I_j$-երի մեր ընտրությունից,

$$|\vec{x}_{I_j}(i)| \le \frac{1}{|I_{j-1}|}\sum_{l\in I_J}|x_{I_{j-1}}(l)| = \frac{1}{r}\|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1$$

հետևաբար

$$\|\vec{x}_{I_j}\|_2^2 = \sum_{i\in I_j}|\vec{x}_{I_j}(i)|^2 \le \frac{|I_j|}{r^2}\|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1^2 \le \frac{1}{r}\|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1^2 :$$

Վերջինս համապտեղելով (1)-ի հետ, սպանում ենք

$$\|\vec{x}_{I_0}\|_2 \le \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}}\sum_{j=1}^{k}\|\vec{x}_{I_j}\|_2 \le \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{r}}\|\vec{x}_{I_{j-1}}\|_1 \le \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}}\frac{\|\vec{x}\|_1}{\sqrt{r}} \le \frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}}\|\vec{x}\|_2$$

(Կոշիի անհավասարությունից $\|\vec{x}\|_1 \le \sqrt{r}\|\vec{x}\|_2$):
Մեզ անհրաժեշտ է, որ

$$\frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}} < \frac{1}{2}$$

վերջինս տեղի ունի, երբ $\delta_{2s} < \frac{1}{3}$: $\square$

Թեորեմ:

*Եթե որ $A$ մատրիցը բավարարում է* 2r-RIP *պայմանին և նրա* RIP *հաստատունը հավասար է $\delta$-ի, ապա*

$$M \geq Cr \log \frac{N}{r}$$

*որտեղ $C$ հաստատունը կախված է միայն $\delta$-ից:*

**Թեորեմ:**

*Եթե որ $A$ մատրիցը բավարարում է* 2r-RIP *պայմանին և նրա* RIP *հաստատունը հավասար է $\delta$-ի, ապա*

$$M \geq Cr \log \frac{N}{r}$$

*որտեղ $C$ հաստատունը կախված է միայն $\delta$-ից:*

**Թեորեմ: (Candés, Tao, Romberg, 2006)**

*Դիցուք $A$-ն պատահական մատրից է, որի գործակիցները անկախ պատահական մեծություններ $N(0,1)$ բաշխումով: Այդ դեպքում $M \geq Cr \log \frac{N}{r}$-ի համար, որտեղ $C > 0$—ն ցանկացած հաստատուն է, $\frac{1}{\sqrt{M}}A$ մատրիցը բավարարում է* r-RIP *պայմանը $1 - e^{-cM}$ հավանականությամբ, որտեղ*

$$c = \frac{(1 - \log 2)\delta^2}{4} - \frac{\log(\frac{42e}{\delta})}{C} :$$

**Թեորեմ:**

*Եթե որ $A$ մատրիցը բավարարում է 2r-RIP պայմանին և նրա RIP հաստատունը հավասար է $\delta$-ի, ապա*

$$M \geq Cr \log \frac{N}{r}$$

*որտեղ $C$ հաստատունը կախված է միայն $\delta$-ից:*

**Թեորեմ: (Candés, Tao, Romberg, 2006)**

*Դիցուք $A$-ն պատահական մատրից է, որի գործակիցները անկախ պատահական մեծություններ $N(0,1)$ բաշխումով: Այդ դեպքում $M \geq Cr \log \frac{N}{r}$-ի համար, որտեղ $C > 0$—ն ցանկացած հաստատուն է, $\frac{1}{\sqrt{M}}A$ մատրիցը բավարարում է r-RIP պայմանը $1 - e^{-cM}$ հավանականությամբ, որտեղ*

$$c = \frac{(1 - \log 2)\delta^2}{4} - \frac{\log(\frac{42e}{\delta})}{C}:$$

- Այսինքն, ինչքան մեծ վերցնենք $M$-ը այնքան ավելի հավանական է, որ պատահական մատրիցը կբավարարի $RIP$ պայմանը, ընդ որում այդ հավանականությունը մոտենում է 1-ի էքսպոնենցիալ արագությամբ $M$-ի աճման հետ:

## Բովանդակություն

# Եզրահանգում

## Եզրահանգում

- Սեղմ նմուշառության խնդիրը ընդհանուր մատրիցների դեպքում հաշվողական տեսանկյունից անհնար էր լուծել, սակայն որոշ մատրիցների համար սեղմ նմուշառության խնդիրը $\ell_1$ մինիմիզացիայի միջոցով բերվում էր գծային օպտիմիզացիայի խնդրի, որի լուծման համար բազմաթիվ թվային մեթոդներ գոյություն ունեն

# Եզրահանգում

- Սեղմ նմուշառության խնդիրը ընդհանուր մատրիցների դեպքում հաշվողական տեսանկյունից անհնար էր լուծել, սակայն որոշ մատրիցների համար սեղմ նմուշառության խնդիրը $\ell_1$ մինիմիզացիայի միջոցով բերվում էր գծային օպտիմիզացիայի խնդրի, որի լուծման համար բազմաթիվ թվային մեթոդներ գոյություն ունեն
- Թվային մեթոդներով նկատեցինք, որ պատահական մատրիցների համար, որոնք ունեն անկախ Գաուսյան բաշխումով գործակիցներ, այդ պայմանը տեղի ուներ, և այդ փաստի մաթեմատիկական մեկնաբանությունը տրվեց RIP պայմանի միջոցով

## Եզրահանգում

- Սեղմ նմուշառության խնդիրը ընդհանուր մատրիցների դեպքում հաշվողական տեսանկյունից անհնար էր լուծել, սակայն որոշ մատրիցների համար սեղմ նմուշառության խնդիրը $\ell_1$ մինիմիզացիայի միջոցով բերվում էր գծային օպտիմիզացիայի խնդրի, որի լուծման համար բազմաթիվ թվային մեթոդներ գոյություն ունեն
- Թվային մեթոդներով նկատեցինք, որ պատահական մատրիցների համար, որոնք ունեն անկախ Գաուսյան բաշխումով գործակիցներ, այդ պայմանը տեղի ուներ, և այդ փաստի մաթեմատիկական մեկնաբանությունը տրվեց RIP պայմանի միջոցով
- Ժամանակի սղության պատճառով մենք բաց թողեցին կարևոր թեմաներ ինչպիսիք են սեղմ նմուշառության լուծման այլ մեթոդները (կոմբինատոր, գրիդի և այլն),որոնց որոշը ավելի կիրառելի են քան $\ell_1$ մինիմիզացիան:

## Եզրահանգում

- Սեղմ նմուշառության խնդիրը ընդհանուր մատրիցների դեպքում հաշվողական տեսանկյունից անհնար էր լուծել, սակայն որոշ մատրիցների համար սեղմ նմուշառության խնդիրը $\ell_1$ մինիմիզացիայի միջոցով բերվում էր գծային օպտիմիզացիայի խնդրի, որի լուծման համար բազմաթիվ թվային մեթոդներ գոյություն ունեն
- Թվային մեթոդներով նկատեցինք, որ պատահական մատրիցների համար, որոնք ունեն անկախ Գաուսյան բաշխումով գործակիցներ, այդ պայմանը տեղի ուներ, և այդ փաստի մաթեմատիկական մեկնաբանությունը տրվեց RIP պայմանի միջոցով
- Ժամանակի սղության պատճառով մենք բաց թողեցին կարևոր թեմաներ ինչպիսիք են սեղմ նմուշառության լուծման այլ մեթոդները (կոմբինատոր, գրիդի և այլն),որոնց որոշը ավելի կիրառելի են քան $\ell_1$ մինիմիզացիան:
- Չխոսեցինք նաև վերակազնման ճշտության մասին, երբ չափումներում առկա է աղմուկ կամ վեկտորը նոսր չէ սակայն գրեթե նոսր է

## Եզրահանգում

- Սեղմ նմուշառության խնդիրը ընդհանուր մատրիցների դեպքում հաշվողական տեսանկյունից անհնար էր լուծել, սակայն որոշ մատրիցների համար սեղմ նմուշառության խնդիրը $\ell_1$ մինիմիզացիայի միջոցով բերվում էր գծային օպտիմիզացիայի խնդրի, որի լուծման համար բազմաթիվ թվային մեթոդներ գոյություն ունեն
- Թվային մեթոդներով նկատեցինք, որ պատահական մատրիցների համար, որոնք ունեն անկախ Գաուսյան բաշխումով գործակիցներ, այդ պայմանը տեղի ուներ, և այդ փաստի մաթեմատիկական մեկնաբանությունը տրվեց RIP պայմանի միջոցով
- Ժամանակի սղության պատճառով մենք բաց թողեցին կարևոր թեմաներ ինչպիսիք են սեղմ նմուշառության լուծման այլ մեթոդները (կոմբինատոր, գրիդի և այլն),որոնց որոշը ավելի կիրառելի են քան $\ell_1$ մինիմիզացիան:
- Չխոսեցինք նաև վերակազնման ճշտության մասին, երբ չափումներում առկա է աղմուկ կամ վեկտորը նոսր չէ սակայն գրեթե նոսր է
- Բազմաթիվ այլ թեմաների, որոնց կարելի է ծանոթանալ հղված աղբյուրներից:

Շնորհակալություն: