PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA I

MODELOS DE DISTRIBUIÇÕES E APLICAÇÕES
ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

DISCIPLINA: PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA I

CURSO: CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

PROFA. MS. CAMILA GONÇALVES COSTA

06/2025

3.1 MODELOS DE DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

Dados empresariais podem ser derivados tanto de variáveis aleatórias contínuas como também de variáveis aleatórias discretas. Dessa forma, precisamos saber sobre distribuições de probabilidade associadas com as variáveis aleatórias contínuas e como usar a média e o desvio padrão para descrever estas distribuições. Esta seção encaminha este problema e introduz a distribuição de probabilidade normal. A distribuição de probabilidade normal é uma das distribuições mais úteis em estatística.

Relembre que uma variável aleatória contínua é uma variável que pode assumir um valor dentro de algum intervalo ou intervalos. Por exemplo, o tempo entre a compra de um cliente de automóveis novos, as espessuras de folhas de aço produzidas em um moinho rolante, e o rendimento de trigo por alqueire de área cultivada são todas variáveis aleatórias contínuas.

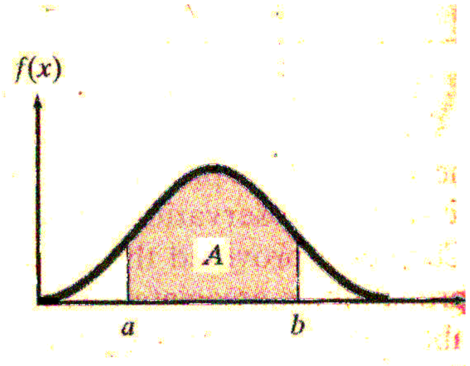


FIGURA 3.1.1
Uma distribuição de probabilidade *f*(*x*) para uma variável aleatória contínua *x*

A forma gráfica da distribuição de probabilidade para uma variável aleatória contínua *x* é uma curva lisa que poderia aparecer como mostrado em Figura 3.1.1. Esta curva, uma função de *x*, é denotada pelo símbolo *f*(*x*) e é chamada de ***função de densidade de probabilidade*** (f.d.p.).

A área sob uma função de densidade de probabilidade corresponde a probabilidades de *x*.

Por exemplo, a área de *A* sob a curva entre os dois pontos *a* e *b*, como mostrado na Figura 3.1.1, é a probabilidade que *x* assuma um valor entre *a* e *b; ou seja,* $P(a < x < b)$.

Porque não há área sobre um ponto, digamos *x* = *a*, segue que (de acordo com nosso modelo) a probabilidade associada com um valor particular de *x* é igual a 0; quer dizer, $P(x = a) = 0$ e consequentemente
$P(a < x < b) = P(a \leq x \leq b)$.

Em outras palavras, a probabilidade é a mesma se você inclui ou não os pontos extremos do intervalo. Também, porque áreas sobre os intervalos representam probabilidades, segue que a área total debaixo de uma função de densidade de probabilidade, deve ser igual a 1.

<u>Note que as distribuições de probabilidade para variáveis aleatórias contínuas possuem formas diferentes que dependem das distribuições de frequências relativas a dados reais, que é suposto que as distribuições de probabilidade modelam.</u>

As áreas debaixo da maioria das distribuições de probabilidade são obtidas usando cálculos ou métodos numéricos. Estes métodos envolvem frequentemente procedimentos difíceis.

A probabilidade de x assumir um valor no intervalo um $a < x < b$ *é*

$P(a<x<b)=\int_b^a f(x)dx$,

assumindo que a integral existe.
Semelhante à exigência para uma distribuição de probabilidade discreta, nós requeremos que $0 \leq f(x) \leq 1$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

3.1.1 DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA UNIFORME

Se os valores da v. a. X podem ocorrer dentro dum certo intervalo limitado (a, b), e se quaisquer dois subintervalos de igual amplitude têm a mesma probabilidade, então diz-se que X segue uma distribuição uniforme.

Definição:
A v. a. contínua X segue uma **distribuição Uniforme** no intervalo ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$), i.e. $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{U}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$, se a sua função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & c.c. \end{cases}, \quad com \ -\infty < a < b < +\infty.$$

Os parâmetros caracterizadores desta distribuição são a e b.

A função de distribuição cumulativa (f.d.c.) é dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

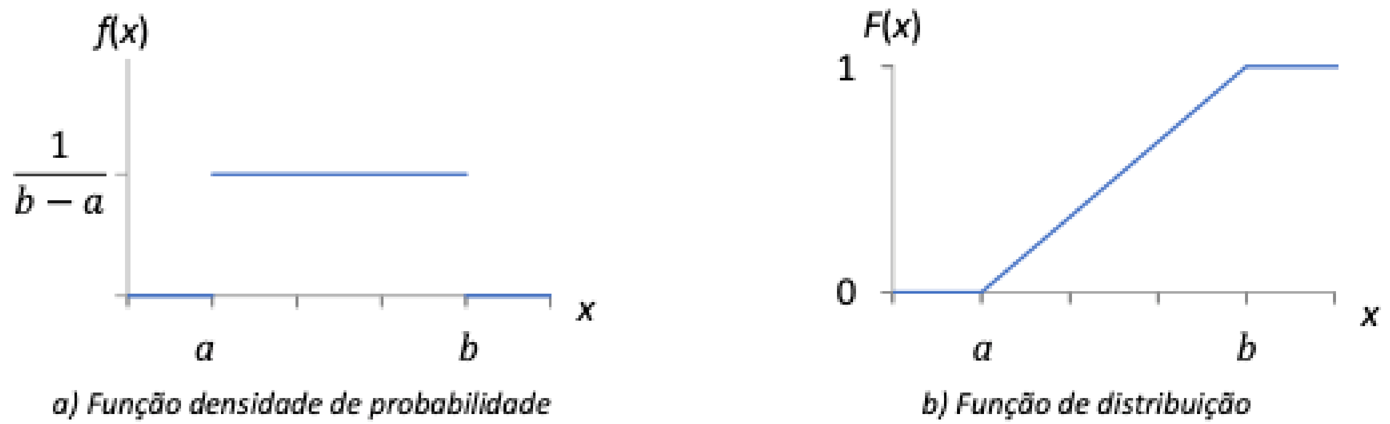


Figura 3.1.2: Função densidade de probabilidade e de distribuição da distribuição Uniforme(a; b).

Se, $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{U}\{a\,;\,b\}$, então $\mu_X = E(X) = \frac{a+b}{2}$ e $\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

EXEMPLO 3.1.1

Considere que o tempo de viagem de autocarro entre Lisboa e Évora segue uma distribuição Uniforme entre 100 a 120 minutos.

a) Identifique a v. a. em estudo e a sua distribuição densidade de probabilidade.

b) Qual a duração média das viagens? Calcule a variância.

c) Qual a probabilidade de uma viagem demorar mais de 115 minutos?

d) Qual a proporção de viagens de demoram menos de 110 minutos?

e) Calcule a probabilidade de uma viagem durar entre 105 e 115 minutos?

Solução

a) Seja X a v.a. que representa o tempo de viagem de autocarro entre Lisboa e Évora, com $X \sim U(100;\ 120)$.

Função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{120 - 100} = 0{,}05, \qquad 100 < x < 120.$$

b) $E(X) = \dfrac{100 + 120}{2} = 110$ (duração média das viagens).

$$Var(X) = \frac{(120 - 100)^2}{12} = 33{,}3333.$$

c) Como a função de distribuição é:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{x - 100}{20}, \qquad 100 < x < 120,$$

então

$$P(X > 115) = 1 - P(X \leq 115) = 1 - \frac{115 - 100}{20} = 0{,}25.$$

d) $P(X < 110) = \dfrac{110 - 100}{20} = 0{,}5.$

e) $P(105 < X < 115) = \dfrac{115 - 105}{20} = 0{,}5.$

3.1.2 DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA NORMAL

A **distribuição Normal**, ou **Gaussiana**, é uma das mais importantes, senão a mais importante distribuição contínua, sendo bastante utilizada tanto para aplicações práticas como para estudos teóricos. Muitas características da população existentes na realidade são bem representadas por esta distribuição que também goza de importantes propriedades.

Definição: A v. a. contínua X segue uma distribuição Normal com média $\boldsymbol{\mu}$ e desvio padrão $\boldsymbol{\sigma}$, i. e., $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\sigma})$, se a sua função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$com \quad -\infty < \mu < +\infty \quad e \quad -\infty < \sigma < +\infty.$$

onde

μ = Média da variável aleatória normal x

σ = Desvio padrão
$\pi = 3{,}1416...$
$e = 2{,}71828...$

Os parâmetros caracterizadores desta distribuição são μ e σ.

Principais características:

- A função densidade de probabilidade de uma v. a. com a distribuição Normal tem a forma de sino, é simétrica em torno de μ e tem pontos de inflexão em $x = \mu \pm \sigma$.

- A média μ localiza o centro da distribuição e σ mede a variabilidade de X em torno de μ (Figura 3.1.3 e Figura 3.1.4).

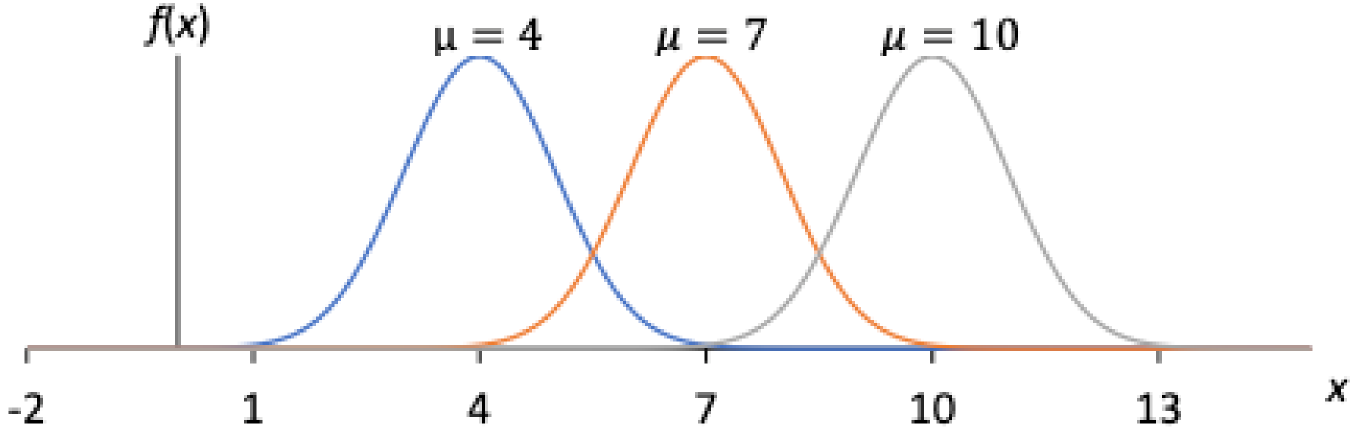


Figura 3.1.3: Função densidade de probabilidade da distribuição Normal para diferentes valores de μ e $\sigma = 1$.

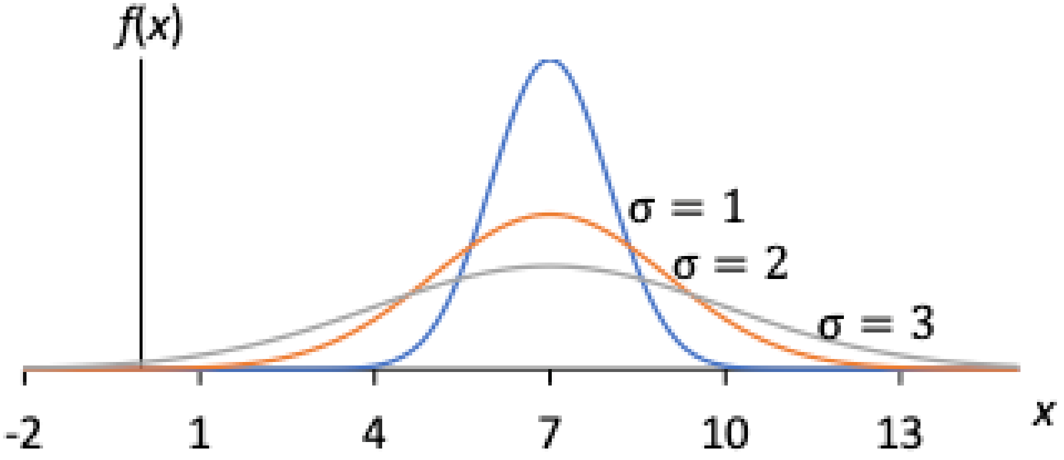


Figura 3.1.4: Função densidade de probabilidade da distribuição Normal para diferentes valores de σ e $\mu = 7$.

Se $\boldsymbol{X \sim N(\mu; \sigma)}$ então $\mu_X = E(X) = \mu$ e $\sigma_X^2 = Var(X) = \sigma^2$.

Resultados importantes:

- Se $X \sim N(\mu; \sigma)$ então a v. a. padronizada (estandardizada) $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0; 1)$.

- A função de distribuição $F(z)$ da v. a. $Z \sim N(0; 1)$ é representada por $\Phi(z)$ e está tabulada.

- $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

- $\Phi(z) = \alpha \Rightarrow z = \Phi^{-1}(\alpha)$.

Usualmente utiliza-se a notação z_α para representar o quantil de probabilidade α de uma v. a. $X \sim N(0;1)$, i.e., $P(Z \leq z_\alpha) = \alpha$ o que é equivalente a $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$.

A Tabela IV está baseada em uma distribuição normal com média $\mu = 0$ e desvio padrão $\sigma = 1$, chamada uma distribuição normal padrão. Uma variável aleatória com uma distribuição normal padrão é denotada tipicamente pelo símbolo z. A fórmula para a distribuição de probabilidade de z é determinada por

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

A Figura 3.1.5 mostra o gráfico de uma distribuição normal padrão.

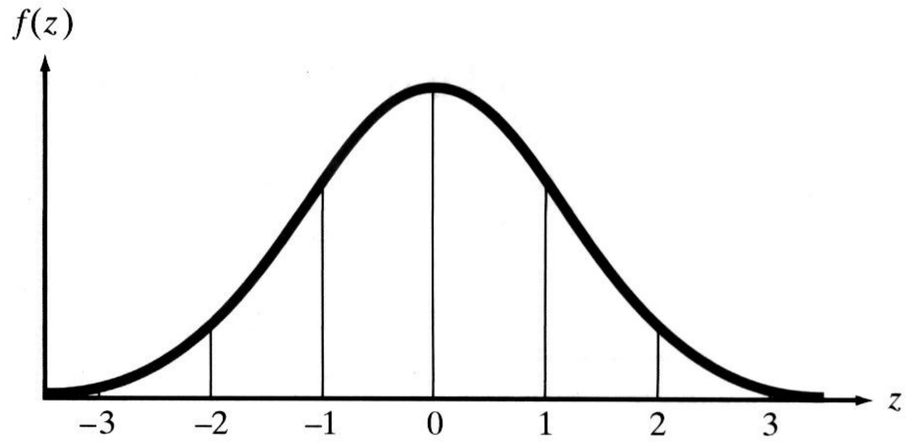


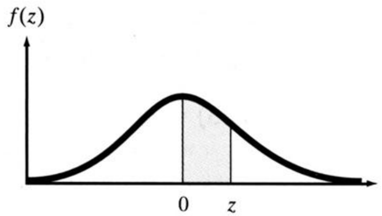
FIGURA 3.1.5
Distribuição normal padrão: $\mu = 0$, $\sigma = 1$

Definição: A **distribuição normal padrão** é uma distribuição normal com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$. Uma variável aleatória com uma distribuição normal padrão, denotada pelo símbolo *z*, é chamada uma *variável aleatória normal padrão*.

Considerando que no final das contas nós converteremos todas as variáveis aleatórias normais para normal padrão para usar a Tabela IV para encontrar probabilidades. É importante que se aprenda a usar bem a Tabela IV.

Uma reprodução parcial da Tabela IV é mostrada na tabela abaixo. Note que os valores da variável aleatória normal padrão *z* são listados na coluna à esquerda. As entradas no corpo da tabela dão a área (probabilidade) entre 0 e *z*.

Tabela: Reprodução de parte da Tabela IV



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441

EXEMPLO 3.1.2

Assuma que o comprimento de tempo, x, entre o carregamento de um telefone celular é distribuído normalmente com uma média de 10 horas e um desvio padrão de 1,5 hora. Encontre a probabilidade da carga do telefone celular durar entre 8 e 12 horas.

Solução

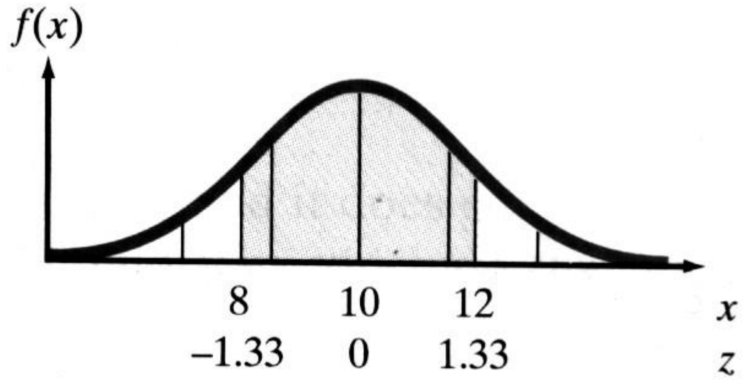


FIGURA 3.1.6
Áreas sob a curva normal do exemplo 3.1.2

A distribuição normal com média $\mu = 10$ e $\sigma = 1{,}5$ são mostrados na Figura 3.1.6. A probabilidade desejada, que a carga dura entre 8 e 12 horas, está sombreada.

Para encontrar a probabilidade, nós temos primeiro que converter a distribuição para normal padrão, o que fazemos calculando a z-contagem:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

As z-contagens correspondem aos importantes valores de x que são mostrados debaixo dos valores de x no eixo horizontal na Figura 3.1.6.

Note que $z = 0$ corresponde a média $\mu = 10$ horas, enquanto os valores de x 8 e 12 rende as z-contagens – 1,33 e +1,33, respectivamente.

Assim, o evento que a última carga do telefone celular ocorreu entre 8 e 12 horas é equivalente ao evento que uma variável aleatória padrão esteja entre -1,33 e +1,33.

Nós encontramos esta probabilidade dobrando a área que corresponde a $z = 1{,}33$ na Tabela IV. Isso é,

$$P(8 \leq x \leq 12) = P(-1{,}33 \leq z \leq 1{,}33) = 2 \cdot (0{,}4082) = 0{,}8164$$

Os passos a seguir mostram como calcular uma probabilidade que corresponde a uma variável aleatória normal.

Passos para encontrar uma probabilidade que corresponde a uma variável aleatória normal

1. Esboce a distribuição normal e indique a média da variável aleatória x. Então sombreie a área que corresponde à probabilidade que você queira encontrar.

2. Converta os limites da área sombreada dos valores de x para a variável aleatória normal padrão dos valores de z usando a fórmula

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

   Mostre os z valores debaixo dos valores de x correspondentes em seu esboço.

3. Use a Tabela IV para encontrar as áreas que correspondem aos valores de z. Se necessário, use a simetria da distribuição normal para encontrar as áreas

que correspondem aos valores de z negativos e o fato que a área total em cada lateral da média igual a 0,5 para converter as áreas da Tabela IV para as probabilidades do evento que você sombreou.

EXEMPLO 3.1.3

Suponha que um fabricante de tintas tem uma produção diária, *x*, que é distribuído normalmente com uma média de 100.000 galões e um desvio padrão de 10.000 galões. A administração quer criar uma gratificação de incentivo para a equipe de produção quando a produção diária excede o 90º percentil da distribuição, esperando que a equipe, na troca de turno, ficará mais produtiva. A que nível de produção a administração deveria pagar a gratificação de incentivo?

Solução

Neste exemplo, nós queremos encontrar um nível de produção, x_0, tal que 90% dos níveis diários (valores de x) na distribuição estejam abaixo de x_0 e só 10% esteja acima de x_0. Isso é,

$$P(x \leq x_0) = 0{,}90$$

X convertendo para uma variável de acaso normal standard onde μ, = 100,000 e (= 10,000, nós temos

$$P(x \leq x_0) = P\left(z \leq \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(z \leq \frac{x_0 - 100.000}{10.000}\right) = 0{,}90$$

Nós encontramos o 90º percentil da distribuição normal padrão sendo z_0=1,28. Quer dizer, nós encontramos $P(z \leq 1{,}28) = 0{,}90$. Consequentemente, sabemos que o nível x_0 da produção ao qual a gratificação de incentivo é liquidada corresponde a uma z-contagem de 1,28; isso é,

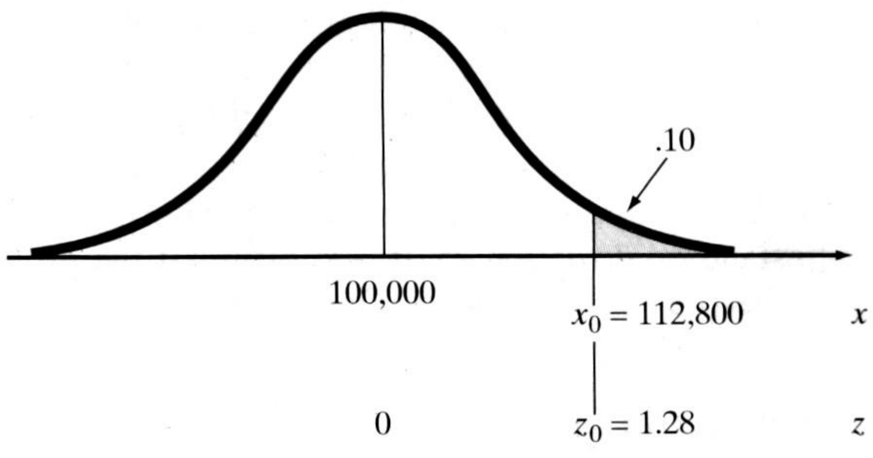


FIGURA 3.1.7
Área sob a curva normal do exemplo

$$\frac{x_0 - 100.000}{10.000} = 1{,}28$$

Se nós resolvermos esta equação para x_0, encontramos

$$\begin{aligned} x_0 &= 100.000 + 1{,}28(10.000) \\ &= 100.000 + 12.800 \\ &= 112.800 \end{aligned}$$

Este valor de x é mostrado na Figura 3.1.7. Assim, o 90º percentil da distribuição da produção é 112.800 galões. A administração deveria pagar uma gratificação de incentivo quando a produção de um dia exceder este nível se seu objetivo for só pagar quando produção estiver nos 10% da distribuição da produção diária atual.

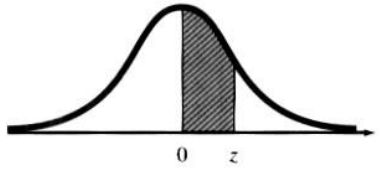
Teorema da aditividade: Se $X_i, i = 1, 2, \ldots, K$, são v. a. independentes e $X_i \sim N(\mu_i; \sigma_i)$ então

$$\sum_{i=1}^{K} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{K} a_i \mu_i \,;\, \sqrt{\sum_{i=1}^{K} a_i^2 \sigma_i^2}\right).$$

Corolário: Se $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$, são v. a. independentes e $X_i \sim N(\mu; \sigma)$, então:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu; \sigma\sqrt{n}\right); \qquad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

TABLE IV Normal Curve Areas



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

Source: Abridged from Table I of A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (New York: Wiley), 1952. Reproduced by permission of A. Hald.

3.1.3 DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA EXPONENCIAL

A **distribuição Exponencial** está relacionada com o processo de **Poisson**. Demonstra-se que num processo de Poisson, o tempo de espera até à ocorrência do primeiro sucesso é uma v. a. que segue uma distribuição Exponencial. Esta distribuição é também adequada para descrever o tempo até à ocorrência do próximo sucesso ou o tempo entre dois sucessos consecutivos.

Definição: A v. a. contínua X segue uma distribuição Exponencial, i. e., $\boldsymbol{X \sim Exp(\lambda)}$, se a sua função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0 \quad com \quad \lambda > 0.$$

O parâmetro caracterizador desta distribuição é λ.

A função densidade de probabilidade da Exponencial encontra-se representada na Figura 3.1.8.

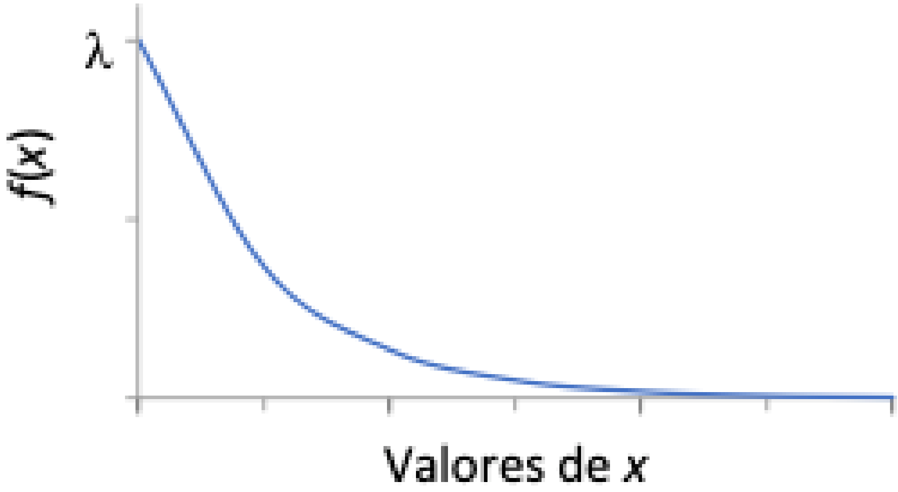


Figura 3.1.8: Função densidade de probabilidade da distribuição Exponencial.

A função de distribuição é dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0 \quad com \quad \lambda > 0.$$

Se $\boldsymbol{X \sim Exp(\lambda)}$ então $\mu_X = E(X) = \frac{1}{\lambda}$ e $\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Propriedade (falta de memória):

Se $X \sim Exp(\lambda)$ então $P(X > x + a \mid X > a) = P(X > x), \quad x > 0, \ a > 0.$

EXEMPLO 3.1.4

Seja X a v. a. que representa o tempo, em segundos, decorrido entre a entrada consecutiva de 2 automóveis numa autoestrada (AE). Admita que esta v. a. segue uma distribuição Exponencial com valor médio 15 segundos.

a) Descreva as funções densidade de probabilidade e de distribuição associadas a esta v. a.
b) Qual o valor esperado e a variância de X.
c) Calcule a probabilidade do tempo que medeia a entrada consecutiva de 2 automóveis na AE ser superior a 50 segundos.
d) Determine a probabilidade do intervalo de tempo que separa a entrada consecutiva de 2 automóveis na AE ser inferior a 1 minuto.
e) Calcule $P(X > \sigma_X)$.
f) Determine a probabilidade do tempo que ocorre entre a entrada consecutiva

de 2 automóveis na AE estar entre 10 e 20 minutos.

Solução:

Sabemos que

$$X \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{15}\right).$$

a) Função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{15}e^{-\frac{x}{15}}, \qquad x > 0.$$

Função de distribuição:

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\frac{1}{15}x}, \; x > 0.$$

b) $E(X) = \dfrac{1}{\frac{1}{15}} = 15$ segundos.

$$Var(X) = \frac{1}{\left(\frac{1}{15}\right)^2} = 15^2 = 225.$$

c) $P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) = 1 - F(50) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{15}50}\right) = 0{,}0357.$

d) Dado que 1 minuto = 60 segundos

$$P(X < 60) = F(60) = 1 - e^{-\frac{1}{15}60} = 0{,}9817.$$

e) Como $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = 15$ segundos,

$$P(X > \sigma_X) = P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - F(15) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{15}15}\right) = 0{,}3679.$$

f) $P(10 < X < 20) = F(20) - F(10) = 1 - e^{-\frac{1}{15}20} - \left(1 - e^{-\frac{1}{15}10}\right) = 0{,}2498.$

TABLE V Exponentials

λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$
.00	1.000000	**2.05**	.128735	**4.05**	.017422	**6.05**	.002358	**8.05**	.000319
.05	.951229	**2.10**	.122456	**4.10**	.016573	**6.10**	.002243	**8.10**	.000304
.10	.904837	**2.15**	.116484	**4.15**	.015764	**6.15**	.002133	**8.15**	.000289
.15	.860708	**2.20**	.110803	**4.20**	.014996	**6.20**	.002029	**8.20**	.000275
.20	.818731	**2.25**	.105399	**4.25**	.014264	**6.25**	.001930	**8.25**	.000261
.25	.778801	**2.30**	.100259	**4.30**	.013569	**6.30**	.001836	**8.30**	.000249
.30	.740818	**2.35**	.095369	**4.35**	.012907	**6.35**	.001747	**8.35**	.000236
.35	.704688	**2.40**	.090718	**4.40**	.012277	**6.40**	.001661	**8.40**	.000225
.40	.670320	**2.45**	.086294	**4.45**	.011679	**6.45**	.001581	**8.45**	.000214
.45	.637628	**2.50**	.082085	**4.50**	.011109	**6.50**	.001503	**8.50**	.000204
.50	.606531	**2.55**	.078082	**4.55**	.010567	**6.55**	.001430	**8.55**	.000194
.55	.576950	**2.60**	.074274	**4.60**	.010052	**6.60**	.001360	**8.60**	.000184
.60	.548812	**2.65**	.070651	**4.65**	.009562	**6.65**	.001294	**8.65**	.000175
.65	.522046	**2.70**	.067206	**4.70**	.009095	**6.70**	.001231	**8.70**	.000167
.70	.496585	**2.75**	.063928	**4.75**	.008652	**6.75**	.001171	**8.75**	.000158
.75	.472367	**2.80**	.060810	**4.80**	.008230	**6.80**	.001114	**8.80**	.000151
.80	.449329	**2.85**	.057844	**4.85**	.007828	**6.85**	.001059	**8.85**	.000143
.85	.427415	**2.90**	.055023	**4.90**	.007447	**6.90**	.001008	**8.90**	.000136
.90	.406570	**2.95**	.052340	**4.95**	.007083	**6.95**	.000959	**8.95**	.000130
.95	.386741	**3.00**	.049787	**5.00**	.006738	**7.00**	.000912	**9.00**	.000123
1.00	.367879	**3.05**	.047359	**5.05**	.006409	**7.05**	.000867	**9.05**	.000117
1.05	.349938	**3.10**	.045049	**5.10**	.006097	**7.10**	.000825	**9.10**	.000112
1.10	.332871	**3.15**	.042852	**5.15**	.005799	**7.15**	.000785	**9.15**	.000106
1.15	.316637	**3.20**	.040762	**5.20**	.005517	**7.20**	.000747	**9.20**	.000101
1.20	.301194	**3.25**	.038774	**5.25**	.005248	**7.25**	.000710	**9.25**	.000096
1.25	.286505	**3.30**	.036883	**5.30**	.004992	**7.30**	.000676	**9.30**	.000091
1.30	.272532	**3.35**	.035084	**5.35**	.004748	**7.35**	.000643	**9.35**	.000087
1.35	.259240	**3.40**	.033373	**5.40**	.004517	**7.40**	.000611	**9.40**	.000083
1.40	.246597	**3.45**	.031746	**5.45**	.004296	**7.45**	.000581	**9.45**	.000079
1.45	.234570	**3.50**	.030197	**5.50**	.004087	**7.50**	.000553	**9.50**	.000075
1.50	.223130	**3.55**	.028725	**5.55**	.003887	**7.55**	.000526	**9.55**	.000071
1.55	.212248	**3.60**	.027324	**5.60**	.003698	**7.60**	.000501	**9.60**	.000068
1.60	.201897	**3.65**	.025991	**5.65**	.003518	**7.65**	.000476	**9.65**	.000064
1.65	.192050	**3.70**	.024724	**5.70**	.003346	**7.70**	.000453	**9.70**	.000061
1.70	.182684	**3.75**	.023518	**5.75**	.003183	**7.75**	.000431	**9.75**	.000058
1.75	.173774	**3.80**	.022371	**5.80**	.003028	**7.80**	.000410	**9.80**	.000056
1.80	.165299	**3.85**	.021280	**5.85**	.002880	**7.85**	.000390	**9.85**	.000053
1.85	.157237	**3.90**	.020242	**5.90**	.002739	**7.90**	.000371	**9.90**	.000050
1.90	.149569	**3.95**	.019255	**5.95**	.002606	**7.95**	.000353	**9.95**	.000048
1.95	.142274	**4.00**	.018316	**6.00**	.002479	**8.00**	.000336	**10.00**	.000045
2.00	.135335								

3.1.4 DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA QUI-QUADRADO

Definição: A v. a. contínua X segue uma **distribuição Qui-Quadrado com $\boldsymbol{n}$ graus de liberdade**, i. e., $X \sim \chi_n^2$, se a sua função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\ x^{\frac{n}{2}-1}\ e^{-\frac{x}{2}}, \qquad x > 0, \qquad n > 0.$$

onde $\Gamma(\alpha)$ é a função Gama, definida por $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\ x^{\alpha-1}\ dx$.

O parâmetro caracterizador desta distribuição é n.

Principais características:

- A v. a. só toma valores positivos;
- É uma função não simétrica.

A forma da distribuição depende dos graus de liberdade (Figura 3.1.9), tornando-se menos assimétrica com o aumento do número de graus de liberdade.

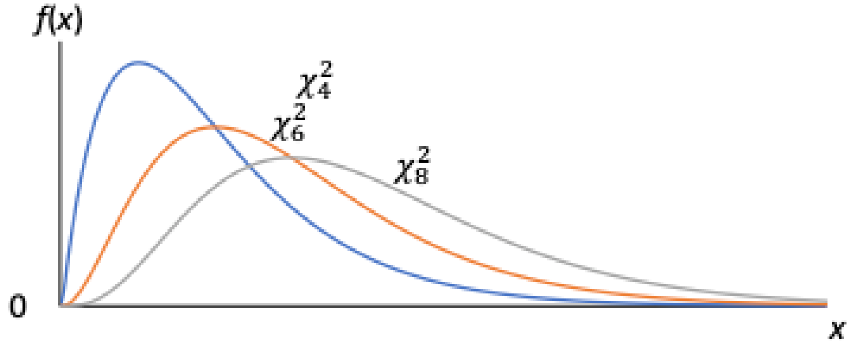


Figura 3.1.9: Função densidade de probabilidade distribuição Qui-Quadrado para diferentes graus de liberdade.

Se $\boldsymbol{X \sim \chi^2_n}$ então $\mu_X = E(X) = n$ e $\sigma^2_X = Var(X) = 2n$.

Usualmente utiliza-se a notação $\chi^2_{n;\alpha}$ para representar o quantil de probabilidade α de uma v. a. $X \sim \chi^2_n$. Portanto, $\chi^2_{n;\alpha}$ corresponde ao menor valor k tal que $P(X \leq k) = \alpha$.

Teorema: Se $X \sim N(\mu;\sigma)$ então

$$Z^2 = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_1^2.$$

Corolário: Se $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$, são v. a. independentes e $X_i \sim N(\mu;\sigma)$, então:

$$\sum_{i=1}^{K} \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_K^2.$$

Teorema da aditividade: Se $X_i, i = 1, 2, \ldots, K$, são v. a. independentes e $X_i \sim \chi_{K_i}^2$ então

$$\sum_{i=1}^{K} X_i \sim \chi_m^2 \;, \qquad com\; m = \sum_{i=1}^{K} K_i.$$

EXEMPLO 3.1.5

Suponhamos que desejamos testar a hipótese de que a trajetória do lançamento de um projétil é uma parábola. O projétil sairá de uma altura de $h = 100\ m$, com uma velocidade inicial horizontal de $v_i = 100 m/s$ e num local onde a gravidade vale $g = 9{,}8 m/s^2$. Esperamos, portanto, que a altura do projétil em função da sua distância em relação ao ponto de partida seja:

$$y(x) = h - \frac{g}{2v_i^2}x^2.$$

Para testar a hipótese, fazemos 10 medidas de x e de y em tempos específicos. A tabela abaixo mostra os valores encontrados.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i})$	-50,98	-80,95	-110,92	-140,9	-170,85	-200,8	-230,72	-260,62	-290,53	-320,4

Solução:

Para os valores encontrados, a incerteza na medida (medidas de dispersão) de x é desprezível e a de y é $\sigma = 3$. Como não calculamos nenhum parâmetro a partir dos valores medidos, o número de graus de liberdade é o mesmo do número de medidas, 10. Com estes valores, podemos calcular o valor de χ^2:

$$\chi_{10}^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{(y_i - y(x_i))^2}{\sigma^2} = 20{,}24, \quad \text{ou ainda} \quad \frac{\chi_{10}^2}{k} = 2{,}024.$$

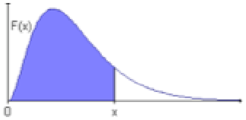
De posse do valor "normalizado" de χ^2, podemos usar uma tabela para descobrir a probabilidade de se obter este valor ou mais, e assim saber com quanta certeza podemos dizer que os valores encontrados realmente estão distribuídos como esperado. Neste caso, para 10 graus de liberdade:

$$P(\chi_{10}^2 \geq 2{,}024) = \iint_0^{2{,}024} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\ x^{\frac{n}{2}-1}\ e^{-\frac{x}{2}}\ dx = 0{,}029 = 2{,}9\%.$$

O que descobrimos foi que a probabilidade de que as medidas obtidas realmente estejam sendo governadas pela lei prevista é de apenas 2,9%, ou seja, deveríamos rejeitar esta hipótese. Isto é, temos apenas 2,9% de certeza que a trajetória do projétil foi realmente uma parábola e que os grandes desvios observados foram apenas flutuações estatísticas.

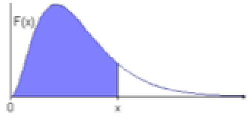
Poderíamos ter avaliado a concordância experimental com a teórica fazendo os gráficos e comparando-os "à olho". Teríamos visto que o projétil caiu bem antes do que o previsto, sugerindo que estejamos esquecendo fatores de resistência do ar (no modelo previsto, consideramos apenas a força da gravidade, e ignoramos qualquer atrito que pudesse haver entre ar e projétil, que de fato existe, principalmente para velocidades grandes como 100 m/s).

Valores da função de distribuição:
$X \sim \chi^2_n : F(x) = P(X \le x) = p$



n \ p	0,0005	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,075	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4
1	3,9E-07	1,6E-06	3,9E-05	1,6E-04	9,8E-04	0,004	0,009	0,016	0,036	0,064	0,148	0,275
2	0,0010	0,0020	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,156	0,211	0,325	0,446	0,713	1,022
3	0,0153	0,0243	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,472	0,584	0,798	1,005	1,424	1,869
4	0,0639	0,0908	0,207	0,297	0,484	0,711	0,897	1,064	1,366	1,649	2,195	2,753
5	0,158	0,210	0,412	0,554	0,831	1,145	1,394	1,610	1,994	2,343	3,000	3,656
6	0,299	0,381	0,676	0,872	1,237	1,635	1,941	2,204	2,661	3,070	3,828	4,570
7	0,485	0,599	0,989	1,239	1,690	2,167	2,528	2,833	3,358	3,822	4,671	5,493
8	0,710	0,857	1,344	1,647	2,180	2,733	3,144	3,490	4,078	4,594	5,527	6,423
9	0,972	1,152	1,735	2,088	2,700	3,325	3,785	4,168	4,817	5,380	6,393	7,357
10	1,265	1,479	2,156	2,558	3,247	3,940	4,446	4,865	5,570	6,179	7,267	8,295
11	1,587	1,834	2,603	3,053	3,816	4,575	5,124	5,578	6,336	6,989	8,148	9,237
12	1,935	2,214	3,074	3,571	4,404	5,226	5,818	6,304	7,114	7,807	9,034	10,18
13	2,305	2,617	3,565	4,107	5,009	5,892	6,524	7,041	7,901	8,634	9,926	11,13
14	2,697	3,041	4,075	4,660	5,629	6,571	7,242	7,790	8,696	9,467	10,82	12,08
15	3,107	3,483	4,601	5,229	6,262	7,261	7,969	8,547	9,499	10,31	11,72	13,03
16	3,536	3,942	5,142	5,812	6,908	7,962	8,707	9,312	10,31	11,15	12,62	13,98
17	3,980	4,416	5,697	6,408	7,564	8,672	9,452	10,09	11,12	12,00	13,53	14,94
18	4,439	4,905	6,265	7,015	8,231	9,390	10,21	10,86	11,95	12,86	14,44	15,89
19	4,913	5,407	6,844	7,633	8,907	10,12	10,97	11,65	12,77	13,72	15,35	16,85
20	5,398	5,921	7,434	8,260	9,591	10,85	11,73	12,44	13,60	14,58	16,27	17,81
21	5,895	6,447	8,034	8,897	10,28	11,59	12,50	13,24	14,44	15,44	17,18	18,77
22	6,404	6,983	8,643	9,542	10,98	12,34	13,28	14,04	15,28	16,31	18,10	19,73
23	6,924	7,529	9,260	10,20	11,69	13,09	14,06	14,85	16,12	17,19	19,02	20,69
24	7,453	8,085	9,886	10,86	12,40	13,85	14,85	15,66	16,97	18,06	19,94	21,65
25	7,991	8,649	10,52	11,52	13,12	14,61	15,64	16,47	17,82	18,94	20,87	22,62
26	8,537	9,222	11,16	12,20	13,84	15,38	16,44	17,29	18,67	19,82	21,79	23,58
27	9,093	9,803	11,81	12,88	14,57	16,15	17,24	18,11	19,53	20,70	22,72	24,54
28	9,656	10,39	12,46	13,56	15,31	16,93	18,05	18,94	20,39	21,59	23,65	25,51
29	10,23	10,99	13,12	14,26	16,05	17,71	18,85	19,77	21,25	22,48	24,58	26,48
30	10,80	11,59	13,79	14,95	16,79	18,49	19,66	20,60	22,11	23,36	25,51	27,44
31	11,39	12,20	14,46	15,66	17,54	19,28	20,48	21,43	22,98	24,26	26,44	28,41
32	11,98	12,81	15,13	16,36	18,29	20,07	21,30	22,27	23,84	25,15	27,37	29,38
33	12,58	13,43	15,82	17,07	19,05	20,87	22,12	23,11	24,71	26,04	28,31	30,34
34	13,18	14,06	16,50	17,79	19,81	21,66	22,94	23,95	25,59	26,94	29,24	31,31
35	13,79	14,69	17,19	18,51	20,57	22,47	23,76	24,80	26,46	27,84	30,18	32,28
36	14,40	15,32	17,89	19,23	21,34	23,27	24,59	25,64	27,34	28,73	31,12	33,25
37	15,02	15,97	18,59	19,96	22,11	24,07	25,42	26,49	28,21	29,64	32,05	34,22
38	15,64	16,61	19,29	20,69	22,88	24,88	26,25	27,34	29,09	30,54	32,99	35,19
39	16,27	17,26	20,00	21,43	23,65	25,70	27,09	28,20	29,97	31,44	33,93	36,16
40	16,91	17,92	20,71	22,16	24,43	26,51	27,93	29,05	30,86	32,34	34,87	37,13
50	23,46	24,67	27,99	29,71	32,36	34,76	36,40	37,69	39,75	41,45	44,31	46,86
60	30,34	31,74	35,53	37,48	40,48	43,19	45,02	46,46	48,76	50,64	53,81	56,62
80	44,79	46,52	51,17	53,54	57,15	60,39	62,57	64,28	66,99	69,21	72,92	76,19
100	59,89	61,92	67,33	70,06	74,22	77,93	80,41	82,36	85,44	87,95	92,13	95,81
150	99,46	102,1	109,1	112,7	118,0	122,7	125,8	128,3	132,1	135,3	140,5	145,0
200	140,7	143,8	152,2	156,4	162,7	168,3	172,0	174,8	179,4	183,0	189,0	194,3

Valores da função de distribuição:
$X \sim \chi^2_n : F(x) = P(X \le x) = p$



n \ p	0,500	0,600	0,700	0,800	0,850	0,900	0,925	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
1	0,455	0,708	1,074	1,642	2,072	2,706	3,170	3,841	5,024	6,635	7,879	10,83	12,12
2	1,386	1,833	2,408	3,219	3,794	4,605	5,181	5,991	7,378	9,210	10,60	13,82	15,20
3	2,366	2,946	3,665	4,642	5,317	6,251	6,905	7,815	9,348	11,34	12,84	16,27	17,73
4	3,357	4,045	4,878	5,989	6,745	7,779	8,496	9,488	11,14	13,28	14,86	18,47	20,00
5	4,351	5,132	6,064	7,289	8,115	9,236	10,01	11,07	12,83	15,09	16,75	20,51	22,11
6	5,348	6,211	7,231	8,558	9,446	10,64	11,47	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46	24,10
7	6,346	7,283	8,383	9,803	10,75	12,02	12,88	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32	26,02
8	7,344	8,351	9,524	11,03	12,03	13,36	14,27	15,51	17,53	20,09	21,95	26,12	27,87
9	8,343	9,414	10,66	12,24	13,29	14,68	15,63	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88	29,67
10	9,342	10,47	11,78	13,44	14,53	15,99	16,97	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59	31,42
11	10,34	11,53	12,90	14,63	15,77	17,28	18,29	19,68	21,92	24,73	26,76	31,26	33,14
12	11,34	12,58	14,01	15,81	16,99	18,55	19,60	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91	34,82
13	12,34	13,64	15,12	16,98	18,20	19,81	20,90	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53	36,48
14	13,34	14,69	16,22	18,15	19,41	21,06	22,18	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12	38,11
15	14,34	15,73	17,32	19,31	20,60	22,31	23,45	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70	39,72
16	15,34	16,78	18,42	20,47	21,79	23,54	24,72	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25	41,31
17	16,34	17,82	19,51	21,61	22,98	24,77	25,97	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79	42,88
18	17,34	18,87	20,60	22,76	24,16	25,99	27,22	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31	44,43
19	18,34	19,91	21,69	23,90	25,33	27,20	28,46	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82	45,97
20	19,34	20,95	22,77	25,04	26,50	28,41	29,69	31,41	34,17	37,57	40,00	45,31	47,50
21	20,34	21,99	23,86	26,17	27,66	29,62	30,92	32,67	35,48	38,93	41,40	46,80	49,01
22	21,34	23,03	24,94	27,30	28,82	30,81	32,14	33,92	36,78	40,29	42,80	48,27	50,51
23	22,34	24,07	26,02	28,43	29,98	32,01	33,36	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73	52,00
24	23,34	25,11	27,10	29,55	31,13	33,20	34,57	36,42	39,36	42,98	45,56	51,18	53,48
25	24,34	26,14	28,17	30,68	32,28	34,38	35,78	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62	54,95
26	25,34	27,18	29,25	31,79	33,43	35,56	36,98	38,89	41,92	45,64	48,29	54,05	56,41
27	26,34	28,21	30,32	32,91	34,57	36,74	38,18	40,11	43,19	46,96	49,65	55,48	57,86
28	27,34	29,25	31,39	34,03	35,71	37,92	39,38	41,34	44,46	48,28	50,99	56,89	59,30
29	28,34	30,28	32,46	35,14	36,85	39,09	40,57	42,56	45,72	49,59	52,34	58,30	60,73
30	29,34	31,32	33,53	36,25	37,99	40,26	41,76	43,77	46,98	50,89	53,67	59,70	62,16
31	30,34	32,35	34,60	37,36	39,12	41,42	42,95	44,99	48,23	52,19	55,00	61,10	63,58
32	31,34	33,38	35,66	38,47	40,26	42,58	44,13	46,19	49,48	53,49	56,33	62,49	64,99
33	32,34	34,41	36,73	39,57	41,39	43,75	45,31	47,40	50,73	54,78	57,65	63,87	66,40
34	33,34	35,44	37,80	40,68	42,51	44,90	46,49	48,60	51,97	56,06	58,96	65,25	67,80
35	34,34	36,47	38,86	41,78	43,64	46,06	47,66	49,80	53,20	57,34	60,27	66,62	69,20
36	35,34	37,50	39,92	42,88	44,76	47,21	48,84	51,00	54,44	58,62	61,58	67,98	70,59
37	36,34	38,53	40,98	43,98	45,89	48,36	50,01	52,19	55,67	59,89	62,88	69,35	71,97
38	37,34	39,56	42,05	45,08	47,01	49,51	51,17	53,38	56,90	61,16	64,18	70,70	73,35
39	38,34	40,59	43,11	46,17	48,13	50,66	52,34	54,57	58,12	62,43	65,48	72,06	74,72
40	39,34	41,62	44,16	47,27	49,24	51,81	53,50	55,76	59,34	63,69	66,77	73,40	76,10
50	49,33	51,89	54,72	58,16	60,35	63,17	65,03	67,50	71,42	76,15	79,49	86,66	89,56
60	59,33	62,13	65,23	68,97	71,34	74,40	76,41	79,08	83,30	88,38	91,95	99,61	102,7
80	79,33	82,57	86,12	90,41	93,11	96,58	98,86	101,9	106,6	112,3	116,3	124,8	128,3
100	99,33	102,9	106,9	111,7	114,7	118,5	121,0	124,3	129,6	135,8	140,2	149,4	153,2
150	149,3	153,8	158,6	164,3	168,0	172,6	175,6	179,6	185,8	193,2	198,4	209,3	213,6
200	199,3	204,4	210,0	216,6	220,7	226,0	229,5	234,0	241,1	249,4	255,3	267,5	272,4

3.1.5 DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA t-STUDENT

Definição: A v. a. contínua X segue uma **distribuição t-Student** com $\boldsymbol{n}$ graus de liberdade, i.e., $\boldsymbol{X \sim t_n}$, se a sua função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad n > 0,$$

onde $\Gamma(\alpha)$ é a função Gama, definida por $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\ x^{\alpha-1}\ dx$.

O parâmetro caracterizador desta distribuição é n.

Principais características:

- É simétrica em relação ao eixo $x = 0$;

- A distribuição t-Student tende para a distribuição Normal à medida que n aumenta.

A distribuição t-Student é mais pontiaguda e tem caudas mais pesadas do que a distribuição Normal (Figura 3.1.10).

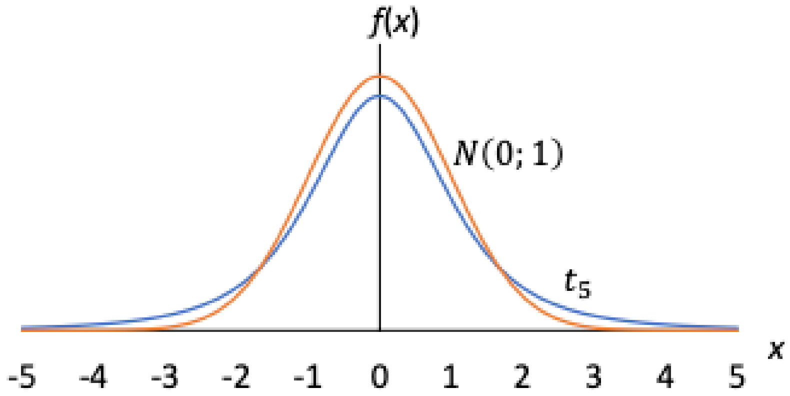


Figura 3.1.10: Comparação da função densidade de probabilidade da distribuição t-Student (com $n = 5$) com a distribuição $N(0; 1)$.

Se $\boldsymbol{X \sim t(n)}$ então, $\mu_X = E(X) = 0$ e $\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{n}{n-2}$, $n > 2$.

Usualmente utiliza-se a notação $t_{n;\alpha}$ para representar o quantil de probabilidade α de uma v. a. $X \sim t_n$. Portanto, $t_{n;\alpha}$ corresponde ao menor valor k tal que $P(X \leq k) = \alpha$.

Teorema: Se X e Y forem v. a. independentes $X \sim N(\mu; \sigma)$ e $Y \sim \chi_n^2$, então

$$T = \frac{\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t_n.$$

EXEMPLO 3.1.6

Para os dados de nitrato, a média da amostra de concentração é igual a 7,51 mg/L e encontra-se a uma distância considerável abaixo do verdadeiro valor de referência 8,00 mg/L. Se a verdadeira média da amostra é de 8,0 mg/L e o laboratório está medindo precisamente, um valor tão baixo quanto 7,51 que ocorrem por acaso apenas quatro vezes em 100. Sabe-se que o desvio padrão é 1,38 e 27 amostras. Qual será o valor T? Qual a probabilidade de se obter uma amostra tão pequenas com média = 7,51 mg/L a partir da análise das 27 amostras?

Solução:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

$$t = \frac{7{,}51 - 8}{1{,}38/\sqrt{27}}$$

$$t = \frac{-0{,}49}{1{,}38/5{,}19}$$

$$t = \frac{-0{,}49}{0{,}2658} = -1{,}842$$

n	α = 0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Grau de liberdade v = n - 1

Como são 27 amostras, temos:

v=27-1=26 grau de liberdade

$$t = -1{,}842$$

$$P(\bar{X} \leq 7{,}51) = P(t \leq -1{,}842)$$
$$= P(t > 1{,}842) < 0{,}05$$

EXEMPLO 3.1.7

Um engenheiro químico afirma que a média da população de rendimento de um processo em lote é de 500 gramas por mililitro de matéria-prima. Para verificar essa afirmação tem amostras de 25 lotes de cada mês. Se o t-valor calculado cai entre $-t_{0,05}$ e $t_{0,05}$, dar-se por satisfeito com esta reivindicação.

Qual conclusão poderia encontrar a partir de uma amostra que tem média de $\bar{x} = 518$ gramas por mililitro e um desvio padrão amostral de $s = 40$ gramas? Assumir a distribuição do rendimento aproximadamente normal.

Solução:

Da tabela encontramos que $t_{0,05} = 1{,}711$ para 24 graus de liberdade.

PORTANTO, o engenheiro pode estar satisfeito com a sua afirmação se uma amostra de 25 lotes rende um valor de *t* entre -1,711 e 1,711.

Se $\mu = 500$, então:

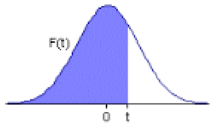
$$t = \frac{518 - 500}{\frac{40}{\sqrt{25}}} = 2{,}25$$

A probabilidade de se obter um valor de *t*, com $n = 24$, igual a ou maior do que 2,25 é menor que 0,025.

Se $\mu > 500$, o valor de T calculado a partir da amostra é mais razoável.

Valores da função de distribuição:

$T \sim t_n: F(t) = P(T \leq t) = p$



n \ p	0,6	0,7	0,8	0,9	0,925	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
1	0,325	0,727	1,376	3,078	4,165	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,282	2,920	4,303	6,965	9,925	22,3	31,6
3	0,277	0,584	0,978	1,638	1,924	2,353	3,182	4,541	5,841	10,21	12,92
4	0,271	0,569	0,941	1,533	1,778	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	1,699	2,015	2,571	3,365	4,032	5,894	6,869
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,650	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,617	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,592	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,574	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,559	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,548	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,538	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,530	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,523	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,517	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,512	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,508	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,504	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,500	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,497	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,494	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,492	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,489	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,487	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,485	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,483	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,482	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,689
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,480	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,479	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,660
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,477	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
31	0,256	0,530	0,853	1,309	1,476	1,696	2,040	2,453	2,744	3,375	3,633
32	0,255	0,530	0,853	1,309	1,475	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
33	0,255	0,530	0,853	1,308	1,474	1,692	2,035	2,445	2,733	3,356	3,611
34	0,255	0,529	0,852	1,307	1,473	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
35	0,255	0,529	0,852	1,306	1,472	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340	3,591
36	0,255	0,529	0,852	1,306	1,471	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
37	0,255	0,529	0,851	1,305	1,470	1,687	2,026	2,431	2,715	3,326	3,574
38	0,255	0,529	0,851	1,304	1,469	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
39	0,255	0,529	0,851	1,304	1,468	1,685	2,023	2,426	2,708	3,313	3,558
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,468	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,299	1,462	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,458	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,526	0,846	1,292	1,453	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,451	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390
150	0,254	0,526	0,844	1,287	1,447	1,655	1,976	2,351	2,609	3,145	3,357
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,440	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

3.1.6 DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA GAMA

As **distribuições Exponencial** e **Qui-quadrado** são casos particulares de uma distribuição mais geral, a **distribuição Gama**.

Definição: A v. a. contínua *X* segue uma **distribuição Gama** com parâmetros $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\lambda}$, i. e., $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\lambda})$, se a sua função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha}\, x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x}, \qquad x > 0, \qquad n > 0.$$

onde $\Gamma(\alpha)$ é a função Gama, definida por $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\ x^{\alpha-1}\ dx$.

Os parâmetros caracterizadores desta distribuição são α e λ.

Casos particulares:

- $X \sim \chi_n^2 \Leftrightarrow X \sim G\left(\alpha = \frac{n}{2}; \lambda = \frac{1}{2}\right)$;
- $X \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow X \sim G(\alpha = 1; \lambda)$.

O aspeto da distribuição depende do valor dos parâmetros (Figura 3.1.11).

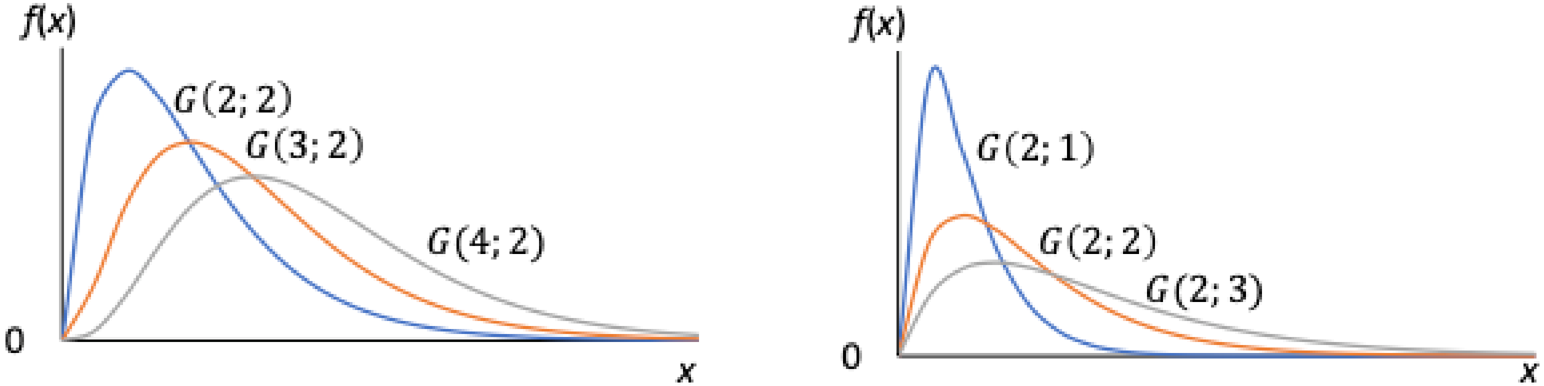


Figura 3.1.11: Função densidade de probabilidade da distribuição Gama para diferentes valores de α e λ.

Se $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\lambda})$ então $\mu_X = E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$ e $\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

Teorema da aditividade:

Se X_i, i=1, 2, ..., K, são v. a. independentes e $\boldsymbol{X}_i \sim \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\lambda})$ então

$$\sum_{i=1}^{K} X_i \sim G(\alpha; \lambda), \quad com \quad \alpha = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i.$$

A distribuição Gama pode ser como uma generalização da distribuição Exponencial para descrever a v.a. X que representa o tempo de espera até à ocorrência do $\boldsymbol{n}$-ésimo sucesso. A variável X resulta da soma dos tempos de espera entre as várias ocorrências sucessivas (X_i) até à ocorrência pretendida. Deste modo, pelo teorema da aditividade como X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, são v. a. independentes e $X_i \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow X_i \sim G(1;\ \lambda)$, então

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(n; \lambda)$$

EXERCÍCIOS 3.1-3.39

3.1 Suponha que x é uma variável aleatória mais bem descrita por uma distribuição de probabilidade uniforme com $c = 20$ e $d = 45$.
a. Encontre $f(x)$.
b. Encontre a média e o desvio-padrão de x.
c. Faça o gráfico de $f(x)$ e localize μ e o intervalo $\mu \pm 2\sigma$ no gráfico. Note que a probabilidade de x assumir um valor dentro do intervalo $\mu \pm 2\sigma$ é igual a 1.

3.2 Referindo-se ao exercício 5.1. Encontre as seguintes probabilidades:
a. $P(20 \leq x \leq 30)$
b. $P(20 < x \leq 30)$
c. $P(x \geq 30)$
d. $P(x \geq 45)$
e. $P(x \leq 40)$
f. $P(x < 40)$
g. $P(15 \leq x \leq 35)$
h. $P(21{,}5 \leq x \leq 31{,}5)$

3.3 Suponha que x é uma variável aleatória mais bem descrita por uma distribuição de probabilidade uniforme com $c = 3$ e $d = 7$.
a. Encontre $f(x)$.
b. Encontre a média e o desvio-padrão de x.
c. Encontre $P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma)$.

3.4 Referindo-se ao exercício 5.3. Encontre o valor de a que faz com que cada uma das seguintes probabilidades seja verdade.
a. $P(x \geq a) = 0{,}6$
b. $P(x \leq a) = 0{,}25$
c. $P(x \leq a) = 1$
d. $P(4 \leq x \leq a) = 0{,}5$

3.5 A variável aleatória x é mais bem descrita por uma distribuição de probabilidade uniforme com $c = 100$ e $d = 200$. Encontre a probabilidade de x assumir um valor
a. Mais de 2 desvios-Padrão de μ.
b. Menos de 3 desvios-padrão de μ.
c. Dentro de 2 desvios-padrão de μ.

3.6 A variável aleatória x é mais bem descrita por uma distribuição de probabilidade uniforme com média 10 e desvio-padrão l. Encontre c, d, e $f(x)$. Faça o gráfico da distribuição de probabilidade.

3.7 A distribuição de frequência mostrada na tabela abaixo descreve as perdas com acidentes em plataformas marítimas de uma grande companhia de petróleo durante os últimos dois anos. Esta distribuição pode ser usada pela companhia para predizer perdas futuras e ajudar a determinar um nível apropriado da cobertura do seguro. Para simplificar a análise, as perdas são distribuídas dentro de intervalos de frequências. Os analistas podem tratar o intervalo como uma distribuição de probabilidade uniforme (Revisão de Pesquisa, Verão 1998). No negócio de seguros, estes intervalos frequentemente são chamados camadas (layers).

Camada	Perdas (milhões de $)	Frequencias
1	0.00-0.01	668
2	0.01-0.05	38
3	0.05-0.10	7
4	0.10-0.25	4
5	0.25-0.50	2
6	0.50-1.00	1
7	1.00-2.50	0
		720

Fonte: Cozzolino, John M., e Peter J. Mikola, "Aplicações do Piecewise distribuição constante de Pareto", revisão de pesquisa, verão 1998.

a. Use uma distribuição uniforme para modelar a quantia de perda na camada 2. Faça o gráfico da distribuição. Calcule e interprete sua média e variância.
b. Repita a Parte **a** para a camada 6.
c. Se uma perda acontece na camada 2, qual é a probabilidade de exceder $10,000? Que está abaixo de $25,000?
d. Se uma perda acontece na camada 6, qual é a probabilidade que está entre $750,000 e $1,000,000? Que excede $900,000? Que tem exatamente $900,000?

3.8 Os investigadores da Universidade de Califórnia-Berkeley projetaram, construíram, e testaram um circuito de condensador de troca para geradores de sinais aleatórios (Diário Internacional de Teoria de Circuito e Aplicações, maio-junho de 1990). A trajetória do circuito foi mostrou-se ser distribuída uniformemente no intervalo (0, 1).
a. Dê o média e a variância da trajetória do circuito.
b. Calcule a probabilidade de a trajetória cair entre 0,2 e 0,4.
c. Você esperaria observar uma trajetória que exceda 0,995? Explique.

3.9 O conjunto de dados listado na tabela abaixo foi gerado por números aleatórios. Construa um histograma da frequência relativa para os dados. Com exceção da variação esperada em frequências relativas entre os intervalos de classe, sugira seu histograma para que os dados estejam em uma variável aleatória uniforme com $c = 0$ e $d = 100$? Explique.

38,8759	**98,0716**	**64,5788**	**60,8422**	**0,8413**

88,3734	**31,8792**	**32,9847**	**0,7434**	**93,3017**
12,4337	**11,7828**	**87,4506**	**94,1727**	**23,0892**
47,0121	**43,3629**	**50,7119**	**88,2612**	**69,2875**
62,6626	**55,6267**	**78,3936**	**28,6777**	**71,6829**
44,0466	**57,8870**	**71,8318**	**28,9622**	**23,0278**
35,6438	**38,6584**	**46,7404**	**11,2159**	**96,1009**
95,3660	**21,5478**	**87,7819**	**12,0605**	**75,1015**

3.10 Durante a recessão do final dos anos 80 e início dos anos 90, muitas companhias começaram a apertar as suas políticas de despesa de reembolso. Por exemplo, uma pesquisa de 550 companhias pela Corporação de Dartnell encontrou que em 1992 sobre meio reembolso de suas vendas pessoais de máquinas de fac-símile para casa, mas em 1994 só um quarto continuou fazendo assim (o Inc., *Sept.* 1995). Uma companhia encontrou que reembolsos mensais aos seus empregados, x, poderia ser modelada adequadamente por uma distribuição uniforme sob o intervalo $\$10{,}000 \leq x \leq \$15{,}000$.

a. Encontre $E\,(x)$ e interprete no contexto do exercício.
b. Qual é a probabilidade de os reembolsos de empregados exceder a \$12,000 no mês que vem?
c. Para propósitos de orçamento, a companhia precisa calcular no mês que vem despesas de reembolso de empregados. Quanto deveria orçar a companhia para reembolsos de empregado se eles quiserem que a probabilidade de exceder a quantia orçada seja somente 0,20?

3.11 O gerente de uma companhia local de engarrafamento de refrigerantes acredita que quando uma máquina nova de dispensar bebidas é fixada para produzir 7 onças, produz na realidade ao acaso em qualquer momento uma quantidade x entre 6,5 e 7,5 onças. Suponha que x tenha uma distribuição de probabilidade uniforme.

a. A quantia produzida pela máquina de bebida é uma variável aleatória discreta ou contínua? Explique.
b. Faça o gráfico da função de frequência para x, a quantidade de bebida que o gerente acredita ser produzida pela máquina nova quando é fixado para produzir 7 onças.
c. Encontre a média e o desvio-padrão para a distribuição da parte **b**, e localize a média e o intervalo $\mu \pm 2\sigma$ no gráfico.
d. Encontre $P(x \geq 7)$.
e. Encontre $P(x < 6)$.
f. Encontre $P(6{,}5 \leq x \leq 7{,}25)$.
g. Qual é a probabilidade que cada uma das próximas seis garrafas enchidas pela máquina nova conter mais de 7,25 onças de bebida? Assuma que a quantia de bebida produzida em uma garrafa é independente da quantia produzida em outra garrafa.

3.12 Frequentemente é definida a confiança de um pedaço de equipamento ser a probabilidade, p, que o equipamento executa sua função planejada prosperamente para um determinado período de tempo sob condições específicas (Render e Heizer. *Principio de operações de administração, 1995).* Porque p varia de um ponto no tempo para outro, alguns analistas de confiança tratam p como se fosse uma variável aleatória. Suponha que um analista caracteriza a incerteza sobre a confiança de um particular dispositivo de robótica usada em uma linha de montagem de automóveis que usa a seguinte distribuição:

$$f(p) = \begin{cases} 1, & 0 \leq p \leq 1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

a. Faça o gráfico da distribuição de probabilidade do analista para *p*.
b. Encontre a média e a variância de *p*.
c. De acordo com a distribuição de probabilidade do analista para *p*, qual é a probabilidade de *p* ser maior que 0,95? Menor que 0,95?
d. Suponha que o analista receba a informação adicional que *p* definitivamente está entre 0,90 e 0,95, mas há incerteza sobre onde caem entre estes valores. Descreva a distribuição de probabilidade que o analista deveria usar agora para descrever *p*.

3.13 Encontre a área sob a distribuição de probabilidade normal padrão entre os pares seguintes da *z*-contagens:
a. $z = 0$ e $z = 2{,}00$
b. $z = 0$ e $z = 3$
c. $z = 0$ e $z = 1{,}5$
d. $z = 0$ e $z = 0{,}80$

3.14 Encontre as probabilidades seguintes para a variável aleatória normal padrão *z*:
a. $P(-1 \leq z \leq 1)$
b. $P(-2 \leq z \leq 2)$
c. $P(-2{,}16 \leq z \leq 0{,}55)$
d. $P(-0{,}42 \leq z \leq 1{,}96)$
e. $P(z \geq -2{,}33)$
f. $P(z < 2{,}33)$

3.15 Encontre as probabilidades seguintes para a variável aleatória normal padrão *z*:
a. $P(z > 1{,}46)$
b. $P(z < -1{,}56)$
c. $P(0{,}67 \leq z \leq 2{,}41)$
d. $P(-1{,}96 \leq z \leq -0{,}33)$
e. $P(z \geq 0)$
f. $P(-2{,}33 < z < 1{,}50)$

3.16 Encontre cada uma das probabilidades seguintes para variável aleatória normal padrão *z*:

a. $P(z = 1)$
b. $P(z \leq 1)$
c. $P(z < 1)$
d. $P(z > 1)$

3.17 Encontre cada umas das probabilidades seguintes para variável aleatória normal padrão *z*:

a. $P(-1 \leq z \leq 1)$
b. $P(-1{,}96 \leq z \leq 1{,}96)$
c. $P(-1{,}645 \leq z \leq 1{,}645)$
d. $P(-2 \leq z \leq 2)$

3.18 Encontre um valor para variável aleatória normal padrão *z*, chamada z_0, tal que

a. $P(z \geq z_0) = 0{,}05$
b. $P(z \geq z_0) = 0{,}025$
c. $P(z \leq z_0) = 0{,}025$
d. $P(z \geq z_0) = 0{,}10$
e. $P(z > z_0) = 0{,}10$

3.19 Encontre um valor para variável aleatória normal padrão *z*, chamada z_0, tal que

a. $P(z \leq z_0) = 0{,}2090$
b. $P(z \leq z_0) = 0{,}7090$
c. $P(-z_0 \leq z < z_0) = 0{,}8472$
d. $P(-z_0 \leq z \leq z_0) = 0{,}1664$
e. $P(z_0 \leq z \leq 0) = 0{,}4798$
f. $P(-1 < z < z_0) = 0{,}5328$

3.20 Dê a *z*-contagem para uma medida de uma distribuição normal para o seguinte:

a. l desvio padrão acima da média
b. l desvio padrão abaixo da média
c. Igual a média
d. 2,5 desvios padrão abaixo da média
e. 3 desvios padrão acima da média

3.21 Suponha que a variável aleatória x é melhor descrita por uma distribuição normal com $\mu = 30$ e $\sigma = 4$. Encontre a z-contagem que corresponde a cada um dos valores de x seguintes:

a. $x = 20$
b. $x = 30$
c. $x = 27{,}5$
d. $x = 15$
e. $x = 35$
f. $x = 25$

3.22 A variável aleatória x tem uma distribuição normal com $\mu = 1.000$ e $\sigma = 10$.

a. Encontre a probabilidade que x assuma um valor maior que 2 desvios padrão de sua média. Mais de 3 desvios padrão de μ.
b. Encontre a probabilidade que x assuma um valor dentro de 1 desvio padrão de sua média. Dentro de 2 desvios padrão de μ.
c. Encontre o valor de x que representa o 80º percentil desta distribuição. O 10º percentil.

3.23 Suponha que x é uma variável aleatória normalmente distribuída com $\mu = 11$ e $\sigma = 2$. Encontre cada um do seguinte:

a. $P(10 \leq x \leq 12)$
b. $P(6 \leq x \leq 10)$
c. $P(13 \leq x \leq 16)$
d. $P(7{,}8 \leq x \leq 12{,}6)$
e. $P(x \geq 13{,}24)$
f. $P(x \geq 7{,}62)$

3.24 Suponha que x é uma variável aleatória normalmente distribuída com $\mu = 50$ e $\sigma = 3$. Encontre um valor da variável aleatória, chamado x_0, tal que

a. $P(x \leq x_0) = 0{,}8413$
b. $P(x > x_0) = 0{,}025$
c. $P(x > x_0) = 0{,}95$
d. $P(41 \leq x < x_0) = 0{,}8630$
e. 10% dos valores de x é menos que x_0.
f. 1% dos valores de x é maior que x_0.

3.25 Suponha que x é uma variável aleatória normalmente distribuída com média 120 e variância 36. Desenhe um esboço do gráfico da distribuição de x. Localize μ e o intervalo $\mu \pm 2\sigma$ no gráfico. Encontre as seguintes probabilidades:

a. $P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma)$
b. $P(x \geq 128)$

c. $P(x \leq 108)$
d. $P(112 \leq x \leq 130)$
e. $P(114 \leq x \leq 116)$
f. $P(115 \leq x \leq 128)$

3.26 A variável aleatória x tem uma distribuição normal com desvio padrão 25. É conhecido que a probabilidade de x exceder 150 é 0,90. Encontre a média μ da distribuição de probabilidade.

3.38 Suponha que o comprimento de tempo (em dias) entre vendas para um vendedor de automóvel é modelado com uma distribuição exponencial com $\lambda = 0{,}5$. Qual é a probabilidade que o vendedor ficará mais de 5 dias sem uma venda?

3.39 Um fabricante de forno de microondas está tentando determinar o comprimento de período de garantia deveria anexar a seu tubo de magnetron, o componente mais crítico no forno. Testes preliminares mostraram que o comprimento de vida (em anos), x, de um tubo de magnetron tem uma distribuição de probabilidade exponencial com $\lambda = 0{,}16$.

a. Encontre a média e o desvio padrão de x.
b. Suponha que um período de garantia de 5 anos é prendido ao tubo de magnetron. Que fração de tubos o fabricante tem que planejar substituir, assumindo que o modelo exponencial com $\lambda = 0{,}16$ é adequado?
c. Encontre a probabilidade que o comprimento de vida de um tubo de magnetron cairá dentro do intervalo $\mu - 2\sigma$ a $\mu + 2\sigma$.