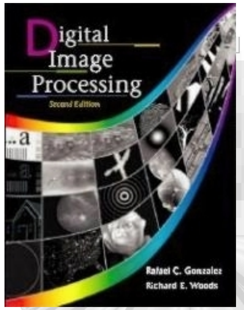


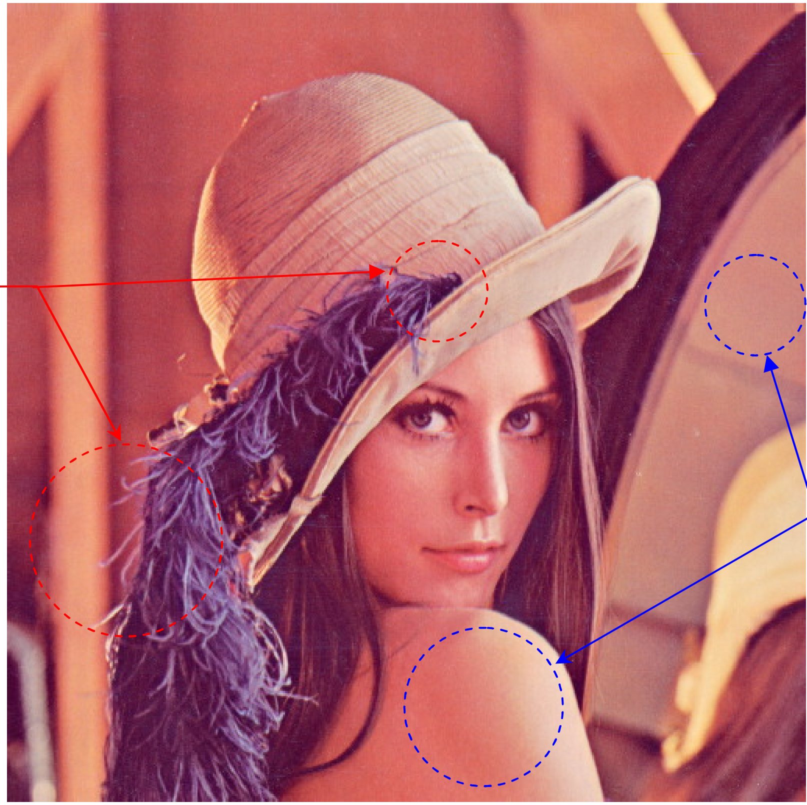
Aula 6.1

Domínio da Frequência

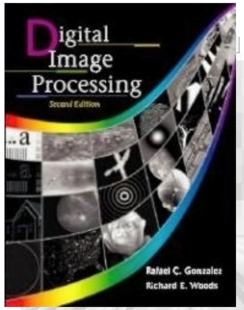
Processamento de imagens no domínio da freqüência

Em geral, as imagens possuem componentes de baixa e altas frequências

Altas Frequências
(áreas heterogêneas
detalhes, bordas e
ruídos)



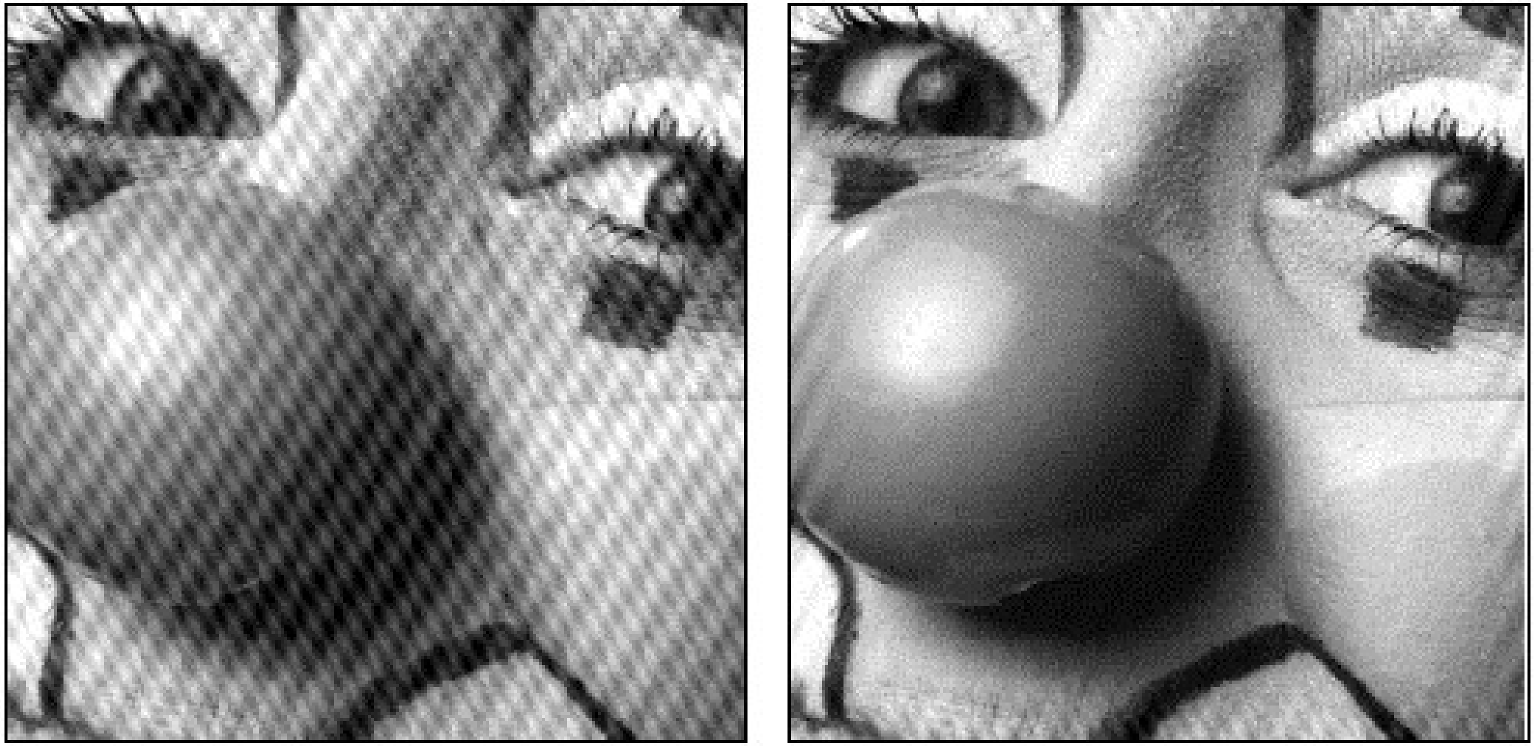
Baixas Frequências
(áreas homogêneas)



Processamento de imagens no domínio da freqüência

Diversas operações podem ser mais facilmente executadas no domínio da frequência

Ex. Redução de ruído periódico – após a redução de um sinal interferente com uma frequência bem definida, a imagem fica limpa



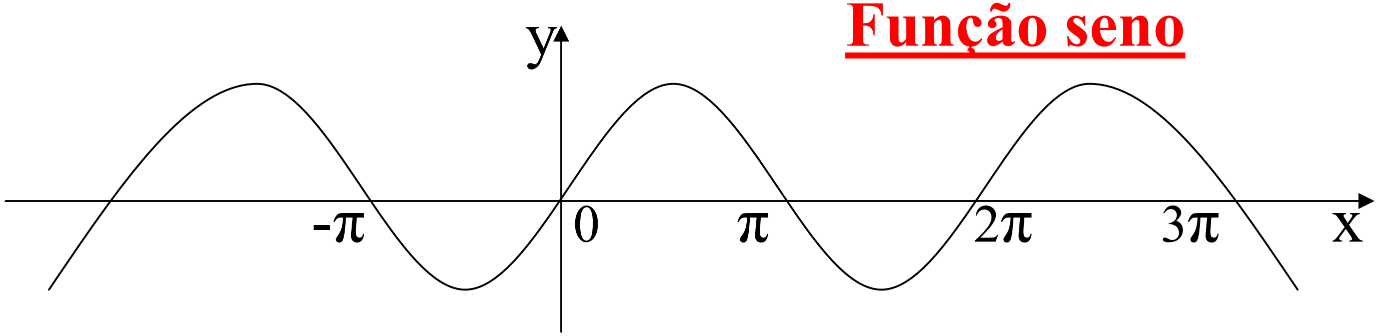
Funções periódicas

Uma função *f(x)* é chamada periódica se ela é definida para todo real *x* e se existe um número positivo *p* tal que:

$$f(x+p) = f(x)$$

O Número *p* é chamado período da função *f(x)*

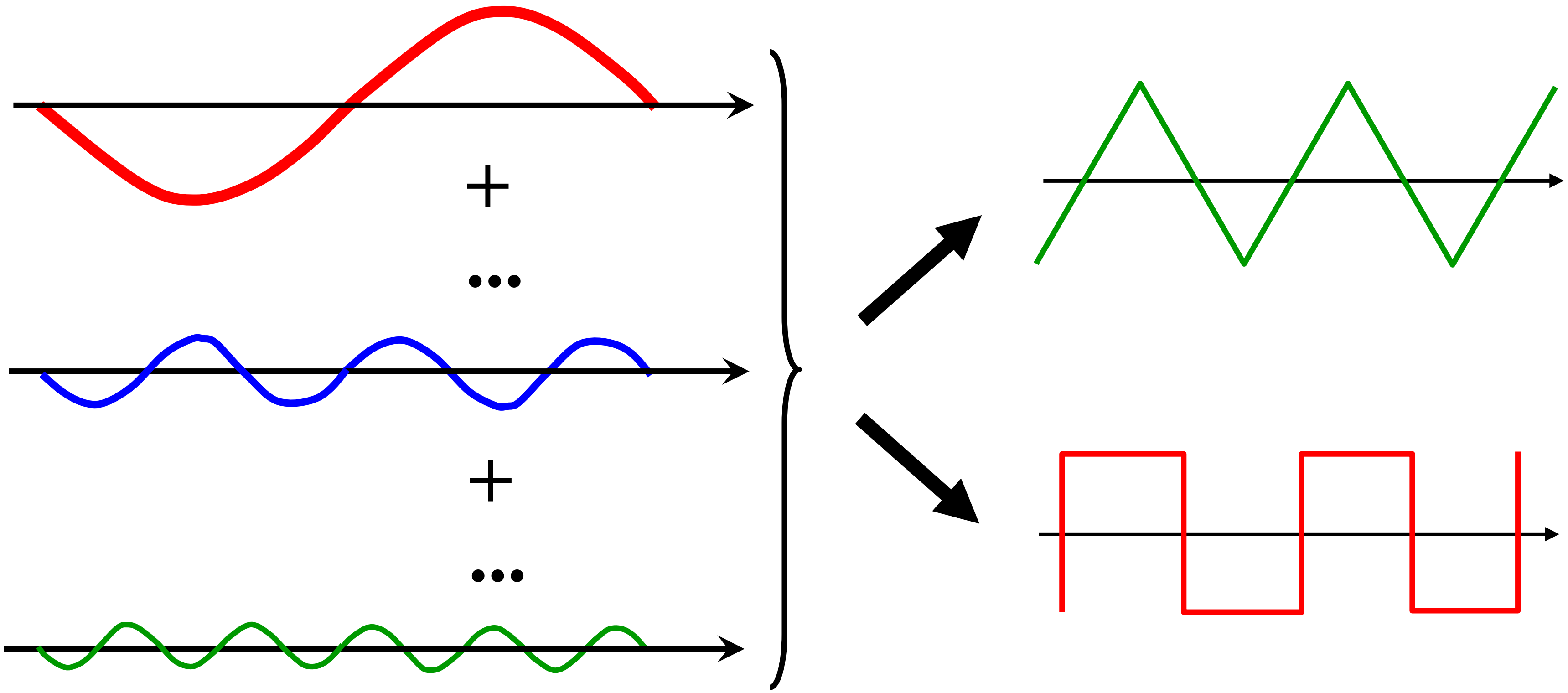
O gráfico da função é obtido por repetições periódicas do gráfico em um intervalo de tamanho *p*



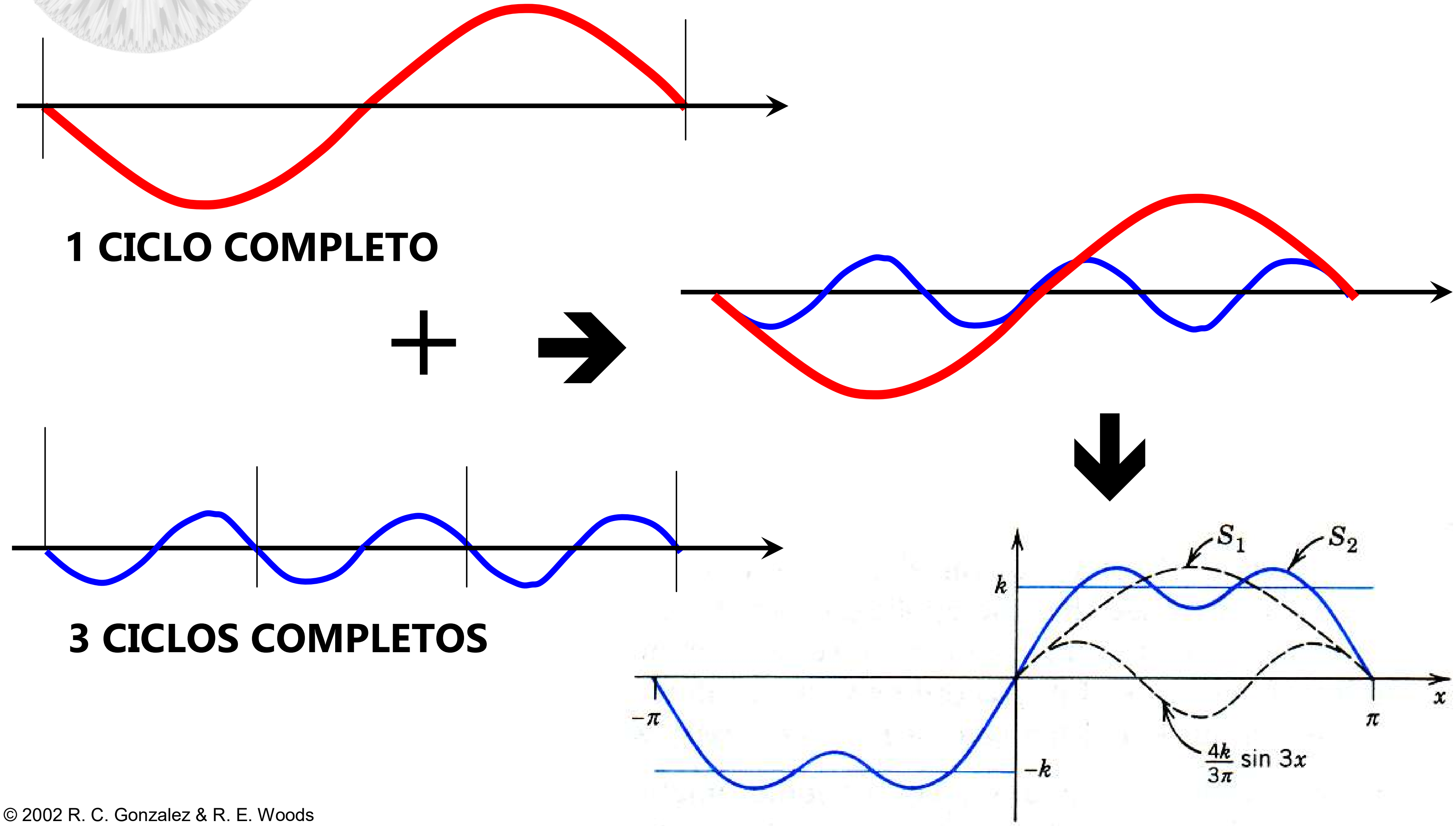
Observa que se *f(x)* e *g(x)* tem período *p*, então *h(x) = a.f(x) + b.g(x)* também tem período *p*, o que é muito importante para manter o período nas composições com várias funções

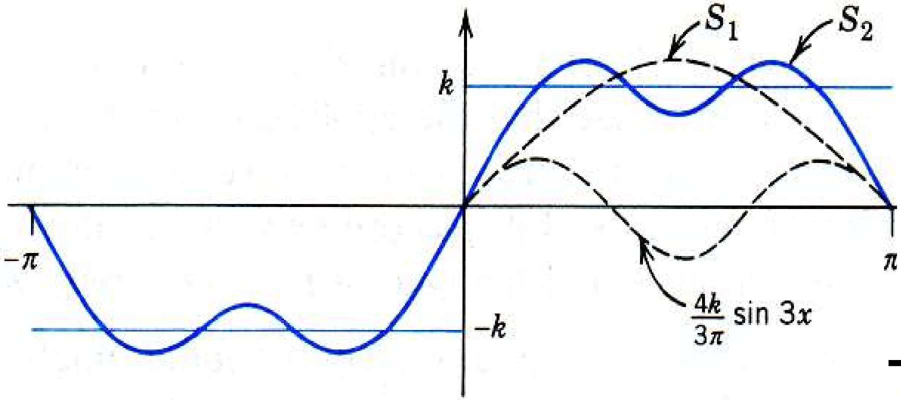
Conceitos usados

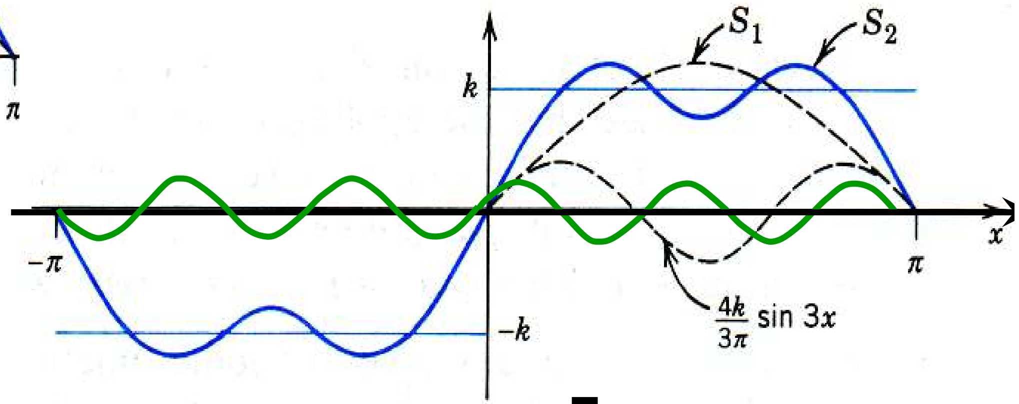
Funções periódicas de diferentes formatos podem ser obtidas através de uma soma de funções seno e cosseno

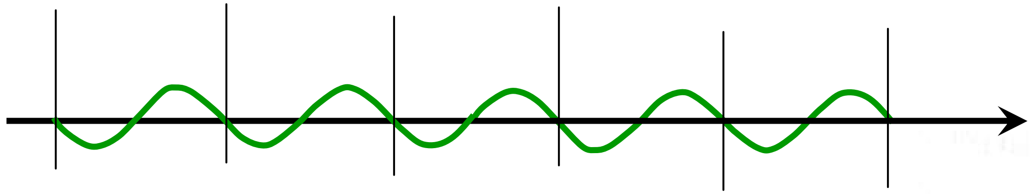


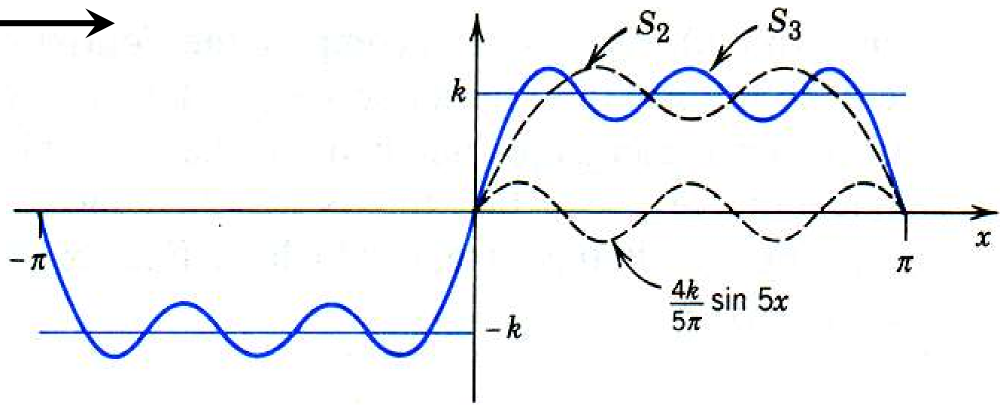
Funções periódicas podem ser obtidas através de uma soma de funções seno e cosseno



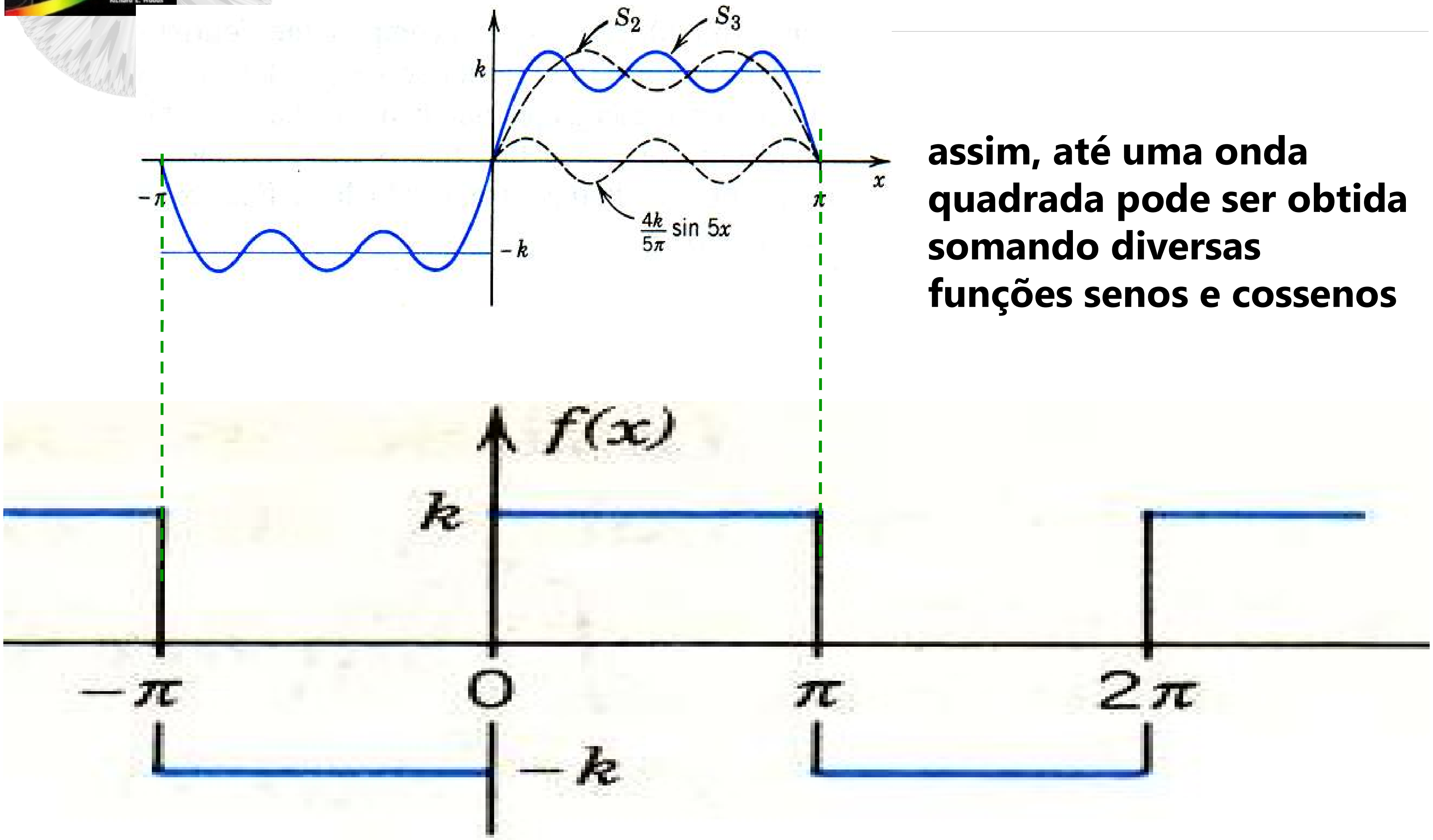




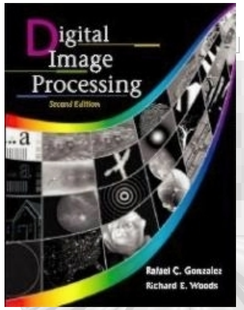




5 CICLOS COMPLETOS



assim, até uma onda quadrada pode ser obtida somando diversas funções senos e cossenos



Séries de Fourier

Um problema trivial é representar várias funções de período p = 2π usando funções simples como 1, cos(x), sen(x), cos(2x), sen(2x),..., cos(nx), sen(nx)

A série ficará:

$$a_0 + a_1.\cos x + b_1.\sin x + a_2.\cos 2x + b_2.\sin 2x + \ldots$$

que pode ser escrita usando somatória

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\cos nx + b_n.\sin nx$$

A questão é como encontrar estes coeficientes **a_n**'s e **b_n**'s

Séries de Fourier

a_0 , a_n e b_n são chamados coeficientes de Fourier e são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Números complexos

Sejam os números complexos $z_1 = a + bi$

e $z_2 = c + di$

com $i = \sqrt{-1}$

a e ***c*** são **reais** ***b*** e ***d*** são **imaginários**

Operações com complexos

Soma $z_1+z_2 = a+bi + c+di = (a+c) + (b+d)i$

Subtração $z_1-z_2 = a+bi - c+di = (a-c) + (b-d)i$

Multiplicação $z_1.z_2 = a+bi . c+di = (ac-bd) + (ad+bc)i$

Divisão $z_1/z_2 = a+bi / c+di = (ac+bd)/(cc+dd) + (cb-ad)/(cc+dd)i$

Exponencial $e^{(a+bi)} = e^a . \cos(b) + e^a . \sin(b)$

Números complexos

Propriedades dos Números complexos

comutativa

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$z_1 \,.\, z_2 = z_2 \,.\, z_1$

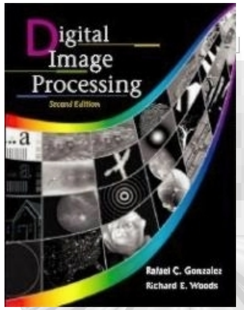
associativa

$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

$z_1 \,.\, (z_2 \,.\, z_3) = (z_1 \,.\, z_2) \,.\, z_3$

distributiva

$z_1 \,.\, (z_2 + z_3) = (z_1 \,.\, z_2) + (z_1 \,.\, z_3)$

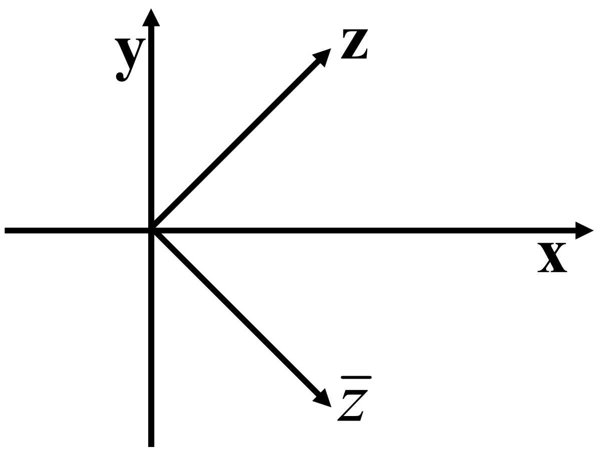


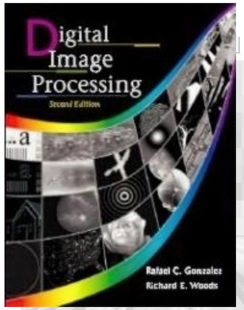
Números complexos

Conjugado de um número complexo

O complexo conjugado de um número complexo

z = a + bi é $\bar{z}$ = a - bi

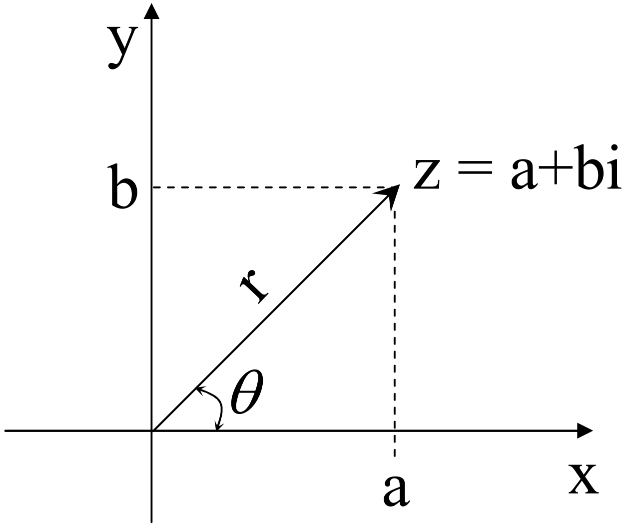




Números complexos

Forma polar de um número complexo

O número complexo z = a + bi pode ser escrito em função do **ângulo que forma com o eixo x** e do **comprimento do vetor formado**



z = a + bi

com a = r . cosθ e b = r . sinθ

logo, z = r . (cosθ + i sinθ)

sendo θ = arctan(z) = arctan(b/a)

Números complexos

Sendo $z = a + bi$

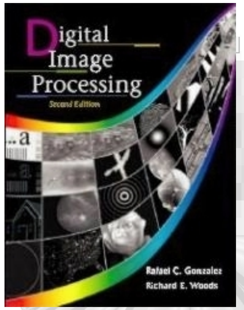
A exponencial fica: $e^z = e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$

quando a=0, tem-se a chamada [Fómula de Euler]

$$e^{ib} = \cos b + i \sin b$$

pois, $e^a = e^0 = 1$

obs. $e^{-ib} = \cos b - i \sin b$



Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é usada para decompor um sinal em suas componentes de frequência

Transformada de Fourier

Seja $f(x)$ uma função contínua de uma variável real x. A *transformada de Fourier* de $f(x)$, denotada por $\Im\{f(x)\}$, é definida pela equação

$e^{-i2\pi ux}$

$$\Im\{f(x)\} = \underline{F(u)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\underline{\exp[-j2\pi ux]}\,dx \quad \text{onde} \quad j = \sqrt{-1} \qquad \textbf{(3.1-1)}$$

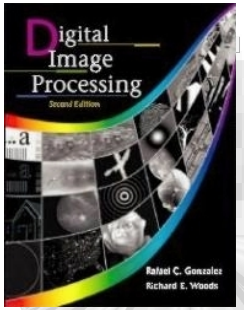
Transformada Inversa de Fourier

Dado $F(u)$, $f(x)$ pode ser obtida através do uso da *transformada inversa de Fourier*

$$\Im^{-1}\{F(u)\} = \underline{f(x)}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\exp[j2\pi ux]\,du \qquad \textbf{(3.1-2)}$$

As Equações (3.1-1) e (3.1-2), chamadas de *par de transformadas de Fourier*, existe se $f(x)$ for contínua e integrável e $F(u)$ for integrável. Essas duas condições são quase sempre satisfeitas na prática.

obs. $e^{ix} = \cos x + i\,\text{sen}\,x$



Transformada de Fourier

A transformada de Fourier de uma função real, entretanto, é geralmente complexa; isto é,

$$F(u) = R(u) + jI(u) \tag{3.1-3}$$

onde $R(u)$ e $I(u)$ são os componentes real e imaginário de $F(u)$, respectivamente. Freqüentemente, é conveniente expressar a Equação (3.1-3) na forma exponencial, isto é,

$$F(u) = |F(u)|e^{-j\phi(u)} \tag{3.1-4}$$

em que

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2} \tag{3.1-5}$$

e

$$\phi(u) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right] \tag{3.1-6}$$

A função magnitude $|F(u)|$ é chamada o *espectro de Fourier* de $f(x)$ e $\phi(u)$ é o *ângulo de fase*. O quadrado do espectro,

$$\begin{aligned} P(u) &= |F(u)|^2 \\ &= R^2(u) + I^2(u) \end{aligned} \tag{3.1-7}$$

é comumente denominado como o *espectro de potência* de $f(x)$. O termo *densidade espectral* também é comumente usado para denotar o espectro de potência.

Transformada de Fourier

A interpretação da integral na Equação (3.1-1) como o somatório do limite de termos discretos torna evidente que $F(u)$ é composta de uma soma infinita de termos seno e cosseno e que cada valor de u determina a *freqüência* de seu correspondente par seno—cosseno.

$$\Im\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-j2\pi ux]\,dx$$

***Exemplo:* como $e^{-jx} = \cos x - j\,\mathrm{sen}\,x$**

$$3e^{-j\pi/2} = 3(\cos\pi/2 - j\,sen\,\pi/2)$$

Transformada de Fourier

Exemplo: Considere a função simples mostrada na Fig. 3.1(a). Sua transformada de Fourier é obtida da Equação (3.1-1) como segue:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp[-j2\pi ux]dx$$

$$= \int_{0}^{X} A\exp[-j2\pi ux]dx$$

em x em 0

$$= \frac{-A}{j2\pi u}[e^{-j2\pi ux}]_0^X = \frac{-A}{j2\pi u}[e^{-j2\pi uX} - 1]$$

$$= \frac{A}{j2\pi u}[e^{j\pi uX} - e^{-j\pi uX}]e^{-j\pi uX}$$

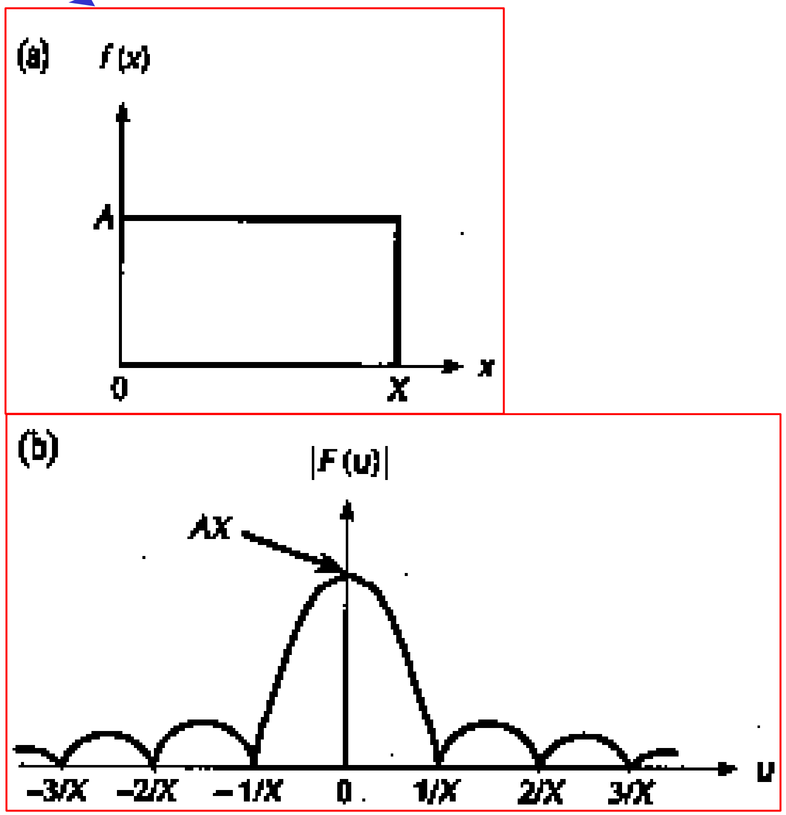
$$= \frac{A}{\pi u}\mathrm{sen}(\pi uX)e^{-j\pi uX}$$

que é uma função complexa. O espectro de Fourier é

$$|F(u)| = \left|\frac{A}{\pi u}\right| |\mathrm{sen}(\pi uX)| \left|e^{-j\pi uX}\right|$$

$$= AX\left|\frac{\mathrm{sen}(\pi uX)}{(\pi uX)}\right|.$$

A Figura 3.1(b) mostra um gráfico de $|F(u)|$.



Transformada de Fourier

A transformada de Fourier pode ser facilmente estendida para uma função $f(x, y)$ de duas variáveis. Se $f(x, y)$ for contínua e integrável e $F(u, v)$ for integrável, o seguinte par de transformadas de Fourier existirá:

$$\Im\{f(x,y)\} = F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int f(x,y)\exp[-j2\pi(ux+vy)\ dx\ dy \qquad \textbf{(3.1-9)}$$

e

$$\Im^{-1}\{F(u,v)\} = f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int F(u,v)\exp[j2\pi(ux+vy]\ du\ dv \qquad \textbf{(3.1-10)}$$

sendo que u e v são as variáveis de freqüência.

Como no caso unidimensional (1-D), o espectro de Fourier, fase, e espectro de potência, respectivamente, são

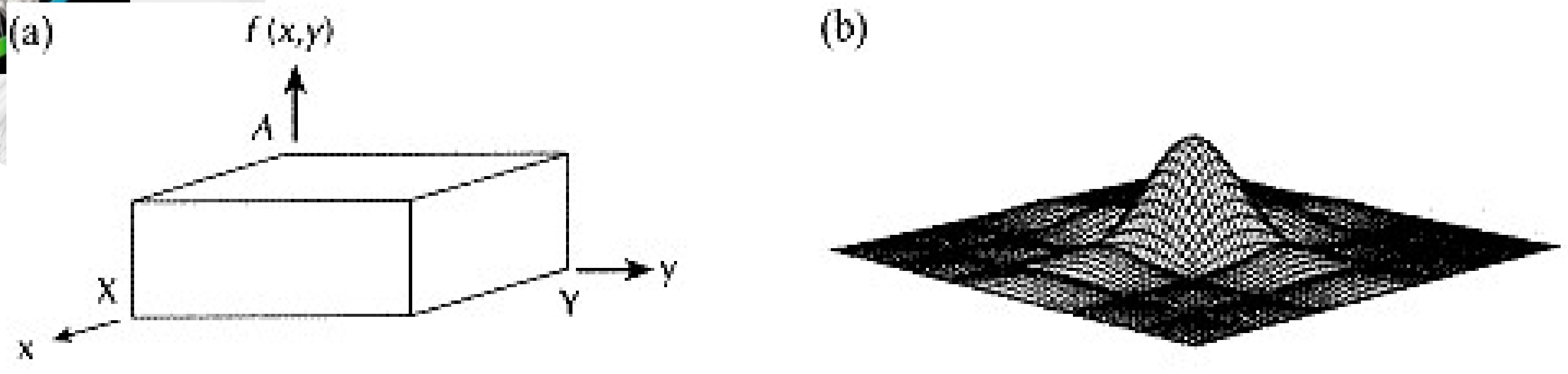
$$|F(u,v)| = [R^2(u,v) + I^2(u,v)]^{1/2} \qquad \textbf{(3.1-11)}$$

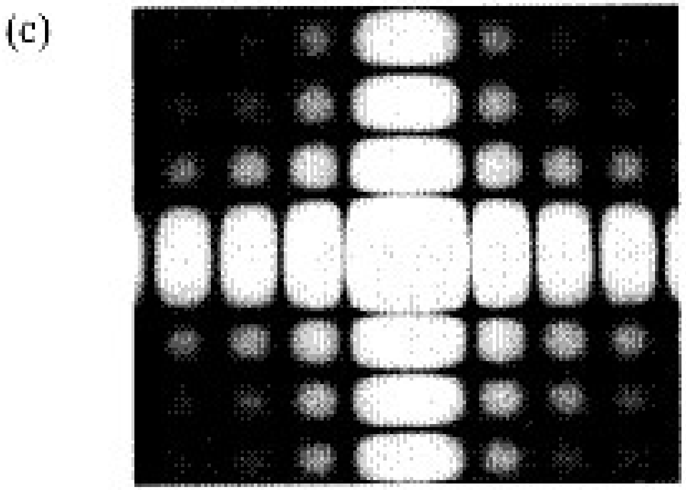
$$\phi(u,v) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right] \qquad \textbf{(3.1-12)}$$

e

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v). \qquad \textbf{(3.1-13)}$$

Transformada de Fourier





2D

***Figura 3.2** — (a) Uma função 2-D; (b) seu espectro de Fourier; e (c) o espectro mostrado como uma função da intensidade.*

o espectro é

$$|F(u,v)| = AXY\left|\frac{\operatorname{sen}(\pi u X)}{(\pi u X)}\right|\left|\frac{\operatorname{sen}(\pi v Y)}{(\pi v Y)}\right|.$$

Transformada de Fourier

Transformada Discreta de Fourier

Suponha que uma função contínua $f(x)$ seja discretizada numa seqüência

Próximo slide

$$\{f(x_0), f(x_0+\Delta x), f(x_0+2\Delta x), \ldots, f(x_0+[N-1]\Delta x)\}$$

tomando-se N amostras separadas de Δx unidades, como mostrado na Fig. 3.4. Será conveniente em desenvolvimentos subseqüentes utilizar x como uma variável discreta ou contínua, dependendo do contexto da discussão. Para tanto, é necessário definir

$$f(x) = f(x_0 + x\,\Delta x) \tag{3.2-1}$$

em que x agora assume os valores discretos $0, 1, 2, \ldots, N-1$. Em outras palavras, a seqüência $\{f(0), f(1), f(2), \ldots, f(N-1)\}$ denota qualquer amostragem de N valores uniformemente espaçados de uma função contínua correspondente.

Com a notação acima em mente, o par de transformadas *discretas* de Fourier que se aplica a funções amostradas é dado por*

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp[-j2\pi ux/N] \tag{3.2-2}$$

para $u = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, e

Transformada de Fourier

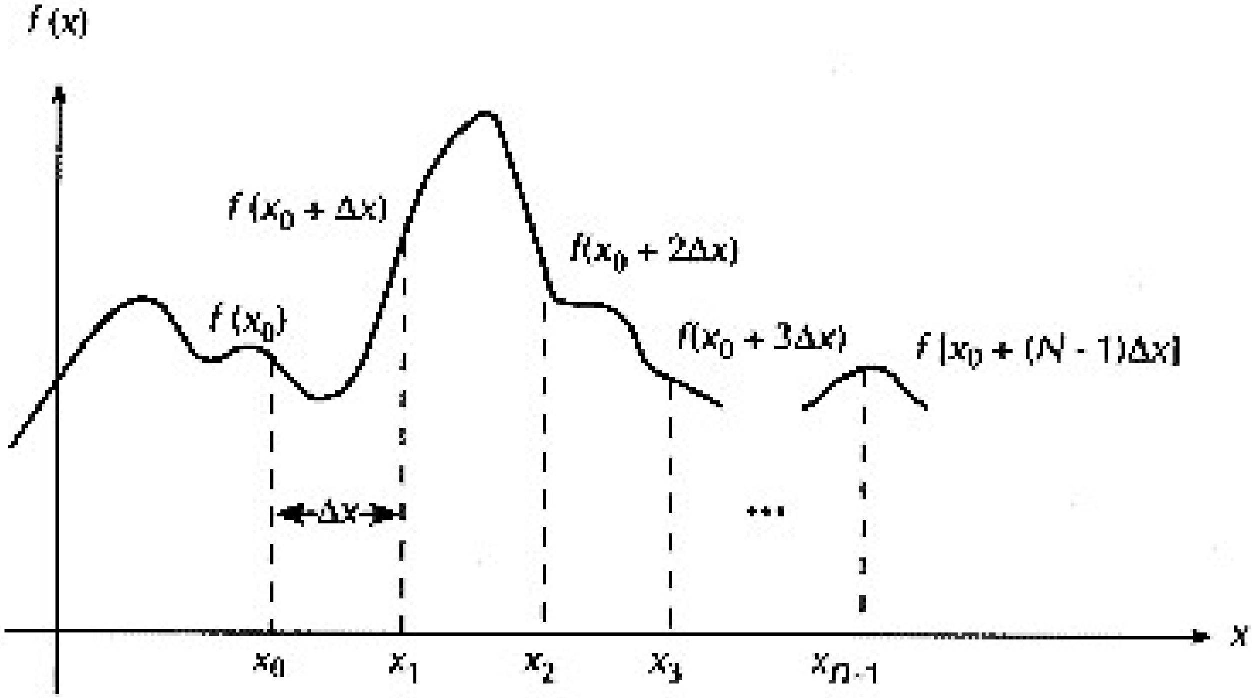


***Figura 3.4** — Amostragem de uma função contínua.*

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u)\, exp[\, j2\pi ux / N \,] \qquad (3.2\text{-}3)$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Transformada Discreta Inversa

Transformada de Fourier

Os valores $u = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ na transformada discreta de Fourier (Equação 3.2-2) correspondem a amostras de uma transformada contínua nos valores $0, \Delta u, 2\,\Delta u, \ldots, (N-1)\,\Delta u$. Em outras palavras, $F(u)$ representa $F(u\,\Delta u)$. Esta notação é similar àquela usada para a representação discreta $f(x)$, exceto que as amostras de $F(u)$ iniciam-se na origem do eixo da freqüência. Os termos Δu e Δx são relacionados pela expressão

$\boxed{1D \rightarrow N}$

$$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x} \tag{3.2-4}$$

Transformada Discreta de Fourier 2D

No caso de duas variáveis, o par de transformadas discretas de Fourier é

$$F(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp[-j2\pi(ux/M + vy/N)] \tag{3.2-5}$$

para $u = 0, 1, 2, \ldots, M-1$, $v = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, e

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\exp[j2\pi(ux/M + vy/N)] \tag{3.2-6}$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots, M-1$, $y = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Transformada de Fourier

No caso 2D fica

A amostragem de uma função contínua é agora feita em uma grade bidimensional, com divisões de largura Δx e Δy nos eixos x e y, respectivamente. Como no caso unidimensional, a função discreta $f(x, y)$ representa amostras da função $f(x_0 + x\,\Delta x, y_0 + y\,\Delta y)$ para $x = 0, 1, 2, \ldots, M-1$ e $y = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Comentários análogos aplicam-se para $F(u, v)$. O incremento da amostragem nos domínios do espaço e freqüência são relacionados por

$\boxed{2D \rightarrow M \times N}$

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} \tag{3.2-7}$$

e

$$\Delta v = \frac{1}{N\Delta y} \tag{3.2-8}$$

Quando as imagens são amostradas em uma matriz quadrada, $M = N$ e

$\boxed{2D \rightarrow N \times N}$

$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp[-j2\pi(ux+vy)/N] \tag{3.2-9}$$

para $u, v = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, e

$$f(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\exp[j2\pi(ux+vy)/N] \qquad 3.2\text{-}10)$$

para $x, y = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Transformada de Fourier

O espectro de Fourier, fase e espectro de **potência** de funções discretas unidimensional e bidimensional podem ser calculados pelas Equações (3.1-5) — (3.1-7) e Equações (3.1-11) — (3.1-13), respectivamente. A única diferença é que as variáveis independentes são discretas.

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2} \quad \textbf{(3.1-5)}$$

$$\phi(u) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right] \quad \textbf{(3.1-6)}$$

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u) \quad \textbf{(3.1-7)}$$

1D

2D

$$|F(u,v)| = [R^2(u,v) + I^2(u,v)]^{1/2} \quad \textbf{(3.1-11)}$$

$$\phi(u,v) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right] \quad \textbf{(3.1-12)}$$

$$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v). \quad \textbf{(3.1-13)}$$

Transformada de Fourier

Exemplo: De modo a ilustrar as Equações (3.2-2) e (3.2-3), considere a função mostrada na Fig. 3.5(a). A amostragem sobre os valores do argumento $x_0 = 0,5$, $x_1 = 0,75$, $x_2 = 1,0$, e $x_3 = 1,25$ — e a redefinição do argumento conforme definido acima — produz a função discreta mostrada na Fig. 3.5(b).

A aplicação da Equação (3.2-2) às quatro amostras resultantes nos dá a seguinte seqüência de passos:

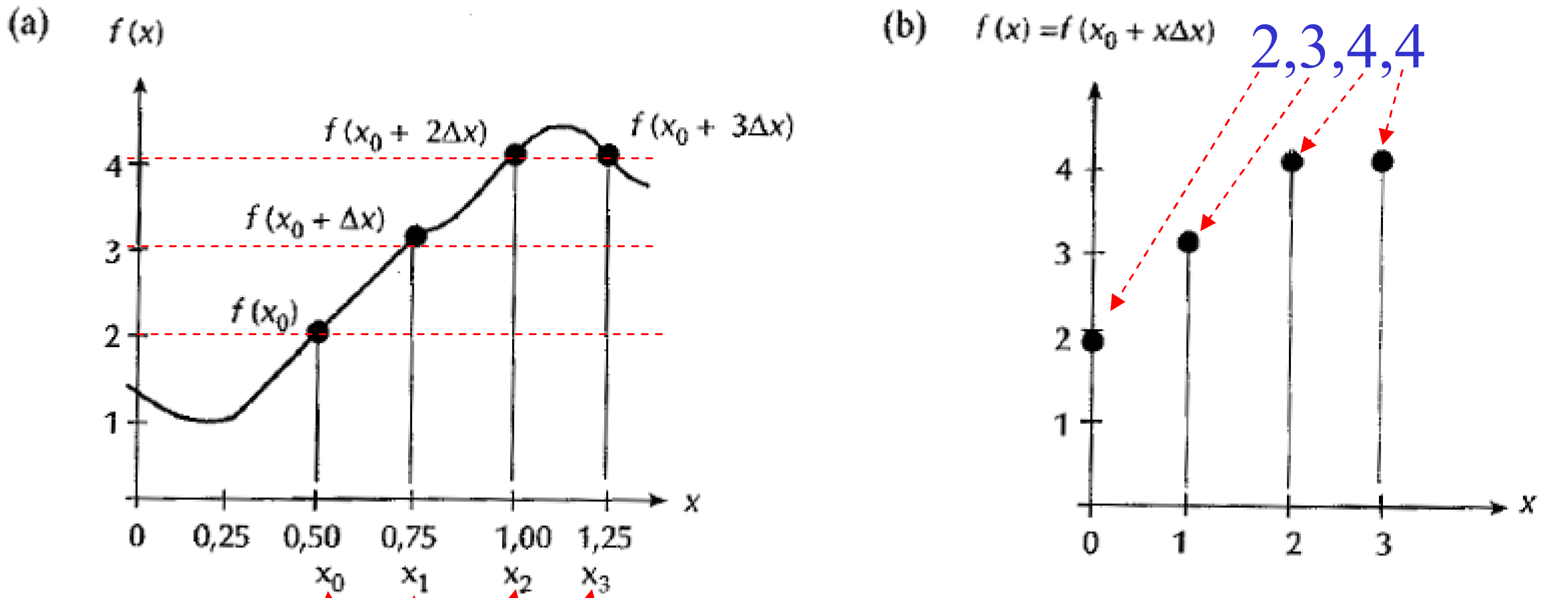
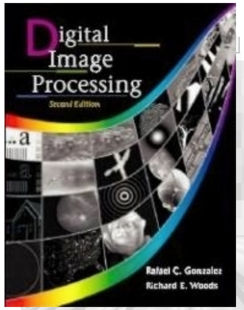


Figura 3.5 — Uma função simples e amostras no domínio de x. Em (a) x é uma variável contínua; em (b) x é discreta.

0 , 1 , 2 , 3 → Discreto



Transformada de Fourier

$$\boxed{F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp[-j2\pi ux/N]}$$

Se u=0 $F(0) = \frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} f(x)\underbrace{\exp[0]}_{=1}$

$$= \frac{1}{4}[f(0)+f(1)+f(2)+f(3)] \quad = \frac{1}{4}(2+3+4+4) \quad = 3{,}25$$

u=1 $F(1) = \frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} f(x)\, exp[-j2\pi x/4]$

x=0 x=1 x=2 x=3

$$= \frac{1}{4}(2e^{0} + 3e^{-j\pi/2} + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j3\pi/2})$$

Aplicando a Fórmula de Euler

$$=\tfrac{1}{4}\{2[\cos(0)+j\text{sen}(0)]+3[\cos(\pi/2)-j\text{sen}(\pi/2)]+4(\cos\pi-j\text{sen}\,\pi)+4[\cos(3\pi/2)-j\text{sen}(3\pi/2)]\}$$

$$=\tfrac{1}{4}[2(1+0j)+3(0-1j)+4(-1-0j)+4(0+1j)]$$

$$=\tfrac{1}{4}[2 - 3j -4 + 4j]$$

$$=\tfrac{1}{4}[-2+j]$$

Transformada de Fourier

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp[-j2\pi ux/N]$$

$$F(2) = -\frac{1}{4}[1 + j0]$$

$$F(3) = -\frac{1}{4}[2 + j]$$

Espectro de Fourier

O espectro de Fourier é obtido a partir da magnitude de cada um dos termos da transformada; isto é,

F(0) = 3,25 + 0j

F(1) = -2/4 + 1/4j

F(2) = -1/4 + 0j

F(3) = -2/4 – /4j

$$|F(0)| = 3,25$$

$$|F(1)| = \left[\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$|F(2)| = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{0}{4}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{1}{4}$$

$$|F(3)| = \left[\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Exercício

Calcular a Transformada de Fourier do vetor

8	**12**	**4**	**16**

Resposta

10	1+j	-4	1-j

Use este site para conferir, observando que eles não estão dividindo por N

https://engineering.icalculator.com/discrete-fourier-transform-calculator.html