فصل دوم

بسندگی، بسندگی مینیمال و کامل بودن

بسندگی و کامل بودن اساسی‌ترین و مهم‌ترین مباحث در آمار ریاضی هستند. با وجود این‌که این دو خصوصیت مربوط به خانواده‌ی توزیع‌ها، جداگانه و مجرد از هم بررسی می‌شوند، ترکیب این دو خصوصیت مربوط در کنار هم، ویژگی‌ها و نتیجه‌های جالبی را ارائه می‌دهد که در این فصل در حد امکان به آن‌ها اشاره خواهیم کرد.

بسندگی و کامل بودن، نقشی اساسی در نظریه‌ی براوردگرهای ناااریب با کم‌ترین واریانس دارند که در این کتاب به تفصیل از آن‌ها یاد خواهیم کرد.

همان‌گونه که می‌دانیم پایه و اساس هر تجزیه و تحلیل آماری داده‌های خام هستند که مشاهدات ما یعنی x، از یک آزمایش تصادفی است. هدف عمده‌ی **استنباط آماری** کسب اطلاعات، بر اساس داده‌ها، در مورد موضوع یا مسأله‌ی مورد بررسی است. یک جنبه‌ی عمومی از استنباط آماری، تصمیم‌گیری در چگونگی به کارگیری نمونه‌ی تصادفی، یعنی $\boldsymbol{X}$، است. به طور کلی هدف، پیدا کردن تابعی از $\boldsymbol{X}$ مانند $T(\boldsymbol{X})$ است که بتوان جنبه‌های مورد نظر را از داده‌ها به منظور حل مسأله‌ی مورد نظر استخراج کرد. می‌دانیم هر تابع مناسب $T(\boldsymbol{X})$ که بستگی به پارامتر نامعلوم θ نداشته باشد، یک آماره نامیده می‌شود. بدون در نظر گرفتن نوع استنباط، به طور معمول خلاصه و فشرده کردن داده‌ها توسط یک آماره، مانند $T(\boldsymbol{X})$، که شامل تمام اطلاعات موجود در نمونه در مورد θ باشد، مورد علاقه است. این‌جاست که بسندگی معنی و مفهوم پیدا می‌کند.

در این فصل مفاهیم بسندگی، علاوه بر روش‌های معمول، از نقطه‌نظر افرازهایی که روی فضای نمونه ایجاد می‌شود، ارائه خواهد شد. بدین منظور در بخش اول، آماره‌ها و افرازها را مطالعه خواهیم

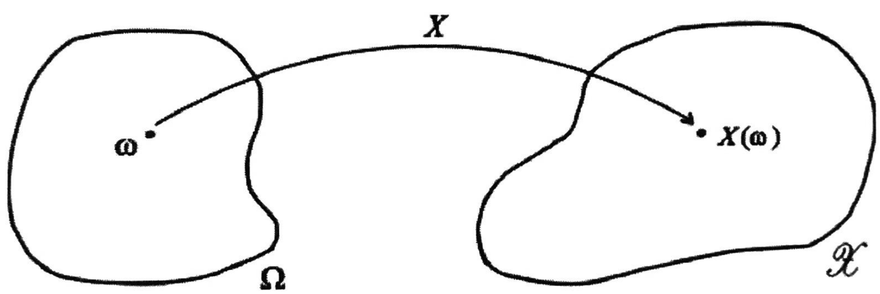
کرد. در بخش دوم، آماره‌های بسنده را بررسی خواهیم کرد. در بخش سوم، آماره‌های بسنده‌ی مینیمال، در بخش چهارم، روش‌های تشخیص بسندگی یا بسندگی مینیمال را مطالعه خواهیم کرد و بالاخره در بخش پنجم به آماره‌های کامل و ویژگی‌ها آن اشاره خواهیم کرد.

۲-۱ آماره‌ها و افرازها

فرض کنید $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ یک فضای احتمال باشد. منظور از یک افراز فضای نمونه‌ای Ω، یک دسته از مجموعه‌های ناسازگار غیر تهی $\{E_\alpha\}$ است به گونه‌ای که

$$\bigcup_\alpha E_\alpha = \Omega$$

متغیر تصادفی X، یک تابع بر روی فضای نمونه‌ای Ω است به گونه‌ای که برای هر مجموعه‌ی بورل B، $X^{-1}(B) \in \mathscr{A}$.



بنابراین Ω دامنه‌ی X و $\mathscr{X}$ برد X است. متغیر تصادفی X یک افراز بر روی Ω ایجاد می‌کند، یعنی اگر

$$E_x = \{\omega : X(\omega) = x\} \subseteq \Omega$$

آن‌گاه برای همه‌ی مقدارهای $x_1 \neq x_2$،

$$E_{x_1} \cap E_{x_2} = \phi, \qquad \bigcup_x E_x = \Omega$$

بنابراین نتیجه‌ی زیر را خواهیم داشت.

نتیجه‌ی ۲-۱ هر متغیر تصادفی X، یک افراز از فضای نمونه‌ای Ω ایجاد می‌کند.

مثال ۲-۱ سه سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر X نمایانگر تعداد شیرها باشد، داریم

$$\Omega = \{HHH, \ldots, TTT\},$$
$$\mathscr{X} = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$$

و

$$E_۰ = (X = ۰) = \{TTT\}$$
$$E_۱ = (X = ۱) = \{HTT, THT, TTH\}$$
$$E_۲ = (X = ۲) = \{HHT, HTH, THH\}$$
$$E_۳ = (X = ۳) = \{HHH\}$$

بنابراین X افراز $\{E_۰, E_۱, E_۲, E_۳\}$ از Ω را ایجاد می‌کند.

آماره‌ی T، در واقع یک تابع بر روی $\mathscr{X}$ (فضای برد متغیر تصادفی X) است. در نتیجه T یک افراز از $\mathscr{X}$ ایجاد می‌کند، یعنی اگر

$$E_t = \{x : T(x) = t\} \subseteq \mathscr{X}$$

آن‌گاه برای همه‌ی مقدارهای $t_۱ \neq t_۲$

$$E_{t_۱} \cap E_{t_۲} = \phi, \qquad \bigcup_t E_t = \mathscr{X}$$

بنابراین نتیجه‌ی زیر را خواهیم داشت.

نتیجه‌ی ۲-۲ هر آماره‌ی T یک افراز از $\mathscr{X}$ ایجاد می‌کند.

مثال ۲-۲ فرض کنید $X_۱, X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان $B(۱, \theta)$ باشند. در این صورت

$$\mathscr{X} = \{(۰, ۰), (۰, ۱), (۱, ۰), (۱, ۱)\}$$

حال اگر آماره‌ی T را به صورت $T(\boldsymbol{X}) = X_۱ + X_۲$ تعریف کنیم، آن‌گاه

$$\begin{aligned} E_۰ &= \{\boldsymbol{x} : T(\boldsymbol{x}) = ۰\} = \{(۰, ۰)\} \\ E_۱ &= \{\boldsymbol{x} : T(\boldsymbol{x}) = ۱\} = \{(۰, ۱), (۱, ۰)\} \\ E_۲ &= \{\boldsymbol{x} : T(\boldsymbol{x}) = ۲\} = \{(۱, ۱)\} \end{aligned}$$

بنابراین T افراز $\{E_{۰}, E_{۱}, E_{۲}\}$ از $\mathscr{X}$ را ایجاد می‌کند.

مثال ۲-۳ فرض کنید $\mathscr{X} = \{x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}, x_{۴}\}$ و

$$T_{۱}(x) = \begin{cases} ۰ & x = x_{۱} \\ ۱ & x = x_{۲} \\ ۲ & x = x_{۳}, x_{۴} \end{cases}$$

آن‌گاه مجموعه‌های $E_{۰} = \{x_{۱}\}, E_{۱} = \{x_{۲}\}, E_{۲} = \{x_{۳}, x_{۴}\}$ یک افراز تولید شده از $\mathscr{X}$ توسط $T_{۱}$ است. افرازی را که توسط $T_{۱}$ از $\mathscr{X}$ ایجاد می‌شود با $\Pi_{T_{۱}}$ یا $\Pi_{۱}$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$\Pi_{۱} = \{E_{۰}, E_{۱}, E_{۲}\}$$

یادآوری یک نکته در این‌جا ضروری است.

همان‌گونه که دیده می‌شود، مقدارهای گوناگون $T_{۱}$، مجموعه‌های افراز شده‌ی متفاوتی را پدید می‌آورند، زیرا $T_{۱}$ یک تابع روی $\mathscr{X}$ است.

مثال ۲-۴ فرض کنید $\mathscr{X} = \{x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}, x_{۴}\}$ و

$$T_{۲}(x) = \begin{cases} ۳ & x = x_{۱} \\ ۴ & x = x_{۲} \\ ۵ & x = x_{۳}, x_{۴} \end{cases}$$

بنابراین مجموعه‌های افراز شده توسط $T_{۲}$ همانند مجموعه‌های افراز شده توسط $T_{۱}$ هستند. در این صورت گوییم $T_{۲}$ مجموعه‌های افراز شده‌ای همانند $T_{۱}$ را ایجاد می‌کند. به طور کلی هر آماره‌ی T که مقدارهای متفاوتی را به مجموعه‌های $\{x_{۱}\}$، $\{x_{۲}\}$ و $\{x_{۳}, x_{۴}\}$ نسبت دهد، مجموعه‌های افراز شده‌ای همانند $T_{۱}$ را به وجود خواهد آورد.

نتیجه‌ی ۲-۳ اگر دو آماره‌ی $T_{۱}$ و $T_{۲}$ افرازهای یکسان ایجاد کنند، آن‌گاه تناظری یک به یک بین آن‌ها برقرار است. یعنی تابعی مانند s وجود دارد به گونه‌ای که

$$T_{۲} = s(T_{۱}), \qquad T_{۱} = s^{-۱}(T_{۲})$$

برهان فرض کنید

$$T_{۱}(x_{۱}) = T_{۱}(x_{۲}), \qquad x_{۱}, x_{۲} \in \mathscr{X}$$

آن‌گاه $x_۱$ و $x_۲$ هر دو داخل یک مجموعه‌ی افراز شده‌ی $\mathscr{X}$ توسط $T_۱$ قرار می‌گیرند. از آن‌جا که $T_۱$ و $T_۲$ افرازهای یکسانی ایجاد می‌کنند، $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به یک مجموعه‌ی افراز شده‌ی $\mathscr{X}$ توسط $T_۲$ خواهند بود، در نتیجه

$$T_۲(x_۱) = T_۲(x_۲)$$

بنابراین $T_۲$ تابعی از $T_۱$ است، یعنی تابعی مانند s وجود دارد به گونه‌ای که $T_۲ = s(T_۱)$. به طور مشابه می‌توان نشان داد که اگر $T_۲(x_۱) = T_۲(x_۲)$ آن‌گاه $T_۱(x_۱) = T_۱(x_۲)$، یعنی s تابعی یک به یک و وارون‌پذیر است. در نتیجه

$$T_۱ = s^{-۱}(T_۲)$$

برای مثال، در مثال‌های ۲-۳ و ۲-۴ داریم $T_۱ = T_۲ - ۳$ و $T_۲ = T_۱ + ۳$.

یادآوری یک نکته در این‌جا ضروری است.

توجه داشته باشید که در حالت کلی، ممکن است نتوانیم ضابطه‌ی تابع s را به طور دقیق بیان کنیم. برای روشن شدن این موضوع، مثال زیر می‌تواند راهگشا باشد.

مثال ۲-۵ فرض کنید $\mathscr{X} = \{x_۱, x_۲, x_۳, x_۴\}$ و

$$T'_۲(x) = \begin{cases} ۱۰۹ & x = x_۱ \\ ۱۳۳ & x = x_۲ \\ ۱۰^{۱۰} & x = x_۳, x_۴ \end{cases}$$

از آن‌جا که $T'_۲$ افرازی همانند $T_۱$ ایجاد می‌کند، پس تابع یک به یک s وجود دارد به گونه‌ای که

$$T'_۲ = s(T_۱), \qquad T_۱ = s^{-۱}(T'_۲)$$

اما به دست آوردن ضابطه‌ی s به طور کلی مشکل است.

حال می‌خواهیم مفهوم **تلخیص** را روشن کنیم. برای بیان این مفهوم به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲-۶ فرض کنید $\mathscr{X} = \{x_۱, x_۲, x_۳, x_۴\}$ و

$$T_۳(x) = \begin{cases} ۵ & x = x_۱, x_۲ \\ ۶ & x = x_۳, x_۴ \end{cases}$$

آن‌گاه مجموعه‌های افراز شده توسط $T_۳$ عبارت‌اند از $\{x_۱, x_۲\}$ و $\{x_۳, x_۴\}$ یعنی

$$\Pi_۳ = \{\{x_۱, x_۲\}, \{x_۳, x_۴\}\}$$

همان‌طور که می‌بینیم هر مجموعه‌ی افراز شده توسط $T_۳$، مجموعه یا اجتماعی از مجموعه‌های افراز شده توسط $T_۱$ (یا $T_۲$) است، اما عکس آن صادق نیست. در این صورت گوییم افراز $\Pi_۳$ که توسط $T_۳$ تولید شده، یک **تلخیص** از افراز $\Pi_۱$ (یا $\Pi_۲$) است که توسط $T_۱$ (یا $T_۲$) تولید شده است. پس تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف ۲-۱ افراز Π^* را یک **تلخیص** از افراز Π گویند، اگر هر مجموعه‌ی افراز شده‌ی Π^* اجتماعی از مجموعه‌های افراز شده‌ی Π باشد.

در این حالت، یک تابع پوشای s وجود دارد به گونه‌ای که $T_۳ = s(T_۱)$.

یادآوری یک نکته در این‌جا ضروری است.

اگر Π^* تلخیصی از Π و Π نیز تلخیصی از Π^* باشد، آن‌گاه بین دو آماره‌ی T و T^* که تولید کننده‌ی این افرازها هستند، یک تناظر یک به یک وجود دارد.

مثال زیر نشان می‌دهد که یک آماره همواره تلخیصی از آماره‌ی دیگر نیست.

مثال ۲-۷ فرض کنید $\mathscr{X} = \{x_۱, x_۲, x_۳, x_۴\}$،

$$T_۴(x) = \begin{cases} ۰ & x = x_۱, x_۲ \\ ۱ & x = x_۳, x_۴ \end{cases}$$

و

$$T_۵(x) = \begin{cases} ۳ & x = x_۱, x_۳ \\ ۴ & x = x_۲, x_۴ \end{cases}$$

آن‌گاه

$$\Pi_۴ = \{\{x_۱, x_۲\}, \{x_۳, x_۴\}\}$$
$$\Pi_۵ = \{\{x_۱, x_۳\}, \{x_۲, x_۴\}\}$$

بنابراین، نه $\Pi_۴$ و نه $\Pi_۵$، هیچ یک تلخیصی از دیگری نیست، زیرا مجموعه‌های افراز شده توسط $T_۴$ اجتماعی از مجموعه‌های افراز شده توسط $T_۵$ نیستند و برعکس.

نتیجه‌ی زیر مفهوم مجموعه‌های افراز شده‌ی یکسان را از دیدگاه نظری احتمال توضیح می‌دهد.

نتیجه‌ی ۲-۴ اگر U و T آماره‌هایی باشند که افراز یکسان تولید کنند، آن‌گاه احتمال شرطی پیشامد A به شرط $T=t$ برابر احتمال شرطی A به شرط مثلاً $U=u$ است.

برهان فرض کنید

$$E_u = U^{-1}(\{u\}), \qquad E_t = T^{-1}(\{t\})$$

بنابر فرض، مقدارهایی از t و u وجود دارد که $E_u = E_t = E$ و

$$P(A|T=t) = \frac{P(A\cap\{T=t\})}{P(T=t)} = \frac{P(A\cap E)}{P(E)},$$

$$P(A|U=u) = \frac{P(A\cap\{U=u\})}{P(U=u)} = \frac{P(A\cap E)}{P(E)}$$

بنابراین

$$P(A|T=t) = P(A|U=u)$$

برای روشن شدن مطلب، مثال زیر را درنظر بگیرید.

مثال ۲-۸ فرض کنید $\mathscr{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$،

$$T(x) = \begin{cases} 0 & x = x_1, x_2 \\ 1 & x = x_3, x_4 \end{cases}$$

و

$$U(x) = \begin{cases} 109 & x = x_1, x_2 \\ 133 & x = x_3, x_4 \end{cases}$$

آن‌گاه

$$P(X=x_1|T=0) = P(X=x_1|U=109),$$
$$P(X=x_1|T=1) = P(X=x_1|U=133)$$

۲-۲ بسندگی

برای این‌که مفهوم بسندگی را روشن سازیم با یک مثال ساده مطلب را آغاز می‌کنیم.

مثال ۲-۹ فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان $B(1,p)$ باشند، آن‌گاه

$$\mathscr{X} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = p^{x_1+x_2}(1-p)^{2-(x_1+x_2)}, \qquad (x_1,x_2) \in \mathscr{X}$$

می‌دانیم که $X_1 + X_2 \sim B(2,p)$ با تابع احتمال زیر است

$$P(X_1 + X_2 = x) = \binom{2}{x} p^x (1-p)^{2-x}, \qquad x = 0,1,2$$

بنابراین

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 | X_1 + X_2 = x) = \begin{cases} 0 & x \neq x_1 + x_2 \\ \dfrac{1}{\binom{2}{x}} & x = x_1 + x_2 \end{cases}$$

که بستگی به p ندارد. در نتیجه جدول زیر را خواهیم داشت.

(x_1,x_2)	$P(X_1=x_1,X_2=x_2)$	به شرط		
		$X_1+X_2=0$	$X_1+X_2=1$	$X_1+X_2=2$
$(0,0)$	$(1-p)^2$	1	0	0
$(0,1)$	$p(1-p)$	0	$\frac{1}{2}$	0
$(1,0)$	$p(1-p)$	0	$\frac{1}{2}$	0
$(1,1)$	p^2	0	0	1

حال اگر علاقه‌مند به کسب اطلاعات در مورد پارامتر p باشیم مجموع $X_1 + X_2$ دربردارنده‌ی اطلاعات در مورد p است، به این بیان که احتمال شرطی $(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ به شرط $(X_1 + X_2 = x)$ بستگی به p ندارد.

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از یک تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) $f_\theta(x)$ باشد که $\theta \in \Theta$ (پارامتر θ ممکن است خود یک بردار باشد). برای سادگی، چگالی توأم $X_1, \ldots, X_n$ را با $f_\theta(\boldsymbol{x})$ و آماره‌ی $S(X_1, \ldots, X_n)$ را با $S(\boldsymbol{X})$ نشان خواهیم داد.

تعریف ۲-۲ آماره‌ی $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده برای $\theta \in \Theta$ است (یا به عبارت دقیق‌تر یک آماره‌ی بسنده برای خانواده‌ی توزیع‌ها با چگالی $\{f_\theta : \theta \in \Theta\}$ است) اگر توزیع شرطی $X_1, \ldots, X_n$ به شرط $S(\boldsymbol{X}) = s$، برای هر مقدار ممکن s، بستگی به θ نداشته باشد.

مثال ۲-۱۰ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع پواسون با پارامتر θ باشد، به گونه‌ای که $\theta \in (0, \infty)$. نشان دهید که $\sum_{i=1}^n X_i$ یک آماره‌ی بسنده برای پارامتر θ است.
برای نشان دادن این موضوع توجه کنید که

$$f_\theta(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

و

$$S(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n\theta)$$

بنابراین، اگر $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ و $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} | S(\boldsymbol{X}) = s) &= P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n | S(\boldsymbol{X}) = s) \\ &= \frac{P_\theta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, S(\boldsymbol{X}) = s)}{P_\theta(S(\boldsymbol{X}) = s)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{P_\theta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)}{P_\theta(S(\boldsymbol{X}) = s)} & s = \sum x_i \\ 0 & s \neq \sum x_i \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{s!}{n^s \prod_{i=1}^n x_i!} & s = \sum x_i \\ 0 & s \neq \sum x_i \end{cases} \end{aligned}$$

دیده می‌شود که احتمال شرطی بالا برای هر مقدار ممکن s بستگی به پارامتر θ ندارد، پس بنابر تعریف بسندگی، $S(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است.

مثال ۲-۱۱ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع هندسی با پارامتر θ باشد، به گونه‌ای که $\theta \in (0, 1)$. نشان دهید که $\sum_{i=1}^n X_i$ یک آماره‌ی بسنده برای پارامتر θ است.
برای نشان دادن این موضوع توجه کنید که

$$f_\theta(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} [\theta(1-\theta)^{x_i}] = \theta^n (1-\theta)^{\sum x_i}$$

و

$$S(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=۱}^{n} X_i \sim NB(n, \theta)$$

بنابراین، اگر $\boldsymbol{X} = (X_۱, \ldots, X_n)$ و $\boldsymbol{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} | S(\boldsymbol{X}) = s) &= P(X_۱ = x_۱, \ldots, X_n = x_n | S(\boldsymbol{X}) = s) \\ &= \frac{P_\theta(X_۱ = x_۱, \ldots, X_n = x_n, S(\boldsymbol{X}) = s)}{P_\theta(S(\boldsymbol{X}) = s)} \\ &= \begin{cases} \frac{P_\theta(X_۱=x_۱,\ldots,X_n=x_n)}{P_\theta(S(\boldsymbol{X})=s)} & S(\boldsymbol{x}) = s \\ ۰ & S(\boldsymbol{x}) \neq s \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\theta^n(۱-\theta)^{\sum x_i}}{\binom{s+n-۱}{n-۱}\theta^n(۱-\theta)^s} & \sum x_i = s \\ ۰ & \sum x_i \neq s \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{۱}{\binom{s+n-۱}{n-۱}} & \sum x_i = s \\ ۰ & \sum x_i \neq s \end{cases} \end{aligned}$$

دیده می‌شود که احتمال شرطی بالا برای هر مقدار ممکن s بستگی به پارامتر θ ندارد، پس بنابر تعریف بسندگی، $S(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=۱}^{n} X_i$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است.

مثال ۲-۱۲ فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $NB(r, \theta)$ باشد، به گونه‌ای که $\theta \in (۰, ۱)$. نشان دهید $\sum_{i=۱}^{n} X_i$ یک آماره‌ی بسنده برای پارامتر θ است.

برای نشان دادن این موضوع توجه کنید که

$$f_\theta(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=۱}^{n} \left[\binom{r + x_i - ۱}{r - ۱}\theta^r(۱ - \theta)^{x_i}\right] = \prod_{i=۱}^{n} \binom{r + x_i - ۱}{r - ۱}\theta^{nr}(۱ - \theta)^{\sum x_i}$$

و

$$S(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=۱}^{n} X_i \sim NB(rn, \theta)$$

بنابراین

$$P(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}|S(\boldsymbol{X})=s)=P(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n|S(\boldsymbol{X})=s)$$

$$=\frac{P_\theta(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n,S(\boldsymbol{X})=s)}{P_\theta(S(\boldsymbol{X})=s)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{P_\theta(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)}{P_\theta(S(\boldsymbol{X})=s)} & S(\boldsymbol{x})=s\\ 0 & S(\boldsymbol{x})\neq s\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\prod_{i=1}^{n}\binom{r+x_i-1}{r-1}}{\binom{rn+s-1}{rn-1}} & S(\boldsymbol{x})=s\\ 0 & S(\boldsymbol{x})\neq s\end{cases}$$

دیده می‌شود که احتمال شرطی بالا برای هر مقدار ممکن s بستگی به پارامتر θ ندارد، پس بنابر تعریف بسندگی، $S(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{n}X_i$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است.

مثال ۲-۱۳ فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ دارای تابع احتمال توأم $p_\theta(x_1,\ldots,x_n)$ باشد. نشان دهید $(X_1,\ldots,X_n)$ یک آماره‌ی بسنده برای پارامتر θ است.

برای نشان دادن این موضوع توجه کنید که

$$P((X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)|(X_1,\ldots,X_n)=(x'_1,\ldots,x'_n))$$
$$=\begin{cases}1 & (x_1,\ldots,x_n)=(x'_1,\ldots,x'_n)\\ 0 & (x_1,\ldots,x_n)\neq(x'_1,\ldots,x'_n)\end{cases}$$

بنابراین با توجه به تعریف بسندگی، $(X_1,\ldots,X_n)$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است. به این آماره، **آماره‌ی بسنده‌ی ساده** می‌گویند.

یادآوری چند نکته در این‌جا ضروری است.

- از آن‌جا که احتمال شرطی را می‌توان بر اساس مجموعه‌های افراز شده تعریف کرد، اگر S بسنده باشد و U نیز آماره‌ای باشد که افرازی همانند S روی $\mathscr{X}$ تولید می‌کند، آن‌گاه U نیز بسنده است. در این حالت یک تناظر یک به یک بین U و S برقرار است.

- اگر S یک آماره‌ی بسنده و تلخیصی از آماره‌ی U باشد، یعنی افراز Π_S تلخیصی از Π_U باشد، آن‌گاه S یک تابع از U است و در نتیجه U نیز بسنده است. از طرف دیگر اگر U بسنده نباشد چون S تلخیصی از U است بنابراین S نیز بسنده نخواهد بود یعنی اگر U بسنده نباشد، هر تلخیصی از U نیز نمی‌تواند بسنده باشد.
- فرض کنید S و U دو آماره باشند و S تلخیصی از U باشد. اگر U یک آماره‌ی بسنده باشد، لزومی ندارد که S نیز بسنده باشد.

برای نشان دادن بسندگی یک آماره، به جای کارکردن با توزیع شرطی نمونه به شرط مقدار داده شده‌ی آماره‌ی مورد نظر، اغلب ساده‌تر است که از یک شرط لازم و کافی که تابع چگالی احتمال یا تابع احتمال مشاهدات را در نظر می‌گیرد، استفاده کنیم. قضیه‌ی زیر مهم‌ترین قضیه در مبحث بسندگی است و برای تشخیص بسندگی یک آماره به کار می‌رود.

قضیه‌ی ۲-۱ (قضیه‌ی دسته‌بندی فیشر ـ نیمن) آماره‌ی $S(\boldsymbol{X})$ برای پارامتر θ بسنده است اگر و تنها اگر برای هر $\theta \in \Theta$ تابع‌های نامنفی g و h به صورت زیر وجود داشته باشند.

$$f_\theta(\boldsymbol{x}) = g(\theta, S(\boldsymbol{x}))h(\boldsymbol{x})$$

که درآن $g(\theta, S(\boldsymbol{x}))$ تنهااز طریق $S(\boldsymbol{x})$ به $\boldsymbol{x}$ بستگی دارد و $h(\boldsymbol{x})$ به θ بستگی ندارد.

برهان (حالت گسسته) شرط کافی: باید نشان دهیم برای هر مقدار s، $P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}|S(\boldsymbol{X}) = s)$ بستگی به θ ندارد. برای این کار توجه داشته باشید که

$$\begin{aligned}P_\theta(S(\boldsymbol{X}) = s) &= \sum_{\{\boldsymbol{x}:S(\boldsymbol{x})=s\}} p_\theta(\boldsymbol{x}) = \sum_{\{\boldsymbol{x}:S(\boldsymbol{x})=s\}} g(\theta, S(\boldsymbol{x}))h(\boldsymbol{x}) \\ &= g(\theta, s) \sum_{\{\boldsymbol{x}:S(\boldsymbol{x})=s\}} h(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}P_\theta(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}, S(\boldsymbol{X}) = s) &= \begin{cases} 0 & S(\boldsymbol{x}) \neq s \\ P_\theta(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) & S(\boldsymbol{x}) = s \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & S(\boldsymbol{x}) \neq s \\ g(\theta, S(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x}) & S(\boldsymbol{x}) = s \end{cases} \\ &= g(\theta, s)\{h(\boldsymbol{x})|S(\boldsymbol{x}) = s\}\end{aligned}$$

بنابراین، برای هر مقدار s

$$
\begin{aligned}
P(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}|S(\boldsymbol{X})=s) &= \frac{P_\theta(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}, S(\boldsymbol{X})=s)}{P_\theta(S(\boldsymbol{X})=s)} \\
&= \frac{g(\theta,s)\{h(\boldsymbol{x})|S(\boldsymbol{x})=s\}}{g(\theta,s)\sum_{\{\boldsymbol{x}:S(\boldsymbol{x})=s\}} h(\boldsymbol{x})} \\
&= \frac{h(\boldsymbol{x})|S(\boldsymbol{x})=s}{\sum_{\{\boldsymbol{x}:S(\boldsymbol{x})=s\}} h(\boldsymbol{x})} \\
&= \begin{cases} 0 & S(\boldsymbol{x}) \neq s \\ \dfrac{h(\boldsymbol{x})}{\sum_{\{\boldsymbol{x}:S(\boldsymbol{x})=s\}} h(\boldsymbol{x})} & S(\boldsymbol{x}) = s \end{cases}
\end{aligned}
$$

که بستگی به θ ندارد. پس بنابر تعریف بسندگی، $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است.

شرط لازم: باید نشان دهیم که تابع احتمال $p_\theta(\boldsymbol{x})$ را می‌توان به صورت $g(\theta,s)h(\boldsymbol{x})$ نوشت. با توجه به این‌که $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده است، آشکار می‌شود که $P(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}|S(\boldsymbol{X})=s)$ بستگی به θ ندارد و می‌توان آن را $u(\boldsymbol{x},s)$ نامید. پس، چون s هم تابعی از $\boldsymbol{x}$ است،

$$P(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}|S(\boldsymbol{X})=s) = u(\boldsymbol{x},s) = h(\boldsymbol{x})$$

برای هر مقدار داده شده‌ی $\boldsymbol{x}$، اگر $S(\boldsymbol{x})$ را برابر با s قرار دهیم، در این صورت افزودن محدودیت $S(\boldsymbol{X})=s$ به پیشامد $(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})$ تأثیری در مقدار احتمال نمی‌کند. بنابراین

$$
\begin{aligned}
p_\theta(\boldsymbol{x}) = P_\theta(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}) &= P_\theta(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}, S(\boldsymbol{X})=s) \\
&= P_\theta(S(\boldsymbol{X})=s)P_\theta(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}|S(\boldsymbol{X})=s) \\
&= g(\theta,s)h(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

و برهان کامل می‌شود.

یادآوری یک نکته در این‌جا ضروری است.

اگر S برای θ بسنده باشد و $S=m(U)$، آن‌گاه U نیز برای θ بسنده است زیرا با توجه به بسندگی S،

$$
\begin{aligned}
f_\theta(\boldsymbol{x}) &= g(\theta, S(\boldsymbol{x}))h(\boldsymbol{x}) = g(\theta, m(U(\boldsymbol{x})))h(\boldsymbol{x}) \\
&= g^*(\theta, U(\boldsymbol{x}))h(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

حال با به کارگیری قضیه‌ی ۲-۱ دیده می‌شود که U نیز یک آماره‌ی بسنده است.

مثال ۲-۱۴ اگر $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع پواسون با پارامتر θ باشد، آن‌گاه

$$f_\theta(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$
$$= e^{-n\theta}\theta^{\sum x_i}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} = g\Big(\theta, \sum_{i=1}^{n} x_i\Big)h(\boldsymbol{x})$$

با توجه به قضیه‌ی ۲-۱، $\sum_{i=1}^{n} X_i$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است.

مثال ۲-۱۵ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}, \qquad 0 < x < 1, \theta > 0$$

آن‌گاه

$$f_\theta(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \theta^n\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\theta-1} \cdot 1 = g\Big(\theta, \prod_{i=1}^{n} x_i\Big)h(x_1, \ldots, x_n)$$

در نتیجه، $\prod_{i=1}^{n} X_i$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است.

مثال ۲-۱۶ اگر $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع نرمال با میانگین θ و واریانس ۱ باشد، آن‌گاه

$$f_\theta(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta)^2}\Big] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum(x_i-\theta)^2}$$
$$= e^{\theta\sum x_i - n\frac{\theta^2}{2}}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}\sum x_i^2} = g\Big(\theta, \sum_{i=1}^{n} x_i\Big)h(x_1, \ldots, x_n)$$

در نتیجه، $\sum_{i=1}^{n} X_i$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است.

مثال ۲-۱۷ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس σ^2 باشد. آن‌گاه

$$f_{\sigma^2}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x_i^2}\Big) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum x_i^2}$$

بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۲-۱، $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ یک آماره‌ی بسنده برای σ^2 است.

مثال ۲-۱۸ فرض کنید $X_{1},\dots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^{2} باشد، به گونه‌ای که $-\infty < \mu < +\infty$ و $\sigma > 0$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} f_{\mu,\sigma^2}(\boldsymbol{x}) &= \prod_{i=1}^{n}\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2}\Big] = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2} \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum x_i^2+\frac{\mu}{\sigma^2}\sum x_i-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}} \\ &= g\Big(\mu,\sigma^2,\sum_{i=1}^{n}x_i,\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)h(x_1,\dots,x_n) \end{aligned}$$

که با توجه به قضیه‌ی ۲-۱، $(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2)$ یک آماره‌ی بسنده برای (μ,σ^2) است. به آماره‌ی $(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2)$ آماره‌ی بسنده‌ی توأم نیز گفته می‌شود. با توجه به این‌که

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \qquad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

و یک رابطه‌ی یک به یک بین $(\overline{X},S^2)$ و $(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2)$ برقرار است، پس $(\overline{X},S^2)$ نیز یک آماره‌ی بسنده‌ی توأم برای (μ,σ^2) است.

یادآوری یک نکته در این‌جا ضروری است.

در مثال ۲-۱۸ نشان دادیم که $(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2)$ یک آماره‌ی بسنده برای (μ,σ^2) است که البته این به آن معنا نیست که $\sum_{i=1}^{n}X_i$ برای μ و $\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ برای σ^2 بسنده است، بلکه $(\sum X_i,\sum X_i^2)$ تواماً برای (μ,σ^2) بسنده است. برای روشن شدن موضوع با استدلالی مشابه مثال ۲-۱۶ می‌توان نشان داد که اگر σ^2 معلوم باشد، $\sum X_i$ یک آماره‌ی بسنده برای μ است. با وجود این در مثال ۲-۱۸ نمی‌توانیم ادعا کنیم که اگر μ معلوم باشد، آن‌گاه $\sum X_i^2$ یک آماره‌ی بسنده برای σ^2 است. چرا؟ (به این پرسش پس از مطالعه‌ی بخش ۴ پاسخ دهید.)

مثال ۲-۱۹ فرض کنید $X_{1},\dots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از خانواده‌ی توزیع‌های نمایی یک‌پارامتری با تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) زیر باشد

$$f_\theta(x)=a(\theta)b(x)e^{c(\theta)d(x)}, \qquad \theta\in\Theta\subseteq R$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $\sum_{i=1}^{n}d(X_i)$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است.

مثال ۲-۲۰ فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از خانواده توزیع‌های نمایی kپارامتری با تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) زیر باشد

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(x)=a(\boldsymbol{\theta})b(x)\exp\{\sum_{i=1}^{k}c_i(\boldsymbol{\theta})d_i(x)\},\qquad \boldsymbol{\theta}\in\Theta\subseteq R^k$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $(\sum_{j=1}^{n}d_1(X_j),\ldots,\sum_{j=1}^{n}d_k(X_j))$ یک آماره‌ی بسنده برای $\boldsymbol{\theta}$ است.

مثال ۲-۲۱ فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $U(0,\theta)$ باشد آن‌گاه

$$f_\theta(\boldsymbol{x})=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\theta}u(\theta-x_i)\right)=\theta^{-n}u(\theta-x_{(n)})\cdot 1=g(\theta,x_{(n)})h(\boldsymbol{x})$$

که در آن

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۲-۱، $X_{(n)}=\max(X_1,\ldots,X_n)$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است.

مثال ۲-۲۲ فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع یکنواخت گسسته روی مجموعه‌ی $\{1,2,\ldots,\theta\}$ باشد، به گونه‌ای که $\theta\in N$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}f_\theta(\boldsymbol{x}) &= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\theta}I_{\{1,2,\ldots,\theta\}}(x_i)\right)\\ &= \theta^{-n}I_{\{1,2,\ldots,\theta\}}(x_{(n)})\\ &= g(\theta,x_{(n)})h(x_1,\ldots,x_n)\end{aligned}$$

بنابراین، با به کارگیری قضیه‌ی ۲-۱، $X_{(n)}$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است.

مثال ۲-۲۳ فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیعی با چگالی زیر باشد

$$f_\theta(x)=e^{-(x-\theta)},\qquad x\geq\theta,\theta\in(-\infty,\infty)$$

در این صورت

$$\begin{aligned}f_\theta(\boldsymbol{x}) &= \prod_{i=1}^{n}f_\theta(x_i)=\prod_{i=1}^{n}[e^{-(x_i-\theta)}u(x_i-\theta)]=e^{-\sum(x_i-\theta)}u(x_{(1)}-\theta)\\ &= e^{n\theta}u(x_{(1)}-\theta)e^{-\sum x_i}=g(\theta,x_{(1)})h(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

بنابراین، با به کارگیری قضیه‌ی ۲-۱، $X_{(1)}$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است.

مثال ۲-۲۴ فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $U(\theta_1, \theta_2)$ باشد، به گونه‌ای که $-\infty < \theta_1 < \theta_2 < \infty$، در این صورت

$$\begin{aligned} f_{\theta_1,\theta_2}(\boldsymbol{x}) &= \prod_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{\theta_2 - \theta_1} u(x_i - \theta_1) u(\theta_2 - x_i) \Big) \\ &= (\theta_2 - \theta_1)^{-n} u(x_{(1)} - \theta_1) u(\theta_2 - x_{(n)}) \\ &= g(\theta_1, \theta_2, x_{(1)}, x_{(n)}) \end{aligned}$$

بنابراین، با به کارگیری قضیه‌ی ۲-۱، $(X_{(1)}, X_{(n)})$ یک آماره‌ی بسنده برای (θ_1, θ_2) است.

مثال ۲-۲۵ فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $E(\mu, \sigma)$ با چگالی زیر باشد

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-(x-\mu)/\sigma}, \qquad x \ge \mu, \mu \in (-\infty, \infty), \sigma > 0$$

در این صورت

$$\begin{aligned} f_{\mu,\sigma}(\boldsymbol{x}) &= \prod_{i=1}^{n} f_{\mu,\sigma}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \Big[\frac{1}{\sigma} e^{-(x_i-\mu)/\sigma} u(x_i - \mu) \Big] \\ &= \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{\sigma} \sum (x_i - \mu)} u(x_{(1)} - \mu) = g(\mu, \sigma, x_{(1)}, \sum x_i) \end{aligned}$$

بنابراین، با به کارگیری قضیه‌ی ۲-۱، $(X_{(1)}, \sum_{i=1}^{n} X_i)$ یک آماره‌ی بسنده برای (μ, σ) است.

اگر $T = X_{(1)}$ و $S = \sum (X_i - X_{(1)})$، با توجه به این‌که یک رابطه‌ی یک به یک بین (T, S) و $(X_{(1)}, \sum X_i)$ برقرار است. پس (T, S) نیز یک آماره‌ی بسنده‌ی توأم برای (μ, σ) است.

یادآوری یک نکته در این‌جا ضروری است.

اگر $X_1, \dots, X_n$ و $n > 1$، متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) $f_\theta(x)$ باشند، می‌توان ادعا کرد که X_1 برای θ بسنده نیست. چرا؟

۲-۳ آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال

برای این‌که مفهوم بسندگی مینیمال را روشن سازیم، با یک مثال مطلب را آغاز می‌کنیم.

مثال ۲-۲۶ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $N(0, \sigma^2)$ باشند، آماره‌های زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
T_1(\boldsymbol{X}) &= (X_1, \ldots, X_n) \\
T_2(\boldsymbol{X}) &= (X_1^2, \ldots, X_n^2) \\
T_3(\boldsymbol{X}) &= (\sum_{i=1}^{k} X_i^2, \sum_{i=k+1}^{n} X_i^2) \\
T_4(\boldsymbol{X}) &= \sum_{i=1}^{n} X_i^2
\end{aligned}$$

با توجه به مثال ۲-۱۷ می‌دانیم که $T_4(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده برای پارامتر σ^2 است، از طرفی

$$T_2 = s_3(T_1), \quad T_3 = s_2(T_2), \quad T_4 = s_1(T_3)$$

بنابراین T_1, T_2, T_3 نیز آماره‌های بسنده برای σ^2 هستند. توجه کنید که با افزایش اندیس i، T_i تلخیص بیش‌تری بر روی داده‌ها ایجاد می‌کند و داده‌ها را خلاصه‌تر بیان می‌کند.

پرسشی که در این رابطه مطرح می‌شود این است که تا چه اندازه می‌توان داده‌ها را خلاصه کرد و هنوز بسنده باشد؟ یک پاسخ ساده به این سؤال این است که تلخیص تا جایی می‌تواند ادامه یابد که چیزی از اطلاعات نهفته در داده‌ها در مورد پارامتر نامعلوم کم نشود. به عبارت دیگر تلخیص تا جایی جایز است که اطلاعات موجود در نمونه حفظ شود. بنابراین آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲-۳ آماره‌ی $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است، اگر

الف) $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده باشد،

ب) $S(\boldsymbol{X})$ تابعی از هر آماره‌ی بسنده‌ی دیگر باشد.

در حقیقت با توجه به تعریف بالا، آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال، آماره‌ی بسنده‌ای است که بیش‌ترین تلخیص را روی نمونه انجام می‌دهد.

برای روشن شدن قسمت «ب» از تعریف، لم زیر سودمند است.

لم ۲-۱ فرض کنید u و v تابع‌هایی با دامنه‌ی یکسان D باشند (مقدار این تابع‌ها ممکن است خود یک بردار باشد). شرط لازم و کافی برای این‌که v تابعی از u باشد این است که برای هر مقدار $\lambda_1, \lambda_2 \in D$ که $u(\lambda_1) = u(\lambda_2)$ نتیجه بگیریم

$$v(\lambda_1) = v(\lambda_2)$$

یادآوری دو نکته در این‌جا ضروری است.

- آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال یکتا نیست، اما اگر S_1 و S_2 دو آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال باشند، آن‌گاه یک رابطه‌ی یک به یک بین آن‌ها برقرار است.

- اگر S آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال باشد و $T = h(S)$، به گونه‌ای که h یک به یک نباشد، آن‌گاه T بسنده نخواهد بود.

قضیه‌ی زیر ما را در دستیابی به آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال یاری می‌کند.

قضیه‌ی ۲-۲ فرض کنید $\boldsymbol{X}$ دارای تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمالی) به شکل $p_\theta(\boldsymbol{x})$، $\theta \in \Theta$ باشد. برای هر مقدار ثابت و ممکن $\theta_\circ \in \Theta$، نسبت $\frac{p_\theta(\boldsymbol{x})}{p_{\theta_\circ}(\boldsymbol{x})}$ برای هر $\theta \in \Theta$ اگر و تنها اگر از طریق $S(\boldsymbol{x})$ بستگی به $\boldsymbol{x}$ داشته باشد، آن‌گاه $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ خواهد بود.

برهان قضیه را در دو بخش ثابت می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که S یک آماره‌ی بسنده است. به این منظور توجه کنید که

$$\frac{p_\theta(\boldsymbol{x})}{p_{\theta_\circ}(\boldsymbol{x})} = g_{\theta_\circ}(\theta, S(\boldsymbol{x}))$$

بنابراین

$$\begin{aligned} p_\theta(\boldsymbol{x}) &= g_{\theta_\circ}(\theta, S(\boldsymbol{x}))p_{\theta_\circ}(\boldsymbol{x}) \\ &= g_{\theta_\circ}(\theta, S(\boldsymbol{x}))h(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

در نتیجه، با به کارگیری قضیه‌ی ۲-۱، $S(\boldsymbol{X})$ آماره‌ی بسنده است.
حال نشان می‌دهیم که $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال است. فرض کنید T یک آماره‌ی بسنده‌ی دلخواه برای θ باشد. نشان می‌دهیم که S تابعی از T است. یعنی بر اساس لم ۲-۱ باید نشان دهیم که برای هر $\boldsymbol{x}'$ و $\boldsymbol{x}''$ در دامنه‌ی تعریف که به ازای آن‌ها $T(\boldsymbol{x}') = T(\boldsymbol{x}'')$ آن‌گاه $S(\boldsymbol{x}') = S(\boldsymbol{x}'')$

یا $S(\boldsymbol{x}') \neq S(\boldsymbol{x}'')$ نتیجه دهد $T(\boldsymbol{x}') \neq T(\boldsymbol{x}'')$.
با توجه به این‌که $\frac{p_\theta(\boldsymbol{x})}{p_{\theta_\circ}(\boldsymbol{x})}$ تنها از طریق $S(\boldsymbol{x})$ به $\boldsymbol{x}$ بستگی دارد، آشکار می‌شود که

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{x}') \neq S(\boldsymbol{x}'') &\iff \frac{p_\theta(\boldsymbol{x}')}{p_{\theta_\circ}(\boldsymbol{x}')} \neq \frac{p_\theta(\boldsymbol{x}'')}{p_{\theta_\circ}(\boldsymbol{x}'')} \\ \text{(با به کارگیری قضیه‌ی ۲-۱ و بسندگی } T) &\implies \frac{g^*_{\theta_\circ}(\theta, T(\boldsymbol{x}'))}{g^*_{\theta_\circ}(\theta_\circ, T(\boldsymbol{x}'))} \neq \frac{g^*_{\theta_\circ}(\theta, T(\boldsymbol{x}''))}{g^*_{\theta_\circ}(\theta_\circ, T(\boldsymbol{x}''))} \\ &\implies T(\boldsymbol{x}') \neq T(\boldsymbol{x}'') \end{aligned}$$

یادآوری یک نکته در این‌جا ضروری است.

در به‌کارگیری قضیه‌ی ۲-۲ برای حل مثال‌های زیر از انتخاب یک $\theta_\circ$ معین استفاده می‌شود. این امر در دستیابی به آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال با به کارگیری قضیه‌ی ۲-۲ کافی است. برای آن که اگر برای هر θ و $\theta_\circ$ انتخابی نسبت $\frac{p_\theta(\boldsymbol{x})}{p_{\theta_\circ}(\boldsymbol{x})}$ از طریق $S(\boldsymbol{x})$ به $\boldsymbol{x}$ بستگی داشته باشد، آن‌گاه به دلیل زیر برای هر $\theta_۱$ و $\theta_۲$

$$\frac{p_{\theta_۱}(\boldsymbol{x})}{p_{\theta_۲}(\boldsymbol{x})} = \frac{p_{\theta_۱}(\boldsymbol{x})}{p_{\theta_\circ}(\boldsymbol{x})} \frac{۱}{\frac{p_{\theta_۲}(\boldsymbol{x})}{p_{\theta_\circ}(\boldsymbol{x})}}$$

نسبت بالا از طریق $S(\boldsymbol{x})$ به $\boldsymbol{x}$ بستگی دارد.

مثال ۲-۲۷ فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع نرمال با میانگین θ و واریانس یک باشد، آن‌گاه

$$p_\theta(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=۱}^{n} \left[\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}(x_i-\theta)^۲} \right] = (۲\pi)^{-\frac{n}{۲}} e^{-\frac{۱}{۲}\sum(x_i-\theta)^۲}$$

با انتخاب $\theta_\circ = \circ$ داریم

$$\frac{p_\theta(\boldsymbol{x})}{p_{\theta_\circ}(\boldsymbol{x})} = e^{\theta \sum x_i - \frac{n\theta^۲}{۲}}$$

که تنها از طریق $\sum_{i=۱}^n x_i$ به $\boldsymbol{x}$ بستگی دارد. بنابراین، با توجه به قضیه‌ی ۲-۲، $\sum_{i=۱}^n X_i$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است.

مثال ۲-۲۸ فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع نرمال با میانگین $\mu \in R$ و

واریانس $\sigma^۲ > ۰$ باشد. در این‌جا $\theta = (\mu, \sigma^۲)$ و با انتخاب $\theta_۰ = (۰, ۱)$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{p_\theta(\boldsymbol{x})}{p_{\theta_۰}(\boldsymbol{x})} &= \frac{(۲\pi\sigma^۲)^{-\frac{n}{۲}} e^{-\frac{۱}{۲\sigma^۲}\sum(x_i-\mu)^۲}}{(۲\pi)^{-\frac{n}{۲}} e^{-\frac{۱}{۲}\sum x_i^۲}} \\ &= \sigma^{-n} e^{-\frac{۱}{۲}[(\frac{۱}{\sigma^۲}-۱)\sum x_i^۲ - \frac{۲\mu}{\sigma^۲}\sum x_i + \frac{n\mu^۲}{\sigma^۲}]}\end{aligned}$$

که تنها از طریق $(\sum x_i, \sum x_i^۲)$ به $\boldsymbol{x}$ بستگی دارد. در نتیجه $(\sum X_i, \sum X_i^۲)$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای $\theta = (\mu, \sigma^۲)$ است. به خاطر دارید که $(\overline{X}, S^۲)$ یک رابطه‌ی یک به یک با $(\sum X_i, \sum X_i^۲)$ دارد، بنابراین $(\overline{X}, S^۲)$ نیز یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال توأم برای $\theta = (\mu, \sigma^۲)$ است.

مثال ۲-۲۹ فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع یکنواخت روی بازه‌ی $(۰, \theta)$ باشد، آن‌گاه

$$p_\theta(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=۱}^{n} f_\theta(x_i) = \theta^{-n} u(\theta - x_{(n)})$$

حال با انتخاب $\theta_۰ = x_{(n)}$ داریم

$$p_{\theta_۰}(\boldsymbol{x}) = x_{(n)}^{-n}$$

و

$$\frac{p_\theta(\boldsymbol{x})}{p_{\theta_۰}(\boldsymbol{x})} = \left(\frac{\theta}{x_{(n)}}\right)^{-n} u(\theta - x_{(n)})$$

که از طریق $x_{(n)}$ به $\boldsymbol{x}$ بستگی دارد. در نتیجه $X_{(n)}$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است.

مثال ۲-۳۰ فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع یکنواخت روی بازه‌ی $(\theta - \frac{۱}{۲}, \theta + \frac{۱}{۲})$ و $\theta \in R$ باشد، آن‌گاه

$$p_\theta(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=۱}^{n} f_\theta(x_i) = u(\theta + \tfrac{۱}{۲} - x_{(n)}) u(x_{(۱)} - \theta + \tfrac{۱}{۲})$$

با انتخاب $\theta_۰ = x_{(۱)} + \frac{۱}{۲}$ (یا $\theta_۰ = x_{(n)} - \frac{۱}{۲}$) داریم

$$p_{\theta_۰}(\boldsymbol{x}) = u(۱ - (x_{(n)} - x_{(۱)}))$$

و

$$\frac{p_\theta(\boldsymbol{x})}{p_{\theta_\circ}(\boldsymbol{x})}=\frac{u(\theta+\frac{۱}{۲}-x_{(n)})u(x_{(۱)}-\theta+\frac{۱}{۲})}{u(۱-(x_{(n)}-x_{(۱)}))}$$

که از طریق $(x_{(۱)},x_{(n)})$ به $\boldsymbol{x}$ بستگی دارد و با به کارگیری قضیه‌ی ۲-۲، $(X_{(۱)},X_{(n)})$ آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است.

مثال ۲-۳۱ فرض کنید X دارای توزیع $N(\mu,\sigma^۲)$ باشد، در این‌جا $\theta=(\mu,\sigma^۲)$ و با انتخاب $\theta_\circ=(\circ,۱)$ داریم

$$\frac{p_\theta(\boldsymbol{x})}{p_{\theta_\circ}(\boldsymbol{x})}=\frac{۱}{\sigma}e^{-\frac{۱}{۲}[(\frac{۱}{\sigma^۲}-۱)x^۲-\frac{۲\mu}{\sigma^۲}x+\frac{\mu^۲}{\sigma^۲}]}$$

که از طریق x به x بستگی دارد. در نتیجه با به کارگیری قضیه‌ی ۲-۲، X یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای $\theta=(\mu,\sigma^۲)$ است.

مثال ۲-۳۲ فرض کنید $X_۱,\ldots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع کوشی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$p_\theta(x)=\frac{۱}{\pi[۱+(x-\theta)^۲]},\qquad -\infty<x<\infty,\theta\in R$$

با انتخاب $\theta_\circ=\circ$ داریم

$$\frac{p_\theta(\boldsymbol{x})}{p_{\theta_\circ}(\boldsymbol{x})}=\prod_{i=۱}^{n}\frac{۱+x_i^۲}{۱+(x_i-\theta)^۲}$$

دیده می‌شود که نسبت بالا از طریق $(x_۱,\ldots,x_n)$ یا $(x_{(۱)},\ldots,x_{(n)})$ بستگی به $\boldsymbol{x}$ دارد اما چون $(X_{(۱)},\ldots,X_{(n)})$ بیش‌ترین تلخیص ممکن را در این حالت دارد پس $(X_{(۱)},\ldots,X_{(n)})$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است.

یادآوری یک نکته این‌جا ضروری است.

اگر $\boldsymbol{X}$ دارای تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) $p_\theta(\boldsymbol{x})$، $\theta\in\Theta$، باشد به طور معمول یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال وجود دارد.

روش دیگر برای به دست آوردن آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال توسط لی‌من- شفه ارائه شده است. این روش بر اساس تشکیل افرازهای آماره‌ی مورد نظر بنا شده است. در این صورت آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال را می‌توان با نسبت دادن عددهای متفاوت به مجموعه‌های افراز شده‌ی گوناگون مشخص کرد.

در ساختن مجموعه‌ها در یک افراز برای خانواده‌ی چگالی داده‌ها، یعنی $\{f_\theta(x) : \theta \in \Theta\}$، که بسنده باشد، در رابطه با هر نقطه‌ی x از فضای نمونه، مجموعه‌ی $D(x)$ای موجود است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D(x) = \{y : f_\theta(y) = k(y, x) f_\theta(x)\} \subset \mathcal{X}$$

که در آن $k(y, x)$ مثبت و مستقل از θ باشد، به بیان دیگر $D(x)$ عبارت است از مجموعه‌ی نقطه‌های y از فضای نمونه که با نقطه‌ی x «معادل» هستند، بدین مفهوم که نسبت چگالی‌ها در نقطه‌های x و y بستگی به θ ندارد.

در حقیقت تعریف Dها یک افراز روی فضای نمونه ایجاد می‌کند. می‌توان نشان داد که این افراز، یک افراز بسنده‌ی مینیمال است. برهان دقیق این موضوع نیاز به نظریه‌ی اندازه دارد و ما وارد این بحث نخواهیم شد، اما این روش را با ذکر چند مثال روشن خواهیم کرد.

مثال ۲-۳۳ فرض کنید X یک تک مشاهده از تابع احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۴} & x = ۱, ۲ \\ \frac{۱+\theta}{۴} & x = ۳ \\ \frac{۱-\theta}{۴} & x = ۴ \end{cases} \qquad ۰ < \theta < ۱$$

با به کارگیری روش لی‌من- شفه، افراز تولید شده توسط آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال به صورت زیر است

$$D(۱) = \{۱, ۲\}, \qquad D(۳) = \{۳\}, \qquad D(۴) = \{۴\}$$

بنابراین آماره‌ی زیر

$$T(x) = \begin{cases} a_۱ & x = ۱, ۲ \\ a_۲ & x = ۳ \\ a_۳ & x = ۴ \end{cases}$$

که در آن $a_۱ \neq a_۲ \neq a_۳$ عددهای حقیقی معلوم هستند، یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال است.

مثال ۲-۳۴ فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $B(۱, \theta)$ باشد، آن‌گاه تابع احتمال توأم این نمونه در نقطه‌های $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ به ترتیب عبارت است از:

$$\begin{aligned} f_\theta(\boldsymbol{x}) &= \theta^{\sum x_i}(۱-\theta)^{n-\sum x_i} \\ f_\theta(\boldsymbol{y}) &= \theta^{\sum y_i}(۱-\theta)^{n-\sum y_i} \end{aligned}$$

و نسبت این دو تابع احتمال برابر است با

$$\frac{f_\theta(\boldsymbol{x})}{f_\theta(\boldsymbol{y})} = (\tfrac{\theta}{1-\theta})^{\sum x_i - \sum y_i}$$

که مستقل از θ است اگر و تنها اگر $\sum y_i = \sum x_i$. بنابراین،

$$D(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} : \sum x_i = \sum y_i\}$$

و $\sum_{i=1}^{n} X_i$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است.

مثال ۲-۳۵ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد، آن‌گاه تابع چگالی احتمال توأم این نمونه در نقطه‌های $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ به ترتیب عبارت است از:

$$\begin{aligned} f_\theta(\boldsymbol{x}) &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \\ f_\theta(\boldsymbol{y}) &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2} \end{aligned}$$

و نسبت این دوتابع چگالی‌احتمال برابر است با

$$\frac{f_\theta(\boldsymbol{x})}{f_\theta(\boldsymbol{y})} = e^{\frac{1}{2\sigma^2}(\sum y_i^2 - \sum x_i^2) - \frac{\mu}{\sigma^2}(\sum y_i - \sum x_i)}$$

که مستقل از $\theta = (\mu, \sigma^2)$ است، اگر وتنها اگر $\sum y_i = \sum x_i$ و $\sum y_i^2 = \sum x_i^2$ باشد. بنابراین،

$$D(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} : \sum x_i = \sum y_i, \ \sum x_i^2 = \sum y_i^2\}$$

و $(\sum X_i, \sum X_i^2)$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است. با توجه به این‌که $(\sum X_i, \sum X_i^2)$ با $(\overline{X}, S^2)$ تناظر یک به یک دارد بنابراین $(\overline{X}, S^2)$ نیز یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای $\theta = (\mu, \sigma^2)$ است.

مثال ۲-۳۶ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع چگالی احتمال زیر باشند

$$f_\theta(x) = \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, \ \ x > 0, \ \ \theta > 0$$

تابع چگالی احتمال توأم $X_1, \ldots, X_n$ در نقطه‌های $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ به ترتیب عبارت است از:

$$\begin{aligned} f_\theta(\boldsymbol{x}) &= \theta^{-n} \prod_{i=1}^{n} x_i e^{-\frac{1}{2\theta}\sum x_i^2} \\ f_\theta(\boldsymbol{y}) &= \theta^{-n} \prod_{i=1}^{n} y_i e^{-\frac{1}{2\theta}\sum y_i^2} \end{aligned}$$

و نسبت این دوتابع چگالی‌احتمال برابر است با

$$\frac{f_\theta(\boldsymbol{x})}{f_\theta(\boldsymbol{y})} = \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n y_i} e^{-\frac{1}{2\theta}(\sum x_i^2 - \sum y_i^2)}$$

که مستقل از θ است، اگر و تنها اگر $\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. بنابراین،

$$D(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} : \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2\}$$

و $\sum_{i=1}^n X_i^2$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است.

مثال ۲-۳۷ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - x), \quad 0 < x < \theta, \quad \theta \in (0, \infty)$$

در این صورت، تابع چگالی احتمال توأم این نمونه در نقطه‌های $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ به ترتیب عبارت است از:

$$\begin{aligned} f_\theta(\boldsymbol{x}) &= \prod_{i=1}^n \left[\frac{2}{\theta^2}(\theta - x_i)u(\theta - x_i)\right] = \frac{2^n}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^n (\theta - x_i)u(\theta - x_{(n)}) \\ f_\theta(\boldsymbol{y}) &= \frac{2^n}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^n (\theta - y_i)u(\theta - y_{(n)}) \end{aligned}$$

و نسبت این دوتابع چگالی‌احتمال برابر است با

$$\frac{f_\theta(\boldsymbol{x})}{f_\theta(\boldsymbol{y})} = \frac{\prod_{i=1}^n (\theta - x_i)u(\theta - x_{(n)})}{\prod_{i=1}^n (\theta - y_i)u(\theta - y_{(n)})}$$

و این نسبت بستگی به θ ندارد اگر و تنها اگر $(y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}) = (x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$ باشد. بنابراین

$$D(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} : y_{(i)} = x_{(i)}, i = 1, \ldots, n\}$$

و $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است.

مثال ۲-۳۸ در مثال ۲-۳۳ اگر $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از تابع احتمال داده شده باشد، آن‌گاه با تعریف

$$N_j = \text{تعداد } X_i \text{هایی که مقدارشان برابر } j \text{ است}, \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

به سادگی آشکار می‌شود که

$$(N_۱, N_۲, N_۳, N_۴) \sim M(n, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱+\theta}{۲}, \frac{۱-\theta}{۲})$$

و با به‌کارگیری روش لی‌من–شفه یا قضیه‌ی ۲-۲ آماره‌ی $(N_۳, N_۴)$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال است.

در به‌کارگیری روش لی‌من- شفه برای تعیین آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال در حالتی که تکیه‌گاه توزیع بستگی به یک یا چند پارامتر ناشناخته داشته باشد، دستورالعمل زیر می‌تواند سودمند باشد.

دستورالعمل به دست آوردن آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال

فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی با تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) توأم $f_\theta(\boldsymbol{x})$، $\theta \in \Theta \subseteq R^k$ باشد.

گام اول برای یافته‌های یک نمونه‌ی تصادفی دلخواه $\boldsymbol{x}$، مجموعه‌ی زیر را بر اساس $\boldsymbol{x}$ به دست آورید.

$$\Theta_{\boldsymbol{x}} = \{\theta \in \Theta : f_\theta(\boldsymbol{x}) > ۰\}$$

گام دوم رابطه‌ی هم‌ارزی «$\sim$» را روی فضای نمونه، به صورت زیر تعریف کنید

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow \begin{cases} \Theta_{\boldsymbol{x}} = \Theta_{\boldsymbol{y}} \\ \frac{f_\theta(\boldsymbol{y})}{f_\theta(\boldsymbol{x})} = k \qquad \theta \in \Theta_{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

که در آن k یک مقدار ثابت و مثبت است.

خانواده‌ی کلاس‌های هم‌ارز تحت «$\sim$» تشکیل یک افراز بسنده‌ی مینیمال را برای θ می‌دهد. در نتیجه هر آماره‌ای که چنین افرازی را ایجاد کند، یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال خواهد بود.

به سادگی می‌توان نشان داد که این دستورالعمل با روش لی‌من–شفه معادل است. برای بررسی این موضوع فرض کنید $D(\boldsymbol{x})$ مجموعه‌ای از افرازهای بسنده‌ی مینیمال باشد که از روش لی‌من–شفه به دست می‌آید و در ارتباط با $\boldsymbol{x}$ است، یعنی

$$D(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} : f_\theta(\boldsymbol{y}) \overset{\theta \in \Theta}{=} k(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) f_\theta(\boldsymbol{x})\}$$

به گونه‌ای که $k(>0)$ بستگی به θ ندارد. آن‌گاه

$$\boldsymbol{y} \in D(\boldsymbol{x}) \Longleftrightarrow \begin{cases} f_\theta(\boldsymbol{y}) = k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) f_\theta(\boldsymbol{x}) & \theta \in \Theta - \Theta_{\boldsymbol{x}} \\ f_\theta(\boldsymbol{y}) = k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) f_\theta(\boldsymbol{x}) & \theta \in \Theta_{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f_\theta(\boldsymbol{y}) = 0 & \theta \in \Theta - \Theta_{\boldsymbol{x}} \\ \frac{f_\theta(\boldsymbol{y})}{f_\theta(\boldsymbol{x})} = k & \theta \in \Theta_{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \Theta - \Theta_{\boldsymbol{x}} \subseteq \Theta - \Theta_{\boldsymbol{y}} \\ \frac{f_\theta(\boldsymbol{y})}{f_\theta(\boldsymbol{x})} = k & \theta \in \Theta_{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \Theta_{\boldsymbol{y}} \subseteq \Theta_{\boldsymbol{x}} \\ \frac{f_\theta(\boldsymbol{y})}{f_\theta(\boldsymbol{x})} = k & \theta \in \Theta_{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

هم‌چنین

$$\frac{f_\theta(\boldsymbol{y})}{f_\theta(\boldsymbol{x})} = k, \;\; \theta \in \Theta_{\boldsymbol{x}} \quad \Longrightarrow \quad f_\theta(\boldsymbol{y}) > 0, \;\; \theta \in \Theta_{\boldsymbol{x}}$$
$$\Longrightarrow \quad \Theta_{\boldsymbol{x}} \subseteq \Theta_{\boldsymbol{y}}$$

بنابراین

$$\boldsymbol{y} \in D(\boldsymbol{x}) \Longleftrightarrow \begin{cases} \Theta_{\boldsymbol{x}} = \Theta_{\boldsymbol{y}} \\ \frac{f_\theta(\boldsymbol{y})}{f_\theta(\boldsymbol{x})} = k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) & \theta \in \Theta_{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

حال دستورالعمل بالا را با مثال‌های زیر روشن می‌کنیم.

مثال ۲-۳۹ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\alpha)}, \qquad x \geq \alpha, \lambda > 0$$

می‌خواهیم یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای (α, λ) به دست آوریم. تابع چگالی احتمال توأم نمونه را در نقطه‌ی $\boldsymbol{x}$ می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$f_{\alpha,\lambda}(\boldsymbol{x}) = \lambda^n e^{-n\lambda(\bar{x}-\alpha)} u(x_{(1)} - \alpha)$$

گام اول

$$\Theta_{\boldsymbol{x}} = \{(\alpha, \lambda) : \lambda > 0, \; \alpha \leq x_{(1)}\} = (-\infty, x_{(1)}] \times (0, +\infty)$$

گام دوم

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow \begin{cases} \Theta_{\boldsymbol{x}} = \Theta_{\boldsymbol{y}} \\ \frac{f_{\alpha,\lambda}(\boldsymbol{y})}{f_{\alpha,\lambda}(\boldsymbol{x})} = k \qquad (\alpha,\lambda) \in \Theta_{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_{(۱)} = y_{(۱)} \\ \frac{\lambda^n e^{-n\lambda(\bar{y}-\alpha)}}{\lambda^n e^{-n\lambda(\bar{x}-\alpha)}} = k \qquad (\alpha,\lambda) \in \Theta_{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_{(۱)} = y_{(۱)} \\ \bar{x} = \bar{y} \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow (x_{(۱)}, \bar{x}) = (y_{(۱)}, \bar{y})$$

بنابراین با به‌کارگیری دستورالعمل بالا آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال $(X_{(۱)}, \overline{X})$ برای (α, λ) به دست آمد.

مثال ۲-۴۰ فرض کنید $X_۱, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از تابع احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = ۲(۱ - ۲^{-\frac{۱}{\theta}})۲^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x = \theta,\ \theta + ۱, \dots,\ \theta > ۰$$

می‌خواهیم یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ به دست آوریم

گام اول

$$\Theta_{\boldsymbol{x}} = \{\theta : \theta \leq x_{(۱)}\} = (۰\ ,\ x_{(۱)}]$$

گام دوم

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow \begin{cases} \Theta_{\boldsymbol{x}} = \Theta_{\boldsymbol{y}} \\ \frac{f_\theta(\boldsymbol{y})}{f_\theta(\boldsymbol{x})} = k \qquad \theta \in \Theta_{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_{(۱)} = y_{(۱)} \\ \frac{۲^{\frac{-\sum y_i}{\theta}}}{۲^{\frac{-\sum x_i}{\theta}}} = k \qquad \theta \in \Theta_{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_{(۱)} = y_{(۱)} \\ \sum_{i=۱}^n x_i = \sum_{i=۱}^n y_i \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow (x_{(۱)}, \sum_{i=۱}^n x_i) = (y_{(۱)}, \sum_{i=۱}^n y_i)$$

که با به‌کارگیری دستورالعمل بالا آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال $(X_{(1)}, \sum_{i=1}^{n} X_i)$ برای θ به دست آمد.

مثال ۲-۴۱ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq \beta,\ \alpha > 0,\ \beta \in (0, \infty)$$

می‌خواهیم یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای $\theta = (\alpha, \beta)$ به دست آوریم.

گام اول

$$\Theta_{\boldsymbol{x}} = \{(\alpha, \beta) : \alpha > 0,\ \beta \leq x_{(1)}\} = (0,\ +\infty) \times (0,\ x_{(1)}]$$

گام دوم

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} &\iff \begin{cases} \Theta_{\boldsymbol{x}} = \Theta_{\boldsymbol{y}} \\ \frac{f_\theta(\boldsymbol{y})}{f_\theta(\boldsymbol{x})} = k \qquad \theta \in \Theta_{\boldsymbol{x}} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_{(1)} = y_{(1)} \\ \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\prod_{i=1}^{n} y_i}\right)^{\alpha+1} = k \qquad \theta \in \Theta_{\boldsymbol{x}} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_{(1)} = y_{(1)} \\ \prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \\
&\iff (x_{(1)}, \prod_{i=1}^{n} x_i) = (y_{(1)}, \prod_{i=1}^{n} y_i)
\end{aligned}$$

بنابراین با به‌کارگیری دستورالعمل بالا، آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال $(X_{(1)}, \prod_{i=1}^{n} X_i)$ برای $\theta = (\alpha, \beta)$ به دست آمد.

۲-۴ روشی برای تشخیص عدم بسندگی یا بسندگی مینیمال

در این بخش تلاش می‌کنیم قضایایی را برای روشن شدن مفهوم بسندگی و بسندگی مینیمال ارائه کنیم. سپس با ذکر چند مثال شیوه‌ی به‌کارگیری قضیه‌های ارائه شده را بیان خواهیم کرد. این قضیه‌ها، این توانایی را به ما می‌دهند که تشخیص دهیم یک آماره بسنده‌ی مینیمال هست یا نه، به همین منظور بحث را با دو تعریف آغاز می‌کنیم.

تعریف ۲-۴ فرض کنید $\boldsymbol{X}$ دارای تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) توأم $f_\theta(\boldsymbol{x})$ باشد. آن‌گاه برای هر $\theta \in \Theta$ تکیه‌گاه چگالی توأم $f_\theta(\boldsymbol{x})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S^*_{\boldsymbol{X}} = \{\boldsymbol{x} : f_\theta(\boldsymbol{x}) > \circ\}$$

یادآوری یک نکته در این‌جا ضروری است.

بدون این‌که از کلیت مسأله کم شود، می‌توان فرض کرد که فضای نمونه‌ای $f_\theta(\boldsymbol{x})$ همان $S^*_{\boldsymbol{X}}$ است. چرا؟

حال یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $S^*_{\boldsymbol{X}}$ تعریف می‌کنیم. این رابطه برای اثبات بسندگی مینیمال سودمند خواهد بود.

تعریف ۲-۵ نقاط $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in S^*_{\boldsymbol{X}}$ را «معادل از نظر درستنمایی» می‌نامیم، اگر تابع $h(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) > \circ$ وجود داشته باشد، به گونه‌ای که برای هر $\theta \in \Theta$،

$$\frac{f_\theta(\boldsymbol{x})}{f_\theta(\boldsymbol{y})} = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

یا به طور کلی

$$f_\theta(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f_\theta(\boldsymbol{y})$$

لم ۲-۲ شرط لازم و کافی برای این‌که دو نقطه‌ی $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S^*_{\boldsymbol{X}}$ « معادل از نظر درستنمایی» باشند این است که برای هر $\theta_۱, \theta_۲ \in \Theta$،

$$f_{\theta_۱}(\boldsymbol{x}) f_{\theta_۲}(\boldsymbol{y}) = f_{\theta_۲}(\boldsymbol{x}) f_{\theta_۱}(\boldsymbol{y}) \qquad (۲-۱)$$

و یا

$$\frac{f_{\theta_۱}(\boldsymbol{x})}{f_{\theta_۱}(\boldsymbol{y})} = \frac{f_{\theta_۲}(\boldsymbol{x})}{f_{\theta_۲}(\boldsymbol{y})}$$

برهان شرط کافی: اگر رابطه‌ی (۲-۱) برای هر $\theta_۱, \theta_۲ \in \Theta$ برقرار باشد، آن‌گاه برای یک مقدار ثابت $\theta_۲$ و هر $\theta_۱ \in \Theta$ داریم

$$f_{\theta_۱}(\boldsymbol{x}) = \frac{f_{\theta_۲}(\boldsymbol{x})}{f_{\theta_۲}(\boldsymbol{y})}\, f_{\theta_۱}(\boldsymbol{y})$$

بنابراین برای یک مقدار ثابت $\theta_۲$، $h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{f_{\theta_۲}(\boldsymbol{x})}{f_{\theta_۲}(\boldsymbol{y})}$ بستگی به $\theta_۱$ ندارد، در نتیجه، برای هر $\theta \in \Theta$

$$f_\theta(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f_\theta(\boldsymbol{y})$$

پس $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ « معادل از نظر درستنمایی» هستند.
شرط لازم: اگر $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ « معادل از نظر درستنمایی» باشند، آن‌گاه برای هر $\theta \in \Theta$،

$$f_\theta(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f_\theta(\boldsymbol{y})$$

بنابراین برای هر $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$،

$$f_{\theta_1}(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f_{\theta_1}(\boldsymbol{y}), \qquad f_{\theta_2}(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f_{\theta_2}(\boldsymbol{y})$$

در نتیجه برای هر $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$،

$$\frac{f_{\theta_1}(\boldsymbol{x})}{f_{\theta_2}(\boldsymbol{x})} = \frac{f_{\theta_1}(\boldsymbol{y})}{f_{\theta_2}(\boldsymbol{y})}$$

لم ۲-۳ فرض کنید $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده برای θ باشد. اگر $\boldsymbol{y}$ و $\boldsymbol{x}$ دو نقطه از تکیه‌گاه باشند به گونه‌ای که $S(\boldsymbol{x}) = S(\boldsymbol{y})$ آن‌گاه $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ «معادل از نظر درستنمایی» هستند.

برهان چون $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده است، با به‌کارگیری قضیه‌ی ۲-۱، برای هر $\theta \in \Theta$،

$$f_\theta(\boldsymbol{x}) = k(\boldsymbol{x}) g(\theta, S(\boldsymbol{x})), \qquad f_\theta(\boldsymbol{y}) = k(\boldsymbol{y}) g(\theta, S(\boldsymbol{y}))$$

پس

$$\frac{f_\theta(\boldsymbol{x})}{k(\boldsymbol{x})} = g(\theta, S(\boldsymbol{x})) \overset{\text{(بنابر فرض)}}{=} g(\theta, S(\boldsymbol{y})) = \frac{f_\theta(\boldsymbol{y})}{k(\boldsymbol{y})}$$

بنابراین، برای هر $\theta \in \Theta$،

$$f_\theta(\boldsymbol{x}) = \frac{k(\boldsymbol{x})}{k(\boldsymbol{y})} f_\theta(\boldsymbol{y})$$

یا

$$f_\theta(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f_\theta(\boldsymbol{y})$$

در نتیجه $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ «معادل از نظر درستنمایی» هستند.

قضیه‌ی ۲-۳ فرض کنید $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده برای θ باشد. اگر برای هر $\boldsymbol{y}$ و $\boldsymbol{x}$ که «معادل از نظر درستنمایی» باشند، نتیجه بگیریم که $S(\boldsymbol{x}) = S(\boldsymbol{y})$ آن‌گاه $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال است.

برهان فرض کنید $T(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده‌ی دلخواه برای θ باشد. نشان می‌دهیم که $S(\boldsymbol{X})$ تابعی از $T(\boldsymbol{X})$ است. فرض کنید $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ دو نقطه از تکیه‌گاه باشند به گونه‌ای که $T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y})$. با توجه به لم ۲-۳، $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ «معادل از نظر درستنمایی» هستند، اما بر اساس فرض قضیه $S(\boldsymbol{x}) = S(\boldsymbol{y})$. در نتیجه با توجه به لم ۲-۱، $S(\boldsymbol{X})$ تابعی از $T(\boldsymbol{X})$ است. پس $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال است.

مثال ۲-۴۲ اگر $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $U(0, \theta)$ باشد، آن‌گاه

$$f_\theta(\boldsymbol{x}) = \theta^{-n} u(\theta - x_{(n)}), \quad \theta > 0$$

و با توجه به قضیه‌ی ۲-۱، $S(\boldsymbol{X}) = X_{(n)}$ یک آماره‌ی بسنده است.
برای این‌که نشان دهیم $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است، $\boldsymbol{y}$ و $\boldsymbol{x}$ را دو نقطه‌ی دلخواه از تکیه‌گاه در نظر می‌گیریم که «معادل از نظر درستنمایی» باشند، یعنی برای هر $\theta \in \Theta$

$$f_\theta(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f_\theta(\boldsymbol{y})$$

یا

$$u(\theta - x_{(n)}) = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) u(\theta - y_{(n)}), \ \theta \in (0, \infty)$$

که نتیجه می‌دهد $x_{(n)} = y_{(n)}$ و با به‌کارگیری قضیه‌ی ۲-۳، $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال خواهد بود.

مثال ۲-۴۳ اگر $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $E(1, \sigma)$ باشد، آن‌گاه

$$f_\sigma(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{\sigma}\sum(x_i - 1)} u(x_{(1)} - 1)$$

و با توجه به قضیه‌ی ۲-۱، $S(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ یک آماره‌ی بسنده است. برای این‌که نشان دهیم $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای σ است، $\boldsymbol{x}$و $\boldsymbol{y}$ را دو نقطه‌ی دلخواه از تکیه‌گاه در نظر می‌گیریم که «معادل از نظر درستنمایی» باشند، یعنی برای هر $\sigma > 0$

$$f_\sigma(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f_\sigma(\boldsymbol{y})$$

یا

$$e^{-\frac{1}{\sigma}\sum x_i} u(x_{(1)} - 1) = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) e^{-\frac{1}{\sigma}\sum y_i} u(y_{(1)} - 1)$$

که نتیجه می‌دهد $\sum x_i = \sum y_i$ و با استفاده از قضیه‌ی ۲-۳، $S(\boldsymbol{X}) = \sum X_i$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال خواهد بود.

سه قضیه‌ی زیر نشان می‌دهند که چگونه عدم بسندگی و عدم بسندگی مینیمال را بررسی کنیم.

قضیه‌ی ۲-۴ فرض کنید $T(\boldsymbol{X})$ یک آماره باشد. اگر برای دو نقطه‌ی $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ از تکیه‌گاه، زوج $\theta_۱, \theta_۲ \in \Theta$ وجود داشته باشند که در آن

الف) $T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y})$ ب) $f_{\theta_۱}(\boldsymbol{x}) f_{\theta_۲}(\boldsymbol{y}) \neq f_{\theta_۲}(\boldsymbol{x}) f_{\theta_۱}(\boldsymbol{y})$

آن‌گاه $T(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده نیست.

برهان فرض کنید T یک آماره‌ی بسنده برای θ باشد. اگر $T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y})$، آن‌گاه با به‌کارگیری لم ۲-۳، $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ «معادل از نظر درستنمایی» بوده و با به‌کارگیری لم ۲-۲، برای هر $\theta_۱, \theta_۲ \in \Theta$، $f_{\theta_۱}(\boldsymbol{x}) f_{\theta_۲}(\boldsymbol{y}) = f_{\theta_۲}(\boldsymbol{x}) f_{\theta_۱}(\boldsymbol{y})$، که این خلاف فرض ب است. بنابراین T نمی‌تواند یک آماره‌ی بسنده برای θ باشد.

مثال ۲-۴۴ فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$، $n > ۵$، یک نمونه‌ی تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^۲} & ۰ < x \leq \theta \\ \frac{(۲\theta - x)}{\theta^۲} & \theta \leq x < ۲\theta \end{cases}$$

با به‌کارگیری قضیه‌ی ۲-۴، می‌خواهیم نشان دهیم که

$$T(\boldsymbol{X}) = (\underset{۱ \leq i \leq n}{\operatorname{med}} X_i, \ \max_{۱ \leq i \leq n} X_i)$$

آماره‌ی بسنده‌ی توأم برای θ نیست. حال اگر $\boldsymbol{x}$، $\boldsymbol{y}$، $\theta_۱$ و $\theta_۲$ را به صورت زیر انتخاب کنیم

$$\boldsymbol{y} = (\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}, ۱, ۱, \ldots, ۱), \ \boldsymbol{x} = (\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴}, \frac{۵}{۴}, \frac{۳}{۲}, ۱, \ldots, ۱), \ \theta_۲ = ۱, \ \theta_۱ = \frac{۹}{۸}$$

آن‌گاه

$$T(\boldsymbol{x}) = (۱, \tfrac{۳}{۲}) = T(\boldsymbol{y})$$

اما

$$\begin{aligned} f_{\theta_۱}(\boldsymbol{x}) f_{\theta_۲}(\boldsymbol{y}) &= ۳(\tfrac{۹}{۸})^{-۲n} ۲^{-۸} \\ f_{\theta_۲}(\boldsymbol{x}) f_{\theta_۱}(\boldsymbol{y}) &= ۳^۲(\tfrac{۹}{۸})^{-۲n} ۲^{-۱۰} \end{aligned}$$

بنابراین

$$f_{\theta_۱}(\boldsymbol{x}) f_{\theta_۲}(\boldsymbol{y}) \neq f_{\theta_۲}(\boldsymbol{x}) f_{\theta_۱}(\boldsymbol{y})$$

در نتیجه T یک آماره‌ی بسنده نیست. (در صورت امکان یک آماره‌ی بسنده برای θ به دست آورید).

قضیه‌ی ۲-۵ فرض کنید $T(\boldsymbol{X})$ یک آماره و $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال باشد. اگر دو نقطه‌ی $\boldsymbol{y}$ و $\boldsymbol{x}$ از تکیه‌گاه $S^*_{\boldsymbol{X}}$ وجود داشته باشد که $T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y})$ و $S(\boldsymbol{x}) \neq S(\boldsymbol{y})$، آن‌گاه $T(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده نیست.

برهان فرض‌کنید $T(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده باشد. با توجه به این‌که $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال است، بنابراین S تابعی از T است و با به‌کارگیری لم ۲-۱ داریم

$$T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y}) \Longrightarrow S(\boldsymbol{x}) = S(\boldsymbol{y})$$

و این خلاف فرض قضیه است.

مثال ۲-۴۵ فرض کنید X_1, X_2 دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان از پواسون θ باشند. واضح است که $S(\boldsymbol{X}) = X_1 + X_2$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است. حال آماره‌ی $T(\boldsymbol{X}) = X_1 + 2X_2$ را در نظر گیرید. با استفاده از قضیه‌ی ۲-۵ به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که $T(\boldsymbol{X})$ بسنده نیست. برای این کار، فرض کنید $\boldsymbol{x} = (2, 0)$ و $\boldsymbol{y} = (0, 1)$ آن‌گاه

$$T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y}) \quad \text{و} \quad S(\boldsymbol{x}) \neq S(\boldsymbol{y})$$

بنابراین، با به‌کارگیری قضیه‌ی ۲-۵، $T(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده برای θ نیست.

مثال ۲-۴۶ فرض کنید X_1, X_2 دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان $B(1, \theta)$ باشند. واضح است که $S(\boldsymbol{X}) = X_1 + X_2$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است. حال آماره‌ی $T(\boldsymbol{X}) = (X_1 - X_2)^2$ را در نظر گیرید. با استفاده از قضیه‌ی ۲-۵ به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که $T(\boldsymbol{X})$ بسنده نیست. برای این کار، فرض کنید $\boldsymbol{x} = (0, 0)$ و $\boldsymbol{y} = (1, 1)$ آن‌گاه

$$T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y}) \quad \text{و} \quad S(\boldsymbol{x}) \neq S(\boldsymbol{y})$$

بنابراین، با به‌کارگیری قضیه‌ی ۲-۵، $T(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده برای θ نیست.

مثال ۲-۴۷ فرض کنید X_1, X_2, X_3 یک نمونه‌ی تصادفی سه‌تایی از توزیع $B(1, \theta)$ باشد. واضح است که $S(\boldsymbol{X}) = X_1 + X_2 + X_3$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است. حال آماره‌ی $T_1(\boldsymbol{X}) = X_1 + 2X_2 + X_3$ را در نظر گیرید. با به‌کارگیری قضیه‌ی ۲-۵، به سادگی

می‌توان نشان داد که $T_۱(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده برای θ نیست. این مسأله را می‌توان با توجه به افرازهای ایجاد شده نیز بررسی کرد. افرازهای ایجاد شده توسط S و $T_۱$ به ترتیب عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}\Pi_S &= \{C_۰, C_۱, C_۲, C_۳\}\\ \Pi_{T_۱} &= \{C'_۰, C'_۱, C'_۲, C'_۳, C'_۴\}\end{aligned}$$

به گونه‌ای که

$$\begin{aligned}C_۰ &= \{(۰,۰,۰)\},\ \ C_۱ = \{(۱,۰,۰),(۰,۱,۰),(۰,۰,۱)\}\\ C_۲ &= \{(۱,۱,۰),(۱,۰,۱),(۰,۱,۱)\},\ \ C_۳ = \{(۱,۱,۱)\}\\ C'_۰ &= \{(۰,۰,۰)\},\ \ C'_۱ = \{(۱,۰,۰),(۰,۰,۱)\}\\ C'_۲ &= \{(۱,۰,۱),(۰,۱,۰)\},\ \ C'_۳ = \{(۱,۱,۰),(۰,۱,۱)\}\\ C'_۴ &= \{(۱,۱,۱)\}\end{aligned}$$

بنابراین دیده می‌شود که S تلخیصی از $T_۱$ نیست، یعنی S تابعی از $T_۱$ نیست. پس $T_۱$ نمی‌تواند یک آماره‌ی بسنده برای θ باشد.
توجه داشته باشید که در این مثال ضریب $X_۲$، یعنی عدد ۲، نقش مهمی را ایفا می‌کند. این مسأله در مثال بعد روشن می‌شود.

مثال ۲-۴۸ در مثال ۲-۴۷، فرض کنید $T_۲(\boldsymbol{X}) = X_۱ + ۵X_۲ + X_۳$ اگر افرازهای ایجاد شده توسط $T_۲$ و S را تشکیل دهیم، دیده می‌شود که مجموعه‌های افراز شده در S تلخیصی از مجموعه‌های افراز شده در $T_۲$ است و از آن‌جا که S بسنده است، بنابراین $T_۲$ نیز بسنده است. توجه داشته باشید که در این مثال، هر عددی بزرگ‌تر از ۲ به عنوان ضریب $X_۲$ در نظر گرفته شود، همین نتیجه را خواهد داد.

مثال ۲-۴۹ فرض کنید $X_۱, X_۲, X_۳, X_۴$ یک نمونه‌ی تصادفی چهارتایی از توزیع $B(۱,\theta)$ باشد. واضح است که $S(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=۱}^{۴} X_i$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است. حال آماره‌های زیر را در نظر گیرید

$$\begin{aligned}T_۱(\boldsymbol{X}) &= ۲X_۱ + X_۲ + X_۳ + X_۴\\ T_۲(\boldsymbol{X}) &= ۳X_۱ + X_۲ + X_۳ + X_۴\\ T_۳(\boldsymbol{X}) &= ۴X_۱ + X_۲ + X_۳ + X_۴\end{aligned}$$

افرازهای تولید شده توسط S، $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ به ترتیب عبارت‌اند از

$$\Pi_S = \{C_۰, C_۱, C_۲, C_۳, C_۴\}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
C_۰ &= \{(۰,۰,۰,۰)\} \\
C_۱ &= \{(۱,۰,۰,۰),(۰,۱,۰,۰),(۰,۰,۱,۰),(۰,۰,۰,۱)\} \\
C_۲ &= \{(۱,۱,۰,۰),(۱,۰,۱,۰),(۱,۰,۰,۱),(۰,۰,۱,۱),(۰,۱,۱,۰),(۰,۱,۰,۱)\} \\
C_۳ &= \{(۱,۱,۱,۰),(۱,۱,۰,۱),(۱,۰,۱,۱),(۰,۱,۱,۱)\} \\
C_۴ &= \{(۱,۱,۱,۱)\}
\end{aligned}$$

$$\Pi_{T_۱} = \{D_۰, D_۱, D_۲, D_۳, D_۴, D_۵\}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
D_۰ &= \{(۰,۰,۰,۰)\} \\
D_۱ &= \{(۰,۱,۰,۰),(۰,۰,۱,۰,),(۰,۰,۰,۱)\} \\
D_۲ &= \{(۱,۰,۰,۰),(۰,۱,۱,۰),(۰,۱,۰,۱),(۰,۰,۱,۱)\} \\
D_۳ &= \{(۱,۱,۰,۰),(۱,۰,۱,۰),(۱,۰,۰,۱),(۰,۱,۱,۱)\} \\
D_۴ &= \{(۱,۱,۱,۰),(۱,۱,۰,۱),(۱,۰,۱,۱)\} \\
D_۵ &= \{(۱,۱,۱,۱)\}
\end{aligned}$$

$$\Pi_{T_۲} = \{E_۰, E_۱, E_۲, E_۳, E_۴, E_۵, E_۶\}$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
E_{۰} &= \{(۰,۰,۰,۰)\} \\
E_{۱} &= \{(۰,۱,۰,۰),(۰,۰,۱,۰,),(۰,۰,۰,۱)\} \\
E_{۲} &= \{(۰,۱,۱,۰),(۰,۱,۰,۱),(۰,۰,۱,۱)\} \\
E_{۳} &= \{(۱,۰,۰,۰),(۰,۱,۱,۱)\} \\
E_{۴} &= \{(۱,۱,۰,۰),(۱,۰,۱,۰),(۱,۰,۰,۱)\} \\
E_{۵} &= \{(۱,۱,۱,۰),(۱,۱,۰,۱),(۱,۰,۱,۱)\} \\
E_{۶} &= \{(۱,۱,۱,۱)\}
\end{aligned}
$$

$$\Pi_{T_{۳}} = \{F_{۰}, F_{۱}, F_{۲}, F_{۳}, F_{۴}, F_{۵}, F_{۶}, F_{۷}\}$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
F_{۰} &= \{(۰,۰,۰,۰)\} \\
F_{۱} &= \{(۰,۱,۰,۰),(۰,۰,۱,۰,),(۰,۰,۰,۱)\} \\
F_{۲} &= \{(۰,۱,۱,۰),(۰,۱,۰,۱),(۰,۰,۱,۱)\} \\
F_{۳} &= \{(۰,۱,۱,۱)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{۴} &= \{(۱,۰,۰,۰)\} \\
F_{۵} &= \{(۱,۱,۰,۰),(۱,۰,۱,۰),(۱,۰,۰,۱)\} \\
F_{۶} &= \{(۱,۱,۱,۰),(۱,۱,۰,۱),(۱,۰,۱,۱)\} \\
F_{۷} &= \{(۱,۱,۱,۱)\}
\end{aligned}
$$

دیده می‌شود که S تلخیصی از $T_{۱}$ یا $T_{۲}$ نیست، یعنی S تابعی از T_i، $i = ۱, ۲$ نیست، اما S تلخیصی از $T_{۳}$ است پس $T_{۱}$ و $T_{۲}$ نمی‌توانند یک آماره‌ی بسنده برای θ باشند اما $T_{۳}$ یک آماره‌ی بسنده است. توجه داشته باشید که در این مثال نیز ضریب $X_{۱}$، یعنی هر عدد کم‌تر از $n(=۴)$، نقش مهمی را ایفا می‌کند. مانند مثال ۲-۴۸، در این‌جا نیز هر عدد بزرگ‌تر از ۳، که همان $n - ۱$ است، اگر به عنوان ضریب $X_{۱}$ در نظر گرفته شود، همان نتیجه‌ی مثال ۲-۴۸ را خواهد داد.

قضیه‌ی ۲-۶ فرض کنید $S(\boldsymbol{X})$ و $T(\boldsymbol{X})$ آماره‌های بسنده باشند. اگر دو نقطه‌ی $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ از تکیه‌گاه $S^*_{\boldsymbol{X}}$ وجود داشته باشند به گونه‌ای که $S(\boldsymbol{x}) = S(\boldsymbol{y})$ و $T(\boldsymbol{x}) \neq T(\boldsymbol{y})$، آن‌گاه $T(\boldsymbol{X})$ بسنده‌ی مینیمال نیست.

برهان اگر T آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال باشد، چون $S(\boldsymbol{X})$ یک آماره‌ی بسنده است، پس T تابعی از S خواهد بود و با به‌کارگیری لم ۲-۱ داریم

$$S(\boldsymbol{x}) = S(\boldsymbol{y}) \Longrightarrow T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y})$$

که این خلاف فرض قضیه است.

مثال ۲-۵۰ در مثال ۲-۴۸، $S(\boldsymbol{X})$ و $T_۲(\boldsymbol{X})$ هر دو آماره‌ی بسنده هستند. حال اگر $\boldsymbol{x} = (۱, ۱, ۰)$ و $\boldsymbol{y} = (۱, ۰, ۱)$، آن‌گاه $S(\boldsymbol{x}) = S(\boldsymbol{y})$ اما $T_۲(\boldsymbol{x}) \neq T_۲(\boldsymbol{y})$، بنابراین با به‌کارگیری قضیه‌ی ۲-۶، $T_۲$ نمی‌تواند یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال باشد.

یادآوری یک نکته در این‌جا ضروری است.

به‌کارگیری افرازها بر روی فضای نمونه، به عنوان ابزار سومی برای تعیین و تشخیص آماره‌های بسنده‌ی مینیمال است. اگر چه این روش به طور معمول مورد تأکید قرار نمی‌گیرد، اما در عمل بسیار سودمند و مؤثر است. خلاصه‌ای از آن‌چه که در این رابطه می‌توان بیان کرد به شرح زیر است.

- یک افراز بسنده‌ی مینیمال $\Pi_۰$ روی فضای نمونه را می‌توان با به‌کارگیری رابطه‌ی هم‌ارزی که در روش لی‌من-شفه ارائه شده، به دست آورد. آن‌گاه هر افراز بسنده Π باید دارای این ویژگی باشد که $\Pi_۰$ را بتوان از تلخیص Π به دست آورد، یعنی با ترکیب کلاس‌های هم‌ارز در Π. حال می‌توان بسندگی Π را بررسی کرد، به این ترتیب که افراز بسنده‌ی مینیمال $\Pi_۰$ را تشکیل دهیم، اگر $\Pi_۰$ تلخیصی از Π باشد، آن‌گاه می‌توان گفت که Π بسنده است.
- اگر دو نقطه‌ی $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ در دو کلاس هم‌ارزی مختلف از $\Pi_۰$ وجود داشته باشند به گونه‌ای که در یک کلاس هم‌ارزی Π قرار گیرند، آن‌گاه Π نمی‌تواند یک افراز بسنده باشد. برای روشن شدن مطلب، مثال ۲-۳۶ را بررسی می‌کنیم.

بر اساس مثال ۲-۳۶، $\sum_{i=۱}^{n} X_i^۲$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال است. میانگین توزیع مورد نظر $(\frac{\theta\pi}{۲})^{\frac{۱}{۲}}$ است و بر اساس روش گشتاوری، براوردگر θ آماره‌ی $\frac{۲\overline{X}_n^۲}{\pi}$ است که $\overline{X}_n$ میانگین نمونه است.

می‌خواهیم بسندگی این براوردگر یا به عبارت دیگر بسندگی $\overline{X}_n$ را بررسی کنیم. به سادگی می‌توان نشان داد که $\overline{X}_n$ بسنده نیست. زیرا برای $n > 1$، می‌توانیم دو نقطه‌ی $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ از تکیه‌گاه را به گونه‌ای بیابیم که $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ اما $\sum_{i=1}^n x_i^2 \neq \sum_{i=1}^n y_i^2$ در نتیجه $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ در دو کلاس هم‌ارزی مختلف از افراز بسنده‌ی مینیمال قرار دارند، در حالی که در یک کلاس هم‌ارزی از افرازی که توسط $\overline{X}_n$ ایجاد می‌شود، قرار می‌گیرند. بنابراین افراز بسنده‌ی مینیمال تلخیصی از افراز ایجاد شده توسط $\overline{X}_n$ نیست، در نتیجه $\overline{X}_n$ هم نمی‌تواند یک آماره‌ی بسنده باشد.

۲-۵ کامل بودن

یک ویژگی جالب که ویژگی‌های یکتایی مشخصی را تضمین می‌کند و موجب سادگی بسیاری از مسائل آماری می‌شود، ویژگی کامل بودن آماره یا به عبارت دقیق‌تر ویژگی کامل بودن خانواده‌ی توزیع‌های تولید شده توسط آماره است. خانواده‌ی توزیع‌های کامل کاربرد وسیعی در مسائل براوردیابی برای پیدا کردن بهترین براوردگر نااریب دارد. در این بخش به اختصار به آماره‌های کامل اشاره خواهیم داشت و به دنبال آن ارتباط بین آماره‌های کامل و بسنده‌ی مینیمال را بیان خواهیم کرد. هم‌چنین آماره‌های کامل کراندار را معرفی و در پایان قضیه‌ی مهمی را تحت عنوان قضیه‌ی باسو اثبات خواهیم کرد.

با این مقدمه، فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از خانواده‌ی توزیع‌های $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ باشد. اگر $T(\boldsymbol{X})$ یک آماره باشد، آن‌گاه گوییم $\{P_\theta^T : \theta \in \Theta\}$ خانواده‌ی توزیع‌های تولید شده توسط آماره‌ی T است.

تعریف ۲-۶ خانواده‌ی توزیع‌های تولید شده توسط آماره‌ی T، $\{P_\theta^T : \theta \in \Theta\}$، را کامل گوییم، اگر برای هر آماره‌ی $g(T)$،

$$E_\theta(g(T)) = 0, \ \ \forall\theta \in \Theta \Longrightarrow P_\theta(g(T) = 0) = 1, \ \ \forall\theta \in \Theta$$

دراصطلاح آماره‌ی T را برای θ کامل می‌گوییم، اگر خانواده‌ی توزیع‌های تولید شده توسط T کامل باشد. یک توضیح عمومی در ارتباط با تعریف ۲-۶ این است که خانواده‌ی توزیع‌های تولید شده توسط T کامل است، اگر هیچ براوردگر نااریب صفر غیر از براوردگر صفر وجود نداشته باشد. به عبارت دیگر تنها براوردگر نااریب صفر در این خانواده خود صفر است.

برای روشن شدن تعریف، به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۲-۵۱ فرض کنید $X \sim B(n, p)$ که در آن $p \in (0, 1)$ نامعلوم و n معلوم است. نشان دهید که خانواده‌ی توزیع‌های تولید شده توسط X کامل است.

حل برای هر آماره‌ی $g(X)$ و برای هر $p \in (۰, ۱)$،

$$\begin{aligned} E_p(g(X)) = ۰ \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{x=۰}^{n} g(x)\binom{n}{x} p^x (۱-p)^{n-x} = ۰ \\ &\Longrightarrow \quad \sum_{x=۰}^{n} g(x)\binom{n}{x} (\frac{p}{۱-p})^x = ۰ \\ &\Longrightarrow \quad \sum_{x=۰}^{n} h(x)\gamma^x = ۰, \quad \forall\, \gamma \in (۰, \infty) \end{aligned}$$

که در آن $\gamma = \frac{p}{۱-p}$ و $h(x) = g(x)\binom{n}{x}$ است.
$\varphi(\gamma) = \sum_{x=۰}^{n} h(x)\gamma^x$ یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه‌ی n بر حسب γ است و بنابراین حداکثر n ریشه‌ی حقیقی دارد. برای این‌که $\varphi(\gamma)$ برای هر $\gamma \in (۰, \infty)$ مساوی صفر باشد، لازم است که

$$h(x) = ۰, \quad \forall x = ۰, ۱, \ldots, n$$

یعنی

$$g(x) = ۰, \quad \forall x = ۰, ۱, \ldots, n$$

و این بدان معنی است که برای هر $p \in (۰, ۱)$،

$$P_p(g(X) = ۰) = ۱$$

بنابراین، خانواده‌ی توزیع‌های $\{B(n, p) : p \in (۰, ۱)\}$ کامل است.

یادآوری یک نکته در این‌جا ضروری است.

در مثال ۲-۵۱ اگر به‌جای بازه‌ی $(۰, ۱)$ فضای پارامتر تنها بیش‌تر از n عضو داشته باشد، نتیجه‌ی مشابه با آن‌چه داشتیم، به دست خواهد آمد. اما اگر فضای پارامتر شامل حداکثر n عضو باشد، آن‌گاه ممکن است نتیجه نوع دیگری باشد. مثال زیر موضوع را روشن می‌کند.

مثال ۲-۵۲ فرض کنید $X \sim B(۲, p)$ با $p \in \{\frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۴}\}$، نشان دهید که خانواده‌ی توزیع‌های تولید شده توسط X کامل نیست.

حل برای این‌که نشان دهیم خانواده‌ی داده شده کامل نیست، کافی است نشان دهیم آماره‌ی $g(X)$ وجود دارد، به گونه‌ای که

$$E_p(g(X)) = ۰, \quad \forall p \in \{\tfrac{۱}{۴}, \tfrac{۳}{۴}\} \qquad (۲-۲)$$

اما $g(X)$ با احتمال یک صفر نیست، یعنی برای بعضی مقدارهای ممکن X، $g(x)$ متحد با صفر نیست. برای بررسی شرط بالا داریم

$$\begin{cases} \sum_{x=۰}^{۲} g(x)\binom{۲}{x}(\frac{۱}{۴})^x(\frac{۳}{۴})^{۲-x} = ۰ \\ \sum_{x=۰}^{۲} g(x)\binom{۲}{x}(\frac{۳}{۴})^x(\frac{۱}{۴})^{۲-x} = ۰ \end{cases}$$

یعنی

$$\begin{cases} ۹g(۰) + ۶g(۱) + g(۲) = ۰ \\ g(۰) + ۶g(۱) + ۹g(۲) = ۰ \end{cases}$$

از حل دستگاه بالا می‌توان به سادگی نتیجه گرفت که برای $a \neq ۰$،

$$g(۰) = g(۲) = a, \;\; g(۱) = -\frac{۵}{۳}a$$

یک جواب عمومی، دستگاه معادلات بالا است، که در آن $g(x)$ متحد با صفر نیست. اما شرط (۲-۲) برقرار است. بنابراین خانواده‌ی توزیع‌های داده شده کامل نیست.

مثال ۲-۵۳ فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $P(\theta)$ که $\theta \in (۰, \infty)$ باشد. می‌دانیم که $T = \sum_{i=۱}^{n} X_i$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است. نشان دهید خانواده‌ی توزیع‌های تولید شده توسط T کامل است.

حل می‌دانیم که $T \sim P(n\theta)$، بنابراین برای هر آماره‌ی $g(T)$ و هر $\theta \in (۰, \infty)$،

$$\begin{aligned} E_\theta(g(T)) = ۰ \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{t=۰}^{\infty} g(t)\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^t}{t!} = ۰ \\ &\Longrightarrow \quad \sum_{t=۰}^{\infty} g(t)\frac{n^t}{t!}\theta^t = ۰ \\ (h(t) = g(t)\frac{n^t}{t!} \text{ با انتخاب}) \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{t=۰}^{\infty} h(t)\theta^t = ۰ \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که $k(\theta) = \sum_{t=۰}^{\infty} h(t)\theta^t$ یک سری توانی از θ است بنابراین برای این‌که برای هر $\theta \in (۰, \infty)$، داشته باشیم $k(\theta) = ۰$، باید

$$h(t) = ۰, \;\; \forall t = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

یعنی

$$g(t) = ०, \quad \forall t = ०, ١, ٢, \dots$$

این بدان معنی است که برای هر $\theta \in \Theta$،

$$P_\theta\{g(T) = ०\} = ١$$

بنابراین خانواده‌ی داده شده کامل است.

یادآوری یک نکته در این‌جا ضروری است.

با توجه به مثال ۲-۵۳ به سادگی آشکار می‌شود که اگر $n \geq ٢$، آن‌گاه $X_١$ برای θ کامل است، اما بسنده نیست. (چرا؟)

مثال ۲-۵۴ فرض کنید $X \sim N(\theta, ١)$ که $\theta \in (-\infty, \infty)$ باشد. نشان دهید X برای θ کامل است.

حل برای هر آماره‌ی $g(X)$ و برای هر $\theta \in (-\infty, \infty)$،

$$\begin{aligned}
E_\theta(g(X)) = ० \quad &\Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\frac{١}{\sqrt{٢\pi}}e^{-\frac{١}{٢}(x-\theta)^٢}dx = ० \\
&\Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} (g(x)e^{-\frac{١}{٢}x^٢})e^{\theta x}dx = ० \\
(h(x) = g(x)e^{-\frac{١}{٢}x^٢} \text{ با انتخاب}) \quad &\Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{\theta x}dx = ० \\
(\text{بنابر ویژگی یکتایی تبدیل‌های لاپلاس}) \quad &\Longrightarrow \quad h(x) = ०, \quad \forall x \in R \\
&\Longrightarrow \quad g(x) = ०, \quad \forall x \in R
\end{aligned}$$

بنابراین X برای θ کامل است.

یادآوری دو نکته در این‌جا ضروری است.

- فرض کنید $X_١, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $N(\theta, ١)$ باشد. می‌دانیم که $\overline{X} \sim N(\theta, \frac{١}{n})$ برای θ بسنده است. با استدلالی مشابه مثال قبل، $\overline{X}$ نیز برای θ کامل است. بنابراین $\overline{X}$ یک آماره‌ی بسنده‌ی کامل است.
- اگر T برای θ کامل باشد، می‌توان نشان داد که هر تبدیل یک به یک از T، برای مثال $S = h(T)$، نیز یک آماره‌ی کامل برای θ است و برعکس.

مثال ۲-۵۵ فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشد، که در آن $\mu\in(-\infty,\infty)$ و $\sigma>0$ هر دو نامعلوم هستند. نشان دهید که $(\sum X_i,\sum X_i^2)$ یک آماره‌ی بسنده‌ی کامل برای $\theta=(\mu,\sigma^2)$ است.

حل می‌دانیم که $(\sum X_i,\sum X_i^2)$ یک آماره‌ی بسنده برای $\theta=(\mu,\sigma^2)$ است. از طرفی $(\overline{X},\sum(X_i-\overline{X})^2)$ یک رابطه‌ی یک به یک با $(\sum X_i,\sum X_i^2)$ دارد. بنابراین کافی است نشان دهیم که $(\overline{X},\sum(X_i-\overline{X})^2)$ کامل است. با توجه به این‌که $\overline{X}$ و $\sum(X_i-\overline{X})^2$ مستقل از هم هستند و

$$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}),\ \ \sum(X_i-\overline{X})^2\sim\sigma^2\chi^2_{(n-1)}$$

حال با به‌کارگیری ویژگی یکتایی تبدیل‌های لاپلاس به سادگی می‌توان کامل بودن آماره را نتیجه گرفت.

مثال ۲-۵۶ فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $U(0,\theta)$، $\theta>0$ باشد. می‌دانیم $X_{(n)}=\max(X_1,\dots,X_n)$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال است. نشان دهید $X_{(n)}$ یک آماره‌ی کامل است؟

حل می‌دانیم که تابع چگالی احتمال $X_{(n)}$ به شکل زیر است.

$$f_\theta(t)=\frac{nt^{n-1}}{\theta^n},\quad 0<t<\theta$$

برای هر آماره‌ی $g(X_{(n)})$ و برای هر $\theta\in(0,\infty)$،

$$\begin{aligned}E_\theta(g(X_{(n)}))=0 \quad &\Longrightarrow \int_0^\theta g(t)\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt=0\\ &\Longrightarrow \int_0^\theta g(t)t^{n-1}dt=0\end{aligned}$$

حال اگر $g(\cdot)$ تابعی پیوسته از t باشد، آن‌گاه با مشتق‌گیری نسبت به θ از معادله‌ی اخیر خواهیم داشت

$$g(\theta)\theta^{n-1}=0,\quad \forall\theta\in(0,\infty)$$

که معادل با عبارت زیر است.

$$g(t)=0,\quad \forall t>0$$

نتیجه‌ی حاصل حتی برای حالت‌هایی که g پیوسته نیست نیز درست است. بنابراین $X_{(n)}$ یک آماره‌ی بسنده‌ی (مینیمال) کامل برای θ است.

مثال ۲-۵۷ فرض کنید $X \sim N(0,\theta)$ و $\theta > 0$ باشد.
الف) آیا X یک آماره‌ی کامل برای θ است؟
ب) آیا $T(X) = X^2$ یک آماره‌ی کامل برای θ است؟

حل الف) آماره‌ی X یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است، اما کامل نیست چون برای هر $\theta > 0$، $E_\theta(X) = 0$ اما برای هر $\theta \in (0,\infty)$

$$P_\theta(X = 0) = 0, \qquad \text{یا} \qquad P_\theta(X \neq 0) > 0$$

ب) می‌دانیم که $T = X^2 \sim \theta\chi^2_{(1)}$، بنابراین برای هر آماره‌ی $g(T)$ و برای هر $\theta \in (0,\infty)$،

$$\begin{aligned} E_\theta(g(T)) = 0 \quad &\Longrightarrow \int_0^\infty g(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}t^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{t}{2\theta}}dt = 0 \\ &\Longrightarrow \int_0^\infty (g(t)t^{-\frac{1}{2}})e^{-\frac{t}{2\theta}}dt = 0 \\ \text{(بنابر ویژگی یکتایی تبدیل‌های لاپلاس)} \quad &\Longrightarrow g(t)t^{-\frac{1}{2}} = 0,\ \forall t > 0 \\ &\Longrightarrow g(t) = 0,\ \forall t > 0 \end{aligned}$$

پس $T = X^2$ یک آماره کامل است.

مثال ۲-۵۸ فرض کنید $X \sim U(-\theta,\theta)$، $\theta > 0$. آیا X یک آماره‌ی کامل است؟

حل می‌دانیم که X یک آماره‌ی بسنده برای θ است، از طرفی چون

$$E_\theta(X) = 0,\ \forall\theta > 0$$

اما برای هر $\theta \in (0,\infty)$

$$P_\theta(X = 0) = 0, \qquad \text{یا} \qquad P_\theta(X \neq 0) > 0$$

بنابراین X یک آماره‌ی کامل نیست.

یادآوری دو نکته در این‌جا ضروری است.

- با توجه به مثال‌های ۲-۵۷ و ۲-۵۸ می‌توان در رابطه با آماره‌هایی که کامل نیستند یک نتیجه‌گیری منطقی کرد. آماره‌هایی که دارای توزیع متقارن حول صفر یا یک عدد معلوم باشند، در صورت وجود امیدشان، نمی‌توانند کامل باشند. (چرا؟)

• اگر $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ دارای تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) زیر باشد،

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(x_1, \dots, x_n) \propto \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \theta_i T_i(x_1, \dots, x_n) + R(x_1, \dots, x_n)\right)$$

آن‌گاه $\boldsymbol{T} = (T_1(\boldsymbol{X}), \dots, T_k(\boldsymbol{X}))$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ است و در صورتی که بعد آماره با بعد فضای پارامتر یکی باشد، آماره‌ی $\boldsymbol{T}$ کامل نیز است. به عبارت دیگر اگر در خانواده‌ی توزیع‌های kپارامتری با شرایط مطلوب اگر مجموعه $\Theta \subseteq R^k$ شامل یک مجموعه‌ی باز (بورل) به شکل $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_k, b_k)$ باشد، آن‌گاه آماره‌ی $(T_1, \dots, T_k)$ علاوه بر بسنده بودن کامل نیز است.

مثال ۲-۵۹ فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $N(\theta, \theta^2)$، $\theta > 0$ باشد. به سادگی آشکار می‌شود که این خانواده از خانواده‌ی توزیع‌های نمایی است و $(\overline{X}, \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2)$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است. حال با توجه به این‌که بعد آماره دو و بعد فضای پارامتر یک است، امکان این‌که آماره‌ی $(\overline{X}, \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2)$ کامل نباشد وجود دارد. این موضوع با توجه به محاسبات زیر روشن می‌شود. می‌دانیم که

$$E_\theta(\overline{X}) = \theta, \quad E_\theta(\overline{X}^2) = \frac{n+1}{n}\theta^2, \quad E_\theta[\Sigma(X_i - \overline{X})^2] = (n-1)\theta^2$$

بنابراین، برای هر $\theta > 0$،

$$E_\theta\left[\frac{n}{n+1}\overline{X}^2 - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] = 0$$

اما برای هر $\theta > 0$،

$$P_\theta\left(\frac{n}{n+1}\overline{X}^2 - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = 0\right) = 0$$

در نتیجه آماره‌ی $(\overline{X}, \sum(X_i - \overline{X})^2)$ کامل نیست.

مثال ۲-۶۰ فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد،

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta & x = -1 \\ (1-\theta)^2\theta^x & x = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \qquad 0 < \theta < 1$$

تابع احتمال توأم $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} f_\theta(\boldsymbol{x}) &= f_\theta(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \exp(c_1(\theta)T_1(\boldsymbol{x}) + c_2(\theta)T_2(\boldsymbol{x}) + 2n\ln(1-\theta)) \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} c_1(\theta) &= \ln\theta - 2\ln(1-\theta), \quad c_2(\theta) = \ln\theta \\ T_1(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{n} c(x_i+1), \quad T_2(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(x_i) \end{aligned}$$

$$c(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}, \quad u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

بنابراین $(T_1(\boldsymbol{X}), T_2(\boldsymbol{X}))$ یک آماره‌ی بسنده منیمال برای θ است. اما این آماره کامل نیست، چون برای هر $\theta \in (0,1)$،

$$E_\theta(X_i) = 0$$

و

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i u(X_i) - \sum_{i=1}^{n} c(X_i+1) = T_2 - T_1$$

بنابراین نتیجه می‌شود که برای هر $\theta \in (0,1)$،

$$E_\theta(T_2 - T_1) = 0$$

اما برای هر $\theta \in (0,1)$،

$$P_\theta(T_2 - T_1 = 0) < 1$$

برای بیان این مطلب که «کامل بودن» یک ویژگی خانواده‌ی توزیع‌هاست نه آماره، مثال‌های زیر می‌تواند سودمند واقع شود.

مثال ۲-۶۱ خانواده‌ی توزیع‌های $\mathscr{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ را درنظرگیرید، به گونه‌ای که

$$P_\theta(X = k) = \frac{1}{\theta}, \quad k = 1, \ldots, \theta, \quad \theta \in \Theta = \{1, 2, \ldots\}$$

با به‌کارگیری استقراء روی θ به سادگی می‌توان نشان داد برای هر آماره‌ی $g(X)$ و برای هر $\theta \in \Theta$ از $E_\theta(g(X)) = ۰$ نتیجه می‌شود که برای هر $x = ۱, ۲, \ldots$

$$g(x) = ۰$$

این نشان می‌دهد که خانواده‌ی $\mathscr{P}$ کامل است. اما این خانواده به سختی یک خانواده‌ی کامل است، بدین مفهوم که حتی اگر یکی از بی‌نهایت توزیع‌های احتمال را از این خانواده خارج کنیم، خانواده‌ی به دست آمده دیگر کامل نخواهد بود. یعنی برای هر عدد صحیح و مثبت بزرگ‌تر از یک، برای مثال n، خانواده‌ی $\mathscr{P} - \{P_n\}$ کامل نیست. برای نشان دادن این موضوع، تابع زیر را در نظر گیرید.

$$g(x) = \begin{cases} a & x = n \\ -a & x = n + ۱ \\ ۰ & x \neq n, n + ۱ \end{cases}$$

که در آن a یک عدد ثابت ناصفر است. به سادگی آشکار می‌شود که

$$E_\theta(g(X)) = \begin{cases} ۰ & \theta \neq n \\ \frac{a}{\theta} & \theta = n \end{cases}$$

بنابراین $g(X)$ یک براوردگر نااریب (ناصفر) صفر برای خانواده‌ی $\mathscr{P} - \{P_n\}$ است. (نشان دهید که $g(X)$ تنها براوردگر نااریب (ناصفر) صفر برای انتخاب‌های مختلف a است.)

مثال ۲-۶۲ فرض کنید $X \sim B(\theta, \frac{۱}{۲})$، به گونه‌ای که $\theta \in \{۰, ۱, ۲, \ldots\}$ و نامعلوم است. با به‌کارگیری استقراء به سادگی می‌توان نشان داد که برای هر آماره‌ی $g(X)$ و برای هر $\theta \in \{۰, ۱, ۲, \ldots\}$، از

$$E_\theta(g(X)) = ۰$$

نتیجه می‌شود که برای هر $x = ۰, ۱, \ldots, \theta$،

$$g(x) = ۰$$

این نشان می‌دهد که خانواده‌ی توزیع‌های تولید شده توسط X کامل است. اما این خانواده نیز به سختی یک خانواده‌ی کامل است. بدین مفهوم که اگر در این خانواده فضای پارامتر به $\Theta = \{۱, ۲, \ldots\}$

تغییر یابد، خانواده‌ی جدید دیگر کامل نیست. برای روشن شدن این موضوع، تابع زیر را در نظر گیرید.

$$g(x) = (-۱)^x a = \begin{cases} a & x = ۰, ۲, ۴, \dots \\ -a & x = ۱, ۳, ۵, \dots \end{cases}$$

که در آن a عدد ثابت ناصفر دلخواهی باشد. به سادگی آشکار می‌شود که برای هر $\theta \in \{۱, ۲, \dots\}$،

$$E_\theta(g(X)) = ۰$$

بنابراین $g(X)$ یک براوردگر نااریب (ناصفر) صفر برای خانواده‌ی توزیع‌های تولید شده توسط X با فضای پارامتر $\Theta = \{۱, ۲, \dots\}$ است. (نشان دهید که $g(X)$ تنها براوردگر نااریب ناصفر، صفر برای انتخاب‌های مختلف a است.)

با توجه به مثال‌های ارائه شده، خواننده می‌تواند استنباط‌های خاصی را در رابطه با آماره‌های بسنده و آماره‌های کامل داشته باشد. قضیه‌ی زیر که توسط بهادر در سال ۱۹۵۸ ارائه شده است، یک ارتباط جالب را بیان می‌کند.

قضیه‌ی ۲-۷ اگر آماره‌ی بسنده‌ای کامل باشد، آن‌گاه آن آماره، بسنده‌ی مینیمال است.

برهان فرض کنید T یک آماره‌ی بسنده‌ی کامل باشد. برای این‌که نشان دهیم T یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال است، باید نشان دهیم که برای هر آماره‌ی بسنده‌ی S، T تابعی از S است. این کار را در دو مرحله انجام می‌دهیم.

مرحله‌ی اول ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $g(T)$ تابعی حقیقی از T باشد، آن‌گاه $g(T)$ تابعی از S است. فرض کنید

$$h(S) = E(g(T)|S), \quad \varphi(T) = E(h(S)|T)$$

روشن است که $h(S)$ و $\varphi(T)$ هر دو آماره هستند. (چرا؟) بنابراین

$$i) \quad E_\theta(\varphi(T)) = E_\theta(h(S)) = E_\theta(g(T)), \quad \forall\theta \in \Theta$$

$$ii) \quad V_\theta(\varphi(T)) \leq V_\theta(h(S)) \leq V_\theta(g(T)), \quad \forall\theta \in \Theta$$

از طرفی با توجه به (i) و به‌کارگیری کامل بودن آماره‌ی T، برای هر $\theta \in \Theta$،

$$\begin{aligned} E_\theta(\varphi(T) - g(T)) = ۰ &\implies P_\theta(\varphi(T) - g(T) = ۰) = ۱ \\ &\implies P_\theta(\varphi(T) = g(T)) = ۱ \end{aligned}$$

بنابراین $\varphi(T)$ با احتمال یک برابر $g(T)$ است. پس

$$V_\theta(\varphi(T)) = V_\theta(g(T)), \quad \forall\theta \in \Theta$$

در نتیجه با توجه به (ii)

$$V_\theta(\varphi(T)) = V_\theta(h(S)), \quad \forall\theta \in \Theta$$

بنابراین با به‌کارگیری **نامساوی‌های گشتاوری** با احتمال یک

$$\varphi(T) = h(S)$$

یعنی با احتمال یک

$$g(T) = h(S)$$

بدین ترتیب نشان دادیم که $g(T)$ تابعی از S است.
مرحله‌ی دوم در این‌جا دو حالت را برای T در نظر می‌گیریم. اگر T یک آماره‌ی حقیقی باشد، با توجه به مرحله‌ی اول، $g(T) = T$ تابعی از S است. اگر $\boldsymbol{T}$ یک آماره‌ی برداری باشد، یعنی $\boldsymbol{T} = (T_۱, \ldots, T_r)$، آن‌گاه با توجه به مرحله‌ی اول، $g(\boldsymbol{T}) = T_i$، $i = ۱, \ldots, r$ تابعی از S است. بنابراین با احتمال یک $\boldsymbol{T}$ تابعی از S خواهد بود.

توجه داشته باشید که عکس این قضیه همواره درست نیست. یعنی ممکن است آماره‌ای بسنده‌ی مینیمال باشد اما کامل نباشد. مثال زیر موضوع را روشن می‌کند.

مثال ۲-۶۳ فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $U(\theta, \theta + ۱)$، $\theta \in (-\infty, \infty)$ باشد، می‌دانیم که $(X_{(۱)}, X_{(n)})$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است، نشان دهید این آماره کامل نیست. برای نشان دادن این موضوع، توجه کنید که برای هر $\theta \in \Theta$

$$\begin{aligned} E_\theta(X_{(n)} - X_{(۱)}) &= E_\theta(X_{(n)}) - E_\theta(X_{(۱)}) \\ &= E_\theta(X_{(n)} - \theta) - E_\theta(X_{(۱)} - \theta) \\ &= E_۰(X_{(n)}) - E_۰(X_{(۱)}) \\ &= \frac{n}{n+۱} - \frac{۱}{n+۱} = \frac{n-۱}{n+۱} \end{aligned}$$

که به θ بستگی ندارد. بنابراین برای هر $\theta \in \Theta = (-\infty, \infty)$

$$E_\theta(X_{(n)} - X_{(۱)} - \tfrac{n-۱}{n+۱}) = ۰$$

اما برای هر $\theta \in \Theta$

$$P_\theta(X_{(n)} - X_{(1)} - \tfrac{n-1}{n+1} \neq 0) > 0$$

پس $(X_{(1)}, X_{(n)})$ یک آماره‌ی کامل نیست.

با به‌کارگیری قضیه‌ی ۲-۷ می‌توان گفت که گزاره‌های زیر با هم معادل هستند.
اگر S بسنده‌ی کامل باشد، آن‌گاه S بسنده‌ی مینیمال است، (هم‌ارز این است که) اگر S بسنده‌ی مینیمال نیست، آن‌گاه S کامل نیست. بنابراین روشی برای پیدا کردن یک آماره‌ی بسنده‌ی کامل را می‌توان در دو مرحله‌ی زیر خلاصه کرد.
مرحله‌ی اول یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال به دست آورید.
مرحله‌ی دوم نشان دهید آماره‌ی به دست آمده کامل است یا نه.
حال اگر آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال کامل بود، جستجو پایان یافته تلقی می‌شود، اما اگر آماره‌ی مورد نظر مینیمال نبود، جستجو بی‌نتیجه است، چون آماره‌ی بسنده‌ی کامل وجود ندارد. برای درک بهتر مطلب مثال‌های ۲- ۶۲ و ۲-۶۳ را دوباره مرور کنید.
حال به ویژگی ضعیف‌تری نسبت به کامل بودن، یعنی ویژگی **کامل کراندار** بودن اشاره می‌کنیم. فرض کنید $\{P_\theta^T : \theta \in \Theta\}$ خانواده‌ی توزیع‌های تولید شده توسط آماره‌ی T باشد.

تعریف ۲-۷ خانواده‌ی $\{P_\theta^T : \theta \in \Theta\}$ را **کامل کراندار** گوییم اگر برای هر تابع حقیقی کراندار $g(\cdot)$،

$$E_\theta(g(T)) = 0, \;\; \forall\theta \in \Theta \Longrightarrow P_\theta(g(T) = 0) = 1, \;\; \forall\theta \in \Theta$$

در اصطلاح آماره‌ی T را برای θ کامل کراندار گوییم، اگر خانواده‌ی توزیع‌های تولید شده توسط T کامل کراندار باشد.
توجه داشته باشید که هر آماره‌ی کاملی، یک آماره‌ی کامل کراندار نیز هست، اما عکس موضوع همواره درست نیست. مثال زیر این موضوع را روشن می‌کند.

مثال ۲-۶۴ فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد،

$$P_\theta(X = 1) = \theta$$
$$P_\theta(X = x) = \theta^{x-2}(1-\theta)^2, \;\; x = 2, 3, \ldots, 0 < \theta < 1$$

برای هر آماره‌ی حقیقی $g(X)$، اگر برای هر $\theta \in (0, 1)$،

$$0 = E_\theta(g(X)) = \sum_{x=1}^{\infty} g(x) P_\theta(X = x) = \theta g(1) + \sum_{x=2}^{\infty} g(x)\theta^{x-2}(1-\theta)^2$$

آن‌گاه برای هر $\theta \in (۰, ۱)$،

$$\sum_{x=۲}^{\infty} g(x)\theta^{x-۲} = -\theta g(۱)(۱-\theta)^{-۲}$$

یا برای هر $\theta \in (۰, ۱)$،

$$\sum_{x=۰}^{\infty} g(x+۲)\theta^{x} = -\theta g(۱)(۱+۲\theta+۳\theta^{۲}+\ldots) = -g(۱)\sum_{x=۱}^{\infty} x\theta^{x}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب سری‌های توانی، داریم

$$g(۲) = ۰, \quad g(x+۲) = -xg(۱), \quad x = ۱, ۲, \ldots$$

یا

$$g(x) = -(x-۲)g(۱), \quad x = ۱, ۲, \ldots$$

توجه داشته باشید که X یک آماره‌ی کامل نیست، چون با انتخاب $g(۱) \neq ۰$، برای هر $x = ۱, ۳, \ldots$، $g(x) \neq ۰$ و برای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(g(X)) = ۰$$

اما X یک آماره‌ی کامل کراندار است، چون اگر g یک تابع حقیقی کراندار باشد، آن‌گاه $g(۱) \neq ۰$ نتیجه می‌دهد که (بسته به این‌که $g(۱)$ مثبت یا منفی باشد) اگر $x \to \infty$ آن‌گاه

$$g(x) \longrightarrow +\infty \text{ یا } -\infty$$

بنابراین اگر g یک تابع حقیقی کراندار باشد، آن‌گاه باید $g(۱) = ۰$، در نتیجه برای هر $x = ۱, ۲, \ldots$

$$g(x) = ۰$$

و این بدان معنی است که X یک آماره‌ی کامل کراندار است.

توجه داشته باشید که قضیه‌ی بهادر تحت شرط ضعیف‌تر کامل کراندار هم درست است.

قضیه‌ی ۲-۸ اگر آماره‌ی بسنده‌ای کامل کراندار باشد، آن‌گاه آن آماره بسنده‌ی مینیمال است.

برهان با توجه به برهان قضیه‌ی ۲-۷، اثبات این قضیه به عهده‌ی خواننده است.

در بسیاری از مسائل آماری نیاز به اثبات استقلال دو آماره‌ی U و T داریم. تاکنون در این رابطه با روش‌های متفاوتی آشنا شده‌اید. در این قسمت یک روش جدید، ساده و مهم که به قضیه‌ی باسو معروف است و در آینده بارها کاربردهای آن را خواهیم دید، بیان می‌شود. قضیه را در حالتی که T کامل کراندار باشد، بیان و اثبات می‌کنیم، اما با توجه به این‌که هر آماره‌ی کامل، یک آماره‌ی کامل کراندار هم هست، قضیه برای آماره‌های کامل نیز صحیح است.

قضیه‌ی ۲-۹ فرض کنید $\boldsymbol{X}$ دارای تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) $p_\theta(\boldsymbol{x})$، $\theta \in \Theta$، باشد. اگر T آماره‌ی کامل کراندار و بسنده برای θ و U هر آماره‌ای باشد که توزیع آن بستگی به θ ندارد، آن‌گاه T و U مستقل از هم هستند.

برهان برای این‌که نشان دهیم T و U مستقل از هم هستند، کافی است نشان دهیم که توزیع U با توزیع شرطی U به شرط T برابر است. فرض کنید $g(U)$ تابعی کراندار از U باشد. چون توزیع U بستگی به θ ندارد، پس برای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(g(U)) = c$$

که در آن c یک مقدار ثابت است. از طرفی با تعریف،

$$h(T) = E(g(U)|T)$$

که یک آماره‌ی کراندار است، برای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(h(T)) = E_\theta(g(U)) = c$$

بنابراین، برای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(h(T)) - c) = ۰$$

با توجه به این‌که T یک آماره‌ی بسنده‌ی کامل کراندار است، نتیجه می‌شود که برای هر $\theta \in \Theta$،

$$P_\theta(h(T) - c = ۰) = ۱$$

یعنی با احتمال یک، $h(T) = c$. پس

$$E(g(U)) = c = E(g(U)|T) \qquad (۲-۳)$$

که بستگی به θ ندارد. حال با انتخاب، $g(U) = u(t-U)$ و با به‌کارگیری رابطه‌ی (۲-۳) داریم،

$$P(U \leq t) = P(U \leq t|T)$$

یعنی U و T مستقل از هم هستند.

مثال ۲-۶۵ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $N(\theta, 1)$، $\theta \in (-\infty, \infty)$ باشد. نشان دهید که $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ و $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ مستقل از هم هستند.

حل می‌دانیم $\overline{X}$ یک آماره‌ی بسنده‌ی کامل برای θ است. از طرفی $(n-1)S^2$ دارای توزیع χ^2 با $(n-1)$ درجه‌ی آزادی است. بنابراین توزیع S^2 بستگی به θ ندارد. درنتیجه، بنابر قضیه‌ی باسو، $\overline{X}$ و S^2 برای هر $\theta \in \Theta$ مستقل از هم هستند.

قضیه‌ی باسو در مواردی که مسأله موردنظر بستگی به پارامتر نامعلوم ندارد، نیز قابل استفاده است. مثال زیر این موضوع را روشن می‌کند.

مثال ۲-۶۶ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $N(0, 1)$ باشد. نشان دهید که $\overline{X}$ و S^2 مستقل از هم هستند.

حل با به‌کارگیری مثال ۲-۶۵ می‌دانیم که برای هر $\theta \in (-\infty, \infty)$، $\overline{X}$ و S^2 مستقل از هم هستند. بنابراین برای $\theta = 0$ نیز $\overline{X}$ و S^2 مستقل از هم هستند.
در حقیقت، برای به‌کارگیری قضیه‌ی باسو در اثبات استقلال دو آماره باید ابتدا مسأله‌ی موردنظر را پارامتره کرده تا بتوانیم قضیه را به کار گیریم.

مثال ۲-۶۷ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$، $\mu \in R$ و $\sigma > 0$، باشد. نشان دهید $\overline{X}$ و S^2 مستقل از هم هستند.

حل می‌دانیم که $(\overline{X}, S^2)$ یک آماره‌ی بسنده‌ی توأم کامل برای (μ, σ^2) است. از طرفی برای هر σ^2 ثابتی، $\overline{X}$ یک آماره‌ی بسنده‌ی کامل برای μ است و توزیع S^2 بستگی به μ ندارد. بنابراین، بنابر قضیه‌ی باسو، برای هر μ و σ^2 ثابت، $\overline{X}$ و S^2 مستقل از هم هستند. در نتیجه برای هر μ و σ^2 نتیجه می‌شود که $\overline{X}$ و S^2 مستقل از هم هستند.

مثال ۲-۶۸ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $U(0, \theta)$، $\theta > 0$ باشد. نشان دهید که $X_{(n)}$ و $\left(\frac{X_1}{X_{(n)}}, \ldots, \frac{X_n}{X_{(n)}}\right)$ مستقل از هم هستند.

حل می‌دانیم که $X_{(n)}$ یک آماره‌ی بسنده‌ی کامل برای θ است. از طرفی $\frac{X_i}{\theta} \sim U(\circ, \text{۱})$، بنابراین توزیع

$$\frac{X_i}{X_{(n)}} = \frac{\frac{X_i}{\theta}}{\frac{X_{(n)}}{\theta}}, \quad i = \text{۱}, \ldots, n$$

بستگی به θ ندارد و با به‌کارگیری قضیه‌ی باسو، $X_{(n)}$ و $(\frac{X_\text{۱}}{X_{(n)}}, \ldots, \frac{X_n}{X_{(n)}})$ مستقل از هم هستند.

مثال ۲-۶۹ فرض کنید $X_\text{۱}, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $N(\mu, \sigma^\text{۲})$، $\mu \in R$ و $\sigma > \circ$ باشد. می‌دانیم که $T = (\overline{X}, S^\text{۲})$ یک آماره‌ی بسنده‌ی کامل است. اگر $U = \frac{X_\text{۱} - \overline{X}}{S}$، نشان دهید U و T مستقل از هم هستند.

حل با تعریف

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(\circ, \text{۱}), \quad \overline{Z} = \frac{\text{۱}}{n} \sum_{i=\text{۱}}^{n} Z_i$$

به سادگی آشکار می‌شود که

$$U = \frac{\frac{X_\text{۱} - \mu}{\sigma} - \frac{\text{۱}}{n} \sum (\frac{X_i - \mu}{\sigma})}{\sqrt{\sum_{i=\text{۱}}^{n} \left\{ \frac{(X_i - \mu) - (\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \right\}^\text{۲}}} = \frac{Z_\text{۱} - \overline{Z}}{\sqrt{\sum (Z_i - \overline{Z})^\text{۲}}}$$

بنابراین توزیع U بستگی به $\theta = (\mu, \sigma^\text{۲})$ ندارد. پس بنابر قضیه‌ی باسو T و U مستقل از هم هستند.

مثال ۲-۷۰ در مثال ۲-۶۹ نشان دهید که اگر $U = \frac{X_{(n)} - X_{(\text{۱})}}{S}$ باشد، آن‌گاه T و U مستقل از هم هستند.

حل به سادگی می‌توان نشان داد که

$$U = \frac{Z_{(n)} - Z_{(\text{۱})}}{\sqrt{\sum (Z_i - \overline{Z})^\text{۲}}}$$

که در آن

$$Z_{(\text{۱})} \leq Z_{(\text{۲})} \leq \ldots \leq Z_{(n)}, \; Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}, \quad i = \text{۱}, \ldots, n$$

بنابراین توزیع U بستگی به $\theta = (\mu, \sigma^\text{۲})$ ندارد. پس بنابر قضیه‌ی باسو T و U مستقل از هم هستند.

مثال ۲-۷۱ در مثال ۲-۷۰، مقدار $E\left(\frac{X_{(n)}-X_{(1)}}{S}\right)$ را به دست آورید.

حل

$$E_\theta(X_{(n)}-X_{(1)}) = E_\theta\left(\frac{X_{(n)}-X_{(1)}}{S}S\right)$$

با توجه به مثال ۲-۷۰، $\frac{X_{(n)}-X_{(1)}}{S}$ از $(\overline{X},S^2)$ مستقل است، بنابراین $\frac{X_{(n)}-X_{(1)}}{S}$ مستقل از هر تابعی از $(\overline{X},S^2)$ و از جمله S است، پس داریم

$$E_\theta(X_{(n)}-X_{(1)}) = E\left(\frac{X_{(n)}-X_{(1)}}{S}\right)E_\theta(S)$$

در نتیجه

$$E\left(\frac{X_{(n)}-X_{(1)}}{S}\right) = \frac{E_\theta(X_{(n)}-X_{(1)})}{E_\theta(S)}$$

از طرفی با به‌کارگیری ویژگی‌های امید آماره‌های ترتیبی آشکار می‌شود که

$$\begin{aligned} E_\theta(X_{(n)}-X_{(1)}) &= E_{\mu,\sigma^2}[(X_{(n)}-\mu)-(X_{(1)}-\mu)] \\ &= E_{0,\sigma^2}(X_{(n)}-X_{(1)}) = 2E_{0,\sigma^2}(X_{(n)}) \end{aligned}$$

حال با به‌کارگیری جدول‌های آماده شده توسط هارتر (۱۹۶۱) در صفحه‌های ۱۵۸ تا ۱۶۵ مقدار امید بالا قابل محاسبه است. هم‌چنین

$$E_\theta(S) = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\,\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\,\sigma$$

بنابراین، به سادگی مقدار $E\left(\frac{X_{(n)}-X_{(1)}}{S}\right)$ محاسبه می‌شود.

مثال ۲-۷۲ در مثال ۲-۶۸، مقدار $E\left(\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}\right)$ را به دست آورید.

حل می‌دانیم که $X_{(n)}$ یک آماره‌ی بسنده‌ی کامل برای θ است. از طرفی توزیع $\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}$ بستگی به θ ندارد. بنابراین $X_{(n)}$ و $\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}$ مستقل از هم هستند. پس داریم

$$E_\theta(X_{(1)}) = E_\theta\left(\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}\,X_{(n)}\right)$$

$$\text{(بنابر قضیه‌ی باسو)} = E\left(\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}\right)E_\theta(X_{(n)})$$

و با توجه به مثال ۲-۶۳ داریم

$$E\left(\frac{X_{(۱)}}{X_{(n)}}\right) = \frac{E_\theta(X_{(۱)})}{E_\theta(X_{(n)})} = \frac{\frac{۱}{n+۱}}{\frac{n}{n+۱}} = \frac{۱}{n}$$

۶-۲ مسائل فصل دوم

۱) فرض کنید X_1, X_2 یک نمونه‌ی تصادفی دوتایی از توزیع $B(1,p)$ و Y_1, Y_2, Y_3 یک نمونه‌ی تصادفی سه‌تایی از توزیع $B(1,q)$، $q = 1-p$ باشند. اگر دو نمونه‌ی تصادفی مستقل از هم باشند، با به‌کارگیری تعریف آماره‌های بسنده، بررسی کنید آیا آماره‌ی $T = X_1 + Y_1Y_2$ برای p بسنده است؟

۲) فرض کنید X_1, X_2, X_3, X_4 یک نمونه‌ی تصادفی چهارتایی از توزیع $B(1,p)$ باشد. با به‌کارگیری تعریف، بررسی کنید آیا آماره‌ی $U = X_1(X_3+X_4)+X_2$ برای p بسنده است؟

۳) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیعی با تابع احتمال $f_{\boldsymbol{\theta}}(x)$ باشد. در هر یک از موارد زیر

الف) آماره‌ی بسنده‌ی پارامتر(ها) را به دست آورید.

ب) آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال پارامتر(ها) را به دست آورید.

ج) بررسی کنید آیا آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال به دست آمده کامل است؟

$$i) \quad f_{\alpha,\beta}(x) = (1-\beta)\beta^{x-\alpha}, \quad x = \alpha, \alpha+1, \ldots, \alpha \in R, \; 0 < \beta < 1$$

(کامل بودن برای $n = 1$)

$$ii) \quad f_\theta(x) = \binom{n+x-1}{x}\theta^n(1-\theta)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \quad \theta \in (0,1)$$

$$iii) \quad f_\theta(x) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|}(1-\theta)^{1-|x|}, \quad x = -1, 0, 1, \quad \theta \in (0,1)$$

۴) فرض کنید X دارای تابع احتمال زیر باشد. آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ را به دست آورید. بررسی کنید آیا آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال به دست آمده کامل است؟

$$i) \quad f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\theta}{4} & x = x_0 \\ \frac{1-\theta}{4} & x = x_1, x_2 \\ \frac{\theta}{4} & x = x_3 \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 1$$

$$ii) \quad f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - \theta & x = -2 \\ \frac{1}{4} - \frac{\theta}{2} & x = -1 \\ \frac{1}{4} + \frac{\theta}{2} & x = 1 \\ \frac{1}{4} + \theta & x = 2 \end{cases} \qquad -\frac{1}{4} \le \theta \le \frac{1}{4}$$

$$iii)\quad f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{\theta}{۴} & x=-۱,۱\\ ۱-\frac{\theta}{۲} & x=\circ\end{cases}\qquad \circ\le\theta\le ۲$$

$$iv)\quad f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱-\theta}{۲} & x=y_۱\\ \frac{۱}{۲} & x=y_۲\\ \frac{\theta}{۲} & x=y_۳\end{cases}\qquad \circ\le\theta\le ۱$$

$$v)\quad f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴}-\theta & x=y_۱\\ \frac{۱}{۲} & x=y_۲\\ \frac{۱}{۴}+\theta & x=y_۳\end{cases}\qquad -\frac{۱}{۴}\le\theta\le\frac{۱}{۴}$$

$$vi)\quad f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴} & x=y_۱,y_۲\\ \theta & x=y_۳,y_۴\\ \frac{۱}{۴}-\theta & x=y_۵,y_۶\end{cases}\qquad \circ\le\theta\le\frac{۱}{۴}$$

$$vii)\quad f_\theta(x)=\begin{cases}۲\theta & x=\circ\\ ۳\theta & x=۱\\ ۱-۵\theta & x=۲\end{cases}\qquad \circ\le\theta\le\frac{۱}{۵}$$

$$viii)\quad f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱-\theta}{۱۲} & x=۱\\ \frac{۲-\theta}{۱۲} & x=۲\\ \frac{۳-\theta}{۱۲} & x=۳\\ \frac{۱+\theta}{۱۲} & x=۴\\ \frac{۲+\theta}{۱۲} & x=۵\\ \frac{۳+\theta}{۱۲} & x=۶\end{cases}\qquad -۱\le\theta\le ۱$$

$$ix)\quad f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴} & x=۱\\ \frac{۱-\theta}{۴} & x=۲\\ \frac{۱-\theta}{۲} & x=۳\\ \frac{۳\theta}{۴} & x=۴\end{cases}\qquad \circ\le\theta\le ۱$$

$$x)\quad f_\theta(x)=\frac{\binom{\theta}{x}\binom{N-\theta}{n-x}}{\binom{N}{n}},\quad x=۰,۱,\dots,\min(n,\theta)$$

۵) مسأله‌ی $(x)-(i)$ ۴ را بر پایه‌ی یک نمونه‌ی تصادفی nتایی پاسخ دهید.

۶) فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیعی با تابع احتمال $f_\theta(x)$ باشد. در هر یک از موارد زیر

الف) آماره‌ی بسنده‌ی پارامتر(ها) را به دست آورید.

ب) آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال پارامتر(ها) را به دست آورید.

ج) بررسی کنید آیا آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال به دست آمده کامل است؟

$$i)\quad f_\theta(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi\theta}}\exp\left[-\frac{۱}{۲\theta}(x-\theta)^۲\right],\quad x\in R,\quad \theta>۰$$

$$ii)\quad f_\theta(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi\theta^۲}}\exp\left[-\frac{۱}{۲\theta^۲}(x-\theta)^۲\right],\quad x\in R,\quad \theta>۰$$

$$iii)\quad f_\theta(x)=\theta(۱+x)^{-(۱+\theta)},\quad x>۰,\quad \theta>۰$$

$$iv)\quad f_\theta(x)=\frac{۱}{\theta},\quad \theta<x<۲\theta,\quad \theta>۰$$

$$v)\quad f_\theta(x)=\frac{۲x}{\theta^۲},\quad ۰<x<\theta,\quad \theta>۰$$

$$vi)\quad f_\theta(x)=\frac{۱}{۲}\exp(-|x-\theta|),\quad x\in R,\quad \theta\in R$$

$$vii)\quad f_\theta(x)=\frac{۱}{۲\theta}\exp\left(-\frac{|x|}{\theta}\right),\quad x\in R,\quad \theta>۰$$

$$viii)\quad f_\theta(x)=\exp\{-(x-\theta)-\exp[-(x-\theta)]\},\quad x\in R,\quad \theta\in R$$

$$ix)\quad f_{\theta,\sigma^۲}(x)=\frac{۱}{x\sqrt{۲\pi\sigma^۲}}\exp\left[-\frac{۱}{۲\sigma^۲}(\ln x-\theta)^۲\right],x>۰,\quad \theta\in R,\quad \sigma>۰$$

$$x)\quad f_\theta(x)=\frac{۳\theta^۳}{(x+\theta)^۴},\quad ۰<x<\theta,\quad \theta>۰$$

$$xi)\quad f_{\theta,\sigma}(x)=\frac{۱}{\pi\sigma}[۱+(\frac{x-\theta}{\sigma})^۲]^{-۱},\quad x\in R,\quad \theta\in R,\quad \sigma>۰$$

$$xii)\quad f_\theta(x)=\exp[-(x-\theta)]\{۱+\exp\{-(x-\theta)]\}^{-۲},x\in R,\quad \theta\in R$$

$$xiii)\quad f_\theta(x)=\frac{۲(x-\theta)}{(۱-\theta)^۲},\quad \theta<x<۱,\quad \theta<۱$$

$$xiv)\quad f_\theta(x)=\frac{۱}{۴}(۱+\theta x),\quad -۲<x<۲,\quad -\frac{۳}{۴}<\theta<\frac{۳}{۴}$$

$$xv)\quad f_\theta(x)=\frac{x+1}{\theta(\theta+1)}e^{-x/\theta},\quad x>0,\quad \theta>0$$

$$xvi)\quad f_\theta(x)=\frac{\theta}{x^2},\quad x>\theta,\quad \theta>0$$

$$xvii)\quad f_\theta(x)=\frac{\theta}{1-\theta}x^{\frac{2\theta-1}{\theta-1}},\quad 0<x<1,\quad \frac{1}{2}<\theta<1$$

$$xviii)\quad f_\theta(x)=\frac{e^{-x}}{e^{-\theta}-e^{-b}},\quad \theta<x<b,\ \theta\in R,\quad b \text{ معلوم}$$

$$xix)\quad f_\theta(x)=\frac{b\theta}{(b-\theta)x^2},\quad \theta<x<b,\ \theta>0,\quad b \text{ معلوم}$$

$$xx)\quad f_\theta(x)=\frac{e^{-x}}{e^{-a}-e^{-\theta}},\quad a<x<\theta,\ \theta\in R,\quad a \text{ معلوم}$$

$$xxi)\quad f_\theta(x)=\frac{1}{1-\theta},\quad \theta\le x\le 1,\ \theta\in R$$

$$xxii)\quad f_\theta(x)=(1-\theta)+\frac{\theta}{2\sqrt{x}},\quad 0<x<1,\quad \theta\in[0,1]$$

$$xxiii)\quad f_\theta(x)=\frac{\ln\theta}{\theta-1}\theta^x,\quad 0<x<1,\quad \theta>1$$

$$xxiv)\quad f_\theta(x)=\frac{1}{B(\theta,\theta)}x^{\theta-1}(1-x)^{\theta-1},\quad 0<x<1,\quad \theta>0$$

$$xxv)\quad f_\theta(x)=\theta x^{\theta-1},\quad 0<x<1,\quad \theta>0$$

$$xxvi)\quad f_\theta(x)=\frac{1}{\theta}e^{-(x-\theta)/\theta},\quad x\ge\theta,\quad \theta>0$$

$$xxvii)\quad f_\theta(x)=\frac{1}{\theta^2}e^{-(x-\theta)/\theta^2},\quad x\ge\theta,\quad \theta>0$$

$$xxviii)\quad f_\theta(x)=e^{\theta-x},\quad x\ge\theta,\quad \theta\in R$$

$$xxix)\quad f_\theta(x)=\frac{1}{2}(1-e^{-\theta})^{-1}e^{-|x|},\quad |x|<\theta,\quad \theta>0$$

۷) فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع زیر باشند. در هر یک از موارد زیر آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال را برای پارامتر(ها) به دست آورید.

$$i)\quad X_i\sim N(i\theta,1),\ i=1,\ldots,n,\quad \theta\in R$$

$$ii)\quad X_i\sim N(\alpha+\beta y_i,\sigma^2),\ i=1,\ldots,n,\quad \alpha,\beta\in R,\quad \sigma>0,\quad y_1,\ldots,y_n \text{ معلوم}$$

$$iii)\quad X_i\sim E(i\theta),\ i=1,\ldots,n,\ \theta>0$$

$iv)\quad X_i \sim P(i\theta),\ i = ۱, \ldots, n,\ \theta > ۰$

$v)\quad X_i \sim E(i\theta, ۱),\ i = ۱, \ldots, n,\ \theta \in R$

$vi)\quad X_i \sim E(i\theta, \sigma),\ i = ۱, \ldots, n,\ \theta \in R, \sigma > ۰$

$vii)\quad X_i \sim U(-i(\theta - ۱),\ i(\theta + ۱)),\ i = ۱, \ldots, n,\ \theta > ۰$

$viii)\quad X_i \sim \Gamma(\alpha, i\lambda),\ i = ۱, \ldots, n,\ \alpha > ۰, \lambda > ۰$

$ix)\quad X_i \sim \Gamma(i\alpha, \lambda),\ i = ۱, \ldots, n,\ \alpha > ۰, \lambda > ۰$

$x)\quad X_i \sim N(\theta, a\theta^۲),\ i = ۱, \ldots, n,$ معلوم $a, \theta > ۰$

$xi)\quad X_i \sim U(-\theta, \theta),\ i = ۱, \ldots, n,\ \theta > ۰$

$xii)\quad X_i \sim P(\lambda\mu^{i-۱}),\ i = ۱, \ldots, n,\ \lambda\mu^{i-۱} > ۰$

$xii)\quad X_i \sim Ge(i\theta),\ i = ۱, \ldots, n,\ ۰ < \theta < ۱$

$xiii)\quad X_i \sim Ge\left(\frac{\theta}{i}\right),\ i = ۱, \ldots, n,\ ۰ < \theta < ۱$

$xiv)\quad X_i \sim B(n, i\theta),\ i = ۱, \ldots, n,\ ۰ < \theta < ۱,$ معلوم n

۸) فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$، یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد. آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ را به دست آورید.

i) $-۱ < \theta < ۱$

x	۱	۲	۳	۴
$f_\theta(x)$	$\frac{۱+\theta}{۶}$	$\frac{۱-\theta}{۸}$	$\frac{۳(۱-\theta)}{۸}$	$\frac{۱+\theta}{۳}$

ii) $-۱ < \theta < ۱$

x	۱	۲	۳	۴
$f_\theta(x)$	$\frac{۱-\theta}{۶}$	$\frac{۱+\theta}{۶}$	$\frac{۲-\theta}{۶}$	$\frac{۲+\theta}{۶}$

iii) $۰ < \theta < ۱$

x	۱	۲	۳	۴
$f_\theta(x)$	$\frac{\theta}{۴}$	$\frac{۱-\theta}{۴}$	$\frac{۱-\theta}{۴}$	$\frac{۲+\theta}{۴}$

(راهنمایی: اگر N_x، $x = ۱, \ldots, ۴$، نمایانگر تعداد بارهایی باشد که x در نمونه مشاهده می‌شود، آن‌گاه در مورد $(N_۱, \ldots, N_۴)$ چه می‌توان گفت؟)

۹) کدام یک از جفت آماره‌های زیر افراز یکسان تولید می‌کنند؟ چرا؟

$$i)\ T = \prod_{i=1}^{n} X_i, \quad S = \sum_{i=1}^{n} \ln X_i, \quad X_i > 0$$

$$ii)\ T = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S = \sum_{i=1}^{n} \ln X_i, \quad X_i > 0$$

$$iii)\ T = (\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2), \quad S = (\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2)$$

$$iv)\ T = (\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^3), \quad S = (\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^3)$$

۱۰) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$، $n \geq 4$، یک نمونه‌ی تصادفی از تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\theta^3} & 0 < x < \theta \\ \frac{3\theta^2 - x^2}{\theta^3} & \theta \leq x < 2\theta \end{cases} \qquad \theta > 0$$

نشان دهید $T(\boldsymbol{X}) = (\overline{X}, X_{(n)})$ یک آماره‌ی بسنده‌ی توأم برای θ نیست.

۱۱) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$، $n(\geq 4)$، یک نمونه‌ی تصادفی از تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} & 0 < x \leq \theta \\ \frac{2(1-x)}{1-\theta} & \theta \leq x < 1 \end{cases} \qquad 0 < \theta < 1$$

نشان دهید $T(\boldsymbol{X}) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ یک آماره‌ی بسنده برای θ نیست.

۱۲) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ ، $n(\geq 3)$، یک نمونه‌ی تصادفی از تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x-\theta|), \quad x \in R, \quad \theta \in R$$

نشان دهید $T(\boldsymbol{X}) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ یک آماره‌ی بسنده برای θ نیست.

۱۳) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیعی با تابع احتمال $f_\theta(x)$ باشد. کدام یک از آماره‌های زیر بسنده است؟

$$i)\ T(X_1, \ldots, X_n) = X_1$$

$$ii)\ T(X_1, \ldots, X_n) = (X_1, X_n)$$

$$iii)\ T(X_1, \ldots, X_n) = (X_1, \ldots, X_{n-1})$$

۱۴) فرض کنید $\boldsymbol{X} = (X_۱, X_۲)$ دارای تابع احتمال زیر باشد

$i)$

$(x_۱, x_۲)$	$(۰, ۰)$	$(۰, ۱)$	$(۱, ۰)$	$(۱, ۱)$
$f_\theta(x_۱, x_۲)$	$\frac{\theta}{۴}$	$\frac{۱-\theta}{۴}$	$\frac{۱-\theta}{۴}$	$\frac{۲+\theta}{۴}$

$ii)$

$(x_۱, x_۲)$	$(۰, ۰)$	$(۰, ۱)$	$(۱, ۰)$	$(۱, ۱)$
$f_\theta(x_۱, x_۲)$	$\frac{(۴-\theta)(۳-\theta)}{۱۲}$	$\frac{\theta(۴-\theta)}{۱۲}$	$\frac{\theta(۴-\theta)}{۱۲}$	$\frac{\theta(\theta-۱)}{۱۲}$

الف) آیا $T_۱(\boldsymbol{X}) = X_۱ + X_۲$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است؟

ب) آیا $T_۲(\boldsymbol{X}) = X_۱ - X_۲$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است؟

ج) آیا $T_۳(\boldsymbol{X}) = X_۱X_۲$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است؟

۱۵) فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع‌های احتمال زیر باشد

	$f_{\theta_۱}(x)$	$f_{\theta_۲}(x)$	$f_{\theta_۳}(x)$
$x_۱$	۰/۴	۰/۶	۰/۲
$x_۲$	۰/۲	۰/۳	۰/۱
$x_۳$	۰/۴	۰/۱	۰/۷

الف) اگر $A = \{x_۳\}$ و $B = \{x_۱, x_۲\}$، آیا افراز $\Pi = \{A, B\}$ بسنده است؟

ب) اگر $T(x) = \begin{cases} ۰ & x = x_۱ \\ ۱ & x = x_۲ \text{ یا } x_۳ \end{cases}$، آیا آماره‌ی $T(X)$ بسنده برای θ است؟

۱۶) فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = a(x)\frac{\theta^x}{g(\theta)}, \quad x = ۰, ۱, ۲, \ldots, \quad \theta > ۰$$

الف) آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ را به دست آورید.

ب) آیا آماره‌ی به دست آمده کامل است؟

۱۷) فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ و $Y_۱, \ldots, Y_m$ دو نمونه‌ی تصادفی مستقل از توزیع‌های به ترتیب $N(\mu, \sigma_۱^۲)$ و $N(\mu, \sigma_۲^۲)$ باشند.

الف) نشان دهید آماره‌ی $T = (\Sigma X_i, \Sigma X_i^۲, \Sigma Y_i, \Sigma Y_i^۲)$ یک آماره‌ی بسنده برای $\theta = (\mu, \sigma_۱^۲, \sigma_۲^۲)$ است.

ب) آیا آماره‌ی به دست آمده کامل است؟

۱۸) فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $Beta(\alpha, \beta)$ باشد که در آن α معلوم و β نامعلوم است. نشان دهید آماره‌ی $T = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{1}{1-X_i})^4$ یک آماره‌ی بسنده برای β است.

۱۹) فرض کنید X_1, X_2 یک نمونه‌ی تصادفی دوتایی از توزیع $P(\lambda)$، $\lambda > 0$، باشد. با به‌کارگیری از تعریف بسندگی بررسی کنید، آیا آماره‌ی $T(\boldsymbol{X}) = X_1 + \alpha X_2$، به ازاء هر $\alpha > 1$ صحیح، بسنده است یا نه؟ آیا روش ساده‌تری برای نشان دادن عدم بسندگی T وجود دارد؟

۲۰) فرض کنید X_1, X_2, X_3 یک نمونه‌ی تصادفی سه‌تایی از توزیع $B(1, \theta)$ باشد. بررسی کنید

الف) آیا $T_1(\boldsymbol{X}) = X_1 + X_2 + 2X_3$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است؟ چرا؟

ب) آیا $T_2(\boldsymbol{X}) = X_1 + 2X_2 + 2X_3$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است؟ چرا؟

ج) آیا $T_3(\boldsymbol{X}) = 3X_1 + 2X_2 + 2X_3$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است؟ چرا؟

د) آیا $T_4(\boldsymbol{X}) = 5X_1 + X_2 + X_3$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است؟ چرا؟

ه) آیا $T_5(\boldsymbol{X}) = X_1 + 4X_2 + 3X_3$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است؟ چرا؟

و) در صورت مثبت بودن جواب در هر یک از بندهای الف ـ ه، بررسی کنید آیا آماره‌ی بسنده، مینیمال هم است؟ آیا می‌توان در حالت کلی ادعا کرد که چه ترکیب خطی از X_iها یک آماره‌ی بسنده است؟

۲۱) فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ و $Y_1, \dots, Y_n$ دو نمونه‌ی تصادفی مستقل از توزیع‌های به ترتیب $E(\theta)$ و $E(\frac{1}{\theta})$ باشند. یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ به دست آورید. آیا آماره‌ی به دست آمده کامل است؟

۲۲) فرض کنید $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $N(0, 0, 1, 1, \rho)$ باشد

الف) یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال با کم‌ترین بعد برای ρ به دست آورید.

ب) آیا آماره‌ی به دست آمده کامل است؟ چرا؟

ج) فرض کنید $T_۱ = \sum_{i=۱}^n X_i^۲$ و $T_۱ = \sum_{i=۱}^n Y_i^۲$ باشند. نشان دهید $T_۱$ و $T_۲$ آماره‌ی کمکی هستند اما $(T_۱, T_۲)$ نمی‌تواند به صورت توأم یک آماره‌ی کمکی باشد.

۲۳) فرض کنید $X \sim U(\theta, \theta + ۱)$، $\theta \in \{۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots\}$، باشد. نشان دهید

الف) $T(X) = [X]$ یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ است.

ب) $T(X)$ و X مستقل از هم هستند.

۲۴) فرض کنید $(X_۱, X_۲)$ یک متغیر تصادفی دوبعدی باشد. اگر $X_۱ \sim B(۱, p)$، $X_۲|X_۱ = ۱ \sim B(۱, p)$، $X_۲|X_۱ = ۰ \sim B(۱, \frac{۱}{۲})$ و $p \in (۰, ۱)$ باشند، یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای p به دست آورید.

۲۵) فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد

$$P(X_j = z_i) = p_i,\ i = ۱, \ldots, k,\ j = ۱, \ldots, n,\ p_i \in [۰, ۱],\ \sum_{i=۱}^{k} p_i = ۱$$

یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای $(p_۱, \ldots, p_k)$ به دست آورید.

۲۶) فرض کنید (X, Y) دارای تابع احتمال به شکل زیر باشد

$$p_\theta(x, y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}(\theta^۲)^x\{۲\theta(۱-\theta)\}^y\{(۱-\theta)^۲\}^{n-x-y}$$

$$x, y = ۰, ۱, \ldots, n,\quad x + y \leq n$$

الف) نشان دهید $T = ۲X + Y$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است.

ب) آیا آماره‌ی T کامل است؟

۲۷) فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = \frac{g(x)}{h(\theta)},\quad a(\theta) < x < b(\theta);\quad \theta \in \Theta$$

الف) اگر $a(\theta)$ و $b(\theta)$ تابع افزایشی از θ باشند، یک آماره‌ی بسنده با کم‌ترین بعد برای θ به دست آورید.

ب) اگر $a(\theta)$ تابعی صعودی و $b(\theta)$ تابعی نزولی از θ باشند، یک آماره‌ی بسنده با کم‌ترین بعد برای θ به دست آورید.

۲۸) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. در هر حالت، یک آماره‌ی بسنده برای θ به دست آورید.

$$i)\ f_\theta(x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\theta A'(\theta)} \exp(A(\theta) + B(x))$$

$$ii)\ f_\theta(x) = \exp\left[\frac{1}{x}(\theta A'(\theta) - A(\theta)) - A'(\theta) + B(x)\right]$$

۲۹) فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد

x	-1	0	1
$f_\theta(x)$	θ	$1-2\theta$	θ

$0 < \theta < \frac{1}{2}$

الف) آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ کدام است؟

ب) آیا X یک آماره‌ی کامل برای θ است؟

ج) آیا آماره‌ی به دست آمده در الف کامل است؟

۳۰) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $U(-\theta, \theta)$ باشد. یک آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ به دست آورید. آیا آماره‌ی به دست آمده کامل است؟ چرا؟

۳۱) خانواده‌ی توزیع‌های $\{B(\theta, \frac{1}{2}) : \theta \in \Theta\}$ را در نظر گیرید. در هر یک از حالت‌های زیر نشان دهید که خانواده‌ی توزیع‌های تعیین شده کامل نیست و کلاس براوردگرهای نااریب صفر را به دست آورید.

الف) $\Theta = \{0, 2, 3, \ldots\}$

ب) $\Theta = \{0, 1, 3, \ldots\}$

ج) $\Theta = \{0, 1, 2, 4, \ldots\}$

د) با توجه به سه مورد بالا، آیا می‌توانید کلاس براوردگرهای نااریب صفر را برای حالت $\Theta - \{n\}$ حدس بزنید؟

۳۲) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ باشد. با تعریف

$R_n = (X_{(n)} - X_{(1)})$ و $M_n = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$

الف) نشان دهید آماره‌ی (M_n, R_n) مستقل از بردار $\left(\frac{X_2 - X_1}{X_n - X_1}, \ldots, \frac{X_{n-1} - X_1}{X_n - X_1}\right)$ است.

ب) مقدار $E\left(\frac{X_{(k)} - X_{(1)}}{X_{(n)} - X_{(1)}}\right)$ را به دست آورید.

۳۳) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$، $\mu \in R$ و $\sigma > 0$ باشد. با تعریف $T_1(\boldsymbol{X}) = \overline{X}$ و $T_2(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n a_i X_i$، $\sum_{i=1}^n a_i = 0$، نشان دهید T_1 و T_2 مستقل از هم هستند.

۳۴) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $N(0, 1)$ باشد
الف) نشان دهید $\overline{X}$ و $X_{(n)} - X_{(1)}$ مستقل از هم هستند.
ب) مقدار $E\left(\frac{(X_1-\overline{X})^2}{\sum X_i^2}\right)$ را به دست آورید.
ج) مقدارهای $E\left(\frac{X_{(n)}-\overline{X}}{S}\right)$ و $E\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{X_{i+1}-X_i}{S}\right)^2\right]$ را به دست آورید.

۳۵) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $U(0, 1)$ باشد. مقدارهای $E\left(\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}\right)$ و $E\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{X_{(n)}}\right)$ را به دست آورید.

۳۶) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $Beta(\theta + 1, 1)$ باشد. مقدار $E\left(\frac{\ln X_1}{\Sigma \ln X_i}\right)$ را به دست آورید.

۳۷) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $E(\lambda)$ باشد. با تعریف $T = \frac{X_1}{X_1+X_2}$، $Q = \frac{X_1-X_2}{X_1+X_2}$، $R = \frac{X_1}{\sum_{i=1}^n X_i}$ و $F = \frac{X_1}{X_2}$ نشان دهید جفت آماره‌های T و $\sum_{i=1}^n X_i$، Q و $\sum_{i=1}^n X_i$، R و $\sum_{i=1}^n X_i$، و F و $\sum_{i=1}^n X_i$ مستقل از هم هستند.

۳۸) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $E(\mu, \sigma)$ باشد
الف) نشان دهید آماره‌های $X_{(1)}$ و $\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})$ مستقل از هم هستند.
ب) مقدار $E\left(\frac{X_{(1)}}{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})}\right)$ را به دست آورید.

۳۹) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $Pa(\alpha, \beta)$ باشد. نشان دهید آماره‌های $X_{(1)}$ و $\sum_{i=1}^n \ln \frac{X_i}{X_{(1)}}$ مستقل از هم هستند.

۴۰) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد. نشان دهید $\overline{X}$ و $\boldsymbol{X'AX}$ مستقل از هم هستند اگر و تنها اگر $A1 = 0$، که در آن 1 بردار ستونی با مؤلفه‌های یک است.

۴۱) فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, 1)$، $i = 1, 2, \ldots$ باشد. اگر برای $i = 1, 2, \ldots$، $T_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$ و $Y_i = \frac{T_i}{T_{i+1}}$، نشان دهید برای هر $n \geq 2$، متغیرهای تصادفی $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_{n-1})$ و T_n مستقل از هم هستند.

۴۲) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد. اگر $M = median(X_1, \ldots, X_n)$، نشان دهید $\overline{X}$ و $M - \overline{X}$ مستقل از هم هستند.

۴۳) در مثال ۲-۳۸، آیا آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال به دست آمده کامل است؟ آیا می‌توان تابعی یک به یک از آماره بسنده‌ی مینیمال به دست آمده تعریف کرد که مؤلفه‌های آن مستقل از هم باشند؟

۴۴) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع‌های زیر باشد. در هر یک از موارد زیر آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال توأم برای پارامترهای نامعلوم را به دست آورید.

$$i) \quad U(\mu - \sigma, \mu + \sigma),\ \mu \in R,\ \ \sigma > 0$$

$$ii) \quad \Gamma(\alpha, \beta),\ \alpha > 0,\ \beta > 0$$

$$iii) \quad Beta(\alpha, \beta),\ \alpha > 0,\ \beta > 0$$

$$iv) \quad IG(\mu, \lambda),\ \mu > 0,\ \lambda > 0$$

۴۵) فرض کنید $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ باشد.

الف) آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال توأم برای پارامترهای نامعلوم را به دست آورید.

ب) اگر $\mu_1 = \mu_2$ باشد، آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال توأم برای پارامترهای نامعلوم را به دست آورده و نشان دهید که کامل نیست.

۴۶) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد

$$f_{\theta,\lambda} = \begin{cases} \theta + (1+\theta)e^{-\lambda} & x = 0 \\ (1-\theta)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x = 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad 0 \leq \theta \leq 1, \qquad \lambda > 0$$

آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای (θ, λ) را به دست آورید.

۴۷) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع‌های زیر باشد

الف) $B(1, \theta)$، $0 \leq \theta \leq 1$

ب) $Ge(\theta)$، $0 \leq \theta \leq 1$

ج) $P(\lambda)$، $\lambda > 0$

در هر خانواده از توزیع‌ها تعیین کنید کدام‌یک از آماره‌های زیر بسنده است؟ جواب‌های به دست

آمده چه نتیجه‌ای را تداعی می‌کند؟

$i)\ T_۱ = (X_۱, \ldots, X_n)$ $\qquad ii)\ T_۲ = (X_۱^۲, \ldots, X_n^۲)$

$iii)\ T_۳ = \left(\sum_{i=۱}^{k} X_i, \sum_{i=k+۱}^{n} X_i\right)$ $\qquad iv)\ T_۴ = \sum_{i=۱}^{n} X_i$

$v)\ T_۵ = \overline{X}$ $\qquad vi)\ T_۶ = \sum_{i=۱}^{n} X_i^۲$

$vii)\ T_۷ = \left(\sum X_i\right)^۲$

۴۸) فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیعی با چگالی $f_{\theta,\eta}$ باشد، که در آن $\eta \in \{۱, ۲\}$ و $\theta \in \Theta$ است. آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای (θ, η) را در هر یک از حالت‌های زیر به‌دست آورید.

$$i) f_{\theta,۱}(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\theta}} e^{-\frac{۱}{۲\theta}x^۲}, \qquad f_{\theta,۲}(x) = \frac{۱}{۲\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}$$

$$ii) f_{\theta,۱}(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\theta}} e^{-\frac{۱}{۲\theta}x^۲}, \qquad f_{\theta,۲}(x) = \frac{۲}{\theta} x e^{-\frac{۱}{\theta}x^۲}$$

$$iii) f_{\theta,۱}(x) = \theta x^{\theta-۱}, \qquad f_{\theta,۲}(x) = \theta(۱-x)^{\theta-۱}$$

۴۹) فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ و $Y_۱, \ldots, Y_m$ دو نمونه‌ی تصادفی مستقل، به ترتیب با توزیع‌های $B(۱, p)$ و $B(۱, ۱-p)$، $m \neq n$ هستند.
آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال را برای p به دست آورید. آیا آماره‌ی به دست آمده کامل است؟

۵۰) فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته از خانواده‌ی توزیع‌های زیر باشد

$i)$

x	۱	۲	۳
$f_{\theta_۱}(x)$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$
$f_{\theta_۲}(x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$

$ii)$

x	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$
$f_{\theta_۱}(x)$	۰/۱	۰/۳	۰/۶
$f_{\theta_۲}(x)$	۰/۴	۰/۲	۰/۴
$f_{\theta_۳}(x)$	۰/۷	۰/۱	۰/۲

الف) بر اساس یک مشاهده از X، آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال را برای θ به دست آورید.

ب) بر اساس یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از X، آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال را برای θ به دست آورید.

۵۱) فرض کنید $X_{۱},\dots,X_n$ و $Y_{۱},\dots,Y_m$ دو نمونه‌ی تصادفی مستقل، به ترتیب با توزیع‌های زیر باشند ($m\neq n$)،

$i)\ P(\lambda),\ \ P(۲\lambda)$ $\qquad ii)\ N(\mu,۴),\ \ N(\mu,۹)$

$iii)\ LN(\mu,۴),\ \ LN(\mu,۹)$ $\qquad iv)\ \Gamma(۵,۲\lambda),\ \ \Gamma(۳,\lambda)$

$v)\ N(\mu,۱),\ \ N(۲\mu,۹)$ $\qquad vi)\ LN(۲\mu,۹),\ \ LN(\mu,۱)$

آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال را به دست آورید. آیا آماره‌ی به دست آمده کامل است؟

خود را بیازمایید

۱) فرض کنید $X_{۱},\dots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد.

x	۰	۱	۲
$f_\theta(x)$	۲θ	۳θ	$۱-۵\theta$

$۰<\theta<\frac{۱}{۵}$

آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال را به‌دست آورید.

۲) فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال زیر باشد

$i)$

x	۱	۲	۳	۴
$f_\theta(x)$	$\frac{۱+\theta}{۶}$	$\frac{۱-\theta}{۸}$	$\frac{۳(۱-\theta)}{۸}$	$\frac{۱+\theta}{۳}$

$ii)$

x	۱	۲	۳	۴
$f_\theta(x)$	$\frac{۱+\theta}{۳}$	$\frac{۳(۱-\theta)}{۸}$	$\frac{۱-\theta}{۸}$	$\frac{۱+\theta}{۶}$

الف) آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ را به دست آورید.

ب) بر پایه یک نمونه‌ی تصادفی nتایی آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ را به دست آورید.

۳) فرض کنید $X_{۱}$ و $X_{۲}$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع پواسون بریده شده در صفر با پارامتر λ و تابع احتمال زیر باشد

$$f_\lambda(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!(۱-e^{-\lambda})},\qquad x=۱,۲,\dots$$

الف) اگر $T = X_۱ + X_۲$، با به‌کارگیری تعریف نشان دهید T یک آماره‌ی بسنده است.

ب) آیا T یک آماره‌ی کامل هم است؟ چرا؟

۴) فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $DU(\{\theta_۱, \theta_۲\})$ باشد که در آن $\theta_۱ < \theta_۲$ و $n = ۲k$ است.

الف) آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای $\theta = (\theta_۱, \theta_۲)$ را به دست آورید.

ب) آیا آماره‌ی به دست آمده کامل است؟ چرا؟

۵) فرض کنید $X_۱, \ldots, X_۴$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $B(۱, \theta)$، $۰ < \theta < ۱$، باشد. کدام یک از آماره‌های زیر بسنده (یا بسنده‌ی مینیمال) است؟ با ذکر دلیل بیان کنید

الف) $T_۳ = \sum_{i=۱}^{۴} (-۱)^i X_i$،

ب) $T_۲ = X_۱ + X_۲ + X_۳ + ۴X_۴$ و

ج) $T_۱ = \sum_{i=۱}^{۴} i X_i$

۶) فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد

$$f_p(x) = \begin{cases} q & x = -۱ \\ \binom{n+x-۱}{x} p^{n+۱} q^x & x = ۰, ۱, ۲, \ldots \end{cases}, \qquad q = ۱ - p$$

الف) نشان دهید خانواده توزیع‌های تولید شده توسط X کامل نیست؟

ب) آیا خانواده توزیع‌های تولید شده توسط X کامل کراندار است؟

۷) فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع پواسون با پارامتر λ باشد. با به‌کارگیری تعریف و یک روش دیگر نشان دهید که $T = ۳X_۱ + X_۲$ یک آماره‌ی بسنده برای λ نیست.

۸) فرض کنید $X_۱, \ldots, X_m$ و $Y_۱, \ldots, Y_n$ دو نمونه‌ی تصادفی مستقل از توزیع‌های به ترتیب $E(\lambda)$ و $E(۳\lambda)$ باشند. آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای λ را به‌دست آورید. آیا آماره‌ی به دست آمده کامل است؟ چرا؟

۹) فرض کنید $X_i \sim N(i\theta, i\theta^۲)$ ، $i = ۱, \ldots, n$، متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند. آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ را به‌دست آورید. آیا آماره‌ی به‌دست آمده کامل است؟

۱۰) فرض کنید $X_۱, \ldots, X_m$ و $Y_۱, \ldots, Y_n$ دو نمونه‌ی تصادفی مستقل از توزیع‌های به ترتیب $E(\mu, ۳\sigma)$ و $E(\mu, ۲\sigma)$ باشند. آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال را به دست آورید. آیا آماره‌ی به‌دست آمده کامل است؟

۱۱) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $N(0, 1)$ باشد. مقدار $E\left(\frac{(X_1-\bar{X})^2}{\sum X_i^2}\right)$ را به‌دست آورید.

۱۲) فرض کنید X_1 و X_2 یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $B(1, \theta)$ باشد. با به‌کارگیری تعریف و یک روش دیگر نشان دهید $T = 2X_1 + X_2$ یک آماره‌ی بسنده است. آیا T بسنده‌ی مینیمال هم است؟

۱۳) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 1-\theta & x = 0 \\ \frac{\theta}{2} & x = -1, 1 \end{cases}$$

آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال را به دست آورید. آیا آماره‌ی به دست آمده کامل هم است؟

۱۴) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $f_{\theta,\sigma}(x)$ باشد که در آن $\theta \in \{1, 2\}$ و $\sigma > 0$ است. اگر $f_{1,\sigma}(x)$ و $f_{2,\sigma}(x)$ به ترتیب تابع چگالی احتمال‌های $N(1, \sigma^2)$ و $N(2, \sigma^2)$ باشند، آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای (θ, σ) را به دست آورید.

۱۵) فرض کنید (X_1, X_2) یک متغیر تصادفی دوبعدی باشد. اگر $X_2 \sim B(1, p)$، $X_1 | X_2 = 1 \sim B(1, p)$ و $X_1 | X_2 = 0 \sim B(1, 1-p)$، که در آن $p \in (0, 1)$ باشد، آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال را به دست آورید.

۱۶) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $f_{\eta,\theta}(x)$ باشد، که در آن $\eta \in \{1, 2\}$ و $\theta > 0$ است. اگر $f_{1,\theta}(x)$ و $f_{2,\theta}(x)$ به ترتیب تابع چگالی احتمال توزیع‌های $Beta(\theta, 1)$ و $Beta(1, \theta)$ باشند، آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای (η, θ) را به دست آورید.

۱۷) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ و $Y_1, \ldots, Y_m$ دو نمونه‌ی تصادفی مستقل از توزیع‌های به ترتیب $B(1, \theta)$ و $B(1, 1-\theta)$، $n \neq m$، باشند. آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ را به دست آورید. آیا آماره‌ی به دست آمده کامل است؟

۱۸) فرض کنید $X_1, \ldots, X_m$ و $Y_1, \ldots, Y_n$ دو نمونه‌ی تصادفی مستقل از توزیع‌های به ترتیب $\Gamma(3, \lambda)$ و $\Gamma(5, 2\lambda)$ باشند. آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای λ را به‌دست آورید. آیا آماره‌ی به‌دست آمده کامل است؟

۱۹) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع نمایی بریده شده با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\alpha,\beta,\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-(\alpha-\beta)/\lambda}\right)^{-1} e^{-(x-\alpha)/\lambda}, \qquad \alpha < x < \beta$$

آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای (α, β, λ) را به دست آورید.

۲۰) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند که kتا از آن‌ها دارای توزیع $P(\lambda)$ و $n-k$تای دیگر دارای توزیع $P(3\lambda)$ است. آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای λ را تعیین کنید.

۲۱) فرض کنید $X_i \sim P(\lambda b_i)$ ، $i = 1, \ldots, n$، متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند که در آن b_iها اعداد معلوم مثبت هستند. آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای λ را تعیین کنید.

۲۲) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta(1-\theta) & x = -1 \\ \theta^x(1-\theta)^{2-x} & x = 0, 1, 2 \end{cases}$$

۲۳) آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ را به دست آورید. آیا آماره‌ی به‌دست آمده کامل است؟

۲۴) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ و $Y_1, \ldots, Y_m$ دو نمونه‌ی تصادفی مستقل از توزیع‌های به ترتیب $E(\mu_1, \sigma)$ و $E(\mu_2, \sigma)$ باشند. آماره‌ی بسنده مینیمال برای (μ_1, μ_2, σ) را به‌دست آورید. آیا آماره‌ی به‌دست آمده کامل است؟

۲۵) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از $E(\lambda)$ باشد. مقدار $E\left[\frac{\sum X_i^2}{(\sum X_i)^2}\right]$ را محاسبه کنید.

۲۶) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از $N(0, \sigma^2)$ باشد. مقدار $E\left[\frac{\sum X_i^2}{(\sum X_i)^2}\right]$ را محاسبه کنید.

۲۷) نشان دهید خانواده‌ی توزیع‌های $\{\mathcal{U}(0, \theta) : \theta > 1\}$ کامل نیست.

۲۸) فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال‌های زیر باشد.

الف) بر پایه‌ی X، آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ را به دست آورید.

ب) براساس یک نمونه‌ی تصادفی از X، آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال را به دست آورید.

$\theta\backslash x$	۱	۲	۳
$f_{\theta_۱}(x)$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$
$f_{\theta_۲}(x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$

۲۹) فرض کنید $X_۱,\dots,X_m$ و $Y_۱,\dots,Y_n$ دو نمونه‌ی تصادفی مستقل $(m \neq n)$ از توزیع‌های به ترتیب $LN(\mu,۴)$ و $LN(\mu,۹)$ باشند. آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای μ را به دست آورید.

۳۰) فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد

x	-۱	۰	۱
$f_\theta(x)$	θ	$\theta^۲$	$۱-\theta-\theta^۲$

و $۰ < \theta < \frac{۳}{۵}$

نشان دهید X یک آماره‌ی بسنده‌ی کامل است.

۳۱) فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $Beta(۱,\theta+۱)$ باشد. برای $۱ \leq k_۱ < k_۲ \leq n$، مقدار $E\left[\frac{\sum_{j=k_۱}^{k_۲}\ln(۱-X_j)}{\sum_{i=۱}^{n}\ln(۱-X_i)}\right]$ را به دست آورید.

۳۲) فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد

x	۰	۱	۲
$f_\theta(x)$	θ	۳θ	$۱-۴\theta$

و $۰ < \theta < \frac{۱}{۴}$

نشان دهید X یک آماره‌ی بسنده است، اما کامل نیست.

۳۳) فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد

x	-۱	۲	۳
$f_\theta(x)$	$\frac{\theta}{۲}$	$۱-\theta$	$\frac{\theta}{۲}$

الف) نشان دهید X یک آماره‌ی بسنده است اما کامل نیست.

ب) آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال برای θ را به‌دست آورید.

۳۴) فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر p باشد. نشان دهید

$$E(S^۲|\overline{X}=\bar{x}) = \frac{n}{n-۱}\bar{x}(۱-\bar{x})$$

۳۵) فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $\mathcal{U}(۰, \theta)$ باشد. نشان دهید

$$E_\theta\left(\prod_{i=۱}^{n} \frac{X_i}{X_{(n)}}\right) = ۲^{۱-n}$$