PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA I

MODELOS DE DISTRIBUIÇÕES E APLICAÇÕES
ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

DISCIPLINA: PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA I

CURSO: CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

PROF. MS. CAMILA GONÇALVES COSTA

05/2025

2.5 MODELOS DE DISTRIBUIÇÕES E APLICAÇÕES

As distribuições de probabilidades discretas partem da pressuposição de certas hipóteses bem definidas.

Como diversas situações reais muitas vezes se aproximam dessas hipóteses, esses modelos são úteis no estudo de tais situações, daí a sua importância.

Um cuidado muito grande deve ser tomado ao se escolher uma distribuição de probabilidade que descreve corretamente as observações geradas por um experimento.

2.5.1 ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

Exemplos: Considere as seguintes situações:

1. (a) Lança-se uma moeda viciada e observa-se o resultado obtido e (b) pergunta-se a um eleitor se ele vai votar no candidato A ou B.

2. (a) Lança-se uma moeda n vezes e observa-se o número de caras obtidas e (b) de uma grande população, extrai-se uma amostra de n eleitores e pergunta-se a cada um deles em qual dos candidatos A ou B eles votarão e conta-se o número de votos do candidato A.

3. (a) De uma urna com P bolas vermelhas e Q bolas brancas, extraem-se n bolas sem reposição e conta-se o número de bolas brancas e (b) de uma população com P pessoas a favor do

candidato A e Q pessoas a favor do candidato B, extrai-se uma amostra de tamanho n sem reposição e conta-se o número de pessoas a favor do candidato A na amostra.

Em cada uma das situações acima, os experimentos citados têm algo em comum: em um certo sentido, temos a “mesma situação”, mas em contextos diferentes.
Por exemplo, na situação 1, cada um dos experimentos tem dois resultados possíveis e observamos o resultado obtido.
Na situação 3, temos uma população dividida em duas categorias e dela extraímos uma amostra sem reposição; o interesse está no número de elementos de uma determinada categoria.

Na prática, existem muitas outras situações que podem se “encaixar” nos modelos acima e mesmo em outros modelos. Nesse contexto, um modelo será definido por uma variável aleatória e sua função de distribuição de probabilidade, explicitando-se claramente as **hipóteses de validade**.

2.5.1.1 DISTRIBUIÇÃO DISCRETA UNIFORME

Suponha que seu professor de Estatística decida dar de presente a um dos alunos um livro de sua autoria. Não querendo favorecer qualquer aluno em especial, ele decide sortear aleatoriamente o ganhador, dentre os 45 alunos da turma.

Para isso, ele numera os nomes dos alunos que constam do diário de classe de 1 a 45, escreve esses números em pedaços iguais de papel, dobrando-os ao meio para que os números não fiquem visíveis e sorteia um desses papéis depois de bem misturados.

Qual é a probabilidade de que você ganhe o livro?
Qual é a probabilidade de que o aluno que tirou a nota mais baixa na primeira prova ganhe o livro?
E o que tirou a nota mais alta?

O importante a notar nesse exemplo é o seguinte: o professor tomou todos os cuidados necessários para não favorecer qualquer aluno em especial. Isso significa que todos os alunos têm a mesma chance de ganhar o livro. Temos, assim, um exemplo da **distribuição uniforme discreta.**
Se os valores que a v. a. X podem assumir ocorrem **com igual probabilidade** então diz-se que X segue uma **distribuição Uniforme**.

Definição:

A v. a. X segue uma distribuição Uniforme discreta em $\boldsymbol{N}$ pontos, $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{U}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{N}\}$, se a sua função de probabilidade é:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{N}, \qquad x = 1, 2, \dots, N.$$

O parâmetro caracterizador desta distribuição é N.

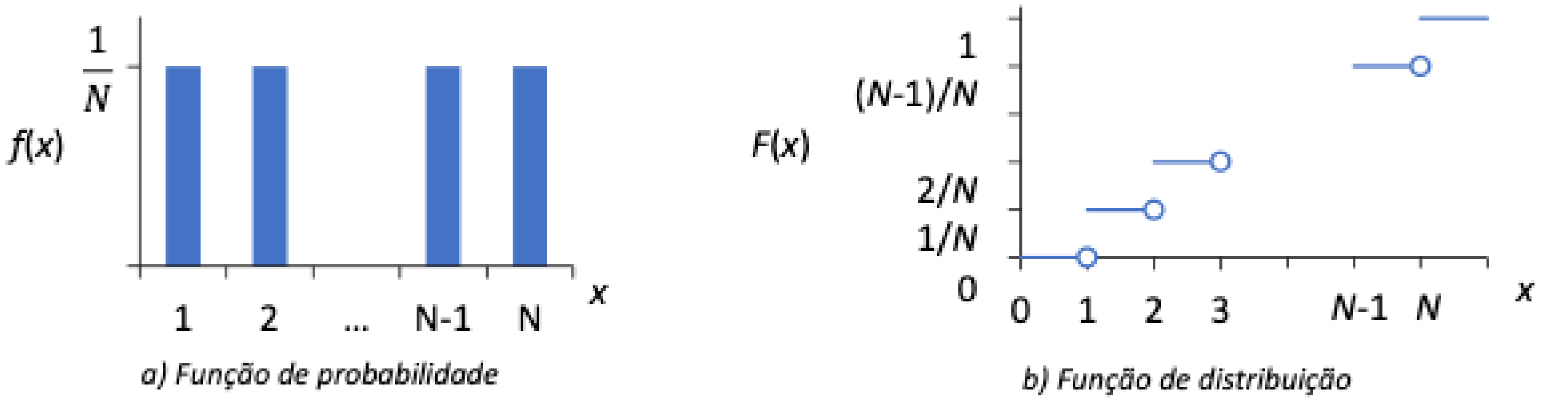


Figura 2.1: Função de probabilidade e de distribuição da distribuição Uniforme discreta em N pontos.

Para qualquer valor de N, esta distribuição tem uma forma muita característica sendo, por exemplo, sempre simétrica em torno da sua média (Figura 5.1).

$$\text{Se, } \boldsymbol{X \sim U\{1, 2, \dots, N\}}, \text{ então } \mu_X = E(X) = \frac{N+1}{2} \text{ e}$$
$$\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{N^2-1}{12}.$$

EXEMPLO 2.7

Considere o lançamento de uma moeda. Vamos definir a seguinte variável aleatória X associada a esse experimento:

X = 0 se ocorre cara

X = 1 se ocorre coroa

Para que essa v.a. tenha distribuição uniforme, é necessário supor que a moeda seja honesta. Calcule $f(x), E(X)$ e $Var(X)$.

Solução

$$
\begin{aligned}
fx(0) &= fx(1) = \frac{1}{2} \\
E(X) &= \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \\
Var(X) &= \frac{1}{2} \times \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

2.5.1.2 DISTRIBUIÇÃO DISCRETA BERNOULLI

Definição: Uma experiência aleatória chama-se **prova de Bernoulli** se possuir as seguintes características:

- Tem apenas dois resultados possíveis, incompatíveis:
  - A que se designa por sucesso;
  - $\bar{A}$ designado por insucesso,
- $P(A) = p \quad e \quad P(\bar{A}) = q = 1 - p$.

Quando se realiza uma prova de Bernoulli e se considera X a v.a. que caracteriza a experiência tomando os valores:

- $x = 1$ quando o resultado da prova é um sucesso,
- $x = 0$ quando o resultado da prova é um insucesso,

então a **distribuição de Bernoulli** é o modelo adequado para descrever o comportamento probabilístico da v. a. X.

Definição: A v. a. discreta X, que designa o resultado da prova de Bernoulli, segue uma **distribuição Bernoulli**, i. e., $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{B}(\mathbf{1};\boldsymbol{p})$, se a sua função de probabilidade é:

$$f(x) = P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x},$$

$x = 0,1 \quad com$ $0 < p < 1$.

O parâmetro caracterizador desta distribuição é p.

Se $\boldsymbol{X \sim B(1;p)}$ então $\mu_X = E(X) = p$ e $\sigma_X^2 = Var(X) = p(1 - p) = pq$.

EXEMPLO 2.8

Considere novamente o lançamento de uma moeda e a seguinte variável aleatória X associada a esse experimento:

$$X = 0 \text{ se ocorre coroa}$$
$$X = 1 \text{ se ocorre cara}$$

Seja p a probabilidade de cara, $0 < p < 1$.

Então X tem distribuição de Bernoulli com parâmetro p. Note que, nesse caso, a Bernoulli com parâmetro p=1/2 é equivalente à distribuição uniforme.

EXEMPLO 2.9

Um auditor da Receita Federal examina declarações de Imposto de Renda de pessoas físicas, cuja variação patrimonial ficou acima do limite considerado aceitável. De dados históricos, sabe-se que 10% dessas declarações são fraudulentas. Vamos considerar o experimento correspondente ao sorteio aleatório de uma dessas declarações. Esse é um experimento de Bernoulli, onde sucesso equivale à ocorrência de declaração fraudulenta e o parâmetro da distribuição de Bernoulli é $p = 0,1$.

Esse exemplo ilustra o fato de que “sucesso”, nesse contexto, nem sempre significa uma situação feliz na vida real. Aqui, sucesso é definido de acordo com o interesse estatístico no problema. Em uma situação mais dramática, “sucesso” pode indicar a morte de um paciente, por exemplo.

2.5.1.3 DISTRIBUIÇÃO DISCRETA BINOMIAL

Quando se realizam n provas de Bernoulli independentes mantendo-se constante, de prova para prova, a probabilidade de sucesso e de insucesso, isto é, $P(A) = p$ e $P(\bar{A}) = q = 1 - p$, então a distribuição Binomial é o modelo adequado para descrever o comportamento probabilístico da v. a. X que **conta o número de sucessos em n provas realizadas**. Considere-se a seguinte sequência de n provas de Bernoulli independentes:

$$\overbrace{\underbrace{A\,A \ldots\, A}_{\substack{x \\ \text{sucessos}}}\;\underbrace{\bar{A}\,\bar{A} \ldots \bar{A}}_{\substack{n-x \\ \text{insucessos}}}}^{n \text{ provas}}.$$

A probabilidade desta sequência se verificar, dado que as provas são independentes, é:

$$P(AA\ldots A\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}) = P(A)P(A)\ldots P(A)P(\bar{A})P(\bar{A})\ldots P(\bar{A})$$
$$= p^x(1-p)^{n-x}.$$

No entanto existem $\binom{n}{x}$ maneiras diferentes de se realizam x sucessos e $n-x$ insucessos sendo a probabilidade da sequência sempre a mesma.

Portanto, a probabilidade de em n provas de Bernoulli obter exatamente x sucessos é dada por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, \;\; x = 0,1,\ldots,n.$$

Os parâmetros caracterizadores desta distribuição são n e p.

Como se pode observar pela análise da Figura 2.2 a assimetria da distribuição Binomial depende do valor de p. Essa assimetria é atenuada com o aumento da dimensão da amostra (Figura 2.3).

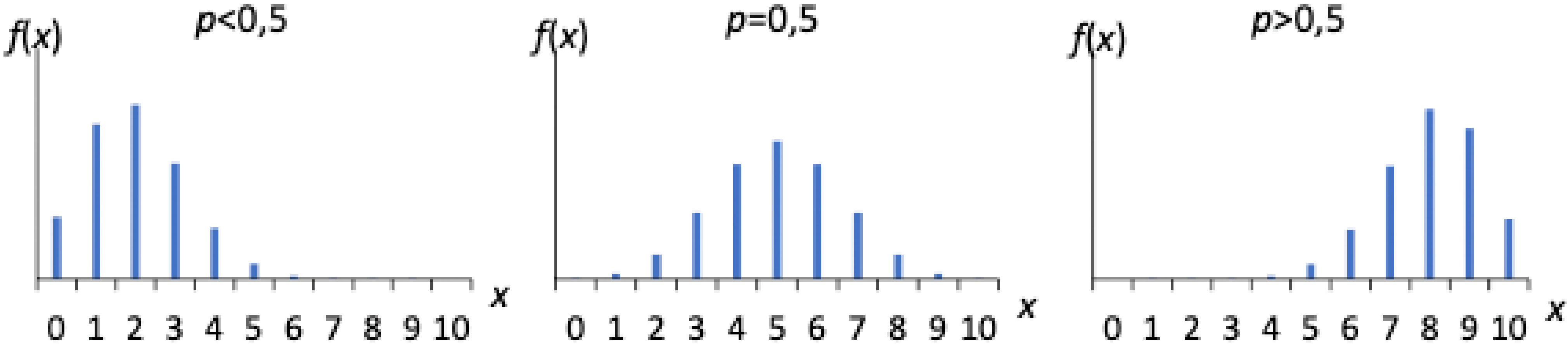


Figura 2.2: Função de probabilidade da distribuição Binomial para diferentes valores de p e com n=10.

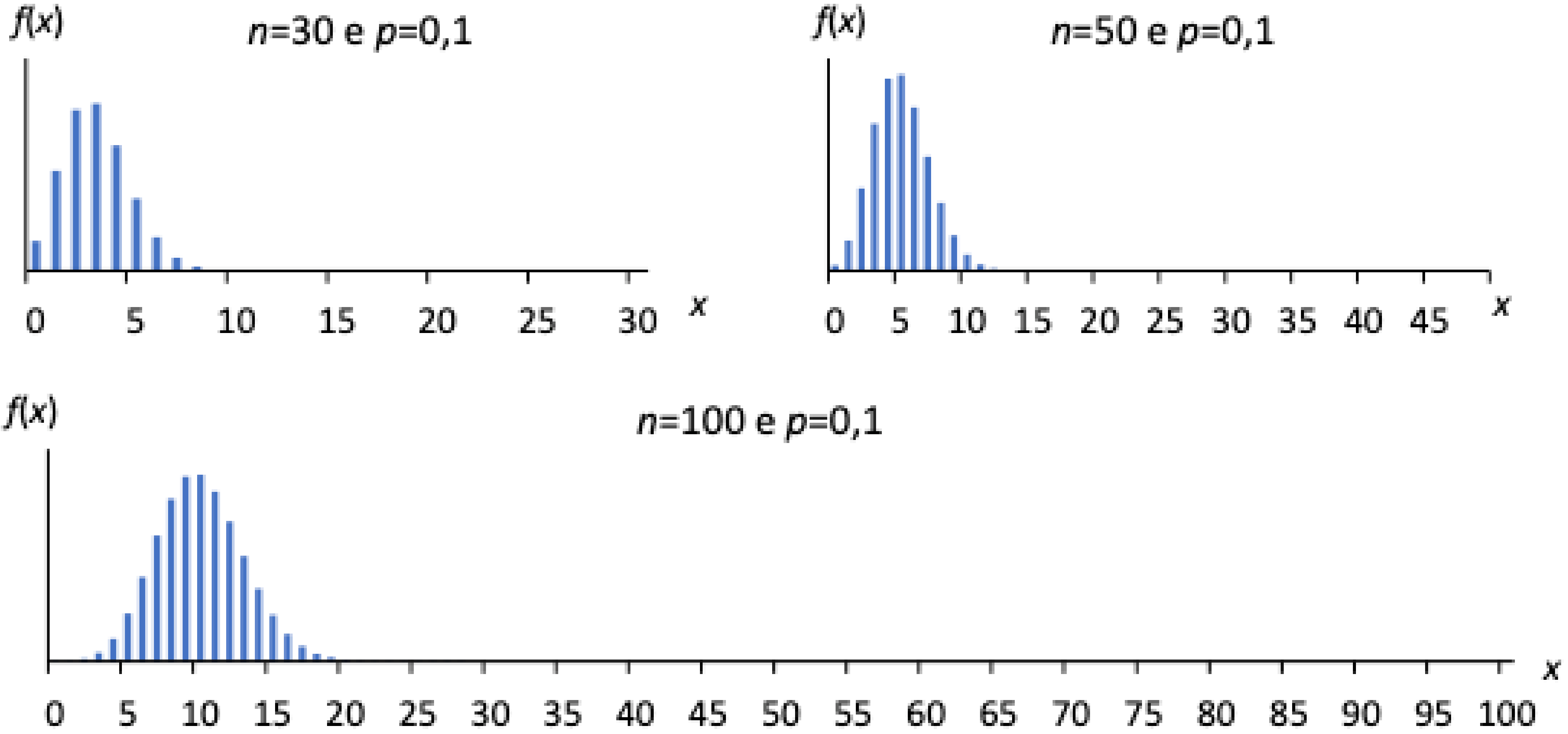


Figura 2.3: Função de probabilidade da distribuição Binomial para diferentes valores de n e $p = 0{,}1$.

Características relevantes:

- Quando $p = 0{,}5$ a distribuição Binomial é simétrica, qualquer que seja o n;
- Para $p > 0{,}5$, a distribuição é assimétrica negativa ou enviesada à direita;
- Para $p < 0{,}5$, a distribuição é assimétrica positiva ou enviesada à esquerda;
- Quanto mais afastado estiver p de 0,5 mais enviesada é a distribuição;
- Quanto maior for n, mais próxima da simetria estará à distribuição mesmo quando p é diferente de 0,5.

Se $\boldsymbol{X \sim B(\mathbf{n}; p)}$ então $\mu_X = E(X) = np$ e $\sigma_X^2 = Var(X) = np(1-p) = npq.$

Teorema da aditividade:

Se X_i, i=1, 2, ..., K, são v. a. independentes e $\boldsymbol{X_i \sim B(n_i; p)}$ então

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_K = \sum_{i=1}^{K} X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^{K} n_i \,; p\right).$$

Um *experimento binomial* é identificado pelas seguintes características.

Características de uma variável aleatória binomial

1. O experimento consiste em n tentativas idênticas.
2. Há somente dois resultados possíveis em cada ensaio. Denotaremos um resultado por S (para Sucesso) e o outro por F (para Fracasso).
3. A probabilidade de S permanece a mesma de tentativa para tentativa. Esta probabilidade é denotada por p, e a probabilidade de F é denotada por q. Note que $q=1-p$.
4. As tentativas são independentes.
5. A variável aleatória binomial x é o número de S em n tentativas.

EXEMPLO 2.10

Para os exemplos seguintes, decida se *x* é uma variável aleatória binomial.

a. Antes de comercializar um novo produto em grande escala, muitas companhias realizam uma pesquisa de preferência de consumidor para determinar se é provável que o produto tenha êxito. Suponha que uma companhia desenvolve um novo refrigerante dietético e então realize uma pesquisa de preferência na qual 100 consumidores escolhidos aleatoriamente declaram as suas preferências entre o refrigerante novo e os dois mais vendidos. Fazendo *x* ser o número dos que escolhem a marca nova.

b. Algumas pesquisas são realizadas usando-se um método de amostragem diferente da amostragem aleatória simples. Por exemplo, suponha que uma companhia de televisão a cabo planeja realizar uma pesquisa para determinar a fração de casas na cidade que usaria o serviço de televisão a cabo. O método de amostragem é escolher um bloco da cidade ao acaso e então inspecionar todas as casas naquele bloco. Esta técnica de amostragem é chamada amostragem por agrupamentos. Suponha que são amostrados 10 blocos, produzindo um total de 124 respostas. Fazendo x ser o número de casas que usariam o serviço de televisão a cabo.

Solução

a. Levantamentos com respostas dicotômicas e técnicas de amostragem aleatória de produto são exemplos clássicos de experimentos binomiais. Nesse exemplo, cada consumidor declara uma preferência para o novo refrigerante dietético ou não. A amostra de 100 consumidores é uma proporção muito pequena da totalidade de consumidores potenciais, assim a resposta da pessoa seria, para propósitos práticos, independentes do outro.[1] Assim, x é uma variável aleatória binomial.

[1] Na maioria das aplicações da vida real da distribuição binomial, a população de interesse tem um número finito de elementos (tentativas), denotado N. Quando N é grande e a amostra classifica segundo o tamanho n é relativamente pequeno a N, diga-se $\frac{n}{N} \leq 0.05$, o procedimento de amostragem, para propósitos práticos, satisfaz as condições de um experimento binomial.

b. Este exemplo é uma pesquisa com respostas dicotômicas (Sim ou Não para o serviço da televisão a cabo), mas o método de amostragem não é aleatória simples. A característica binomial de tentativas independentes provavelmente não seria satisfeita. As respostas de casas dentro de um bloco particular seriam dependentes, pois tendem a ser semelhantes com respeito a renda, nível de educação, e interesses gerais. Assim, o modelo binomial não seria satisfatório para *x* se o agrupamento que a técnica de amostragem fosse empregado.

EXEMPLO 2.11

Um varejista de computador vende computadores pessoais desktops e laptops (PCs) on-line. Assuma que 80% dos PCs que o varejista vende on-line são Desktops, e 20% são laptops.

a. Use os conhecimentos das aulas anteriores para encontrar a probabilidade de todas as próximas quatro compras de PC on-line serem laptops.
b. Encontre a probabilidade que três das próximas quatro compras de PC on-line serem laptops.
c. Fazendo x representar o número das próximas quatro compras de PC on-line serem laptops. Explique por que x é uma variável aleatória binomial.
d. Use as respostas das partes **a** e **b** para derivar uma fórmula para $p(x)$, a distribuição de probabilidade da variável aleatória binomial x.

Solução

a.

1. O primeiro passo é definir o experimento. Aqui nós estamos interessados em observar o tipo de PC comprado on-line por cada um dos próximos quatro clientes: desktop (*D*) ou laptop (*L*).

2. Logo, nós listamos os pontos amostrais associados com o experimento. Cada ponto amostral consiste nas decisões de compra feitas pelos quatro clientes on-line. Por exemplo, *DDDD* representa o ponto amostral que todas as quatro compra desktop, enquanto *LDDD* representa o ponto amostral que o cliente l compra um laptop, enquanto clientes 2, 3, e 4 compram desktop. Os 16 pontos amostrais são listados na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 Pontos amostrais para experimento de PC do exemplo 2.8

DDDD	*LDDD*	*LLDD*	*DLLL*	*LLLL*
	DLDD	*LDLD*	*LDLL*	
	DDLD	*LDDL*	*LLDL*	
	DDDL	*DLLD*	*LLLD*	
		DLDL		
		DDLL		

3. Atribuímos probabilidades agora aos pontos amostrais. Note que cada ponto amostral pode ser visto como a interseção das decisões de quatro clientes e, assumindo que as decisões são independentes, pode-se obter a probabilidade de cada ponto amostral usando a regra multiplicativa, como segue:

$P(DDDD)$ = P[(cliente l - desktop) ∩(cliente 2 - desktop) ∩ (cliente 3 - desktop) ∩ (cliente 4 - desktop)]

= P(cliente l - desktop)× P(cliente 2 - desktop)× P(cliente 3 - desktop)× P(cliente 4 - desktop)

= $(0,8)\ (0,8)\ (0,8)\ (0,8) = (0,8)^4 = 0,4096$

Todas as outras probabilidades dos pontos amostrais que usam raciocínio semelhante são calculadas. Por exemplo,

$$P(LDDD) = (0,2)\ (0,8)\ (0,8)\ (0,8) = (0,2)\ (0,8)^3 = 0,1024$$

4. Finalmente, nós somamos as probabilidades dos pontos amostrais para obter a probabilidade do evento desejado. O evento de interesse é todos os quatro clientes on-line compram laptops. Na Tabela 2.2 achamos só um ponto amostral, *LLLL*, contido neste evento. Todos os outros pontos amostrais indicam pelo menos um desktop comprado. Assim,

$$P(\mathit{Todos\ os\ quatro\ laptops\ de\ compra}) = P(LLLL) = (0{,}2)^4 = 0{,}0016$$

Quer dizer, a probabilidade é 16 em 10.000 que todos os quatro clientes comprem laptops.

b. O evento que três dos próximos quatro compradores on-line comprem laptops consiste nos quatro pontos amostrais na quarta coluna de Tabela 2.2: *DLLL*, *LDLL*, *LLDL*, e *LLLD*. Para obter a probabilidade do evento somamos as probabilidades dos pontos amostrais:

$$\text{P(3 dos próximos 4 clientes compram laptops)} = P(DLLL) + P(LDLL) + P(LLDL) + P(LLLD)$$
$$= (0{,}2)^3\,(0{,}8) + (0{,}2)^3\,(0{,}8) + (0{,}2)^3\,(0{,}8) + (0{,}2)^3\,(0{,}8)$$
$$= 4\,(0{,}2)^3\,(0{,}8) = 0{,}0256$$

Note que cada uma das quatro probabilidades dos pontos amostrais é a mesma, porque cada ponto amostral consiste em três *L*'s e um *D*; a ordem não afeta a probabilidade porque as decisões dos clientes são (admitido) independentes.

c. Nós podemos caracterizar o experimento consistindo em quatro tentativas idênticas: as decisões de compra dos quatro clientes. Há dois possíveis resultados a cada tentativa, *D* ou *L*, e a probabilidade de *L*, $p = 0{,}2$, é o mesmo para cada de ensaio. Finalmente, estamos assumindo que a decisão de compra de cada cliente é independente de todos os outros, de forma que as quatro tentativas são independentes. Então segue que x, o número das próximas quatro compras serem laptops, é uma variável aleatória binomial.

d. As probabilidades do evento nas partes **a** e **b** provêem na fórmula para a distribuição de probabilidade $p(x)$. Primeiro, considere o evento que três compras são laptops (parte **b**). Encontramos que

$P(X = 3) \quad =$

$(N^o \textit{ de pontos amostrais para } x = 3) \times (0{,}2)^{\text{nº de L comp.}} \times (0{,}8)^{\text{nº de D comp.}}$

$$= \quad 4\,(0{,}2)^3\,(0{,}8)^1$$

Em geral, nós podemos usar análise combinatória para contar o número de pontos amostrais. Por exemplo,
Número de pontos amostrais para $(x = 3)$ = Nº de modos diferentes de selecionar 3 das 4 tentativas para compras de L

$$= \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4\ .\ 3!}{3!\ .\ 1!} = 4$$

A fórmula, que trabalha para qualquer valor de *x*, pode ser deduzida como segue. Desde que

$$P(x = 3) = \binom{4}{3}(0{,}2)^3(0{,}8)^1, \qquad \text{e}$$

$$\boldsymbol{p(x) = \binom{4}{x}(0,2)^x(0,8)^{4-x}}$$

O componente $\binom{4}{x}$ conta o número de pontos amostrais de *x* que tem laptops e o componente $(0{,}2)^x(0{,}8)^{4-x}$ é a probabilidade associada com cada ponto amostral de *x* que tem laptops.

Para o experimento binomial geral, com n tentativas e probabilidade p de Sucesso em cada ensaio, a probabilidade de x Sucessos é

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Nº de eventos simples com x S's

Probabilidade de x S's e $(n - x)$ F's em qualquer evento simples

Teoricamente, você sempre poderia recorrer aos princípios desenvolvidos no Exemplo 2.11 para calcular probabilidades binomiais; liste os pontos amostrais e some as suas probabilidades. Porém, aumentando-se o número de tentativas

(n), o número de pontos amostrais aumenta muito rapidamente (o número de pontos amostrais é 2^n). Assim, prefere-se a fórmula para calcular probabilidades de binomiais.

A distribuição binomial é resumida como:

A Distribuição de Probabilidade Binomial

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad (x = 0, 1, 2, ..., n)$$

em que

p = Probabilidade de um sucesso em uma única tentativa

$q = 1 - p$

n = Número de tentativas

x = Número de sucessos em tentativas de n

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

OBS: $n! = n\,(n - 1)\,(n - 2).\ 3.\ 2.\ 1$; lembre-se, $0! = 1$.

EXEMPLO 2.12

Uma máquina que produz componentes para automóvel está com mal funcionamento e produzindo 10% de peças com defeitos. O processo de produção da máquina (peças com defeito e peças sem defeito) seguem uma forma aleatória. Se os próximos cinco componentes são testados, encontre a probabilidade de que três deles sejam defeituosos.

Solução

Fazemos *x* ser o número de defeitos em *n* = 5 tentativas. Então *x* é uma variável aleatória binomial com probabilidade *p=0,1* de um único componente estar defeituoso, e probabilidade *q* = 1 - *p* = 1 – 0,1 = 0,9 do componente estar sem defeito. A distribuição de probabilidade para *x* é determinada pela expressão

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{5}{x} (0,1)^x (0,9)^{5-x}$$

$$= \frac{5!}{x!\,(5-x)!} (0,1)^x (0,9)^{5-x} \qquad (x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

Para encontrar, na fórmula para *p*(*x*), a probabilidade de observar *x* = 3 defeitos em uma amostra de *n* = 5, fazemos:

$$p(3) = \frac{5!}{3!\,(5-3)!}(0,1)^3(0,9)^{5-3} = \frac{5!}{3!\,2!}(0,1)^3(0,9)^2$$

$$= \frac{5\,.\,4\,.\,3!}{3!\,2!}(0,1)^3(0,9)^2 = 10(0,1)^3(0,9)^2 = 0,0081$$

EXEMPLO 2.13

Relembrando o Exemplo 2.12 e encontre os valores de $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, $p(4)$, e $p(5)$. Faça o gráfico $p(x)$. Calcule a média μ e o desvio padrão σ. Localize μ e o intervalo $\mu - 2\sigma$ a $\mu + 2\sigma$ no gráfico. Se o experimento fosse repetido muitas vezes, que proporção das observações de x cairia dentro do intervalo $\mu - 2\sigma$ a $\mu + 2\sigma$?

Solução

Novamente, $n = 5$, $p = 0{,}1$, e $q = 0{,}9$. Então, substituindo na fórmula para $p(x)$:

$$p(0) = \frac{5!}{0!\,(5-0)!}(0{,}1)^0(0{,}9)^{5-0} = \frac{5!}{1\,.\,5!}(1)(0{,}9)^5 = 0{,}59049$$

$$p(1) = \frac{5!}{1!\,(5-1)!}(0{,}1)^1(0{,}9)^{5-1} = (5)(0{,}1)(0{,}9)^4 = 0{,}32805$$

$$p(2) = \frac{5!}{2!\,(5-2)!}(0{,}1)^2(0{,}9)^{5-2} = (10)(0{,}1)^2(0{,}9)^3$$
$$= 0{,}07290$$

$$p(4) = \frac{5!}{4!\,(5-4)!}(0{,}1)^4(0{,}9)^{5-4} = (5)(0{,}1)^4(0{,}9) = 0{,}00045$$

$$p(5) = \frac{5!}{5!\,(5-5)!}(0,1)^5(0,9)^{5-5} = (0,1)^5 = 0,00001$$

O gráfico de $p(x)$ é mostrado como um histograma de probabilidade na Figura 2.4.

[$p(3)$ é o mesmo do Exemplo 2.12; $p(3)$=0,0081.]

Para calcular os valores de μ e σ, substitua $n = 5$ e $p = 0{,}1$ nas fórmulas seguintes:

$$\mu = np = (5)(0{,}1) = 0{,}5$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(5)(0{,}1)(0{,}9)}$$

$$= \sqrt{0{,}45} = 0{,}67$$

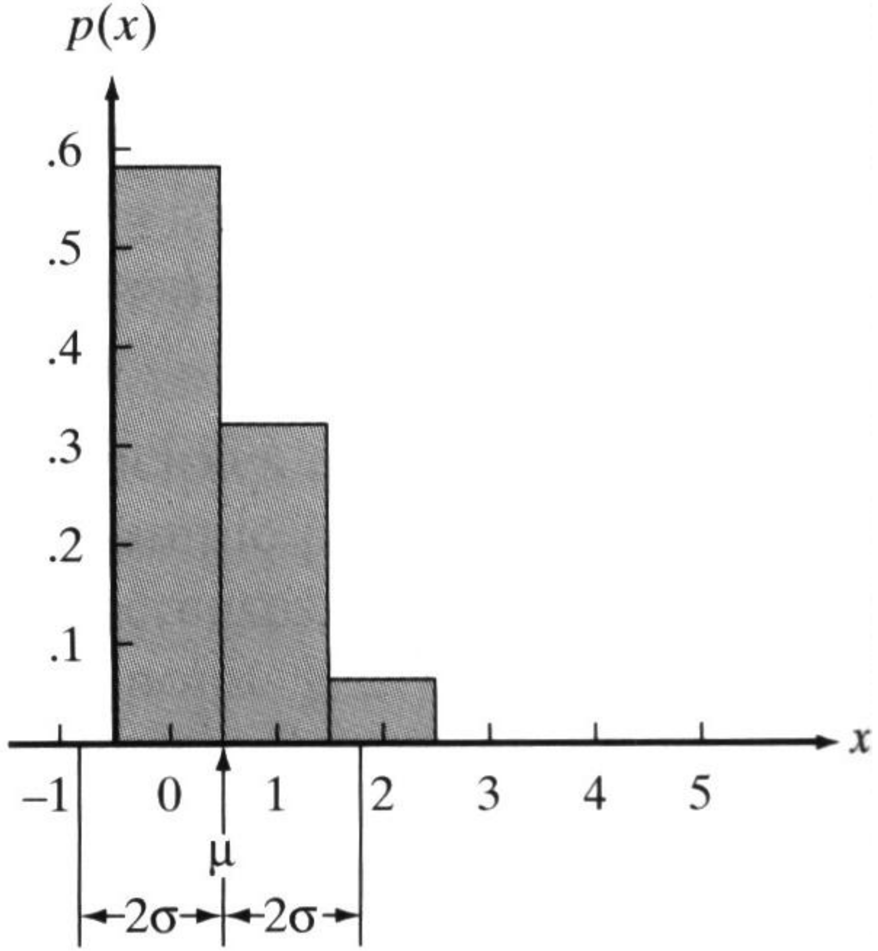


Figura 2.4
A distribuição binomial: $n = 5$, $p = 0{,}1$

Para encontrar o intervalo $\mu - 2\sigma$ a $\mu + 2\sigma$, calculamos

$$\mu - 2\sigma = 0{,}5 - 2(0{,}67) = -0{,}84$$

$$\mu + 2\sigma = 0{,}5 + 2(0{,}67) = 1{,}84$$

Se o experimento fosse repetido um grande número de vezes, qual a proporção de observações de x cairia dentro do intervalo $\mu - 2\sigma$ a $\mu + 2\sigma$?

Você pode ver na Figura 2.4 que todas as observações igual a 0 ou 1 cairá dentro do intervalo.

As probabilidades que correspondem a estes valores são 0,5905 e 0,3280, respectivamente.

Consequentemente, você esperaria 0,5905 + 0,3280 = 0,9185, ou aproximadamente 91,9%, das observações cair dentro do intervalo $\mu - 2\sigma$ a $\mu + 2\sigma$.

Isto enfatiza novamente que para a maioria das distribuições de probabilidade, observações raramente caem além de 2 desvios padrão da média (μ).

Usando a tabela da distribuição binomial

Calcular probabilidades da distribuição binomial fica tedioso quando n for grande. Valores de n e p para a distribuição binomial estão na Tabela 2.3; um gráfico da distribuição de probabilidade binomial para n=10 e p=0,10 é mostrado na Figura 2.5.

Tabela 2.3 Probabilidades da distribuição binomial para $n = 10$

$$P(x \leq k)$$

f. $n = 10$

k \ p	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
0	.904	.599	.349	.107	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.996	.914	.736	.376	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000	.000
2	1.000	.988	.930	.678	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000	.000
3	1.000	.999	.987	.879	.650	.382	.172	.055	.011	.001	.000	.000	.000
4	1.000	1.000	.998	.967	.850	.633	.377	.166	.047	.006	.000	.000	.000
5	1.000	1.000	1.000	.999	.953	.834	.623	.367	.150	.033	.002	.000	.000
6	1.000	1.000	1.000	.999	.989	.945	.828	.618	.350	.121	.013	.001	.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.988	.945	.833	.617	.322	.070	.012	.000
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.954	.851	.624	.264	.086	.004
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.972	.893	.651	.401	.096

(continued)

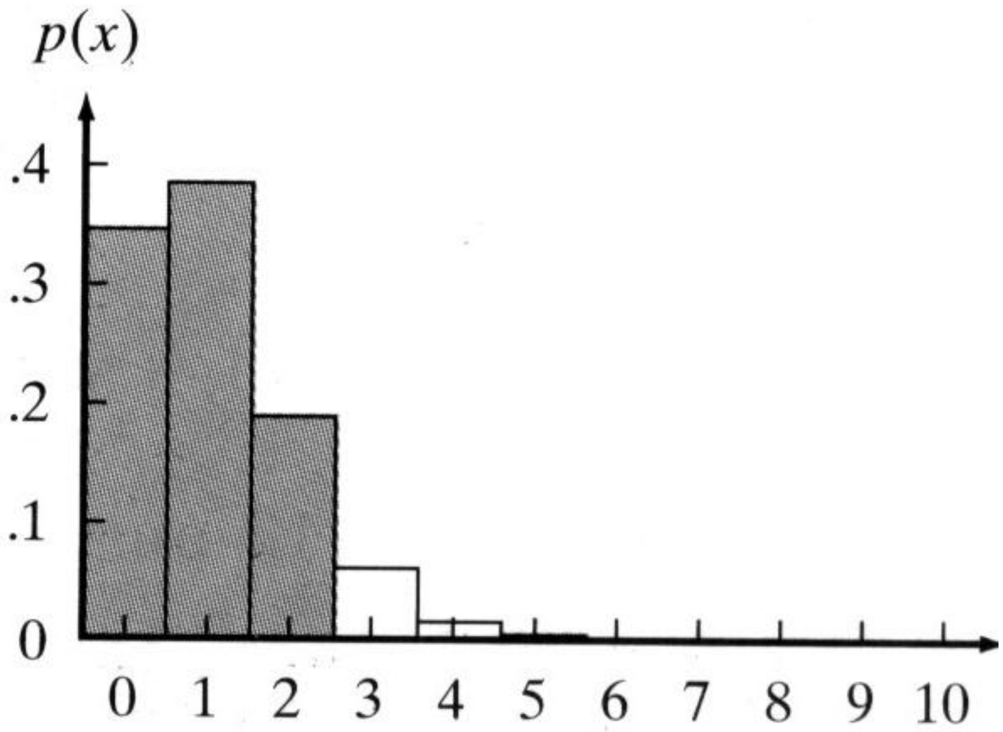


Figura 2.5
Distribuição de probabilidade Binomial de $n = 10$ e $p = 0,10$; $P(x \leq 2)$ sombreado

Na tabela 2.3 as colunas correspondem aos valores de p, e as linhas correspondem a valores (k) da variável aleatória x. As entradas na tabela representam **probabilidades acumuladas da distribuição binomial,** $P(x \leq k)$. Por exemplo, assim a entrada na coluna que corresponde a p=0,10 e a linha que corresponde a k=2 é 0,930 (sombreado), e sua interpretação é

$$P(x \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = 0{,}930$$

Esta probabilidade também está sombreada na representação gráfica da distribuição binomial com $n = 10$ e $p = 0,10$ na Figura 2.10.

Você também pode usar Tabela 2.3 para encontrar a probabilidade que x igual a um valor específico. Por exemplo, suponha que você quer encontrar a probabilidade de $x = 2$ a distribuição binomial com $n = 10$ e $p = 0,10$.

Isto é encontrada através da subtração como segue:

$$P(x = 2)$$
$$= [P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)]$$
$$- [P(x = 0) + P(x = 1)] =$$
$$= P(x \leq 2) - P(x \leq 1) = 0,930 - 0,736 = 0,194$$

A probabilidade de uma variável aleatória binomial exceder um valor especificado pode ser encontrada usando a Tabela 2.3 e a noção de eventos complementares pode ser encontrado. Por exemplo, encontrar a probabilidade de *x* exceder 2 quando *n* = 10 e *p* = 0,10, usamos

$$P(x > 2) = 1 - P(x \leq 2) = 0{,}930 = 0{,}070$$

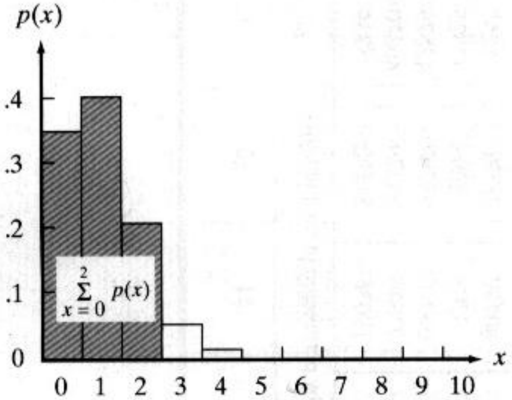
Note que esta probabilidade é representada pela porção não sombreada do gráfico na Figura 2.5.

Todas as probabilidades na Tabela 2.3 são arredondadas para três casas decimais. Assim, embora nenhuma das probabilidades da distribuição binomial na tabela é exatamente zero, alguns são bem pequenos (menor que 0,0005) para 0,000. Por exemplo, usando a fórmula para encontrar *P*(*x* = 0) quando *n* = 10 e *p* = 0,6, obtemos

$$P(x=0)=\binom{10}{0}(0{,}6)^0(0{,}4)^{10-0}=0,4^{10}=0{,}00010486$$

mas isto é arredondado para 0,000 em Tabela 2.3.

Semelhantemente, nenhuma das entradas da tabela é exatamente 1,0, mas quando as probabilidades acumuladas excedem 0,9995, eles são arredondados para 1,000. A linha que corresponde ao possível valor maior por x, $x = n$, é omitido, porque todas as probabilidades acumuladas na linha são iguais a 1,0 (exatamente).



Tabulated values are $\sum_{x=0}^{k} p(x)$. *(Computations are rounded at the third decimal place.)*

a. $n = 5$

k \ p	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
0	.951	.774	.590	.328	.168	.078	.031	.010	.002	.000	.000	.000	.000
1	.999	.977	.919	.737	.528	.337	.188	.087	.031	.007	.000	.000	.000
2	1.000	.999	.991	.942	.837	.683	.500	.317	.163	.058	.009	.001	.000
3	1.000	1.000	1.000	.993	.969	.913	.812	.663	.472	.263	.081	.023	.001
4	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.990	.969	.922	.832	.672	.410	.226	.049

b. $n = 6$

k \ p	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
0	.941	.735	.531	.262	.118	.047	.016	.004	.001	.000	.000	.000	.000
1	.999	.967	.886	.655	.420	.233	.109	.041	.011	.002	.000	.000	.000
2	1.000	.998	.984	.901	.744	.544	.344	.179	.070	.017	.001	.000	.000
3	1.000	1.000	.999	.983	.930	.821	.656	.456	.256	.099	.016	.002	.000
4	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.959	.891	.767	.580	.345	.114	.033	.001
5	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.984	.953	.882	.738	.469	.265	.059

c. $n = 7$

k \ p	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
0	.932	.698	.478	.210	.082	.028	.008	.002	.000	.000	.000	.000	.000
1	.998	.956	.850	.577	.329	.159	.063	.019	.004	.000	.000	.000	.000
2	1.000	.996	.974	.852	.647	.420	.227	.096	.029	.005	.000	.000	.000
3	1.000	1.000	.997	.967	.874	.710	.500	.290	.126	.033	.003	.000	.000
4	1.000	1.000	1.000	.995	.971	.904	.773	.580	.353	.148	.026	.004	.000
5	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.981	.937	.841	.671	.423	.150	.044	.002
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.992	.972	.918	.790	.522	.302	.068

(continued)

d. $n = 8$

k \ p	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
0	.923	.663	.430	.168	.058	.017	.004	.001	.000	.000	.000	.000	.000
1	.997	.943	.813	.503	.255	.106	.035	.009	.001	.000	.000	.000	.000
2	1.000	.994	.962	.797	.552	.315	.145	.050	.011	.001	.000	.000	.000
3	1.000	1.000	.995	.944	.806	.594	.363	.174	.058	.010	.000	.000	.000
4	1.000	1.000	1.000	.990	.942	.826	.637	.406	.194	.056	.005	.000	.000
5	1.000	1.000	1.000	.999	.989	.950	.855	.685	.448	.203	.038	.006	.000
6	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.965	.894	.745	.497	.187	.057	.003
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.983	.942	.832	.570	.337	.077

e. $n = 9$

k \ p	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
0	.914	.630	.387	.134	.040	.010	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.997	.929	.775	.436	.196	.071	.020	.004	.000	.000	.000	.000	.000
2	1.000	.992	.947	.738	.463	.232	.090	.025	.004	.000	.000	.000	.000
3	1.000	.999	.992	.914	.730	.483	.254	.099	.025	.003	.000	.000	.000
4	1.000	1.000	.999	.980	.901	.733	.500	.267	.099	.020	.001	.000	.000
5	1.000	1.000	1.000	.997	.975	.901	.746	.517	.270	.086	.008	.001	.000
6	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.975	.910	.768	.537	.262	.053	.008	.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.980	.929	.804	.564	.225	.071	.003
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.990	.960	.866	.613	.370	.086

f. $n = 10$

k \ p	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
0	.904	.599	.349	.107	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.996	.914	.736	.376	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000	.000
2	1.000	.988	.930	.678	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000	.000
3	1.000	.999	.987	.879	.650	.382	.172	.055	.011	.001	.000	.000	.000
4	1.000	1.000	.998	.967	.850	.633	.377	.166	.047	.006	.000	.000	.000
5	1.000	1.000	1.000	.999	.953	.834	.623	.367	.150	.033	.002	.000	.000
6	1.000	1.000	1.000	.999	.989	.945	.828	.618	.350	.121	.013	.001	.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.988	.945	.833	.617	.322	.070	.012	.000
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.954	.851	.624	.264	.086	.004
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.972	.893	.651	.401	.096

(continued)

g. $n = 15$

k \ p	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
0	.860	.463	.206	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.990	.829	.549	.167	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	1.000	.964	.816	.398	.127	.027	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	1.000	.995	.944	.648	.297	.091	.018	.002	.000	.000	.000	.000	.000
4	1.000	.999	.987	.838	.515	.217	.059	.009	.001	.000	.000	.000	.000
5	1.000	1.000	.998	.939	.722	.403	.151	.034	.004	.000	.000	.000	.000
6	1.000	1.000	1.000	.982	.869	.610	.304	.095	.015	.001	.000	.000	.000
7	1.000	1.000	1.000	.996	.950	.787	.500	.213	.050	.004	.000	.000	.000
8	1.000	1.000	1.000	.999	.985	.905	.696	.390	.131	.018	.000	.000	.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.966	.849	.597	.278	.061	.002	.000	.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.941	.783	.485	.164	.013	.001	.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.982	.909	.703	.352	.056	.005	.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.973	.873	.602	.184	.036	.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.965	.833	.451	.171	.010
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.965	.794	.537	.140

h. $n = 20$

k \ p	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
0	.818	.358	.122	.012	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.983	.736	.392	.069	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.999	.925	.677	.206	.035	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	1.000	.984	.867	.411	.107	.016	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	1.000	.997	.957	.630	.238	.051	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5	1.000	1.000	.989	.804	.416	.126	.021	.002	.000	.000	.000	.000	.000
6	1.000	1.000	.998	.913	.608	.250	.058	.006	.000	.000	.000	.000	.000
7	1.000	1.000	1.000	.968	.772	.416	.132	.021	.001	.000	.000	.000	.000
8	1.000	1.000	1.000	.990	.887	.596	.252	.057	.005	.000	.000	.000	.000
9	1.000	1.000	1.000	.997	.952	.755	.412	.128	.017	.001	.000	.000	.000
10	1.000	1.000	1.000	.999	.983	.872	.588	.245	.048	.003	.000	.000	.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.943	.748	.404	.113	.010	.000	.000	.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.979	.868	.584	.228	.032	.000	.000	.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.942	.750	.392	.087	.002	.000	.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.979	.874	.584	.196	.011	.000	.000
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.949	.762	.370	.043	.003	.000
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.984	.893	.589	.133	.016	.000
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.965	.794	.323	.075	.001
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.931	.608	.264	.017
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.988	.878	.642	.182

(continued)

i. $n = 25$

k \ p	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
0	.778	.277	.072	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.974	.642	.271	.027	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.998	.873	.537	.098	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	1.000	.966	.764	.234	.033	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	1.000	.993	.902	.421	.090	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5	1.000	.999	.967	.617	.193	.029	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
6	1.000	1.000	.991	.780	.341	.074	.007	.000	.000	.000	.000	.000	.000
7	1.000	1.000	.998	.891	.512	.154	.022	.001	.000	.000	.000	.000	.000
8	1.000	1.000	1.000	.953	.677	.274	.054	.004	.000	.000	.000	.000	.000
9	1.000	1.000	1.000	.983	.811	.425	.115	.013	.000	.000	.000	.000	.000
10	1.000	1.000	1.000	.994	.902	.586	.212	.034	.002	.000	.000	.000	.000
11	1.000	1.000	1.000	.998	.956	.732	.345	.078	.006	.000	.000	.000	.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	.983	.846	.500	.154	.017	.000	.000	.000	.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.922	.655	.268	.044	.002	.000	.000	.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.966	.788	.414	.098	.006	.000	.000	.000
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.987	.885	.575	.189	.017	.000	.000	.000
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.946	.726	.323	.047	.000	.000	.000
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.978	.846	.488	.109	.002	.000	.000
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.993	.926	.659	.220	.009	.000	.000
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.971	.807	.383	.033	.001	.000
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.991	.910	.579	.098	.007	.000
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.967	.766	.236	.034	.000
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.991	.902	.463	.127	.002
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.973	.729	.358	.026
24	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.928	.723	.222

2.5.1.4 DISTRIBUIÇÃO DISCRETA GEOMÉTRICA

A **distribuição Geométrica** é o modelo probabilístico adequado para descrever o comportamento probabilístico da v.a. X que conta o número de provas de Bernoulli independentes a realizar até obter a primeira prova com sucesso, mantendo-se constante, de prova para prova, a probabilidade de sucesso e insucesso.

Considere-se que foi necessário realizar n provas de Bernoulli até obter uma prova com sucesso.

Uma vez que a experiência termina assim que se obtém uma prova com sucesso, em cada uma das primeiras $n-1$ provas obteve-se um insucesso.

Deste modo, os resultados desta experiência são descritos pela seguinte sequência:

$$\overbrace{\underbrace{\bar{A}\ \ \bar{A}\ \ \dots\ \ \bar{A}}_{\substack{n-1 \\ \text{insucessos}}}\ \ \underbrace{A}_{\substack{1 \\ \text{sucesso}}}}^{n \text{ provas}}$$

Visto as provas serem independentes, a probabilidade desta sequência se verificar é:

$$P(\bar{A}\bar{A}\dots\bar{A} \cap A) = P(\bar{A})P(\bar{A})\dots P(\bar{A})P(A) = (1 - p)^{n-1}\, p.$$

Portanto, a probabilidade de se terem que realizar x provas de Bernoulli independentes até obter a primeira prova com sucesso é dada por:

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1}\ p, \ \ x = 1, 2, \ldots$$

Definição: A v. a. discreta X, que designa o número de provas de Bernoulli independentes a realizar até obter o primeiro sucesso, sendo a p probabilidade de sucesso de cada prova, segue uma **distribuição Geométrica**, i. e., $\boldsymbol{X \sim Geom(p)}$, se a sua função de probabilidade é:

$$f(x) = P(X = x) = (1 - p)^{1-x}\ p,$$

$$x = 1, 2, \ldots \quad com \quad 0 < p < 1.$$

A Figura 2.6 ilustra o comportamento genérico da função de probabilidade, sendo o decaimento mais acentuado quanto maior o valor de p.

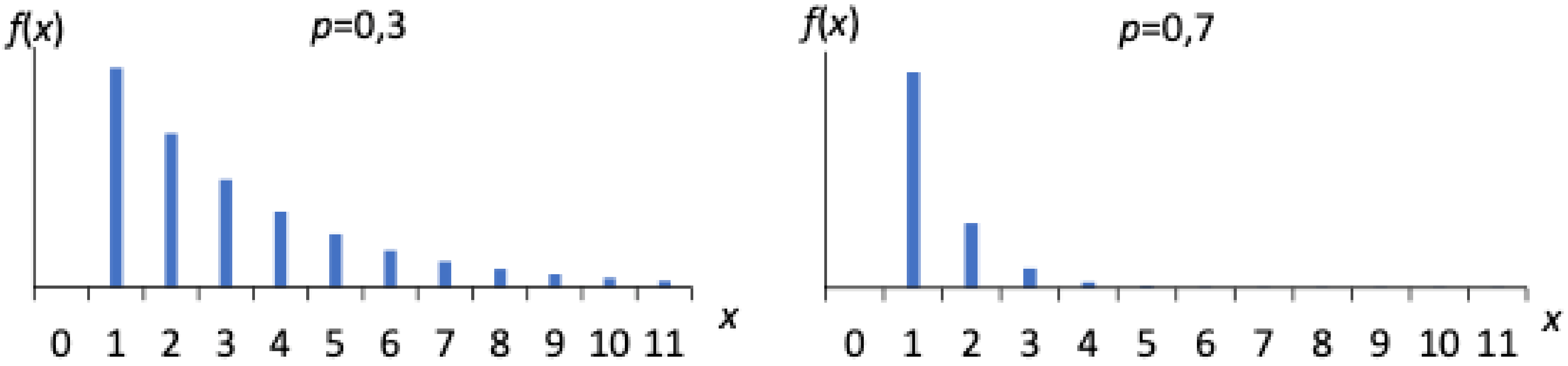


Figura 2.6: Função de probabilidade da distribuição Geométrica para diferentes valores de p.

O parâmetro caracterizador desta distribuição é p.

Se $\boldsymbol{X}$**~Geom(**$\boldsymbol{p}$**)** então $\mu_X = E(X) = \frac{1}{p}$ e $\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Propriedade (falta de memória):

Se $X \sim Geom(p)$ então

$$P(X > x + a \mid X > a) = P(X > x), \; x > 0, \; a > 0.$$

Esta distribuição é também utilizada para descrever o comportamento probabilístico da v.a. $Y = X - 1$ que conta o número de provas de Bernoulli independentes realizadas com insucesso antes de obter o primeiro sucesso. Nesta situação, $Y \sim Geom(p)$ e a função de probabilidade é:

$$f(y) = P(Y = y) = (1 - p)^y \; p,$$
$$y = 0, 1, 2, \ldots \quad com \quad 0 < p < 1.$$

Além disso,

$$\mu_Y = E(Y) = \frac{1 - p}{p} \qquad \text{e} \qquad \sigma_Y^2 = Var(Y) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

EXEMPLO 2.14

Suponha-se que o custo de realização de um experimento seja US$ 1000. Se o experimento falhar, ocorrerá um custo adicional de US$ 300 em virtude de serem necessárias algumas alterações antes que a próxima tentativa seja executada. Se a probabilidade de sucesso em uma tentativa qualquer for 0,2 (se as provas forem independentes), e se os experimentos continuarem até que o primeiro sucesso seja alcançado, qual será o custo esperado do procedimento completo?

Solução:

Como procura-se o custo esperado deve-se saber quantos experimentos em média esperasse para esse experimento, ou seja,

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,2} = 5$$

sendo assim, são necessários 5 experimentos em média até que o primeiro sucesso. Portanto, temos que o custo esperado nas 5 tentativas será

5 * US$ 1000 = US$ 5.000

Mas, a cada falha ocorre um custo adicional de US$ 300, e assim para 5 tentativas tivemos 4 falhas. Então o custo médio esperado será o

US$ 5.000 + (4*US$ 300) = US$ 5.000 + US$ 1.2000 = US$ 6.200

EXEMPLO 2.15

Uma linha de produção está sendo analisada para efeito de controle da qualidade das peças produzidas. Tendo em vista o alto padrão requerido, a produção é interrompida para regulagem toda vez que uma peça defeituosa é observada. Se 0,01 é a probabilidade da peça ser defeituosa, determine a probabilidade de ocorrer uma peça defeituosa na 1ª peça produzida, na 2ª, na 5ª, na 10ª, na 20ª e na 40ª.

Solução:

Lembrando que o sucesso é a primeira peça defeituosa produzida, ou seja p = 0,01.

$$P(X = 1) = (1 - 0{,}01)^{1-1}\ (0{,}01) = 1 * 0{,}01 = 0{,}01 \quad ou \quad 1\%$$

$$P(X = 2) = (1 - 0{,}01)^{2-1}\ (0{,}01) = (0{,}99)^{1}(0{,}01)$$
$$= 0{,}0099 \quad ou \quad 0{,}99\%$$

$$P(X = 5) = (1 - 0{,}01)^{5-1}\ (0{,}01) = (0{,}99)^{4}(0{,}01)$$
$$= 0{,}0096 \quad ou \quad 0{,}96\%$$

$$P(X = 10) = (1 - 0{,}01)^{10-1}\ (0{,}01) = (0{,}99)^{9}(0{,}01)$$
$$= 0{,}0091 \quad ou \quad 0{,}91\%$$

$$P(X = 20) = (1 - 0{,}01)^{20-1}\ (0{,}01) = (0{,}99)^{19}(0{,}01)$$
$$= 0{,}0083 \quad ou \quad 0{,}83\%$$

$$P(X = 40) = (1 - 0{,}01)^{40-1}\ (0{,}01) = (0{,}99)^{39}(0{,}01)$$
$$= 0{,}0068 \quad ou \quad 0{,}68\%$$

2.5.1.5 DISTRIBUIÇÃO DISCRETA HIPERGEOMÉTRICA

A **distribuição Hipergeométrica** é o modelo probabilístico adequado para descrever os processos em que se colhem sem reposição amostras de n elementos de uma população com N elementos, dos quais Np possuem determinado atributo (sucesso) e $Nq = N(1-p)$ não possuem esse atributo (insucesso).

Existem $\binom{N}{n}$ maneiras diferentes de recolher, sem reposição, uma amostra de n elementos de uma população com N elementos. Existem $\binom{Np}{x}$ maneiras diferentes de recolher x sucessos num total de Np sucessos e $\binom{Nq}{n-x}$ maneiras diferentes de obter $n-x$ insucessos em Nq insucessos. Portanto, a probabilidade de se registarem x sucessos em n extrações sem reposição, e consequentemente $n - x$ insucessos, é dada por:

$$P(X = x) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

Definição: A v. a. discreta X, que designa o número de sucessos ocorridos em n extrações sem reposição, de uma população com N elementos com Np sucessos, segue uma distribuição Hipergeométrica, i. e., $\boldsymbol{X \sim H(N;\ n;\ p)}$, se a sua função de probabilidade é:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad x = 0, 1, \dots, n \quad com \quad 0 < p < 1 \quad e \quad p + q = 1.$$

Os parâmetros caracterizadores desta distribuição são N, n e p.

Se $\boldsymbol{X}$**~H(N; n;** $\boldsymbol{p}$**)** então $\mu_X = E(X) = np$ e $\sigma_X^2 = Var(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$.

Aproximação da distribuição Hipergeométrica à Binomial:

Quando N é grande comparado com n, a diferença entre as distribuições Hipergeométrica e Binomial é atenuada. Desta forma, quando $n < 0{,}1 * N$ aplica-se a distribuição Binomial por facilidade de cálculo pois esta oferece uma boa aproximação da distribuição Hipergeométrica:

Se $\boldsymbol{X}$**~H(N; n;** $\boldsymbol{p}$**)** e $n < 0{,}1 * N$ então $\boldsymbol{X}$**~**$\boldsymbol{B}$**(n;** $\boldsymbol{p}$**)**.

EXEMPLO 2.16

Suponha que um lote contenha 100 artigos, 5 não-conformes a especificação. Se 10 artigos são selecionados ao acaso sem substituição, então a probabilidade de encontrar um ou menos artigos defeituosos na amostra é

Solução:

$$P(x \leq 1) = P(x = 0) + P(x = 1)$$
$$= \frac{\binom{5}{0}\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{95}{9}}{\binom{100}{10}}$$
$$= 0{,}923$$

EXEMPLO 2.17

Referindo-se ao exemplo 2.16, calcule μ e σ^2:

Solução:

$$\mu = \frac{n.D}{N} = \frac{10\ .\ 5}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\sigma^2 = \frac{n\ .\ D}{N}\ .\ \left(1 - \frac{D}{N}\right)\ .\ \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$= \frac{10\ .\ 5}{100}\ .\ \left(1 - \frac{5}{100}\right)\ .\ \left(\frac{100-10}{100-1}\right) = \frac{1}{2}\ .\ \left(\frac{95}{100}\right)\ .\ \left(\frac{90}{99}\right)$$

$$= \frac{8550}{19800} = 0{,}43182$$

2.5.1.6 DISTRIBUIÇÃO DISCRETA MULTINOMIAL

A **distribuição Multinomial** é a generalização da distribuição Binomial, em que se tem mais de dois resultados possíveis em cada experiência aleatória (prova).

Quando se realizam n experiências aleatórias independentes, existindo K resultados possíveis e incompatíveis para cada experiência, A_i, i=1,...,K, mantendo-se constante de prova para prova a probabilidade de cada um desses resultados ocorrer,

$$P(A_i) = p_i \quad e \quad P(\bar{A_i}) = 1 - p_i\ ,$$

$$i = 1, 2, \ldots, K \quad com \quad \sum_{i=1}^{K} A_i = \sum_{i=1}^{K} p_i = 1.$$

então a distribuição Multinomial é o modelo adequado para descrever o comportamento probabilístico da v. a. $(X_1,\ X_2, \dots, X_K)$, onde X_i, representa o número de vezes que ocorre A_i, i = 1, 2, ... , K, em n experiências realizadas.

Definição: A v. a. discreta multidimensional $(X_1,\ X_2, \dots, X_K)$, onde X_i o número de vezes que ocorre A_i, i = 1, 2, ..., K, em n provas independentes, segue uma **distribuição Multinomial**, i. e., $(\boldsymbol{X_1},\ \boldsymbol{X_2}, \dots, \boldsymbol{X_K}) \sim \boldsymbol{M}(\boldsymbol{n};\ \boldsymbol{p_1};\ \dots\ ;\ \boldsymbol{p_k})$, se a sua função de probabilidade conjunta é:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_K) = P(X_1 = x_1;\ X_2 = x_2; \dots; X_K = x_K)$$
$$= \frac{n}{x_1!\ x_2!\ \dots\ x_K!} p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \dots \cdot p_K^{x_K}$$

para $x_i \geq 0$ e $0 < p_i < 1,\ i = 1, 2, \dots, K,$ com $x_1 + x_2 + \cdots + x_K = n$ e $p_1 + p_2 + \cdots + p_K = 1.$

Os parâmetros caracterizadores desta distribuição são n e p_i ($i = 1, 2, \dots, K$-1).
Note que a K-*ésima* variável é definida à custa das restantes, i.e.:

$$x_K = n - x_1 - x_2 - \cdots - x_{K-1} \quad e \quad p_K = 1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{K-1}$$

ou seja, x_K e p_K são dependentes.

Se $(\boldsymbol{X_1}, \ \boldsymbol{X_2}, \dots, \boldsymbol{X_K}) \sim \boldsymbol{M}(\boldsymbol{n}; \boldsymbol{p_1}; \dots; \boldsymbol{p_k})$ então, para i = 1, 2, ... , K:

$$\mu_{X_i} = E(X_i) = np_i \quad \text{e}$$

$$\sigma_{X_i}^2 = Var(X_i) = n \cdot p_i \cdot (1 - p_i) = n \cdot p_i \cdot q_i$$

$$\sigma_{X_i X_j} = Cov(X_i, X_j) = -n \cdot p_i \cdot p_j, \quad i \neq j$$

EXEMPLO 2.18

Num serviço hospitalar existem 100 de comprimidos de igual aparência dos quais 40 são analgésicos, 35 são para o controle da hipertensão e 25 para o controle da diabetes.

Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, com reposição, uma amostra de 15 comprimidos.

a) Identifique a distribuição da v. a. em estudo.
b) Em média quantos comprimidos analgésicos espera ter na amostra? E comprimidos para o controle da hipertensão? E para o controle da diabetes?
c) Determine as variâncias.
d) Qual a probabilidade de ter exatamente 5 comprimidos analgésicos e 3 para controle da hipertensão na amostra?
e) Calcule a probabilidade de retirar no mínimo 9 comprimidos analgésicos e exatamente 5 comprimidos para controle da

diabetes.

f) Qual a probabilidade de a amostra conter pelo menos 14 comprimidos para controle da hipertensão?

Solução:

a) Sejam:

- X_1 a v. a. que representa o número de comprimidos analgésicos nos 15 retirados;
- X_2 a v. a. que representa o número de comprimidos para controlo da hipertensão nos 15 retirados;
- X_3 a v. a. que representa o número de comprimidos para controlo da diabetes nos 15 retirados.

Neste caso tem-se:

$$N = 100; \quad p_1 = \frac{40}{100} = 0{,}4; \quad p_2 = \frac{35}{100} = 0{,}35; \quad p_3 = \frac{25}{100} = 0{,}25; \quad n = 15.$$

Logo,

$$(X_1, X_2, X_3) \sim M(n = 15;\ p_1 = 0{,}4;\ p_1 = 0{,}35;\ \ p_3 = 0{,}25).$$

Função de probabilidade:

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(X_1 = x_1; X_2 = x_2; X_3 = x_3) = \frac{15!}{x_1!\ x_2!\ x_3!}(0{,}40)^{x_1} \cdot (0{,}35)^{x_2} \cdot (0{,}25)^{x_3},$$

para $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ e $x_1, x_2, x_3 = 0, 1, \dots, 15.$

b)

$E(X_1) = 15 \times 0{,}40 = 6$ (nº médio de comprimidos analgésicos).

$E(X_2) = 15 \times 0{,}35 = 5{,}25$ (nº médio de comprimidos para a hipertensão).

$E(X_3) = 15 \times 0{,}25 = 3{,}75$ (nº médio de comprimidos para a diabetes).

c)

$Var(X_1) = 15 \times 0{,}40 \times 0{,}60 = 3{,}6.$

$Var(X_2) = 15 \times 0{,}35 \times 0{,}65 = 3{,}4125.$

$Var(X_3) = 15 \times 0{,}25 \times 0{,}75 = 2{,}8125.$

d) $P(X_1 = 5; X_2 = 3) = P(X_1 = 5; X_2 = 3; X_3 = 7) =$

$$\frac{15!}{5!3!7!}\,(0{,}40)^5 \times (0{,}35)^3 \times (0{,}25)^7 = 0{,}0097.$$

e) $P(X_1 \geq 9; X_3 = 5) = P(X_1 = 9; X_2 = 1; X_3 = 5) + P(X_1 = 10; X_2 = 0; X_3 = 5)$

$$= \left[\frac{15!}{9!1!5!}\,(0{,}40)^9 \times (0{,}35)^1 \times (0{,}25)^5\right] + \left[\frac{15!}{10!0!5!}\,(0{,}40)^{10} \times (0{,}35)^0 \times (0{,}25)^5\right] = 0{,}0030.$$

f) $P(X_2 \geq 14) = P(X_1 = 1; X_2 = 14; X_3 = 0) + P(X_1 = 0; X_2 = 14; X_3 = 1) + P(X_1 = 0; X_2 = 15; X_3 = 0)$

$$= \left[\frac{15!}{1!14!0!}\,(0{,}40)^1 \times (0{,}35)^{14} \times (0{,}25)^0\right] +$$

$$\left[\frac{15!}{0!14!1!}\,(0{,}40)^0 \times (0{,}35)^{14} \times (0{,}25)^1\right] + \left[\frac{15!}{0!14!0!}\,(0{,}40)^0 \times (0{,}35)^{14} \times (0{,}25)^0\right] \approx$$

$0{,}0000.$

2.5.1.7 DISTRIBUIÇÃO DISCRETA POISSON

A **distribuição Poisson** é o modelo probabilístico adequado para descrever os fenómenos em que os acontecimentos se repetem no tempo (ou no espaço).

Para que a v. a. X, que designa o número de ocorrências num determinado intervalo de tempo, siga uma distribuição de Poisson tem que verificar as seguintes condições (Murteira et al., 2007):

- O número de ocorrências em intervalos disjuntos (não sobrepostos) são independentes entre si;

- A probabilidade de se registar uma ocorrência num qualquer intervalo de amplitude muito pequena é aproximadamente proporcional à dimensão do intervalo;

- A probabilidade de um certo número de ocorrências se verificar é a mesma para intervalos com a mesma amplitude, i. e., esta probabilidade depende apenas da amplitude do intervalo e não da posição em que se situa esse intervalo;

- A probabilidade de se verificarem duas ou mais ocorrências num período muito pequeno é aproximadamente igual a zero.

Alguns exemplos de fenômenos que se adequam a uma distribuição de Poisson:

- Número de chamadas telefónicas que chegam, em certo período, a uma central telefónica;

- Número de avarias que ocorrem numa máquina, num certo intervalo de tempo;

- Número de doentes que chegam a determinado hospital, por unidade de tempo.

Características de uma Variável Aleatória de Poisson

1. O experimento consiste em contar o número de vezes que um certo evento ocorre durante uma determinada unidade de tempo ou em uma determinada área ou volume (ou peso, distância, ou qualquer outra unidade de medida).
2. A probabilidade que um evento ocorre em uma determinada unidade de tempo, área, ou volume é o mesmo para todas as unidades.

3. O número de eventos que ocorrem em uma unidade de tempo, área, ou volume é independente do número que ocorre em outras unidades.
4. A média (ou esperança) número de eventos em cada unidade é denotada pela letra grega lambda, λ.

Definição: A v. a. discreta X, que designa o número de ocorrências num determinado intervalo de tempo, segue uma **distribuição Poisson**, i.e., $\boldsymbol{X \sim P(\lambda)}$, se a sua função de probabilidade é:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \quad \lambda^{x}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots \qquad com \qquad \lambda > 0$$

onde

λ = Significa o número de eventos durante dada unidade de tempo, área, volume, etc.
e = 2.71828 ....

O parâmetro caracterizador desta distribuição é λ.

A assimetria da distribuição depende do valor de λ. Para valores grandes de λ a distribuição tende a ser simétrica, enquanto para valores pequenos de λ esta distribuição é enviesada à esquerda, i. e., é assimétrica positiva (Figura 2.7).

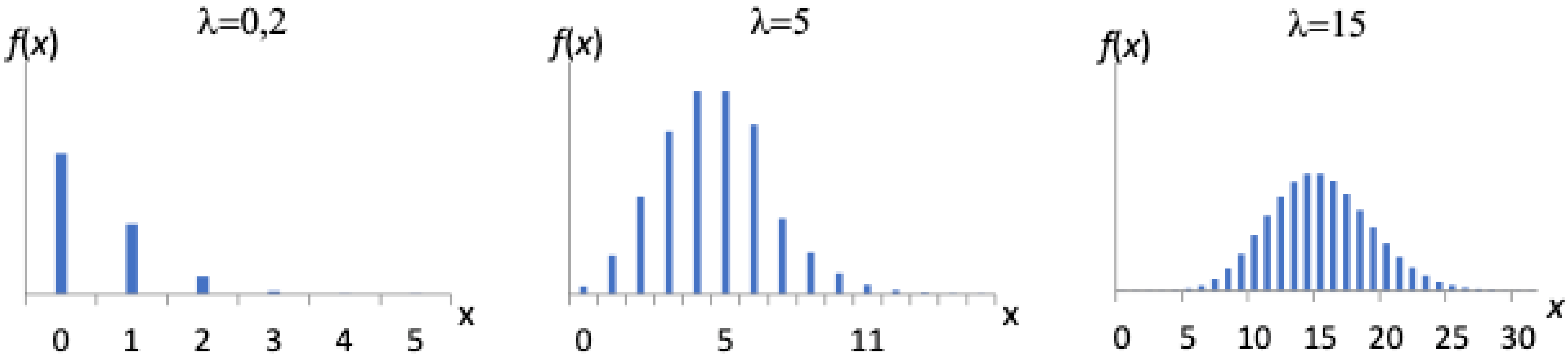


Figura 2.7: Função de probabilidade da distribuição Poisson para diferentes valores de λ.

Se $\boldsymbol{X}$**~P(**λ**)** então $\mu_X = E(X) = \lambda$ e $\sigma_X^2 = Var(X) = \lambda$.

Teorema da aditividade:

Se X_i, i=1, 2, ..., K, são v. a. independentes e $\boldsymbol{X_i}$**~P(**λ**)** então

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_K = \sum_{i=1}^{K} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{K} \lambda_i\right).$$

Aproximação da distribuição Binomial à Poisson:

A distribuição Binomial converge para a distribuição Poisson, quando $n \to \infty$ e $p \to 0$, mantendo-se constante $\lambda = np$.

Teorema:

Se $\boldsymbol{X}$**~B(n;** $\boldsymbol{p}$**)** e $n \to \infty$ e $p \to 0$ então $\boldsymbol{X}$**~P(n**$\boldsymbol{p}$**)**.

Observação: Na prática utiliza-se $n > 20$ e $p \leq 0{,}05$.

A aproximação é tanto melhor quanto maior o valor de n e menor o valor de p (Figura 4.8).

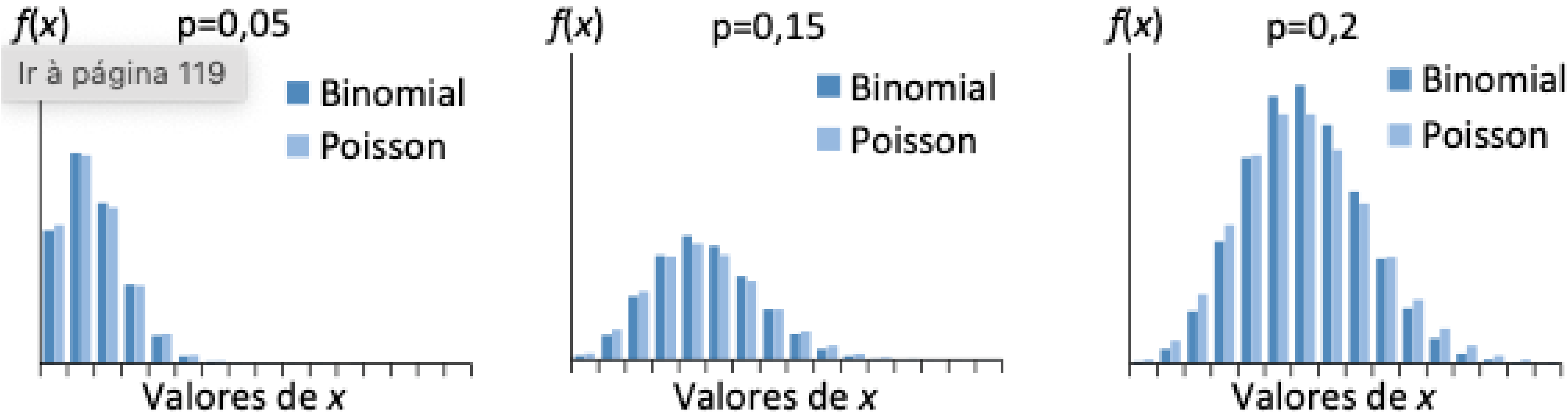
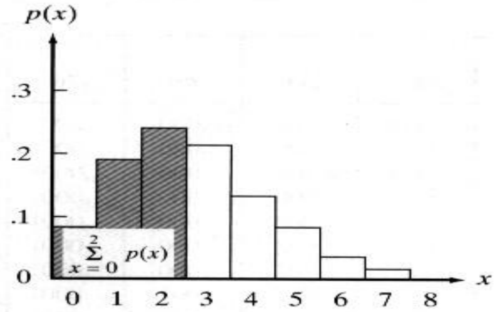


Figura 2.8: Aproximação da distribuição $B(n = 30; p)$ pela Poisson para diferentes valores de p.

O cálculo das probabilidades de Poisson é facilmente produzido pelo uso da Tabela III, que dá as probabilidades acumuladas $P(x \leq k)$ de vários valores de λ.



Tabulated values are $\sum_{x=0}^{k} p(x)$. *(Computations are rounded at the third decimal place.)*

λ \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.02	.980	1.000								
.04	.961	.999	1.000							
.06	.942	.998	1.000							
.08	.923	.997	1.000							
.10	.905	.995	1.000							
.15	.861	.990	.999	1.000						
.20	.819	.982	.999	1.000						
.25	.779	.974	.998	1.000						
.30	.741	.963	.996	1.000						
.35	.705	.951	.994	1.000						
.40	.670	.938	.992	.999	1.000					
.45	.638	.925	.989	.999	1.000					
.50	.607	.910	.986	.998	1.000					
.55	.577	.894	.982	.998	1.000					
.60	.549	.878	.977	.997	1.000					
.65	.522	.861	.972	.996	.999	1.000				
.70	.497	.844	.966	.994	.999	1.000				
.75	.472	.827	.959	.993	.999	1.000				
.80	.449	.809	.953	.991	.999	1.000				
.85	.427	.791	.945	.989	.998	1.000				
.90	.407	.772	.937	.987	.998	1.000				
.95	.387	.754	.929	.981	.997	1.000				
1.00	.368	.736	.920	.981	.996	.999	1.000			
1.1	.333	.699	.900	.974	.995	.999	1.000			
1.2	.301	.663	.879	.966	.992	.998	1.000			
1.3	.273	.627	.857	.957	.989	.998	1.000			
1.4	.247	.592	.833	.946	.986	.997	.999	1.000		
1.5	.223	.558	.809	.934	.981	.996	.999	1.000		

(continued)

λ \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.6	.202	.525	.783	.921	.976	.994	.999	1.000		
1.7	.183	.493	.757	.907	.970	.992	.998	1.000		
1.8	.165	.463	.731	.891	.964	.990	.997	.999	1.000	
1.9	.150	.434	.704	.875	.956	.987	.997	.999	1.000	
2.0	.135	.406	.677	.857	.947	.983	.995	.999	1.000	
2.2	.111	.355	.623	.819	.928	.975	.993	.998	1.000	
2.4	.091	.308	.570	.779	.904	.964	.988	.997	.999	1.000
2.6	.074	.267	.518	.736	.877	.951	.983	.995	.999	1.000
2.8	.061	.231	.469	.692	.848	.935	.976	.992	.998	.999
3.0	.050	.199	.423	.647	.815	.916	.966	.988	.996	.999
3.2	.041	.171	.380	.603	.781	.895	.955	.983	.994	.998
3.4	.033	.147	.340	.558	.744	.871	.942	.977	.992	.997
3.6	.027	.126	.303	.515	.706	.844	.927	.969	.988	.996
3.8	.022	.107	.269	.473	.668	.816	.909	.960	.984	.994
4.0	.018	.092	.238	.433	.629	.785	.889	.949	.979	.992
4.2	.015	.078	.210	.395	.590	.753	.867	.936	.972	.989
4.4	.012	.066	.185	.359	.551	.720	.844	.921	.964	.985
4.6	.010	.056	.163	.326	.513	.686	.818	.905	.955	.980
4.8	.008	.048	.143	.294	.476	.651	.791	.887	.944	.975
5.0	.007	.040	.125	.265	.440	.616	.762	.867	.932	.968
5.2	.006	.034	.109	.238	.406	.581	.732	.845	.918	.960
5.4	.005	.029	.095	.213	.373	.546	.702	.822	.903	.951
5.6	.004	.024	.082	.191	.342	.512	.670	.797	.886	.941
5.8	.003	.021	.072	.170	.313	.478	.638	.771	.867	.929
6.0	.002	.017	.062	.151	.285	.446	.606	.744	.847	.916

	10	11	12	13	14	15	16			
2.8	1.000									
3.0	1.000									
3.2	1.000									
3.4	.999	1.000								
3.6	.999	1.000								
3.8	.998	.999	1.000							
4.0	.997	.999	1.000							
4.2	.996	.999	1.000							
4.4	.994	.998	.999	1.000						
4.6	.992	.997	.999	1.000						
4.8	.990	.996	.999	1.000						
5.0	.986	.995	.998	.999	1.000					
5.2	.982	.993	.997	.999	1.000					
5.4	.977	.990	.996	.999	1.000					
5.6	.972	.988	.995	.998	.999	1.000				
5.8	.965	.984	.993	.997	.999	1.000				
6.0	.957	.980	.991	.996	.999	.999	1.000			

(continued)

λ \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6.2	.002	.015	.054	.134	.259	.414	.574	.716	.826	.902
6.4	.002	.012	.046	.119	.235	.384	.542	.687	.803	.886
6.6	.001	.010	.040	.105	.213	.355	.511	.658	.780	.869
6.8	.001	.009	.034	.093	.192	.327	.480	.628	.755	.850
7.0	.001	.007	.030	.082	.173	.301	.450	.599	.729	.830
7.2	.001	.006	.025	.072	.156	.276	.420	.569	.703	.810
7.4	.001	.005	.022	.063	.140	.253	.392	.539	.676	.788
7.6	.001	.004	.019	.055	.125	.231	.365	.510	.648	.765
7.8	.000	.004	.016	.048	.112	.210	.338	.481	.620	.741
8.0	.000	.003	.014	.042	.100	.191	.313	.453	.593	.717
8.5	.000	.002	.009	.030	.074	.150	.256	.386	.523	.653
9.0	.000	.001	.006	.021	.055	.116	.207	.324	.456	.587
9.5	.000	.001	.004	.015	.040	.089	.165	.269	.392	.522
10.0	.000	.000	.003	.010	.029	.067	.130	.220	.333	.458
	10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
6.2	.949	.975	.989	.995	.998	.999	1.000			
6.4	.939	.969	.986	.994	.997	.999	1.000			
6.6	.927	.963	.982	.992	.997	.999	.999	1.000		
6.8	.915	.955	.978	.990	.996	.998	.999	1.000		
7.0	.901	.947	.973	.987	.994	.998	.999	1.000		
7.2	.887	.937	.967	.984	.993	.997	.999	.999	1.000	
7.4	.871	.926	.961	.980	.991	.996	.998	.999	1.000	
7.6	.854	.915	.954	.976	.989	.995	.998	.999	1.000	
7.8	.835	.902	.945	.971	.986	.993	.997	.999	1.000	
8.0	.816	.888	.936	.966	.983	.992	.996	.998	.999	1.000
8.5	.763	.849	.909	.949	.973	.986	.993	.997	.999	.999
9.0	.706	.803	.876	.926	.959	.978	.989	.995	.998	.999
9.5	.645	.752	.836	.898	.940	.967	.982	.991	.996	.998
10.0	.583	.697	.792	.864	.917	.951	.973	.986	.993	.997
	20	**21**	**22**							
8.5	1.000									
9.0	1.000									
9.5	.999	1.000								
10.0	.998	.999	1.000							

(continued)

λ \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10.5	.000	.000	.002	.007	.021	.050	.102	.179	.279	.397
11.0	.000	.000	.001	.005	.015	.038	.079	.143	.232	.341
11.5	.000	.000	.001	.003	.011	.028	.060	.114	.191	.289
12.0	.000	.000	.001	.002	.008	.020	.046	.090	.155	.242
12.5	.000	.000	.000	.002	.005	.015	.035	.070	.125	.201
13.0	.000	.000	.000	.001	.004	.011	.026	.054	.100	.166
13.5	.000	.000	.000	.001	.003	.008	.019	.041	.079	.135
14.0	.000	.000	.000	.000	.002	.006	.014	.032	.062	.109
14.5	.000	.000	.000	.000	.001	.004	.010	.024	.048	.088
15.0	.000	.000	.000	.000	.001	.003	.008	.018	.037	.070
	10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
10.5	.521	.639	.742	.825	.888	.932	.960	.978	.988	.994
11.0	.460	.579	.689	.781	.854	.907	.944	.968	.982	.991
11.5	.402	.520	.633	.733	.815	.878	.924	.954	.974	.986
12.0	.347	.462	.576	.682	.772	.844	.899	.937	.963	.979
12.5	.297	.406	.519	.628	.725	.806	.869	.916	.948	.969
13.0	.252	.353	.463	.573	.675	.764	.835	.890	.930	.957
13.5	.211	.304	.409	.518	.623	.718	.798	.861	.908	.942
14.0	.176	.260	.358	.464	.570	.669	.756	.827	.883	.923
14.5	.145	.220	.311	.413	.518	.619	.711	.790	.853	.901
15.0	.118	.185	.268	.363	.466	.568	.664	.749	.819	.875
	20	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**
10.5	.997	.999	.999	1.000						
11.0	.995	.998	.999	1.000						
11.5	.992	.996	.998	.999	1.000					
12.0	.988	.994	.987	.999	.999	1.000				
12.5	.983	.991	.995	.998	.999	.999	1.000			
13.0	.975	.986	.992	.996	.998	.999	1.000			
13.5	.965	.980	.989	.994	.997	.998	.999	1.000		
14.0	.952	.971	.983	.991	.995	.997	.999	.999	1.000	
14.5	.936	.960	.976	.986	.992	.996	.998	.999	.999	1.000
15.0	.917	.947	.967	.981	.989	.994	.997	.998	.999	1.000

(continued)

λ \ k	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
16	.000	.001	.004	.010	.022	.043	.077	.127	.193	.275
17	.000	.001	.002	.005	.013	.026	.049	.085	.135	.201
18	.000	.000	.001	.003	.007	.015	.030	.055	.092	.143
19	.000	.000	.001	.002	.004	.009	.018	.035	.061	.098
20	.000	.000	.000	.001	.002	.005	.011	.021	.039	.066
21	.000	.000	.000	.000	.001	.003	.006	.013	.025	.043
22	.000	.000	.000	.000	.001	.002	.004	.008	.015	.028
23	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.002	.004	.009	.017
24	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.003	.005	.011
25	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.001	.003	.006

λ \ k	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
16	.368	.467	.566	.659	.742	.812	.868	.911	.942	.963
17	.281	.371	.468	.564	.655	.736	.805	.861	.905	.937
18	.208	.287	.375	.469	.562	.651	.731	.799	.855	.899
19	.150	.215	.292	.378	.469	.561	.647	.725	.793	.849
20	.105	.157	.221	.297	.381	.470	.559	.644	.721	.787
21	.072	.111	.163	.227	.302	.384	.471	.558	.640	.716
22	.048	.077	.117	.169	.232	.306	.387	.472	.556	.637
23	.031	.052	.082	.123	.175	.238	.310	.389	.472	.555
24	.020	.034	.056	.087	.128	.180	.243	.314	.392	.473
25	.012	.022	.038	.060	.092	.134	.185	.247	.318	.394

λ \ k	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
16	.978	.987	.993	.996	.998	.999	.999	1.000		
17	.959	.975	.985	.991	.995	.997	.999	.999	1.000	
18	.932	.955	.972	.983	.990	.994	.997	.998	.999	1.000
19	.893	.927	.951	.969	.980	.988	.993	.996	.998	.999
20	.843	.888	.922	.948	.966	.978	.987	.992	.995	.997
21	.782	.838	.883	.917	.944	.963	.976	.985	.991	.994
22	.712	.777	.832	.877	.913	.940	.959	.973	.983	.989
23	.635	.708	.772	.827	.873	.908	.936	.956	.971	.981
24	.554	.632	.704	.768	.823	.868	.904	.932	.953	.969
25	.473	.553	.629	.700	.763	.818	.863	.900	.929	.950

λ \ k	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
19	.999	1.000								
20	.999	.999	1.000							
21	.997	.998	.999	.999	1.000					
22	.994	.996	.998	.999	.999	1.000				
23	.988	.993	.996	.997	.999	.999	1.000			
24	.979	.987	.992	.995	.997	.998	.999	.999	1.000	
25	.966	.978	.985	.991	.991	.997	.998	.999	.999	1.000

EXEMPLO 2.19

Suponha que o número, x, dos empregados de uma companhia que estão ausentes nas segundas-feiras tem (aproximadamente) uma distribuição de probabilidade de Poisson. Além disso, assuma que o número comum de ausentes na segunda-feira é 2,6.

a. Encontre a média e o desvio padrão de x, o número de empregados ausentes na segunda-feira.

b. Use a Tabela III para encontrar a probabilidade que menos que dois empregados estão ausentes em uma determinada segunda-feira.

c. Use a Tabela III para encontrar a probabilidade que mais que cinco empregados estão ausentes em uma determinada segunda-feira.

d. Use a Tabela III para encontrar a probabilidade que exatamente cinco empregados estão ausentes em uma determinada segunda-feira.

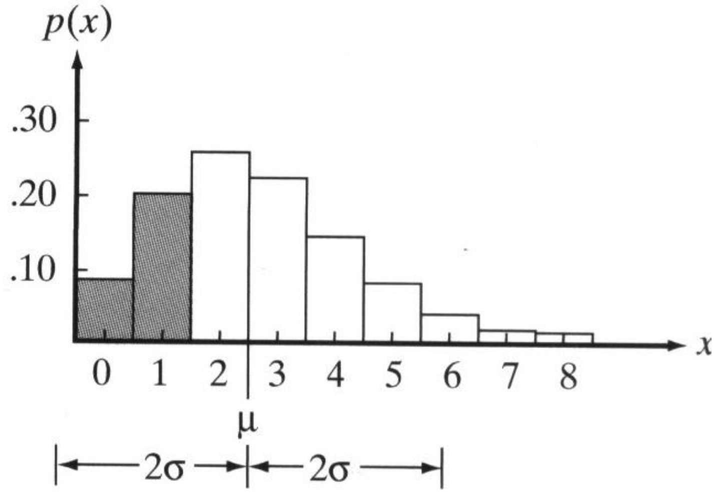


Figura 2.9
Distribuição de probabilidade do número de ausências nas segundas-feiras

Solução

a. A média e a variância de uma variável aleatória Poisson são ambos igual a λ. Assim, para este exemplo,

$$\mu = \lambda = 2{,}6$$
$$\sigma^2 = \lambda = 2{,}6$$

Então o desvio padrão de x é

$$\sigma = \sqrt{2{,}6} = 1{,}61$$

Lembre-se que a média, medida de tendência central da distribuição, não é necessariamente igual a um possível valor de x. Neste exemplo, a média é 2,6 ausências. Embora não possa haver 2,6 ausências em uma determinada segunda-feira, o número comum de ausências na segunda-feira é 2,6. Semelhantemente, o desvio padrão de 1,61 a medida de variabilidade do número de ausências por semana. Talvez uma medida mais útil seja o intervalo $\mu \pm 2\sigma$, o qual neste caso é de $-0{,}62$ a 5,82. Esperamos que o número de ausências esteja dentro do intervalo a maioria das vezes. com pelo menos 75% de freqüência relativa (de acordo com a Regra de Chebyshev) e provavelmente com aproximadamente 95% de freqüência relativa (pela Regra Empírica). A média e o intervalo de 2 desvios padrão é mostrado na Figura 2.9.

b. Uma reprodução parcial da Tabela III é mostrada na Tabela 2.4. As linhas da tabela correspondem a valores diferentes de λ, e as colunas correspondem a valores diferentes (k) da variável aleatória Poisson *x*.

Table 2.4 Reproduction of Part of Table III

λ \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2,2	0,111	0,355	0,623	0,819	0,928	0,975	0,993	0,998	1,000	1,000
2,4	0,091	0,308	0,570	0,779	0,904	0,964	0,988	0,997	0,999	1,000
2,6	0,074	0,267	0,518	0,736	0,877	0,951	0,983	0,995	0,999	1,000
2,8	0,061	0,231	0,469	0,692	0,848	0,935	0,976	0,992	0,998	0,999
3,0	0,050	0,199	0,423	0,647	0,815	0,916	0,966	0,988	0,996	0,999
3,2	0,041	0,171	0,380	0,603	0,781	0,895	0,955	0,983	0,994	0,998

3,4	0,033	0,147	0,340	0,558	0,744	0,871	0,942	0,977	0,992	0,997
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

As células na tabela (igual as probabilidades binomiais na Tabela II) dão as probabilidades acumuladas $P(x \leq k)$. Para encontrar a probabilidade que menos que dois empregados estão ausentes na segunda-feira, nós notamos primeiro que

$$P(x < 2) = P(x \leq 1)$$

Esta probabilidade é uma probabilidade acumulada e então é a célula na Tabela III na linha que corresponde a $\lambda = 2{,}6$ e a coluna que correspondem a $k = 1$. A célula é 0,267, mostrada sombreada na Tabela 2.4. Esta probabilidade corresponde à área sombreada na Figura 2.12 e pode ser interpretada como significando que há uma chance de 26,7% que menos que dois empregados estarão ausentes em uma determinada segunda-feira.

c. Para encontrar a probabilidade que mais que cinco empregados estão ausentes em uma determinada segunda-feira, nós consideramos o evento complementar

$$P(x > 5) = 1 - P(x \leq 5) = 1 - 0{,}951 = 0{,}049$$

onde 0,951 é a entrada da Tabela III que corresponde a λ = 2,6 e k = 5 (veja a Tabela 2.4). Note da Figura 2.12 que está é a área no intervalo $\mu \pm 2\sigma$, ou −0,62 a 5,82. Então o número de ausências deveria exceder 5 — ou, equivalentemente, deveria ser mais de 2 desvios padrão da média — durante aproximadamente 4,9% de todas as segundas-feiras. Note que esta porcentagem concorda notavelmente com o que é determinado pela Regra Empírica para distribuições em forma de sino que nos dizem que esperemos 5% das medidas (valores da variável aleatória) estar aproximadamente 2 desvios padrão mais longe da média.

d. Para usar a Tabela III para encontrar a probabilidade que exatamente cinco empregados estão ausentes em uma segunda-feira, nós temos que escrever a probabilidade como a diferença entre duas probabilidades acumuladas:

$$P(x=5)=P(x\leq 5)-P(x\leq 4)=0,951-0,877=0,074$$

Note que as probabilidades na Tabela III estão todas arredondadas para três casas decimais. Assim, embora teoricamente uma variável aleatória Poisson possa assumir valores infinitamente grandes, os valores de *k* na Tabela III só são estendidos até que a probabilidade acumulada 1,000. Isto significa que *x* não pode assumir valores maiores, mas somente que a probabilidade seja menor que 0,001 (na realidade, menor que 0,0005).

Finalmente, você pode precisar calcular probabilidades de Poisson para valores de λ não encontrado na Tabela III. Você pode obter uma aproximação adequada através da interpolação, mas se não, consulte tabelas mais extensas para a distribuição de Poisson.

EXEMPLO 2.20

Seja X a v. a. que representa o número de automóveis que entram numa autoestrada (AE) num período de 30 segundos.

Sabe-se que X é uma v. a. de Poisson com desvio padrão a 3.

a) Descreva a função de probabilidade da v. a. em estudo.

b) Em média quantos automóveis entram na AE num período de 30 segundos? Calcule a variância.

c) Qual a probabilidade de entrarem no mínimo 2 automóveis na AE num período de 30 segundos?

d) Determine a probabilidade de entrarem no máximo 3 automóveis na AE num minuto.

e) Calcule a probabilidade de entrarem mais de 2 e menos de 5 automóveis na AE num período de 15 segundos.

Solução

a) $X \sim \mathrm{P}(\lambda = 3^2 = 9)$.

Função de probabilidade:1

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-9} \quad 9^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

b) $E(X) = \lambda = 9$ (nº médio de automóveis que entram na AE por cada 30 segundos)

$Var(X) = \lambda = 9$.

c) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + \cdots ou$

$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - \left[\left(\frac{e^{-9}\ \ 9^0}{0!}\right) + \left(\frac{e^{-9}\ \ 9^1}{1!}\right)\right] = 0{,}9998.$$

d) Seja X' a v.a. que representa o nº de automóveis que entram na AE num período de 1 minuto.
Logo, $X' \sim P(\lambda' = 2\lambda = 18)$ pois 1 minuto = 2×30 segundos
$P(\mathrm{X}' \leq 3) = P(\mathrm{X}' = 0) + P(\mathrm{X}' = 1) + P(\mathrm{X}' = 2) + P(\mathrm{X}' = 3) = \frac{e^{-18}\ 18^0}{0!} + \frac{e^{-18}\ 18^1}{1!} + \frac{e^{-18}\ 18^2}{2!} + \frac{e^{-18}\ 18^3}{3!} \approx 0.$

e) Seja X'' a v.a. que representa o n° de automóveis que entram na AE num período de 15 segundos.
Logo, $X'' \sim P\ (\lambda'' = \lambda = 4{,}5)$ pois 15 segundos = 30 segundos $\div$ 2.

$$P(2 < X'' < 5) = P(X'' = 3) + P(X'' = 4) = \frac{e^{-4,5}\,(4,5)^3}{3!} + \frac{e^{-4,5}\,(4,5)^4}{4!} = 0,3585.$$

EXERCÍCIOS

2.35 Calcule o seguinte:

a. $\frac{6!}{2!(6-2)!}$ b. $\binom{5}{2}$ c. $\binom{7}{0}$ d. $\binom{6}{6}$ e. $\binom{4}{3}$

2.36 Considere a seguinte distribuição de probabilidade:

$$p(x) = \binom{5}{x}(0,7)^x(0,3)^{5-x} \qquad (x = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 5)$$

a. *X* é uma variável aleatória discreta ou uma contínua?
b. Qual é o nome desta distribuição de probabilidade?
c. Faça o gráfico da distribuição de probabilidade.
d. Encontre a média e o desvio padrão de *x*.
e. Mostre o média e o intervalo de 2 desvios padrão em cada lateral da média no gráfico que você fez na parte **c**.

2.37 Se *x* for uma variável aleatória binômial, compute *p*(*x*) para cada dos casos seguintes:

a. $n = 5$, $x = 1$, $p = 0,2$
b. $n = 4$, $x = 2$, $q = 0,4$
c. $n = 3$, $x = 0$, $p = 0,1$
d. $n = 5$, $x = 3$, $p = 0,1$
e. $n = 4$, $x = 2$, $q = 0,6$
f. $n = 3$, $x = 1$, $p = 0,9$

2.38 Suponha *x* é uma variável aleatória binomial com $n = 3$ e $p = 0{,}3$.

a. Calcule o valor de $p(x)$, $x = 0, 1, 2, 3$, usando a fórmula para uma distribuição de probabilidade binomial.
b. Usando suas respostas na parte **a**, dê a distribuição de probabilidade de *x* em forma tabular.

2.39 Se *x* é uma variável aleatória binomial, calcule μ, σ^2, e σ de cada um dos seguintes itens:a. $n = 25$, $p = 0{,}5$

b. $n = 80$, $p = 0{,}2$
c. $n = 100$, $p = 0{,}6$
d. $n = 70$, $p = 0{,}9$
e. $n = 60$, $p = 0{,}8$
f. $n = 1{,}000$, $p = 0{,}04$

2.41 A distribuição de probabilidade binomial é uma família de distribuições de probabilidade com cada distribuição que depende dos valores de *n* e *p*. Assuma que *x* é uma variável aleatória binomial com $n = 4$.

a. Determine um valor de *p* tal que a distribuição de probabilidade de *x* é simétrica.
b. Determine um valor de *p* tal que a distribuição de probabilidade de *x* é inclinada à direita.
c. Determine um valor de *p* tal que a distribuição de probabilidade de *x* é inclinada à esquerda.
d. Faça o gráfico para cada uma das distribuições binomiais obtidas nas partes **a**, **b**, e **c**. Indique a média para cada distribuição em seu gráfico.
e. Em geral, para quais valores de *p* uma distribuição binomial será simétrico? Inclinado à direita? Inclinado à esquerda?

2.53 Considere a distribuição de probabilidade mostrada aqui:

$$p(x) = \frac{3^x e^{-3}}{x!} \qquad (x = 0,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

a. *X* é uma variável aleatória discreta ou contínua? Explique.
b. Qual é o nome desta distribuição de probabilidade?
c. Faça o gráfico da distribuição de probabilidade.
d. Encontre a média e o desvio padrão de *x*.
e. Encontre a média e o desvio padrão da distribuição de probabilidade.

2.55 Assuma que *x* é uma variável aleatória que tem uma distribuição de probabilidade Poisson com uma média de 1,5. Use a Tabela III para encontrar as seguintes probabilidades:

a. $P(x \leq 3)$
b. $P(x \geq 3)$
c. $P(x = 3)$
d. $P(x = 0)$
e. $P(x > 0)$

f. $P(x > 6)$

2.56 Suponha que x é uma variável aleatória para qual uma distribuição de probabilidade Poisson com $\lambda = 5$ provê uma boa caracterização.

a. Faça o gráfico de $p(x)$ para x = 0, l, 2,..., 15.
b. Encontre μ e σ para x, e localize μ e o intervalo $\mu \pm 2\sigma$ no gráfico.
c. Qual é a probabilidade que x cairá dentro do intervalo$\mu \pm 2\sigma$?

2.57 A Corporação de Seguro de Depósito Federal (CSDF), assegura depósitos de até $100000 em bancos que são sócios do Sistema de Reserva Federal contra perdas devido a falência ou roubo de bancos. Durante os últimos 5 anos, o número comum de falências de bancos por ano entre bancos segurados foi 4,4 (CSDF, Novembro de 1999). Assuma que x, o número de falências de bancos por ano entre bancos segurados, possa ser caracterizada adequadamente por uma distribuição de probabilidade Poisson com média 4.

a. Encontre o valor esperado e o desvio padrão de x.
b. Em 1997, somente um banco segurado faliu. Quanto distante (em desvios padrão) x = 1 fica abaixo da média da distribuição de Poisson?
c. Em 1999, seis bancos segurados faliram. Encontre$P(x \leq 6)$.
d. Discuta condições que fariam a suposição de Poisson plausível.

2.58 Como parte de um projeto focado em melhorar os serviços de uma padaria local, um consultor de administração (L. Lei da Universidade de Rutgers) monitorou chegadas de clientes durante vários sábados e domingos. Usando os dados de chegada, ele calculou o número comum de chegadas de clientes por período de 10 minutos nos sábados sendo 6,2. Assumiu que chegadas por intervalo de 10 minutos seguiam a distribuição de Poisson (alguns dos valores foram perdidos) como mostra a tabela abaixo.

x	0	l	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$p(x)$	0,002	0,013	—	0,081	0,125	0,155	—	0,142	0,110	0,076	—	0,026	0,014	0,007

Fonte: Lei, L. A Dorsi's Bakery: Operações de serviço modelagem. Escola de graduação de administração, universidade de Rutgers, 1993.

a. Calcule as probabilidades perdidas.
b. Faça o gráfico da distribuição.
c. Encontre μ e σ e delineie os intervalos $\mu \pm \sigma$, $\mu \pm 2\sigma$, e $\mu \pm 3\sigma$ em seu gráfico da parte **b**.
d. O dono da padaria declarou que entram na loja nos sábados mais de 75 clientes por hora. Baseado nos dados do consultor, isto é provável? Explique.

2.59 A Agência de Proteção Ambiental (APA) emite padrões de poluição que vitalmente afetam a segurança de consumidores e as operações da indústria (O Manual do Governo dos Estados Unidos 1998-1999). Por exemplo, o APA declara que os fabricantes de cloreto de vinil e combinações semelhantes têm que limitar a quantia destas substâncias químicas em emissões de ar de planta para não mais que 10 partes por milhões. Suponha que a emissão média de cloreto de vinil para uma planta particular é 4 partes por milhões. Assuma que o número de partes por milhões de cloreto de vinil em amostras de ar, *x*, segue uma distribuição de probabilidade Poisson.

a. Qual é o desvio padrão de *x* para a planta?
b. É provável que uma amostra de ar da planta renderia um valor de *x* que excederia o limite da APA? Explique.
c. Discuta condições que fariam a suposição de Poisson plausível.

2.60 Linhas aéreas americanas voam aproximadamente 48 bilhões de milhas por mês e tem média de fatalidades de aproximadamente 2,63 fatalidades por mês (Resumo Estatístico dos Estados Unidos: 1998). Assuma que a distribuição de probabilidade para *x*, o número de fatalidades por mês, possa ser aproximada por uma distribuição de probabilidade Poisson.

a. Qual é a probabilidade que nenhuma fatalidade ocorrerá durante qualquer determinado mês? [Sugestão: Use a Tabela III e interpole para aproximar a probabilidade, ou use uma calculadora ou computador para calcular a probabilidade exata.]
b. Encontre $E(x)$ e o desvio padrão de *x*.
c. Use suas respostas da parte **b** para descrever a probabilidade que 10 ou mais fatalidades ocorrerá em qualquer determinado mês.
d. Discuta as condições que fariam a suposição de Poisson plausível.

2.61 A Universidade do Novo México dos economistas Kishore Gawande e Timothy Wheeler estudaram a efetividade do Programa de Segurança Marítimo da Guarda costeira dos EUA examinando os registros de 951 modelos de navios sinalizadores dos EUA. Eles modelaram o número de vítimas sofridas por um navio sob um período de três anos como uma variável aleatória de Poisson, *x*. Vítimas são definidas como o número de mortes ou pessoas desaparecidas em um intervalo de três anos. Usando os dados dos 951 navios, eles calcularam $E(x) = 0{,}03$ (Ciência de Administração, janeiro de 1999).

a. Encontre a variância *x*.
b. Discuta as condições que fariam a suposição de Poisson dos investigadores plausível.
c. Qual é a probabilidade que um modelo dos navios sinalizadores dos EUA terá uma vítima exatamente em um período de três anos? Nenhuma vítima em um período de três anos?

2.62 Pedida por seu dono, uma companhia checa a qualidade das portas de madeira produzidas, para inspecionando se há defeitos antes das portas deixarem a fábrica. Utilizando o sistema de medida em pés, o inspetor de controle de qualidade da fábrica encontrou que um pé quadrado da superfície da porta contém, em média, 0,5 falhas menores. Subseqüentemente, um pé quadrado da superfície de cada porta foi examinado. O dono decidiu refazer todas as portas que forem encontradas com duas ou mais falhas secundárias por pé quadrado de superfície que foi inspecionada. Qual é a probabilidade que uma porta seja rejeita na inspeção e será mandada de volta para refazer? Qual é a probabilidade que uma porta passará na inspeção?

2.63 Estudando o ciclo de vida de um produto no mercado de computador de mainframe comercial no período de 1968 a 1982, Shane Greenstein (Universidade Noroeste) e James Wade (Universidade de Illinois) encontraram que o número de introduções de produtos novos por ano por empresa, *x*, poderia ser aproximado por uma variável aleatória Poisson com média igual à 0,37 (Diário de Economia Rand, Inverno de 1998).

a. Encontre o desvio padrão de *x*.

b. Faça o gráfico de $p(x)$, da distribuição de probabilidade para x.
c. É provável que o fabricante de mainframe introduza mais de dois produtos novos por ano? Menos de um produto novo por ano? Justifique suas respostas.

2.64 O número x das pessoas que chegam freqüentemente ao contador de um caixa de um banco durante um período especificado de tempo exibe (aproximadamente) uma distribuição de probabilidade Poisson. Se nós sabemos a taxa de chegada média λ, a distribuição de probabilidade Poisson pode ser usada para ajudar no desígnio da facilidade de atendimento ao consumidor. Suponha que a estimativa que o número médio de chegadas por minuto para serviço de caixa em um banco é uma pessoa por minuto.
a. Qual é a probabilidade que em um determinado minuto o número de chegadas igualará três ou mais?
b. Você pode falar com o gerente do banco que o número de chegadas raramente excederá dois por minuto?

2.65 Uma fábrica industrial grande tem 3200 lâmpadas incandescentes que iluminam o chão industrial. Se a taxa da falta de lâmpadas incandescentes segue uma distribuição de Poisson com uma média de três lâmpadas incandescentes por hora, qual é a probabilidade que exatamente três lâmpadas incandescentes falhem por hora? Qual é a probabilidade que nenhuma lâmpada incandescente falhe por hora? Que nenhuma lâmpada incandescente falhe em uma troca de oito horas? Que suposição é exigida para calcular a última probabilidade?

2.66 Para cada um dos exemplos seguintes, decida se x é uma variável aleatória binomial e explique sua decisão:
a. Um fabricante de chips de computador seleciona 100 chips aleatoriamente da produção de cada hora para calcular a proporção defeituosa. Sendo x o número de defeituosos nos 100 chips amostrados.
b. De cinco candidatos para um trabalho, serão selecionados dois. Embora todos os candidatos pareçam ser qualificados igualmente, só três têm a habilidade para cumprir as expectativas da companhia. Suponha que as duas seleções são feitas ao acaso dos cinco candidatos, e sendo x o número de candidatos qualificados selecionados.
c. Um desenvolvedor de software estabelece uma linha de apoio direta para clientes chamarem com perguntas relativas ao uso do software. Sendo x o número de chamadas recebidas na linha de apoio direta durante um dia de trabalho especificado.
d. Flórida é um estado da minoria de estados sem imposto de renda estatal. Uma pesquisa de opinião de 1000 eleitores registrados é administrada para determinar a quantidade favorável ao imposto de renda estatal, levando-se em conta a condição fiscal atual do estado. Sendo x o número na amostra favorável ao imposto.

2.67 Dado que x é uma variável aleatória binomial, calcule $p(x)$ para cada um dos casos seguintes:
a. $n = 7$, $x = 3$, $p = 0{,}5$

b. $n = 4$, $x = 3$, $p = 0{,}8$
c. $n = 15$, $x = 1$, $p = 0{,}1$

2.68 Considere a distribuição de probabilidade discreta mostrada aqui.

x	10	12	18	20
$p(x)$	0,2	0,3	0,1	0,4

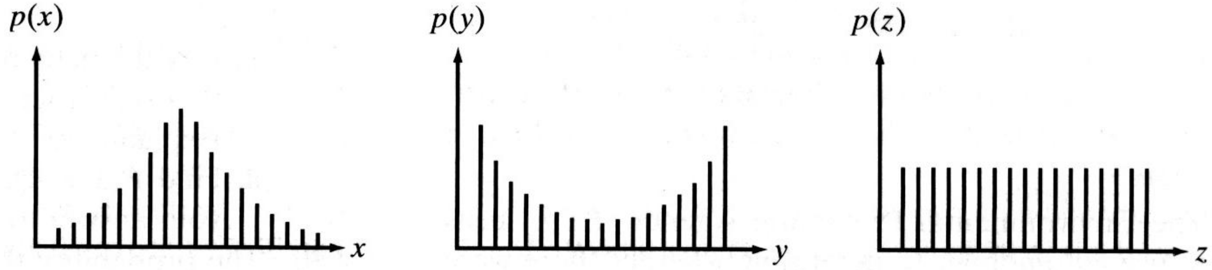
a. Calcule μ, σ^2, e σ.
b. Qual é $P(x < 15)$?
c. Calcule $\mu \pm 2\sigma$.
d. Qual é a probabilidade que x esteja no intervalo $\mu \pm 2\sigma$?

2.69 Suponha que x é uma variável aleatória binomial com $n = 20$ e $p = 0{,}7$.
a. Encontre $P(x = 14)$.
b. Encontre $P(x \leq 12)$.
c. Encontre $P(x < 12)$.
d. Encontre $P(9 \leq x \leq 18)$.
e. Encontre $P(8 < x < 18)$.
f. Encontre μ, σ^2, and σ.
g. Qual é a probabilidade que x esteja no intervalo $\mu \pm 2\sigma$.

2.70 Suponha que x é uma variável aleatória Poisson. Calcule $p(x)$ para cada um dos casos seguintes:
a. $\lambda = 2$, $x = 3$
b. $\lambda = 1$, $x = 4$
c. $\lambda = 0{,}5$, $x = 2$

2.71 Quais das seguintes variáveis aleatórias são discretas, e quais variáveis aleatórias são contínuas?
a. O número de artigos de inventário estragados.
b. A receita de vendas mensal comum gerada por um vendedor durante o último ano.
c. O número em pés quadrados do espaço no armazém alugado por uma companhia.
d. O tempo que uma empresa tem que esperar antes de sua máquina de copias imprimir.

2.72 *x*, *y*, e *z* são três variáveis aleatórias discretas com a mesma média e a mesma amplitude. As suas distribuições de probabilidade são mostradas nas figuras abaixo. Qual tem maior variância? A segunda maior? A menor? Explique.



2.80 A probabilidade que um consumidor responde ao questionário remetido de um departamento de marketing é 0,4.
a. Qual é a probabilidade que de 20 questionários, serão devolvidos mais que 15?
b. Quantos questionários deveriam ser remetidos se você quiser ser razoavelmente certo que pelo menos 100 serão devolvidos?

2.85 Grandes Padarias tipicamente têm frotas de furgões de entrega. Uma padaria determinou que o número esperado de avarias no furgão de entrega por dia é 1,5. Assuma que o número de avarias a cada dia é independente.
a. Qual é a probabilidade que haverá duas avarias exatamente hoje e exatamente três amanhã?
b. Menos que dois hoje e mais que dois amanhã?

2.87 Como a distribuição Hipergeométrica pode ser identificada.

2.88 Dado que *x* é uma variável aleatória para a qual tem uma distribuição de probabilidade Hipergeométrica, calcule o seguinte:
a. $P(x \leq 2)$. quando $N = 60$, $D = 12$, $n = 25$.
b. $P(x \leq 2)$. quando $N = 120$, $D = 12$, $n = 25$.
c. $P(x \leq 2)$. quando $N = 180$, $D = 12$, $n = 25$.
d. O que acontece à probabilidade do evento $\{x \leq 2\}$ como N aumenta de 60 à 180? Isto é intuitivamente razoável?

2.89 Suponha que um lote contém 50 itens, 3 dos quais são não-conformes, segundo o projeto. 8 itens são selecionados ao acaso do lote sem reposição e encontrasse um não conforme.
a. Qual a probabilidade de encontrar 3 não-conformes?
b. Qual a probabilidade de encontrar 2 não-conformes?
c. Qual a probabilidade de encontrar 0 não-conformes?
d. Calcule μ e σ^2 .

2.90 O número X de dezenas acertadas em um cartão da Lotomania segue uma distribuição hipergeométrica com $N = 100$, $D = 20$, $n = 50$.

a. Qual é o número esperado de acertos?
b. Qual a sua variância ?
c. Valores que se afastam por mais de 3 desvios padrão (DP) da média são extremamente raros. Baseado na informação, discuta as premiações para 0, 16, 17, 18, 19 e 20 acertos calculando a distância em unidades de DP até a média.