انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان

مبانی آمار ریاضی

پدیدآورنده: دکتر احمد پارسیان

ویرایش چهارم

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۴} & ; \quad x = ۱,۲ \\ (۱+\theta)/۴ & ; \quad x = ۳ \\ (۱-\theta)/۴ & ; \quad x = ۴ \end{cases} \quad , \quad \theta \in [۰,۱]$$

$$\hat{\theta}_{a_۱,a_۲}(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۳ \\ a_۱ & x = ۱ \\ a_۲ & x = ۲ \\ ۰ & x = ۴ \end{cases} \quad , \quad a_i \in [۰,۱] \; , \; i = ۱,۲$$

$$H_۰ : \theta = ۰ \quad vs \quad H_۱ : \theta > ۰$$

$$\delta_۱(\mathbf{X}) = \bar{X} = \frac{۱}{۹}\sum_{i=۱}^{۹} X_i$$

$$\delta_۲(\mathbf{X}) \equiv ۰$$

$$R(\theta, \delta_۱) = \frac{۱}{۹}$$

$$R(\theta, \delta_۲) = \theta^۲$$

۶۷

شابک: ۸-۷۹-۸۴۷۶-۹۶۴-۹۷۸

مبانی آمار ریاضی

(ویرایش چهارم)

پدیدآورنده

احمد پارسیان

استاد آمار دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

دانشگاه تهران

انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان

شماره کتاب ٦٧ | گروه علوم ۲۱

مبانی آمار ریاضی (ویرایش چهارم)

پدیدآورنده ....:	احمد پارسیان
ویراستار ....:	مهدیه شهبازی
حروف‌چین و صفحه‌آرا ....:	مهدیه شهبازی
ناشر................:	انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان
لیتوگرافی، چاپ و صحافی:	چاپخانه دانشگاه صنعتی اصفهان
چاپ اول................	
شمارگان................	
شابک	
قیمت	

76798

67

قیمت فروش:

990,000

سرشناسه	: پارسیان، احمد،
عنوان و نام پدیدآور	: مبانی آمار ریاضی / پدیدآورنده احمد پارسیان؛ ویراستار مهدیه شهبازی.
وضعیت ویراست	: ویراست ۴.
مشخصات نشر	: اصفهان : دانشگاه صنعتی اصفهان ، مرکز نشر، ۱۳۹۸.
مشخصات ظاهری	: دوازده، ۵۱۱ ص.: جدول، نمودار.وزیری
فروست	: انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان؛ شماره کتاب ۶۷. گروه علوم، ۲۱.
شابک	: ۹۷۸-٦۰۰-۸۲۵۷-۳٦-۳
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیپا
یادداشت	: کتابنامه.
موضوع	: آمار ریاضی -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	: Mathematical statistics--Study and teaching (Higher)
موضوع	: آمار ریاضی -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
موضوع	: Mathematical statistics -- Problems, exercises, etc (Higher)
شناسه افزوده	: شهبازی، مهدیه، ۱۳۶۲-، ویراستار
شناسه افزوده	: دانشگاه صنعتی اصفهان، انتشارات
رده‌بندی کنگره	: QA۲۷۶
رده‌بندی دیویی	: ۵۱۹/۵۰۷
شماره کتابشناسی ملی	: ۵۸۵۲۵۲۵

اصفهان: دانشگاه صنعتی اصفهان -انتشارات- کدپستی ۸۳۱۱۱-۸٤۱٥٦ تلفن: ۳۳۹۱۲۹۵۲ (۰۳۱) دورنگار: ۳۳۹۱۲۵۵۲ برای خرید اینترنتی کلیه کتاب‌های منتشره انتشارات می‌توانید به وبگاه http://publication.iut.ac.ir مراجعه و یا مستقیما از کتابفروشی انتشارات واقع در کتابخانه مرکزی دانشگاه صنعتی اصفهان (تلفن ۳۳۹۱۳۹۵۲) خریداری فرمائید.

تقدیم به

همسرم که پیوسته مشوق من برای نوشتن و تحقیق بوده است.

فهرست مطالب

فصل پنجم براوردگرهای بیزی و مینیماکس

فصل ششم براورد بازه‌ای

فصل هفتم آزمون فرض‌ها

فصل هشتم پرتوان‌ترین آزمون‌های یکنواخت

فصل نهم آزمون نسبت درستنمایی

فصل دهم تحلیل دنباله‌ای

پیش‌گفتار

این کتاب برای آشنایی دانشجویان رشته‌ی آمار و سایر دانشجویان علاقه‌مند با مبانی اساسی آمار ریاضی تدوین شده است.

نگارش این کتاب از سال‌های دور مورد نظر مؤلف بود، اما در هر مقطعی به دلایلی کار تألیف به تعویق می‌افتاد. برخی از بخش‌های مهم این کتاب قبلاً در شماره‌های مختلف مجله‌ی فرهنگ و اندیشه‌ی ریاضی از سال ۱۳۷۰ به بعد چاپ شده است [(۲) ۱۳۷۰، (۲) ۱۳۷۲، (۲) ۱۳۷۳ و (۱,۲) ۱۳۷۵].

با توجه به تجربه‌ی تدریس پیش‌نویس‌ها در دانشگاه‌های شیراز و صنعتی اصفهان، ترتیب خاصی در فصل‌های کتاب رعایت شده که از نظر آموزشی اهمیت دارند و امید است برای دانشجویان مفید باشد.

این کتاب اساساً به عنوان یک کتاب درسی برای دانشجویان کارشناسی آمار تهیه شده است، اما با انتخاب بخش‌های مناسبی از فصل‌های متفاوت می‌توان به عنوان پایه‌ای مناسب برای درس آمار و احتمال ۲ دانشجویان ریاضی نیز به کار برد.

با توجه به این‌که مطالب کتاب بر پایه تدریس در دو درس ۴ واحدی تهیه شده است، پیشنهاد می‌شود در درس اول بخش‌های ۳، ۴ و ۵ از فصل اول و فصل‌های ۲، ۳، ۴ و ۵ و در درس دوم فصل‌های ۶ تا ۱۰ تدریس شود.

کتاب حاضر خالی از ایراد و اشکال نیست، لذا مؤلف کتاب هر نوع تذکر، یادآوری، راهنمایی و ارسال مسائل متنوع دیگر برای بهتر شدن این کتاب را با استقبال و تشکر فراوان می‌پذیرد.

در آماده سازی کتاب بسیاری از دانشجویان دانشگاه صنعتی اصفهان این‌جانب را یاری داده‌اند، از جمله مرجان اروندی (ویراستاری برخی از فصل‌ها)، سیمین منصوری بروجنی (بازخوانی پیش‌نویس‌ها)، سیدمصطفی فقری و سعید محمودیان (تایپ اولیه پیش‌نویس‌ها)، صدیقه میرزایی، مهتاب بقایی (کمک در تهیه مسائل فصل‌های مختلف کتاب) و مصطفی رستگاری (رسم کامپیوتری نمودارها) که جا دارد از نامبردگان تشکر شود. از همکار گرامی‌ام آقای دکتر بیژن طائری به‌خاطر کمک‌های نرم‌افزاری و از دوست و همکار گرامی‌ام آقای دکتر نادر نعمت‌الهی که با حوصله و دقت فراوان مطالب تایپ شده را بازخوانی و نکات بسیاری را در بهبود کتاب تذکر داده‌اند نیز تشکر و قدردانی می‌نمایم. قبول زحمت

حروف‌چینی کامپیوتری کتاب را سرکار خانم زهرا صدرعاملی عهده‌دار بودند که با حوصله‌ی فراوان، دقت زیاد و مهارتی کم نظیر از عهده‌ی کاری بسیار طاقت‌فرسا و خسته کننده برآمدند. به جاست از ایشان نیز سپاس‌گزاری و قدردانی شود. مسئولان دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان که محیط مناسب را برای انجام این کار فراهم آوردند در به وجود آمدن این اثر نقش داشته‌اند که از آنان نیز باید قدردانی کرد.

احمد پارسیان
آبان ماه ۱۳۷۸

پیش‌گفتار ویرایش دوم

در تهیه و پایان آماده‌سازی کتاب، بر این باور بودم و هستم که این کتاب خالی از ایراد و اشکال نیست.

در طول ۵ سال گذشته، بسیاری از دانشجویان عزیز بر من منت گذاشته و بسیاری از اشتباهات تایپی و برخی از لغزش‌های کتاب را کتباً برایم ارسال نمودند. آقای دکتر سید محمود طاهری همکار گروه آمار دانشگاه صنعتی اصفهان، در اندیشه‌ی آماری، سال پنجم، شماره دوم، پاییز و زمستان ۱۳۷۹، صفحات ۴۷ الی ۵۶ نسبت به بررسی و نقد کتاب اقدام نمودند که کار ایشان را بسیار نیکو و قابل تحسین می‌دانم. ضمن تشکر فراوان از کلیه این عزیزان هر جا که اصلاحات ضرورت داشته اعمال شده است.

از دوستان و همکاران خوبم آقایان دکتر خلیل شفیعی و دکتر نادر نعمت‌الهی که با سعه‌ی صدر برخی از لغزش‌های کتاب را به این‌جانب یادآوری نمودند تشکر و قدردانی ویژه دارم.

تلاش شده است و امیدوارم که کتاب حاضر خالی از لغزش‌های فاحش باشد. در ویرایش جدید، ابهام در نوشتن تابع چگالی احتمال توزیع نمایی و گاما بر طرف شده است و برخی مثال‌ها و مسائل جدید نیز به کتاب اضافه شده است.

از سرکار خانم زهرا صدرعاملی که با حوصله‌ی فراوان و تحمل زحمات زیاد، مجدداً زحمت حروف چینی کامپیوتری کتاب را تقبل کردند صمیمانه سپاس‌گزارم. هم‌چنین از مرکز نشر و چاپخانه دانشگاه صنعتی اصفهان به پاس زحماتی که متحمل می‌شوند قدردانی و تشکر می‌نمایم.

مجدداً در پایان از تمامی دانشجویان عزیز و همکاران گرامی تقاضا می‌کنم، از بیان هر نوع تذکر، یادآوری، راهنمایی و ارسال مسائل متنوع دیگر برای بهتر شدن محتوای کتاب دریغ نفرمایید. انشاءالله

احمد پارسیان
شهریورماه ۱۳۸۳

پیش‌گفتار ویرایش سوم

همیشه بر این باور بوده و هستم که با وجود یادآوری‌های دانشجویان و همکاران بر بسیاری از اشتباهات حروف‌نگاری و برخی لغزش‌ها، هنوز هم این کتاب خالی از ایراد و اشکال نیست. در ویرایش جدید به طور عمده از نظرات آقای مهدی شمس که با دقت کتاب را مطالعه و اشتباهات حروف‌نگاری و ایرادهایی را به این‌جانب یادآوری نموده‌اند، استفاده شده است.

در طول ۸ سال گذشته که از ویرایش دوم آن می‌گذرد، به دلیل استقبال دانشجویان و همکاران، کتاب ۹ بار تجدید چاپ شده است. از این رو ضروری بود که نسبت به ویرایشی تازه از کتاب اقدام شود. ویرایش اول و دوم این کتاب با تک معصومی تایپ شده بود که زحمت این کار با سرکار خانم زهرا صدرعاملی بود و من همیشه مدیون زحمت‌ها و سعه‌ی صدر ایشان هستم.

پس از نشستی که با آقای بردیا حسام داشتم، با هنری که از ایشان سراغ دارم، حروف‌چینی تک معصومی را به تک داده‌کاوی برگرداندند. بازبینی و تصحیح متن برگردانده شده و افزوده‌های تازه بر کتاب، تصحیح برخی شکل‌ها، ویراستاری دوباره‌ی کتاب و در نهایت حروف‌نگاری آن را سرکار خانم مهدیه شهبازی تقبل کردند و با دقت و ظرافت خاص خود، کتاب را برای چاپ آماده کردند.

شایسته است از تمامی این عزیزان تشکر و قدردانی نمایم. هم‌چنین از مرکز نشر و چاپخانه‌ی دانشگاه صنعتی اصفهان به پاس زحماتی که متحمل می‌شوند قدردانی و تشکر ویژه دارم.

در پایان از تمامی دانشجویان عزیز و همکاران گرامی تقاضا می‌کنم، از ارسال هر نوع تذکر، راهنمایی و مسائل گوناگون برای بهتر شدن کتاب دریغ نفرمایند. انشاءالله

احمد پارسیان
دانشگاه تهران
بهار ۱۳۹۱

پیش‌گفتار ویرایش چهارم

از ویرایش سوم کتاب ۷ سال می‌گذرد. در ویرایش پیش رو مطالبی که نیاز بدان‌ها احساس می‌شد اضافه و برخی تغییرات ضروری اعمال شده است. در بیشتر فصل‌ها بخش «خود را بیازمایید» نیز به کتاب افزوده شده است.

با توجه به این‌که درس‌های آمارریاضی ۱ و ۲ در پانزده سال گذشته به صورت ۳ واحدی ارائه می‌شوند، پیشنهاد می‌شود در درس آمارریاضی ۱، بخش‌های ۳، ۴ و ۵ از فصل اول و فصل‌های ۲، ۳ و ۴ و در درس آمارریاضی ۲، فصل‌های ۶ تا ۹ تدریس شوند.

از نظرات دانشجویان و همکاران، به ویژه آقای دکتر مهدی شمس، استاد دانشگاه کاشان، در این ویرایش بهره برده‌ام.

ویراستاری دوباره، حروف‌نگاری و صفحه‌آرایی ویرایش حاضر را سرکار خانم مهدیه شهبازی به عهده داشتند و من همیشه قدردان زحمات و سعه‌ی صدر ایشان در آماده سازی این کتاب هستم.

لازم می‌دانم از کسانی که در شکل‌گیری این کتاب نقش داشتند، یادی کنم. شاید فرصت ویرایش دیگری در آینده برایم فراهم نشود.

- بخش‌هایی از فصل‌های دوم و سوم این کتاب با همکاری خانم مینا توحیدی، دانشجوی سابق دانشگاه شیراز و استاد فعلی آن دانشگاه آماده و در فرهنگ و اندیشه ریاضی به چاپ رسیده است.

- خانم‌ها مرجان اروندی، سیمین منصوری بروجنی، صدیقه میرزایی صالح آبادی و مهتاب بقایی و آقایان سید مصطفی فقری، سعید محمودیان و مصطفی رستگاری که از دانشجویان دانشگاه صنعتی اصفهان در همسایگی سال ۱۳۷۶ بودند و در آماده‌سازی اولیه کتاب مرا یاری دادند.

- زحمت حروف‌نگاری ویرایش اول و دوم این کتاب را سرکار خانم زهرا صدرعاملی عهده‌دار بودند که با تک معصومی آماده شد و من همیشه مدیون محبت‌ها و زحمات ایشان هستم.

- آقای بردیا حسام، با هنرمندی یکتای خود، حروف‌نگاری از تک معصومی را به تک داده‌کاوی تبدیل کردند، کاری ارزنده برای من که هیچ‌گاه فراموش نخواهد شد.
- ویراستاری ویرایش سوم کتاب و اصلاح ساختاری کتاب پس از تبدیل، به عهده‌ی سرکار خانم مهدیه شهبازی بوده است و از این بابت نیز ممنون ایشان هستم.
- عزیزان بسیاری در مرکز نشر و چاپخانه دانشگاه صنعتی اصفهان در شکل‌گیری و آماده‌سازی کتاب از سال ۱۳۷۸ تا کنون دخیل و سهیم بودند که از یکایک این عزیزان لازم است تشکر و سپاسگزاری کنم.

از تمامی دانشجویان عزیز و همکاران گرامی تقاضا می‌کنم با نقدهای خود، اشتباهات و لغزش‌های احتمالی را به این‌جانب یاداوری کنند و از ارسال مسایل گوناگون و راهنمایی برای بهتر شدن کتاب دریغ نفرمایند.

احمد پارسیان
استاد بازنشسته‌ی آمار دانشگاه تهران
تابستان ۱۳۹۸

فصل اول

مفاهیم پایه

بسیاری از مطالب این فصل به دانش ما در درس‌های گذشته برمی‌گردد که با بیش‌تر آن‌ها آشنایی دارید و به منظور یادآوری، آمادگی، حضور ذهن و امکان دور از دسترس بودن منابع آن‌ها گردآوری شده است. بخش نخست، به یادآوری آن‌چه که در احتمال خوانده‌اید، اختصاص دارد. در بخش دوم به معرفی مختصری از توزیع‌های استاندارد و ارتباط آن‌ها با یکدیگر می‌پردازیم. بخش سوم نیز به معرفی خانواده‌ی توزیع‌های مکانی، مقیاس، مکان-مقیاس و خانواده‌ی توزیع‌های نمایی اختصاص دارد و بخش‌های چهارم و پنجم، در حقیقت، به عنوان پیش‌درآمدی برای آماده‌سازی خواننده و آشنایی با فصل‌های بعدی این کتاب آورده شده است.

۱-۱ مفاهیم احتمال

در این بخش یادآوری کوتاهی از نکته‌های اساسی مباحث احتمال خواهیم داشت که با آن‌ها آشنایی کامل دارید.

جمعیت مجموعه‌ی افراد یا اشیایی را که می‌خواهیم یک یا چند ویژگی مشترک آن‌ها را مورد مطالعه قرار دهیم، جمعیت یا جمعیت آماری می‌نامیم. به عبارت دیگر مجموعه‌ی اعضای مورد بررسی را جمعیت می‌نامیم.

آزمایش تصادفی آزمایش تصادفی به آزمایشی گفته می‌شود که تمام نتیجه‌های ممکن آن از پیش معلوم باشد ولی نتیجه‌ی آزمایش، پیش از انجام آزمایش معلوم نباشد. نتیجه‌ی آزمایش تصادفی را **برامد** می‌نامیم. در این‌جا فرض می‌کنیم برای یک آزمایش تصادفی مورد نظر، هر چند بار تکرار داشته

باشیم، برامد آزمایش، دوباره یکی از مجموعه برامدهای آزمایش اولیه است.

فضای نمونه مجموعه‌ی تمام برامدهای یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه می‌نامیم و آن را با نماد Ω نشان می‌دهیم.

میدان سیگمایی مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های Ω که دربردارنده‌ی Ω نیز هستند، تشکیل یک میدان سیگمایی را می‌دهد اگر شرط‌های زیر را دارا باشد

- اگر $A \in \mathcal{A}$ آن‌گاه $\bar{A} \in \mathcal{A}$ و
- اگر $A_۱, A_۲, \dots$ دنباله‌ای از مجموعه‌های از آنِ $\mathcal{A}$ باشد، آن‌گاه $\cup_{i=۱}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

فضای پیشامدها مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های Ω را که تشکیل یک میدان سیگمایی بدهد، فضای پیشامدها و هر عضو $\mathcal{A}$ را یک **پیشامد** می‌نامیم.

در یک آزمایش تصادفی، گوییم پیشامد A در صورتی **رخ** می‌دهد که برامد آزمایش تصادفی از آنِ A باشد. بنابراین Ω را یک پیشامد **حتمی** و ϕ را یک پیشامد **ناشدنی (نامحتمل)** می‌نامیم.

دو پیشامد A و B از $\mathcal{A}$ را در صورتی که هیچ برامد مشترکی نداشته باشند، دو **پیشامد ناسازگار** یا **جدا از هم** می‌نامیم.

فضای احتمال در هر آزمایش تصادفی، لازم است به هر پیشامد A از فضای نمونه‌ی Ω، عدد $P(A)$ را که نمایانگر احتمال **رخداد** پیشامد A است، نسبت دهیم که در اصل‌های زیر صدق می‌کند.

- برای هر $A \in \mathcal{A}$، $P(A) \geq ۰$،
- $P(\Omega) = ۱$،
- برای هر دنباله‌ی دو به دو ناسازگار از پیشامدهای $A_۱, A_۲, \dots$،

$$P\left(\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=۱}^{\infty} P(A_i)$$

سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ را فضای احتمال یا مدل احتمال می‌نامیم، که در آن Ω فضای نمونه، $\mathcal{A}$

فضای پیشامدها و P تابع احتمال از $\mathcal{A}$ به بازه‌ی $[۰,۱]$ است.

پیشامدهای مستقل دو پیشامد A و B از $\mathcal{A}$ را مستقل از هم گوییم اگر

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

در حالت کلی پیشامدهای $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ از $\mathcal{A}$ را به‌طور توأم مستقل گوییم اگر برای هر زیرمجموعه‌ی $\{i_۱, \ldots, i_r\}$ از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$

$$P\Big(\bigcap_{j=۱}^{r} A_{i_j}\Big) = \prod_{j=۱}^{r} P(A_{i_j}), \quad r = ۲, ۳, \ldots, n$$

احتمال شرطی احتمال شرطی پیشامد A به شرط B را با نماد $P(A|B)$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq ۰$$

از رابطه‌ی بالا به سادگی آشکار می‌شود که

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B), \quad P(B) \neq ۰$$

این رابطه به **قانون ضرب** در احتمال معروف است.

مجموعه‌ی کامل اگر $A_۱, A_۲, \ldots (\in \mathcal{A})$ پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند و $\cup_{i=۱}^{\infty} A_i = \Omega$، گوییم مجموعه‌ی $\{A_۱, A_۲, \ldots\}$ یک مجموعه‌ی کامل است.

به مجموعه‌ی $\{A_۱, A_۲, \ldots\}$ یک **افراز** فضای نمونه Ω نیز می‌گویند. در این‌جا فرض خواهیم کرد برای هر i، $A_i \neq \phi$.

قضیه‌ی پوانکاره برای هر دو پیشامد دلخواه A و B از $\mathcal{A}$،

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان به سادگی به بیش از دو پیشامد دلخواه نیز تعمیم داد.

نابرابری بان‌فرونی اگر $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$، n پیشامد دلخواه از $\mathcal{A}$ باشند، آن‌گاه

$$P\Big(\bigcap_{i=۱}^{n} A_i\Big) \geq ۱ - \sum_{i=۱}^{n} P(\bar{A}_i)$$

قضیه‌ی احتمال کل فرض کنید $\{A_1, A_2, \ldots\}$ تشکیل یک افراز Ω را بدهد، آن‌گاه برای هر $B \in A$،

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B|A_i)$$

فرمول بیز برای هر $B \in A$، با فرض $P(B) \neq 0$،

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)}$$

میدان بورل میدان بورل B در R (اعداد حقیقی)، کوچک‌ترین میدان سیگمایی از زیرمجموعه‌های R است که تمام بازه‌های باز $\{x : a < x < b\}$ در R را در بر دارد.

میدان بورل B^k در R^k (فضای اقلیدسی kبعدی) کوچک‌ترین میدان سیگمایی از زیرمجموعه‌های R^k است که تمام kـمستطیل‌های باز $\{(x_1, \ldots, x_k) : a_i < x_i < b_i; i = 1, \ldots, k\}$ در R^k را در بر دارد.

متغیر تصادفی گوییم تابع X از Ω به R یک متغیر تصادفی است اگر برای هر $B \in B$، مجموعه‌ی $\{w : X(w) \in B\}$ از آنِ A باشد، یعنی یک پیشامد باشد.

پیشامد $\{w : X(w) \in B\}$ را با نماد $(X \in B)$ نشان می‌دهیم و احتمال این پیشامد را با $P(X \in B)$ نشان داده و از آن با عنوان **توزیع احتمالی** X یاد می‌کنیم.

گوییم X یک **متغیر تصادفی گسسته** است اگر مجموعه‌ی شمارای $S_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$، $x_i \in R$، $i = 1, 2, \ldots$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که $\sum_i P(X = x_i) = 1$.

$P(X = x_i)$ را با نماد $f(x_i)$ نشان داده و به آن **تابع احتمال** X می‌گوییم.

برای متغیر تصادفی X، اگر برای هر $x \in R$، $P(X = x) = 0$ باشد، آن‌گاه X را یک **متغیر تصادفی پیوسته** می‌نامیم. افزون بر آن، اگر تابع نامنفی f از R به R^+ وجود داشته باشد که برای هر $B \in B$،

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

آن‌گاه X را یک **متغیر تصادفی (مطلقاً) پیوسته** می‌نامیم. در این صورت تابع f را **تابع چگالی احتمال** X می‌نامیم. توجه داشته باشید که

$$P(X \in R) = \int_R f(x)dx = 1$$

در این کتاب، برای سادگی به کارگیری نماد یکسان، هر جا که نیاز باشد از نماد زیر بهره خواهیم جست.

$$P(X \in B) \quad = \quad \int_B f(x)d\mu(x) = \begin{cases} \sum_{x\in B\cap S_X} f(x) & \text{گسسته } X \\ \int_B f(x)dx & \text{پیوسته } X \end{cases}$$

تابع توزیع تابع F از R به بازه‌ی $[\circ, ۱]$ را که برای هر $x \in R$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)d\mu(x)$$

تابع توزیع X می‌نامیم.

می‌دانیم که

- $\circ \leq F(x) \leq ۱$،
- اگر $x_۱ \leq x_۲$، آن‌گاه $F(x_۱) \leq F(x_۲)$،
- F از راست پیوسته است، یعنی $\lim_{h\to\circ^+} F(x+h) = F(x)$،
- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty) = ۱$ و $\lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = \circ$،
- اگر X یک متغیر تصادفی (مطلقاً) پیوسته باشد، آن‌گاه

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad dF(x) = f(x)dx, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با مقدارهای ممکن $x_۱ < x_۲ < \cdots$ باشد، آن‌گاه

$$f(x_i) = P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-۱}), \quad i = ۱, ۲, \ldots$$

- اگر X دارای تابع توزیع $F(x)$ باشد، آن‌گاه **تابع بقای** X را با نماد $\overline{F}(x)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\overline{F}(x) = ۱ - F(x)$$

بردار تصادفی گوییم تابع $\boldsymbol{X} = (X_۱, \ldots, X_k)$ از Ω به R^k یک **متغیر تصادفی kبعدی** (بردار تصادفی) است، اگر برای هر $B \in \mathcal{B}^k$ مجموعه‌ی $\{w : \boldsymbol{X}(w) \in B\}$ از آنِ

A باشد. به عبارت دیگر $\boldsymbol{X} = (X_۱, \ldots, X_k)$ یک بردار تصادفی است اگر $X_۱, \ldots, X_k$ متغیرهای تصادفی باشند.

پیشامد $\{w : \boldsymbol{X}(w) \in B\}$ را با نماد $(\boldsymbol{X} \in B)$ و احتمال آن را با نماد $P(\boldsymbol{X} \in B)$ نشان داده و به آن توزیع احتمالی $\boldsymbol{X}$ می‌گوییم.

اگر مجموعه‌ی شمارای $S_{\boldsymbol{X}} = \{\boldsymbol{x}_i : \boldsymbol{x}_i \in R, i = ۱, ۲, \ldots\}$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $\sum_i P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}_i) = ۱$، گوییم $\boldsymbol{X}$ یک **بردار تصادفی گسسته** است. $P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x_i})$ را با نماد $f(\boldsymbol{x_i})$ نشان داده و به آن **تابع احتمال** $\boldsymbol{X}$، یا **تابع احتمال توأم** $X_۱, \ldots, X_k$ می‌گوییم.

برای بردار تصادفی $\boldsymbol{X}$، اگر برای هر $\boldsymbol{x} \in R^k$، $P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) = ۰$ باشد، آن‌گاه $\boldsymbol{X}$ را یک بردار **تصادفی پیوسته** می‌نامیم. افزون بر آن، اگر تابع چندمتغیره‌ی نامنفی f از R^k به R^+ وجود داشته باشد که برای هر $B \in \mathcal{B}^k$،

$$P(\boldsymbol{X} \in B) = \int_B f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$

آن‌گاه $\boldsymbol{X}$ را یک بردار تصادفی (مطلقاً) پیوسته می‌نامیم. در این صورت تابع f را **تابع چگالی احتمال** $\boldsymbol{X}$ یا **تابع چگالی احتمال توأم** $X_۱, \ldots, X_k$ می‌نامیم. توجه داشته باشید که

$$P(\boldsymbol{X} \in R^k) = \int_{R^k} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = ۱$$

تابع توزیع توأم تابع F از R^k به بازه‌ی $[۰, ۱]$ را که برای هر $\boldsymbol{x} \in R^k$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}) &= P(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}) = P(X_۱ \leq x_۱, \ldots, X_k \leq x_k) \\ &= \int_{-\infty}^{x_k} \cdots \int_{-\infty}^{x_۱} f(t_۱, \ldots, t_k) dt_۱ \ldots dt_k \end{aligned}$$

تابع توزیع $\boldsymbol{X}$ یا **تابع توزیع توأم** $X_۱, \ldots, X_k$ می‌نامیم.

برای $k = ۲$، می‌دانیم که

- $۰ \leq F(x_۱, x_۲) \leq ۱$،
- برای $x_۱ \leq x'_۱$ و $x_۲ \leq x'_۲$،

$$F(x'_۱, x'_۲) - F(x'_۱, x_۲) - F(x_۱, x'_۲) + F(x_۱, x_۲) \geq ۰,$$

• برای هر $x_1, x_2 \in R$

$$\lim_{h\to 0^+} F(x_1+h, x_2) = F(x_1, x_2),$$
$$\lim_{h\to 0^+} F(x_1, x_2+h) = F(x_1, x_2),$$
$$\lim_{x_1\to -\infty} F(x_1, x_2) = F(-\infty, x_2) = 0,$$
$$\lim_{x_2\to -\infty} F(x_1, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0,$$
$$\lim_{x_2\to +\infty} F(x_1, x_2) = F(x_1, +\infty) \equiv F_{X_1}(x_1),$$

که به آن **توزیع کناری** X_1 می‌گوییم. هم‌چنین

$$\lim_{x_1\to +\infty} F(x_1, x_2) = F(+\infty, x_2) \equiv F_{X_2}(x_2)$$

که به آن **توزیع کناری** X_2 می‌گوییم.

• اگر $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ یک متغیر تصادفی (مطلقاً) پیوسته‌ی دوبعدی باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{x_1} f(u,v)dudv, \\ \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} &= f(x_1, x_2) \end{aligned}$$

هم‌چنین

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)dx_2, \qquad f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)dx_1$$

را به ترتیب **تابع چگالی احتمال کناری** X_1 و **تابع چگالی احتمال کناری** X_2 می‌نامیم.

• اگر $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ یک متغیر تصادفی (مطلقاً) پیوسته‌ی دوبعدی با تابع چگالی احتمال $f(x_1, x_2)$ باشد، آن‌گاه تابع چگالی احتمال شرطی X_1 به شرط $X_2 = x_2$ را با نماد $f_{X_1|X_2=x_2}(x_1)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f_{X_1|X_2=x_2}(x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}, \qquad f_{X_2}(x_2) \neq 0$$

- اگر $\boldsymbol{X} = (X_۱, X_۲)$ یک متغیر تصادفی گسسته‌ی دوبعدی با تابع احتمال $f(x_۱, x_۲)$ باشد، آن‌گاه **تابع احتمال شرطی** $X_۱$ به شرط $X_۲ = x_۲$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f_{X_۱|X_۲=x_۲}(x_۱) &= P(X_۱ = x_۱|X_۲ = x_۲) = \frac{P(X_۱ = x_۱, X_۲ = x_۲)}{P(X_۲ = x_۲)} \\ &= \frac{f(x_۱, x_۲)}{f_{X_۲}(x_۲)}, \qquad f_{X_۲}(x_۲) \neq ۰ \end{aligned}$$

امید و واریانس اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) f و تابع توزیع F باشد، در صورت وجود، **امید** X را با نماد $E(X)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)d\mu(x) = \begin{cases} \sum_x xf(x) & X \text{ گسسته} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx & X \text{ پیوسته} \end{cases}$$

نماد دیگری که برای نشان $E(X)$، به ویژه در حالت پیوسته، به کار می‌رود به صورت زیر است.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x)$$

اگر $g(X)$ یک متغیر تصادفی باشد، آن‌گاه امید متغیر تصادفی $g(X)$ را در صورت وجود، به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)d\mu(x)$$

واریانس X را با نماد $Var(X)$ نشان داده و در صورت وجود، به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$Var(X) = \sigma_X^۲ = E(X^۲) - E^۲(X)$$

توجه داشته باشید که واریانس X وجود دارد اگر و فقط اگر $E(X^۲)$ وجود داشته باشد. به سادگی می‌توان نشان داد که

$$Var(X) = \min_c E(X - c)^۲$$

یک معیار دیگر برای پراکندگی که کم‌تر مورد استفاده قرار می‌گیرد، میانگین قدرمطلق انحراف‌ها است. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع F و میانه‌ی m باشد، آن‌گاه میانگین قدرمطلق انحراف‌ها را با نماد $D(X)$ نشان داده و در صورت وجود، به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$D(X) = E(|X - m|)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که

$$D(X) = \min_c E(|X-c|)$$

به خاطر داشته باشید که نسبت انحراف معیار به میانگین را **ضریب تغییر** نامیده و آن را با نماد زیر نشان می‌دهیم.

$$CV = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}$$

اگر (X,Y) یک متغیر تصادفی دوبعدی با تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) $f(x,y)$ باشد، امید متغیر تصادفی $h(X,Y)$ را که با نماد $E(h(X,Y))$ نشان داده می‌شود، در صورت وجود، به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} E(h(X,Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)f(x,y)d\mu(x)dv(y) \\ &= \begin{cases} \sum_x \sum_y h(x,y)f(x,y) & \text{گسسته } (X,Y) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)f(x,y)dxdy & \text{پیوسته } (X,Y) \end{cases} \end{aligned}$$

امید و واریانس شرطی اگر (X,Y) یک متغیر تصادفی دوبعدی با تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) $f(x,y)$ باشد، در صورت وجود، **امید شرطی** X به شرط $Y=y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$E(X|Y=y) = E_{X|Y=y}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=y}(x)d\mu(x)$$

هم‌چنین، در صورت وجود، امید شرطی $g(X)$ به شرط $Y=y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$E(g(X)|Y=y) = E_{X|Y=y}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y=y}(x)d\mu(x)$$

اگر $h(X,Y)$ یک متغیر تصادفی باشد، در صورت وجود، امید شرطی $h(X,Y)$ به شرط $Y=y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$E(h(X,Y)|Y=y) = E_{X|Y=y}(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f_{X|Y=y}(x)d\mu(x)$$

بنابراین، در صورت وجود $E_{X|Y=y}(X^۲)$، **واریانس شرطی** X به شرط $Y=y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$Var(X|Y=y) = \sigma^۲_{X|Y=y} = E_{X|Y=y}(X^۲) - E^۲_{X|Y=y}(X)$$

توجه داشته باشید اگر $E(X)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه

$$E(X) = E(E_{X|Y}(X))$$

و اگر $E(X^{2})$ وجود داشته باشد، آن‌گاه

$$Var(X) = Var(E_{X|Y}(X)) + E(Var(X|Y))$$

کوواریانس و ضریب همبستگی اگر (X, Y) یک متغیر تصادفی دوبعدی با شرط وجود $E(X^{2})$ و $E(Y^{2})$ باشد، آن‌گاه **کوواریانس** X و Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$Cov(X, Y) = \sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y)$$

و **ضریب همبستگی** X و Y را نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\rho_{X,Y} = Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

متغیرهای تصادفی مستقل گوییم X و Y مستقل از هم هستند اگر برای هر $x, y \in R$،

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

به سادگی آشکار می‌شود که شرط بالا با شرط زیر یکی است.

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \qquad \forall x, y \in R$$

به همین شیوه، استقلال n متغیر تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ تعریف می‌شود.

نما، چندک و میانه عددی که تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) متغیر تصادفی X را **ماکسیمم** می‌کند، **نما** یا **مد** توزیع X می‌نامیم.
عدد q_α، $0 < \alpha < 1$، را **چندک** αام توزیع متغیر تصادفی X می‌نامیم اگر

$$P(X < q_\alpha) \leq \alpha \leq P(X \leq q_\alpha)$$

در حالت خاص $\alpha = \frac{۱}{۲}$، $q_{۰/۵} = m$ را **میانه‌ی** توزیع X می‌نامیم.

نمونه‌های تصادفی در این قسمت به تعریف **نمونه‌ی تصادفی** از جمعیت‌های متناهی و نامتناهی به طور جداگانه اشاره می‌کنیم.

جمعیت متناهی هر نمونه‌ی انتخابی به اندازه‌ی n از یک جمعیت متناهی را که شانس انتخاب یکسان داشته باشد، یک **نمونه‌ی تصادفی** می‌نامیم.

جمعیت نامتناهی مجموعه‌ی $\{X_۱, \ldots, X_n\}$ از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان را یک **نمونه‌ی تصادفی** اندازه‌ی n می‌نامیم.

در حقیقت $X_۱, \ldots, X_n$ را یک نمونه‌ی تصادفی nتایی (به اندازه‌ی n) می‌نامیم، اگر $X_۱, \ldots, X_n$، n متغیر تصادفی مستقل از توزیع یکسان $F(x)$ باشند.

آماره فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از یک جمعیت آماری باشد. متغیر تصادفی $T = g(X_۱, \ldots, X_n)$ را که تابعی از نمونه‌ی تصادفی است، یک **آماره** می‌نامیم.

آماره‌های ترتیبی فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از جمعیتی با تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد. با تعریف

$$\begin{aligned}
X_{(۱)} &= \text{کوچک‌ترین بین } X_۱, \ldots, X_n \\
X_{(۲)} &= \text{دومین کوچک‌ترین بین } X_۱, \ldots, X_n \\
&\vdots \\
X_{(j)} &= j\text{امین کوچک‌ترین بین } X_۱, \ldots, X_n \\
&\vdots \\
X_{(n)} &= \text{بزرگ‌ترین بین } X_۱, \ldots, X_n
\end{aligned}$$

مقدارهای مرتب شده‌ی $X_{(۱)} \leq X_{(۲)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ را **آماره‌های ترتیبی** نمونه‌ی تصادفی $X_۱, \ldots, X_n$ می‌نامیم. در حقیقت $X_{(۱)}, \ldots, X_{(n)}$ مقدارهای مرتب شده‌ی نمونه‌ی تصادفی $X_۱, \ldots, X_n$ از کوچک به بزرگ هستند. می‌دانیم که

- تابع چگالی احتمال توأم $X_{(۱)}, \ldots, X_{(n)}$ برابر است با

$$f_{X_{(۱)},\ldots,X_{(n)}}(x_۱, \ldots, x_n) = n! \prod_{i=۱}^{n} f(x_i), \quad x_۱ \leq x_۲ \leq \cdots \leq x_n$$

- تابع چگالی احتمال $X_{(j)}$ برابر است با

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}[F(x)]^{j-1}[1-F(x)]^{n-j}f(x)$$

- تابع چگالی احتمال توأم $X_{(j)}$ و $X_{(i)}$، $1 \leq i < j \leq n$، برابر است با

$$\begin{aligned} f_{X_{(i)},X_{(j)}}(x,y) &= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}[F(x)]^{i-1} \\ &\quad [F(y)-F(x)]^{j-i-1}[1-F(y)]^{n-j}f(x)f(y), \quad x<y \end{aligned}$$

- $X_{(1)}$ و $X_{(n)}$ را **مقدارهای کرانگین (غایی)** می‌نامیم.
- $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ را **دامنه‌ی نمونه** می‌نامیم.
- اگر برای همه‌ی $i \neq j$، $X_i \neq X_j$ باشد، آن‌گاه رتبه‌ی X_i را با نماد R_i نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$R_i = N(i) + 1$$

که در آن $N(i)$ تعداد X_jهای کم‌تر از X_i است.

- متغیر تصادفی Q_α را **چندک** αام نمونه‌ی تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ می‌نامیم، اگر

$$\frac{\text{تعداد } X_j \text{هایی که کم‌تر از } Q_\alpha \text{ هستند}}{n} \leq \alpha \leq \frac{\text{تعداد } X_j \text{هایی که کم‌تر یا برابر } Q_\alpha \text{ هستند}}{n}$$

در حالت خاص، برای $\alpha = \frac{1}{2}$، $Q_{0/5} = M$ را **میانه‌ی نمونه‌ی تصادفی** می‌نامیم. یک تعریف معادل برای M عبارت است از

$$M = \begin{cases} X_{(\frac{n+1}{2})} & n \text{ فرد} \\ \frac{1}{2}[X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n}{2}+1)}] & n \text{ زوج} \end{cases}$$

- تابع $\hat{F}_n$ تعریف شده با ضابطه‌ی زیر را **توزیع نمونه‌ای** یا **توزیع تجربی** می‌نامیم.

$$\hat{F}_n(x) = \frac{\text{تعداد } X_i \text{هایی که کم‌تر یا برابر } x \text{ هستند}}{n}$$

گشتاورها گشتاور rام متغیر تصادفی X را با نماد μ_r نشان داده، در صورت وجود، به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mu_r = E(X^r), \quad r \in N$$

اگر برای یک مقدار صحیح و مثبت r، μ_r وجود داشته باشد، آن‌گاه $\mu_۱, \ldots, \mu_{r-۱}$ نیز وجود دارند. برای $r = ۱$، $\mu_۱$ را با μ نشان می‌دهیم که میانگین توزیع جامعه است.

گشتاور rام حول مقدار a متغیر تصادفی X را با نماد $\mu_{r,a}$ نشان داده، در صورت وجود، به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mu_{r,a} = E((X-a)^r) = \sum_{k=\circ}^{r} \binom{r}{k} \mu_k (-a)^{r-k}$$

حالت خاص $a = \mu$ را **گشتاور مرکزی** rام متغیر تصادفی X می‌نامیم و آن را با نماد μ'_r نشان می‌دهیم. یعنی

$$\mu'_r = E((X-\mu)^r)$$

به سادگی آشکار می‌شود که

$$\mu'_۱ = \circ, \quad \mu'_۲ = \sigma_X^۲ \;, \quad \mu'_۳ = \gamma_۱ \sigma_X^۳, \quad \mu'_۴ = (\gamma_۲ + ۳)\sigma_X^۴$$

که در آن $\gamma_۱$ **ضریب چولگی** (معیاری برای اندازه‌ی میزان انحراف از تقارن توزیع) و $\gamma_۲$ **ضریب برجستگی** (معیاری برای اندازه‌ی میزان برجستگی توزیع فراوانی) است. به خاطر داشته باشید که برای توزیع نرمال $\gamma_۱ = \gamma_۲ = \circ$ است.

گشتاور فاکتوریل rام متغیر تصادفی X را با نماد α_r نشان داده، در صورت وجود، به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\alpha_r = E[X(X-۱)\ldots(X-r+۱)]$$

تابع‌های مولد گوییم متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) $f(x)$ دارای **تابع مولد گشتاور** است اگر به ازای تمامی مقدارهای t در یک همسایگی صفر، $E(e^{tX})$ متناهی

باشد. در این صورت **تابع مولد گشتاور** X را با نماد $M_X(t)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) d\mu(x)$$

می‌دانیم که در صورت وجود تابع مولد گشتاور X، تمام گشتاورهای X وجود دارند و

$$M_X(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu_r}{r!} t^r, \qquad \frac{\partial^k M_X(t)}{\partial t^k}|_{t=0} = \mu_k$$

اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) $f(x)$ باشد، در صورت وجود، **تابع مولد فاکتوریل** (یا **احتمال**) X را با نماد $\psi_X(t)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\psi_X(t) = E(t^X) = \int_{-\infty}^{\infty} t^x f(x) d\mu(x)$$

اگر (X, Y) یک متغیر تصادفی دوبعدی با تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) $f(x, y)$ باشد، در صورت وجود، تابع مولد گشتاور (X, Y) را با نماد $M_{X,Y}(t_1, t_2)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$M_{X,Y}(t_1, t_2) = E(e^{t_1 X + t_2 Y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y) d\mu(x) dv(y)$$

نابرابری‌ها

در این قسمت به یادآوری دو نوع نابرابری، یعنی **نابرابری‌های گشتاوری** و **نابرابری‌های از نوع چبیشف** می‌پردازیم. نابرابری‌های گشتاوری، برقراری نابرابری بین گشتاورها از رتبه‌های گوناگون است و نابرابری‌های از نوع چبیشف دربردارنده‌ی گشتاورهاست و کرانی برای احتمال پیشامدهای معین ارائه می‌دهد. در این گونه نابرابری‌ها نیاز به دانستن توزیع متغیر تصادفی نداریم.

نابرابری‌های گشتاوری فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع توزیع توأم $F(x, y)$ باشند. اگر $E(Y^2)$ متناهی باشد، آن‌گاه برای هر تابع $h(x)$ که $E(h^2(X)) < \infty$، داریم

$$E[(Y - h(X))^2] \geq E[(Y - E(Y|X))^2]$$

نابرابری اکید است مگر آن‌که $h(x) = E(Y|X = x)$ باشد. در این نابرابری، اگر برای هر x، $h(x) = E(Y)$، آن‌گاه

$$Var(Y) \geq E\left[\left(E(Y|X) - E(Y)\right)^2\right]$$

نابرابری اکید است مگر این‌که Y تابعی از X باشد که با احتمال یک در رابطه‌ی $Y = E(Y|X)$ صدق می‌کند.

نابرابری هولدر فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع توزیع توأم $F(x,y)$ باشند. برای عددهای حقیقی و مثبت $p(>۱)$ و q که در رابطه‌ی $\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=۱$ صدق کنند، $E(|X|^p)<\infty$ و $E(|Y|^q)<\infty$، داریم

$$E(|XY|) \leq [E(|X|^p)]^{\frac{۱}{p}}[E(|Y|^q)]^{\frac{۱}{q}}$$

نابرابری شوارتز در نابرابری هولدر، اگر $p=q=۲$، آن‌گاه

$$|E(XY)| \leq E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^۲)E(Y^۲)}$$

نابرابری دیگری که به بهترین نابرابری شوارتز معروف است، به صورت زیر است.

$$Cov^۲(X,Y) \leq Var(X)Var(Y)$$

نابرابری ینسن فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد. اگر $h(\cdot)$ تابعی کوژ (محدب) با $E[h(X)]$ متناهی باشد، آن‌گاه

$$E[h(X)] \geq h(E(X))$$

در صورتی که $h(x)$ تابعی کاو (مقعر) باشد، جهت نابرابری تغییر می‌کند.

نابرابری‌های از نوع چبیشف

نابرابری مارکف فرض کنید X یک متغیر تصادفی و $h(\cdot)$ تابعی نامنفی باشد. اگر $E[h(X)]<\infty$، آن‌گاه برای هر $a>۰$،

$$P(h(X) \geq a) \leq \frac{E[h(X)]}{a}$$

نابرابری چبیشف با انتخاب $h(x)=|x|$ در نابرابری مارکف

$$P(|X| \geq a) = P(X^۲ \geq a^۲) \leq \frac{E(X^۲)}{a^۲}$$

حالت خاصی از نابرابری چبیشف، که بیش‌تر با آن آشناییم به صورت زیر است.

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{۱}{k^۲}, \quad k>۰$$

۱-۲ توزیع‌های استاندارد

با توزیع‌های یک‌متغیره در نخستین درس احتمال آشنا شده‌اید، اما آشنایی و بررسی هر توزیع، به دلایل گوناگون، به طور جداگانه صورت گرفته است و کم‌تر فرصت یافته‌اید تا به روابط بین توزیع‌ها بپردازید. در این بخش نخست به اختصار تابع احتمال توزیع‌های استاندارد گسسته و تابع چگالی احتمال توزیع‌های استاندارد پیوسته را جداگانه معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های آن‌ها را مانند میانگین، واریانس و ... می‌آوریم. سپس ارتباط بین توزیع‌ها را به اختصار یادآوری می‌کنیم.

توزیع‌های گسسته

۱- توزیع برنولی اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد

$$f_p(x) = p^x q^{1-x}, \quad x = 0, 1, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p$$

گوییم X دارای توزیع برنولی با پارامتر p است و آن را با نماد $X \sim B(1,p)$ نشان می‌دهیم. اگر $X \sim B(1,p)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
E_p(X) &= p, \quad Var_p(X) = pq, \quad CV(p) = \sqrt{\frac{q}{p}} \\
\gamma_1 &= \frac{1-2p}{\sqrt{pq}}, \qquad \gamma_2 = \frac{1-6pq}{\sqrt{pq}} \\
M_X(t) &= pe^t + q, \ t \in R, \qquad \psi_X(t) = pt + q, \ t > 0
\end{aligned}$$

۲- توزیع دوجمله‌ای اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد

$$f_p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n, \quad p \in (0, 1)$$

گوییم X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p است و آن را با نماد $X \sim B(n,p)$ نشان می‌دهیم. اگر $X \sim B(n,p)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
E_p(X) &= np, \quad Var_p(X) = npq, \quad CV(p) = \sqrt{\frac{q}{np}} \\
\gamma_1(p) &= \frac{1-2p}{\sqrt{npq}}, \qquad \gamma_2(p) = \frac{1-6pq}{\sqrt{npq}} \\
M_X(t) &= (pe^t + q)^n, \ t \in R, \qquad \psi_X(t) = (pt + q)^n, \ t > 0
\end{aligned}$$

۳- توزیع هندسی اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد

$$f_p(x) = pq^x, \quad x = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

گوییم X دارای توزیع هندسی با پارامتر p است و آن را با نماد $X \sim Ge(p)$ نشان می‌دهیم. اگر $X \sim Ge(p)$، آن‌گاه

$$E_p(X) = \frac{q}{p}, \qquad Var_p(X) = \frac{q}{p^۲}, \qquad CV(p) = \frac{۱}{\sqrt{q}}$$

$$\gamma_۱(p) = \frac{۱+q}{\sqrt{q}}, \qquad \gamma_۲(p) = \frac{۶q + p^۲}{q}$$

$$M_X(t) = p(۱ - qe^t)^{-۱}, \ t < -\ln q, \qquad \psi_X(t) = p(۱ - qt)^{-۱}, \ t < \frac{۱}{q}$$

۴- توزیع فوق هندسی اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد

$$f(x) = \frac{\binom{n_۱}{x}\binom{n_۳ - n_۱}{n_۲ - x}}{\binom{n_۳}{n_۲}}, \ x = \max(۰, n_۲ - n_۳ + n_۱), \ldots, \min(n_۱, n_۲)$$

گوییم X دارای توزیع فوق هندسی با پارامترهای $n_۱$ و $n_۳$ است و آن را با نماد $X \sim HG(n_۳, n_۱; n_۲)$ نشان می‌دهیم. اگر $X \sim HG(n_۳, n_۱; n_۲)$، آن‌گاه

$$E(X) = \frac{n_۲ n_۱}{n_۳}$$

$$Var(X) = \left(\frac{n_۳ - n_۲}{n_۳ - ۱}\right)\left(\frac{n_۲ n_۱}{n_۳}\right)\left(۱ - \frac{n_۱}{n_۳}\right)$$

$$CV = \left[\frac{(n_۳ - n_۱)(n_۳ - n_۲)}{n_۲ n_۱ (n_۳ - ۱)}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\gamma_۱ = \frac{(n_۳ - ۲n_۱)(n_۳ - ۱)^{\frac{۱}{۲}}(n_۳ - ۲n_۲)}{[n_۲ n_۱ (n_۳ - n_۱)(n_۳ - n_۲)]^{\frac{۱}{۲}}(n_۳ - ۲)}$$

$$M_X(t) = \frac{(n_۳ - n_۱)!(n_۳ - n_۲)!}{n_۳!} F(-n_۲, -n_۱; n_۳ - n_۱ - n_۲ + ۱; e^t)$$

$$\psi_X(t) = \frac{(n_۳ - n_۱)^{n_۲}}{n_۳^{n_۲}} F(-n_۲, -n_۱; n_۳ - n_۱ - n_۲ + ۱; t)$$

به گونه‌ای که در آن $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ نمایانگر تابع فوق هندسی است.

۵- توزیع پاسکال (دوجمله‌ای منفی) اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد

$$f_p(x) = \binom{n + x - ۱}{x} p^n q^x, \quad x = ۰, ۱, ۲, \ldots, \quad p \in (۰, ۱)$$

گوییم X دارای توزیع دوجمله‌ای منفی با پارامترهای n و p است و آن را با نماد $X \sim NB(n,p)$ نشان می‌دهیم. اگر $X \sim NB(n,p)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
E_p(X) &= \frac{nq}{p}, \qquad Var_p(X) = \frac{nq}{p^2}, \qquad CV(p) = \frac{1}{\sqrt{nq}} \\
\gamma_1(p) &= \frac{1+q}{\sqrt{nq}} \qquad \gamma_2(p) = \frac{6q+p^2}{nq} \\
M_X(t) &= p^n(1-qe^t)^{-n},\ t < -\ln q, \qquad \psi_X(t) = p^n(1-qt)^{-n},\ t < \frac{1}{q}
\end{aligned}$$

۶- توزیع بتا-دوجمله‌ای اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\binom{n_2+x-1}{x}\binom{n_1+n_3-x-1}{n_1-x}}{\binom{n_1+n_2+n_3-1}{n_1}},\ x = 0, 1, 2, \ldots, n_1 \\
&= \binom{n_1}{x}\frac{\Gamma(n_2+n_3)\Gamma(n_2+x)\Gamma(n_1+n_3-x)}{\Gamma(n_2)\Gamma(n_3)\Gamma(n_1+n_2+n_3)}
\end{aligned}$$

گوییم X دارای توزیع بتا-دوجمله‌ای با پارامترهای n_1، n_2 و n_3 است و آن را با نماد $X \sim BB(n_1,n_2,n_3)$ نشان می‌دهیم.

حالت خاص $n_1 = n-1$ و $n_2 = n_3 = 1$، یعنی $BB(n-1,1,1)$، همان توزیع گسسته‌ی یکنواخت روی مجموعه‌ی $\{0,1,\ldots,n-1\}$ است.

اگر $X \sim BB(n_1,n_2,n_3)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
E(X) &= n_1n_2(n_2+n_3)^{-1} \\
Var(X) &= n_1n_2n_3(n_1+n_2+n_3)(n_2+n_3)^{-2}(n_2+n_3+1)^{-1} \\
CV &= (n_1n_2)^{-\frac{1}{2}}n_3^{\frac{1}{2}}(n_2+n_3+1)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

۷- توزیع وایبل گسسته اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد

$$f_{p,\beta}(x) = (1-p)^{x^\beta} - (1-p)^{(x+1)^\beta},\ \ x = 0,1,2,\ldots,\ p \in (0,1),\ \beta > 0$$

گوییم X دارای توزیع وایبل گسسته با پارامترهای p و β است و آن را با نماد $X \sim DW(\beta,p)$ نشان می‌دهیم.

حالت خاص $\beta = ۱$، یعنی $DW(۱, p)$، همان توزیع $Ge(p)$ است.

۸- توزیع پواسون اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد

$$f_\lambda(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = ۰, ۱, ۲, \ldots, \quad \lambda > ۰$$

گوییم X دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است و آن را با نماد $X \sim P(\lambda)$ نشان می‌دهیم. اگر $X \sim P(\lambda)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} E_\lambda(X) &= \lambda, \quad Var_\lambda(X) = \lambda, \qquad CV(\lambda) = \frac{۱}{\sqrt{\lambda}} \\ \gamma_۱(\lambda) &= \frac{۱}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \gamma_۲(\lambda) = \frac{۱}{\lambda} \\ M_X(t) &= \exp[\lambda(e^t - ۱)], \ t \in R, \qquad \psi_X(t) = \exp[\lambda(t - ۱)], \ t > ۰ \end{aligned}$$

۹- توزیع گسسته‌ی یکنواخت اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = \frac{۱}{\theta + ۱}, \quad x = ۰, ۱, ۲, \ldots, \theta, \quad \theta \geq ۰, \quad \theta \in Z$$

گوییم X دارای توزیع یکنواخت روی مجموعه‌ی $\{۰, ۱, \ldots, \theta\}$ را دارد و آن را با نماد $X \sim DU(\{۰, ۱, \ldots, \theta\})$ نشان می‌دهیم. اگر $X \sim DU(\{۰, ۱, \ldots, \theta\})$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} E_\theta(X) &= \frac{\theta}{۲}, \quad Var_\theta(X) = \frac{\theta(\theta + ۲)}{۱۲}, \qquad CV(\theta) = \left(\frac{\theta + ۲}{۳\theta}\right)^{\frac{۱}{۲}} \\ \gamma_۱(\theta) &= ۰, \quad \gamma_۲(\theta) = -\frac{۶}{۵}\left[۱ + \frac{۲}{\theta(\theta + ۲)}\right], \qquad \psi_X(t) = \frac{۱ - t^{\theta + ۱}}{(\theta + ۱)(۱ - t)} \end{aligned}$$

۱۰- توزیع سری‌های لگاریتمی اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = -\frac{۱}{\ln(۱ - \theta)}\frac{\theta^x}{x}, \quad x = ۱, ۲, \ldots, \quad ۰ < \theta < ۱$$

گوییم X دارای توزیع سری‌های لگاریتمی با پارامتر θ است و آن را با نماد $X \sim LS(\theta)$ نشان

می‌دهیم. اگر $X \sim LS(\theta)$ باشد، آن‌گاه با انتخاب $\alpha = -[\ln(1-\theta)]^{-1}$

$$\begin{aligned}
E_\theta(X) &= \frac{\alpha\theta}{1-\theta}, \quad Var_\theta(X) = \frac{\alpha\theta(1-\alpha\theta)}{(1-\theta)^2}, \quad CV(\theta) = \left(\frac{1-\alpha\theta}{\alpha\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \\
\gamma_1(\theta) &= \frac{(1+\theta) - 3\alpha\theta + 2\alpha^2\theta^2}{(\alpha\theta)^{\frac{1}{2}}(1-\alpha\theta)^{\frac{3}{2}}} \\
\gamma_2(\theta) &= \frac{1 + 4\theta + \theta^2 - 4\alpha\theta(1-\theta) + 6\alpha^2\theta^2 - 3\alpha^3\theta^3}{\alpha\theta(1-\alpha\theta)^2} - 3 \\
M_X(t) &= \frac{\ln(1-\theta e^t)}{\ln(1-\theta)}, \; t < -\ln\theta, \quad \psi_X(t) = \frac{\ln(1-\theta t)}{\ln(1-\theta)}, \; t < \frac{1}{\theta}
\end{aligned}$$

۱۱- توزیع چندجمله‌ای اگر بردار تصادفی $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ دارای تابع احتمال زیر باشد

$$f_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{p}}(x_1, \ldots, x_k) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k x_i!} \prod_{i=1}^k p_i^{x_i}, \quad x_i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

و $p_i \geq 0$ ، $\sum_{i=1}^k x_i = n$ و $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ آن‌گاه گوییم $\boldsymbol{X}$ دارای توزیع چندجمله‌ای با پارامترهای n، $p_1, \ldots, p_k$ است و آن را با نماد $\boldsymbol{X} \sim M(n, p_1, \ldots, p_k)$ نشان می‌دهیم.
اگر $\boldsymbol{X} \sim M(n, p_1, \ldots, p_k)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
E(X_i) &= np_i, \quad i = 1, \ldots, k \\
Var(X_i) &= np_i(1-p_i), \quad i = 1, \ldots, k \\
cov(X_i, X_j) &= -np_ip_j, \quad i \neq j
\end{aligned}$$

۱۲- توزیع فوق هندسی تعمیم‌یافته اگر بردار تصادفی $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ دارای تابع احتمال زیر باشد

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\binom{M_1}{x_1}\binom{M_2}{x_2}\binom{N-M_1-M_2}{n-x_1-x_2}}{\binom{N}{n}}$$

گوییم $\boldsymbol{X}$ دارای توزیع فوق هندسی تعمیم یافته با پارامترهای N، M_1، M_2 و n است و آن را با

نماد $X \sim HG(N, M_۱, M_۲; n)$ نشان می‌دهیم. اگر $X \sim HG(N, M_۱, M_۲; n)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} E(X_i) &= n\frac{M_i}{N}, \ \ i = ۱, ۲ \\ Var(X_i) &= n(\frac{N - M_i}{N - ۱})(\frac{M_i}{N})(۱ - \frac{M_i}{N}), \ \ i = ۱, ۲ \\ corr(X_i, X_j) &= -\sqrt{M_۱ M_۲ (N - M_۱)^{-۱}(N - M_۲)^{-۱}}, \ i \neq j \end{aligned}$$

توزیع‌های پیوسته

۱- توزیع یکنواخت اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\theta_۱, \theta_۲}(x) = \frac{۱}{\theta_۲ - \theta_۱}, \ \ \theta_۱ \leq x \leq \theta_۲, \ \ -\infty < \theta_۱ < \theta_۲ < +\infty$$

گوییم X دارای توزیع یکنواخت روی بازه $(\theta_۱, \theta_۲)$ است و آن را با نماد $X \sim U(\theta_۱, \theta_۲)$ نشان می‌دهیم. اگر $X \sim U(\theta_۱, \theta_۲)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} E_{\theta_۱, \theta_۲}(X) &= \frac{\theta_۱ + \theta_۲}{۲}, \quad Var_{\theta_۱, \theta_۲}(X) = \frac{(\theta_۲ - \theta_۱)^۲}{۱۲} \\ CV(\theta_۱, \theta_۲) &= \frac{(\theta_۲ - \theta_۱)}{(\theta_۱ + \theta_۲)\sqrt{۳}}, \quad \gamma_۱(\theta_۱, \theta_۲) = ۰, \quad \gamma_۲(\theta_۱, \theta_۲) = -\frac{۶}{۵} \\ M_X(t) &= \begin{cases} \frac{e^{\theta_۲ t} - e^{\theta_۱ t}}{(\theta_۲ - \theta_۱)t} & t \neq ۰ \\ ۱ & t = ۰ \end{cases} \quad \psi_X(t) = \frac{t^{\theta_۲} - t^{\theta_۱}}{(\theta_۲ - \theta_۱)\ln t}, \ t > ۰ \end{aligned}$$

۲- توزیع نمایی (منفی) اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ \ x > ۰, \ \ \lambda > ۰$$

گوییم X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است و آن را با نماد $X \sim E(\lambda)$ نشان می‌دهیم. اگر $X \sim E(\lambda)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} E_\lambda(X) &= \frac{۱}{\lambda}, \quad Var_\lambda(X) = \frac{۱}{\lambda^۲}, \quad CV(\lambda) = ۱ \\ \gamma_۱(\lambda) &= ۲, \quad \gamma_۲(\lambda) = ۶ \\ M_X(t) &= \frac{\lambda}{\lambda - t}, \ \ t < \lambda, \quad \psi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - \ln t}, \ \ t < e^\lambda \end{aligned}$$

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}},\ \ x\geq\mu,\ \ \mu\in(-\infty,\infty),\ \ \sigma>0$$

گوییم X دارای توزیع نمایی با پارامترهای μ و σ است و آن را با نماد $X\sim E(\mu,\sigma)$ نشان می‌دهیم. اگر $X\sim E(\mu,\sigma)$، آنگاه

$$\begin{aligned} E_{\mu,\sigma}(X) &= \mu+\sigma, \qquad Var_{\mu,\sigma}(X)=\sigma^2, \qquad CV(\mu,\sigma)=\frac{\sigma}{\mu+\sigma} \\ M_X(t) &= \frac{e^{t\mu}}{1-\sigma t},\ \ t<\frac{1}{\sigma}, \qquad \psi_X(t)=\frac{t^{\mu}}{1-\sigma\ln t},\ \ t<e^{\frac{1}{\sigma}} \end{aligned}$$

۳- توزیع گاما اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\alpha,\lambda}(x)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x},\ \ x>0,\ \ \alpha>0,\ \ \lambda>0$$

گوییم X دارای توزیع گاما با پارامترهای α و λ است و آن را با نماد $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$ نشان می‌دهیم.

حالت خاص $\alpha=1$، یعنی $\Gamma(1,\lambda)$، همان توزیع نمایی با پارامتر λ است، حالت خاص $\alpha=n$، $n\in N$، یعنی $\Gamma(n,\lambda)$، به توزیع **ارلنگ** معروف است و حالت خاص $\alpha=\frac{n}{2}$ و $\lambda=\frac{1}{2}$، یعنی $\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$ به توزیع **کای‌دو** با n درجه‌ی آزادی معروف است و به‌طور معمول آن را با نماد $\chi^2_{(n)}$ نشان می‌دهند. اگر $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$، آنگاه

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\lambda}(X) &= \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad Var_{\alpha,\lambda}(X)=\frac{\alpha}{\lambda^2} \qquad CV(\alpha,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \\ \gamma_1(\alpha,\lambda) &= \frac{2}{\sqrt{\alpha}}, \qquad \gamma_2(\alpha,\lambda)=\frac{6}{\alpha} \\ M_X(t) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{\alpha},\ \ t<\lambda, \qquad \psi_X(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-\ln t}\right)^{\alpha},\ \ t<e^{\lambda} \end{aligned}$$

۴- توزیع گاما وارون اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\alpha,\lambda}(x)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{x^{\alpha+1}}e^{-\frac{\lambda}{x}},\ \ x>0,\ \ \alpha>0,\ \ \lambda>0$$

گوییم X دارای توزیع گاما وارون با پارامترهای α و λ است و آن را با نماد $X\sim I\Gamma(\alpha,\lambda)$ نشان

می‌دهیم. اگر $X \sim I\Gamma(\alpha,\lambda)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\lambda}(X) &= \frac{\lambda}{\alpha-۱}, \quad \alpha>۱\\
E_{\alpha,\lambda}(X^۲) &= \frac{\lambda^۲}{(\alpha-۱)(\alpha-۲)}, \quad \alpha>۲,\\
E_{\alpha,\lambda}(X^r) &= \frac{\Gamma(\alpha-r)}{\Gamma(\alpha)}\lambda^r = \frac{\lambda^r}{(\alpha-۱)\dots(\alpha-r)}, \quad \alpha>r,\\
CV_{\alpha,\lambda} &= \frac{۱}{\sqrt{\alpha-۲}}, \quad \alpha>۲
\end{aligned}$$

۵- توزیع نرمال اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\mu,\sigma^۲}(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}}\exp[-\frac{۱}{۲\sigma^۲}(x-\mu)^۲],\ \ x\in R,\ \ \mu\in R,\ \ \sigma>۰$$

گوییم X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و $\sigma^۲$ است و آن را با نماد $X\sim N(\mu,\sigma^۲)$ نشان می‌دهیم. حالت خاص $\mu=۰$ و $\sigma^۲=۱$ به نرمال استاندارد معروف است و به‌طور معمول متغیر تصادفی نرمال استاندارد را با Z، تابع چگالی احتمال آن را با ϕ و تابع توزیع آن را با Φ نشان می‌دهند. اگر $X\sim N(\mu,\sigma^۲)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
E_{\mu,\sigma^۲}(X) &= \mu, \quad Var_{\mu,\sigma^۲}(X)=\sigma^۲, \quad CV(\mu,\sigma^۲)=\frac{\sigma}{\mu}\\
\gamma_۱(\mu,\sigma^۲) &= ۰, \quad \gamma_۲(\mu,\sigma^۲)=۰\\
M_X(t) &= \exp\left(\mu t+\frac{۱}{۲}\sigma^۲t^۲\right), \ \ t\in R
\end{aligned}$$

۶- توزیع لاگ نرمال اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\mu,\sigma^۲}(x) = \frac{۱}{x\sqrt{۲\pi\sigma^۲}}\exp\left[-\frac{۱}{۲\sigma^۲}(\ln x-\mu)^۲\right],\ x>۰,\ \ \mu\in R,\ \ \sigma>۰$$

گوییم X دارای توزیع لاگ نرمال با پارامترهای μ و $\sigma^۲$ است و آن را با نماد $X\sim LN(\mu,\sigma^۲)$ نشان می‌دهیم. اگر $X\sim LN(\mu,\sigma^۲)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
E_{\mu,\sigma^۲}(X) &= \exp\left(\mu+\frac{۱}{۲}\sigma^۲\right), \quad Var_{\mu,\sigma^۲}(X)=w(w-۱)e^{۲\mu},\ w=e^{\sigma^۲}\\
CV(\mu,\sigma^۲) &= \sqrt{w-۱}\\
\gamma_۱(\mu,\sigma^۲) &= (w+۲)\sqrt{w-۱}, \quad \gamma_۲(\mu,\sigma^۲)=w^۴+۲w^۳+۳w^۲-۶\\
E(X^n) &= \exp(n\mu+\frac{۱}{۲}n^۲\sigma^۲), \quad M_X(t)=\text{وجود ندارد}
\end{aligned}$$

۷- توزیع گوسین وارون اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\mu,\lambda}(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{۲\pi x^۳}} \exp\left[-\frac{\lambda(x-\mu)^۲}{۲\mu^۲ x}\right], \quad x > ۰, \quad \lambda > ۰, \quad \mu > ۰$$

گوییم X دارای توزیع گوسین وارون با پارامترهای μ و λ است و آن را با نماد $X \sim IG(\mu,\lambda)$ نشان می‌دهیم. اگر $X \sim IG(\mu,\lambda)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} E_{\mu,\lambda}(X) &= \mu, \qquad Var_{\mu,\lambda}(X) = \frac{\mu^۳}{\lambda}, \quad CV(\mu,\lambda) = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \\ \gamma_۱(\mu,\lambda) &= ۳\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}, \qquad \gamma_۲(\mu,\lambda) = ۱۵\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \\ M_X(t) &= \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu}\left[۱ - \left(\frac{۱-۲\mu^۲ t}{\lambda}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right]\right\}, \ t \in R \end{aligned}$$

۸- توزیع کوشی اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\theta,\sigma}(x) = \frac{۱}{\sigma\pi[۱ + (\frac{x-\theta}{\sigma})^۲]}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad \theta \in R, \quad \sigma > ۰$$

گوییم X دارای توزیع کوشی با پارامترهای θ و σ است و آن را با نماد $X \sim C(\theta,\sigma)$ نشان می‌دهیم. حالت خاص $\theta = ۰$ و $\sigma = ۱$ به کوشی استاندارد معروف است. اگر $X \sim C(\theta,\sigma)$، گشتاورها و تابع مولد گشتاور X وجود ندارند.

۹- توزیع لاپلاس اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\alpha,\beta_۱,\beta_۲}(x) = \begin{cases} \frac{۱}{\beta_۱+\beta_۲} e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta_۱}} & x \geq \alpha \\ \frac{۱}{\beta_۱+\beta_۲} e^{\frac{(x-\alpha)}{\beta_۲}} & x < \alpha \end{cases}$$

گوییم X دارای توزیع لاپلاس با پارامترهای α، $\beta_۱$ و $\beta_۲$ است و آن را با نماد $X \sim L(\alpha,\beta_۱,\beta_۲)$ نشان می‌دهیم. با حالت خاص $\beta_۱ = \beta_۲ = \beta$، یعنی $L(\alpha,\beta,\beta)$، بیش‌تر آشناییم که به توزیع نمایی دوگانه معروف است. در این صورت تابع چگالی احتمال را به صورت زیر می‌توان نوشت.

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{۱}{۲\beta} e^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \alpha \in R, \quad \beta > ۰$$

اگر $X \sim L(\alpha,\beta,\beta)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(X) &= \alpha, \quad Var_{\alpha,\beta}(X) = ۲\beta^۲ \quad CV(\alpha,\beta) = \frac{\sqrt{۲}\beta}{\alpha} \\ \gamma_۱(\alpha,\beta) &= ۰, \quad \gamma_۲(\alpha,\beta) = ۳, \quad M_X(t) = \frac{e^{\alpha t}}{۱-\beta^۲ t^۲}, \ |t| < \frac{۱}{\beta} \end{aligned}$$

۱۰- توزیع وایبل اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \alpha\lambda x^{\alpha-۱} e^{-\lambda x^{\alpha}}, \ \ x > ۰, \ \ \alpha > ۰, \ \ \lambda > ۰$$

گوییم X دارای توزیع وایبل با پارامترهای α و λ است و آن را با نماد $X \sim W(\alpha,\lambda)$ نشان می‌دهیم. حالت خاص $\alpha = ۲$، یعنی $W(۲,\lambda)$، به توزیع **رای لی** معروف است و به‌طور معمول آن را با نماد $R(\lambda)$ نشان می‌دهند. حالت خاص $\alpha = ۱$، یعنی $W(۱,\lambda)$، همان توزیع نمایی (منفی) با پارامتر λ است. اگر $X \sim W(\alpha,\lambda)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\lambda}(X) &= \frac{\Gamma(۱+\frac{۱}{\alpha})}{\lambda^{\frac{۱}{\alpha}}}, \quad Var_{\alpha,\lambda}(X) = \frac{\Gamma(۱+\frac{۲}{\alpha}) - \Gamma^۲(۱+\frac{۱}{\alpha})}{\lambda^{\frac{۲}{\alpha}}} \\ CV(\alpha,\lambda) &= \left[\frac{\Gamma(۱+\frac{۲}{\alpha})}{\Gamma^۲(۱+\frac{۱}{\alpha})} - ۱\right]^{\frac{۱}{۲}}, \quad E(X^n) = \frac{\Gamma(۱+\frac{n}{\alpha})}{\lambda^{\frac{n}{\alpha}}} \end{aligned}$$

۱۱- توزیع پاراتو اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+۱}}, \ \ x \geq \beta, \ \ \beta > ۰, \ \ \alpha > ۰$$

گوییم X دارای توزیع پاراتو با پارامترهای α و β است و آن را با نماد $X \sim Pa(\alpha,\beta)$ نشان می‌دهیم. اگر $X \sim Pa(\alpha,\beta)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(X) &= \frac{\alpha\beta}{\alpha-۱}, \ \alpha > ۱, \quad Var_{\alpha,\beta}(X) = \frac{\alpha\beta^۲}{(\alpha-۱)^۲(\alpha-۲)}, \ \alpha > ۲ \\ CV(\alpha,\beta) &= [\tfrac{۱}{\alpha(\alpha-۲)}]^{\frac{۱}{۲}}, \ \ \alpha > ۲, \quad M_X(t) = \text{وجود ندارد} \end{aligned}$$

۱۲- توزیع بتا اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-۱}(۱-x)^{\beta-۱}, \ \ ۰ < x < ۱, \ \ \alpha > ۰, \ \beta > ۰$$

گوییم X دارای توزیع بتا با پارامترهای α و β است و آن را با نماد $X \sim Beta(\alpha, \beta)$ نشان می‌دهیم.

حالت خاص $\alpha = \beta = \frac{۱}{۲}$، یعنی $Beta(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$، به توزیع $arcsin$ معروف است، حالت خاص $\beta = ۱$، یعنی $Beta(\alpha, ۱)$، به توزیع توانی معروف است و حالت خاص $\alpha = \beta = ۱$، یعنی $Beta(۱, ۱)$، همان توزیع $U(۰, ۱)$ است. اگر $X \sim Beta(\alpha, \beta)$، آن‌گاه

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(X) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad Var_{\alpha,\beta}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+۱)(\alpha+\beta)^{۲}} \\
CV(\alpha,\beta) &= \left[\frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta+۱)}\right]^{\frac{۱}{۲}} \\
\gamma_{۱}(\alpha,\beta) &= \frac{۲(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+۱)^{\frac{۱}{۲}}}{(\alpha+\beta+۲)(\alpha\beta)^{\frac{۱}{۲}}} \\
\gamma_{۲}(\alpha,\beta) &= \frac{۳(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+۱)(\alpha+۱)(۲\beta-\alpha)}{\alpha\beta(\alpha+\beta+۲)(\alpha+\beta+۳)} + \frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta} - ۳ \\
M_X(t) &= ۱ + \sum_{k=۱}^{\infty}\left(\Pi_{r=۰}^{k-۱}\frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r}\right)\frac{t^k}{k!}, \ t \in R
\end{aligned}
$$

۱۳- توزیع مثلثی اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\theta}(x) = ۱ - |x-\theta|, \ \ |x-\theta| < ۱, \ \ \theta \in R$$

گوییم X دارای توزیع مثلثی با پارامتر θ است و آن را با نماد $X \sim T(-۱, ۱, \theta)$ نشان می‌دهیم.

۱۴- توزیع t اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+۱}{۲})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{۲})}\left(۱+\frac{x^{۲}}{n}\right)^{-\frac{n+۱}{۲}}, \ \ -\infty < x < \infty$$

گوییم X دارای توزیع t با n درجه‌ی آزادی است و آن را با نماد $X \sim t_{(n)}$ نشان می‌دهیم.

اگر $X \sim t_{(n)}$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} E_n(X) &= ۰,\ n = ۲,۳,\ldots, \qquad Var_n(X) = \frac{n}{n-۲},\ n = ۳,۴,\ldots \\ CV(n) &= \text{تعریف نشده است} \\ \gamma_۱(n) &= ۰,\ n = ۴,۵,\ldots \qquad \gamma_۲(n) = \frac{۶}{n-۴},\ n = ۵,۶,\ldots \\ E(X^r) &= \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{r+۱}{۲})\Gamma(\frac{n-r}{۲})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{۲})} n^{\frac{r}{۲}} & r = ۲k \\ ۰ & r = ۲k+۱ \end{cases} \qquad M_X(t) = \text{وجود ندارد} \end{aligned}$$

۱۵- توزیع F اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n_۱+n_۲}{۲})}{\Gamma(\frac{n_۱}{۲})\Gamma(\frac{n_۲}{۲})} \left(\frac{n_۱}{n_۲}\right)^{\frac{n_۱}{۲}} \frac{x^{\frac{n_۱}{۲}-۱}}{\left(۱+\frac{n_۱}{n_۲}x\right)^{\frac{n_۱+n_۲}{۲}}},\ x > ۰$$

گوییم X دارای توزیع F با درجه‌های آزادی $n_۱$ و $n_۲$ است و آن را با نماد $X \sim F_{(n_۱,n_۲)}$ نشان می‌دهیم. اگر $X \sim F_{(n_۱,n_۲)}$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} E_{n_۱,n_۲}(X) &= \frac{n_۲}{n_۲-۲},\ n_۲ > ۲ \\ Var_{n_۱,n_۲}(X) &= \frac{۲n_۲^۲(n_۱+n_۲-۲)}{n_۱(n_۲-۲)^۲(n_۲-۴)},\ n_۲ > ۴ \\ CV(n_۱,n_۲) &= \left[\frac{۲(n_۱+n_۲-۲)}{n_۱(n_۲-۴)}\right]^{\frac{۱}{۲}},\ n_۲ > ۴ \\ \gamma_۱(n_۱,n_۲) &= \frac{۲(n_۱+n_۲-۲)[۸(n_۲-۴)]^{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{n_۱}(n_۲-۶)(n_۱+n_۲-۲)^{\frac{۱}{۲}}},\ n_۲ > ۶ \\ \gamma_۲(n_۱,n_۲) &= \frac{۱۲[(n_۲-۲)^۲(n_۲-۴)+n_۱(n_۱+n_۲-۲)(۵n_۲-۲۲)]}{n_۱(n_۲-۶)(n_۲-۸)(n_۱+n_۲-۲)},\ n_۲ > ۸ \\ E(X^n) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n_۱+۲n}{۲}\right)\Gamma\left(\frac{n_۲-۲n}{۲}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_۱}{۲}\right)\Gamma\left(\frac{n_۲}{۲}\right)} \left(\frac{n_۲}{n_۱}\right)^n,\ n < \frac{n_۲}{۲} \\ M_X(t) &= \text{وجود ندارد} \end{aligned}$$

۱۶- توزیع مقدارهای کرانگین (غایی) اگر متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع زیر باشد

$$F_{\alpha,\beta}(x) = \exp\left[-e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}\right],\ -\infty < x < \infty,\ \alpha \in R,\ \beta > ۰$$

گوییم X دارای توزیع مقدارهی کرانگین با پارامترهای α و β است و آن را با نماد $X \sim EV(\alpha,\beta)$ نشان می‌دهیم. اگر $X \sim EV(\alpha,\beta)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(X) &= \alpha+\gamma\beta,\ \gamma \approx ۰/۵۷۷۲\ldots, \qquad Var_{\alpha,\beta}(X)=\frac{\pi^{۲}\beta^{۲}}{۶}\\
CV(\alpha,\beta) &= \frac{\pi\beta}{\sqrt{۶}(\alpha+\gamma\beta)^{\frac{۱}{۲}}}\\
\gamma_{۱}(\alpha,\beta) &= ۱/۲۹۸۵۷, \qquad \gamma_{۲}(\alpha,\beta)=۲/۴\\
M_X(t) &= e^{\alpha t}\Gamma(۱-\beta t),\ t<\frac{۱}{\beta}
\end{aligned}$$

۱۷- توزیع لجستیک اگر متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع زیر باشد

$$F_{\alpha,\beta}(x) = \left[۱+e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}\right]^{-۱} = \frac{۱}{۲}\left[۱+\tanh\left(\frac{x-\alpha}{۲\beta}\right)\right],\ -\infty<x<\infty,\ \alpha\in R,\ \beta>۰$$

گوییم X دارای توزیع لجستیک با پارامترهای α و β است و آن را با نماد $X \sim Lo(\alpha,\beta)$ نشان می‌دهیم. اگر $X \sim Lo(\alpha,\beta)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(X) &= \alpha, \qquad Var_{\alpha,\beta}(X)=\frac{\beta^{۲}\pi^{۲}}{۳}, \qquad CV(\alpha,\beta)=\frac{\beta\pi}{\alpha\sqrt{۳}}\\
\gamma_{۱}(\alpha,\beta) &= ۰, \qquad \gamma_{۲}(\alpha,\beta)=\frac{۱}{۲}\\
M_X(t) &= e^{\alpha t}\pi\beta t\csc(\pi\beta t)=e^{\alpha t}\Gamma(۱-\beta t)\Gamma(۱+\beta t),\ |t|<\frac{۱}{\beta}
\end{aligned}$$

۱۸- توزیع نرمال دومتغیره اگر $\boldsymbol{X}=(X_{۱},X_{۲})$ دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$\begin{aligned}
f(x_{۱},x_{۲}) &= \frac{۱}{۲\pi\sigma_{۱}\sigma_{۲}\sqrt{۱-\rho^{۲}}}\\
&\exp\left\{-\frac{۱}{۲(۱-\rho^{۲})}\left[\left(\frac{x_{۱}-\mu_{۱}}{\sigma_{۱}}\right)^{۲}-۲\rho\left(\frac{x_{۱}-\mu_{۱}}{\sigma_{۱}}\right)\left(\frac{x_{۲}-\mu_{۲}}{\sigma_{۲}}\right)+\left(\frac{x_{۲}-\mu_{۲}}{\sigma_{۲}}\right)^{۲}\right]\right\}
\end{aligned}$$

گوییم $\boldsymbol{X}$ دارای توزیع نرمال دومتغیره با پارامترهای $\mu_{۱}$، $\mu_{۲}$، $\sigma_{۱}^{۲}$، $\sigma_{۲}^{۲}$ و ρ است و آن را با نماد $\boldsymbol{X}\sim N(\mu_{۱},\mu_{۲},\sigma_{۱}^{۲},\sigma_{۲}^{۲},\rho)$ نشان می‌دهیم. اگر $\boldsymbol{X}\sim N(\mu_{۱},\mu_{۲},\sigma_{۱}^{۲},\sigma_{۲}^{۲},\rho)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
E(X_i) &= \mu_i,\ i=۱,۲ \qquad Var(X_i)=\sigma_i^{۲},\ i=۱,۲\\
corr(X_{۱},X_{۲}) &= \rho\\
M_{X_{۱},X_{۲}}(t_{۱},t_{۲}) &= \exp\left(\mu_{۱}t_{۱}+\mu_{۲}t_{۲}+\frac{۱}{۲}\sigma_{۱}^{۲}t_{۱}^{۲}+\frac{۱}{۲}\sigma_{۲}^{۲}t_{۲}^{۲}+\rho\sigma_{۱}\sigma_{۲}t_{۱}t_{۲}\right)
\end{aligned}$$

۱۹- توزیع دریخله اگر $\boldsymbol{X} = (X_۱, \ldots, X_k)$ دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x_۱, \ldots, x_k) = \frac{\Gamma(\sum_{i=۰}^{k} \alpha_i)}{\prod_{i=۰}^{k} \Gamma(\alpha_i)} \left(۱ - \sum_{i=۱}^{k} x_i\right)^{\alpha_۰ - ۱} \prod_{i=۱}^{k} x_i^{\alpha_i - ۱},$$

$$x_i \geq ۰; i = ۱, \ldots, k, \ \sum_{i=۱}^{k} x_i < ۱, \ \alpha_i > ۰$$

گوییم $\boldsymbol{X}$ دارای توزیع دریخله با پارامترهای $\alpha_۰$، $\alpha_۱$، ... و α_k است و آن را با نماد $\boldsymbol{X} \sim D_k(\alpha_۰, \alpha_۱, \ldots, \alpha_k)$ نشان می‌دهیم.

حالت خاص $k = ۱$، یعنی $D_۱(\alpha_۰, \alpha_۱)$، همان توزیع $Beta(\alpha_۱, \alpha_۰)$ است. اگر $\boldsymbol{X} \sim D_k(\alpha_۰, \alpha_۱, \ldots, \alpha_k)$ و $\alpha = \sum_{i=۰}^{k} \alpha_i$، آن‌گاه

$$E(X_i) = \frac{\alpha_i}{\alpha}, \ i = ۱, \ldots, k$$

$$Var(X_i) = \frac{\alpha_i(\alpha - \alpha_i)}{\alpha^۲(\alpha + ۱)}, \ i = ۱, \ldots, k$$

$$corr(X_i, X_j) = -\frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha^۲(\alpha + ۱)}, \ i \neq j$$

رابطه‌های بین توزیع‌ها در این قسمت، برخی از رابطه‌های بین توزیع‌ها را بیان می‌کنیم. برهان بسیاری از این رابطه‌ها را پیش‌تر دیده‌اید، بنابراین برهان این رابطه‌ها ضروری به نظر نمی‌رسد.

۱) فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $B(۱, p)$ باشد، آن‌گاه

الف) $Y = \sum_{i=۱}^{n} X_i \sim B(n, p)$،

ب) با انتخاب $\lambda = np$،

$$Y \xrightarrow{D} P(\lambda), \ \ n \to \infty$$

ج) با انتخاب $\mu = np$، $\sigma^۲ = npq$

$$\frac{Y - \mu}{\sigma} \xrightarrow{D} N(۰, ۱), \ \ n \to \infty$$

د) $X_i | Y = y \sim HG(n, ۱; y)$.

۲) اگر $X \sim B(n,p)$ و $Y \sim B(m,p)$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند، آن‌گاه

الف) $X+Y \sim B(m+n,p)$،

ب) $X|X+Y=z \sim HG(m+n,n;z)$.

۳) اگر $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $Ge(p)$ باشد، آن‌گاه

الف) $Y=\min(X_1,\ldots X_n)=X_{(1)} \sim Ge(1-q^n)$،

ب) $Z=\sum_{i=1}^n X_i \sim NB(n,p)$.

۴) اگر $X \sim HG(n_3,n_1;n_2)$، با انتخاب $\theta=\frac{n_1}{n_3}$،

$$X \xrightarrow{D} B(n_2,\theta),\ \ n_3 \to \infty$$

۵) اگر $X \sim NB(n,p)$، با انتخاب $\lambda=n(1-p)$،

$$X \xrightarrow{D} P(\lambda),\ \ n \to \infty$$

۶) اگر $X \sim BB(n_1,n_2,n_3)$، با انتخاب $\theta=\frac{n_2}{n_3}$،

$$X \xrightarrow{D} B(n_1,\theta),\ \ n_3 \to \infty$$

۷) اگر $Y \sim Beta(n_2,n_3)$ و $X|Y=y \sim B(n_1,y)$ آن‌گاه $X \sim BB(n_1,n_2,n_3)$.

۸) اگر $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $P(\lambda)$ باشد، آن‌گاه

الف) $Y=\sum_{i=1}^n X_i \sim P(n\lambda)$،

ب) $X_i|Y=y \sim B(y,\frac{1}{n})$،

ج) $\frac{Y-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{D} N(0,1),\ \ n\to\infty$.

۹) اگر X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان $U(0,1)$ باشند، آن‌گاه

الف) $W=1-X_1 \sim U(0,1)$،

ب) $Y=-\theta\ln X_1 \sim E(\frac{1}{\theta})$،

ج) $Z=-2\ln X_1 \sim E(\frac{1}{2})=\chi^2_{(2)}$،

د) $U = X_1 - X_2 \sim T(-1, 1, 0)$.

۱۰) اگر $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $U(0, 1)$ باشد، آن‌گاه

الف) $X_{(i)} \sim Beta(i, n - i + 1)$،

ب) $X_{(n)} - X_{(1)} \sim Beta(n - 1, 2)$

۱۱) اگر $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $E(\lambda)$ باشد، آن‌گاه

الف) $Y = \min(X_1, \ldots, X_n) = X_{(1)} \sim E(n\lambda)$،

ب) $Z = X_1^{\frac{1}{\alpha}} \sim W(\alpha, \lambda)$،

ج) $V = X_1 - X_2 \sim L(0, \lambda, \lambda)$،

د) $U = \sqrt{2\lambda X_1} \sim W(2, \frac{1}{2})$،

ه) $W = 2\lambda X_1 \sim \chi^2_{(2)}$،

و) $T = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \sim U(0, 1)$،

ز) $Q = \frac{X_1 - X_2}{X_1 + X_2} \sim U(-1, 1)$،

ح) $F = \frac{X_1}{X_2} \sim F_{(2,2)}$،

ط) $\sum_{i=1}^{r} X_{(i)} + (n - r)X_{(r)} \sim (2\lambda)^{-1}\chi^2_{(2r)}, \quad 2 \leq r \leq n$،

ی) $\sum_{i=2}^{n}(n - i + 1)(X_{(i)} - X_{(i-1)}) \sim (2\lambda)^{-1}\chi^2_{(2n-2)}$.

۱۲) اگر $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $E(\mu, \sigma)$ باشد، آن‌گاه

الف) $Y = X_{(1)} \sim E(\mu, \frac{\sigma}{n})$،

ب) $U = \sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}) \sim \frac{\sigma}{2}\chi^2_{(2n-2)}$.

۱۳) اگر $X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$ و $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند، آن‌گاه

الف) $T = \frac{1}{X} \sim I\Gamma(\alpha_1, \lambda)$،

ب) $2\lambda X \sim \chi^2_{(2\alpha)}$،

ج) $T = \frac{X}{X+Y} \sim Beta(\alpha_1, \alpha_2)$،

د) $X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$،

ه) با انتخاب $\alpha_1 = n$، $\mu = \frac{\alpha_1}{\lambda}$ و $\sigma^2 = \frac{\alpha_1}{\lambda^2}$

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0,1), \quad n \to \infty$$

۱۴) فرض کنید $X_1, \ldots, X_r$، r متغیر تصادفی مستقل باشند، به گونه‌ای که $X_i \sim \chi^2_{(n_i)}$، $i = 1, \ldots, r$ آن‌گاه

الف) $Y = \sum_{i=1}^r X_i \sim \chi^2_{(\sum_{i=1}^r n_i)}$،

ب) $U = \frac{\frac{X_1}{n_1}}{\frac{X_2}{n_2}} \sim F_{(n_1,n_2)}$،

ج) $W = \frac{X_1}{X_1+X_2} \sim Beta(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2})$.

۱۵) اگر $Z_1, \ldots, Z_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $N(0,1)$ باشند، آن‌گاه

الف) $Y = \sum_{i=1}^n Z_i \sim N(0,n)$،

ب) $W = \sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2_{(n)}$،

ج) $U = \frac{Z_1}{Z_2} \sim C(0,1)$،

د) $V = \frac{Z_1}{|Z_2|} \sim C(0,1)$.

۱۶) اگر $Z \sim N(0,1)$، $V \sim \chi^2_{(n)}$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند، آن‌گاه

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n}}} \sim t_{(n)}$$

۱۷) اگر $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $LN(\mu, \sigma^2)$ باشد، آن‌گاه

الف) $Y = \Pi_{i=1}^n X_i \sim LN(n\mu, n\sigma^2)$،

ب) $W = \ln X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$،

ج) $V = Y^{\frac{1}{n}} = (\Pi_{i=1}^n X_i)^{\frac{1}{n}} \sim LN(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

۱۸) اگر $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $IG(\mu, \lambda)$ باشد، آن‌گاه

الف) $Y = \frac{\lambda(X_1-\mu)^2}{\mu^2 X_1} \sim \chi^2_{(1)}$،

ب) $\overline{X} \sim IG(\mu, n\lambda)$،

ج) $\sum_{i=1}^{n}(X_i^{-1}-\overline{X}^{-1})\sim\lambda^{-1}\chi^2_{(n-1)}$.

۱۹) اگر $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $C(\theta,\sigma)$ باشد، آن‌گاه

الف) $Y=\frac{1}{X_1}\sim C(\frac{\theta}{\theta^2+\sigma^2},\frac{\sigma}{\theta^2+\sigma^2})$،

ب) $\overline{X}\sim C(\theta,\sigma)$ و $Z=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim C(n\theta,n\sigma)$.

۲۰) اگر $X\sim L(0,\beta,\beta)$، آن‌گاه $U=|X|\sim E(\frac{1}{\beta})$.

۲۱) اگر $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $Pa(\alpha,\beta)$ باشد، آن‌گاه

الف) $Y=\ln(\frac{X_1}{\beta})\sim E(\alpha)$،

ب) $U=\min(X_1,\ldots,X_n)=X_{(1)}\sim Pa(n\alpha,\beta)$،

ج) $W=2\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{X_i}{\beta})\sim\chi^2_{(2n)}$،

د) $V=2\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{X_i}{X_{(1)}})\sim\chi^2_{(2n-2)}$.

۲۲) اگر $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع $W(\alpha,\lambda)$ باشد، آن‌گاه

الف) $U=2\lambda X_1^{\alpha}\sim\chi^2_{(2)}$،

ب) $V=X_{(1)}\sim W(\alpha,n\lambda)$،

ج) $X_1^{\alpha}\sim E(\lambda)$،

د) $\frac{X_1^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n}X_i^{\alpha}}\sim Beta(1,n-1)$.

۲۳) اگر $X\sim t_{(n)}$، آن‌گاه

الف) $t_{(1)}=C(0,1)$،

ب) $Y=X^2\sim F_{(1,n)}$،

ج) $Z=\frac{1}{1+\frac{X^2}{n}}\sim Beta(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$.

۲۴) اگر $X\sim Beta(\alpha,1)$، آن‌گاه

الف) $Y=-\ln X\sim E(\alpha)$،

ب) $Z=-2\alpha\ln X\sim\chi^2_{(2)}$.

۲۵) اگر $W \sim Beta(\frac{m}{۲}, \frac{n}{۲})$، آن‌گاه $X = \frac{n}{m} \frac{W}{۱-W} \sim F_{(m,n)}$. برعکس اگر $X \sim F_{(m,n)}$ آن‌گاه $W = \frac{\frac{m}{n}X}{۱+\frac{m}{n}X} \sim Beta(\frac{m}{۲}, \frac{n}{۲})$.

۲۶) فرض کنید $X_۱ \sim Beta(\alpha_۱, \alpha_۲ + \alpha_۳ + \alpha_۴)$، $X_۲ \sim Beta(\alpha_۲, \alpha_۳ + \alpha_۴)$، $X_۳ \sim Beta(\alpha_۳, \alpha_۴)$، به گونه‌ای که $\alpha_i > ۰$، $i = ۱, \ldots, ۴$، سه متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. اگر تعریف کنیم $Y_۱ = X_۱$، $Y_۲ = X_۲(۱-X_۱)$ و $Y_۳ = X_۳(۱-X_۱)(۱-X_۲)$، آن‌گاه

$$\boldsymbol{Y} = (Y_۱, Y_۲, Y_۳) \sim D_۳(\alpha_۴, \alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳)$$

۲۷) فرض کنید $X_۱, \ldots, X_k, X_{k+۱}$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند، به گونه‌ای که $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, ۱)$، $i = ۱, \ldots, k, k+۱$. اگر $Y_{k+۱} = \sum_{j=۱}^{k+۱} X_j$ و $Y_i = \frac{X_i}{Y_{k+۱}}$، $i = ۱, ۲, \ldots, k$، باشند آن‌گاه

الف) $\boldsymbol{Y} = (Y_۱, \ldots, Y_k) \sim D_k(\alpha_{k+۱}, \alpha_۱, \ldots, \alpha_k)$

ب) $Y_۱ \sim Beta(\alpha_۱, \alpha_۲ + \cdots + \alpha_{k+۱})$

ج) $Y_۱ + \cdots + Y_r \sim Beta(\alpha_۱ + \cdots + \alpha_r, \alpha_{r+۱} + \cdots + \alpha_{k+۱}), \quad r \le k$

۱-۳ خانواده‌ی توزیع‌های مهم

در این بخش خانواده‌ی توزیع‌های مکانی، مقیاس، مکان-مقیاس و خانواده‌ی توزیع‌های نمایی را معرفی و برخی از ویژگی‌های این‌گونه توزیع‌ها را بیان خواهیم کرد. برای آگاهی بیش‌تر مارشال و الکین (۲۰۰۷) را ببینید.

خانواده‌ی توزیع‌های مکانی

فرض کنید که Z یک متغیر تصادفی با تابع توزیع G و تابع چگالی احتمال g باشد. اگر μ یک عدد حقیقی باشد، با اضافه کردن μ به Z می‌توان خانواده‌ای از توزیع‌ها را تولید کرد که این خانواده را خانواده‌ی توزیع‌های مکانی می‌نامیم و از μ به عنوان پارامتر مکان یاد می‌کنیم.

اگر $X = Z + \mu$ باشد، به سادگی می‌توان نشان داد که تابع توزیع X (F_μ) و تابع چگالی احتمال X (f_μ) به صورت زیر هستند

$$F_\mu(x) = P_\mu(X \le x) = P(Z + \mu \le x) = G(x - \mu)$$

و

$$f_\mu(x) = F'_\mu(x) = g(x - \mu)$$

مثال ۱-۱ الف) اگر $Z \sim U(-۱, ۱)$، آن‌گاه $X \sim U(\mu - ۱, \mu + ۱)$،

ب) اگر $Z \sim N(۰, ۱)$، آن‌گاه $X \sim N(\mu, ۱)$.

به خاطر داشته باشید خانواده‌ی توزیع‌های مکانی در اندازه‌گیری یک کمیت μ حاصل می‌شود، که در این اندازه‌گیری دستگاه اندازه‌گیر مرتکب خطای تصادفی Z می‌شود. بنابراین ما مقدار $X = Z + \mu$ را مشاهده می‌کنیم.

خانواده‌ی توزیع‌های مقیاس

فرض کنید که Z یک متغیر تصادفی با تابع توزیع G و تابع چگالی احتمال g باشد. اگر σ یک عدد حقیقی مثبت باشد، با ضرب σ در Z می‌توان خانواده‌ای از توزیع‌ها را تولید کرد که این خانواده را خانواده‌ی توزیع‌های مقیاس می‌نامیم و از σ به عنوان پارامتر مقیاس یاد می‌کنیم.

اگر $X = \sigma Z$ باشد، به سادگی می‌توان نشان داد که تابع توزیع X (F_σ) و تابع چگالی احتمال X (f_σ) به صورت زیر هستند

$$F_\sigma(x) = P_\sigma\left(X \leq x\right) = P\left(Z \leq \frac{x}{\sigma}\right) = G\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$

و

$$f_\sigma(x) = F'_\sigma(x) = \frac{۱}{\sigma} g\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$

مثال ۱-۲ الف) اگر $Z \sim N(۰, ۱)$، آن‌گاه $X \sim N(۰, \sigma^۲)$،

ب) اگر $Z \sim \Gamma(\alpha, ۱)$، آن‌گاه $X \sim \Gamma(\alpha, \sigma^{-۱})$،

ج) اگر $Z \sim U(۰, ۱)$، آن‌گاه $X \sim U(۰, \sigma)$.

به خاطر داشته باشید خانواده‌ی توزیع‌های مقیاس در اندازه‌گیری یک کمیت σ به دست می‌آید که‌در آن واحد اندازه‌گیری تغییر می‌کند. برای نمونه اگر Z نمایانگر طول یک شیء بر حسب متر باشد، در تغییر واحد اندازه‌گیری از متر به سانتی‌متر مقدار $X = ۱۰۰Z$ مشاهده می‌شود.

خانواده‌ی توزیع‌های مکان-مقیاس

فرض کنید که Z یک متغیر تصادفی با تابع توزیع G و تابع چگالی احتمال g باشد. اگر μ یک عدد حقیقی و σ یک عدد حقیقی مثبت باشد، با ضرب σ در Z و اضافه کردن μ به آن می‌توان خانواده‌ای از توزیع‌ها را تولید کرد که این خانواده را خانواده‌ی توزیع‌های مکان-مقیاس می‌نامیم و از μ به عنوان پارامتر مکان و از σ به عنوان پارامتر مقیاس یاد می‌کنیم.

اگر $X = \sigma Z + \mu$ باشد، به سادگی می‌توان نشان داد که تابع توزیع X ($F_{\mu,\sigma}$) و تابع چگالی احتمال X ($f_{\mu,\sigma}$) به صورت زیر هستند

$$F_{\mu,\sigma}(X) = P_{\mu,\sigma}\left(X \leq x\right) = P_{\mu,\sigma}\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

و

$$f_{\mu,\sigma}(x) = F'_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

مثال ۱-۳ **الف)** اگر $Z \sim N(0, 1)$، آن‌گاه $X \sim N(\mu, \sigma^2)$،

ب) اگر $Z \sim L(0, 1, 1)$ ، آن‌گاه $X \sim L(\mu, \sigma, \sigma)$،

ج) اگر $Z \sim U(-1, 1)$، آن‌گاه $X \sim U(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

به خاطر داشته باشید خانواده‌ی توزیع‌های مکان‌ـمقیاس در اندازه‌گیری یک کمیت مانند Z به دست می‌آید که درآن واحد اندازه‌گیری تغییر می‌کند. برای نمونه اگر Z نمایانگر دمای اتاق بر حسب سانتی‌گراد باشد، آن‌گاه به دلیل تغییر واحد اندازه‌گیری از سانتی‌گراد به فارنهایت مقدار $X = \frac{9}{5}Z + 32$ مشاهده می‌شود.

در ادامه برخی ویژگی‌های خانواده‌ی توزیع‌های مکان‌ـمقیاس را می‌آوریم که به سادگی اثبات می‌شوند.

- اگر Z دارای نما در z باشد، آن‌گاه X دارای نمای $x = \sigma z + \mu$ است.
- اگر Z دارای میانه در m_Z باشد، آن‌گاه X دارای میانه‌ی $m_X = \sigma m_Z + \mu$ است.
- اگر Z دارای میانگین η_Z باشد، آن‌گاه میانگین X وجود دارد و برابر با $\eta_X = \sigma\eta_Z + \mu$ است.
- برای هر $p \in (0, 1)$ داریم $F^{-1}_{\mu,\sigma}(p) = \mu + \sigma G^{-1}(p)$.
- اگر z_p چندک pام Z باشد، آن‌گاه $x_p = \sigma z_p + \mu$ چندک pام X است.
- اگر $\overline{G}$ نمایانگر تابع بقای Z باشد، آن‌گاه $\overline{F}_{\mu,\sigma}(x) = \overline{G}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.
- در صورت وجود، $Var(X) = \sigma^2 Var(Z)$.
- در صورت وجود، $M_X(t) = e^{t\mu} M_Z(\sigma t)$.

خانواده‌ی توزیع‌های نمایی

در این زیربخش خانواده‌ی توزیع‌های نمایی را معرفی و برخی از ویژگی‌های این خانواده را بیان خواهیم کرد. ویژگی‌های خانواده‌ی توزیع‌های نمایی در سال‌های ۱۹۳۷ و ۱۹۳۸ به طور مستقل توسط سه آماردان به نام‌های کوپمن، پیتمن و دارمویس مطالعه و بررسی شده است. بدین دلیل برخی از مؤلفان این‌گونه توزیع‌ها را «خانواده‌ی توزیع‌های کوپمن، پیتمن و دارمویس» نیز می‌نامند.

خانواده‌ی تابع‌های چگالی احتمال (یا تابع‌های احتمال) $\{f_\theta(x) : \theta \in \Theta \subseteq R\}$ را در نظر گیرید. گوییم این خانواده، عضو خانواده‌ی **توزیع‌های نمایی** (یا خانواده‌ی **توزیع‌های نمایی یک‌پارامتری**) است اگر بتوان $f_\theta(x)$ را به صورت زیر نوشت،

$$f_\theta(x) = a(\theta)b(x)e^{c(\theta)d(x)} \qquad (۱ - ۱)$$

که در آن $c(\theta)$، $a(\theta)$ تابع‌هایی اختیاری از θ، $b(x)$ و $d(x)$ تابع‌هایی اختیاری از x هستند، به گونه‌ای که $b(x)$ و $a(\theta)$ هر دو تابع‌هایی مثبت هستند.

در رابطه‌ی (۱ - ۱)، اگر $b(x) = \exp[R(x)]$ و $a(\theta) = \exp[Q(\theta)]$ اختیار شوند آن‌گاه رابطه‌ی (۱ - ۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$f_\theta(x) = \exp[c(\theta)d(x) + Q(\theta) + R(x)] \qquad (۱ - ۲)$$

اکنون، خانواده‌ی تابع‌های چگالی احتمال (یا تابع‌های احتمال) $\{f_{\boldsymbol{\theta}}(x) : \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq R^k\}$ را در نظر گیرید. گوییم این خانواده، عضو خانواده‌ی **توزیع‌های نمایی** (یا خانواده‌ی **توزیع‌های نمایی kپارامتری**) است، اگر بتوان $f_{\boldsymbol{\theta}}(x)$ را به صورت زیر نوشت،

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(x) = a(\boldsymbol{\theta})b(x)\exp\left[\sum_{i=۱}^{k} c_i(\boldsymbol{\theta})d_i(x)\right] \qquad (۱ - ۳)$$

که در آن $a(\boldsymbol{\theta})$ و $c_i(\boldsymbol{\theta})$، $i = ۱, \ldots, k$، تابع‌هایی از $\boldsymbol{\theta} = (\theta_۱, \ldots, \theta_k)$ و $b(x)$، $d_i(x)$، $i = ۱, \ldots, k$، تابع‌هایی از x هستند، به گونه‌ای که $b(x)$ و $a(\boldsymbol{\theta})$ هر دو تابع‌هایی مثبت هستند.

در رابطه‌ی (۱ - ۳) اگر $a(\boldsymbol{\theta}) = \exp[Q(\boldsymbol{\theta})]$ و $b(x) = \exp[R(x)]$ اختیار شوند، آن‌گاه رابطه‌ی (۱ - ۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(x) = \exp\left[\sum_{i=۱}^{k} c_i(\boldsymbol{\theta})d_i(x) + Q(\boldsymbol{\theta}) + R(x)\right] \qquad (۱ - ۴)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که بسیاری از خانواده‌ی توزیع‌های استاندارد، که با آن‌ها آشناییم، مانند برنولی، دوجمله‌ای، هندسی، دوجمله‌ای منفی، پواسون، نرمال، گاما و بتا عضو خانواده‌ی توزیع‌های نمایی هستند.
با توجه به آشنایی اولیه با خانواده‌ی توزیع‌های نمایی، در ادامه به تعریف جداگانه از این خانواده برای دو حالت پیوسته و گسسته می‌پردازیم.

حالت پیوسته

۱- گوییم خانواده‌ی چگالی‌های یک‌پارامتری $\{f_\theta(x) : \theta \in \Theta \subseteq R\}$ از آنِ خانواده‌ی **توزیع‌های نمایی** (یک‌پارامتری) با **شرایط مطلوب** است، اگر بتوان $f_\theta(x)$ را به صورت رابطه‌ی (۱ - ۲) با تکیه‌گاه $S_X^* = (a, b)$ نوشت که در آن

الف) هیچ‌یک از مقدارهای a و b به θ بستگی ندارند،

ب) $c(\theta)$ تابعی ناصفر و پیوسته از θ، $\theta \in \Theta$، است،

ج) هر یک از تابع‌های $d'(x) \not\equiv ۰$ و $R(x)$ تابع‌هایی پیوسته از x روی S_X^* هستند.

۲- گوییم خانواده‌ی چگالی‌های kپارامتری $\{f_{\boldsymbol{\theta}}(x) : \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq R^k\}$ از آنِ خانواده‌ی **توزیع‌های نمایی** (kپارامتری) با **شرایط مطلوب** است، اگر بتوان $f_{\boldsymbol{\theta}}(x)$ را به صورت (۱ - ۴) با تکیه‌گاه $S_X^* = (a, b)$ نوشت که در آن

الف) هیچ‌یک از مقدارهای a و b بستگی به مقدارهای $\theta_۱, \ldots, \theta_k$ ندارند،

ب) $c_i(\boldsymbol{\theta})$، $i = ۱, \ldots, k$، تابع‌های ناصفر، به طور تابعی مستقل و پیوسته از θ_jها هستند،

ج) $d'_i(x)$، $i = ۱, \ldots, k$، تابع‌هایی پیوسته از $x \in (a, b)$ هستند و هیچ‌یک از آن‌ها تابع خطی همگن از بقیه نیستند،

د) $R(x)$ تابعی پیوسته از $x \in (a, b)$ است.

حالت گسسته

۱- گوییم خانواده‌ی تابع‌های احتمال یک‌پارامتری $\{f_\theta(x) : \theta \in \Theta \subseteq R\}$ از آنِ خانواده‌ی **توزیع‌های نمایی** (یک‌پارامتری) با **شرایط مطلوب** است اگر بتوان $f_\theta(x)$ را به صورت (۱ - ۲) با تکیه‌گاه $S_X^* = \{x : x = a_۱, a_۲, \ldots\}$ نوشت که در آن

الف) مجموعه‌ی S_X^* بستگی به θ ندارد،

ب) $c(\theta)$ یک تابع ناصفر پیوسته از θ، $\theta \in \Theta$، است،

ج) $d(x)$ یک تابع ناصفر از x روی مجموعه‌ی S_X^* است.

۲- گوییم خانواده‌ی تابع‌های احتمال kپارامتری $\{f_{\boldsymbol{\theta}}(x) : \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq R^k\}$ از آنِ خانواده‌ی **توزیع‌های نمایی** (kپارامتری) با **شرایط مطلوب** است، اگر بتوان $f_{\boldsymbol{\theta}}(x)$ را به صورت رابطه‌ی (۱ - ۴) با تکیه‌گاه $S_X^* = \{x : x = a_۱, a_۲, \ldots\}$ نوشت که در آن

الف) مجموعه‌ی S_X^* بستگی به $\boldsymbol{\theta} = (\theta_۱, \ldots, \theta_k)$ ندارد،

ب) $c_i(\boldsymbol{\theta})$، $i = ۱, \ldots, k$، تابع‌های ناصفر، به طور تابعی مستقل و پیوسته از θ_j، $j = ۱, \ldots, k$، هستند،

ج) $d_i(x)$، $i = ۱, \ldots, k$، تابع‌های ناصفر از x روی مجموعه‌ی S_X^* است و هیچ‌یک از آن‌ها تابعی خطی از بقیه نیست.

نتیجه‌هایی از خانواده‌ی توزیع‌های نمایی

با بسیاری از ویژگی‌ها و نتیجه‌های خانواده‌ی توزیع‌های نمایی در فصل‌های گوناگون کتاب آشنا خواهیم شد. آن‌چه در این‌جا به آن اشاره می‌شود، بخشی از دانسته‌های ما در مورد گشتاورهاست.

۱) اگر X یک متغیر تصادفی با شرایط مطلوب از خانواده‌ی توزیع‌های نمایی به صورت (۱ - ۲) باشد، آن‌گاه

الف)
$$E_\theta[d(X)] = -\frac{Q'(\theta)}{c'(\theta)}$$

ب) با انتخاب $c(\theta) = \theta$ و $d(x) = x$، در صورت وجود، تابع مولد گشتاور X برابر است با

$$M_X(t) = \exp[Q(\theta) - Q(\theta + t)]$$

ج) با انتخاب $c(\theta) = \theta$ و $Y = d(X)$، در صورت وجود، تابع مولد گشتاور Y برابر است با

$$M_Y(t) = \exp[Q(\theta) - Q(\theta + t)]$$

۲) اگر X یک متغیر تصادفی با شرایط مطلوب از خانواده‌ی توزیع‌های نمایی kپارامتری به صورت (۱ - ۴) باشد، آن‌گاه با انتخاب $c_i(\boldsymbol{\theta}) = \theta_i$،

الف) $E_{\boldsymbol{\theta}}[d_i(X)] = -\frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}$

ب) $Cov_{\boldsymbol{\theta}}[d_i(X), d_j(X)] = -\frac{\partial^{۲} Q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\ , \qquad i \neq j$

۳) اگر X یک متغیر تصادفی با شرایط مطلوب از خانواده‌ی توزیع‌های نمایی به صورت (۱ - ۱) باشد، آن‌گاه با انتخاب $c(\theta) = \theta$ و $d(x) = x$

الف) در صورت وجود، $M_X(t) = \frac{a(\theta)}{a(\theta+t)}$

ب) با انتخاب $g(\theta) = \frac{۱}{a(\theta)}$، rامین گشتاور X برابر با

$$\mu_r = E(X^r) = \frac{۱}{g(\theta)} \frac{\partial^r g(\theta)}{\partial \theta^r}$$

مثال ۱-۴ خانواده‌های زیر عضو خانواده‌ی توزیع‌های نمایی هستند و مقدار تابع‌های $a(\theta)$، $c(\theta)$، $b(x)$ و $d(x)$، بر اساس رابطه‌ی (۱ - ۱)، برای هر خانواده مشخص شده است:

الف:

$$\{B(n, \theta) : \theta \in (۰, ۱), \text{معلوم } n\}$$

$$a(\theta) = (۱ - \theta)^n \qquad b(x) = \binom{n}{x}$$

$$c(\theta) = \ln \frac{\theta}{۱ - \theta} \qquad d(x) = x$$

ب:

$$\{P(\theta) : \theta \in (۰, \infty)\}$$

$$a(\theta) = e^{-\theta} \qquad b(x) = \frac{۱}{x!}$$

$$c(\theta) = \ln \theta \qquad d(x) = x$$

ج:

$$\{NB(r, \theta) : \theta \in (۰, ۱), \text{معلوم } r\}$$

$$a(\theta) = \theta^r \qquad b(x) = \binom{r + x - ۱}{x}$$

$$c(\theta) = \ln(۱ - \theta) \qquad d(x) = x$$

د:

$$\{LS(\theta) : \theta \in (۰, ۱)\}$$

$$a(\theta) = -[\ln(۱-\theta)]^{-۱} \qquad b(x) = \frac{۱}{x}$$
$$c(\theta) = \ln\theta \qquad d(x) = x$$

ه:

$$\{N(\theta, ۱) : \theta \in (-\infty, \infty)\}$$

$$a(\theta) = e^{-\frac{۱}{۲}\theta^۲} \qquad b(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}x^۲}$$
$$c(\theta) = \theta \qquad d(x) = x$$

و:

$$\{N(۰, \theta) : \theta > ۰\}$$

$$a(\theta) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\theta}} \text{ یا } \frac{۱}{\sqrt{\theta}} \qquad b(x) = ۱ \text{ یا } \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}$$
$$c(\theta) = -\frac{۱}{۲\theta} \qquad d(x) = x^۲$$

ز:

$$\{LN(\theta, ۱) : -\infty < \theta < \infty\}$$

$$a(\theta) = \exp\left(-\frac{۱}{۲}\theta^۲\right) \qquad b(x) = \frac{۱}{x\sqrt{۲\pi}} \exp\left(-\frac{۱}{۲}\ln^۲ x\right)$$
$$c(\theta) = \theta \qquad d(x) = \ln x$$

ح:

$$\{LN(۰, \theta) : \theta > ۰\}$$

$$a(\theta) = \frac{۱}{\sqrt{\theta}} \qquad b(x) = \frac{۱}{x\sqrt{۲\pi}}$$
$$c(\theta) = -\frac{۱}{۲\theta} \qquad d(x) = \ln^۲ x$$

ط:

$$\{IG(\theta, ۱) : \theta > ۰\}$$

$$a(\theta) = \exp\left(\frac{۱}{\theta}\right) \qquad b(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi x^{۳}}} \exp\left(-\frac{۱}{۲x}\right)$$

$$c(\theta) = -\frac{۱}{۲\theta^{۲}} \qquad d(x) = x$$

ی:

$$\{IG(۱, \lambda) : \lambda > ۰\}$$

$$a(\lambda) = \sqrt{\lambda} \text{ یا } \sqrt{\lambda}\exp(\lambda) \qquad b(x) = (۲\pi x^{۳})^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$c(\lambda) = -\frac{\lambda}{۲} \qquad d(x) = \frac{(x-۱)^{۲}}{x} \text{ یا } x + \frac{۱}{x}$$

ک:

$$\{\Gamma(\alpha, \lambda) : \lambda > ۰, \ \text{معلوم } \alpha\}$$

$$a(\lambda) = \lambda^{\alpha} \qquad b(x) = \frac{x^{\alpha-۱}}{\Gamma(\alpha)}$$

$$c(\lambda) = -\lambda \qquad d(x) = x$$

ل:

$$\{\Gamma(\alpha, \lambda) : \alpha > ۰, \ \text{معلوم } \lambda\}$$

$$a(\alpha) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \qquad b(x) = e^{-\lambda x} \text{ یا } \frac{۱}{x}e^{-\lambda x}$$

$$c(\alpha) = \alpha - ۱ \text{ یا } \alpha \qquad d(x) = \ln x$$

م:

$$\{W(\alpha, \lambda) : \lambda > ۰, \ \text{معلوم } \alpha\}$$

$$a(\lambda) = \lambda \qquad b(x) = \alpha x^{\alpha-۱}$$

$$c(\lambda) = -\lambda \qquad d(x) = x^{\alpha}$$

ن:

$$\{Beta(\alpha,\beta) : \alpha > ۰,\ \text{معلوم } \beta\}$$

$$a(\alpha) = \frac{۱}{B(\alpha,\beta)} \qquad b(x) = (۱-x)^{\beta-۱} \text{ یا } \frac{۱}{x}(۱-x)^{\beta-۱}$$

$$c(\alpha) = \alpha - ۱ \text{ یا } \alpha \qquad d(x) = \ln x$$

س:

$$\{Beta(\alpha,\beta) : \beta > ۰,\ \text{معلوم } \alpha\}$$

$$a(\beta) = \frac{۱}{B(\alpha,\beta)} \qquad b(x) = x^{\alpha-۱} \text{ یا } \frac{x^{\alpha-۱}}{۱-x}$$

$$c(\beta) = \beta - ۱ \text{ یا } \beta \qquad d(x) = \ln(۱-x)$$

ع:

$$\{Pa(\alpha,\beta) : \alpha > ۰,\ \text{معلوم } \beta\}$$

$$a(\alpha) = \alpha\beta^{\alpha} \qquad b(x) = u(x-\beta),\ \ u(t) = \begin{cases} ۱ & t \geq ۰ \\ ۰ & t < ۰ \end{cases}$$

$$c(\alpha) = -(\alpha + ۱) \qquad d(x) = \ln x$$

ف:

$$\{L(\alpha,\beta,\beta) : \beta > ۰,\ \text{معلوم } \alpha\}$$

$$a(\beta) = \frac{۱}{۲\beta} \qquad b(x) \equiv ۱$$

$$c(\beta) = -\frac{۱}{\beta} \qquad d(x) = |x - \alpha|$$

مثال ۱-۵ خانواده‌های زیر عضو خانواده‌ی توزیع‌های نمایی دوپارامتری هستند و مقدار تابع‌های $a(\boldsymbol{\theta})$، $c_i(\boldsymbol{\theta})$ و $d_i(x)$، $i = ۱,۲$ و $b(x)$، بر اساس رابطه‌ی (۱ - ۳)، برای هر خانواده مشخص شده است:

الف:

$$\{N(\mu,\sigma^۲) : \mu \in (-\infty,+\infty),\ \sigma \in (۰,\infty)\}$$

$$a(\boldsymbol{\theta}) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}} \exp(\frac{\mu^۲}{۲\sigma^۲}), \quad \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^۲) \qquad b(x) \equiv ۱$$

$$c_۱(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mu}{\sigma^۲} \qquad d_۱(x) = x$$

$$c_۲(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{۱}{۲\sigma^۲} \qquad d_۲(x) = x^۲$$

ب:

$$\{LN(\mu, \sigma^۲) : -\infty < \mu < \infty, \sigma > ۰\}$$

$$a(\boldsymbol{\theta}) = \frac{۱}{\sigma} \exp(-\frac{\mu^۲}{۲\sigma^۲}), \quad \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^۲) \qquad b(x) = \frac{۱}{x\sqrt{۲\pi}}$$

$$c_۱(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mu}{\sigma^۲} \qquad d_۱(x) = \ln x$$

$$c_۲(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{۱}{۲\sigma^۲} \qquad d_۲(x) = \ln^۲ x$$

ج:

$$\{IG(\mu, \lambda) : \mu > ۰, \ \lambda > ۰\}$$

$$a(\boldsymbol{\theta}) = \sqrt{\lambda} \exp(\frac{\lambda}{\mu}), \ \boldsymbol{\theta} = (\mu, \lambda) \qquad b(x) = (۲\pi x^۳)^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$c_۱(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\lambda}{۲\mu^۲} \qquad d_۱(x) = x$$

$$c_۲(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\lambda}{۲} \qquad d_۲(x) = \frac{۱}{x}$$

د:

$$\{\Gamma(\alpha, \lambda) : \alpha > ۰, \ \lambda > ۰\}$$

$$a(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}, \ \boldsymbol{\theta} = (\alpha, \lambda) \qquad b(x) = \frac{۱}{x}$$

$$c_۱(\boldsymbol{\theta}) = \alpha \qquad d_۱(x) = \ln x$$

$$c_۲(\boldsymbol{\theta}) = -\lambda \qquad d_۲(x) = x$$

هـ:

$$\{Beta(\alpha, \beta) : \alpha > ۰, \ \beta > ۰\}$$

$$a(\boldsymbol{\theta}) = \frac{۱}{B(\alpha, \beta)},\ \boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta) \qquad b(x) = \frac{۱}{x(۱ - x)}$$
$$c_۱(\boldsymbol{\theta}) = \alpha \qquad d_۱(x) = \ln x$$
$$c_۲(\boldsymbol{\theta}) = \beta \qquad d_۲(x) = \ln(۱ - x)$$

۴-۱ آمار چیست؟

آیا آمار جمع بستن اعداد است؟ آیا آمار رسم و ارائه‌ی نمودارهاست؟ آیا محاسبه‌ی میانگین یا درصد بیکاری و یا محاسبه‌ی شاخص‌های دیگری است و در یک کلام آیا آمار محاسبه‌ی مقدارهای عددی است که هر کدام بیانگر خاصیتی از جامعه و طبیعت است؟ بلی همه‌ی این‌ها درست است، ولی آمار به عنوان یک علم، عبارت است از مطالعه و بررسی برای مفهوم دادن به داده‌ها.

بسیاری از افراد از گروه‌های مختلف اجتماعی با داده‌ها سر و کار دارند. در آمار به شیوه‌های گوناگونی راهکار ارائه می‌شود. در این‌جا آمار را از دیدگاه‌های زیر برای رسیدن به هدف، که معنی دادن به داده‌هاست، مورد ارزیابی قرار می‌دهیم:

- جمع‌آوری داده‌ها
- خلاصه کردن داده‌ها
- تجزیه و تحلیل داده‌ها
- نتیجه‌گیری

شاید با توجه به گستردگی کنونی علم آمار بتوان ادعا کرد که در آغاز آمار به عنوان یک هنر و علم حکومت‌داری مطرح بوده و نخستین استادان این فن دانشمندان و کارگزاران علوم سیاسی قلمداد می‌شدند (چرا که تصمیم‌های حکومتی در گرو دسترسی به داده‌های مربوط به جمعیت، تجارت، کشاورزی و غیره هستند.) بررسی اجمالی مصاحبه‌ها و گفتارهای مسئولان دولتی، نشان می‌دهد که در حال حاضر نیز این گروه، عددها، رقم‌ها و تجزیه و تحلیل آن و در یک کلام آمار را برای تأیید «درستی» یا «اثبات» ادعاهای خود به کار می‌برند. آمار در روند تکاملی خود، نخست به معنای گرداوری داده‌های مربوط به حکومت به کار می‌رفته و سپس به طور کلی به معنای گرداوری و سازماندهی داده‌ها مطرح شده است گرچه امروزه تغییرات نوینی در این رشته در حال انجام است، اما این معنی هنوز، معنای بسیار رایج کلمه است.

می‌توان گفت آماردان کسی است که برای گرداوری داده‌ها به شیوه‌ی درست، تعبیر و تفسیر و معنی دادن به داده‌ها راهکارهایی ارائه می‌کند. به عبارت دیگر آماردان کسی است که به مطالعه‌ی روش‌های

گرداوری داده‌ها و نتیجه‌گیری درباره‌ی یک جامعه بر اساس داده‌هایی که به‌طور معمول از نمونه‌ای از آن جامعه به دست آمده می‌پردازد.

چرا آمار؟

دلایل اهمیت مطالعه و آگاهی از علم آمار را می‌توان به طور خلاصه به صورت زیر بیان کرد. اگر شما مطالب خبری، گزارش‌های روزنامه‌ها و مصاحبه‌های سیاست‌مداران را می‌خوانید یا به تماشای تلویزیون می‌نشینید، با بسیاری از عبارات و جملاتی روبه‌رو می‌شوید که بار آماری دارند:
- هزینه‌های تحصیلی دانشجویی، **به طور متوسط**، افزایش یافته است.
- واردات کالا از خارج، ۱۰ **درصد**، کاهش یافته است.
- بر اساس مطالعات انجام شده، **هیچ ارتباط معنی‌داری**، بین تحصیلات پدر و مادر با فرزندان وجود ندارد.
- میزان تیراژ کتاب سال ۷۲ در مقایسه با سال ۶۴، **به طور متوسط**، ۱٫۵ برابر افزایش یافته است.
- شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی در مناطق شهری در مهرماه ۷۳ نسبت به سال پیش ۳۸٫۶ **درصد افزایش** نشان می‌دهد.

با یادگیری مفاهیم پایه‌ای آمار، در بند جمله‌هایی مانند جمله‌های بالا نخواهید بود، به عبارت دیگر درک و تفسیر چنین عبارت‌هایی ساده خواهد بود. هم‌چنین با یادگیری آمار می‌توانید:
- چگونگی حقایق عددی ارائه شده را ارزیابی کنید.
- با توجه به حرفه‌ی خود نسبت به نتیجه‌های نمونه‌گیری انجام شده تعبیر و تفسیر کنید.

کاربرد آمار

پیش از معرفی علم آمار، با به کارگیری نمونه‌های زیر کاربرد این علم را در حل مسائل عملی روشن می‌سازیم.

مثال ۱-۶ فرض کنید کارخانه‌ای لامپ روشنایی تولید می‌کند و تولید روزانه‌ی آن حدود یک میلیون عدد است. با توجه به واکنش برخی از مشتریان در ارتباط با کیفیت تولید این کارخانه، مسئولان کارخانه علاقه‌مند به تعیین نسبت لامپ‌های معیوب تولید شده در یک روز معین، هستند.

دو راه برای حل مسأله وجود دارد:

الف) یک میلیون لامپ تولیدی آزمایش شوند. یک چنین راه حلی اگر عملی باشد افزایش قیمت لامپ‌ها را در بر خواهد داشت و از نظر زمان و هزینه‌های مربوط و ... به صرفه نیست.

ب) برای تعیین نسبت لامپ‌های معیوب، برای نمونه، هزار لامپ از تولید یک روز کارخانه به طور صحیح انتخاب و آزمایش شوند. نسبت لامپ‌های معیوب در ۱۰۰۰ لامپ انتخابی را می‌توان به عنوان براورد نسبت لامپ‌های معیوب در کل محصول روزانه به کار گرفت.

یک کاربرد مشابه آماری دیگر در این زمینه که به ذهن می‌رسد مربوط به مؤسساتی است که در ارتباط با مسائلی مانند انتخابات و ... و به طور کلی نظرسنجی از جامعه فعالیت می‌کنند. مثال‌هایی مانند درصد شانس انتخاب نامزدهای ریاست جمهوری و ... را می‌توان در این راستا بررسی کرد. گزارش‌ها و تحلیل‌های این گونه مؤسسات در مرحله‌های گوناگون و پیش از اعلام نتایج نامزدها قابل تعمق است.

مثال ۱-۷ در محموله‌های صادرات گوشت از زلاندنو به ایران، از آن‌جا که بررسی همه‌ی بسته‌بندی‌های گوشت امکان‌پذیر و به صرفه نیست، نمونه‌ای تصادفی از آن‌ها برای بررسی انتخاب و بر اساس مشاهده‌های انجام شده در مورد تأیید یا عدم تأیید محموله تصمیم‌گیری می‌شود.

مثال ۱-۸ معلمی علاقه‌مند است که روش نوین تدریس درس ریاضیات در کلاس سوم راهنمایی را ارزیابی کند. این معلم در حقیقت علاقه‌مند به دانستن اثر مطلوب (یا نامطلوب) این روش، بر دانش‌آموزانی است که به کلاس سوم راهنمایی راه پیدا می‌کنند. او برای این کار چند کلاس گوناگون از این دوره را با روش جدید آموزش می‌دهد و پس از ارزیابی در پایان دوره، ممکن است چنین استنباط کند که روش تدریس نوین، برای دانش‌آموزان این دوره سودمند و مثبت ارزیابی می‌شود.

مثال ۱-۹ باید در محلی مناسب یک سد بنا شود. طبیعی است افزون بر بررسی مسائل فنی، مسئولان امر نیاز به یک براورد «دقیق» از حجم آب ممکن دارند. برای این کار به جمع‌آوری اطلاعاتی در ارتباط با میزان بارندگی در آن منطقه و ... نیاز است، تا بتوان به یک تصمیم‌گیری درست رسید. بررسی نکردن و یا براورد نامعقول حجم آب، چه زیاد و چه کم، افزایش هزینه‌ها و یا زیان‌های جانی و مالی و ... را به همراه دارد. یک کاربرد مشابه دیگر در این زمینه می‌تواند در ارتباط با کارخانه‌های کنسروسازی باشد. (چگونه؟)

در هر یک از مثال‌های بالا اجرای چهار مرحله‌ی اشاره شده برای معنی دادن به داده‌ها ضروری است:

- هر مثال با مرحله‌ی جمع‌آوری داده‌ها و با به کارگیری اصول نمونه‌گیری برای انتخاب نمونه‌ی درست آغاز می‌شود (انتخاب یک نمونه‌ی ۱۰۰۰ تایی از لامپ‌ها، ...)
- برای این‌که داده‌های جمع‌آوری شده معنی و مفهوم پیدا کنند، باید خلاصه و تجزیه و تحلیل شوند.

(در مثال ۱-۶، نسبت لامپ‌های معیوب از لامپ‌های انتخابی و آزمایش شده محاسبه می‌شود و بر اساس آن و توجه به تعداد لامپ‌های آزمایش شده، ممکن است آماردان به صورت «دقیق‌تری» نسبت لامپ‌های معیوب را پیشگویی کند.)

ـ بالاخره پس از جمع‌آوری، خلاصه کردن و تجزیه و تحلیل داده‌ها، نکته‌ی مهم ارائه‌ی گزارشی از نتایج با **عبارت‌هایی روان، گویا** و **نامبهم** به علاقه‌مندان موضوع است (برای نمونه مسئولان کارخانه علاقه‌مند به دانستن کیفیت محصول تولید شده در کارخانه‌ی خود هستند).

شاید ضروری باشد که در این‌جا وجه تمایز بین آمار و احتمال را با مثال ۱-۶ روشن سازیم.

در مثال ۱-۶ مسئولان کارخانه علاقه‌مند به دانستن نسبت لامپ‌های معیوب هستند که در یک روز معین در کارخانه تولید می‌شود. از آن‌جا که بررسی همه‌ی لامپ‌ها، اقتصادی نیست، نمونه‌ای تصادفی از آن‌ها برای بررسی انتخاب می‌شود. فرض کنید $N = ۱۰^۶$ تعداد لامپ‌های تولید شده در روز باشد که انتظار می‌رود Mتای آن‌ها معیوب باشند. $n = ۱۰۰۰$ لامپ به تصادف انتخاب و آزمایش می‌شوند و از این تعداد، X لامپ معیوب گزارش می‌شود.

با توجه به آن‌چه که از احتمال می‌دانیم X یک متغیر تصادفی است که دارای توزیع فوق هندسی است و تابع احتمال آن برابر است با

$$P_M(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}},\ x = ۰, ۱, ۲, \ldots, n$$

اما این نتیجه به مسأله‌ای که مسئولان کارخانه با آن روبه‌رو هستند، چه ارتباطی دارد؟ پیش از محاسبه‌ی احتمال بالا باید مقدار M را بدانیم ولی اگر M معلوم بود، بررسی محصول کارخانه لزومی نداشت، افزون بر آن احتمال محاسبه شده تنها شانس این‌که X مقدارهای گوناگون را بپذیرد، به دست می‌دهد. ولی در عمل مسئولان کارخانه فقط یک مقدار برای X مشاهده می‌کنند (یعنی داده). پس مسأله‌ی ارائه شده، یافتن توزیع X به شرط دانستن M نیست، بلکه **استخراج نتیجه‌ای درباره‌ی** M، **پس از مشاهده (دانستن)** X **است** و این یک مسأله‌ی آماری است:

استخراج نتیجه‌ای درباره‌ی جامعه بر اساس نمونه.

می‌توانیم چنین تصور کنیم که وجه تمایز علوم آمار و احتمال در این است که علم احتمال از اطلاعات جامعه استفاده و در مورد نمونه قضاوت می‌کند. حال آن‌که علم آمار از نمونه‌ی مشاهده شده شروع می‌کند تا بر اساس آن استنباط‌هایی درباره‌ی مشخصه‌ی نامعلوم جامعه به دست آورد.

باید توجه داشت که دامنه‌ی آمار بسیار وسیع‌تر از نمونه‌گیری است. به طور کلی مسائل آماری هنگامی بروز می‌کنند که متغیری تصادفی که توزیع آن به صورت ناقص برای ما معلوم است، مشاهده شود. کمیت X در مثال ۱-۶ از این نوع است و **آماردان** علاقه‌مند به دانستن کمیت M (یا $\frac{M}{N}$) است. چنین کمیتی را «پارامتر» می‌خوانیم.

نقش آماردان چیست؟

در چارچوب معنی دادن به داده‌ها، آماردان در تمامی مراحل جمع‌آوری، خلاصه کردن، تجزیه و تحلیل و ارائه‌ی گزارش نتایج به دست آمده از تجزیه و تحلیل درگیر است.

گرداوری اطلاعات باید به روش درست انجام گیرد. آماردان با به کارگیری اطلاعات خود در ارتباط با روش‌های موجود نمونه‌گیری و طرح آزمایش‌ها، یا ایجاد روش‌های جدید برای جمع‌آوری مناسبی از داده‌ها اقدام می‌کند و به محض این‌که داده‌ها جمع‌آوری شد، بایستی آن‌ها را پیش از هر گونه تفسیری خلاصه کرد. آماردان می‌تواند روش‌های مناسب و سودمندی را برای خلاصه کردن اطلاعات در ارتباط با ارائه‌ی نمودارها، جدول‌ها و مقدارهای عددی پیشنهاد کند. ارائه‌ی چنین نمودارها و جدول‌ها، گام نخست در پردازش داده‌ها و معنی دادن به داده‌هاست.

۱-۵ استنباط آماری

هدف استنباط آماری (آمار ریاضی) استنتاج در مورد یک یا چند جمعیت بر اساس اطلاعات موجود در نمونه (داده‌ها) است. چون به طور معمول این جمعیت‌ها با مقدارها و اندازه‌های عددی نامعلوم، که ما از آن به عنوان پارامتر یاد می‌کنیم مشخص می‌شوند، بخشی از استنباط آماری، استنتاج در مورد پارامتر(های) جمعیت(ها) را مد نظر دارد.

با توجه به هدف استنباط آماری، نخستین نیاز در رسیدن به هدف داشتن داده‌هاست. منظور از داده عبارت از مقدارهای مشاهده شده (یا یافته‌های) یک نمونه‌ی تصادفی $\boldsymbol{X} = (X_۱, \ldots, X_n)$ است که آن را با نماد $\boldsymbol{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$ نشان می‌دهیم.

به طور معمول $\boldsymbol{X}$ دارای توزیعی است که یا کاملاً نامعلوم است یا بخشی از آن معلوم است، بدین معنی که شکل تابعی توزیع برای ما معلوم است، اما توزیع به پارامتر(هایی) مثل θ بستگی دارد که نامعلوم است. در این کتاب ما علاقه‌مند به حالت دوم هستیم، یعنی در طول این کتاب فرض خواهیم کرد که در هر مسأله‌ی آماری، شکل تابعی توزیع معلوم است اما تابع توزیع بستگی به پارامتر(های) نامعلوم θ دارد (θ می‌تواند یک بردار باشد). یعنی $\boldsymbol{X}$ دارای توزیعی به شکل تابعی $F_\theta(\boldsymbol{x})$ است که به یک یا چند پارامتر نامعلوم بستگی دارد. در این‌جا θ از آنِ مجموعه‌ای است مانند Θ که

فضای پارامتر نامیده می‌شود و در هر مسأله‌ی آماری برای استنباط در مورد پارامتر(های) یک یا چند جمعیت، خانواده‌ای از توزیع‌ها را پیش رو داریم که آن را با نماد $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ نشان می‌دهیم.

مثال زیر نمونه‌هایی از این نوع است.

مثال ۱-۱۰ الف:

$$\{B(n,p) : \circ < p < 1,\ \text{معلوم } n\}$$
$$\Theta = \{p : \circ < p < 1\} = (\circ, 1)$$

ب:

$$\{N(\mu, 1) : -\infty < \mu < \infty\}$$
$$\Theta = \{\mu : -\infty < \mu < \infty\} = (-\infty, \infty)$$

ج:

$$\{E(\lambda) : \lambda > \circ\}$$
$$\Theta = \{\lambda : \lambda > \circ\} = (\circ, \infty)$$

د:

$$\{N(\mu, \sigma^2) : -\infty < \mu < +\infty,\ \sigma > \circ\}$$
$$\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \in (-\infty, \infty),\ \sigma > \circ\} = (-\infty, \infty) \times (\circ, \infty)$$

هـ:

$$\{\Gamma(\alpha, \lambda) : \alpha > \circ,\ \lambda > \circ\}$$
$$\Theta = \{(\alpha, \lambda) : \alpha > \circ\ ,\ \lambda > \circ\} = (\circ, \infty) \times (\circ, \infty)$$

دو مسأله‌ی مهم در استنباط آماری عبارت از برآوردیابی و آزمون فرض‌های آماری هستند که

بخشی از مباحث مهم این دو مسأله را می‌توانیم به طور شمایی به صورت زیر نشان دهیم.

الف) براورد
- براوردهای کلاسیک
  - براورد نقطه‌ای
  - براورد بازه‌ای
- براوردهای بیزی
  - براورد نقطه‌ای
  - براورد بازه‌ای
- براوردهای دنباله‌ای

ب) آزمون فرض‌های آماری
- آزمون فرض‌های کلاسیک
- آزمون فرض‌های دنباله‌ای
- آزمون فرض‌های بیزی

در این کتاب تلاش خواهیم کرد که با بسیاری از عنوان‌های بالا در سطح متعارف آشنا شویم. برای این آشنایی مقدمات زیر ضروری است.

براورد اصطلاح براورد در آمار بسیار به موارد به کارگیری آن در زبان روزمره نزدیک است:

- می‌خواهید خانه بسازید، از معمار آشنا یا معرفی شده **براورد** قیمت می‌کنید.
- می‌خواهید خرید پیش از عید را انجام دهید، با همسر خود هزینه‌های مربوط را **براورد** می‌کنید.
- می‌خواهید مسافرتی را انجام دهید، براورد هزینه‌های مسافرت را **پیش‌بینی** می‌کنید.

در آمار کمیتی که باید براورد شود، یکی از پارامترهای مدل احتمال یا کمیتی است که مقدار آن به این پارامترها بستگی دارد. (مثال ۱-۶ را به خاطر آورید).

دو نوع براورد در آمار بیش‌تر مد نظر هستند:

- براورد نقطه‌ای
- براورد بازه‌ای

براوردیابی نقطه‌ای فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از خانواده‌ی تابع‌های چگالی احتمال (یا تابع‌های احتمال) $\{f_\theta(x) : \theta \in \Theta\}$ باشد، یعنی نمونه‌ی تصادفی ما از توزیعی با چگالی $f_\theta(x)$، $\theta \in \Theta$، به دست آمده است. در براوردیابی نقطه‌ای، هدف پیدا کردن آماره‌ی $\delta(X_1, \cdots, X_n)$ به گونه‌ای است که اگر $x_1, \cdots, x_n$ مقدارهای مشاهده شده‌ی

$X_1, \cdots, X_n$ (یافته‌های نمونه تصادفی) باشند آن‌گاه عدد $\delta(x_1, \cdots, x_n)$ یک براورد نقطه‌ای «خوب» برای θ است. بنابراین **براوردگر** پارامتر θ، بر پایه نمونه‌ی تصادفی $X_1, \cdots, X_n$ عبارت از یک تابع $\delta(X_1, \cdots, X_n)$ است که مقدار براورد شده‌ی θ را بر اساس مقدارهای ممکن $X_1, \cdots, X_n$ مشخص می‌کند. به بیان دیگر، اگر $x_1, \cdots, x_n$ مقدارهای مشاهده شده‌ی $X_1, \cdots, X_n$ باشد، آن‌گاه مقدار براورد شده‌ی θ مقدار $\delta(x_1, \cdots, x_n)$ است. چون پارامتر θ از آنِ مجموعه‌ی Θ است، منطقی به نظر می‌رسد انتظار داشته باشیم که مقدارهای ممکن **براوردگر** θ، یعنی $\delta(\boldsymbol{x})$ نیز از آنِ Θ باشد. به عبارت دیگر انتظار داریم برای هر $\theta \in \Theta$،

$$P_\theta(\delta(X_1, \cdots, X_n) \in \Theta) = 1$$

به طور خلاصه و به بیان ساده می‌توانیم بگوییم که **هدف براورد نقطه‌ای**، تولید یک مقدار عددی از داده است که تا حد ممکن به مقدار نامعلوم پارامتر نزدیک باشد. به بیان دیگر علاقه‌مند به دستیابی به یک مقدار عددی هستیم که پارامتر نامعلوم را به «خوبی» بیان کند. به عبارت دیگر، می‌خواهیم تابعی از نمونه‌ی تصادفی بسازیم، یعنی آماره‌ای را معرفی کنیم که مقدار مشاهده شده‌ی این آماره در حد امکان بازتابِ واقعی پارامتر نامعلوم جمعیت باشد. به چنین آماره‌ای در اصطلاح آماری **براوردگر** و مقدار مشاهده شده‌ی آن را **براورد** گویند. چند ویژگی برای براوردگر عبارت هستند از:

- حافظ دامنه‌ی پارامتر بودن
- نااریبی
- دقیق بودن بر اساس انتخاب یک معیار مناسب
- سازگاری

روش‌های متعارف و عمومی براورد پارامترهای نامعلوم عبارت هستند از:

- روش براورد گشتاوری
- روش براورد ماکسیمم درستنمایی

در این کتاب، فصل‌های ۳، ۴ و ۵ اختصاص به بررسی براوردیابی نقطه‌ای دارد.

تابع زیان و تابع مخاطره شاید اساسی‌ترین انتظار از یک براوردگر «خوب»، براوردی است که به مقدار واقعی پارامتر نامعلوم θ نزدیک‌تر باشد. به بیان دیگر، یک براوردگر «خوب» براوردگری است که میزان خطا در آن، یعنی $\delta(\boldsymbol{X}) - \theta$، با احتمال یک نزدیک به صفر باشد.

اگر D نمایانگر کلاس تمام براوردگرها باشد، آن‌گاه برای هر $\delta(\boldsymbol{X}) \in D$ فرض کردیم که $\delta(\boldsymbol{x}) \in \Theta$ باشد، یعنی مقدار مشاهده شده‌ی $\delta(\boldsymbol{X})$ بر اساس یافته‌ی $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ از آنِ Θ

است. فرض خواهیم کرد برای هر $\theta \in \Theta$ و هر براورد ممکن $\delta(\boldsymbol{x})$ که از آن Θ است، یک مقدار عددی $L(\theta, \delta(\boldsymbol{x}))$ وجود دارد که میزان **زیان** آماردان را در براورد پارامتر θ بر پایه‌ی $\delta(\boldsymbol{x})$ اندازه می‌گیرد.
در حقیقت، **تابع زیان** که آن را با L نشان دادیم، تابعی دومتغیره از $\Theta \times D$ به زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی نامنفی است، یعنی

$$L : \Theta \times D \longrightarrow R^+$$

بنابراین، تابع $L(\theta, \delta(\boldsymbol{X}))$ خود یک متغیر تصادفی است.
در آمار، تابع‌های زیان گوناگونی، با توجه به نوع مسأله، به کارگرفته می‌شود. تابع‌های زیان معروف عبارت هستند از:

تابع زیان مربع خطا که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$L(\theta, \delta) = (\delta - \theta)^۲$$

تابع زیان مربع خطای وزنی که به صورت زیر تعریف می‌شود و کلی‌تر از تابع زیان مربع خطاست.

$$L(\theta, \delta) = w(\theta)(\delta - \theta)^۲, \quad w(\theta) > ۰$$

تابع زیان قدرمطلق خطا که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$L(\theta, \delta) = |\delta - \theta|$$

تابع زیان خطی که به صورت زیر تعریف می‌شود و کلی‌تر از تابع زیان قدرمطلق خطاست.

$$L(\theta, \delta) = \begin{cases} k_۰(\theta - \delta) & \theta - \delta \geq ۰ \\ k_۱(\delta - \theta) & \theta - \delta < ۰ \end{cases}$$

در حالت خاص، با انتخاب $k_۰ = k_۱ = ۱$ ، تابع زیان قدرمطلق خطا را خواهیم داشت.

تابع زیان صفر-یک که به صورت زیر تعریف می‌شود و بیش‌تر در آزمون فرض‌ها کاربرد دارد.

$$L(\theta, \delta_i) = \begin{cases} ۰ & \theta \in \Theta_i \\ & \qquad\qquad i \neq j \\ ۱ & \theta \in \Theta_j \end{cases}$$

در آمار، یک روش ساده در ارزیابی متغیرهای تصادفی، بررسی متوسط مقدار آن‌هاست. با توجه به این‌که تابع زیان یک متغیر تصادفی است، ایده‌آل این است که برای هر تابع زیان داده شده‌ی L علاقه‌مند به پیدا کردن یک براوردگر $\delta(\boldsymbol{X})$ باشیم که متوسط L را مینیمم کند. متوسط مقدار L را **تابع مخاطره** براوردگر δ در براورد پارامتر θ می‌نامیم و آن را با $R(\theta,\delta)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$R(\theta,\delta)=E_\theta[L(\theta,\delta(\boldsymbol{X}))]$$

در صورتی که تابع زیان، **مربع خطا** باشد، تابع مخاطره را **میانگین مربع خطا** می‌نامیم.

در پایان این قسمت ضروری است که یادآوری کنیم در بسیاری از مسائل براوردیابی، به جای براورد پارامتر θ علاقه‌مند به براورد تابعی از پارامتر نامعلوم، یعنی $\gamma(\theta)$ هستیم. در این حالت تابع‌های زیان تعریف شده در بالا به صورت زیر خواهند بود.

تابع زیان مربع خطا در براورد $\gamma(\theta)$،

$$L(\theta,\delta)=(\delta-\gamma(\theta))^۲$$

تابع زیان مربع خطای وزنی در براورد $\gamma(\theta)$،

$$L(\theta,\delta)=w(\theta)(\delta-\gamma(\theta))^۲,\quad w(\theta)>۰$$

تابع زیان قدرمطلق خطا در براورد $\gamma(\theta)$،

$$L(\theta,\delta)=|\delta-\gamma(\theta)|$$

براوردیابی بازه‌ای فرض کنید $X_۱,\cdots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از خانواده‌ی تابع‌های چگالی احتمال (یا تابع‌های احتمال) $\{f_\theta:\theta\in\Theta\}$ باشد. در براوردیابی بازه‌ای، هدف پیدا کردن یک **بازه‌ی تصادفی** $I(X_۱,\cdots,X_n)$ است که مقدار واقعی پارامتر نامعلوم را با احتمال مناسب در بر گیرد.

منظور از یک بازه‌ی تصادفی، بازه‌ای متناهی یا نامتناهی است که دست‌کم یکی از دو کران آن تصادفی باشد. به‌طور معمول از بازه‌های تصادفی، با عنوان **بازه‌ی اطمینان** یاد می‌کنیم.

بازه‌ی اطمینان‌های یک‌طرفه فرض کنید $T_i\equiv T_i(X_۱,\cdots,X_n)$، $i=۱,۲$، دو آماره‌ی اختیاری باشند. اگر برای هر $\theta\in\Theta$،

$$P_\theta(T_۱\le\theta)\ge ۱-\alpha,\quad \alpha\in(۰,۱)$$

گوییم $(T_۱, +\infty)$ یک **بازه‌ی اطمینان یک‌طرفه** (کران پایین) **محافظه کارانه** برای θ با ضریب اطمینان $(۱-\alpha)$ است. به همین صورت، اگر برای هر $\theta \in \Theta$،

$$P_\theta(\theta \leq T_۲) \geq ۱ - \alpha, \quad \alpha \in (۰, ۱)$$

گوییم $(-\infty, T_۲)$ یک **بازه‌ی اطمینان یک‌طرفه** (کران بالا) **محافظه کارانه** برای θ با ضریب اطمینان $(۱-\alpha)$ است.

بازه‌های اطمینان دوطرفه فرض کنید $T_i \equiv T_i(X_۱, \cdots, X_n)$، $i = ۱, ۲$، دو آماره‌ی اختیاری با شرط $T_۱ \leq T_۲$ باشند. اگر برای هر $\theta \in \Theta$،

$$P_\theta(T_۱ \leq \theta \leq T_۲) \geq ۱ - \alpha, \quad \alpha \in (۰, ۱)$$

گوییم $(T_۱, T_۲)$ یک **بازه‌ی اطمینان دوطرفه‌ی محافظه کارانه** برای θ با ضریب اطمینان $(۱-\alpha)$ است.

اگر در گزاره‌های احتمالی بالا به جای نابرابری، برابری برقرار باشد، از این بازه‌ها با نام **بازه‌های اطمینان در سطح** $(۱-\alpha)$ یاد می‌کنیم.

به طور خلاصه و به بیان ساده می‌توانیم بگوییم که **هدف براورد بازه‌ای**، ارائه‌ی یک بازه بر اساس مشاهدات است که تا حد ممکن مقدار نامعلوم پارامتر را در برگیرد. این نوع براورد در محاوره‌ی روزمره بسیار معمول است. بسیاری از تولید کنندگان صنعتی به خصوص کالاهای الکتریکی، طول عمر تولیدات ساخته شده‌ی خود را با براورد بازه‌ای بیان می‌کنند. روش متعارف و ساده برای به دست آوردن براورد بازه‌ای یک پارامتر نامعلوم دارای مرحله‌های زیر است:

- به دست آوردن یک تابع محوری،
- فراهم کردن یک گزاره‌ی احتمالی و حل آن نسبت به پارامتر نامعلوم.

فصل ۶ این کتاب، اختصاص به بررسی براوردیابی بازه‌ای، یعنی بازه‌های اطمینان در سطح $(۱-\alpha)$ دارد.

آزمون فرض‌ها فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از خانواده‌ی تابع‌های چگالی احتمال (یا تابع‌های احتمال) $\{f_\theta : \theta \in \Theta\}$ باشد. بخش مهم و دیگری از آمار استنباطی، اختصاص به آزمون‌های آماری دارد و هدف از آن پاسخ به یک پرسش مشخص در مورد پارامتر نامعلوم جمعیت بر اساس نمونه‌ی تصادفی $\boldsymbol{X} = (X_۱, \cdots, X_n)$ است.

در آزمون فرض‌ها، آماردان سازگاری داده‌ها با فرض آماری را بررسی می‌کند. در حقیقت در چنین مسائلی، آماردان با یک مسأله‌ی تصمیم دوگانه روبه‌رو است که فرض آماری را قبول یا رد کند. در یک حالت ساده، مسأله‌ی آزمون فرض‌ها را می‌توان با آماره‌ی $\phi(\boldsymbol{X}) = I_C(\boldsymbol{X})$، که در آن C ناحیه‌ی بحرانی و I تابع نشانگر است، بیان کرد.

در این کتاب فصل‌های ۷، ۸، ۹ و ۱۰ اختصاص به بررسی آزمون فرض‌ها در حالت‌های گوناگون دارد.