Սեղմ նմուշառություն: II

Արմենակ Պետրոսյան

«Մաթեմատիկա և Կիրառություններ» 4-րդ ամառային դպրոց

28 Հունիսի, 2017 թ.
Ծաղկաձոր

VANDERBILT UNIVERSITY

Բովանդակություն

Հիշեցում երեկվանից

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Նվազագույն չափումների քանակը

Սեղմ նմուշառության խնդիրը NP բարդ է

Եզրահանգում

Հիշեցում երեկվանից

Նմուշառություն → Սեղմում → Վերականգնում

Հիշեցում երեկվանից

$\boxed{\text{Նմուշառություն}} \rightarrow \boxed{\text{Սեղմում}} \rightarrow \boxed{\text{Վերականգնում}}$

Նպատակ՝

- Նվազեցնել սկզբնական չափումներ քանակը:

Հիշեցում երեկվանից

Նմուշառություն → Սեղմում → Վերականգնում

Նպատակ՝

- Նվազեցնել սկզբնական չափումներ քանակը:

Սեղմ նմուշառություն → Վերականգնում

Մագնիսառեզոնանսային տոմոգրաֆիա

Եզրահանգում

- Վեկտորների որոշ դասերի համար (օրինակ՝ թվ. պատկերներ, թվ. ձայնագրություններ) կարելի է գտնել համապատասխան բազիսներ որտեղ նրանք ունեն գրեթե նոսր վերլուծություն:

Եզրահանգում

- Վեկտորների որոշ դասերի համար (օրինակ՝ թվ. պատկերներ, թվ. ձայնագրություններ) կարելի է գտնել համապատասխան բազիսներ որտեղ նրանք ունեն գրեթե նոսր վերլուծություն:

Հարց

- Կարելի է արդյո՞ք կտրուկ քչացնել չափումների քանակը, բայց միևնույն է ստանալ գրեթե ճշգրիտ վերականգնում

Բովանդակություն

Հիշեցում երեկվանից

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Նվազագույն չափումների քանակը

Սեղմ նմուշառության խնդիրը NP բարդ է

Եզրահանգում

Գծային չափում

Սահմանում:
$\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *ֆունկցիայի համար* $\Phi(\vec{x}) = b$ *թիվը կանվանենք* $\vec{x}$ *վեկտորի* ***չափում****:*

Գծային չափում

Սահմանում:
$\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *ֆունկցիայի համար* $\Phi(\vec{x}) = b$ *թիվը կանվանենք* $\vec{x}$ *վեկտորի* ***չափում***:

- Երբեմն նաև փվյալ կամ նմուշ անվանումն է օգտագործվում:

Սահմանում:
$\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ֆունկցիայի համար $\Phi(\vec{x}) = b$ թիվը կանվանենք $\vec{x}$ վեկտորի ***չափում****:*

- Երբեմն նաև փվյալ կամ նմուշ անվանումն է օգտագործվում:

Սահմանում:
$\Phi : \mathbb{R}^N \to R$ չափումը կոչվում է ***գծային****, եթե*

$$\Phi(\vec{x}) = a_1 \cdot x_1 + \cdots + a_N \cdot x_N,$$

ցանկացած $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$-ի համար, որտեղ $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ ինչ-որ ֆիքսված թվեր են:

Օրինակ

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$:-ի միջին թվաբանականը՝

$$\frac{x_1 + \cdots + x_N}{N}$$

գծային չափում է:

Եթե ունենք $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորի մի քանի պարբեր գծային չափումներ

$$\begin{gathered}
\Phi_1(\vec{x}) = a_{1,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{1,N} \cdot x_N = b_1 \\
\Phi_2(\vec{x}) = a_{2,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{2,N} \cdot x_N = b_2 \\
\vdots \\
\Phi_M(\vec{x}) = a_{M,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{M,N} \cdot x_N = b_M
\end{gathered}$$

ապա դրանք կարող ենք գրել մատրիցային արտադրյալի տեսքով որպես

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,N} \\ & \vdots & \\ a_{M,1} & \cdots & a_{M,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}$$

կամ

$$A\vec{x} = \vec{b} :$$

Սահմանում:

Կասենք, որ $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորը $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N\}$ օրթոնորմալ բազիսում ունի r-նոսր վերլուծություն, եթե

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{N} \langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle \vec{e}_k$$

վերլուծության մեջ ոչ զրոյական գործակիցների քանակը չի գերազանցում r-ը:

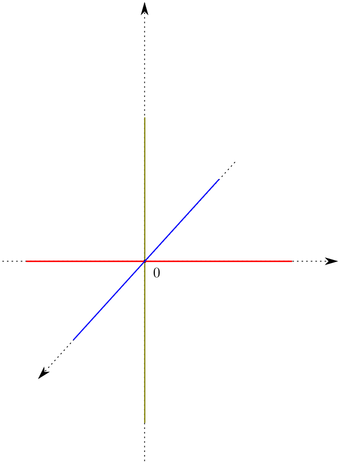
Սահմանում:
Կասենք, որ $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորը $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N\}$ օրթոնորմալ բազիսում ունի r-նոսր վերլուծություն, եթե

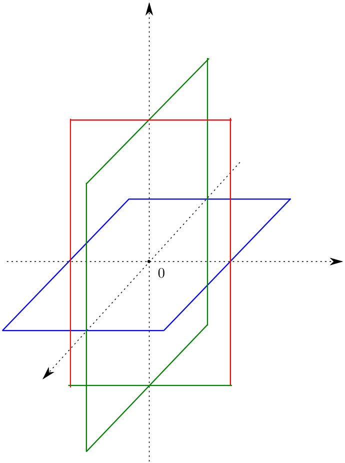
$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{N} \langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle \vec{e}_k$$

վերլուծության մեջ ոչ զրոյական գործակիցները քանակը չի գերազանցում r-ը:

- $\mathbb{R}^N$-ում $e_k = (0, \ldots, \overset{k}{1}, \ldots, 0)^T$, $k = 1, \ldots, N$ բազիսում r-նոսր վեկտորների բազմությունը նշանակենք Σ_r^N-ով:

Σ_1^3 և Σ_2^3 բազմությունները





Սեղմ նմուշառության խնդրի ձևակերպումը

Սեղմ նմուշառության խնդրի ձևակերպումը

- Ունենք քիչ քանակությամբ չափումներ

Սեղմ նմուշառության խնդրի ձևակերպումը

- Ունենք քիչ քանակությամբ չափումներ
- Գիտենք, որ վեկտորը ունի նոսր վերլուծություն փվյալ բազիսում

Վերակազնել վեկտորը:

Սեղմ նմուշառության խնդրի ձևակերպումը

- Ունենք քիչ քանակությամբ չափումներ
- Գիտենք, որ վեկտորը ունի նոսր վերլուծություն փվյալ բազիսում

Վերականգնել վեկտորը:

Այլ կերպ՝ (մաթեմատիկորեն)

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

Սեղմ նմուշառության խնդրի ձևակերպումը

- Ունենք քիչ քանակությամբ չափումներ
- Գիտենք, որ վեկտորը ունի նոսր վերլուծություն փվյալ բազիսում

Վերակազմել վեկտորը:

Այլ կերպ՝ (մաթեմատիկորեն)

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

- A-ն $M \times N$ մատրից է ($M << N$), $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$
- $\vec{x}$-ը r-նոսր է $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N\}$ բազիսում

Սեղմ նմուշառության խնդրի ձևակերպումը

- Ունենք քիչ քանակությամբ չափումներ
- Գիտենք, որ վեկտորը ունի նոսր վերլուծություն փվյալ բազիսում

Վերակազմել վեկտորը:

Այլ կերպ՝ (մաթեմատիկորեն)

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

- A-ն $M \times N$ մատրից է $(M << N)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$
- $\vec{x}$-ը r-նոսր է $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N\}$ բազիսում

Գտնել $\vec{x}$-ը:

Դիպողություն 1:

Դիպողություն 1:

- Իրական կյանքում ինչպիսի բազիս էլ վերցնենք միևնույն է գործակիցների մեծ մասը լինելու են ոչ 0-ական, սակայն նրանցից շատերը կլինեն 0-ին մոտ

Դիտողություն 1:

- Իրական կյանքում ինչպիսի բազիս էլ վերցնենք միևնույն է գործակիցների մեծ մասը լինելու են ոչ 0-ական, սակայն նրանցից շատերը կլինեն 0-ին մոտ
- Կարող ենք համարել, որ 0 են, բայց վերակազմված վեկտորը իրական վեկտորից որոշակի կերպով կտարբերվի

Դիպողություն 1:

- Իրական կյանքում ինչպիսի բազիս էլ վերցնենք միևնույն է գործակիցների մեծ մասը լինելու են ոչ 0-ական, սակայն նրանցից շատերը կլինեն 0-ին մոտ
- Կարող ենք համարել, որ 0 են, բայց վերակազմված վեկտորը իրական վեկտորից որոշակի կերպով կտարբերվի
- Իդեալական դեպքում այդ տարբերությունը կլինի չնչին և աննկատելի

Դիպողություն 2:

Դիպողություն 2:

- Առանց ընդհանրությունը խախտելու

$$e_k = [0, \dots, \overset{k}{1}, \dots, 0]^T, \; k = 1, \dots, N$$

Դիտողություն 2:

- Առանց ընդհանրությունը խախտելու

$$e_k = [0, \dots, \overset{k}{1}, \dots, 0]^T, \; k = 1, \dots, N$$

- Հակառակ դեպքում կնայենք

$$\tilde{A}\vec{z} = \vec{b},$$

որտեղ $\tilde{A} = A \cdot [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N]$ և $\vec{z} = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N]^T \cdot \vec{x}$

Դիտողություն 2:

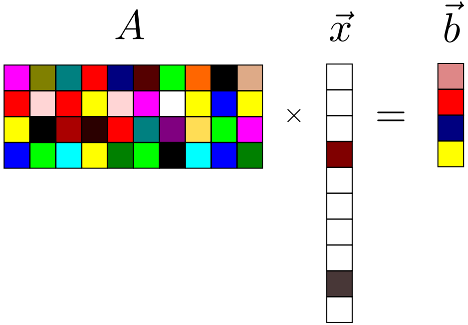
- Առանց ընդհանրությունը խախտելու

$$e_k = [0, \dots, \overset{k}{1}, \dots, 0]^T, \; k = 1, \dots, N$$

- Հակառակ դեպքում կնայենք

$$\tilde{A}\vec{z} = \vec{b},$$

որտեղ $\tilde{A} = A \cdot [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N]$ և $\vec{z} = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N]^T \cdot \vec{x}$



Դիպողություն 3:

Դիպողություն 3:

- Եթե հայտնի չլիներ, որ $\vec{x}$-ը նոսր է, պետք է առնվազն լինի $M = N$, հակառակ դեպքում $\vec{b} = A\vec{x}$-ի համար $A\vec{z} = \vec{b}$ ունի անթիվ քանակությամբ լուծումներ

Դիպողություն 4:

Դիտողություն 4:

- Եթե իմանայինք, թե $\vec{x}$-ի որ գործակիցներն են զրոյից տարբեր, ապա միայն $M = r$ քանակությամբ չափում անհրաժեշտ կլինի r-նոսր $\vec{x}$ վեկտորը գտնելու համար

Դիտողություն 4:

- Եթե իմանայինք, թե $\vec{x}$-ի որ գործակիցներն են զրոյից տարբեր, ապա միայն $M = r$ քանակությամբ չափում անհրաժեշտ կլինի r-նոսր $\vec{x}$ վեկտորը գտնելու համար
- Իրոք, եթե $\vec{x}$-ի ոչ զրոյական գործակիցները $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$-ն են, ապա

$$Ax = (A[:, i_1], \ldots, A[:, i_r]) \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} = \vec{b}$$

Դիտողություն 4:

- Եթե իմանայինք, թե $\vec{x}$-ի որ գործակիցներն են զրոյից տարբեր, ապա միայն $M = r$ քանակությամբ չափում անհրաժեշտ կլինի r-նոսր $\vec{x}$ վեկտորը գտնելու համար
- Իրոք, եթե $\vec{x}$-ի ոչ զրոյական գործակիցները $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$-ն են, ապա

$$Ax = (A[:, i_1], \ldots, A[:, i_r]) \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} = \vec{b}$$

- $(A[:, i_1], \ldots, A[:, i_r])$ մատրիցը քառակուսային է, և հետևաբար կարող ենք նայել նրա հակադարձը (վերցնելով այնպես, որ հակադարձը գոյություն ունի) և այդտեղից գտնել $\vec{x}$-ը

Դիտողություն 4:

- Եթե իմանայինք, թե $\vec{x}$-ի որ գործակիցներն են զրոյից տարբեր, ապա միայն $M = r$ քանակությամբ չափում անհրաժեշտ կլինի r-նոսր $\vec{x}$ վեկտորը գտնելու համար
- Իրոք, եթե $\vec{x}$-ի ոչ զրոյական գործակիցները $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$-ն են, ապա

$$Ax = (A[:, i_1], \ldots, A[:, i_r]) \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} = \vec{b}$$

- $(A[:, i_1], \ldots, A[:, i_r])$ մատրիցը քառակուսային է, և հետևաբար կարող ենք նայել նրա հակադարձը (վերցնելով այնպես, որ հակադարձը գոյություն ունի) և այդտեղից գտնել $\vec{x}$-ը
- Սակայն, սեղմ նմուշառության խնդրում $\vec{x}$-ի ոչ զրոյական գործակիցների ինդեքսները հայտնի չեն:

Բովանդակություն

Հիշեցում երեկվանից

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Նվազագույն չափումների քանակը

Սեղմ նմուշառության խնդիրը NP բարդ է

Եզրահանգում

Հայտնի է միայն $\vec{b} = A\vec{x}$-ը, որտեղ $\vec{x}$-ը անհայտ r-նոսր վեկտոր է:

Հայտնի է միայն $\vec{b} = A\vec{x}$-ը, որտեղ $\vec{x}$-ը անհայտ r-նոսր վեկտոր է:

- $\vec{x}$-ը միարժեքորեն գտնվում է $\vec{b}$-ից, այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$$

ինյեկտիվ է:

Հայտնի է միայն $\vec{b} = A\vec{x}$-ը, որտեղ $\vec{x}$-ը անհայտ r-նոսր վեկտոր է:

- $\vec{x}$-ը միարժեքորեն գտնվում է $\vec{b}$-ից, այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$$

ինյեկտիվ է:

Թեորեմ:

Հետևյալ պայմանները համարժեք են

Հայտնի է միայն $\vec{b} = A\vec{x}$-ը, որտեղ $\vec{x}$-ը անհայտ r-նոսր վեկտոր է:

- $\vec{x}$-ը միարժեքորեն գտնվում է $\vec{b}$-ից, այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$$

ինյեկտիվ է:

Թեորեմ:

Հետևյալ պայմանները համարժեք են

(1) $A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$ *ինյեկտիվ է,*

Հայտնի է միայն $\vec{b} = A\vec{x}$-ը, որտեղ $\vec{x}$-ը անհայտ r-նոսր վեկտոր է:

- $\vec{x}$-ը միարժեքորեն գտնվում է $\vec{b}$-ից, այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$$

ինյեկտիվ է:

Թեորեմ:

Հետևյալ պայմանները համարժեք են

(1) $A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$ *ինյեկտիվ է,*

(2) $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$,

Հայտնի է միայն $\vec{b} = A\vec{x}$-ը, որտեղ $\vec{x}$-ը անհայտ r-նոսր վեկտոր է:

- $\vec{x}$-ը միարժեքորեն գտնվում է $\vec{b}$-ից, այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$$

ինյեկտիվ է:

Թեորեմ:

Հետևյալ պայմանները համարժեք են

(1) $A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$ *ինյեկտիվ է,*

(2) $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$,

(3) A*-ի ցանկացած* $2r$ *սյուն գծորեն անկախ են:*

Հայտնի է միայն $\vec{b} = A\vec{x}$-ը, որտեղ $\vec{x}$-ը անհայտ r-նոսր վեկտոր է:

- $\vec{x}$-ը միարժեքորեն գտնվում է $\vec{b}$-ից, այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$$

ինյեկտիվ է:

Թեորեմ:

Հետևյալ պայմանները համարժեք են

(1) $A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$ *ինյեկտիվ է,*

(2) $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$,

(3) *A-ի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են:*

Հետևանք:

Եթե $A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$-ը ինյեկտիվ է, ապա $M \geq 2r$:

Ապացույց:

$$A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M\text{-ն ինյեկտիվ է} \Rightarrow \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$$

Ենթադրենք $\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$: Գրենք $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, որտեղ $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \Sigma_r^N$:
Հետևաբար

$$A\vec{x} = A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = 0$$

և A-ի r-նոսր վեկտորների վրա նոսրությունից $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$, որտեղից
$\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = 0$:

Ապացույց:

$A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$-ն ինյեկտիվ է $\Rightarrow \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$

Ենթադրենք $\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$: Գրենք $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, որտեղ $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \Sigma_r^N$: Հետևաբար

$$A\vec{x} = A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = 0$$

և A-ի r-նոսր վեկտորների վրա նոսրությունից $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$, որտեղից $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = 0$:

$A : \Sigma_r^N \to \mathbb{R}^M$-ն ինյեկտիվ է $\Leftarrow \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$

Դիցուք

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \Sigma_r^N \text{ և } Ax_1 = Ax_2 :$$

Այդ դեպքում $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \Sigma_{2r}^N$ և

$$A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = 0,$$

հետևաբար $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$ և մեր պայմանից $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = 0$ կամ $\vec{x}_1 = \vec{x}_2 = 0$:

Ապացույց: (շրնկ)

$\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^{N} = \{0\} \Rightarrow A$-ի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են:

Ենթադրենք
$$c_1 A[:, i_1] + \cdots + c_{2s} A[:, i_{2r}] = 0 : \quad (1)$$

Դիցուք $\vec{x}$ վեկտորի i_k-րդ գործակիցը հավասար է c_k-ի $k = 1, \ldots, 2r$, իսկ մնացյալ գործակիցները՝ 0-ի:

$$(2) \Leftrightarrow A\vec{x} = 0 :$$

$\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^{N}$, հետևաբար $\vec{x} = 0$ ինչը նշանակում է, որ $c_1 = \cdots = c_{2r} = 0$:

Ապացույց: (շրնկ)

$\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\} \Rightarrow A$-ի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են:

Ենթադրենք

$$c_1 A[:, i_1] + \cdots + c_{2s} A[:, i_{2r}] = 0 : \quad (1)$$

Դիցուք $\vec{x}$ վեկտորի i_k-րդ գործակիցը հավասար է c_k-ի $k = 1, \ldots, 2r$, իսկ մնացյալ գործակիցները՝ 0-ի:

$$(2) \Leftrightarrow A\vec{x} = 0 :$$

$\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$, հետևաբար $\vec{x} = 0$ ինչը նշանակում է, որ $c_1 = \cdots = c_{2r} = 0$:

$\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\} \Leftarrow A$-ի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են:

Ենթադրենք $\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$ և $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{2r}}$-ը $\vec{x}$-ի ոչ-զրոյական գործակիցներն են: Նկատենք, որ

$$A\vec{x} = x_{i_1} A[:, i_1] + \cdots + x_{i_{2r}} A[:, i_{2r}] \quad (2)$$

Քանի որ $\vec{x} \in \ker A$, ուստի $Ax = 0$ և սյուների գծորեն անկախությունից $x_{i_1} = \cdots = x_{i_{2r}} = 0$, հետևաբար $\vec{x} = 0$:

Օրինակ որում $M = 2r$

Օրինակ որում $M = 2r$

Դիտարկենք Վանդերմոնդի մատրիցը՝

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N \\ & \vdots & & \\ \alpha_1^{2r-1} & \alpha_2^{2r-1} & \cdots & \alpha_N^{2r-1} \end{pmatrix}:$$

Օրինակ որում $M = 2r$

Դիտարկենք Վանդերմոնդի մատրիցը՝

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N \\ & \vdots & & \\ \alpha_1^{2r-1} & \alpha_2^{2r-1} & \cdots & \alpha_N^{2r-1} \end{pmatrix}:$$

- $\det(V[:, i_1], \ldots, V[:, i_{2r}]) = \prod_{k<j} (a_{i_j} - a_{i_k})$

Օրինակ որում $M = 2r$

Դիտարկենք Վանդերմոնդի մատրիցը՝

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N \\ & \vdots & & \\ \alpha_1^{2r-1} & \alpha_2^{2r-1} & \cdots & \alpha_N^{2r-1} \end{pmatrix}:$$

- $\det(V[:, i_1], \ldots, V[:, i_{2r}]) = \prod_{k<j} (a_{i_j} - a_{i_k})$
- V-ի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են, եթե $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ բոլորը իրարից տարբեր են

Բովանդակություն

Հիշեցում երեկվանից

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Նվազագույն չափումների քանակը

Սեղմ նմուշառության խնդիրը NP բարդ է

Եզրահանգում

- Անգամ եթե թեորեմի պայմանները բավարարված են և r-նոսր լուծումը միակն է, թեորեմը չի ասում, թե ինչպես գտնել $\vec{x}$-ը:

- Անգամ եթե թեորեմի պայմանները բավարարված են և r-նոսր լուծումը միակն է, թեորեմը չի ասում, թե ինչպես գտնել $\vec{x}$-ը:

Պարզամիտ մոտեցում

- Անգամ եթե թեորեմի պայմանները բավարարված են և r-նոսր լուծումը միակն է, թեորեմը չի ասում, թե ինչպես գտնել $\vec{x}$-ը:

Պարզամիտ մոտեցում

Եթե հայտնի լիներ, թե որ գործակիցներ են ոչ զրոյական, ապա կկարողանանք գտնել $\vec{x}$-ը:

- Անգամ եթե թեորեմի պայմանները բավարարված են և r-նոսր լուծումը միակն է, թեորեմը չի ասում, թե ինչպես գտնել $\vec{x}$-ը:

Պարզամիտ մոտեցում

Եթե հայտնի լիներ, թե որ գործակիցներ են ոչ զրոյական, ապա կկարողանանք գտնել $\vec{x}$-ը:

- Դիտարկել ինդեքսների $\{1, \ldots, N\}$ բազմության յուրաքանչյուր r էլեմենտանոց $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ ենթաբազմություն

- Անգամ եթե թեորեմի պայմանները բավարարված են և r-նոսր լուծումը միակն է, թեորեմը չի ասում, թե ինչպես գտնել $\vec{x}$-ը:

Պարզամիտ մոտեցում

Եթե հայտնի լիներ, թե որ գործակիցներ են ոչ զրոյական, ապա կկարողանանք գտնել $\vec{x}$-ը:

- Դիտարկել ինդեքսների $\{1, \ldots, N\}$ բազմության յուրաքանչյուր r էլեմենտանոց $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ ենթաբազմություն
- Գտնել այն միակ I-ը, որի համար

$$(A[:, i_1], \ldots, A[:, i_r]) \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} = \vec{b}$$

հավասարումը ունի լուծում

- Անգամ եթե թեորեմի պայմանները բավարարված են և r-նոսր լուծումը միակն է, թեորեմը չի ասում, թե ինչպես գտնել $\vec{x}$-ը:

Պարզամիտ մոտեցում

Եթե հայտնի լիներ, թե որ գործակիցներն են ոչ զրոյական, ապա կկարողանանք գտնել $\vec{x}$-ը:

- Դիտարկել ինդեքսների $\{1, \ldots, N\}$ բազմության յուրաքանչյուր r էլեմենտանոց $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ ենթաբազմություն
- Գտնել այն միակ I-ը, որի համար
$$(A[:, i_1], \ldots, A[:, i_r]) \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} = \vec{b}$$
հավասարումը ունի լուծում
- Վատագույն դեպքում պետք է լուծել $\binom{N}{r} = \frac{N!}{r!(N-r)!}$ հավասարում

Վաթ լուր

- Ենթադրենք, $N = 1000$, $r = 10$ և յուրաքանչյուր հավասարումը լուծելու համար պահանջվում է 10^{-10} վայրկյան

Վատ լուր

- Ենթադրենք, $N = 1000$, $r = 10$ և յուրաքանչյուր համասարումը լուծելու համար պահանջվում է 10^{-10} վայրկյան
- Հաջորդաբար լուծելու համար կպահանջվի

$$10^{-10}\frac{1000!}{10!(990)!} = 10^{-10}\frac{991}{1}\cdots\frac{1000}{10}$$

$$\geq 10^{-10}\left(\frac{1000}{10}\right)^{10} = 10^{10} \text{ վայրկյան} \geq 300 \text{ տարի}$$

Էլ ավելի վատ լուր

Պարզվում է, պատճառը միայն մեր մոտեցման պարզամիտ լինելու մեջ չէ, այլ այս խնդիրը NP-բարդ է

Էլ ավելի վատ լուր

Պարզվում է, պատճառը միայն մեր մոտեցման պարզամիտ լինելու մեջ չէ, այլ այս խնդիրը NP-բարդ է

- Որոշ A-երի դեպքերում կարող է բազմանդամային արագությամբ ալգորիթմ գոյություն ունենալ

Էլ ավելի վատ լուր

Պարզվում է, պատճառը միայն մեր մոտեցման պարզամիտ լինելու մեջ չէ, այլ այս խնդիրը NP-բարդ է

- Որոշ A-երի դեպքերում կարող է բազմանդամային արագությանբ ալգորիթմ գոյություն ունենալ
- Սակայն ընդհանուր մատրիցների համար բազմանդամային արագությանբ ալգորիթմ գոյություն չունի

Բովանդակություն

Հիշեցում երեկվանից

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Նվազագույն չափումների քանակը

Սեղմ նմուշառության խնդիրը NP բարդ է

Եզրահանգում

Եզրահանգում

- Ստացանք նոր վեկտորը վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ

Եզրահանգում

- Ստացանք նոսր վեկտորը վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ
- Այդ պայմանները ստուգելը ընդհանուր դեպքում դժվար է

Եզրահանգում

- Սպացանք նոսր վեկտորը վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ
- Այդ պայմանները ստուգելը ընդհանուր դեպքում դժվար է
- Անգամ այն դեպքերում, երբ այդ պայմանները բավարարված էին, հաշվողական տեսանկյունից որևէ արդյունավետ մեթոդներ չկան խնդիրը լուծելու համար:

Եզրահանգում

- Ստացանք նոր վեկտորը վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ
- Այդ պայմանները ստուգելը ընդհանուր դեպքում դժվար է
- Անգամ այն դեպքերում, երբ այդ պայմանները բավարարված էին, հաշվողական տեսանկյունից որևէ արդյունավետ մեթոդներ չկան խնդիրը լուծելու համար:

Վաղը կդիտարկենք մի մեթոդ, որ հնարավորություն է տալիս օպտիմալ կերպով լուծել խնդիրը, սակայն չափումների մատրիցից լրացուցիչ պայմաններ պետք է պահանջենք:

Շնորհակալություն: