



LFA - Aula 03

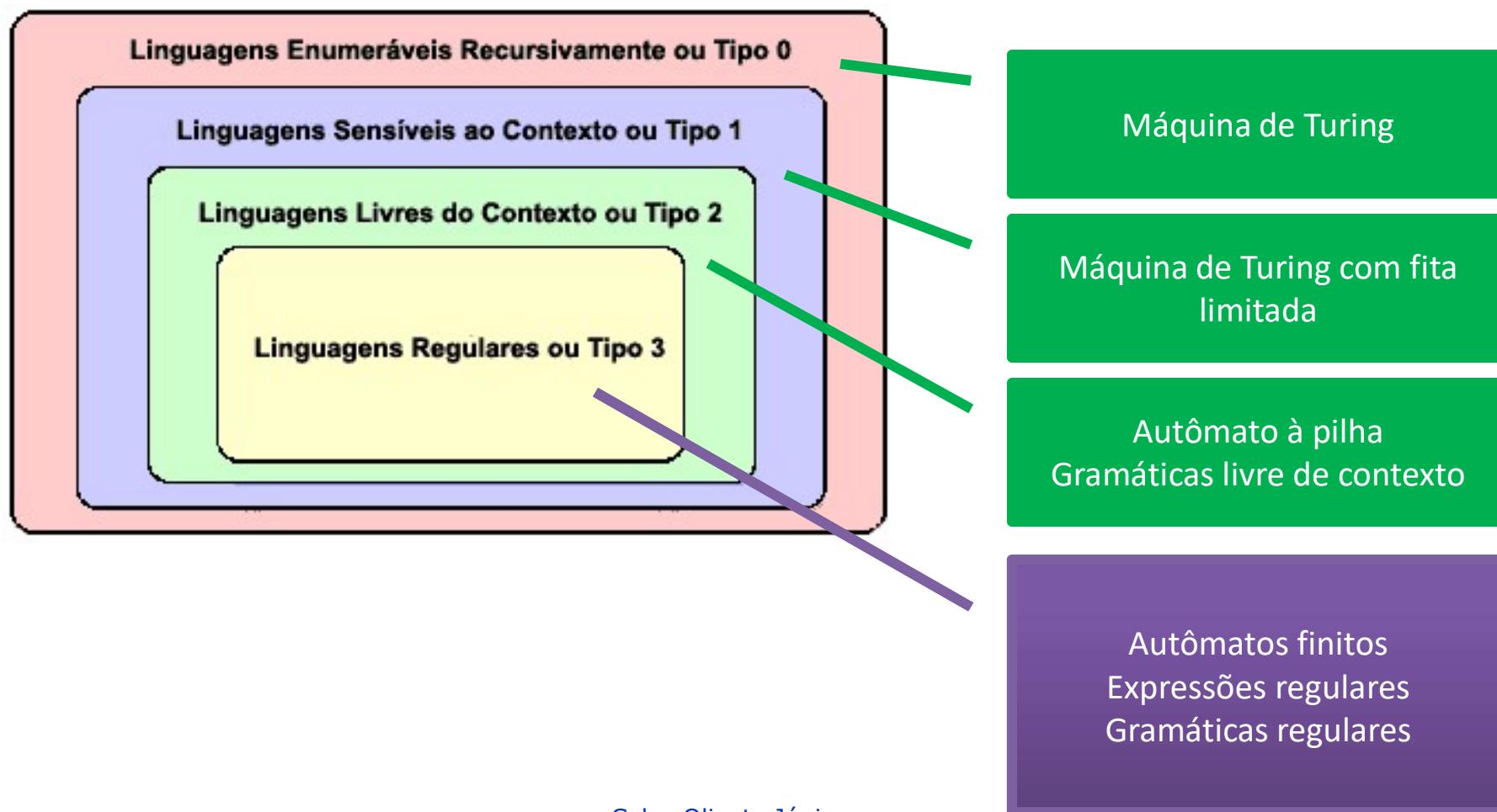
Linguagens regulares - Gramáticas regulares

Celso Olivete Júnior

celso.olivete@unesp.br



Classificação das Linguagens segundo Hierarquia de Chomsky





Na aula passada...

- Expressões regulares



Na aula de hoje...

- Linguagens regulares: **Gramáticas regulares**
- Referência bibliográfica

RAMOS, M.V.M.; NETO, J.J.; VEGA, I.S. *Linguagens Formais: Teoria, Modelagem e Implementação*. Editora Bookman 2009. → Capítulo 3



Relembrando...

- Uma linguagem regular é o conjunto de linguagens reconhecida/gerada pelos seguintes formalismos:
 - **Expressões regulares**
 - Gramáticas regulares
 - Autômatos finitos



Os operadores de expressões regulares

- Os tipos de operadores sobre as ER's são:
 - União ($|$)
 - Concatenação ($.$)
 - Fechamento ($*$)



Exemplos de expressões regulares

Exemplos	
ER para strings que são formadas por zero seguido por qualquer ocorrência de 1 (inclusive nenhuma)	$ER = 01^*$
ER formada por todas as palavras sobre (a,b) contendo aa como subpalavra	$ER = (a b)^*aa(a b)^*$



Relembrando...

- Uma linguagem regular é o conjunto de linguagens reconhecido/gerado pelos seguintes formalismos:
 - Expressões regulares
 - **Gramáticas regulares**
 - Autômatos finitos



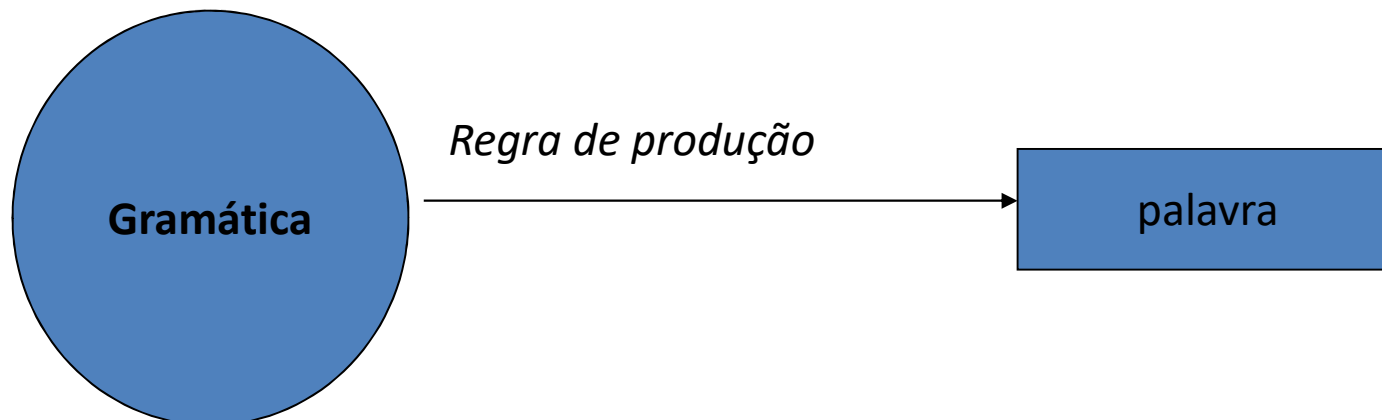
Gramática

- Uma **gramática** consiste em **uma ou mais variáveis** que **representam linguagens**.
- Exemplo: linguagem dos palíndromos (permite a mesma leitura da esquerda para direita quanto da direita para esquerda). Ex: **Anita latina**
 - Se w é um palíndromo, então $0w0$ e $1w1$ são palíndromos.
 - Neste caso a linguagem é formada apenas por uma variável (**w**).



Gramáticas

- Uma **gramática** consiste em **uma ou mais variáveis** que **representam linguagens**.





Gramáticas

- Formalmente as gramáticas são caracterizadas como quádruplas ordenadas

$$G = (\{V\}, \{T\}, P, S)$$

• onde:

- V representa o vocabulário não terminal da gramática - **variáveis**.
- T é o vocabulário **terminal**, contendo os símbolos que constituem as sentenças da linguagem.
- P representa o conjunto de todas as leis de formação (**regras de produção**) utilizadas pela gramática para definir a linguagem.
- S representa o símbolo de **início**



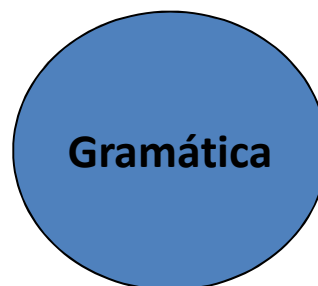
Gramáticas (não é gramática Regular!)

• $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$

• $P = \{ S \rightarrow AB$

$A \rightarrow a \mid AB$

$B \rightarrow b \}$



Regra de produção

palavra

• Passos para gerar a palavra: **abb**

• $S \rightarrow AB \rightarrow ABB \rightarrow aBB \rightarrow abB \rightarrow abb$.

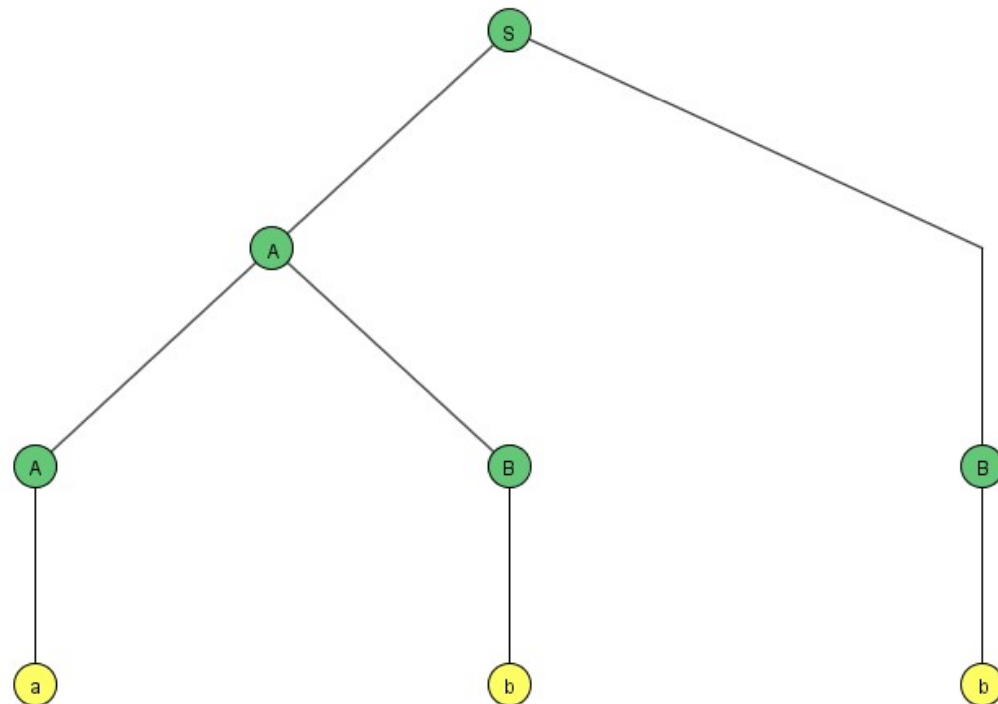


Gramática no JFlap

Input: abb

String accepted! 13 nodes generated.

LHS		RHS
S	→	AB
A	→	a
A	→	AB
B	→	b





Gramáticas

■ Notação / Convenções

- Variáveis: letras do alfabeto maiúsculas $\{A, B, \dots, Z\}$
- Terminais: letras do início do alfabeto minúsculas $\{a, b, c, \dots\}$, dígitos $\{0..9\}$ e outros caracteres como $+$, $-$, $*$, $/$
- Não-Terminais: letras do fim do alfabeto maiúsculas, como X ou Y , são não-terminais ou variáveis



Gramáticas

• podem ser classificadas em gramáticas lineares (regulares) à **direita** (**GLD**) ou à **esquerda** (**GLE**), cujas regras $\alpha \rightarrow \beta$ são da forma:

- $\alpha \in V$ - α é um não terminal (Lado esquerdo deve ter apenas não terminais - apenas 1)
- **GLD**: $\beta \in (T \cup \{\epsilon\}) (V \cup \{\epsilon\})$ - $A \rightarrow wB$ ou $A \rightarrow w$
- **GLE**: $\beta \in (V \cup \{\epsilon\}) (T \cup \{\epsilon\})$ - $A \rightarrow Bw$ ou $A \rightarrow w$.



Gramáticas regulares (lineares) obedecem a regra $\alpha \rightarrow \beta$

- $\alpha \in V$

- o lado esquerdo da regra é formado por um símbolo não terminal

- **GLD:** $\beta \in (T \cup \{\epsilon\}) (V \cup \{\epsilon\})$ - $A \rightarrow wB$ ou $A \rightarrow w$ com $|w| \geq 0$

- o lado direito da regra é formado por **N** símbolos terminais seguido de **UM** símbolo não terminal **OU** formado apenas por **N** símbolos terminais

- **GLE:** $\beta \in (V \cup \{\epsilon\}) (T \cup \{\epsilon\})$ - $A \rightarrow Bw$ ou $A \rightarrow w$ com $|w| \geq 0$

- o lado direito da regra é formado por **UM** símbolo não terminal seguido de **N** símbolos terminais **OU** formado apenas por **N** símbolos terminais



Gramáticas regulares (lineares)

- **GLD e GLE geram exatamente a mesma classe de linguagens.** Portanto, é indiferente o emprego de uma ou outra dessas duas variantes de gramática, já que ambas possuem a mesma capacidade de representação de linguagens.
- **As linguagens geradas por GLD e GLE são as linguagens regulares**
 - Logo, GLD e GLE são equivalentes



Gramáticas regulares

- Ex: dada a linguagem representada pela ER

$(a|b)^*(aa|bb)$

qual a gramática que a reconhece?



Gramáticas regulares

- Ex: dada a linguagem representada pela ER
 $(a|b)^*(aa|bb)$

qual a gramática que a reconhece?

$$G = (\{S,A\}, \{a,b\}, P, S)$$

$$P = \{ S \rightarrow aS \mid bS \mid A, \\ A \rightarrow aa \mid bb \}$$



Gramáticas regulares

- Ex: dada a linguagem representada pela ER $(a|b)^*(aa|bb)$

qual a gramática que a reconhece?

$$G = (\{S,A\}, \{a,b\}, P, S)$$

$$P = \{ S \rightarrow aS \mid bS \mid A, \\ A \rightarrow aa \mid bb \}$$

- mostre os passos para reconhecer a palavra **babb**



Gramáticas regulares

- Ex: dada a linguagem representada pela ER $(a|b)^*(aa|bb)$

qual a gramática que a reconhece?

$$G = (\{S,A\}, \{a,b\}, P, S)$$

$$P = \{ S \rightarrow aS \mid bS \mid A, \\ A \rightarrow aa \mid bb \}$$

- mostre os passos para reconhecer a palavra **babb**

$$S \rightarrow bS \rightarrow baS \rightarrow baA \rightarrow babb$$



Extensões para GLD e GLE

- Gramática Linear Unitária à Direita (**GLUD**)
 - como na gramática linear à direita.
 - Adicionalmente $|w| \leq 1$ no máximo um terminal do lado direito da regra
- Gramática Linear Unitária à Esquerda (**GLUE**)
 - como na gramática linear à esquerda.
 - Adicionalmente $|w| \leq 1$ no máximo um terminal do lado direito da regra



Gramáticas regulares

- Ex: dada a linguagem representada pela ER $a(ba)^*$ dê as GLD, GLE, GLUD e GLUE que as reconhece.

- mostre os passos para reconhecer a palavra **ababa**



Gramáticas regulares

- Ex: dada a linguagem representada pela ER $a(ba)^*$ dê as **GLD**, GLE, GLUD e GLUE que as reconhece

$$G = (\{S,A\}, \{a,b\}, P, S)$$

$$P = \{ S \rightarrow aA$$

$$A \rightarrow baA \mid \varepsilon \}$$

- mostre os passos para reconhecer a palavra **ababa**

$$S \rightarrow aA \rightarrow abaA \rightarrow ababaA \rightarrow ababa\varepsilon$$



Gramáticas regulares

- Ex: dada a linguagem representada pela ER $a(ba)^*$ dê as GLD, **GLE**, GLUD e GLUE que as reconhece

$$G = (\{S,A\}, \{a,b\}, P, S)$$
$$P = \{ S \rightarrow Sba \mid a \}$$

- mostre os passos para reconhecer a palavra **ababa**
 $S \rightarrow Sba \rightarrow Sbaba \rightarrow ababa$



Gramáticas regulares

- Ex: dada a linguagem representada pela ER $a(ba)^*$ dê as GLD, GLE, **GLUD** e GLUE que as reconhece

$$G = (\{S,A\}, \{a,b\}, P, S)$$

$$P = \{ S \rightarrow aA$$

$$A \rightarrow bB \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow aA$$

- mostre os passos para reconhecer a palavra **ababa**

$$S \rightarrow aA \rightarrow abB \rightarrow abaA \rightarrow ababB \rightarrow ababaA \rightarrow ababa\varepsilon$$



Gramáticas regulares

- Ex: dada a linguagem representada pela ER $a(ba)^*$ dê as GLD, GLE, GLUD e **GLUE** que as reconhece

$$G = (\{S,A\}, \{a,b\}, P, S)$$

$$P = \{ S \rightarrow Aa \mid a \\ A \rightarrow Sb \}$$

- mostre os passos para reconhecer a palavra **ababa**

$$S \rightarrow Aa \rightarrow Sba \rightarrow Aaba \rightarrow Sbaba \rightarrow ababa$$



Exercícios

- Para cada uma das linguagens (arquivo pdf disponível no Classroom), construir a Gramática (indicar se é GLE, GLD, GLUE ou GLUD) e a Expressão Regular. As gramáticas podem ser resolvidas com o JFlap.