شبیه‌سازی

(ویرایش دوم)

حمزه ترابی

استاد گروه آمار

دانشگاه یزد

سال ۱۳۹۷

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی شبیه‌سازی

دیباچه

یکی از هدف‌های بسیار بزرگ بشر، پی بردن به رمز و راز هستی، شناخت و کشف حقایق آن است؛ اما در این راستا باید ژرف دید و ژرف اندیشید. ژرف اندیشی ویژگی ممتاز دانشمندان و پژوهشگران است که آن‌ها را از بقیه متمایز کرده است. هر پیشرفت علمی در هر زمینه با چنین نگرشی به سرانجام رسیده است. مگر پیش از نیوتن، همه افتادن اجسام را ندیده بودند که پی به جاذبه‌ی زمین نبردند؟ پاسخ روشن است؛ کسی مانند نیوتن به ژرفای مسئله نرفته بود. در گذر زمان با پیشرفت دانش، نیازمندی‌های بشر تغییر می‌کند و گویی پایانی برای این حس وجود ندارد. دامنه‌ی علم و دانش به‌صورت آنی گسترده می‌شود. باور کنید که در همین لحظه میلیون‌ها نفر در حال اندیشه‌اند که چگونه می‌توان به نیازمندی‌های رو به فزونی پیرامون خود پاسخی یافت. گستردگی علم و دانش موجب ایجاد رشته، شاخه و گرایش‌های بسیاری شده است. پیش‌تر به دلیل محدود بودن علوم، بیشتر دانشمندان همه‌ی علم روز خود را می‌دانستند؛ به پرونده‌ی کاری آنان بنگرید: پزشکی، ریاضی، ستاره‌شناسی، شعر و ادبیات، موسیقی و غیره. اما در این عصر نمی‌توان چنین ادعایی کرد؛ پژوهشگران شاید در فهم و درک مطالب گرایش خود نیز بمانند.

۱.۱ شبیه‌سازی

کمی به پیرامون خود به دقت بنگرید. نیازی نیست که به مسائل بسیار مهم توجه کنید. به غذایی که وعده‌ی پیش خوردید، بیندیشید. چه کسی آن را نخستین بار تهیه کرده است؟ آیا بدون مقدمه و یك دفعه، روش تهیه‌ی آن به ذهن فردی رسیده و بی درنگ دست به کار شده است؟ به‌طور حتم، پیش از انجام کار، برنامه‌ی تهیه در ذهنش گذشته و پیش‌بینی کرده است که با ترکیب این مواد، با این روش، با این دما، ... نتیجه چه می‌شود؛ به عبارتی او پیش از انجام کار، آن را در ذهن خود **شبیه‌سازی یا همانندسازی** کرده است. روزانه با صدها مسئله‌ی این چنینی مانند ساخت وسایل و لوازم زندگی، تغییر ساختار خانه، کوچه، خیابان، شهر، کشور و غیره برخورد داریم اما مجریان آن‌ها ممکن است خود ما نباشیم و دیگران باشند. اندکی از این مسائل با بهره‌گیری از برخی علوم مانند ریاضی، فیزیك، شیمی و غیره به‌صورت مستقیم حل می‌شوند که به این روش‌ها، **روش‌های تحلیلی** می‌گوییم. اما بیشتر با مسائلی روبرو هستیم که به‌صورت مستقیم قابل حل نیستند و تنها راه ممکن برای حل آن‌ها بهره‌گیری از شبیه‌سازی است. باز به عنوان نمونه‌ای نه چندان مهم، پندارید که در یك شهر ویژه قرار است در یك چهارراه به جهت کاهش راه‌بندان و تصادف، یك پل هوایی ساخته شود. اگر بتوان وضعیت پل و رفت و آمد خودروها را پیش از ساخت آن شبیه‌سازی کرد، می‌توان وضعیت استحکام پل، هزینه‌ها و از همه مهمتر هدف اصلی ساخت آن یعنی کاهش راه‌بندان و تصادف را به‌صورت دقیق بررسی نمود و عیب‌های احتمالی آن را گرفت. شاید بسیاری از طرح‌های ناموفق را شنیده یا دیده باشید؛ به‌طور حتم می‌توان گفت که پیش از اجرای آن‌ها از شبیه‌سازی بهره‌گیری نشده و یا در صورت بهره‌گیری، همه‌ی عوامل ورودی به‌طور دقیق محاسبه و بررسی نشده است.

چنان که دریافت می‌شود بشر از روز نخست شبیه‌سازی را کم و بیش بلد بوده و پیش از پرداختن به هر کاری، در آغاز مراحلش را شبیه‌سازی می‌کرده است. همین مسئله‌ی بسیار ساده، امروزه به دلیل کاربردهای فراوانش در حل مسائل مهم بشری، به یکی از مهمترین و زیباترین شاخه‌های علوم در آمده است. کسی را نمی‌توان پیدا کرد که ادعا کند من از آن بهره نبرده‌ام و نخواهم برد. همه کم و بیش با آن آشنا هستند اما پژوهشگرانی ژرف بین و هوشمند، به‌صورت علمی با شبیه‌سازی برخورد و آن را مدون نموده‌اند. جالب آن است که این نگاه زیرکانه در سراسر مطالب آن به شدت احساس می‌شود.

در شبیه‌سازی، مسئله را در دنیای مجازی می‌سازیم، آن را به راه می‌اندازیم یا اجرا می‌کنیم و پس از اجرا، معیارهای عملکرد را بررسی می‌کنیم؛ در صورت نامناسب بودن این معیارها،

ورودی‌ها را تغییر می‌دهیم و باز آن را اجرا می‌نماییم. این کار تا رسیدن به نتیجه‌ی مطلوب ادامه پیدا می‌کند.

شناخت کامل مسئله‌ی شبیه‌سازی کار بسیار سخت و دشواری است و نیاز به کنکاش و مطالعه‌ی ریزبینانه‌ای دارد. گاهی این کنکاش خود نیازمند صرف وقت و هزینه‌ی فراوانی است. در برخی موارد برای شناخت بیشتر عامل‌های ورودی از تجربه‌های مسئله‌های مشابه بهره می‌گیریم. به جز یك تعداد بسیار اندك، عامل‌های ورودی به پدیده‌های شانسی بستگی دارند که در این صورت، رسیدن به آگاهی‌های مورد نیاز از این تجربیات، به دوش **علم آمار** است. علم آمار، هنر به زبان آوردن داده‌ها و روح بخشیدن به آن‌ها است. برای نمونه، در مسئله‌ی ساخت پل، آماردان می‌تواند با بررسی داده‌های مربوط به وزن و نوع خودروها، فرایند گذر خودروها، عامل‌های طبیعی تاثیرگذار در وضعیت پل مانند دما، رطوبت، سرعت باد و غیره توزیع احتمال آن‌ها را به‌دست آورد و آن‌ها را به عنوان عامل‌های ورودی فرایند یا مسئله‌ی شبیه‌سازی در نظر بگیرد. پس از تعیین همه‌ی ورودی‌ها می‌توان شبیه‌سازی را به دو روش **دستی** و **کامپیوتری** آغاز نمود؛ در آغاز شبیه‌سازی تنها به‌صورت دستی انجام می‌شده است اما امروزه با وجود کامپیوترهای پر سرعت می‌توان زمان شبیه‌سازی را به سرعت جلو برد و گذر زمان را میلیون‌ها برابر کرد؛ بنابراین می‌توان گفت که **هدف اصلی شبیه‌سازی ساخت و اجرای فرایند واقعی در دنیای مجازی و هم‌چنین فشرده‌سازی زمان است؛ به عبارتی دیگر، شبیه‌سازی به تقلید عملکرد فرایند پیش از پدید آمدن آن، در زمانی بسیار کوتاه می‌پردازد.** در شبیه‌سازی می‌توان گزینه‌های گوناگون ورودی را تا رسیدن به نتیجه‌ی دلخواه آزمود و در این صورت، ساخت فرایند را در دنیای واقعی آغاز نمود.

چنان که پیش‌تر گفته شد مسائل به دو روش تحلیلی و شبیه‌سازی حل می‌شوند. در برخی مسائل حل تحلیلی وجود دارد اما از آن ناآگاهیم و سراغ شبیه‌سازی می‌رویم. در این موارد، شبیه‌سازی به دلیل وقت‌گیر و طولانی بودن و هم‌چنین عدم دقت به ویژه در شبیه‌سازی در زمان‌های کوتاه توصیه نمی‌شود اما در دنیای واقعی مسائل به اندازه‌ای پیچیده‌اند که حل تحلیلی و مستقیم آن‌ها وجود ندارد و یا بسیار دشوار است؛ در این صورت شبیه‌سازی تنها راه ممکن خواهد بود. شایان گفتن است که در شبیه‌سازی مسئله حل نمی‌شود بلکه اجرا می‌شود؛ پس از اجراهای بسیار با ورودی‌های گوناگون، برآوردهای معیارهای عملکرد مقایسه می‌شوند، سپس بهترین ورودی که دارای بهترین عملکرد بوده برگزیده می‌شود. بنابراین همواره این زنگ خطر در گوشمان باشد که برای حل مسائل به شبیه‌سازی خو نگیریم؛ ممکن است حل تحلیلی آن‌ها در یك قدمی ما باشد.

در شبیه‌سازی در آغاز حل مسئله را در مدل‌های ساده جستجو می‌کنیم؛ در صورتی که مدل پاسخ‌گو نبود، مدل را کمی کلی‌تر در نظر گرفته و بررسی می‌کنیم. این روش را ادامه می‌دهیم تا به

پاسخ دلخواه برسیم.
در بخش بعد به تقسیم‌بندی شبیه‌سازی می‌پردازیم:

۲.۱ انواع شبیه‌سازی

در شبیه‌سازی، دو دیدگاه «زمانی» و «تعیینی» وجود دارد که در زیربخش‌های زیر، به معرفی و تقسیم‌بندی آن‌ها پرداخته می‌شود.

۱.۲.۱ انواع شبیه‌سازی از دیدگاه زمانی

اگر در شبیه‌سازی زمان نقش داشته باشد و شبیه‌سازی در طول زمان انجام شود، به عبارتی ترتیب بین اعداد تولیدی یا شبیه‌سازی شده‌ی ورودی مهم باشد، شبیه‌سازی را **پویا** و در غیر این صورت، شبیه‌سازی را **ایستا** یا **مونت‌کارلو** می‌گوییم. شبیه‌سازی مونت‌کارلو در فصل ۶ و شبیه‌سازی پویا در فصل ۷ مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲.۲.۱ انواع شبیه‌سازی از دیدگاه تعیینی

اگر همه‌ی متغیرهای ورودی قطعی و غیر تصادفی باشند، شبیه‌سازی را **قطعی** و در غیر این صورت، یعنی در صورتی که دست کم یك متغیر ورودی مسئله، تصادفی باشد آن را **تصادفی** می‌گوییم. شایان گفتن است که در بیشتر مسائل واقعی، عامل یا عامل‌های تصادفی وجود دارد؛ بنابراین، شبیه‌سازی قطعی، غیرواقعی یا ساختگی است و در این کتاب تنها به شبیه‌سازی تصادفی پرداخته می‌شود. به همین دلیل، در فصل دوم به مرور مقدمات احتمال، معرفی توزیع‌های آماری، روش‌های برآورد و مفاهیم آزمون فرضیه‌ها و در پایان، به یادآوری مفاهیم اساسی زنجیرهای مارکوف خواهیم پرداخت.

۳.۱ مفاهیم مقدماتی شبیه‌سازی

در این بخش، به بیان و بررسی چند مفهوم مقدماتی که بیشتر مربوط به شبیه‌سازی پویا هستند، پرداخته می‌شود. جهت آگاهی بیشتر می‌توانید به بنکس و همکاران[۱] [۵] و راس[۲] [۲۱] مراجعه نمایید.

۱) **سیستم:** به گروهی از افراد یا اشیاء که در راستای هدفی معین در چارچوب رابطه و وابستگی متقابل با هم کار کنند، سیستم گفته می‌شود. در یک کارخانه‌ی خودروسازی مهندسان، کارگران و دستگاه‌ها در امتداد خط تولید کار می‌کنند تا خودرو ساخته شود.

۲) **پیرامون سیستم:** به عامل‌هایی که از برون سیستم روی سیستم تاثیر می‌گذارند، پیرامون سیستم گفته می‌شود. برای یک کارخانه‌ی خودروسازی، عواملی که باعث تغییر در مواد اولیه‌ی ورودی، تغییر سلیقه‌ی مشتریان، تغییر بازارهای جهانی و غیره می‌شوند، پیرامون سیستم به حساب می‌آیند.

۳) **متغیرهای حالت سیستم:** به گردایه‌ی متغیرهای لازم برای تشریح و بررسی سیستم با توجه به هدف‌های مورد نظر سیستم، متغیرهای حالت سیستم گفته می‌شود. در کارخانه‌ی خودروسازی یکی از متغیرهای حالت سیستم، زمان لازم برای ساخت یک خودرو است.

۴) **پیشامد:** به یک رویداد لحظه‌ای که می‌تواند حالت سیستم را دگرگون کند، پیشامد گفته می‌شود. پیشامدها به دو دسته‌ی **درون‌زا** و **برون‌زا** تقسیم‌بندی می‌شوند؛ پیشامد درون‌زا (برون‌زا) پیشامدی است که از درون (برون) سیستم روی حالت سیستم تاثیر می‌گذارد. در کارخانه‌ی خودروسازی، پیشامدهای «از کار افتادن یک دستگاه» و «کمیاب شدن مواد اولیه» به‌ترتیب پیشامدهای درون‌زا و برون‌زا هستند.

۵) **سیستم‌ها از نظر زمانی:** سیستم‌ها از نظر زمانی به دو دسته‌ی **گسسته-زمان** و **پیوسته-زمان** تقسیم‌بندی می‌شوند؛ در صورتی که عملکرد سیستم در زمان‌های گسسته مانند ثانیه، دقیقه، ساعت و غیره مورد نظر باشد، سیستم را گسسته-زمان و در صورتی که عملکرد آن به‌صورت لحظه‌ای مورد نظر باشد، ، آن را پیوسته-زمان می‌گوییم. در کارخانه‌ی

---

[۱] Banks et al.

[۲] Ross

خودروسازی اگر به عنوان مثال زمان ثبت متغیرهای حالت سر هر دقیقه باشد، سیستم کارخانه را گسسته-زمان و اگر زمان اندازه‌گیری همه‌ی متغیرهای حالت مانند زمان بین ورود مواد اولیه، زمان لازم برای ساخت خودرو به‌صورت لحظه‌ای در نظر گرفته شود، آن را پیوسته-زمان می‌گوییم.

تمرین‌های فصل ۱

۱. کاربردی از شبیه‌سازی در هر یک از سیستم‌های زیر بیان کنید:

الف) تعمیرگاه وسایل برقی خانگی؛

ب) رستوران؛

پ) فروشگاه مواد غذایی؛

ت) بانک؛

ث) نانوایی؛

ج) بخش اورژانس بیمارستان؛

چ) آرایشگاه؛

ح) کارخانه‌ی پارچه‌بافی؛

خ) کارخانه‌ی کاشی؛

د) آزمایشگاه؛

ذ) شرکت واحد با ۱۰۰ دستگاه اتوبوس.

۲. مواردی از کاربرد شبیه‌سازی در زندگی پیرامون خود را بیان کنید و توضیح دهید.

فصل ۲

گذری بر احتمال و آمار

دیباچه

در این فصل به‌صورت خلاصه به مرور مقدمات احتمال، معرفی توزیع‌های آماری، روش‌های برآورد و مفاهیم آزمون فرضیه‌ها و در پایان به یادآوری مفاهیم اساسی زنجیرهای مارکوف می‌پردازیم. برای آگاهی بیشتر پیرامون مفاهیم احتمال می‌توانید به راس [۲۲]، روش‌های برآورد و مفاهیم آزمون فرضیه‌ها به مود و همکاران[۱] [۴]، کسلا و برگر[۲] [۹] و شاو[۳] [۲۳]، و برای زنجیرهای مارکوف به راس [۲۰] مراجعه کنید.

۱.۲ احتمال

همه‌ی ما روزانه با آزمایش‌هایی که در نتیجه‌ی آن‌ها نوعی عدم قطعیت وجود داشته باشد، مواجه هستیم.

---

[۱] Mood et al.

[۲] Casella and Berger

[۳] Shao

تعریف ۱.۱.۲ به آزمایشی که برآمد یا نتیجه‌ی آن پیش از انجام آن کاملاً مشخص نیست اما می‌توان مجموعه‌ی حالت‌های ممکن (فضای نمونه‌ای) آن را تعیین کرد، **آزمایش تصادفی** می‌گوییم. فضای نمونه‌ای را با نماد S نمایش می‌دهیم و به هر زیرمجموعه‌ی آن، پیشامد می‌گوییم.

به عنوان نمونه، پرتاب تاس، پرتاب سکه و رطوبت نسبی هوا فردا صبح ساعت ۸، آزمایش‌های تصادفی به‌ترتیب با فضاهای نمونه‌ای $\{۱, ۲, \ldots, ۶\}$، $\{H, T\}$ و $[۰, ۱۰۰]$ هستند. به یک آزمایش تصادفی که تنها دارای دو برآمد ممکن باشد، **آزمایش برنولی** می‌گوییم؛ دو برآمد را **پیروزی** و **شکست** می‌نامیم و احتمال‌های آن‌ها را به‌ترتیب با p و $q = ۱ - p$ نشان می‌دهیم. پرتاب سکه یک آزمایش برنولی است که می‌توان به عنوان مثال، شیر را به عنوان پیروزی در نظر گرفت.

احتمال در اصولی ویژه به نام **اصول احتمال کُلموگروف** صدق می‌کند؛ این اصول به شرح زیر هستند:

۱) برای هر پیشامد A، $P(A) \geq ۰$؛

۲) $P(S) = ۱$؛

۳) برای دنباله‌ای از پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار $A_۱$، $A_۲$، ... $(A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j)$، داریم:

$$P\left(\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=۱}^{\infty} P(A_i).$$

تعریف ۲.۱.۲ پیشامدهای $A_۱$،...، A_n، $n \in \mathbb{N}$، از فضای نمونه‌ای S را **مستقل** می‌گوییم هرگاه

$$P(A_{i_۱} \cap \ldots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_۱}) \times \ldots \times P(A_{i_r}),$$

$r = ۲, ۳, \ldots, n$، $i_j = ۱, ۲, \ldots, n$ و $j = ۱, ۲, \ldots, r$.

به عبارت ساده‌تر، پیشامدهای $A_۱$،...، A_n، مستقل هستند هرگاه احتمال اشتراک هر تعداد از پیشامدها، برابر حاصلضرب احتمال این پیشامدها شود.

تعریف ۳.۱.۲ فرض کنید A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای باشند. احتمال شرطی A به شرط B را با $P(A|B)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ تعریف می‌کنیم؛ به شرط آن که $P(B) > 0$.

در قضیه‌های زیر، به بیان قانون ضرب احتمال و قانون جمع احتمال (یا قانون احتمال کل) پرداخته می‌شود.

قضیه ۴.۱.۲ (قانون ضرب احتمال). برای پیشامدهای دلخواه $A_1, \dots, A_n$ داریم:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times \dots \times P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

قضیه ۵.۱.۲ (قانون جمع احتمال). فرض کنید پیشامدهای $A_1, \dots, A_n$ فضای نمونه‌ای را افراز کنند؛ یعنی دوبه‌دو ناسازگار باشند و داشته باشیم: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$. هم‌چنین B یک پیشامد دیگر در این فضای نمونه‌ای باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B|A_i).$$

تمرین‌های بخش ۱.۲

۱. کیسه‌ای دارای ۶ توپ سفید و ۳ توپ سیاه و کیسه دیگری دارای ۷ توپ سفید و ۴ توپ سیاه است. از هر یک از دو کیسه یک توپ انتخاب می‌نمائیم و در کیسه سومی که دارای ۳ توپ سفید و ۳ توپ سیاه است، قرار می‌دهیم؛ سپس یک توپ از کیسه سوم انتخاب می‌کنیم. احتمال این که این توپ، سفید باشد، چقدر است؟

۲. فردی به‌تصادف یکی از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ را انتخاب می‌کند و سپس به تعداد عددی که مشاهده می‌نماید، تاس پرتاب می‌کند. احتمال این که یک مجموع ۵ بیاورد، چقدر است؟

۳. یک کلاس هنری متشکل از ۱۵ دانشجوی سال سوم، ۳۰ دانشجوی سال چهارم و ۵ دانشجوی فوق‌لیسانس است. ۳ دانشجوی سال سوم، ۵ دانشجوی سال چهارم و ۲ دانشجوی فوق‌لیسانس در آزمون نمره‌ی A می‌گیرند. اگر به‌تصادف یک دانشجو از این کلاس انتخاب شود و معلوم شود که نمره‌ی A گرفته است، احتمال این که دانشجوی سال سوم باشد، چقدر است؟

۴. از ۱۰۰ جعبه فیوز که هرکدام دارای ۵ فیوز است، ۲۰ جعبه دارای فیوز کارخانه‌ی A، ۳۰ جعبه از کارخانه‌ی B و ۵۰ جعبه از کارخانه‌ی C است. کارخانه‌ی A به‌طور متوسط داری ۵٪، کارخانه‌ی B، ۲٪ و کارخانه‌ی C، ۴٪ فیوز خراب هستند. یک جعبه به‌تصادف از ۱۰۰ جعبه انتخاب می‌شود و یک فیوز آن را آزمایش می‌کنیم و معلوم می‌شود خراب است. احتمال آن که این فیوز ساخت کارخانه‌ی B باشد، چقدر است؟

۵. از دانشجویان سال اول یک دانشکده معلوم شده است که ۱۸٪ در دبیرستان‌های غیرانتفاعی و ۸۲٪ در دبیرستان‌های دولتی درس خوانده‌اند. بنابر گزارش اداره‌ی آموزش، ۳۰٪ دانشجویانی که در دبیرستان‌های غیرانتفاعی و ۱۵٪ دانشجویانی که در دبیرستان‌های دولتی درس خوانده‌اند، به مقاطع بالاتر راه یافته‌اند. دانشجویی به‌تصادف انتخاب می‌شود.
الف) احتمال این که به مقطع بالاتر راه یابد، چقدر است؟
ب) اگر او به مقطع بالاتر راه یافته باشد، با چه احتمالی در دبیرستان دولتی درس خوانده است؟

۶. در شهری، ۴۰٪ روزهای فصل زمستان آفتابی است. یک سازنده‌ی فشارسنج در آزمون ابزارش در می‌یابد که فشارسنج گاهی لغزش می‌کند؛ ۱۰٪ اوقات، روزهای بارانی را آفتابی و ۳٪ اوقات، روزهای آفتابی را بارانی پیش‌بینی می‌کند. اگر فشارسنج هوای یک روز زمستانی را بارانی پیش‌بینی کرده باشد، احتمال‌های زیر بیابید:
الف) در آن روز باران ببارد؛
ب) آن روز آفتابی باشد.

۷. ظرفی دارای ۳ مهره‌ی قرمز و ۷ مهره‌ی سفید است. مهره‌ای را از ظرف انتخاب می‌کنیم و مهره‌ای از رنگ دیگر در ظرف می‌گذاریم. سپس دو مهره به‌تصادف از ظرف انتخاب می‌کنیم. اگر این دو مهره همرنگ باشند، احتمال این که مهره‌ی اول سفید بوده باشد، چقدر است؟

۸. ظرف A دارای ۳ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی سفید، ظرف B دارای ۲ مهره‌ی قرمز و ۱ مهره‌ی سفید و ظرف C دارای ۲ مهره قرمز و ۳ مهره سفید است. ظرفی را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. اگر این مهره قرمز باشد، احتمال این که از ظرف A استخراج شده باشد، چقدر است؟

۹. فرض کنید احتمال قبول شدن یک دانشجو در یک امتحان $\frac{۴}{۵}$ و احتمال قبولی دانشجوی سمت چپ او $\frac{۲}{۵}$ و دانشجوی سمت راست او $\frac{۱}{۵}$ باشد. با فرض این که در جلسه‌ی امتحان تقلبی صورت نمی‌گیرد، پیدا کنید احتمال این را که از این سه دانشجو،
الف) درست دو نفر در امتحان قبول شوند؛
ب) دانشجویی که وسط نشسته در امتحان قبول شود، با فرض این که دانشجوی سمت راست او قبول شده باشد.

۱۰. ظرفی دارای ۵ لامپ معیوب و ۸ لامپ سالم است.
الف) اگر دو لامپ به‌تصادف و بی‌جایگذاری انتخاب شود، احتمال این که هر دو سالم باشند، چقدر است؟
ب) اگر دو لامپ قسمت «الف» سالم باشند، احتمال این که سه لامپ بعدی سالم باشند، چقدر است؟
پ) اگر ۵ لامپ به‌تصادف و بی‌جایگذاری انتخاب نماییم، احتمال این که همگی سالم باشند، چقدر است؟

۱۱. احتمال این که یک تخم‌مرغ نطفه‌دار جوجه شود، $\frac{۱۱}{۱۲}$ است. سه تخم‌مرغ برای جوجه‌کشی از یک جعبه ۱۲ تایی که دارای چهار تخم‌مرغ نطفه‌دار و ۸ تخم‌مرغ بی‌نطفه است، برگزیده می‌شود. احتمال این که از این سه تخم‌مرغ جوجه‌ای به‌دست آید، چقدر است؟

۲.۲ متغیرهای تصادفی

کمی به پیرامون خود دقت کنید؛ کمیت‌هایی که مقدار آن‌ها دست‌خوش تصادف و شانس هستند و آرزوی پی بردن به رمز و راز، شناسایی و کنترل آن‌ها را دارید، به فراوانی یافت می‌شوند. معرفی متغیر تصادفی راهی برای شناسایی و کنترل این نوع کمیت‌ها است.

تعریف ۱.۲.۲ متغیر تصادفی X یک تابع از فضای نمونه‌ای به مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، $X : S \to \mathbb{R}$. اگر بُرد (تکیه‌گاه) متغیر تصادفی یک مجموعه‌ی حداکثر شمارا (متناهی یا نامتناهی شمارش‌پذیر) باشد، متغیر تصادفی را گسسته و در غیر این صورت پیوسته می‌گوییم.

تعریف ۲.۲.۲ تابع چگالی متغیر تصادفی گسسته X به‌صورت $f(x) = P(X = x)$، $x \in \mathbb{R}$ تعریف می‌شود. این تابع در دو ویژگی $f(x) \geq 0$، $\forall x \in \mathbb{R}$ و $\sum_{\mathbb{R}} f(x) = 1$ صدق می‌کند. تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته، تابعی است که در دو ویژگی $f(x) \geq 0$، $\forall x \in \mathbb{R}$ و $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ صدق می‌کند.

تابع چگالی دارای همه‌ی اطلاعات مربوط به متغیر تصادفی است و می‌توان با بهره‌گیری از آن، احتمال‌هایی به فرم $P(X \in A)$، برای هر $A \subseteq \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

قضیه ۳.۲.۲

$$P(X \in A) = \begin{cases} \sum_{x \in A} f(x) & \text{اگر متغیر تصادفی } X \text{ گسسته باشد} \\ \int_A f(x)dx & \text{اگر متغیر تصادفی } X \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

تعریف ۴.۲.۲ تابع توزیع متغیر تصادفی X به‌صورت $F(x) = P(X \leq x)$ تعریف می‌شود.

بین تابع توزیع و تابع چگالی تناظر یک به یک وجود دارد و هر دو دارای اطلاعات یکسانی دربارهٔ متغیر هستند. این رابطه در قضیه‌ی زیر معرفی می‌شود:

قضیه ۵.۲.۲

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{t \leq x} f(t) & \text{اگر متغیر تصادفی } X \text{ گسسته باشد} \\ \int_{t \leq x} f(t)dt & \text{اگر متغیر تصادفی } X \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

هم‌چنین برعکس، تابع چگالی بر حسب تابع توزیع از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x) = \begin{cases} F(x) - F(x^-) & \text{اگر متغیر تصادفی } X \text{ گسسته باشد} \\ F'(x) & \text{اگر متغیر تصادفی } X \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

که در آن $F(x^-) = \lim_{t \to x^-} F(t)$.

قضیه ۶.۲.۲ تابع توزیع دارای حد ۱ و ۰ به‌ترتیب در $+\infty$ و $-\infty$، تابعی نانزولی و در همه‌ی نقاط دست کم از راست پیوسته است.

در صورتی که تابع‌های چگالی یا توزیع، چند ضابطه‌ای باشند، معمولاً برای سادگی، تنها ضابطه‌های اصلی را می‌نویسیم.

۱.۲.۲ میانگین و واریانس متغیرهای تصادفی

در این بخش به تعریف دو معیار مهم تمرکز و پراکندگی توزیع، یعنی میانگین و واریانس می‌پردازیم.

تعریف ۷.۲.۲ میانگین متغیر تصادفی X با تابع چگالی $f(x)$، به‌صورت

$$\mu_X = \mathrm{E}[X] = \begin{cases} \sum_{\mathbb{R}} xf(x) & \text{اگر متغیر تصادفی } X \text{ گسسته باشد} \\ \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx & \text{اگر متغیر تصادفی } X \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۸.۲.۲ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی $f(x)$ باشد. اگر g یک تابع حقیقی مقدار باشد، آنگاه

$$\mathrm{E}[g(X)] = \begin{cases} \sum_{\mathbb{R}} g(x)f(x) & \text{اگر متغیر تصادفی } X \text{ گسسته باشد} \\ \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx & \text{اگر متغیر تصادفی } X \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

تعریف ۹.۲.۲ واریانس (پراش) متغیر تصادفی X به‌صورت

$$\sigma_X^{۲} = \mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[(X - \mu_X)^{۲}]$$

تعریف می‌شود. به جذر واریانس، **انحراف معیار** گفته می‌شود.

نتیجه ۱۰.۲.۲ بنابر قضیه‌ی پیشین، روشن است که

$$\mathrm{Var}[X] = \begin{cases} \sum_{\mathbb{R}} (x - \mu_X)^{۲} f(x) & \text{اگر متغیر تصادفی } X \text{ گسسته باشد} \\ \int_{\mathbb{R}} (x - \mu_X)^{۲} f(x)dx & \text{اگر متغیر تصادفی } X \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

قضیه ۲.۲.۱۱
الف) $\sigma_X^2 = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}^2[X]$؛
ب) $\mathrm{E}[aX+b] = a\mathrm{E}[X] + b$؛
پ) $\mathrm{Var}[aX+b] = a^2\mathrm{Var}[X]$.

۲.۲.۲ بُردارهای تصادفی

می‌توان تعریف متغیر تصادفی را به متغیر تصادفی توأم (بُردار تصادفی) تعمیم داد. هم‌چنین می‌توان برای متغیرهای تصادفی توأم، تابع چگالی احتمال، میانگین و واریانس تعریف کرد که در این صورت به آن‌ها به‌ترتیب تابع چگالی توأم، بُردار میانگین و ماتریس واریانس می‌گوییم. ناگفته روشن است که تابع چگالی احتمال توأم دارای همه‌ی اطلاعات مربوط به هر یك از متغیرها و هم‌چنین ارتباط و وابستگی آن‌ها است؛ به همین دلیل می‌توان انتظار داشت که از روی تابع چگالی احتمال توأم بتوان تابع چگالی هر زیرمجموعه از متغیرهای تصادفی را به‌دست آورد. ثابت می‌شود که در دو حالت گسسته و پیوسته، کافی است از تابع چگالی توأم نسبت به متغیرهای غیر مورد نیاز مجموع یا انتگرال بگیریم؛ به بیان روشن‌تر

قضیه ۲.۲.۱۲ فرض کنید متغیر تصادفی توأم $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ دارای تابع چگالی احتمال توأم $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ باشد. در این صورت تابع چگالی $\boldsymbol{X}_i = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_j})$، که در آن $i_k \in \{1, \ldots, n\}$، $k = 1, \ldots, j$، $j < k$، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f_i(\boldsymbol{x}_i) = \begin{cases} \sum_{\boldsymbol{x}_i^c \in \mathbb{R}^{n-j}} f(\boldsymbol{x}) & \text{اگر متغیر تصادفی } \boldsymbol{X}_i^c \text{ گسسته باشد} \\ \int_{\mathbb{R}^{n-j}} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}_i^c & \text{اگر متغیر تصادفی } \boldsymbol{X}_i^c \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

که در آن $\boldsymbol{x}_i^c$، بُرداری است $n-j$ بعدی که دارای همه‌ی مولفه‌های $\boldsymbol{x}$ به جز $\boldsymbol{x}_i$ است. به تابع چگالی احتمال $f_i(\boldsymbol{x}_i)$، چون از روی تابع چگالی احتمال توأم به‌دست آمده است، تابع چگالی احتمال کناری $\boldsymbol{X}_i$ می‌گوییم.

تعریف ۱۳.۲.۲ دو بُردار تصادفی $\boldsymbol{X}$ و $\boldsymbol{Y}$ را هم‌توزیع گوییم هرگاه

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = F_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;$$

در این صورت، نماد $\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{Y}$ را به کار می‌بریم.

تعریف ۱۴.۲.۲ متغیرهای تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ را مستقل گوییم هرگاه

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

که در آن، $f_i(.)$ تابع چگالی کناری X_i است.

تعریف ۱۵.۲.۲ **(نمونه‌ی تصادفی).** به متغیرهای تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ که مستقل و هم‌توزیع (iid) با تابع چگالی مشترك f و تابع توزیع F باشند، یك نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای با چگالی f می‌گوییم و می‌نویسیم: $X_1, \ldots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} F$ یا $X_1, \ldots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} f$.

روشن است که در این صورت

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

تعریف ۱۶.۲.۲ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از جامعه‌ای با چگالی f باشد. به هر تابع از نمونه‌ی تصادفی که به هیچ مقدار (یا پارامتر) مجهولی بستگی نداشته باشد، آماره می‌گوییم. آماره‌ی ترتیبی iام را iامین کوچکترین X_i تعریف می‌کنیم و با نماد $X_{(i)}$ نمایش می‌دهیم، $i = 1, \ldots, n$. روشن است که اولین و nامین آماره‌ی ترتیبی به‌ترتیب برابر $X_{(1)} = \min_{i=1,\ldots,n} X_i$ و $X_{(n)} = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$ است و هم‌چنین داریم:

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}.$$

قضیه ۱۷.۲.۲ اگر $\boldsymbol{X}$ دارای تابع چگالی احتمال توأم $f_{\boldsymbol{X}}(.)$ باشد، آنگاه

$$\mathrm{E}[g(\boldsymbol{X})] = \begin{cases} \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) & \text{اگر } \boldsymbol{X} \text{ گسسته باشد} \\ \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} & \text{اگر } \boldsymbol{X} \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

به عنوان حالتی ویژه، اگر تابع چگالی توأم بردار تصادفی (X, Y) به‌صورت $f(x, y)$ باشد، آنگاه

$$\mathrm{E}[(g(X,Y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x,y)f(x,y) & \text{اگر } (X,Y) \text{ گسسته باشد} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy & \text{اگر } (X,Y) \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

قضیه ۱۸.۲.۲ (نابرابری کوشی- شوارتز).

$$|\mathrm{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathrm{E}[X^2]\mathrm{E}[Y^2]}.$$

تعریف ۱۹.۲.۲ کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y، به عنوان معیاری برای سنجش میزان وابستگی خطی دو متغیر تصادفی X و Y، به‌صورت $\sigma_{X,Y} = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$ تعریف می‌شود.

تعریف ۲۰.۲.۲ دو متغیر تصادفی X و Y را ناهمبسته می‌گوییم هرگاه $\sigma_{X,Y} = 0$.

قضیه ۲۱.۲.۲ $\sigma_{X,Y} = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$.

تعریف ۲۲.۲.۲ ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی X و Y چنین تعریف می‌شود:

$$\rho_{X,Y} = \mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

با جایگذاری X و Y به‌ترتیب با $X-\mu_X$ و $Y-\mu_Y$ در نابرابری کوشی- شوارتز، ثابت می‌شود که $|\rho_{X,Y}| \leq 1$ و هم‌چنین حالت $|\rho_{X,Y}| = 1$ هنگامی رخ می‌دهد که بین دو متغیر تصادفی یک رابطه‌ی خطی برقرار باشد؛ یعنی $Y = a + bX$. روشن است که در حالت $\rho_{X,Y} = 0$، دو متغیر تصادفی ناهمبسته می‌شوند؛ یعنی هیچ رابطه‌ی خطی بین آن‌ها برقرار نیست.

تعریف ۲۳.۲.۲ تابع چگالی شرطی X به شرط $Y = y$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)},$$

که در آن، $f_{X,Y}$ و f_Y، تابع چگالی توأم احتمال (X,Y) و چگالی Y هستند.

قضیه ۲۴.۲.۲ فرض کنید g یک تابع حقیقی مقدار باشد. داریم:

$$E\left[g(X)|Y=y\right]=\begin{cases}\sum_{\mathbb{R}} g(x)f(x|y) & \text{اگر متغیر تصادفی } X \text{ گسسته باشد}\\ \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x|y)dx & \text{اگر متغیر تصادفی } X \text{ پیوسته باشد}\end{cases}$$

تعریف ۲۵.۲.۲ امید ریاضی و واریانس شرطی X به شرط $Y=y$ به‌ترتیب به ازای $g(X)=X$ و $g(X)=(X-\mathrm{E}[X|Y=y])^{۲}$ تعریف می‌شود؛ به عبارتی دیگر،

$$\mu_{X|y}=\mathrm{E}[X|Y=y],\ \ \sigma^{۲}_{X|y}=E\left[(X-\mathrm{E}[X|Y=y])^{۲}|Y=y\right].$$

قضیه ۲۶.۲.۲

الف) $\mathrm{E}[X]=\mathrm{E}\big[\mathrm{E}[X|Y]\big]$؛

ب) $\mathrm{Var}[X]=\mathrm{E}\big[\mathrm{Var}[X|Y]\big]+\mathrm{Var}\big[\mathrm{E}[X|Y]\big]$.

به رابطه‌ی «الف» در قضیه‌ی ۲۶.۲.۲، رابطه‌ی **امید ریاضی مکرر** می‌گوییم.

۳.۲.۲ انواع همگرایی‌ها

در این زیربخش به معرفی دو نوع همگرایی دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی که در شبیه‌سازی کاربرد فراوان دارند، می‌پردازیم.

تعریف ۲۷.۲.۲ (همگرایی با احتمال یک). فرض کنید $\{X_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد. هم‌چنین فرض کنید X یک متغیر تصادفی است به‌طوری که

$$P\left(\lim_{n\to\infty}X_n=X\right)=۱,$$

در این صورت می‌گوییم دنباله‌ی $\{X_n\}$ با احتمال یک (یا تقریباً مطمئن) به X همگرا است و می‌نویسیم: $X_n \overset{a.s.}{\to} X$.

تعریف ۲.۲.۲۸ (همگرایی در توزیع). فرض کنید $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با دنباله‌ای از تابع توزیع‌های متناظر $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ باشد. هم‌چنین فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع F باشد. اگر

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in C_F,$$

که در آن، C_F، مجموعه‌ی پیوستگی تابع F است، آنگاه گوییم دنباله‌ی $\{X_n\}$ در توزیع به X همگرا است و می‌نویسیم: $X_n \overset{d}{\to} X$.

قضیه ۲.۲.۲۹ اگر $X_n \overset{a.s.}{\to} X$، آنگاه $X_n \overset{d}{\to} X$.

قضیه ۲.۲.۳۰ (قانون قوی اعداد بزرگ). فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با میانگین μ باشد. اگر $n \to \infty$، آنگاه $\bar{X}_n \overset{a.s.}{\to} \mu$، که در آن، $\bar{X}_n = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$.

توجه ۲.۲.۳۱ قانون قوی اعداد بزرگ تضمین می‌کند که میانگین نمونه‌ی تصادفی، $\bar{X}_n$، با احتمال یک به میانگین جامعه، μ، میل می‌کند؛ یعنی $P\left(\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu\right) = 1$.

۲.۲.۴ توزیع‌های بریده شده

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی f، تابع توزیع F و تکیه‌گاه S_X باشد.

تعریف ۳۲.۲.۲ فرض کنید $l \in S_X$. تابع توزیع متغیر تصادفی X بریده شده به چپ در نقطه‌ی l به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_l(x) = P(X \leq x | X \geq l), \quad x \geq l.$$

روشن است که

$$F_l(x) = \frac{P(l \leq X \leq x)}{P(X \geq l)} = \frac{F(x) - F(l^-)}{۱ - F(l^-)}, \quad x \geq l,$$

و بنابراین تابع چگالی متغیر تصادفی بریده شده به چپ چنین است:

$$f_l(x) = \frac{f(x)}{۱ - F(l^-)}, \quad x \geq l.$$

بدیهی است که اگر متغیر تصادفی X پیوسته باشد، آنگاه $F(l^-) = F(l)$ و درنتیجه

$$f_l(x) = \frac{f(x)}{۱ - F(l)}, \quad x \geq l.$$

تعریف ۳۳.۲.۲ فرض کنید $r \in S_X$. تابع توزیع متغیر تصادفی بریده شده به راست در نقطه‌ی r به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_r(x) = P(X \leq x | X \leq r), \quad x \leq r.$$

روشن است که

$$F_r(x) = \frac{P(X \leq x)}{P(X \leq r)} = \frac{F(x)}{F(r)}, \quad x \leq r,$$

و بنابراین تابع چگالی متغیر تصادفی بریده شده به راست چنین است:

$$f_r(x) = \frac{f(x)}{F(r)}, \quad x \leq r.$$

تعریف ۳۴.۲.۲ فرض کنید $l, r \in S_X$. تابع توزیع متغیر تصادفی بریده شده به چپ در نقطه‌ی l و به راست در نقطه‌ی r به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{l,r}(x) = P\big(X \leq x | l \leq X \leq r\big), \quad l \leq x \leq r.$$

درنتیجه

$$F_{l,r}(x) = \frac{P(l \leq X \leq x)}{P(l \leq X \leq r)} = \frac{F(x) - F(l^-)}{F(r) - F(l^-)}, \quad l \leq x \leq r,$$

و بنابراین تابع چگالی این متغیر تصادفی چنین است:

$$f_{l,r}(x) = \frac{f(x)}{F(r) - F(l^-)}, \quad l \leq x \leq r;$$

روشن است که در صورت پیوسته بودن X، خواهیم داشت:

$$f_{l,r}(x) = \frac{f(x)}{F(r) - F(l)}, \quad l \leq x \leq r.$$

توجه ۳۵.۲.۲ دقت کنید که با میل دادن l به نقطه‌ی ابتدایی S_X، $F_{l,r}(x)$ به $F_r(x)$، با میل دادن r به نقطه‌ی انتهایی S_X، $F_{l,r}(x)$ به $F_l(x)$ و با میل دادن توأم l و r به‌ترتیب به نقطه‌های ابتدایی و انتهایی S_X، $F_{l,r}(x)$ به $F(x)$ میل می‌کند.

میانگین و واریانس توزیع‌های بریده شده به چپ و راست به سادگی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\mu_X = \begin{cases} \sum_{l\le x\le r} x f_{l,r}(x) = \frac{\sum_{l\le x\le r} x f(x)}{F(r)-F(l^-)} & \text{اگر } X \text{ گسسته باشد} \\ \int_l^r x f_{l,r}(x)dx = \frac{\int_l^r x f(x)dx}{F(r)-F(l)} & \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

و

$$\sigma_X^2 = \begin{cases} \sum_{l\le x\le r}(x-\mu_X)^2 f_{l,r}(x) = \frac{\sum_{l\le x\le r}(x-\mu_X)^2 f(x)}{F(r)-F(l^-)} & \text{اگر } X \text{ گسسته باشد} \\ \int_l^r (x-\mu_X)^2 f_{l,r}(x)dx = \frac{\int_l^r (x-\mu_X)^2 f(x)dx}{F(r)-F(l)} & \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

۵.۲.۲ تابع توزیع تجربی

در بسیاری از مسائل آماری، تابع توزیع (نظری) متغیر تصادفی مشخص نیست. یک راه ممکن برای برآورد تابع توزیع این است که با گرفتن نمونه‌ای تصادفی از متغیر تصادفی، **تابع توزیع تجربی** را به کار بریم.

تعریف ۳۶.۲.۲ فرض کنید داده‌های یک نمونه‌ی تصادفی به‌صورت $x_1, \ldots, x_n$ باشد. تابع توزیع تجربی گسسته‌ی این نمونه به‌صورت

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(x_i \le x) = \frac{1}{n}\#(x_i \le x),$$

تعریف می‌شود که در آن $I(.)$، تابع نشانگر و $\#(.)$، نشان دهنده‌ی تعداد است.

توجه کنید که متغیر تصادفی $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le x)$، بنابر قانون قوی اعداد بزرگ، برای هر x، با احتمال یک به $F(x)$ میل می‌کند.
هر چند که ثابت می‌شود که با افزایش اندازه‌ی نمونه، تابع توزیع تجربی به تابع توزیع جامعه میل می‌کند اما روشن است که بی توجه به گسسته یا پیوسته بودن توزیع جامعه، تابع توزیع تجربی، تابع توزیع مربوط به یک متغیر تصادفی گسسته است. در صورتی که توزیع جامعه پیوسته

باشد می‌توان در آغاز، داده‌ها را رده‌بندی کرد و سپس چندبر فراوانی نسبی انباشته را به عنوان برآورد تابع توزیع به کار برد.

تعریف ۳۷.۲.۲ فرض کنید داده‌های نمونه‌ی تصادفی، $x_1, \ldots, x_n$، به‌صورت جدول ۱.۲ رده‌بندی شده باشند.

جدول ۱.۲: رده‌بندی داده‌های نمونه

فراوانی نسبی انباشته (R_i)	فراوانی نسبی (r_i)	فراوانی (f_i)	رده‌ها
R_1	r_1	f_1	$[y_0, y_1]$
R_2	r_2	f_2	$(y_1, y_2]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$R_k = 1$	r_k	f_k	$(y_{k-1}, y_k]$
	1	n	جمع

در این صورت، تابع توزیع تجربی پیوسته‌ی داده‌ها، چندبر فراوانی انباشته‌ی داده‌ها تعریف می‌شود؛ به بیان دیگر، این تابع، پاره‌خطهایی است که با وصل کردن پی‌درپی نقاط (y_i, R_i)، $i = 0, 1, \ldots, k$، به‌دست می‌آید، که در آن $y_0 = \min x_i$، $y_k = \max x_i$ و $R_0 = 0$.

بنابر تعریف ۳۷.۲.۲، ضابطه‌ی تابع توزیع تجربی پیوسته‌ی داده‌ها چنین است:

$$F_n^c(x) = \begin{cases} 0 & x < y_0 \\ R_i + \frac{R_i - R_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}(x - y_i) & y_{i-1} \leq x < y_i, \quad i = 1, \ldots, k \\ 1 & x \geq y_k \end{cases}$$

مثال ۳۸.۲.۲ داده‌های مربوط به مدت زمان تعمیر یک وسیله بر حسب دقیقه چنین گزارش شده است:

۱۶	۳۶	۳۱	۱۹	۳۵	۳۱	۳۷	۱۷	۵	۵۴	۱۹	۳۸	۴۹
۵۱	۲۰	۲۳	۱۰	۳۳	۳۳	۳۳	۳۳	۳۸	۲۳	۳۲	۳۴	۲۸
۷	۲۳	۴۸	۳۵	۳۲	۳۰	۳۷	۱۹	۳۳	۶۵	۳۲	۳۲	۳۱
۳۴	۵۰	۲۴	۱۸	۳۲	۳۲	۳۸	۵۰	۳۴	۳۲	۳۱	۳۲	۳۱
۳۸	۳۷	۳۳	۳۰	۳۶	۳۰	۳۴	۳۲	۲۸	۳۴	۳۴	۴۳	۳۸
۲۸	۲۰	۲۱	۲۰	۳۱	۳۷	۵۳	۳۱	۲۰	۲۴	۲۳	۴۶	۳۱
۳۴	۲۵	۳۳	۲۲	۳۰	۳۷	۱۵	۳۳	۲۳	۳۵	۴۳	۴۰	۲۵
				۳۳	۳۹	۳۶	۲۱	۳۵	۴۳	۲۴	۴۷	۹

الف) تابع توزیع تجربی گسسته‌ی داده‌ها را به‌دست آورید؛
ب) داده‌ها را در رده‌های با طول مناسب رده‌بندی کنید؛
پ) تابع توزیع تجربی پیوسته‌ی داده‌ها را بر اساس رده‌بندی قسمت «ب» بیابید؛
ت) تابع توزیع‌های تجربی گسسته و پیوسته را در یک شکل رسم و مقایسه نمایید.

حل.
الف) اگر مرتب‌شده‌ی داده‌ها را به‌صورت

$$-\infty = y_0 < y_1 \leq \cdots \leq y_{100} < y_{101} = \infty,$$

نشان دهیم، آنگاه تابع توزیع تجربی گسسته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F_{100}(x) = \frac{i}{100}, \quad y_i \leq x < y_{i+1}, \; i = 0, 1, 2, \ldots, 100.$$

ب) با بررسی مقدماتی داده‌ها می‌توان دریافت که مینیمم، ماکسیمم، میانگین و انحراف معیار داده‌ها به‌ترتیب برابر ۵، ۶۵، ۳۱/۵۴ و ۱۰/۲۴ است. اگر بخواهیم داده‌ها را چند رده با طول برابر تقسیم کنیم، تعداد داده‌ها در رده‌های کناری کم و در رده‌های میانی زیاد می‌شود. به همین دلیل برای تشخیص بهترِ چگونگی توزیع داده‌ها، در محدوده‌ی پر تراکم، یعنی اطراف میانگین، طول

رده‌ها را کوچکتر می‌گیریم. به این منظور رده‌بندی زیر را انجام داده‌ایم:

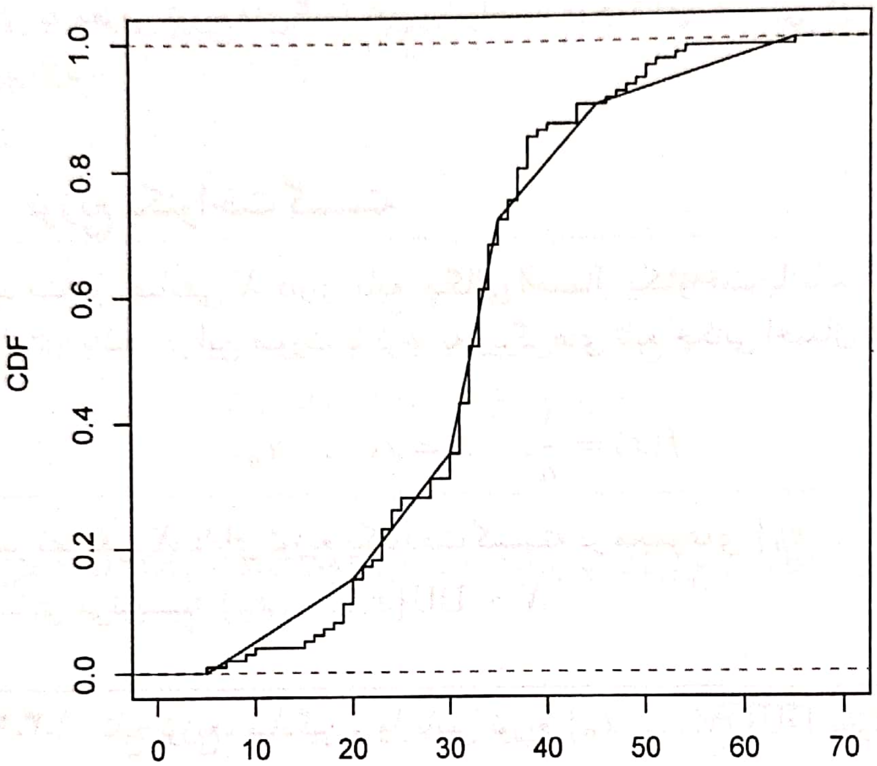
بازه‌ی زمانی مدت تعمیر	f_i	r_i	R_i
[۵, ۲۰]	۱۵	۰/۱۵	۰/۱۵
(۲۰, ۳۰]	۲۰	۰/۲۰	۰/۳۵
(۳۰, ۳۵]	۳۷	۰/۳۷	۰/۷۲
(۳۵, ۴۵]	۱۸	۰/۱۸	۰/۹۰
(۴۵, ۶۵]	۱۰	۰/۱۰	۱/۰۰
جمع	۱۰۰	۱/۰۰	

پ) برای این رده‌بندی، تابع توزیع تجربی پیوسته به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F^c_{۱۰۰}(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۵ \\ ۰/۰۱x - ۰/۰۵ & ۵ \leq x < ۲۰ \\ ۰/۰۲x - ۰/۲۵ & ۲۰ \leq x < ۳۰ \\ ۰/۰۷۴x - ۱/۸۷ & ۳۰ \leq x < ۳۵ \\ ۰/۰۱۸x + ۰/۰۹ & ۳۵ \leq x < ۴۵ \\ ۰/۰۰۵x + ۰/۶۷۵ & ۴۵ \leq x < ۶۵ \\ ۱ & x \geq ۶۵ \end{cases}$$

ت) نمودار دو تابع توزیع تجربی در شکل ۱.۲ رسم شده است. دیده می‌شود که تابع توزیع تجربی پیوسته، یک تقریب خوب برای تابع توزیع تجربی گسسته است. △

در بخش بعد به معرفی مهمترین توزیع‌های گسسته می‌پردازیم.



شکل ۲.۱۰: نمودار تابع توزیع تجربی گسسته و پیوسته‌ی داده‌های مثال ۲.۲.۳۸

تمرین‌های بخش ۲.۲

۱. قضیه‌های ۲.۲.۱۱ و ۲.۲.۲۶ را ثابت کنید.

۲. یک شرکت تامین کننده‌ی پکیج‌های دیواری به تعیین توزیع درخواست مشتری‌ها در طول هفته علاقه‌مند است. با یک بررسی ۲۰ هفته‌ای جدول فراوانی زیر را به‌دست آورده است:

درخواست هفتگی	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد هفته	۱	۱	۳	۳	۵	۴	۲	۱

داده‌ها را در رده‌هایی به طول ۲ رده‌بندی کنید؛ تابع توزیع تجربی پیوسته‌ی داده‌ها را بیابید و آن را رسم نمایید.

۲.۳ توزیع‌های گسسته

در این بخش به معرفی توزیع‌های گسسته‌ی یکنواخت، دوجمله‌ای، هندسی، دوجمله‌ای منفی و پواسون می‌پردازیم.

۲.۳.۱ توزیع یکنواخت گسسته

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال یکنواخت یا ثابت در مجموعه‌ی $\{x_1, \ldots, x_n\}$ باشد. در این صورت با توجه به ویژگی‌های تابع چگالی احتمال گسسته خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{1}{n}, \quad x = x_1, \ldots, x_n.$$

گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت گسسته در مجموعه‌ی $\{x_1, \ldots, x_n\}$ است و به‌صورت نمادی می‌نویسیم: $X \sim \mathrm{DU}\{x_1, \ldots, x_n\}$.

قضیه ۲.۳.۱ تابع توزیع، میانگین و واریانس توزیع $\mathrm{DU}\{x_1, \ldots, x_n\}$ به‌ترتیب برابر

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ i/n & x_i \le x < x_{i+1},\ i = 1, \ldots, n-1 \\ 1 & x \ge x_n \end{cases}$$

$\bar{x} = (1/n)\sum x_i$ و $s_B^2 = (1/n)\sum (x_i - \bar{x})^2$ است؛ در ضابطه‌ی تابع توزیع، فرض $x_1 < \cdots < x_n$ در نظر گرفته شده است.

۲.۳.۲ توزیع دوجمله‌ای

آزمایش برنولی را n بار به‌طور مستقل انجام می‌دهیم. فرض کنید متغیر تصادفی X نمایانگر تعداد پیروزی‌ها در n آزمایش باشد. گوییم X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p است

و می‌نویسیم: $X \sim \mathrm{B}(n,p)$. تابع چگالی احتمال آن به‌صورت زیر است:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = ۰, ۱, \ldots, n.$$

قضیه ۲.۳.۲ اگر $X \sim \mathrm{B}(n,p)$، آنگاه

$$\mu_X = np, \quad \sigma_X^۲ = npq.$$

به توزیع $\mathrm{B}(۱,p)$، توزیع برنولی با پارامتر p می‌گوییم و با نماد $\mathrm{Ber}(p)$ نشان می‌دهیم.

۳.۳.۲ توزیع هندسی

آزمایش برنولی را تا رسیدن به اولین پیروزی به‌صورت مستقل انجام می‌دهیم. فرض کنید متغیر تصادفی X نمایانگر تعداد آزمایش‌های لازم باشد. گوییم X دارای توزیع هندسی با پارامتر p است و می‌نویسیم: $X \sim \mathrm{G}_۱(p)$. به سادگی تابع چگالی احتمال آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x) = pq^{x-۱}, \quad x = ۱, ۲, \ldots.$$

قضیه ۳.۳.۲ اگر $X \sim \mathrm{G}_۱(p)$، آنگاه تابع توزیع، میانگین و واریانس توزیع به‌ترتیب برابر

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۱ \\ ۱ - q^i & i \leq x < i+۱,\ i = ۱, ۲, \ldots \end{cases}$$

$۱/p$ و $q/p^۲$ به‌دست می‌آید.

برخی توزیع هندسی را تعداد شکست‌های لازم تا رسیدن به اولین پیروزی تعریف می‌کنند؛ اگر این متغیر تصادفی را با Y نمایش دهیم روشن است که $Y = X - ۱$؛ در این صورت می‌نویسیم: $Y \sim G_۰(p)$. روشن است که تابع چگالی احتمال Y به‌صورتِ

$$f(y) = pq^y, \quad y = ۰, ۱, \ldots,$$

و هم‌چنین میانگین و واریانس آن به‌ترتیب برابر q/p و $q/p^۲$ به‌دست می‌آید.

۴.۳.۲ توزیع دوجمله‌ای منفی

آزمایش برنولی را به‌صورت مستقل تا رسیدن به rامین پیروزی انجام می‌دهیم. فرض کنید متغیر تصادفی X نمایانگر تعداد آزمایش‌های لازم باشد. گوییم X دارای توزیع دوجمله‌ای منفی با پارامتر p است و می‌نویسیم: $X \sim \mathrm{NB}_۱(r, p)$. به سادگی می‌توان ثابت کرد که تابع چگالی احتمال آن چنین است:

$$f(x) = \binom{x - ۱}{r - ۱} p^r q^{x-r}, \quad x = r, r + ۱, \ldots.$$

قضیه ۴.۳.۲ میانگین و واریانس توزیع $\mathrm{NB}_۱(r, p)$ به‌ترتیب برابر r/p و $rq/p^۲$ است.

برخی توزیع دوجمله‌ای منفی را تعداد شکست‌های لازم تا رسیدن به rامین پیروزی تعریف می‌کنند؛ اگر این متغیر تصادفی را با Y نمایش دهیم، روشن است که $Y = X - r$؛ در این صورت می‌نویسیم: $Y \sim \mathrm{NB}_۰(r, p)$. بنابراین تابع چگالی احتمال Y به‌صورتِ

$$f(y) = \binom{y + r - ۱}{r - ۱} p^r q^y, \quad y = ۰, ۱, \ldots,$$

و هم‌چنین میانگین و واریانس آن به‌ترتیب برابر rq/p و $rq/p^۲$ به‌دست می‌آید. چنان که از تعریف توزیع دوجمله‌ای منفی برمی‌آید، می‌توان نشان داد که

قضیه ۵.۳.۲
الف) اگر $X_1, \ldots, X_r \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{G}_1(p)$، آنگاه $\sum_{i=1}^{r} X_i \sim \mathrm{NB}_1(r,p)$؛
ب) اگر $Y_1, \ldots, Y_r \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{G}_0(p)$، آنگاه $\sum_{i=1}^{r} Y_i \sim \mathrm{NB}_0(r,p)$.

۵.۳.۲ توزیع پواسون

فرض کنید $X \sim \mathrm{B}(n,p)$. اگر $n \to \infty$ و $p \to 0$ به‌طوری که $np \to \lambda$، آنگاه تابع چگالی X به تابع چگالی

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

میل می‌کند؛ به این توزیع، توزیع پواسون با پارامتر λ می‌گوییم و آن را با $\mathrm{P}(\lambda)$ نشان می‌دهیم؛ در صورتی که $n \geq 30$ و $p \leq 0/05$، این تقریب خوب کار می‌کند.

قضیه ۶.۳.۲ اگر $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$، آنگاه $\mu_X = \sigma_X^2 = \lambda$.

این توزیع معمولاً برای تعداد رخدادها در واحد زمان، طول، سطح، حجم و غیره بسیار کاربرد دارد.

تمرین‌های بخش ۳.۲

۱. نمای توزیع، ماکسیمم مطلق تابع چگالی آن تعریف می‌شود. نشان دهید که نمای توزیع $\mathrm{B}(n,p)$، $\lfloor (n+1)p \rfloor$ است که در آن، $\lfloor x \rfloor$، بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x یا کف x است.

۲. فرض کنید $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$. نشان دهید
الف) $\mathrm{E}[X] = \lambda$؛
ب) $\mathrm{Var}[X] = \lambda$.

۳. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل پواسون به ترتیب با پارامترهای $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ باشند. نشان دهید

$$X|X+Y=n \sim \mathrm{B}\left(n, \frac{\lambda_۱}{\lambda_۱+\lambda_۲}\right).$$

۴. فرض کنید $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$. درستی رابطه‌ی $P(X=x+۱)=\frac{\lambda}{x+۱}P(X=x)$ را برای $x=۰,۱,\cdots$ بررسی کنید.

۵. مدت زمان تا نزدیکترین دقیقه برای انجام امور بانکی توسط یک کارمند بانک، متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر است:

$$f(x)=cx, \quad x=۱,۲,۳,۴,$$

که در آن، c مقدار ثابتی است.
الف) c را بیابید؛
ب) احتمال این که کار یک مشتری بانک حداقل ۲ دقیقه و حداکثر ۳ دقیقه طول بکشد، چقدر است؟
پ) احتمال این که جمع کار دو مشتری بانک حداقل ۵ دقیقه شود، چقدر است؟
ت) میانگین و واریانس مدت زمان انجام امور بانکی یک مشتری بانک را به‌دست آورید.

۶. تاس سالمی را پرتاب می‌کنیم. میانگین و واریانس عددی که ظاهر می‌شود را بیابید.

۷. برای یک پرواز با هواپیما حداقل باید نیمی از موتورها سالم باشند. اگر هر موتور به‌طور مستقل با احتمال p کار کند، برای چه مقدارهایی از p، یك هواپیمای ۳ موتوره ایمن‌تر از یك هواپیمای ۵ موتوره است؟

۸. توضیح دهید چرا متغیرهای تصادفی زیر به‌طور تقریبی دارای توزیع پواسون هستند:
الف) تعداد لغزش‌های چاپی در یك صفحه‌ی این کتاب؛
ب) تعداد شماره تلفن‌های اشتباه گرفته شده در طول یك روز؛
پ) تعداد مشتری‌هایی که در طول روز وارد اداره پست می‌شوند؛

۹. دو بازیکن A و B به نوبت سکه‌ای را تا رسیدن به اولین شیر پرتاب می‌کنند. برنده‌ی بازی، بازیکنی است که زودتر شیر ببیند و در این صورت ۱۰۰۰ واحد پول از بازیکن روبه‌رو می‌گیرد. اگر A آغازگر بازی باشد و آن‌ها بخواهند که پیش از بازی هر یک به میزان برد خود کنار بگذارد، مبلغ هر بازیکن را تعیین کنید.

۱۰. یک کارخانه، آرمیچرهایی را تولید می‌کند که در موتور نوعی قایق موتوری کاربرد دارند. به‌طور متوسط، یک درصد از آرمیچرها پس از آزمایش در یک کارخانه مونتاژ موتور، در حد استاندارد عمل نمی‌کنند. وقتی محموله‌ای متشکل از صد آرمیچر به کارخانه برسد، آرمیچرها مورد آزمایش قرار می‌گیرند و اگر بیش از دو مورد ناقص وجود داشته باشد محموله به سازنده‌ی آرمیچر برگشت داده می‌شود. احتمال برگرداندن یک محموله چقدر است؟

۱۱. یک ماده‌ی شیمیایی صنعتی ساخته شده است که در گسترش دامنه‌ی آتش سوزی در رنگ تاخیر ایجاد می‌کند. نمایندگی فروش این ماده به مشتریان زنگ می‌زند و این ماده را پیشنهاد می‌دهد. او معتقد است که بر اساس تجربه‌ی قبلی، ۴۸ درصد از پیشنهادهای تلفنی فروش، به سفارش می‌انجامد.
الف) احتمال این که اولین سفارش در چهارمین پیشنهاد تلفنی فروش روز داده شود، چقدر است؟
ب) اگر در یک روز هشت پیشنهاد تلفنی فروش داده شود، احتمال دریافت ۶ سفارش چقدر است؟
پ) اگر پیش از ناهار ۴ پیشنهاد فروش داده شود، احتمال این که حداکثر یک سفارش داده شود، چقدر است؟

۴.۲ توزیع‌های پیوسته

در این بخش، به معرفی توزیع‌های پیوسته‌ی یکنواخت، گاما و حالت‌های ویژه‌ی آن (نمایی و اِرلنگ)، دونمایی، وایبول، لُجستیک، بتا، نرمال، کوشی و مثلثی می‌پردازیم.

۱.۴.۲ توزیع یکنواخت پیوسته

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال یکنواخت یا ثابت در بازه‌ی (a, b) باشد. در این صورت با توجه به ویژگی‌های تابع چگالی احتمال پیوسته خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{۱}{b-a}, \quad a < x < b;$$

در این صورت گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی (a, b) است و به‌صورت نمادی می‌نویسیم: $X \sim \mathrm{U}(a, b)$. اگر $a = ۰$ و $b = ۱$، آنگاه به این توزیع، یکنواخت استاندارد گفته می‌شود.

قضیه ۱.۴.۲ اگر $U \sim \mathrm{U}(۰, ۱)$، آنگاه $X = (b-a)U + a \sim \mathrm{U}(a, b)$.

قضیه ۲.۴.۲ اگر $X \sim \mathrm{U}(a, b)$، آنگاه تابع توزیع، میانگین و واریانس X به‌ترتیب برابر $F(x) = (x-a)/(b-a)$، برای $a \leq x < b$، $\mu_X = (a+b)/۲$ و $\sigma_X^۲ = (a-b)^۲/۱۲$ است.

۲.۴.۲ توزیع گاما

متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما با پارامترهای α و β است هرگاه تابع چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x/\beta} x^{\alpha-۱}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)}, \quad x > ۰; \quad \alpha, \beta > ۰,$$

باشد که در آن $\Gamma(\alpha) = \int_۰^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{\alpha-۱} dx$ تابع گاما است؛ به‌صورت نمادی می‌نویسیم: $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.

توجه کنید که $\Gamma(۱) = ۱$. هم‌چنین با به‌کارگیری انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء می‌توان نشان داد که

قضیه ۳.۴.۲ اگر $\alpha > ۱$ آنگاه

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - ۱)\Gamma(\alpha - ۱);$$

درنتیجه هرگاه $\alpha \in \mathbb{N}$، آنگاه $\Gamma(\alpha) = (\alpha - ۱)!$.

قضیه ۴.۴.۲

الف) اگر $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$، آنگاه

$$\mu_X = \alpha\beta, \quad \sigma_X^۲ = \alpha\beta^۲.$$

ب) در حالت $\alpha = k \in \mathbb{N}$، توزیع گاما معمولاً برای زمان لازم برای رسیدن به kامین رخداد به کار برده می‌شود؛ آنگاه

$$P(X \leq x) = P(Y \geq k),$$

که در آن $Y \sim \mathrm{P}(x/\beta)$.

در دنباله به بررسی چند حالت ویژه از توزیع $\Gamma(\alpha, \beta)$ می‌پردازیم:

۱) اگر $\alpha = ۱$، آنگاه به توزیع، توزیع نمایی با پارامتر β می‌گوییم؛ در این حالت معمولاً β را با θ جایگزین کرده و می‌نویسیم: $X \sim \mathrm{E}(\theta)$. روشن است که میانگین و انحراف معیار توزیع برابر θ است. تابع توزیع این متغیر تصادفی به‌صورت $F(x) = ۱ - \mathrm{e}^{-x/\theta}$، $x > ۰$ است.

قضیه ۵.۴.۲ اگر $X_۱, \ldots, X_n$ مستقل و هم‌توزیع دارای توزیع نمایی با پارامتر θ باشند، آنگاه

$$X = \sum_{i=۱}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \theta).$$

۲) اگر $\alpha = \nu/۲$ و $\beta = ۲$، آنگاه به توزیع، توزیع خی‌دو با ν درجه‌ی آزادی می‌گوییم و می‌نویسیم: $X \sim \chi^۲(\nu)$. به سادگی ثابت می‌شود که $\mu_X = \nu$ و $\sigma_X^۲ = ۲\nu$.

۳) اگر $\alpha = k \in \mathbb{N}$ و $\beta = ۱/k\theta$، آنگاه به این توزیع، توزیع اِرلنگ با پارامترهای k و θ می‌گوییم و می‌نویسیم: $X \sim \mathrm{Er}(k, \theta)$. روشن است که $\mu_X = ۱/\theta$ و $\sigma_X^۲ = ۱/k\theta^۲$.

۳.۴.۲ توزیع دونمایی

متغیر تصادفی X دارای توزیع دونمایی (لاپلاس) با پارامترهای μ و σ است هرگاه تابع چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \frac{۱}{۲\sigma} \exp\left[-|x-\mu|/\sigma\right], \quad x \in \mathbb{R}; \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > ۰,$$

باشد. این توزیع را با نماد $\mathrm{DE}(\mu, \sigma)$ نمایش می‌دهیم. به پارامترهای μ و σ، به‌ترتیب پارامترهای مکان و مقیاس می‌گوییم. اگر $\mu = ۰$، آنگاه برای توزیع، نماد $\mathrm{DE}(\sigma)$ را به‌کار می‌بریم.

قضیه ۶.۴.۲ تابع توزیع، میانگین و واریانس توزیع $\mathrm{DE}(\mu, \sigma)$ به‌ترتیب برابر

$$F(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}\exp\left[(x-\mu)/\sigma\right] & x < \mu \\ ۱ - \frac{۱}{۲}\exp\left[-(x-\mu)/\sigma\right] & x \geq \mu \end{cases}$$

μ و $۲\sigma^۲$ است.

۴.۴.۲ توزیع وایبول

متغیر تصادفی X دارای توزیع وایبول با پارامترهای μ ، σ و θ است هرگاه تابع چگالی آن به‌صورت

$$f(x) = \frac{\theta}{\sigma}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\theta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\theta}\right], \quad x > \mu; \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma, \theta > 0,$$

باشد؛ در این صورت می‌نویسیم: $X \sim \mathrm{W}(\mu, \sigma, \theta)$. پارامترهای μ، σ و θ به‌ترتیب پارامترهای مکان، مقیاس و شکل خوانده می‌شوند.

قضیه ۷.۴.۲ اگر $X \sim \mathrm{W}(\mu, \sigma, \theta)$، آنگاه تابع توزیع، میانگین و واریانس X به‌ترتیب برابر

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\theta}\right], \quad x > \mu,$$

$\mu_X = \mu + \sigma\Gamma(1 + 1/\theta)$ و $\sigma_X^2 = \sigma^2\Gamma(1 + 2/\theta) - \sigma^2\Gamma^2(1 + 1/\theta)$ است.

این توزیع در حالت $\theta = 1$ به توزیع نمایی آستانه‌ای با پارامترهای μ و σ، با نماد $\mathrm{E}(\mu, \sigma)$ و در حالت $\theta = 1$ و $\mu = 0$ به $\mathrm{E}(\sigma)$ تبدیل می‌شود. در حالت $\theta = 2$، به این توزیع، توزیع رالی با پارامترهای μ و σ می‌گوییم و با نماد $\mathrm{R}(\mu, \sigma)$ نشان می‌دهیم.

۵.۴.۲ توزیع لُجستیک

متغیر تصادفی X دارای توزیع لُجستیک با پارامترهای μ و σ است هرگاه تابع چگالی آن به‌صورت

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}{\sigma\left(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0,$$

باشد؛ در این صورت می‌نویسیم: $X \sim \mathrm{L}(\mu, \sigma)$. پارامترهای μ و σ به‌ترتیب پارامترهای مکان و مقیاس این توزیع هستند.

قضیه ۸.۴.۲ اگر $X \sim \mathrm{L}(\mu, \sigma)$، آنگاه تابع توزیع، میانگین و واریانس X به‌ترتیب برابر

$$F(x) = ۱/\left(۱ + \mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$\mu_X = \mu$ و $\sigma_X^۲ = \sigma^۲\pi^۲/۳$ است.

در حالت $\mu = ۰$ و $\sigma = ۱$، به این توزیع، توزیع لُجستیک استاندارد گفته می‌شود.

۶.۴.۲ توزیع بتا

گوییم متغیر تصادفی X با تابع چگالی f دارای توزیع بتا با پارامترهای α و β است هرگاه

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-۱}(۱-x)^{\beta-۱}, \quad ۰ < x < ۱;\ \alpha, \beta > ۰;$$

در این صورت می‌نویسیم: $X \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$. توجه کنید که این توزیع در حالت $\alpha = \beta = ۱$، به توزیع $\mathrm{U}(۰, ۱)$ تبدیل می‌شود.

قضیه ۹.۴.۲ اگر $X \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$، آنگاه میانگین و واریانس X به‌ترتیب برابر $\mu_X = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ و $\sigma_X^۲ = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^۲(\alpha+\beta+۱)}$ است.

قضیه ۱۰.۴.۲ فرض کنید $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$، $i = ۱, ۲$. اگر $X_۱$ و $X_۲$ مستقل باشند، آنگاه

$$\frac{X_۱}{X_۱ + X_۲} \sim \mathrm{Beta}(\alpha_۱, \alpha_۲).$$

۷.۴.۲ توزیع نرمال

گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و $\sigma^۲$ است هرگاه تابع چگالی احتمال آن چنین باشد:

$$f(x) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}\right], \quad x \in \mathbb{R}; \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+.$$

در این صورت می‌نویسیم:

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^۲).$$

قضیه ۱۱.۴.۲ اگر $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^۲)$، آنگاه $\mathrm{E}[X] = \mu$ و $\mathrm{Var}[X] = \sigma^۲$.

به توزیع $\mathrm{N}(۰, ۱)$، توزیع نرمال استاندارد می‌گوییم و در این صورت، این متغیر تصادفی را با نماد Z، تابع چگالی و تابع توزیع آن را به‌ترتیب با نمادهای $\phi(.)$ و $\Phi(.)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۲.۴.۲ (قضیه‌ی حد مرکزی). فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲ < \infty$ باشد. در این صورت

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathrm{N}(۰, ۱), \quad n \to \infty.$$

توجه ۱۳.۴.۲ قضیه‌ی حد مرکزی بیان می‌کند که برای nهای بزرگ، $\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ دارای توزیع تقریبی نرمال استاندارد است؛ معمولاً در صورتی که هیچ اطلاعی از توزیع جامعه در دست نباشد، $n \geq ۳۰$ کافی است اما برای برخی از توزیع‌های جامعه مانند توزیع یکنواخت، این توزیع تقریبی برای nهای بسیار کوچک‌تر مثلاً حدود ۱۲ نیز خوب کار می‌کند.

بنابر قضیه‌ی حد مرکزی، تابع توزیع تجربی در هر نقطه‌ی x، $(F_n(x))$، برای nهای بزرگ، دارای توزیع تقریبی نرمال است؛ چرا؟

۲.۴.۶.۱ تقریب لاپلاس برای محاسبه‌ی انتگرال

در برخی از مسائل ممکن است به انتگرالی به‌صورت $\int_{-\infty}^{\infty}\exp[h(x)]dx$ برخورد کنیم که با روش‌های انتگرال‌گیری معمولی قابل حل نباشد. تقریب لاپلاس یک روش سودمند برای محاسبه‌ی چنین انتگرال‌هایی است به شرط آن که تغییرات اصلی $h(x)$ پیرامون نقطه‌ی ماکسیمم مطلقش متمرکز باشد؛ یعنی تابع در خارج از همسایگی این نقطه، به‌طور تقریبی صفر باشد.

قضیه ۲.۴.۱۴ فرض کنید تغییرات اصلی تابع دوبار مشتق‌پذیر $h(x)$ در اطراف نقطه‌ی ماکسیمم، $x = x^*$، متمرکز باشد. در این صورت داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[h(x)]dx \approx \exp[h(x^*)]\sqrt{\frac{۲\pi}{-h''(x^*)}}.$$

اثبات. با توجه به این که تغییرات اصلی تابع دوبار مشتق‌پذیر $h(x)$ اطراف نقطه‌ی ماکسیمم $x = x^*$ است، درنتیجه بنابر تقریب مرتبه‌ی دوم تیلور تابع $h(x)$ حول x^*، برای xهای پیرامون x^* داریم:

$$h(x) \approx h(x^*) + h'(x^*)(x-x^*) + h''(x^*)(x-x^*)^۲/۲.$$

اما چون x^* نقطه‌ی ماکسیمم تابع است، $h'(x^*) = ۰$ و $h''(x^*) < ۰$. درنتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[h(x)]dx \approx \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[h(x^*) + h''(x^*)(x-x^*)^۲/۲\right]dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp[h(x^*)]\sqrt{\frac{2\pi}{-h''(x^*)}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{-h''(x^*)}{2\pi}} \\
&\quad \times \exp\left[-\frac{(x-x^*)^2}{-2/h''(x^*)}\right]dx \\
&= \exp[h(x^*)]\sqrt{\frac{2\pi}{-h''(x^*)}},
\end{aligned}
$$

توجه کنید که انتگرال رابطه‌ی آخر برابر ۱ است؛ چون تابع زیر انتگرال، تابع چگالی $\mathrm{N}(x^*, -1/h''(x^*))$ است. □

مثال ۱۵.۴.۲ با تقریب لاپلاس، $\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-x^2/2\right]dx$ را به‌دست آورید.

حل. قرار می‌دهیم $h(x) = -x^2/2$. بنابراین $h'(x) = -x$ و $h''(x) = -1$. درنتیجه $x^* = 0$. پس $\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-x^2/2\right]dx = \sqrt{2\pi}$. توجه کنید که مقدار انتگرال دقیق است؛ چون $(1/\sqrt{2\pi})\exp\left[-x^2/2\right]$ تابع چگالی نرمال استاندارد است. △

چون دامنه‌ی توزیع نرمال $\mathbb{R}$ است، آن را نمی‌توان برای کمیت‌های مثبت مانند طول عمر به کار برد مگر آن که میانگین توزیع را به اندازه‌ی کافی بزرگ و واریانس آن را به اندازه‌ی کافی کوچک در نظر بگیریم که این صورت، این دو محدویت باعث عدم مناسبت توزیع می‌شود. یک راه بهتر این است که توزیع نرمال را در نقطه‌ی صفر به چپ ببریم. توزیع نرمال بریده شده به چپ در نقطه‌ی صفر با پارامترهای μ و σ^2 را با نماد $\mathrm{TN}_{0^-}(\mu, \sigma^2)$ نشان می‌دهیم. روشن است که اگر $X \sim \mathrm{TN}_{0^-}(\mu, \sigma^2)$، آنگاه

$$
f(x) = \frac{\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{1-\Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma}\right)}, \quad x > 0.
$$

در حالت ویژه، به توزیع نرمال استاندارد بریده شده به چپ در نقطه‌ی صفر، **نیم‌نرمال** می‌گوییم و آن را با نماد $\mathrm{HN}(۰,۱)$ نشان می‌دهیم. بنابراین اگر $X \sim \mathrm{HN}(۰,۱)$، آنگاه

$$f(x) = \sqrt{۲/\pi} \exp\left[-x^۲/۲\right], \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

قضیه ۱۶.۴.۲ اگر $X \sim \mathrm{HN}(۰,۱)$. آنگاه

الف) $\mathrm{E}[X] = \sqrt{۲/\pi}$؛

ب) $\mathrm{Var}[X] = ۱ - \frac{۲}{\pi}$.

۸.۴.۲ توزیع کوشی

گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع کوشی با پارامترهای μ و σ است هرگاه

$$f(x) = \frac{\sigma/\pi}{(x-\mu)^۲ + \sigma^۲}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+.$$

در این صورت می‌نویسیم: $X \sim \mathrm{C}(\mu, \sigma)$. پارامترهای μ و σ به‌ترتیب پارامترهای مکان و مقیاس این توزیع هستند. می‌توان نشان داد که میانگین این توزیع وجود ندارد.

قضیه ۱۷.۴.۲ تابع توزیع $\mathrm{C}(\mu, \sigma)$ چنین است:

$$F(x) = \frac{۱}{\pi} \arctan\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \frac{۱}{۲}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

۹.۴.۲ توزیع مثلثی

پیش از پرداختن به تعریف توزیع مثلثی، به قضیه‌ی زیر توجه کنید.

قضیه ۱۸.۴.۲ فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_۱$ و $X_۲$ مستقل و دارای توزیع $\mathrm{U}(۰,۱)$ باشند. تابع چگالی متغیر تصادفی $Y = X_۱ + X_۲$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x) = \begin{cases} x & ۰ < x < ۱ \\ ۲ - x & ۱ \leq x < ۲ \end{cases}$$

به توزیع به‌دست آمده در قضیه، توزیع مثلثی استاندارد می‌گوییم؛ در حالت کلی‌تر ساختار چگالی مثلثی به‌صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} ۲(x-a)/\left[(b-a)(c-a)\right] & a < x < b \\ ۲(c-x)/\left[(c-b)(c-a)\right] & b \leq x < c \end{cases}$$

که در این صورت، توزیع را مثلثی با پارامترهای a، b و c می‌گوییم و آن را با نماد $\mathrm{Tri}(a,b,c)$ نمایش می‌دهیم؛ روشن است که توزیع $\mathrm{Tri}(۰,۱,۲)$، همان توزیع مثلثی استاندارد است.

قضیه ۱۹.۴.۲ تابع توزیع، میانگین و واریانس توزیع $\mathrm{Tri}(a,b,c)$ به‌ترتیب برابر

$$F(x) = \begin{cases} (x-a)^۲/\left[(b-a)(c-a)\right] & a < x < b \\ ۱ - (c-x)^۲/\left[(c-b)(c-a)\right] & b \leq x < c \end{cases}$$

$\mu_X = (a+b+c)/۳$ و $\sigma_X^۲ = (a^۲+b^۲+c^۲-ab-ac-bc)/۱۸$ است.

تمرین‌های بخش ۴.۲

۱. رابطه‌ی تابع توزیع، میانگین و واریانس توزیع $\mathrm{Tri}(a,b,c)$ (قضیه‌ی ۴.۲.۱۹) را ثابت کنید.

۲. فرض کنید $X \sim \mathrm{HN}(۰,۱)$. نشان دهید
الف) $\mathrm{E}[X] = \sqrt{۲/\pi}$؛
ب) $\mathrm{Var}[X] = ۱ - \frac{۲}{\pi}$.

۳. طول عمر یک قطعه، توزیع نمایی با میانگین ۱۰۰۰ ساعت دارد.
الف) این قطعه پیشتر به مدت میانگین عمرش مشغول به کار بوده است. احتمال این که ۱۵۰۰ ساعت کار کند، چقدر است؟
ب)پس از ۱۵۰۰۰ ساعت، قطعه هنوز مشغول کار است. احتمال این که ۵۰۰ ساعت دیگر کار کند، چقدر است؟

۴. فرض کنید طول عمر نوعی باتری، توزیع نمایی با میانگین ۴۸ ماه دارد. سر ۶۰ ماه، باتری هنوز کار می‌کند.
الف) احتمال این که این باتری در ۱۲ ماه بعدی از کار بیفتد، چقدر است؟
ب) احتمال از کار افتادن باتری در یکی از سال‌های فرد عمرش چقدر است؟
پ) اگر باتری تا ماه ۶۰ کار کند، امید ریاضی ماه‌های اضافه‌ی عمرش نسبت به میانگین آن را محاسبه کنید.

۵. مدت خدمت‌دهی به مشتریان در یک باجه‌ی بانک توزیع نمایی با میانگین ۵۰ ثانیه دارد.
الف) احتمال این که دو مشتری جلوتر از یک مشتری تازه وارد، هر یک کمتر از ۶۰ ثانیه برای پایان کار خود وقت بگیرند، چقدر است؟
ب) احتمال این که دو مشتری جلویی کار خود را چنان پایان ببرند که مشتری تازه وارد بتواند در ظرف ۲ دقیقه به باجه‌ی کارمند برسد، چقدر است؟

۶. میانگین و واریانس توزیع نمایی با پارامتر θ بریده شده از چپ و راست در نقاط l و r را بیابید.

۷. مصرف روزانه‌ی آب، برحسب ۱۰۰۰ لیتر، در یک کارخانه‌ی ابزارسازی و قالب‌سازی، دارای توزیع $\Gamma(۲,۴)$ است. احتمال این که درخواست در یک روز ویژه از ۴۰۰۰ لیتر

بیشتر شود، چقدر است؟

۸. یک کوهنورد در فصل زمستان برای کوهنوردی، لباس زیری تن می‌کند که با باتری گرم می‌شود. باتری‌ها به‌طور لحظه‌ای و نه به‌تدریج از کار می‌افتند. توزیع عمر هر باتری، نمایی با میانگین ۱۲ روز است. اگر این کوهنورد سه باتری همراه داشته باشد، احتمال این که در طول ۱۰ روز کوهنوردی به مشکل کمبود باتری برنخورد، چقدر است؟

۵.۲ مروری بر مباحث برآورد و آزمون فرضیه‌ها

در این بخش، به‌صورت فشرده مفاهیم مقدماتی برآورد و آزمون فرضیه‌ها را مرور می‌کنیم.

روزانه به‌صورت گسترده با مفاهیم برآورد و آزمون فرضیه در ارتباطیم. برای نمونه، گفته می‌شود از یک نمونه‌ی ۱۰۰۰ تایی، درصد بیماران کلیوی یک شهر ۱۰ درصد برآورد شده است یا درصد بیماران کلیوی با ضریب اطمینان ۹۰ درصد در بازه‌ی (۰٫۰۵, ۰٫۱۵) است و یا داروسازی ادعا می‌کند که داروی تازه‌ی او می‌تواند ۹۰ درصد بیماران کلیوی را بهبود بخشد در حالی که داروی موجود در بازار ۷۰ درصد بیماران را بهبود می‌بخشد؛ در واقع در این سه جمله به‌ترتیب یک مسئله‌ی برآورد نقطه‌ای، برآورد بازه‌ای (یا بازه‌ی اطمینان) و آزمون فرضیه مطرح شده است.

ابزار مورد نیاز برای برآورد و انجام آزمون فرضیه، یک نمونه‌ی تصادفی از جامعه‌ی مورد بحث است. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} f(.;\boldsymbol{\theta})$، که در آن، $f(.;\boldsymbol{\theta})$، تابع چگالی جامعه است که به بُردار پارامترهای مجهول $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^k$ بستگی دارد؛ به $\boldsymbol{\Theta}$ فضای پارامتر گفته می‌شود. اگر $k = 1$، آنگاه توزیع جامعه دارای یک پارامتر مجهول است؛ در این صورت، برای این پارامتر، نماد θ و برای فضای پارامتر مربوطه، نماد Θ به‌کار برده می‌شود.

بر اساس یک تابع از نمونه‌ی تصادفی که به هیچ پارامتر مجهولی بستگی ندارد، باید یک مقدار موجه برای پارامتر مجهول ارائه دهیم؛ به این تابع، **آماره** می‌گوییم. به آماره‌ای که به هدف برآورد پارامتر یا پارامترهای مجهول جامعه به‌کار می‌رود، برآوردگر و به مقدار مشاهده شده‌ی آن از نمونه، برآورد می‌گوییم.

دو روش برآوردیابی مهم وجود دارد که در دنباله به معرفی آن‌ها می‌پردازیم.

به جواب دستگاه معادلات گشتاوری $\mu'_r = m'_r$، $r = 1, \ldots, m$، **برآورد روش گشتاوری** (MME) $\boldsymbol{\theta}$ می‌گوییم که در آن، $\mu'_r = \mathrm{E}[X^r]$ و $m'_r = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i^r$ و m کوچک‌ترین

عدد طبیعی است که دستگاه معادلات دارای جواب باشد. m معمولاً برابر تعداد پارامترهای مجهول (k) است.

به تابع چگالی توأم نمونه‌ی تصادفی در صورت معلوم فرض کردن $\boldsymbol{x}$ به عنوان تابعی از $\boldsymbol{\theta}$، تابع درستنمایی می‌گوییم و آن را با $L(\boldsymbol{\theta})$ نشان می‌دهیم؛ بنابراین $L(\boldsymbol{\theta}) = f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$. به مقداری از فضای پارامتر که تابع درستنمایی را ماکسیمم نماید، **برآورد درستنمایی ماکسیمم** (MLE) می‌گوییم؛ به‌عبارتی دیگر، $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \boldsymbol{\Theta}$، برای پارامتر $\boldsymbol{\theta}$، MLE است هرگاه

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \geq L(\boldsymbol{\theta}), \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}.$$

برآوردگر $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ را برای پارامتر $\boldsymbol{\theta}$ ناااریب گوییم هرگاه

$$\mathrm{E}[\hat{\boldsymbol{\theta}}] = \boldsymbol{\theta}, \quad \forall \theta \in \boldsymbol{\Theta}.$$

یك فرضیه‌ی آماری، یک ادعا، گمان یا حدسی درباره‌ی توزیع جامعه است؛ فرضیه‌ی آماری (از این پس، فرضیه) را با H نمایش می‌دهیم که یا درست و یا نادرست است. یک مسئله‌ی آزمون فرضیه، شامل دو فرضیه $H_۰$ و $H_۱$ است که به آن‌ها به‌ترتیب فرض صفر و فرض مقابل می‌گوییم. تنها یکی از آن‌ها درست است؛ هر چند درست مطلق نباشد. با توجه به مقدار برآورد می‌توان درستی فرضیه‌های گوناگون مربوط به پارامتر مربوطه را در برابر یکدیگر آزمود. بنابراین موجه است که با توجه به مقدار برآورد پارامتر تصمیم بگیریم که فرض صفر باید رد شود یا رد نشود. به آماره‌ای که در آزمون فرضیه به‌کار برده می‌شود، **آماره‌ی آزمون** می‌گوییم. گاهی مسئله آزمون، درستی یك توزیع برای جامعه و گاهی درستی یك پارامتر برای توزیع جامعه است.

برای مثال، داروساز می‌تواند ادعای خود را در قالب مسئله‌ی آزمون فرضیه‌ی $H_۰ : p = ۰/۷$ در برابر $H_۱ : p = ۰/۹$، که در آن، p درصد بهبود یافتگان پس از مصرف دارو است، مورد بررسی قرار دهد. فرض کنید تصمیم بگیریم که یک نمونه‌ی ۱۰۰ تایی از بیماران را مورد آزمایش قرار دهیم و فرضیه‌ی $H_۰ : p = ۰/۷$ را در برابر فرضیه‌ی $H_۱ : p = ۰/۹$ هنگامی رد کنیم که تعداد بهبود یافتگان حداقل ۸۰ نفر باشد. به بیان دقیق‌تر، در این مسئله داریم: $X_۱, \ldots, X_{۱۰۰} \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Ber}(p)$، که در آن، $X_i = ۱$ اگر بیمار i ام بهبود یابد و $X_i = ۰$ اگر بیمار i ام بهبود نیابد. روشن است که تعداد بهبود یافتگان در نمونه برابر $S = \sum X_i$ است. بنابراین

فرضیه‌ی صفر در برابر فرضیه‌ی مقابل رد می‌شود هرگاه $S \geq ۸۵$؛ در این مسئله، S، آماره‌ی آزمون و دارای توزیع $\mathrm{B}(۱۰۰, p)$ است.

به زیرمجموعه‌ای از تکیه‌گاه نمونه‌ی تصادفی که منجر به رد $H_۰$ می‌شود، ناحیه‌ی بحرانی یا ناحیه‌ی رد می‌گوییم و آن را با C نمایش می‌دهیم؛ به عبارتی دیگر

$$C = \{\boldsymbol{x} : \text{با مشاهده‌ی } \boldsymbol{x}\text{، } H_۰ \text{ رد شود}\}.$$

در حالت $k = ۱$، فرض کنید $\hat{\theta}$ یک برآوردگر خوب برای θ باشد. ناحیه‌های بحرانی معمولاً به سه دسته‌ی اول، $C_۱ = \{\boldsymbol{x} : \hat{\theta} > c\}$، دوم، $C_۲ = \{\boldsymbol{x} : \hat{\theta} < c\}$ و سوم، $C_۳ = \{\boldsymbol{x} : \hat{\theta} < c_۱ \text{ یا } \hat{\theta} > c_۲,\ c_۱ < c_۲\}$ تقسیم‌بندی می‌شوند.

در هر مسئله‌ی آزمون فرضیه، ممکن است مرتکب دو نوع خطا شویم:

۱) $H_۰$ را به دلیل این که مقدار آماره‌ی آزمون در C (ناحیه‌ی بحرانی یا رد) افتاده رد کنیم در حالی که $H_۰$ درست بوده است؛ به این خطا، خطای نوع اول (I) می‌گوییم و احتمال آن را با α نشان می‌دهیم؛ به عبارتی دیگر

$$\alpha = P(\boldsymbol{X} \in C | \ H_۰ \text{ درست است}).$$

۲) $H_۰$ را به دلیل این که آماره‌ی آزمون در C' (ناحیه‌ی پذیرش) نیفتاده رد نکنیم در حالی که $H_۱$ درست بوده است. به این خطا، خطای نوع دوم (II) می‌گوییم و احتمال آن را با β نشان می‌دهیم؛ به عبارتی دیگر

$$\beta = P(\boldsymbol{X} \notin C | \ H_۱ \text{ درست است}).$$

می‌توان احتمال خطاهای نوع اول و دوم را به عنوان معیارهایی برای گزینش بین ناحیه‌های بحرانی گوناگون به‌کار برد. روشن است که تصمیمی که در آن خطا وجود ندارد، بهترین تصمیم است اما چنین تصمیمی وجود ندارد. بنابراین برای حل این مشکل، احتمال خطای نوع اول (اندازه‌ی آزمون) یا حداکثر آن (سطح آزمون) را ثابت می‌گیریم و به دنبال آزمونی با کمترین خطای نوع دوم می‌گردیم.

تمرین‌های بخش ۵.۲

۱. فرض کنید $X_۱, ... X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Ber}(p)$. برآورد روش گشتاوری p را بیابید.

۲. فرض کنید $X_۱, ... X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{G}_j(p)$، $j = ۰, ۱$. برآورد روش گشتاوری p را بیابید.

۳. $X_۱, ... X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{U}(-\theta, \theta)$، $\theta > ۰$. برآورد روش گشتاوری θ را بیابید.

۴. فرض کنید $X_۱, ... X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Ber}(p)$، $p \in [۰, ۱]$. برآورد درستنمایی ماکسیمم p را به‌دست آورید.

۵. فرض کنید $X_۱, ... X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{E}(\theta)$. برآورد درستنمایی ماکسیمم θ را به‌دست آورید.

۶. سکه‌ای با احتمال شیر p در نظر بگیرید. شخصی ادعا می‌کند که سکه ناااریب است؛ یعنی $p = \frac{۱}{۲}$. شخص دیگری ادعا می‌کند $p = \frac{۱}{۴}$. به منظور انجام این آزمون فرضیه، تصمیم می‌گیرند که سکه را تنها دو بار پرتاب کنند. مجموعه‌ی همه‌ی ناحیه‌های بحرانی ممکن را مشخص کنید و برای هر یک α و β را بیابید؛ سپس بهترین ناحیه‌ی بحرانی منصفانه که به ضرر هیچ یک از این دو نفر نباشد را بیابید.

۷. مثال داروساز را یک بار دیگر در نظر بگیرید. اگر فرض $H_۰ : p = ۰/۷$ در برابر $H_۱ : p = ۰/۹$ رد شود هرگاه حداقل ۸۰ بیمار از ۱۰۰ بیمار بهبود یابند، احتمال خطاهای نوع اول و دوم را بیابید.

۶.۲ مروری بر فرایندهای تصادفی

در این بخش به مرور مختصری از تعاریف و مفاهیم مهم فرآیندهای تصادفی و فرایندهایی ویژه با نام مارکوف و سپس به کنکاش و بررسی ویژگی‌های مورد نیاز زنجیرهای مارکوف در بررسی همگرایی‌های الگوریتم‌های شبیه‌سازی خواهیم پرداخت.

فرایند تصادفی، مجموعه یا دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X(t), t \in T\}$ است که روی یک فضای احتمال تعریف شده‌اند؛ به مجموعه‌ی T، مجموعه‌ی اندیس‌گذار یا فضای پارامتر گفته می‌شود. $X(t)$ یا X_t، حالت یا وضعیت فرایند در زمان t است. عدد حقیقی x یک حالت فرایند

$\{X_t, t \in T\}$ نامیده می‌شود اگر نقطه‌ی $t \in T$ وجود داشته باشد که برای هر $h > ۰$ داشته باشیم:

$$P(x - h < X_t < x + h) > ۰.$$

به مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌هایی که فرایند X_t می‌تواند اختیار کند، فضای حالت گفته می‌شود و با S نمایش داده می‌شود.

اگر T یک مجموعه‌ی حداکثر شمارا باشد، فرایند تصادفی را گسسته-زمان یا با زمان گسسته و در صورتی که ناشمارا باشد، پیوسته-زمان یا با زمان پیوسته می‌گوییم.

فضای حالت نیز می‌تواند پیوسته یا گسسته باشد که در این صورت فرایند را گسسته یا پیوسته می‌گوییم.

فرایند تصادفی $\{X_t, t \in T\}$ را دارای ویژگی مارکوف گوییم (یا به‌طور خلاصه، فرایند را مارکوف گوییم)، هرگاه برای هر $t_۱ < t_۲ < \ldots < t_n$ در مجموعه‌ی T داشته باشیم:

$$P\left(X_{t_n} \leq x_n | X_{t_۱} = x_۱, \ldots, X_{t_{n-۱}} = x_{n-۱}\right) = P\left(X_{t_n} \leq x_n | X_{t_{n-۱}} = x_{n-۱}\right);$$

یعنی با معلوم بودن حالت کنونی فرایند، موقعیت آینده فرایند مستقل از گذشته‌ی آن باشد. یک مثال بسیار مهم از فرایندهای مارکوف گسسته‌ی پیوسته-زمان، فرایند پواسون است که در شبیه‌سازی، کاربردهای فراوانی دارد.

تعریف ۱.۶.۲ فرض کنید فاصله‌ی زمانی بین رخدادهایی ویژه، مستقل و دارای توزیع نمایی با پارامتر θ باشد. در این صورت تعداد رخدادها در بازه‌ی زمانی $[۰, t]$ را با $N(t)$ نشان می‌دهیم و به آن **فرایند پواسون** با نرخ $\lambda = ۱/\theta$ می‌گوییم.

قضیه ۲.۶.۲ اگر $N(t)$ فرایند پواسون با نرخ λ باشد، آنگاه

الف) $N(t)$ دارای نموهای مانا است؛ یعنی $N(s) - N(t) \sim \mathrm{P}(\lambda(s-t))$، $s > t \geq ۰$؛ بنابراین $N(t) \sim \mathrm{P}(\lambda t)$، $t > ۰$؛

ب) $N(t)$ دارای نموهای مستقل است؛ یعنی تعداد رخدادها در زیربازه‌های ناهم‌پوشان، مستقل هستند.

به فرایند تصادفی مارکوف گسسته-زمان با فضای حالت گسسته، **زنجیر مارکوف گسسته** و با فضای حالت پیوسته، **زنجیر مارکوف پیوسته** می‌گوییم. زنجیر مارکوف متناهی است اگر فضای حالت آن متناهی باشد، در غیر این صورت، یعنی در صورتی که فضای حالت نامتناهی باشد، زنجیر مارکوف نامتناهی گفته می‌شود.

فرایندهایی که در فصل ۶، در شبیه‌سازی مونت‌کارلو به‌کار برده می‌شوند، زنجیرهای مارکوف با $T = \{۰, ۱, ۲, \ldots\}$ یا $T = \mathbb{Z}$ هستند.

بحث پیرامون زنجیرهای مارکوف گسسته در هر کتاب مقدماتی فرایندهای تصادفی یافت می‌شود اما در این جا تنها به مرور مطالب مهم آن در راستای مبحث شبیه‌سازی پرداخته می‌شود.

۱.۶.۲ زنجیرهای مارکوف گسسته

احتمال‌های تغییر حالت برای زنجیر مارکوف گسسته $\{X_t, t \in T\}$، چنین تعریف می‌شود:

$$p^{(m,n)}(x,y) = P(X_n = y | X_m = x), \quad \forall x, y, \quad n > m;$$

اگر این احتمال، مستقل از n و m و تنها تابعی از $n - m$ باشد، گوییم زنجیر همگن است. در این صورت $p^{(m,n)}(x,y)$ را با نماد $p^{(m-n)}(x,y)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین $p(x,y) = p^{(۱)}(x,y)$. پس می‌توان $P(X_n = y | X_{n-۱} = x)$ را به‌صورت $p(x,y)$ و $P(X_{n+m} = y | X_n = x)$ را به‌صورت $p^{(m)}(x,y)$ نوشت. توجه کنید که

$$\sum_y p^{(m)}(x,y) = ۱, \quad \forall x \in S, \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

از این پس فرض می‌شود که زنجیر همگن است.

به ماتریس $P = [p(x,y)]$، ماتریس تغییر حالت یا ماتریس احتمال انتقال تک گامی و هم‌چنین به ماتریس $P^{(m)} = [p^{(m)}(x,y)]$، ماتریس تغییر حالت یا ماتریس احتمال انتقال m گامی گفته می‌شود.

تابع چگالی X_i با نماد π_i نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi_i(x) = P(X_i = x), \quad i = ۰, ۱, \ldots;$$

هم‌چنین اگر $S = \{x_\circ, x_۱, \ldots\}$، آنگاه بُردار چگالی X_i چنین تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{\pi}_i = (\pi_i(x_\circ), \pi_i(x_۱), \ldots), \quad i = \circ, ۱, \cdots$$

با به‌کارگیری قانون جمع احتمال یا احتمال کل، معادله‌ی چپمن-کُلموگروف برای احتمال‌های انتقال به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$p^{(m+n)}(x,y) = \sum_{z\in S} p^{(m)}(x,z).p^{(n)}(z,y), \quad \forall n,m \in \mathbb{N};$$

یا با توجه به فرمول ضرب ماتریس‌ها،

$$P^{(m+n)} = P^{(m)}P^{(n)}.$$

در نتیجه

$$P^m = P^{(m)}.$$

به سادگی می‌توان نشان داد که

$$\pi_m(y) = \sum_{x\in S} \pi_{m-۱}(x)p(x,y) = \sum_{x\in S} \pi_\circ(x)p^{(m)}(x,y),$$

یا

$$\boldsymbol{\pi}_m = \boldsymbol{\pi}_{m-۱}P = \boldsymbol{\pi}_\circ P^m.$$

بنابراین منطقی است که توزیع مانای فرایند، π، به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\pi(y) = \sum_{x\in S} \pi(x)p(x,y),$$

یا $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}P$؛ چون

$$\pi(y) = \lim_{m\to\infty} \pi_m(y);$$

این معادلات را **معادلات مانای زنجیر مارکوف** می‌نامیم.

می‌توان نشان داد که اگر $\pi_\circ = \pi$، آنگاه $\pi_m = \pi$ برای هر $m \in \mathbb{N}$.

فرض کنید $f^{(k)}(x,y) = P(T_y = k \mid X_\circ = x)$ که در آن T_y زمان اصابت فرایند به حالت y است. $f^{(k)}(x,y)$ نمایانگر احتمال آن است که فرایند از حالت x آغاز شود و پس از k گام، نخستین بار به حالت y برسد. روشن است که احتمال این که فرایند با آغاز از x در مدت زمان متناهی به y برسد، برابر $f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(x,y)$ است. میانگین تعداد گام‌ها برای رسیدن به حالت x با آغاز از x، برابر $m_x = E_x[T_x]$ است.

اگر $f(x,x) = 1$، در این صورت حالت x را بازگشتی و در صورتی که $f(x,x) < 1$، گذرا می‌گوییم. اگر x بازگشتی باشد و هم‌چنین $m_x < \infty$، آنگاه x را بازگشتی مثبت یا ارگودیک و در صورتی که $m_x = \infty$، بازگشتی پوچ می‌گوییم.

فرایند را تحویل‌ناپذیر گوییم هرگاه فرایند بتواند از هر حالت به هر حالت دیگر برود؛ در این صورت می‌گوییم همه‌ی حالت‌ها در دسترس همدیگر هستند. روشن است که اگر فرایند تحویل‌ناپذیر باشد، آنگاه فضای حالت آن یک دسته‌ی هم ارزی است و همه‌ی حالت‌ها از نظر بازگشتی و یا گذرا بودن مانند هم می‌شوند.

حالت x را دوره‌ای با دوره‌ی d_x گوییم هرگاه ب.م.م تعداد گام‌هایی که می‌توان با آغاز از x به x رسید، برابر d_x باشد. اگر $d_x = 1$، آنگاه حالت x را نادوره‌ای می‌گوییم. زنجیر را نادوره‌ای گوییم هرگاه همه‌ی حالت‌های آن نادوره‌ای باشد.

قضیه‌ی زیر به‌عنوان یکی از مهمترین قضایای همگرایی در زنجیرهای مارکوف مورد توجه است:

قضیه ۳.۶.۲ اگر X_n زنجیری تحویل‌ناپذیر، نادوره‌ای و بازگشتی مثبت باشد، آنگاه دارای توزیع مانای π است به‌طوری که

$$\lim_{m\to\infty} p^{(m)}(x,y) = \pi(y).$$

مثال ۴.۶.۲ فرایند دو حالتی مربوط به وضع هوای یک سرزمین را با دو حالت بارانی (R) و غیربارانی (NR) در نظر بگیرید. شرایط وجود توزیع مانای فرایند را بیابید.

حل. فرض کنید وضعیت هوا در روز nام را با X_n و حالت‌های بارانی و غیربارانی را به‌ترتیب با اعداد ۱ و ۲ نشان دهیم. در این صورت $S = \{۱, ۲\}$. بنابراین ماتریس احتمال انتقال تک گامی آن به‌صورت زیر است:

$$\begin{array}{c|cc} & \mathrm{R} & \mathrm{NR} \\ \hline \mathrm{R} & ۱-\alpha & \alpha \\ \mathrm{NR} & \beta & ۱-\beta \end{array}$$

عناصر ماتریس، احتمال بارانی یا غیربارانی بودن هوا را به شرط حالت هوای روز پیشین نشان می‌دهند. در این جا زنجیر مارکوف همگن است، زیرا این احتمال‌ها وابسته به این که در چه روزی بوده‌ایم، نیستند. به‌سادگی ثابت می‌شود که اگر $۱ > \alpha > ۰$ و $۱ > \beta > ۰$، آنگاه زنجیر تحویل‌ناپذیر، نادوره‌ای و بازگشتی مثبت و دارای توزیع مانای زیر می‌شود:

$$\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right).$$

به‌عنوان نمونه، در صورتی که $\alpha = ۰/۳$ و $\beta = ۰/۴$، آنگاه

$$P^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۰/۶۱ & ۰/۳۹ \\ ۰/۵۲ & ۰/۴۸ \end{bmatrix}, P^{(۳)} = \begin{bmatrix} ۰/۵۸۳ & ۰/۴۱۷ \\ ۰/۵۵۶ & ۰/۴۴۴ \end{bmatrix},$$
$$P^{(۴)} = \begin{bmatrix} ۰/۵۷۵ & ۰/۴۲۵ \\ ۰/۵۶۷ & ۰/۴۳۳ \end{bmatrix}.$$

دقت کنید که سطرهای $P^{(۴)}$ به‌طور تقریبی برابر بُردار توزیع مانا یعنی $\boldsymbol{\pi} = (۰/۵۷۱, ۰/۴۲۹)$ است. $\triangle$

مثال ۵.۶.۲ سرزمینی دارای سه نوع آب و هوای گوناگون بارانی (R)، برفی (S) و آفتابی (N) است. فرض کنید ماتریس احتمال انتقال آن به‌صورت زیر باشد:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{R} & \text{S} & \text{N} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{R} \\ \text{S} \\ \text{N} \end{array} & \begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰/۲۵ & ۰/۲۵ \\ ۰/۵ & ۰ & ۰/۵ \\ ۰/۲۵ & ۰/۲۵ & ۰/۵ \end{bmatrix} \end{array}.$$

توزیع حالت هوای روز ششم و در درازمدت را بیابید.

حل. فرض کنید وضعیت هوا در روز nام را با X_n و حالت‌های بارانی، برفی و آفتابی را به‌ترتیب با اعداد ۱، ۲ و ۳ نشان دهیم. در این صورت $S = \{۱, ۲, ۳\}$. بنابراین چنان که گفتیم

$$\pi_n = \pi_{n-۱} P, \quad n = ۱, ۲, \cdots$$

فرض کنید با یک روز برفی آغاز نماییم؛ یعنی $P(X_۰ = ۲) = ۱$. داریم:

$$\begin{aligned} \pi_۱ &= (۰/۵, ۰, ۰/۵) \\ \pi_۲ &= (۰/۳۷۵, ۰/۲۵, ۰/۳۷۵) \\ \pi_۳ &= (۰/۴۰۶, ۰/۱۹۸, ۰/۴۰۶) \\ \pi_۴ &= (۰/۳۹۸, ۰/۲۰۴, ۰/۳۹۸) \\ \pi_۵ &= (۰/۴۰۰, ۰/۲۰۰, ۰/۴۰۰) \\ \pi_۶ &= (۰/۴۰۰, ۰/۲۰۰, ۰/۴۰۰) \\ &\vdots \end{aligned}$$

اگر با یک روز بارانی یا آفتابی نیز آغاز نماییم، خواهیم داشت:

$$\pi_6 = (0/400, 0/200, 0/400).$$

بنابراین درمی‌یابیم که در درازمدت، بدون در نظر گرفتن این که هوای روز اول چگونه بوده است، هوای ۴۰ درصد از روزها بارانی، ۲۰ درصد از روزها برفی و ۴۰ درصد از روزها آفتابی است. بنابراین بُردار $\pi = (0/4, 0/2, 0/4)$، توزیع مانای زنجیر است؛ با حل معادلات مانایی نیز به همین پاسخ می‌رسیم. $\triangle$

مثال ۶.۶.۲ فرض کنید X_n نشان‌دهنده‌ی تعداد شیرهای دیده شده در n پرتاب مستقل سکه‌ای با احتمال شیر p، $0 < p < 1$ باشد. ماتریس احتمال انتقال تک گامی زنجیر را بیابید. در مورد توزیع مانای آن چه می‌توان گفت؟

حل. داریم $S = \{0, 1, \ldots\}$. همچنین

$$p(x,y) = P(X_n = y | X_{n-1} = x) = \begin{cases} q & y = x \\ p & y = x+1 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

بنابراین

$$P = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & p & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \end{bmatrix}.$$

این فرایند به شرط $0 < p < 1$، تحویل‌ناپذیر اما گذرا است و بنابراین توزیع مانا وجود ندارد. با توجه به تعریف فرایند نیز این موضوع روشن است؛ چون فرایند افزایشی است و به هیچ

عنوان به نقاط پیشین باز نمی‌گردد.

برای درک بهتر، فرض کنید $\pi_0 = (1, 0, \ldots)$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= (q, p, \ldots) \\
\pi_2 &= (q^2, 2pq, p^2, \ldots) \\
\pi_3 &= (q^3, 3q^2p, 3qp^2, p^3, \ldots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

درنتیجه π_n برداری است که $n+1$ مولفه‌ی نخست آن جملات بسط دوجمله‌ای $(q+p)^n$ و بقیه‌ی جملات آن صفر است اما چون $0 < p < 1$، با افزایش n، احتمال قرار گرفتن در هر وضعیت به صفر میل می‌کند؛ یعنی $\pi_n \to (0, 0, \ldots)$ که یک تابع چگالی احتمال نیست. △

تعریف ۷.۶.۲ فرض کنید $\{X_n\}$ یک زنجیر مارکوف با تابع چگالی احتمال انتقال $p(x,y)$ باشد. هم‌چنین فرض کنید تابع چگالی π موجود باشد که در رابطه‌ی

$$\pi(y)p(y,x) = \pi(x)p(x,y), \quad \forall x, y \in S. \tag{1.2}$$

صدق کند. در این صورت $\{X_n\}$ وارون‌پذیر در زمان متناظر با تابع چگالی π گفته می‌شود.

قضیه ۸.۶.۲ وارون‌پذیری یک زنجیر مارکوف در زمان، دارا بودن توزیع مانا برای زنجیر را نتیجه می‌دهد.

اثبات. داریم:

$$\sum_x \pi(x)p(x,y) = \sum_x \pi(y)p(y,x) = \pi(y)\sum_x p(y,x) = \pi(y);$$

و در نتیجه حکم ثابت می‌شود. □

توجه کنید که شرط وارون‌پذیری در زمان، شرط قوی‌تری نسبت به دارا بودن توزیع مانا است.

۲.۶.۲ زنجیرهای مارکوف پیوسته

چنان که گفتیم یک زنجیر مارکوف پیوسته، فرایند مارکوفی است که دارای مجموعه‌ی اندیس‌گذار گسسته‌ی T و فضای حالت پیوسته‌ی S است. مباحث مربوط به زنجیرهای مارکوف پیوسته، بسیار شبیه به مباحث زنجیرهای مارکوف گسسته است؛ کافی است برخی مفاهیم در حالت پیوسته تعدیل و بازنویسی شود.

نظریه‌ی زنجیرهای مارکوف پیوسته بر پایه‌ی **تابع هسته‌ی انتقال** $P(x, A)$ استوار است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(x, A) = P(X_n \in A \mid X_{n-1} = x);$$

این تابع، یک توزیع احتمال شرطی است و بیانگر احتمال تغییر حالت زنجیر به مجموعه‌ی A است به شرط آن که در گام پیشین در حالت x قرار داشته است. روشن است که $P(x, \mathbb{R}) = 1$.

مشتق $P(x, (-\infty, y])$ نسبت به y را با $p(x, y)$ نشان می‌دهیم و به آن، تابع چگالی احتمال انتقال تک گامی می‌گوییم. روشن است که

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dy = 1, \quad \forall x \in S.$$

تابع چگالی احتمال انتقال m گامی از نقطه‌ی x به y را با نماد $p^{(m)}(x, y)$ نمایش می‌دهیم که برای هر $m \geq 1$، در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^{(m)}(x, y)dy = 1, \quad \forall x \in S.$$

معادله‌ی چپمن-کُلموگروف برای این زنجیر چنین است:

$$p^{(m+n)}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} p^{(m)}(x,z)p^{(n)}(z,y)dz, \quad \forall m,n \in \mathbb{N}.$$

به شباهت این رابطه‌ها و رابطه‌های متناظر برای زنجیر مارکوف گسسته توجه کنید.

موضوع مهمی که در نظریه‌ی زنجیرهای مارکوف پیوسته نیز مطرح می‌شود، یافتن شرایطی است که تحت آن شرایط، توزیع مانای π وجود داشته باشد، به‌طوری که فرایند با تابع هسته‌ی احتمال انتقال p در درازمدت به این توزیع همگرا شود. در این حالت، توزیع مانای π باید در شرط زیر صدق کند:

$$\pi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(x)p(x,y)dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

همانند زنجیرهای مارکوف گسسته می‌توان نشان داد که اگر $p(x,y)$ دارای شرط وارون‌پذیری در زمان باشد، یعنی برای هر زوج (x,y) داشته باشیم:

$$\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x), \tag{۲.۲}$$

آنگاه توزیع مانا وجود دارد و توزیع X_n به آن میل می‌کند؛ این رابطه، ویرایش پیوسته‌ی رابطه‌ی (۱.۲) است.

روش متروپولیس-هستینگس[۴] که در فصل ۵ معرفی خواهد شد، با فرض داشتن چگالی π، در حقیقت، روشی برای یافتن زنجیری وارون‌پذیر در زمان با تابع چگالی انتقال $p(x,y)$ رابطه‌ی (۱.۲) یا $p(x,y)$ رابطه‌ی (۲.۲) است و در این صورت، برای شبیه‌سازی مقداری تصادفی از چگالی π، مقداری تصادفی از این زنجیر در درازمدت تولید می‌شود.

تمرین‌های بخش ۶.۲

۱. فرض کنید مشتری‌ها بر اساس فرایند پواسون، با آهنگ ۳۰ مشتری در هر ساعت وارد

[۴] Metropolis-Hastings

یک مغازه‌ی شیرینی‌پزی شوند. احتمال این که پیش از وارد شدن هر دو مشتری بعد، ۵ دقیقه زمان بگذرد، چقدر است؟

۲. فرض کنید $N_۱(t)$ و $N_۲(t)$ دو فرایند پواسون مستقل به‌ترتیب با نرخ‌های $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ باشند. نشان دهید که $N_۱(t) + N_۲(t)$ یک فرایند پواسون با نرخ $\lambda_۱ + \lambda_۲$ است.

۳. فرض کنید فرایند پواسون $N(t)$ با نرخ λ، با احتمال‌های p و $q = ۱ - p$ به دو شاخه تقسیم شود. نشان دهید که فرایندهای این دو شاخه نیز پواسون با نرخ‌های λp و λq هستند.

۴. نشان دهید زنجیرهای مارکوف مثال‌های ۴.۶.۲ و ۵.۶.۲ وارون‌پذیر در زمان هستند.

تمرین‌های دوره‌ای فصل ۲

۱. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل و دارای توزیع نمایی با میانگین θ باشند. نشان دهید که

$$X|X+Y=z \sim \mathrm{U}(\circ, z).$$

۲. گوییم متغیر تصادفی نامنفی X دارای ویژگی بی‌حافظگی است هرگاه برای هر t و s مثبت داشته باشیم:

$$P(X>t+s|X>s)=P(X>t).$$

الف) نشان دهید که توزیع‌های $\mathrm{G}_۱(p)$ و $\mathrm{E}(\theta)$ دارای ویژگی بی‌حافظگی هستند؛

ب) آیا توزیع $\mathrm{G}_\circ(p)$ دارای ویژگی بی‌حافظگی است؟ چرا؟

۳. فرض کنید $X \sim \mathrm{E}(\theta)$. نشان دهید:

الف) $\mathrm{E}[X]=\theta$؛

ب) $\mathrm{Var}(X)=\theta^۲$.

۴. فرض کنید X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و $\sigma^۲$ باشد. نشان دهید:

الف) $\mathrm{E}[X]=\mu$؛

ب) $\mathrm{Var}[X]=\sigma^۲$.

۵. فرض کنید $X \sim \mathrm{B}(n,p)$. نشان دهید:

$$\frac{X-np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathrm{N}(\circ, ۱),$$

هنگامی که $n \to \infty$.

۶. نشان دهید که برای هر x، اگر $n \to \infty$، آنگاه

$$\frac{F_n(x)-F(x)}{\sqrt{\frac{F(x)\bar{F}(x)}{n}}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathrm{N}(\circ, ۱),$$

که در آن، $\bar{F}(x) = ۱ - F(x)$.

۷. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل نمایی با میانگین‌های $\theta_۱$ و $\theta_۲$ باشند.
الف) نشان دهید که $\min(X, Y)$ دارای نمایی است؛ این حکم را تعمیم دهید.
ب) آیا $\max(X, Y)$ نیز دارای توزیع نمایی است؟ چرا؟

۸. فرمول میانگین و واریانس توزیع بتا را ثابت کنید.

۹. ثابت کنید که اگر $X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(۰, ۱)$، آنگاه $X + Y \sim \mathrm{Tri}(۰, ۱, ۲)$.

۱۰. فرض کنید $Z \sim \mathrm{N}(۰, ۱)$ و $Y \sim \chi^۲(\nu)$. اگر Z و Y مستقل باشند، آنگاه گوییم $T = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}$ دارای توزیع t با ν درجه‌ی آزادی است و می‌نویسیم: $T \sim \mathrm{t}(\nu)$. نشان دهید که
الف) $\mathrm{E}[T] = ۰$ برای هر $۱ < \nu$؛
ب) $\mathrm{Var}[T] = \frac{\nu}{\nu - ۲}$ برای هر $۲ < \nu$.

۱۱. فرض کنید $Y_۱ \sim \chi^۲(\nu_۱)$ و $Y_۲ \sim \chi^۲(\nu_۲)$. اگر $Y_۱$ و $Y_۲$ مستقل باشند، آنگاه گوییم $F = \frac{Y_۱/\nu_۱}{Y_۲/\nu_۲}$ دارای توزیع F با $\nu_۱$ و $\nu_۲$ درجه‌ی آزادی است و می‌نویسیم: $F \sim \mathrm{F}(\nu_۱, \nu_۲)$. نشان دهید که
الف) $\mathrm{E}[F] = \frac{\nu_۲}{\nu_۲ - ۲}$ برای هر $۲ < \nu_۲$؛
ب) $\mathrm{Var}[F] = \frac{۲\nu_۲^۲(\nu_۱ + \nu_۲ - ۲)}{\nu_۱(\nu_۲ - ۲)^۲(\nu_۲ - ۴)}$ برای هر $۴ < \nu_۲$.

۱۲. نشان دهید که اگر $X \sim \mathrm{U}(-\pi/۲, \pi/۲)$، آنگاه $\tan X \sim \mathrm{C}(۰, ۱)$.

۱۳. فرض کنید $Z_۱ \sim \mathrm{N}(۰, ۱)$ و $Z_۲ \sim \mathrm{N}(۰, ۱)$. نشان دهید که اگر $Z_۱$ و $Z_۲$ مستقل باشند، آنگاه

$$\frac{Z_۱}{Z_۲} \overset{d}{=} \frac{Z_۱}{|Z_۲|} \sim \mathrm{C}(۰, ۱).$$

۱۴. چندک راست مرتبه‌ی αام، $۰ < \alpha < ۱$، مربوط به متغیر تصادفی X را با x_α نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم:

$$P(X < x_\alpha) \leq ۱ - \alpha \leq P(X \leq x_\alpha).$$

روشن است که برای توزیع‌های پیوسته، x_α از رابطه‌ی ساده‌ی $P(X \leq x_\alpha) = ۱ - \alpha$ به‌دست می‌آید. بر این اساس، چندک توزیع‌های نرمال استاندارد، t با ν درجه‌ی آزادی، خی‌دو با ν درجه‌ی آزادی و F با درجه‌های آزادی $\nu_۱$ و $\nu_۲$ به‌ترتیب با نمادهای z_α، $\mathrm{t}_\alpha(\nu)$، $\chi^۲_\alpha(\nu)$ و $\mathrm{F}_\alpha(\nu_۱, \nu_۲)$ نشان داده می‌شود. ثابت کنید

الف) $z_{۱-\alpha} = -z_\alpha$؛

ب) $\mathrm{t}_{۱-\alpha}(\nu) = -\mathrm{t}_\alpha(\nu)$؛

پ) $\mathrm{F}_{۱-\alpha}(\nu_۱, \nu_۲) = ۱/\mathrm{F}_\alpha(\nu_۲, \nu_۱)$؛

ت) رابطه‌ی $\chi^۲_{۱-\alpha}(\nu) = -\chi^۲_\alpha(\nu)$ نادرست است.

۱۵. فرض کنید $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^۲)$. نشان دهید که اگر $P(a < X < b) = ۱ - \alpha$ و $\mu - a = b - \mu$، آنگاه $b = -a = z_{\alpha/۲}$.

۱۶. فرض کنید تابع چگالی احتمال توأم X و Y به‌صورت زیر باشد:

$$f(x,y) = ۲\exp[-(x + ۲y)], \quad x > ۰, y > ۰.$$

الف) آیا X و Y مستقل هستند؟ چرا؟

ب) $P(X < Y)$ را بیابید.

۱۷. فرض کنید تابع چگالی احتمال X چنین باشد:

$$f(x) = ce^x, \quad ۰ < x < ۱.$$

c، $\mathrm{E}[X]$ و $\mathrm{Var}[X]$ را بیابید.

۱۸. برای متغیرهای تصادفی مستقل $X_۱$ و $X_۲$ که دارای توزیع نمایی با میانگین یک هستند، $P(X_۱ + X_۲ > ۲)$ را محاسبه کنید.

۱۹. فرض کنید $X_۱, \ldots X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \Gamma(\alpha, \beta)$. برآوردهای روش گشتاوری α و β را بیابید.

۲۰. فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(۰, \theta)$. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی θ را به‌دست آورید.

۲۱. $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. در سه حالت زیر برآوردهای درستنمایی ماکسیمم پارامترهای مجهول را بیابید:
الف) μ مجهول و σ^2 معلوم؛
ب) μ معلوم و σ^2 مجهول؛
پ) μ و σ^2 هر دو مجهول.

۲۲. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$، که در آن σ^2 مقدار معلومی است. می‌خواهیم فرضیه‌ی $H_0 : \mu = \mu_0$ را در برابر $H_1 : \mu = \mu_1$ با شرط $\mu_1 > \mu_0$ بیازماییم. برای این آزمون،
الف) یک ناحیه‌ی بحرانی منطقی با اندازه‌ی α بیابید.
ب) کوچکترین اندازه‌ی نمونه برای داشتن خطای نوع دوم برابر با مقدار معلوم β را بیابید.
پ) فرض کنید

$$\mu_0 = 10, \quad \mu_1 = 11, \quad \sigma^2 = 1, \quad \alpha = \beta = 0/05.$$

ناحیه‌ی بحرانی و کوچکترین اندازه‌ی نمونه را برای این آزمون بیابید.

۲۳. درصد بیماران ایدزی یک شهر در هر ماه متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = c(1 - x), \quad 0 < x < 1,$$

که در آن c، مقدار ثابتی است.
الف) c را بیابید؛
ب) احتمال این که در ماه آینده درصد بیماران ایدزی این شهر حداکثر ۲۰ درصد باشد، چقدر است؟
پ) میانگین و واریانس درصد بیماران ایدزی این شهر را بیابید.

۲۴. فرض کنید X، میزان آب سیب طبیعی موجود در یک ۱۰۰ سی‌سی شربت سیب باشد که بر حسب سی‌سی دارای توزیع $\mathrm{Tri}(30, 40, 60)$ است.
الف) احتمال این که در ۱۰۰ سی‌سی شربت، بیش از ۴۰ سی‌سی آب سیب طبیعی باشد، چقدر است؟

ب) میانگین و واریانس میزان آب سیب طبیعی در ۱۰۰ سی‌سی شربت چقدر است؟

۲۵. ظرفی دارای ۴ توپ سفید و ۶ توپ سیاه است. از این ظرف ۴ توپ به تصادف انتخاب می‌کنیم. فرض کنید X، تعداد توپ‌های سفید انتخاب شده در نمونه باشد. اکنون توپ دیگری را از بین ۶ توپ باقی مانده در ظرف انتخاب می‌کنیم. اگر این توپ سفید باشد، متغیر تصادفی Y را ۱ و در غیر این صورت ۰ در نظر می‌گیریم. محاسبه کنید:

الف) $\mathrm{E}[Y|X=۲]$؛

ب) $\mathrm{E}[X|Y=۱]$؛

پ) $\mathrm{Var}[Y|X=۰]$؛

ت) $\mathrm{Var}[X|Y=۱]$.

۲۶. زمان رسیدن یک اتوبوس به یک ایستگاه، دارای توزیع یکنواخت بین ساعت ۰۰ : ۹ تا ۳۰ : ۹ صبح است. اگر درست ساعت ۹ به این ایستگاه برسیم، احتمال این که بین ۵ تا ۱۵ دقیقه منتظر بمانیم، چقدر است؟

۲۷. A، B و C وارد بانکی می‌شوند که دارای ۲ تحویل‌دار است. A و B هر کدام به یک تحویل‌دار مراجعه کرده و C منتظر می‌ماند. اگر زمان خدمت‌دهی به مشتریان دارای توزیع نمایی با پارامتر θ باشد. احتمال این که C آخرین فردی باشد که بانک را ترک می‌کند، چقدر است؟

۲۸. تعداد سونامی‌های حادثه‌خیز سالانه‌ی آسیای شرقی، توزیع پواسون با میانگین ۰/۸ دارد.

الف) احتمال این که در آسیای شرقی در سال آینده بیش از دو سونامی بیاید، چقدر است؟

ب) احتمال این که در آسیای شرقی در سال آینده دست‌کم دو سونامی بیاید، چقدر است؟

۲۹. مراجعات به یک باجه‌ی بانک، توزیع پواسون با آهنگ ۱/۲ در هر دقیقه دارد.

الف) احتمال صفر ورود در دقیقه‌ی بعد چقدر است؟

ب)احتمال صفر ورود در دو دقیقه بعد چقدر است؟

۳۰. عمر ماهواره ای که در مدار قرار داده می‌شود، دارای توزیع نمایی با میانگین ۲/۵ سال است.

الف) احتمال این که یک ماهواره پس از پنج سال هنوز کار کند، چقدر است؟

ب) احتمال این که بین ۳ و ۶ سال از زمان قرارگرفتن در مدار، ماهواره از بین برود، چقدر است؟

۳۱. در تولید بلبرینگ، با احتمال ۰٫۰۱ حباب یا تولرانس ناروا ایجاد می‌شود که در این صورت، بلبرینگ دارای یک یا هر دوی این نقص‌ها می‌شود. احتمال این که یک نمونه ۴۰۰۰ تایی کمتر از ۳ بلبرینگ با حباب یا تولرانس ناروا داشته باشد، چقدر است؟

۳۲. آموزگاری در هر امتحان شش مسأله می‌دهد. هر مسأله به‌طور متوسط نیاز به ۳۰ دقیقه وقت نمره‌دهی برای تمام کلاس ۱۵ نفره دارد. مدت زمان نمره‌دهی به هر مسأله توزیع نمایی دارد و مسائل از یکدیگر مستقل هستند.
الف) احتمال این که آموزگار کار نمره‌دهی به همه‌ی سوال‌ها را حداکثر در ۲٫۵ ساعت پایان دهد، چقدر است؟
ب) محتملترین مدت زمان نمره‌دهی را بیابید.
پ) امید ریاضی و واریانس مدت زمان نمره‌دهی چقدر است؟

۳۳. هواپیمایی سیستم دوگانه هیدرولیک دارد. اگر سیستم اول از کار باز بماند، هواپیما به‌طور خودکار به سیستم آماده به کار منتقل می‌شود. اگر هر دو سیستم از کار باز بماند هواپیما سقوط می‌کند. فرض کنید که عمر سیستم هیدرولیک توزیع نمایی با میانگین ۲۰۰۰ ساعت هوایی دارد.
الف) اگر سیستم‌های هیدرولیک هر ۲۰۰۰ ساعت بازرسی شوند، احتمال سقوط هواپیما پیش از آن زمان چقدر است؟
ب)انتقال نقطه‌ی بازرسی به ۳۰۰۰ ساعت چه خطری دربر دارد؟

۳۴. توزیع ضریب هوشی در سطح جامعه، دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۰۰ و انحراف معیار ۱۵ است.
الف) به شخصی که ضریب هوشی ۱۴۰ یا بالاتر دارد، «نابغه» می‌گویند. چه نسبتی از جامعه، نابغه هستند؟
ب) چه نسبتی از افراد جامعه با پنج امتیاز یا کمتر، از قرارگرفتن در رده نابغه‌ها محروم می‌شوند؟
پ) به منظور راهیابی به دانشگاه، نیاز به ضریب هوشی ۱۱۰ یا بیشتر است. چه نسبتی از جامعه ممکن است براساس نمره‌ی ضعیف ضریب هوشی از تحصیلات دانشگاهی کنار گذاشته شوند؟

۳۵. سه شافت ساخته و در یک اتصال، پشت سر هم مونتاژ می‌شود. توزیع طول شافت‌ها مستقل و برحسب سانتی‌متر چنین است:

$$X_1 \sim N(۴۰, ۰/۰۴), \quad X_2 \sim N(۵۰, ۰/۰۹), \quad X_3 \sim N(۶۰, ۰/۱۶).$$

الف) توزیع اتصال را معین کنید؛
ب) احتمال این که طول اتصال از ۱۵۰/۲ سانتیمتر بلندتر باشد، چقدر است؟
پ) حدود مشخصات فنی (تولرانس) مونتاژ (۱۴۹/۸۳, ۱۵۰/۲۱) است. چه نسبتی از اتصال‌های مونتاژ شده درون حدود مشخصات فنی قرار می‌گیرند؟

۳۶. فرآیند پواسونی را در نظر بگیرید که در آن، پیشامدها در هر یک ساعت با نرخ ۰/۳ رخ می‌دهند. احتمال این که در بین ساعت ۱۰ بامداد تا ۲ پس‌ازنیمروز، هیچ پیشامدی رخ ندهد، چقدر است؟