

Սեղմ նմուշառություն: I

Արմենակ Պետրոսյան

«Մաթեմատիկա և Կիրառություններ» 4-րդ ամառային դպրոց

27 Հունիսի, 2017 թ.
Ծաղկաձոր

VANDERBILT  UNIVERSITY



S. Foucart and H. Rauhut.

A mathematical introduction to compressive sensing
Basel: Birkhäuser, Vol. 1, No. 3 (2013).



R. Baraniuk et al.

An introduction to compressive sensing
Connexions e-textbook (2011).

Բովանդակություն

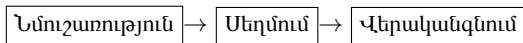
Ներածություն

Նախնական մաթեմատիկական հասկացություններ

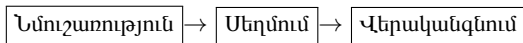
Օրթոնորմալ բազիսում վեկտորի սեղմում

Թվային ազդանշանների մշակում

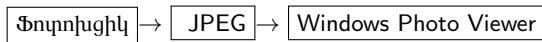
Թվային ազդանշանների մշակում



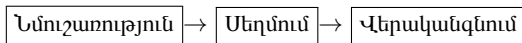
Թվային ազդանշանների մշակում



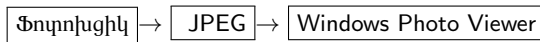
Օրինակ՝



Թվային ազդանշանների մշակում



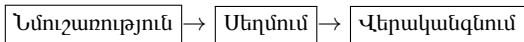
Օրինակ՝



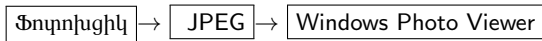
Ավելորդ չափումներ՝

- ▶ Ժամանակաբար
- ▶ Նիշողության վաւնում

Թվային ազդանշանների մշակում



Օրինակ՝



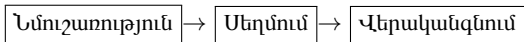
Ավելորդ չափումներ՝

- ▶ Ժամանակաբար
- ▶ Հիշողության վաւրնում

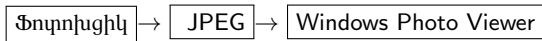
Նպասակ՝

- ▶ Նվազեցնել չափումներ քանակը:

Թվային ազդանշանների մշակում



Օրինակ՝

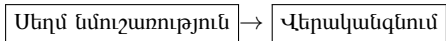


Ավելորդ չափումներ՝

- ▶ Ժամանակաբար
- ▶ Նիշողության վարկում

Նպարակ՝

- ▶ Նվազեցնել չափումներ քանակը:



Մագնիսաբեզոնանային պոմոգրաֆիա



Compressed Sensing Cardiac Cine

Beyond speed. Beyond breath-holds.

Overview Features & Benefits



Compressed Sensing Cardiac Cine
Beyond speed. Beyond breath-holds.

With our disruptive speed technology – Compressed Sensing – you can accelerate MRI acquisition by a factor of up to 10, with no loss in image quality. This is possible, as we acquire only a fraction of the image data and generate high-resolution images with iterative reconstruction afterwards – based on our award-winning algorithm for Compressed Sensing.

Due to the extremely fast acquisition, Compressed Sensing Cardiac Cine opens up Cardiac MRI to arrhythmic and dyspneic patients.

- Acquire free-breathing, high-resolution Cardiac Cine images
- Capture the whole cardiac cycle for precise quantification
- Expand patient population eligible for cardiac MRI

With our disruptive speed technology – Compressed Sensing – you can accelerate MRI acquisition by a factor of up to 10, with no loss in image quality. This

Բովանդակություն

Ներածություն

Նախնական մաթեմատիկական հասկացություններ

Օրթոնորմալ բազիսում վեկտորի սեղմում

\mathbb{R}^N փարածությունում

\mathbb{R}^N փարածությունում

► Վեկտորի նորմ

\mathbb{R}^N փարածությունում

- ▶ Վեկտորի նորմ
- ▶ Սկալյար արտադրյալ

\mathbb{R}^N փարածությունում

- ▶ Վեկտորի նորմ
- ▶ Սկալյար արտադրյալ
- ▶ Օրթոնորմալ բազիս

\mathbb{R}^N փարածությունում

- ▶ Վեկտորի նորմ
- ▶ Սկալյար արտադրյալ
- ▶ Օրթոնորմալ բազիս
- ▶ Բազիսում վեկտորի ներկայացում

Բովանդակություն

Ներածություն

Նախնական մաթեմատիկական հասկացություններ

Օրթոնորմալ բազիսում վեկտորի սեղմում

Սահմանում:

$\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^N$ բազիսում

$$\vec{f} = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^N$$

վեկորորի ϵ -սեղմում կոչում է հետևյալ վեկորորը

$$\vec{f}_\epsilon = \sum_{k: |c_k| \geq \epsilon} c_k \mathbf{e}_k :$$

Սահմանում:

$\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^N$ բազիսում

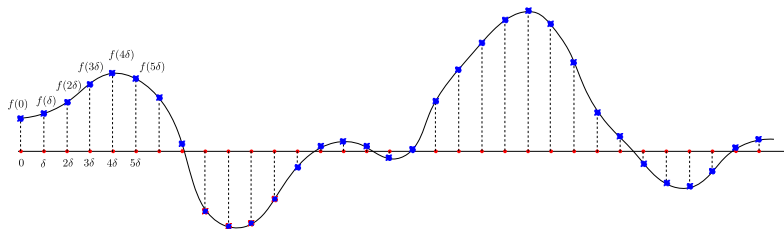
$$\vec{f} = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^N$$

վեկտորի ϵ -սեղմում կոչում է հետևյալ վեկտորը

$$\vec{f}_\epsilon = \sum_{k: |c_k| \geq \epsilon} c_k \mathbf{e}_k :$$

(\vec{f} -ի վերլուծությունից հեռացնում (զրոյացնում) ենք այն գործակիցները, որոնք բացարձակ արժեքով փոքր են նախապես որոշված ϵ թվից):

Չայնային ալիք



Թվային ձայնագրիչներում անընդհատ ֆունկցիան թվայնացվում է

$$[f(0), f(\delta), f(2\delta), \dots, f(N\delta)] :$$

Կոսինուսային բազիս

Սահմանում:

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} [1, \dots, 1]$$

u

Կոսինուսային բազիս

Սահմանում:

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} [1, \dots, 1]$$

և

$$e_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[\cos\left(\frac{\pi(2 \cdot 0 + 1)k}{2N}\right), \dots, \cos\left(\frac{\pi(2(N-1) + 1)k}{2N}\right) \right]$$

$k = 1, \dots, N-1$ -ի համար:

Կոսինուսային բազիս

Սահմանում:

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} [1, \dots, 1]$$

u

$$e_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[\cos\left(\frac{\pi(2 \cdot 0 + 1)k}{2N}\right), \dots, \cos\left(\frac{\pi(2(N-1) + 1)k}{2N}\right) \right]$$

$k = 1, \dots, N-1$ -ի համար:

- ▶ Եթե ձայնային ալիքը շար երկար է, ապա այն բաժանում են ավելի փոքր կտորների և յուրաքանչյուր կտորի համար կադարում սեղմում

Կոսինուսային բազիս

Սահմանում:

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} [1, \dots, 1]$$

և

$$e_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[\cos\left(\frac{\pi(2 \cdot 0 + 1)k}{2N}\right), \dots, \cos\left(\frac{\pi(2(N-1) + 1)k}{2N}\right) \right]$$

$k = 1, \dots, N-1$ -ի համար:

- ▶ Եթե ձայնային ալիքը շար երկար է, ապա այն բաժանում են ավելի փոքր կտորների և յուրաքանչյուր կտորի համար կապարում սեղմում
- ▶ Իրականում կիրառվում է մի փոքր մոդիֆիկացված փեսակը

Կոսինուսային բազիս

Սահմանում:

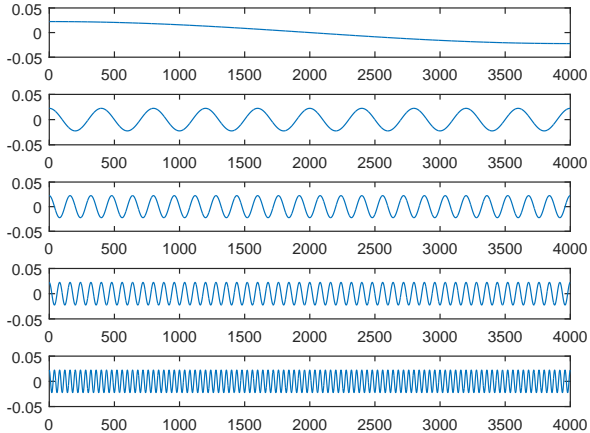
$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} [1, \dots, 1]$$

u

$$e_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[\cos\left(\frac{\pi(2 \cdot 0 + 1)k}{2N}\right), \dots, \cos\left(\frac{\pi(2(N-1) + 1)k}{2N}\right) \right]$$

$k = 1, \dots, N-1$ -ի համար:

- ▶ Եթե ձայնային ալիքը շար երկար է, ապա այն բաժանում են ավելի փոքր կտորների և յուրաքանչյուր կտորի համար կապարում սեղմում
- ▶ Իրականում կիրառվում է մի փոքր մոդիֆիկացված փեսակը
- ▶ Օգտագործվում է նաև պատկերների համար (JPEG)



Նկար: $N = 4000$ և $k = 1, 20, 50, 100, 200$

Թվային պատկերների սեղմում

Թվային պատկերների սեղմում

- ▶ Թվային պատկերների դեպքում դիսկրետացումը կատարվում է երկչափ ցանցի վրա՝ մափրիցի տեսքով

Թվային պատկերների սեղմում

- ▶ Թվային պատկերների դեպքում դիսկրետացումը կատարվում է երկչափ ցանցի վրա՝ մադրիցի փեսքով
- ▶ Գունավոր նկարների համար նման երեք հափ մադրից է պահվում, որոնք ցույց են տալիս կարմիր, դեղին և կապույտ գույների ներդրումը պատկերում

Թվային պատկերների սեղմում

- ▶ Թվային պատկերների դեպքում դիսկրետացումը կատարվում է երկչափ ցանցի վրա՝ մաթրիցի տեսքով
- ▶ Գունավոր նկարների համար նման երեք հապ մաթրից է պահվում, որոնք ցույց են տալիս կարմիր, դեղին և կապույտ գույների ներդրումը պատկերում
- ▶ Մենք կդիտարկենք սև և սպիտակ գույներով պատկերներ, և կպահենք միայն մեկ մաթրից, որի յուրաքանչյուր էլեմենտի արժեքը $[0, 1]$ հատվածից է և ցույց է տալիս, թե համապատասխան պիքսելը ինքան մոխրագույն է (0-ի դեպքում այն սև է, 1-ի դեպքում՝ սպիտակ)

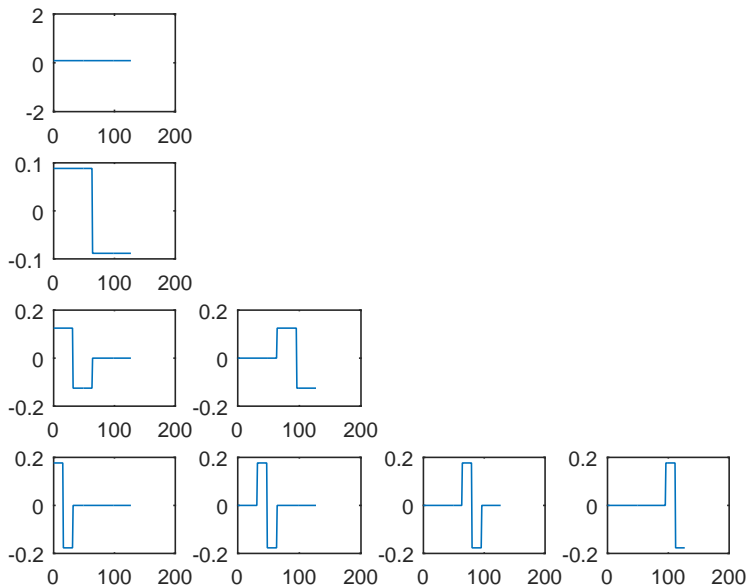
Նաարի միաչափ բազիս

- ▶ Դիցուք $d = 2^N$ և դիտարկենք հետևյալ վեկտորները \mathbb{R}^d -ում

Նաարի միաջամի բազիս

- Դիցուք $d = 2^N$ և դիտարկենք հետևյալ վեկտորները \mathbb{R}^d -ում

$$\begin{aligned}
& h_0 = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}} \overbrace{(1, \dots, 1)}^{2^N} \\
& \quad \downarrow \\
& h_1 = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}} (\overbrace{1, \dots, 1}^{2^{N-1}}, \overbrace{-1, \dots, -1}^{2^{N-1}}) \\
& \swarrow \qquad \searrow \\
& h_2 = \frac{1}{2^{\frac{N-1}{2}}} (\overbrace{1, \dots, 1}^{2^{N-2}}, \overbrace{-1, \dots, -1}^{2^{N-2}}, \overbrace{0, \dots, 0}^{2^{N-1}}) \qquad h_3 = \frac{1}{2^{\frac{N-1}{2}}} (\overbrace{0, \dots, 0}^{2^{N-1}}, \overbrace{1, \dots, 1}^{2^{N-2}}, \overbrace{-1, \dots, -1}^{2^{N-2}}) \\
& \hspace{18em} \text{---} \text{dashed line} \text{---} \\
& \hspace{16em} \swarrow \qquad \searrow \\
& h_{2N-2} = \frac{1}{2} (\overbrace{0, \dots, 0}^{2^{N-4}}, 0, 1, -1, 0, 0) \qquad h_{2N-1} = \frac{1}{2} (\overbrace{0, \dots, 0}^{2^{N-4}}, 0, 0, 1, -1)
\end{aligned}$$



Նկար: $N = 128$ -ի համար Նաարի $h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8$ բազիսային վեկտորների պարկերները

Երկչափ Նաարի բազիս

Երկչափ Նաարի բազիս

- ▶ Երկչափ Նաարի բազիսը սահմանվում է որպես

$$H_{i,j} = h_i^T h_j (= h_i \otimes h_j)$$

Երկչափ Նաարի բազիս

- ▶ Երկչափ Նաարի բազիսը սահմանվում է որպես

$$H_{i,j} = h_i^T h_j (= h_i \otimes h_j)$$

- ▶ Եթե $A \in R^{d \times d}$, ապա նրա գործակիցները երկչափ Նաարի բազիսում փրված են

$$C = [h_0, \dots, h_{2^N-1}] \cdot A \cdot [h_0, \dots, h_{2^N-1}]^T$$

Երկչափ Նաարի բազիս

- ▶ Երկչափ Նաարի բազիսը սահմանվում է որպես

$$H_{i,j} = h_i^T h_j (= h_i \otimes h_j)$$

- ▶ Եթե $A \in R^{d \times d}$, ապա նրա գործակիցները երկչափ Նաարի բազիսում պրված են

$$C = [h_0, \dots, h_{2^N-1}] \cdot A \cdot [h_0, \dots, h_{2^N-1}]^T$$

- ▶ JPEG 2000-ը օգտագործում է երկչափ Նաարի բազիսը թվային ֆոտոպատկերները սեղմելիս

Սահմանում:

Կասենք, որ $\vec{f} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորը $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ օրթոնորմալ բազիսում ունի r -նուր վերլուծություն, եթե

$$f = \sum_{k=1}^N c_k e_k$$

վերլուծության մեջ ոչ զրոյական գործակիցները քանակը g գերազանցում r -ը:

Եզրահանգում

- ▶ Վեկորներն որոշ դասերի համար կարելի է գտնել բազիսներ որպեսզի նրանք ունեն նույն վերլուծություն:

Նախ

- ▶ Կարելի է արդյո՞ք քչացնել չափումների քանակը և չկորցնել ինֆորմացիա:

Շնորհակալություն: