Aula 11

Transformações Geométricas 3D e Coordenadas Homogêneas

Transformações Geométricas 3D e Coordenadas Homogêneas

Para que também a transformação de translação possa ser efetuada através da multiplicação de matrizes, deixando o processamento mais simples, permitindo a composição de várias matrizes em uma única, utiliza-se **coordenadas homogêneas**, que é um vetor de coordenadas no plano, mas estendido para 3D

assim, um ponto 2D [x y] passa a ser [x y 1]

observando que o terceiro valor deve ser sempre 1
Quando ficar diferente de 1, todos os três valores devem ser divididos pelo terceiro valor

Transformações Geométricas 3D e Coordenadas Homogêneas

Deste modo, a matriz de transformação **2D** também é estendida, ficando:

Rotação
Escala
Reflexão

$$T = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ m & n & s \end{bmatrix}$$

Projeções

Escala Global

Translação

Transformações Geométricas 3D e Coordenadas Homogêneas

Exemplo 1: Escalas locais **2D** em x e y

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 3y & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: Escala global **2D**

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/4 & y/4 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Geométricas 3D e Coordenadas Homogêneas

Exemplo 3: Translação **2D** em x e y

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+5 & y-3 & 1 \end{bmatrix}$$

Notação

Aplicação da Transformação em um ponto 2D

Alguns autores, multiplicam o ponto pela matriz

Ex.

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}$$

Nesta disciplina, usamos somente esta opção

Outros autores multiplicam a matriz pelo ponto

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

Observe que há diferenças no resultado, quando se considera os elementos da matriz de transformação

2D → 3D

- Métodos para transformações geométricas 3D são extensões de métodos 2D, porém incluindo a coordenada z
- A translação e a escala são simples adaptações, mas a rotação é mais complexa
  - Em 2D somente são consideradas rotações em torno de um eixo perpendicular ao plano xy, em 3D pode-se pegar qualquer orientação espacial para o eixo de rotação
- Uma posição 3D expressa em coordenadas homogêneas é representada usando vetores linha ou coluna de 4 elementos, portanto as transformações 3D são matrizes 4 × 4

Transformações Geométricas 3D e Coordenadas Homogêneas

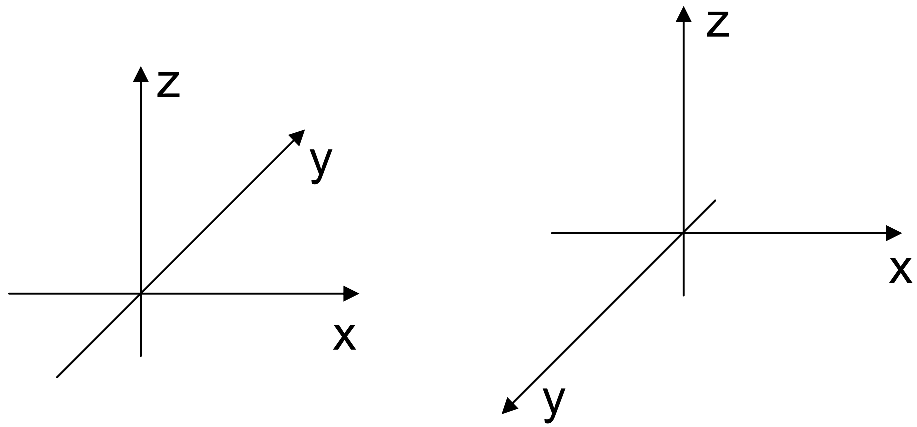
Transformações 3D

Um ponto no espaço 3D é representado por [x y z] e, em coordenadas homogêneas fica   [x   y   z   1]

A matriz de transformação fica

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$$

O espaço 3D é apresentado no plano conforme as figuras



uma projeção de 3D para 2D

Transformações Geométricas 3D e Coordenadas Homogêneas

Transformações 3D – **Escala 3D**

Os termos da diagonal de T (a , e , i) geram a escala local

nos eixos x, y e z [3x3] ou global (s) [1x1]

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ l & m & n & \boxed{s} \end{bmatrix}$$

Transformações Geométricas 3D e Coordenadas Homogêneas

Transformações 3D – **Escala 3D**

Exemplo 1 – Escala 3D local

$$[x \quad y \quad z \quad 1] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [2x \quad 5y \quad 4z \quad 1]$$

Exemplo 2 – Escala 3D Global

$$[x \quad y \quad z \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = [x \quad y \quad z \quad 3] = [x/3 \quad y/3 \quad z/3 \quad 1]$$

Transformações Geométricas 3D e Coordenadas Homogêneas

Transformações 3D – **Shearing 3D (Cizalhamento)**

Os termos não diagonais da matriz [3x3] geram o cizalhamento

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$$

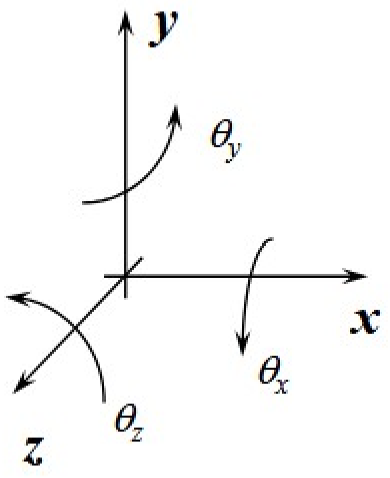
O cizalhamento é o rompimento das simetrias dos objetos, quando um cubo, por exemplo, tem as suas arestas e ângulos alterados

Transformações Geométricas 3D e Coordenadas Homogêneas

Transformações 3D – **Rotação 3D**

Os termos na matriz [3x3] de T geram as rotações ao redor dos eixos x, y e z.

Rotação em torno do eixo x por um ângulo θ

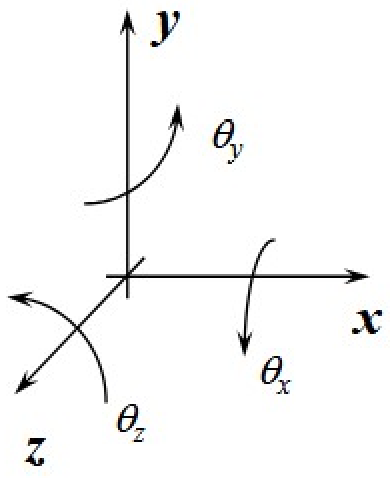


$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & sen\theta & 0 \\ 0 & -sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Geométricas 3D e Coordenadas Homogêneas

Transformações 3D – **Rotação 3D**

Rotação em torno do eixo y por um ângulo α

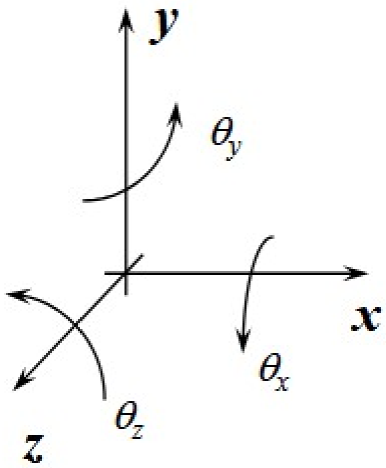


$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -sen\,\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sen\,\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Geométricas 3D e Coordenadas Homogêneas

Transformações 3D – **Rotação 3D**

Rotação em torno do eixo z por um ângulo β



$$T = \begin{bmatrix} \cos\beta & sen\beta & 0 & 0 \\ -sen\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Geométricas 3D e Coordenadas Homogêneas

Transformações 3D – **Reflexão 3D**

Os termos na diagonal da matriz [3x3] de T geram as reflexões ao redor dos eixos x, y e z.

Por exemplo a matriz T

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ transforma [x y z 1] em [x y -z 1]

Transformações Geométricas 3D e Coordenadas Homogêneas

Transformações 3D – **translação 3D**

Os termos da matriz [1x3] de T geram as translações em x, y e z

Por exemplo a matriz T

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

transforma [x y z 1]

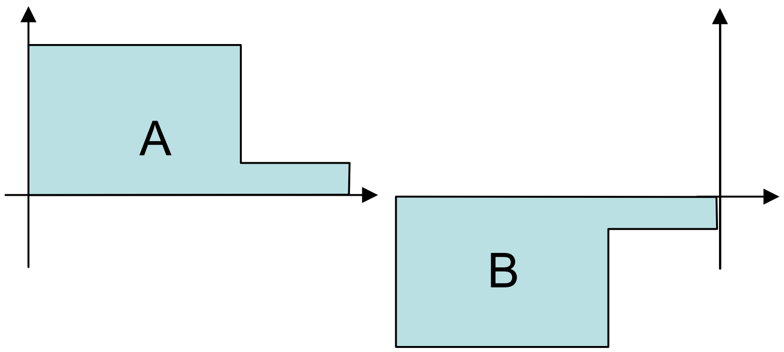
em [x+2 y+5 z-4 1]

Prática

1) Obtenha uma única matriz de transformação 2D (usando coordenadas homogêneas) para realizar a rotação de um objeto 45º sentido anti-horário, ao redor do seu centro c_x,c_y

2) Obtenha as transformações 2D que transformam A em B.

a)



b)