

Métodos Computacionais para Equações Diferenciais

Aula 3 - Exercícios

Prof.^a Dr.^a Analice Costacurta Brandi

Optativa - Tópicos de Matemática Aplicada
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

1. Relembrando o Problema
2. Relembrando os Métodos Numéricos
3. Exercícios

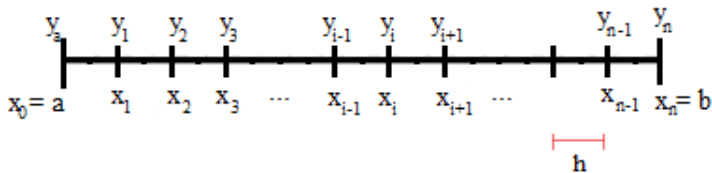
Relembrando o Problema

O problema que queremos resolver é o PVI abaixo,

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

definido em um intervalo $[a, b]$ e N subintervalos com espaçamento $h = \frac{b-a}{N}$. Por convenção, $f_i = f(x_i, y_i)$, onde $i = 0, 1, \dots, N-1$.

O primeiro passo é dividir o intervalo $[a, b]$ em N subintervalos iguais, cada um de comprimento h , definindo uma malha.



Método de Euler Explícito

$$y_{i+1} = y_i + hf_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$ETL = -\frac{h}{2}y''(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}].$$

Método de Euler Implícito

$$y_{i+1} = y_i + hf_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$ETL = \frac{h}{2}y''(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Método dos Trapézios

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$ETL = -\frac{h^2}{12}y'''(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}].$$



1. Determine as expressões para Euler Explícito e Implícito dos PVI's abaixo

a)
$$\begin{cases} y' = x - y, & x \in [0, 1]. \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Solução exata: $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

b)
$$\begin{cases} y' = -2xy, & x \in [-2.5, 2.5]. \\ y(-2.5) = e^{-6.25}. \end{cases}$$

Solução exata: $y(x) = e^{-x^2}$.

2. Faça um programa e plote o gráfico comparando a solução exata com as soluções aproximadas (do exercício anterior). Considere $h = 0.1$. Teste a diferença centrada.



Respostas dos Exercícios Anteriores

1. a) **Euler Explícito:** $y_{i+1} = (1 - h)y_i + hx_i$;
Euler Implícito: $y_{i+1} = \frac{y_i + hx_{i+1}}{1 + h}$.
- b) **Euler Explícito:** $y_{i+1} = y_i(1 - 2hx_i)$;
Euler Implícito: $y_{i+1} = \frac{y_i}{1 + 2hx_{i+1}}$.
2. a) **Diferença Centrada:** $y_{i+1} = y_{i-1} + 2h(x_i - y_i)$;
Programa Ex1_MetEuler.
- b) **Diferença Centrada:** $y_{i+1} = y_{i-1} - 4hx_i y_i$;
Programa Ex2_MetEuler.



Exercícios

1. Faça um programa e plote o gráfico comparando a solução exata com as soluções aproximadas, utilizando os métodos de Euler Explícito, Implícito e Regra dos Trapézios, para diferentes espaçamentos (valores de h). Além disso, calcule o erro local e o erro relativo para cada aproximação.

c)
$$\begin{cases} y' = 5y - 1, & x \in [0, 2]. \\ y(0) = 1.2. \end{cases}$$

Solução exata: $y(x) = e^{5x} + 0.2$.

d)
$$\begin{cases} y' = y - x^2 + 1, & x \in [0, 2]. \\ y(0) = 0.5. \end{cases}$$

Solução exata: $y(x) = (x + 1)^2 - 0.5e^x$.

