Teoria da Computação

Unidade 3 – Máquinas Universais

Referência – Teoria da Computação (Divério, 2000)

Teoria da Computação

Objetivos

- **Definir o que a teoria estuda e suas limitações**

  Definir o que a teoria estuda é definir o que é computável

  Utilizando Modelos formais:

  - Caracterizam em nível conceitual: programas, máquinas e enfim a computação;
  - Especificam o que é computável ou não: o mais famoso é a **Máquina de Turing**

Teoria da Computação

Máquina de Turing: modelo construído com circuitos digitais

http://www.youtube.com/watch?v=E3keLeMwfHY

Teoria da Computação

- Conceitos iniciais...

Máquinas Universais

- Algoritmo
  - É uma forma de descrever se determinada propriedade é verificada ou não a partir de uma classe de entrada

Máquinas Universais

- Noção intuitiva de algoritmo
  - Sua descrição deve ser finita e não-ambígua
  - Deve consistir de passos discretos, executáveis em tempo finito
  - Limitações de tempo ou espaço podem determinar se um algoritmo pode ou não ser utilizado na prática
  - É necessário definir a máquina a ser considerada

Máquinas Universais

- Máquinas – devem ser:
  - Simples: permite estabelecer conclusões gerais sobre a classe de funções computáveis
  - Poderosa: capaz de simular qualquer característica de máquinas reais ou teóricas, de tal forma que os resultados provados sejam válidos para modelos aparentemente com mais recursos.

Máquinas Universais

- Máquina Universal - conceito
  - Uma máquina é dita universal se ela for capaz de representar qualquer algoritmo como um programa

Máquinas Universais

- As evidências que permitem caracterizar uma máquina como universal:
  - Evidência Interna: Qualquer extensão das capacidades da máquina universal, computa, no máximo, a mesma classe de funções, ou seja, não aumenta o seu poder computacional
  - Evidência Externa: Consiste no exame de outros modelos que definem a noção de algoritmo, juntamente com a prova de que são, no máximo, computacionalmente equivalentes.

Máquinas Universais

- Máquina Universal – modelos a serem estudados
  1. Máquina Norma
  2. Máquina de Turing
  3. Máquina de Post
  4. Máquina com Pilhas

Máquinas Universais

- **1.** Máquina Norma
  - Conjunto de registradores naturais e somente três operações sobre eles
    - **Adição** e **subtração** do valor um no registrados
    - **Teste** se o valor armazenado no registrador é zero

Máquina Norma

- Definida por Richard Bird em 1976
- **Norma** - **N**umber The**o**retic **R**egister **Ma**chine – **nome da esposa dele**
- A Máquina Universal Norma possui como memória um conjunto infinito de registradores naturais e três instruções sobre cada registrador: adição e subtração (se 0, continua com 0) do valor um e teste se o valor armazenado é zero.
- Para evitar subscritos, os registradores são denotadas por letras maiúsculas como A, B, X, Y, ...

Máquina Norma

$$Norma = (N^\infty, X, Y, ent, sai, \{ ad_K, sub_K \}, \{ zero_K \})$$

onde:

- Cada elemento do conjunto de valores de memória N^∞ denota uma configuração de seus infinitos registradores, os quais são denotados por: A, B, ..., X, Y

- A função de entrada: $ent: N \to N^\infty$ carrega no registrador denotado por X o valor de entrada, iniciando todos os demais registradores com zero;

Máquina Norma

$Norma = (N^{\infty}, N, N, ent, sai, \{ ad_K, sub_K \}, \{ zero_K \})$

- A função de saída: sai: $N^{\infty} \rightarrow N$ é tal que retorna o valor corrente do registrador denotado por Y;

- O conjunto de interpretações de operações é uma família de operações indexada pelos registradores, na qual, para cada registrador $K \in \{ A, B, X, Y,... \}$, tem-se que:
  - ad_K: $N^{\infty} \rightarrow N^{\infty}$ adiciona um à componente correspondente ao registrador K, deixando as demais com seus valores inalterados. K:=K+1

Máquina Norma

$Norma = (N^{\infty}, N, N, ent, sai, \{ ad_K, sub_K \}, \{ zero_K \})$

- O conjunto de interpretações de operações é uma família de operações indexada pelos registradores, na qual, para cada registrador $K \in \{ A, B, X, Y, ... \}$, tem-se que:
  - sub_K: $N^{\infty} \rightarrow N^{\infty}$ subtrai um da componente correspondente ao registrador K, se o seu valor for maior que zero (caso contrário, mantém o valor zero), deixando as demais com seus valores inalterados. $K:=K-1$

- O conjunto de interpretações de testes é indexada pelos registradores na qual, para cada registrador K, tem-se que:
  - $zero_K$: $N^{\infty} \rightarrow \{ verdadeiro, falso \}$ resulta em verdadeiro, se a componente correspondente ao registrador K for zero e em falso, caso contrário. $K=0$?

Máquina Norma

- É uma máquina extremamente simples, e o seu poder computacional é, no mínimo, o de qualquer computador moderno

- Características de máquinas reais são simuladas usando a Máquina Norma, reforçando as evidências de que se trata de uma máquina universal.

Máquina Norma

Simulações suportadas

a) Operações e Testes: Definição de operações e testes mais complexos como adição, subtração, multiplicação e divisão de dois valores e tratamento de valores diversos como os números primos;

b) Valores Numéricos: Armazenamento e tratamento de valores numéricos de diversos tipos como inteiros (negativos e não-negativos) e racionais;

c) Dados Estruturados: Armazenamento e tratamento de dados estruturados como em arranjos (vetores uni e multidimensionais), pilhas, etc;

d) Endereçamento Indireto e recursão: Desvio para uma instrução determinada pelo conteúdo de um registrador;

Máquina Norma

a) Operações e Testes

- Atribuição do Valor Zero a um Registrador (A:=0)
  - Programa Iterativo

$\boxed{A := 0}$

até $A = 0$
faça $(A := A - 1)$

  - Representada pela macro $A := 0$
  - Usando a macro $A := 0$, é fácil construir macros para definir operações de atribuição de um valor qualquer.

Máquina Norma

- Atribuição de um Valor Natural a um Registrador (macro: A:=n)
  - Programa Iterativo (para n=3)

$\boxed{A := n}$

```
A := 0;
A := A+1;
A := A+1;
A := A+1
```

Máquina Norma

- Adição de Dois Registradores

(macro: A:=A+B)

- Programa Iterativo

$\boxed{A := A + B}$

até **B = 0**
faça **(A:=A+1; B:=B-1)**

- Observe que, ao somar o valor de B em A, o registrador B é zerado!

Máquina Norma

- Adição de Dois Registradores Preservando o Conteúdo (B) (macro: A := A + B usando C)
  - Programa Iterativo

A := A + B usando C

```
C := 0;
até     B = 0
faça    (A := A + 1; C := C + 1; B := B - 1);
até     C = 0
faça    (B := B + 1; C := C - 1)
```

Máquina Norma

- Atribuição do Conteúdo de um Registrador (macro: A := B usando C)
  - Programa Iterativo

A := B usando C

```
A := 0;
A := A + B usando C
```

  - B permanece inalterado após a atribuição

Máquina Norma

- Multiplicação de Dois Registradores

(macro: A := A x B usando C, D)

  - Programa Iterativo

A := A x B usando C, D

```
C := 0;
até      A = 0
faça     (C := C + 1; A := A - 1);
até      C = 0
faça     (A := A + B usando D; C := C - 1)
```

Máquina Norma

b) Valores Numéricos

- Os tipos de dados não definidos na Norma:
  - inteiros (negativos e positivos)
  - racionais

Máquina Norma

- Inteiros
  - Um valor inteiro m pode ser representado como um par (s, |m|), onde:
    - |m| denota magnitude dada pelo valor absoluto de m;
    - s denota o sinal de m: se m < 0, então s = 1 (negativo) senão s = 0 (positivo)

Máquina Norma

- Inteiros
  - Supondo que o registrador inteiro A é representado pelo par (A_1, A_2) na representação conhecida como *sinal-magnitude*, ou seja, A1 (sinal) e A2 (magnitude).
  - Programa em Norma para executar a operação A := A+1
  - Programa Iterativo

A := A+1

```
(se  A1 = 0
     então    A2 := A2 + 1
     senão    A2 := A2 - 1;
              (se       A2 = 0
              então     A1 := A1 – 1
              senão     V) )
```

Máquina Norma

b) Valores Numéricos

- Racionais
  - Um valor racional r pode ser denotado como um par ordenado: (a, b) tal que b > 0 e r = a/b.
  - A representação não é única pois, por exemplo, o valor racional 0.75 pode ser representado pelos pares (3, 4) e (6, 8), entre outros.

Máquina Norma

b) Valores Numéricos

- Racionais: Neste contexto, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como o teste de igualdade, podem ser definidos como segue:
  - (a, b) + (c, d) = (a*d + b*c, b*d)
  - (a, b) - (c, d) = (a*d – b*c, b*d)
  - (a, b) * (c, d) = (a*c, b*d)
  - (a, b) / (c, d) = (a*d, b*c) (com c ¹ 0)
  - (a, b) = (c, d) se, e somente se, a*d = b*c

Máquina Norma

b) Valores Numéricos

- Racionais: exemplos
  - Adição 0,25 + 0,75 = 1

    (1, 4) + (3, 4) = (4 + 12, 16) = (16, 16)

    (a, b) + (c, d) = (a*d + b*c, b*d)

  - Multiplicação 0,25 * 0,75 = 0,1875

    (1, 4) * (3, 4) = (3, 16)

    (a, b) * (c, d) = (a*c, b*d)

  - Teste de igualdade

    (1, 4) = (3, 12) e verdadeiro pois, 1*12 = 4*3

    (a, b) = (c, d) se, e somente se, a*d = b*c

Máquina Norma

c) Dados Estruturados

- Arranjo Unidimensional
  - Uma estrutura da forma A(1), A(2), ..., pode ser representada por um único registrador A, usando a codificação de n-uplas naturais;
  - Não necessita ter tamanho máximo pré-definido;
  - Pode ser indexado de forma **direta** (número natural) ou **indireta** (conteúdo de um registrador)

    - Operações:
      - Adiciona 1 à posição indexada
      - Subtrai 1 de uma posição indexada
      - Testa se uma posição indexada tem o valor 0

Máquina Norma

c) Dados Estruturados

- Arranjo Unidimensional
  - indexação direta. As macros:

    $ad_{A(n)}$ usando C
    $sub_{A(n)}$ usando C
    $zero_{A(n)}$ usando C
    Onde $_{A(n)}$ denota a n-ésima posição do arranjo A

Máquina Norma

- Arranjo Unidimensional – exemplos
  - indexação direta.

- Programa iterativo $ad_{A(n)}$ usando C

  C:=p_n;
  A:=AxC

- Programa iterativo $sub_{A(n)}$ usando C

  C:=p_n;
  (se teste_div(A,C)
  então A:=A/C
  senão ✓)

- Programa iterativo $zero_{A(n)}$ usando C

  C:=p_n;
  (se teste_div(A,C)
  então falso
  senão verdadeiro)

teste_div(A,C) → é uma macro que retorna Verdadeiro se C é um divisor de A

Máquina Norma

c) Dados Estruturados

- Arranjo Unidimensional
  - indexação indireta. As macros:

    $ad_{A(B)}$ usando C

    $sub_{A(B)}$ usando C

    $zero_{A(B)}$ usando C

    Onde $_{A(B)}$ denota a b-ésima posição do arranjo A, onde B é o conteúdo do registrador B

Máquina Norma

- Arranjo Unidimensional – exemplos
  - indexação indireta.

- Programa iterativo $ad_{A(B)}$ usando C

  C:=primo(B)
  A:=AxC

- Programa iterativo $sub_{A(B)}$ usando C

  C:=primo(B)
  (se teste_div(A,C)
  então A:=A/C
  senão ✓)

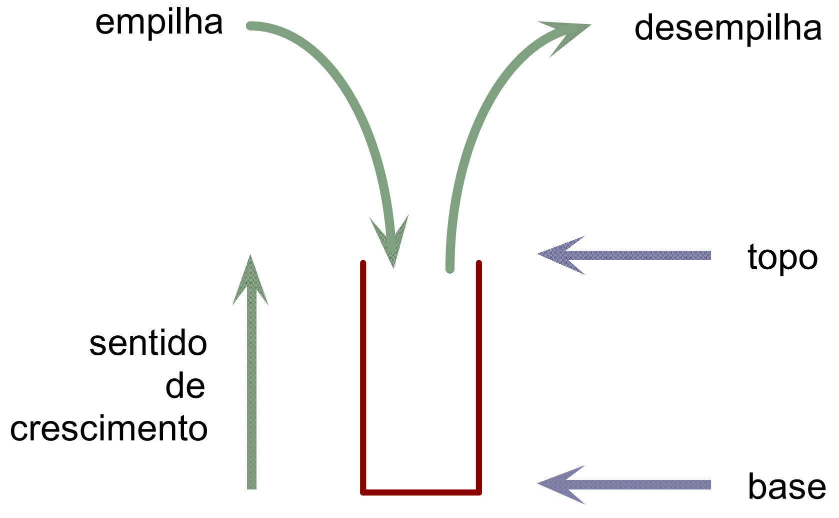
- Programa iterativo $zero_{A(n)}$ usando C

  C:=primo(B)
  (se teste_div(A,C)
  então falso
  senão verdadeiro)

Máquina Norma

c) Dados Estruturados

- Pilha: pode ser simulada usando 2 registradores
  - O primeiro representa o conteúdo da pilha, considerado como um vetor
  - O segundo contém o número do elemento que corresponde ao topo da pilha
  - Operações:
    - *Empilha*
    - *desempilha*



Máquinas Universais

Cadeias de Caracteres

- Cadeia de caracteres é outro tipo de dado não pré-definido na Máquina Norma.
- O tratamento da definição e da manipulação de cadeias de caracteres será realizado através de uma outra Máquina Universal, denominada Máquina de Turing, a qual prova-se, é equivalente à Norma.

Máquinas Universais

- Implemente uma máquina norma – qualquer linguagem – que realize as seguintes operações:
  - Adição entre dois registradores
    - Sem preservar conteúdo – obs: utilize números positivos/negativos
    - Preservando o conteúdo
  - Multiplicação entre dois registradores.
  - Testes $A<B$ e $A<=B$
  - Testar se o valor de um registrador é um número primo.