

# Aula 12

Projeções  
(3D  $\rightarrow$  2D)

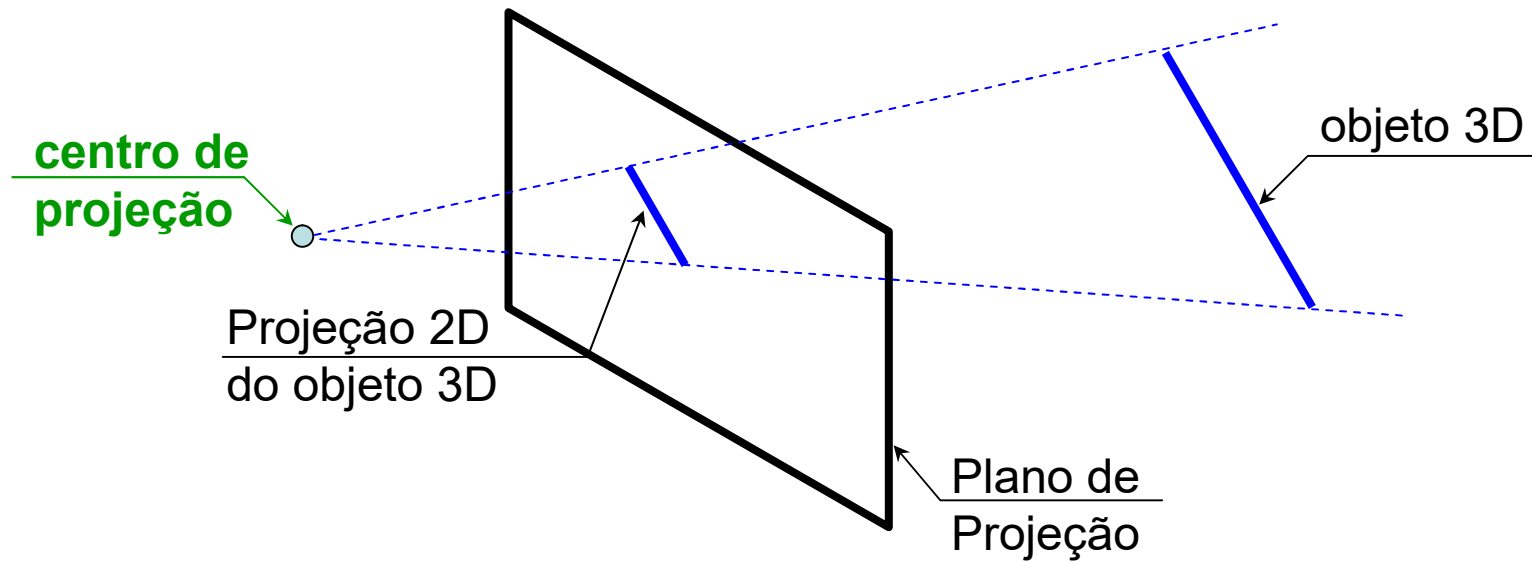
# Projeções (3D $\rightarrow$ 2D)

Projeção é a transformação necessária para apresentar objetos 3D na tela 2D

As projeções geométricas planares (PGP) são obtidas com a passagem de linhas (projetores) pelos pontos que definem o objeto e a posterior interseção dos projetores com um plano de projeção

# Projeções (3D $\rightarrow$ 2D)

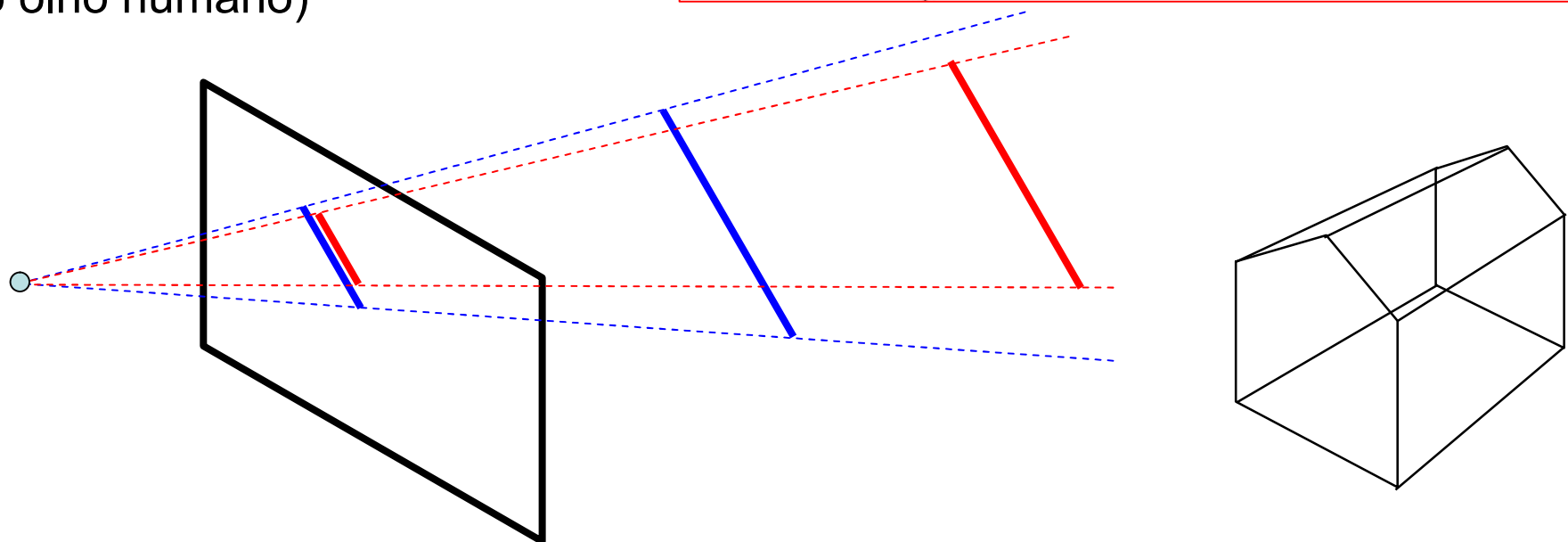
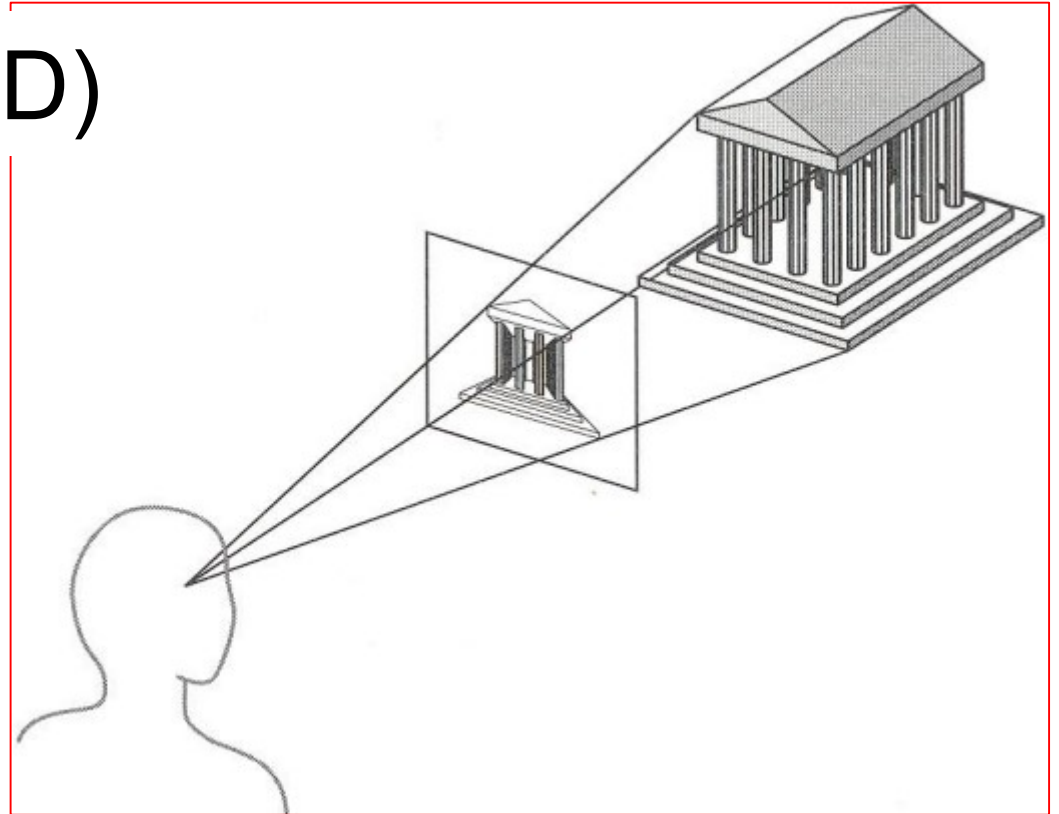
## Projeção Perspectiva



# Projeções (3D → 2D)

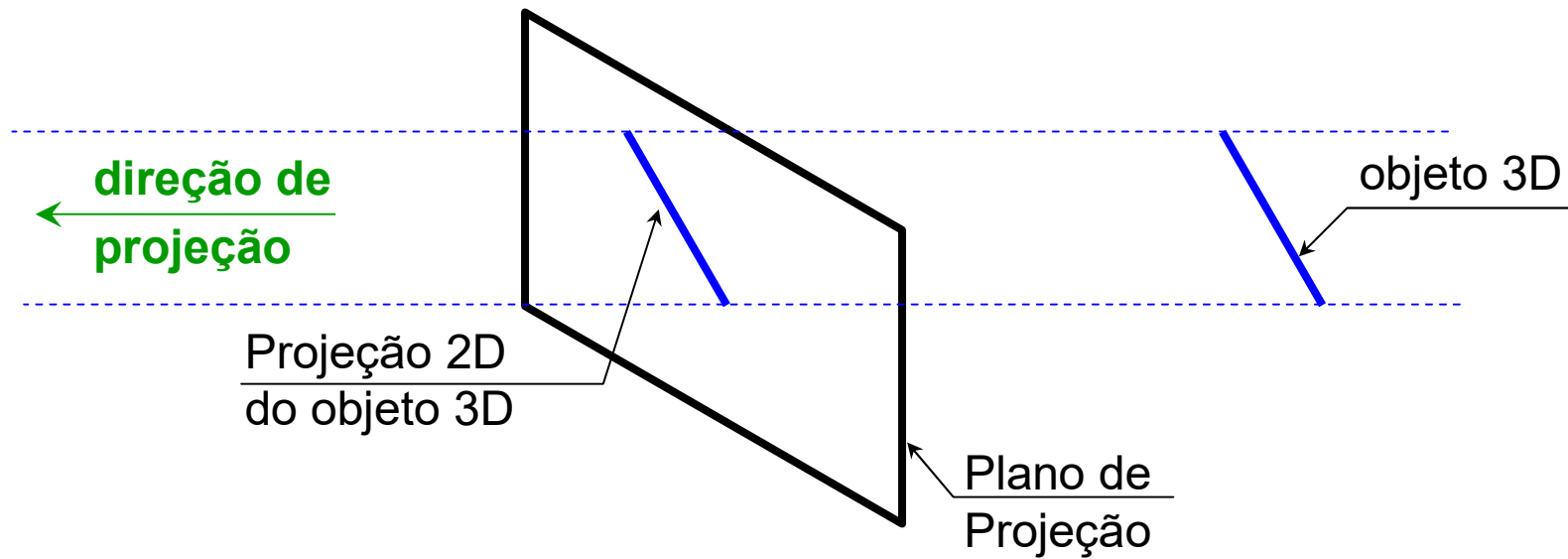
## Projeção Perspectiva

Nesta projeção, objetos mais distantes aparecem menores (esta é a projeção usada na câmara fotográfica e no olho humano)



# Projeções (3D $\rightarrow$ 2D)

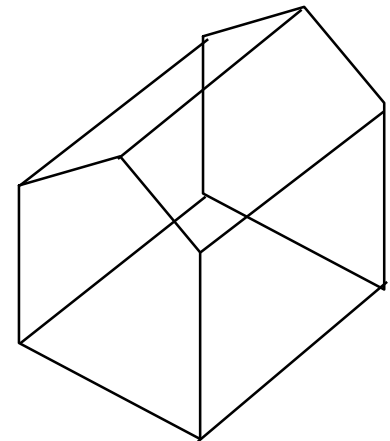
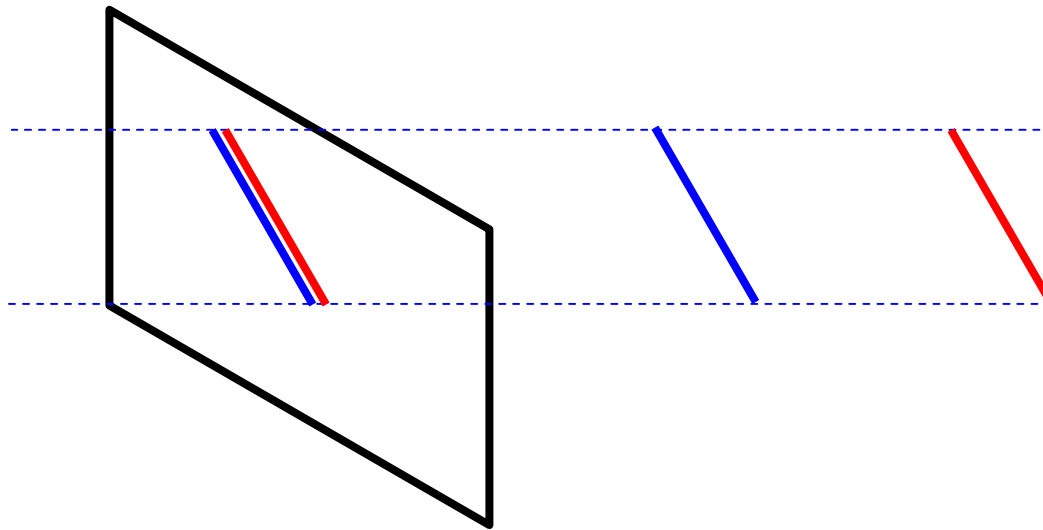
## Projeção Paralela



# Projeções (3D $\rightarrow$ 2D)

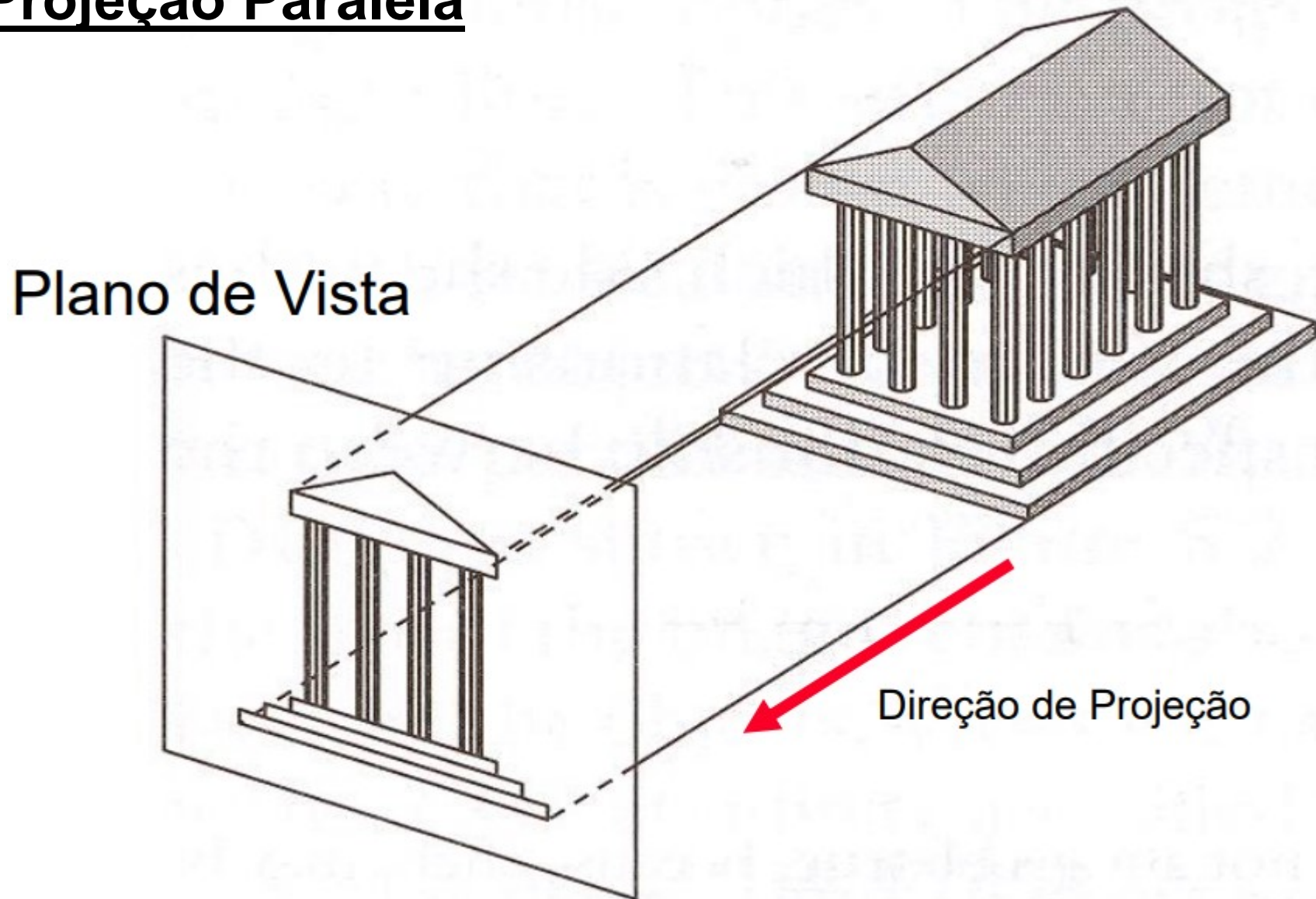
## Projeção Paralela

Nesta projeção, objetos mais distantes aparecem do mesmo tamanho que os mais próximos



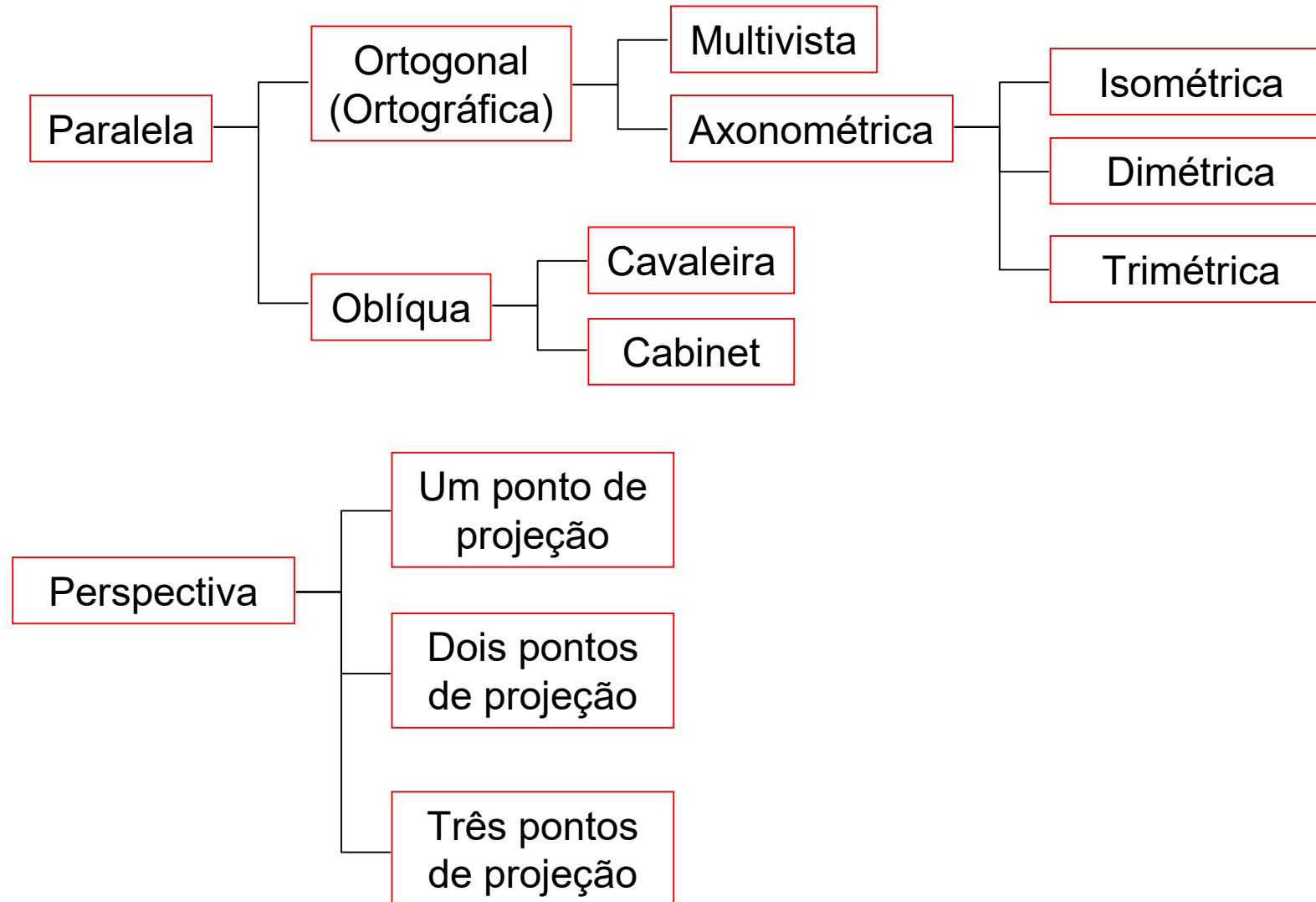
# Projeções (3D → 2D)

## Projeção Paralela



# Projeções (3D → 2D)

## Classificação das Projeções





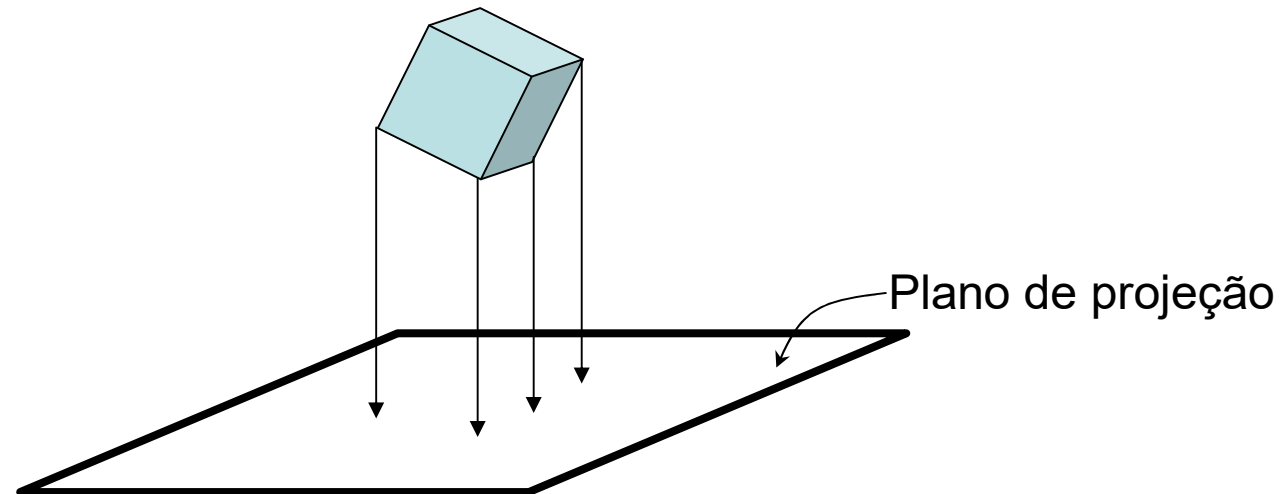
# Projeções (3D $\rightarrow$ 2D)

## Projeção Paralela

Ponto de projeção no infinito e, portanto, utiliza projetores paralelos

## Projeção Paralela Ortogonal (Ortográfica)

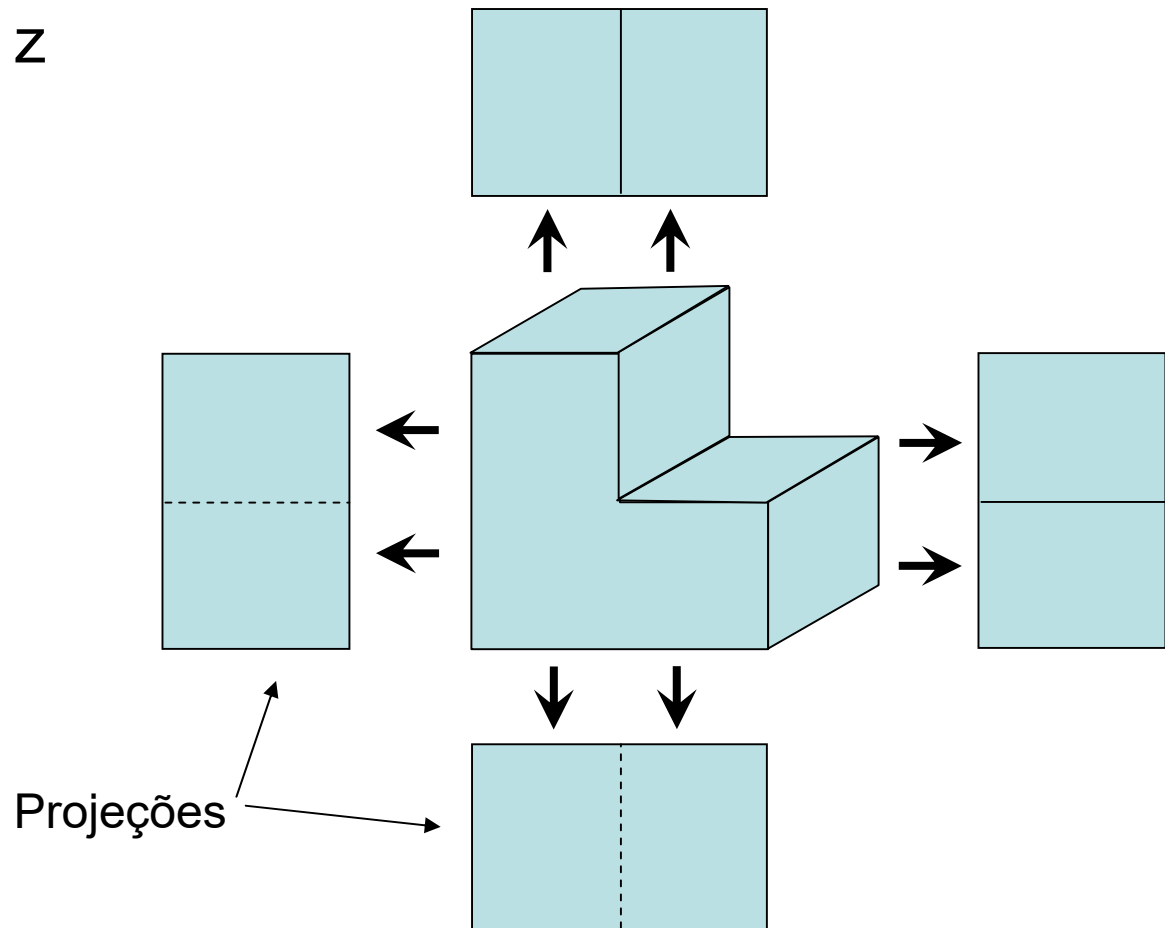
É uma projeção paralela em que a direção dos projetores é normal ao plano de projeção



# Projeções (3D → 2D)

## Projeção Paralela Ortogonal Multivista

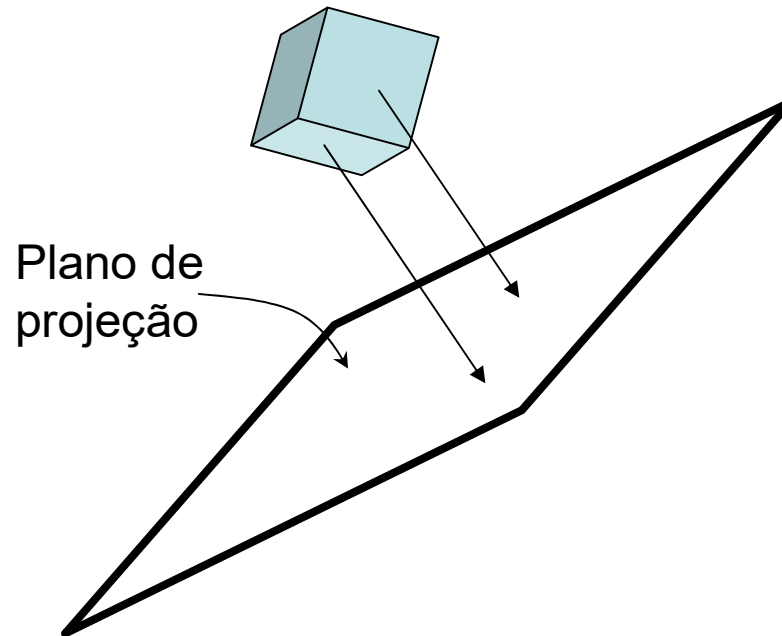
Diversas vistas (frontal, topo, lateral, etc.) são apresentadas em conjunto. o plano de projeção sempre é paralelo a um dos três planos x, y e z



# Projeções (3D → 2D)

## Projeção Paralela Ortogonal Axonométrica

O plano de projeção não é paralelo a um dos planos x, y ou z e, assim, mais de uma face do objeto aparece na projeção final



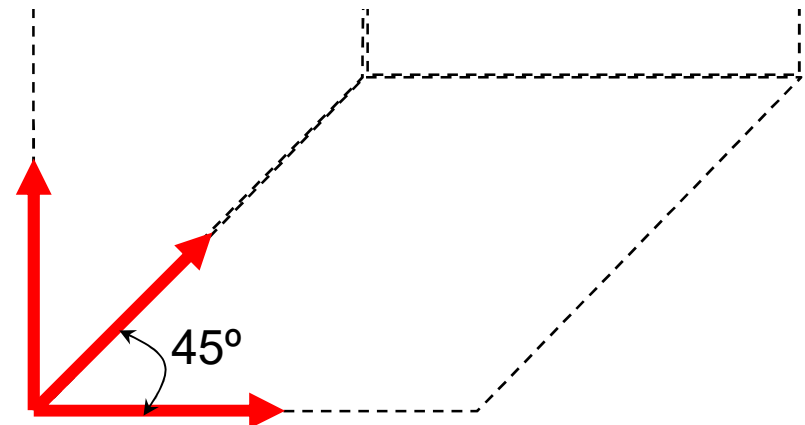
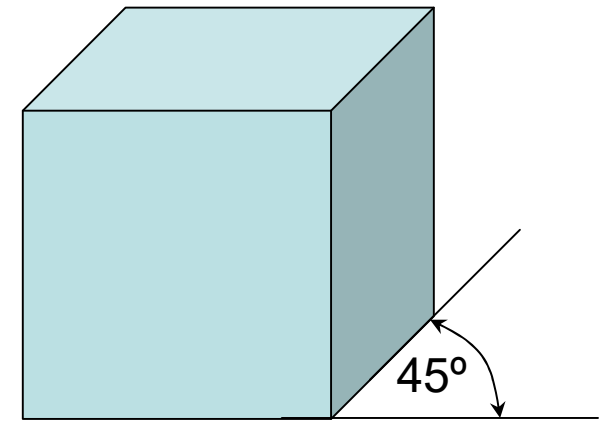
# Projeções (3D → 2D)

## Projeção Paralela Oblíqua

A direção de projeção não é perpendicular ao plano de projeção, porém, o plano de projeção é paralelo a um dos planos x, y ou z

## Projeção Paralela Oblíqua Cavaleira

Muito usada na engenharia,  
usa dois eixos perpendiculares  
e o terceiro eixo é inclinado  
em  $45^\circ$  com o plano de projeção



# Projeções (3D $\rightarrow$ 2D)

## Projeção Paralela Oblíqua Cabinet

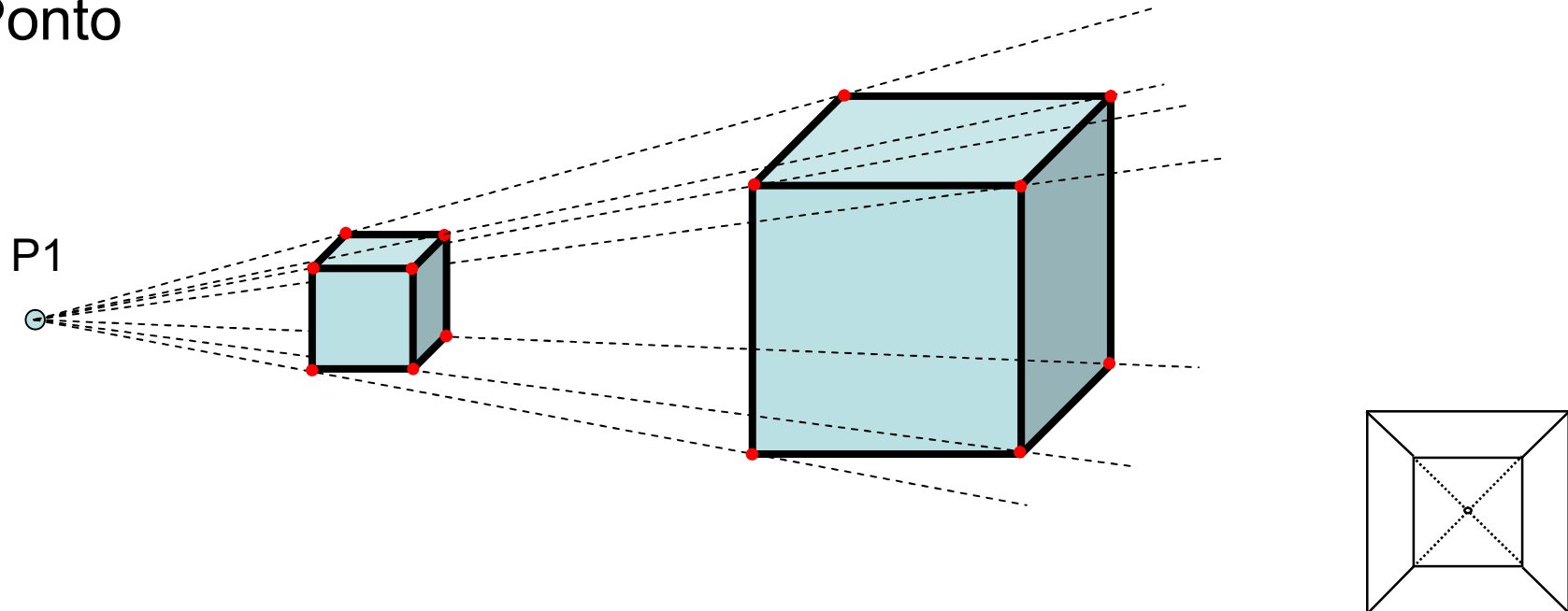
Muito usada na engenharia, usa dois eixos perpendiculares e o terceiro eixo é inclinado em  $\arctan(2)$  ou  $\cong 63,4^\circ$

# Projeções (3D $\rightarrow$ 2D)

## Projeção Perspectiva

Retas paralelas passam a convergir para os pontos de projeção, estando os pontos de projeção sobre os eixos x, y e z e, sendo a redução não uniforme

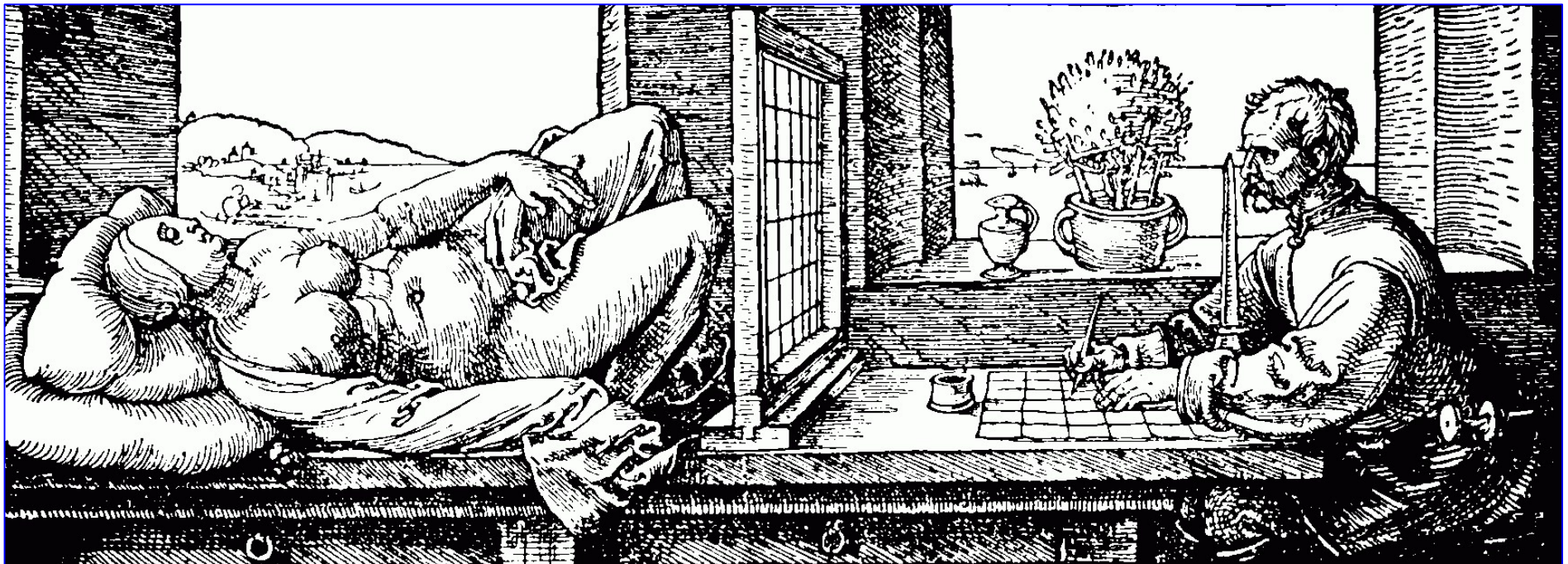
### 1 Ponto



# Projeções (3D → 2D)

## Projeção Perspectiva

Pintor usando a projeção por um ponto





# Projeções (3D → 2D)

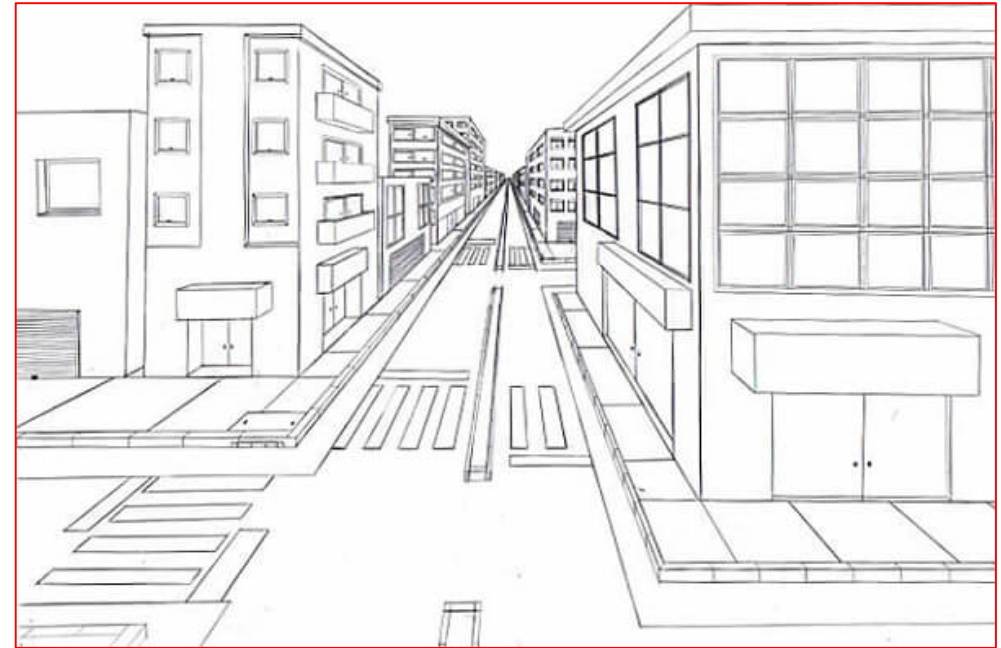
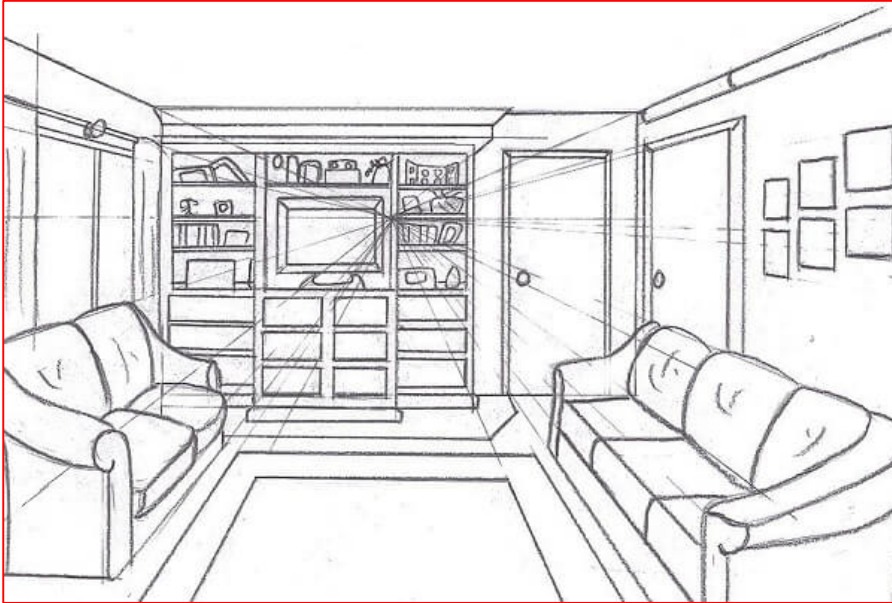
## Projeção Perspectiva

Pintura de Canaletto (1735-1745) da Praça de São Marcos (Veneza) feita usando projeção por um ponto





## Projeção por um ponto



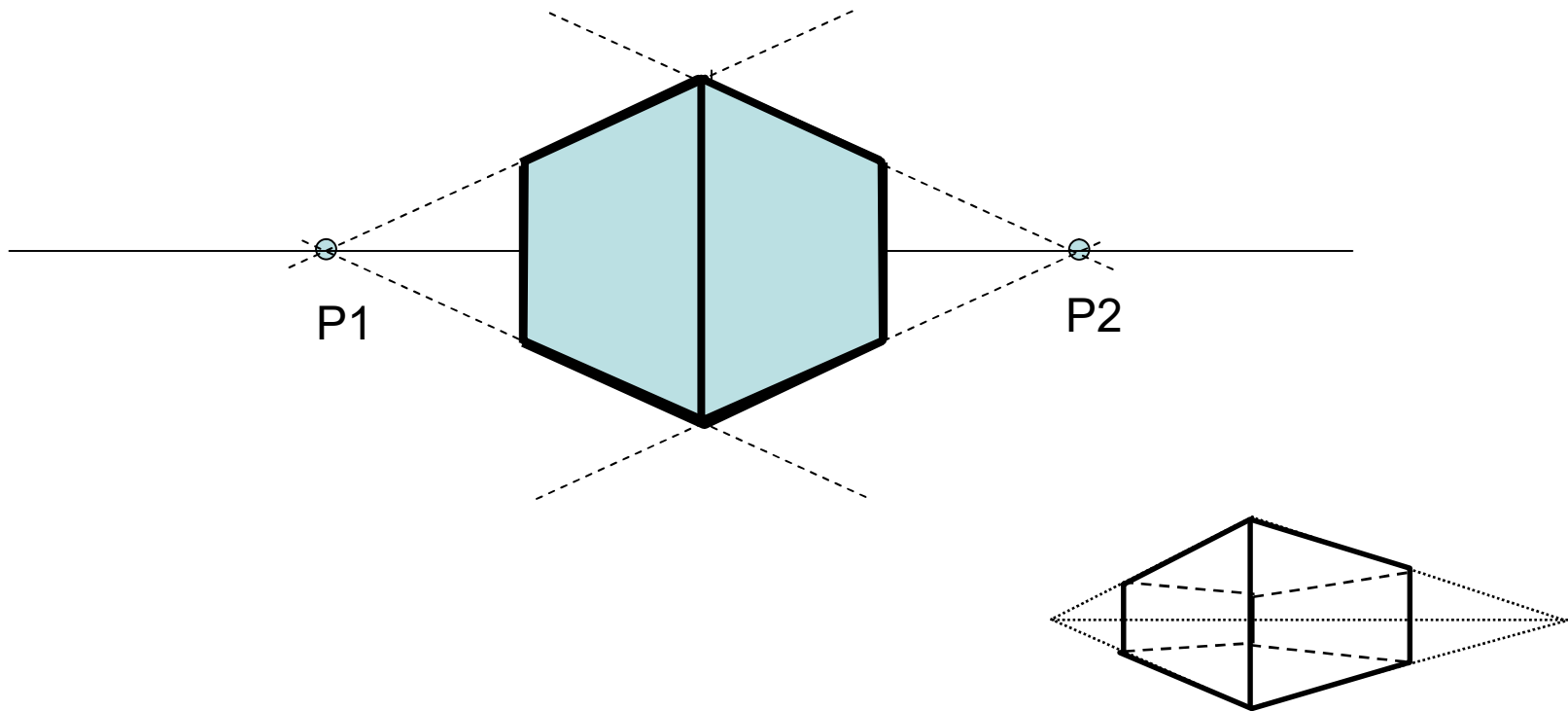
Em um desenho com um ponto de fuga, sempre vai existir uma face que não vai aparecer distorcida para o observador, ou seja, será mostrada de frente. No exemplo acima, a parede com a TV é visualizada dessa forma



# Projeções (3D $\rightarrow$ 2D)

## Projeção Perspectiva

### 2 Pontos

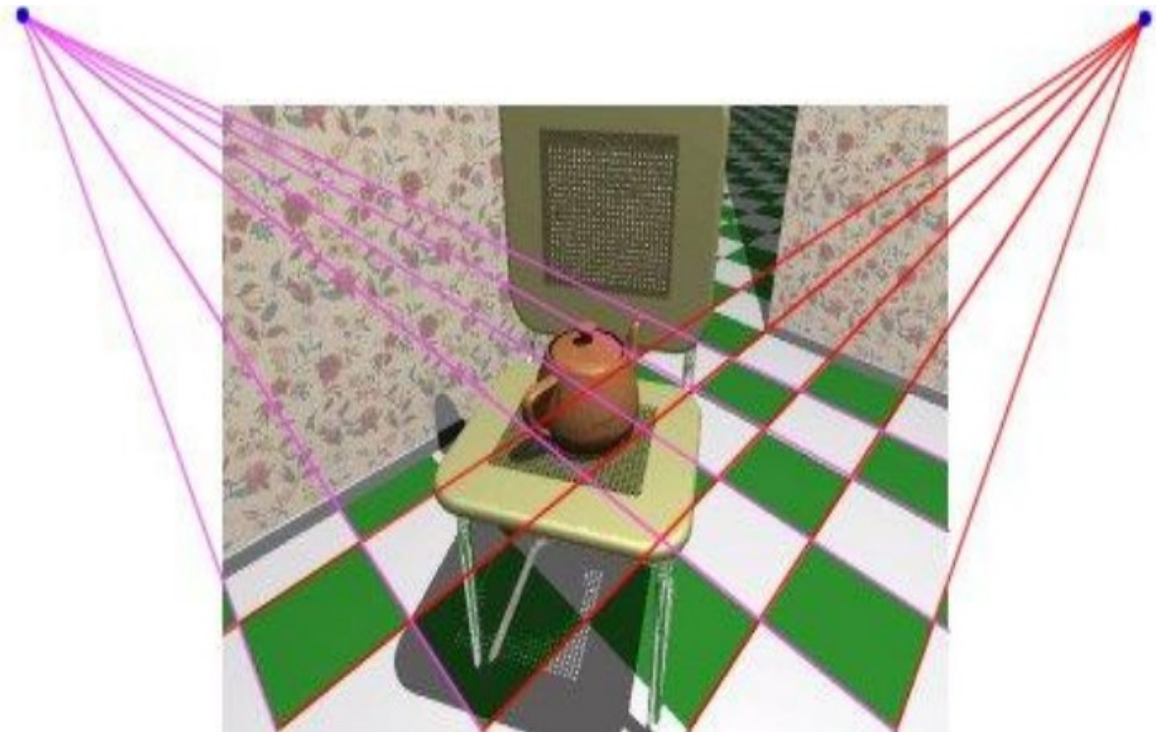
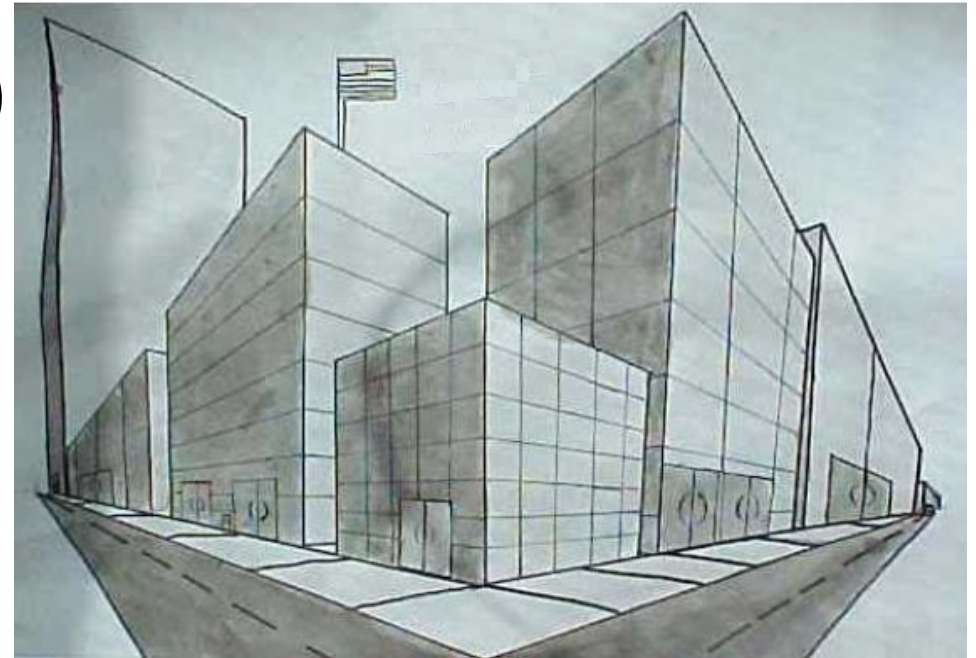


# Projeções (3D → 2D)

## Projeção Perspectiva

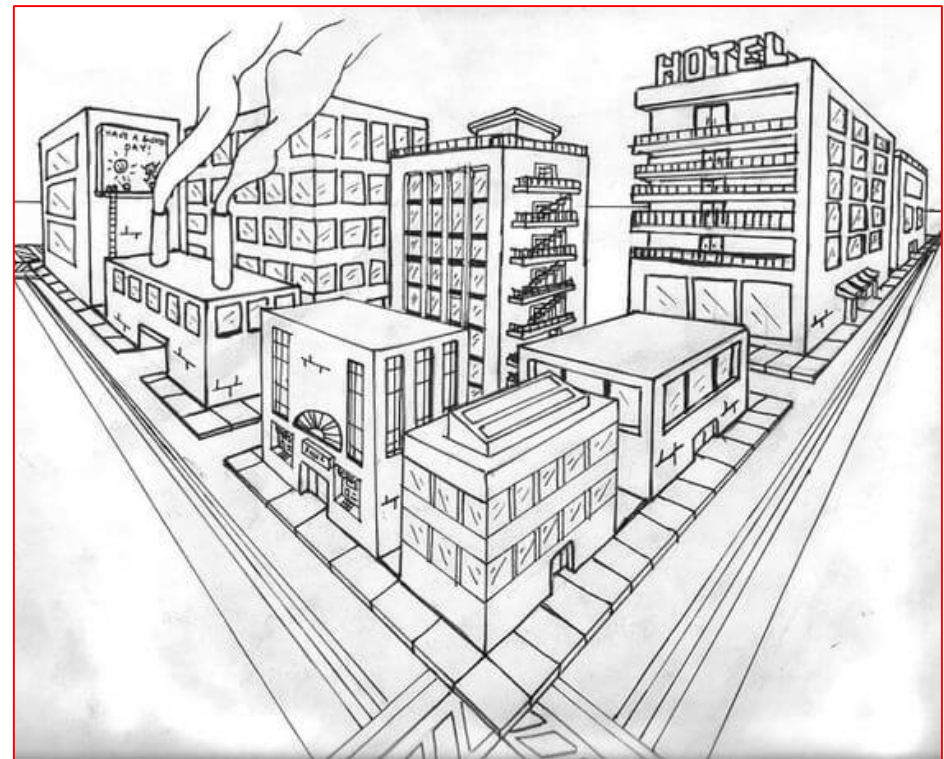
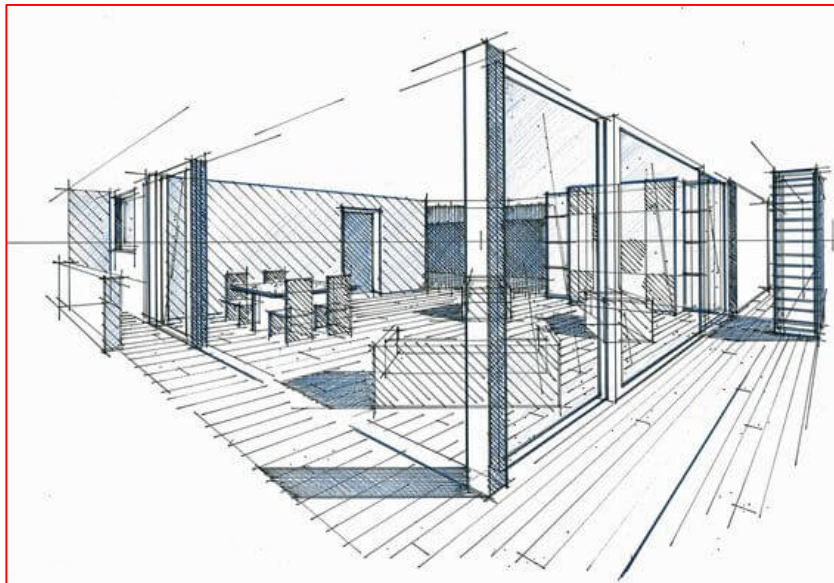
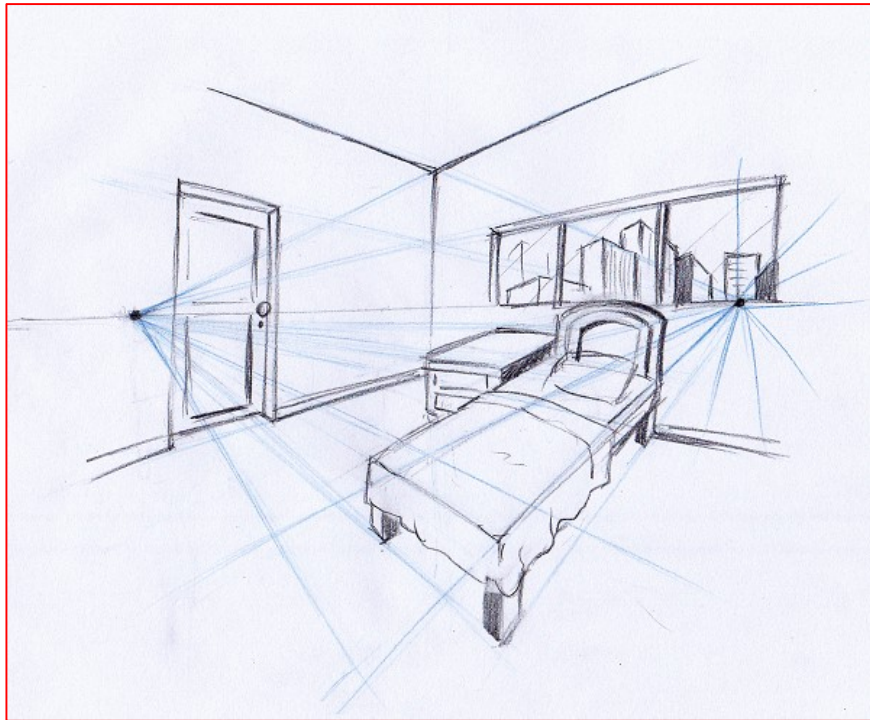
Perspectiva usando dois

Pontos de fuga





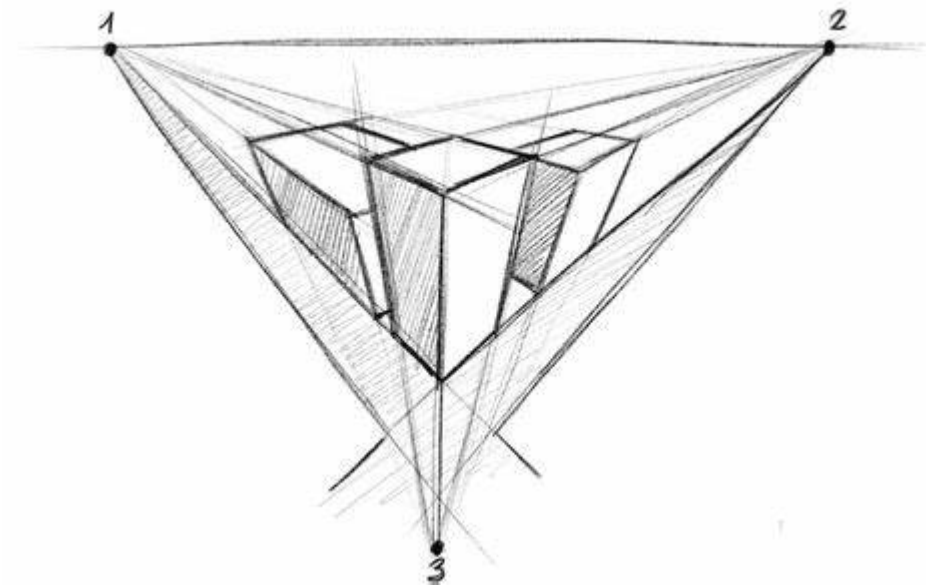
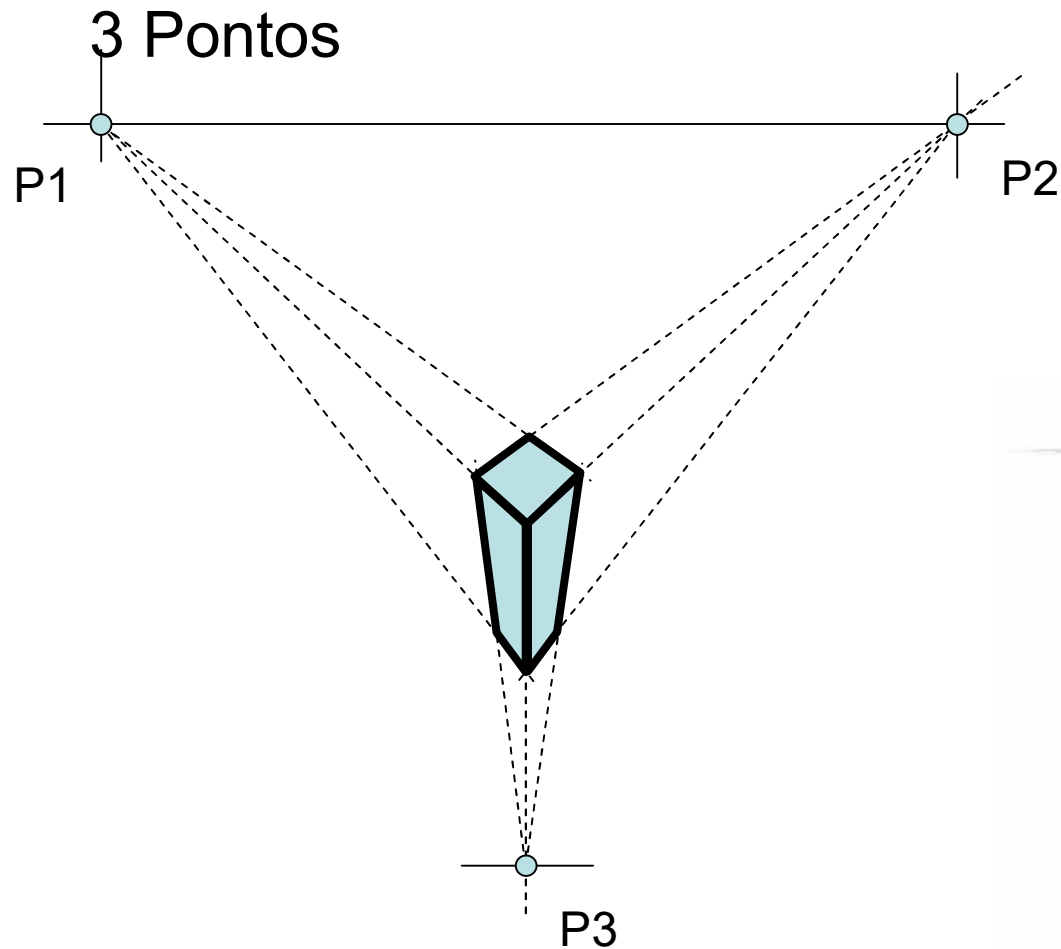
## Projeção Perspectiva por dois Pontos de fuga



Em um desenho com dois pontos de fuga todas as faces aparecem distorcidas, ou seja, nenhuma aparece de frente.

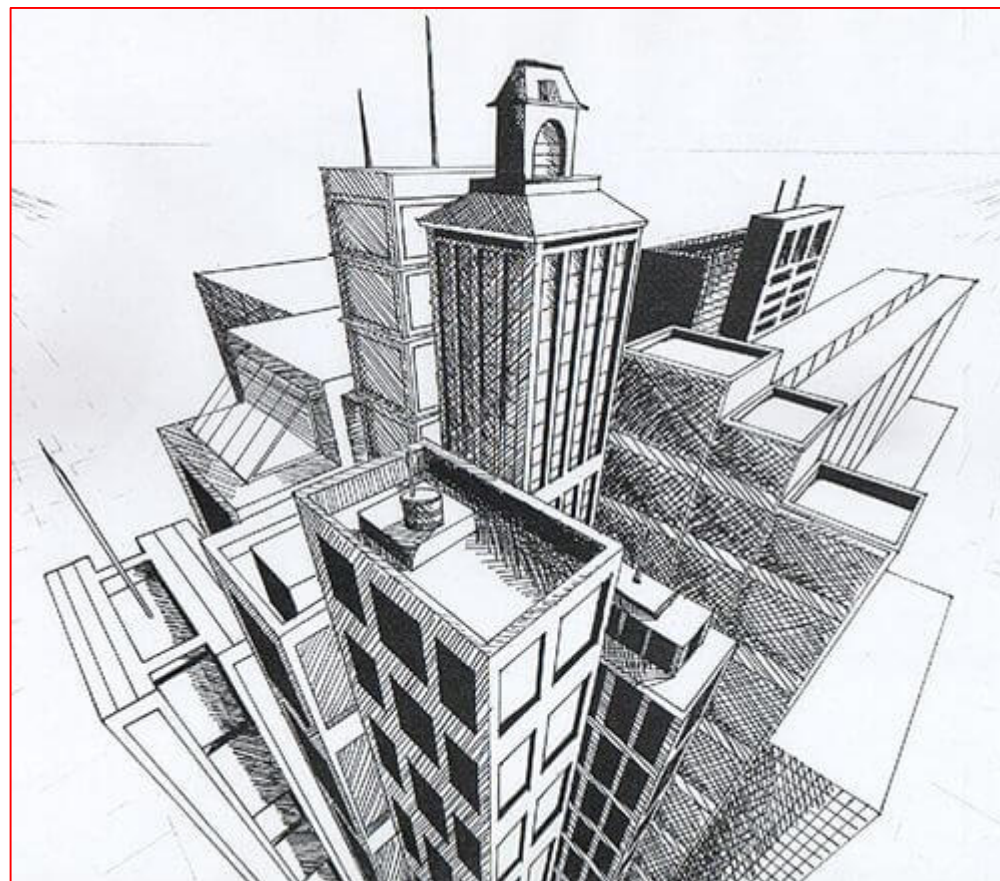
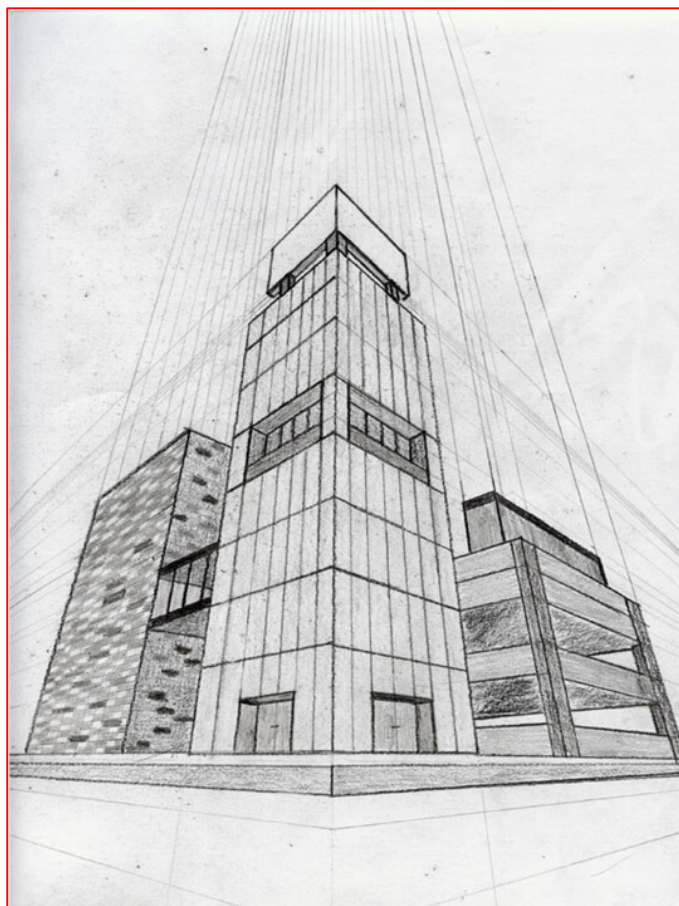
# Projeções (3D → 2D)

## Projeção Perspectiva

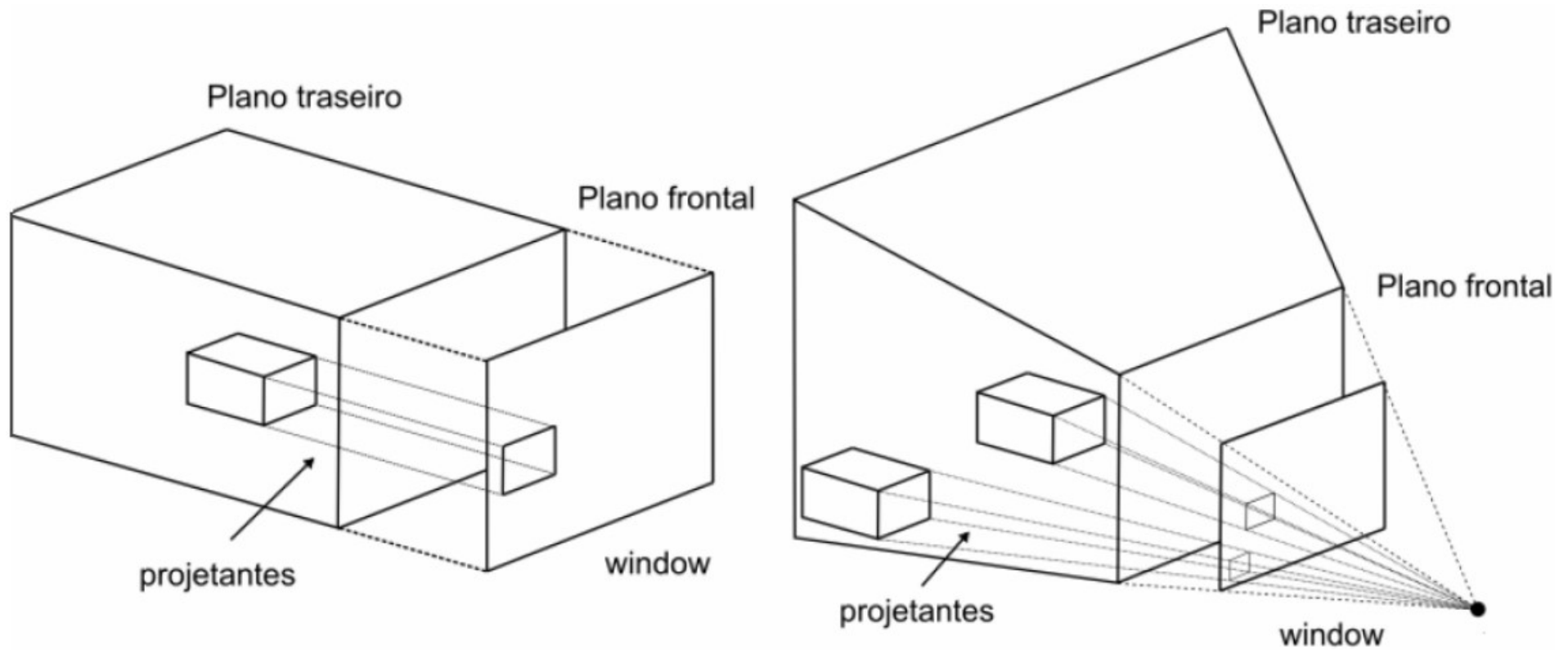




# Projeção Perspectiva 3 Pontos



# Projeções (3D → 2D)



**Projeção Paralela:**  
paralelepípedo de visualização

**Projeção Perspectiva:**  
*frustum* de visualização

# Projeções (3D → 2D)

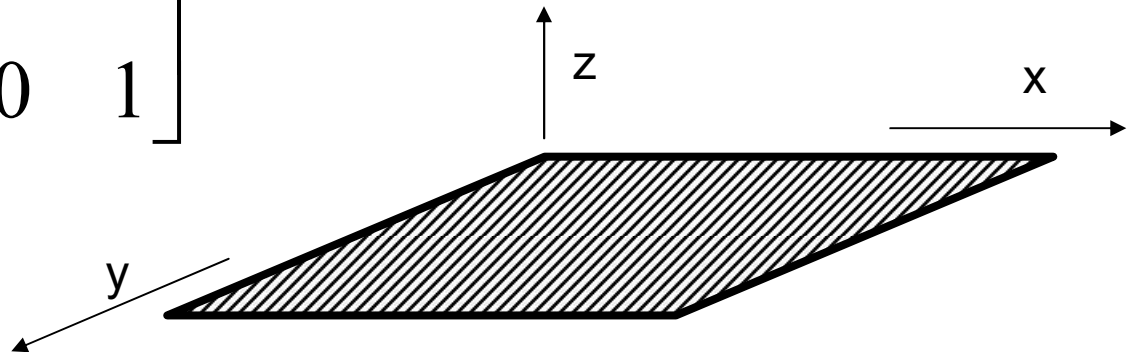
## Matrizes de Projeção

Usando matrizes de transformação, uma projeção paralela ortogonal é uma projeção sobre um dos três planos xy, xz ou yz

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz de projeção  
ortogonal sobre o plano  
xy ou seja,  $z=0$





# Projeções (3D → 2D)

## Matrizes de Projeção

A projeção paralela oblíqua pode ser obtida com a matriz de transformação abaixo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ L \cos \theta & L \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{com } L = 1 \text{ e } \theta = 45^\circ \text{ para Cavaleira} \\ \text{e } L = \frac{1}{2} \text{ e } \theta = \arctan(2) \cong 63,4^\circ \\ \text{para Cabinet} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ L \cos \theta & L \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + z.L \cos \theta & y + z.L \sin \theta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Projeções (3D → 2D)

## Matrizes de Projeção

A projeção Perspectiva é definida por uma matriz com elementos não nulos na matriz [3x1]

exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

corresponde a uma matriz perspectiva de um ponto de projeção localizado em  $z=R$ , projetado no plano  $z=0$

# Projeções (3D → 2D)

## Matrizes de Projeção

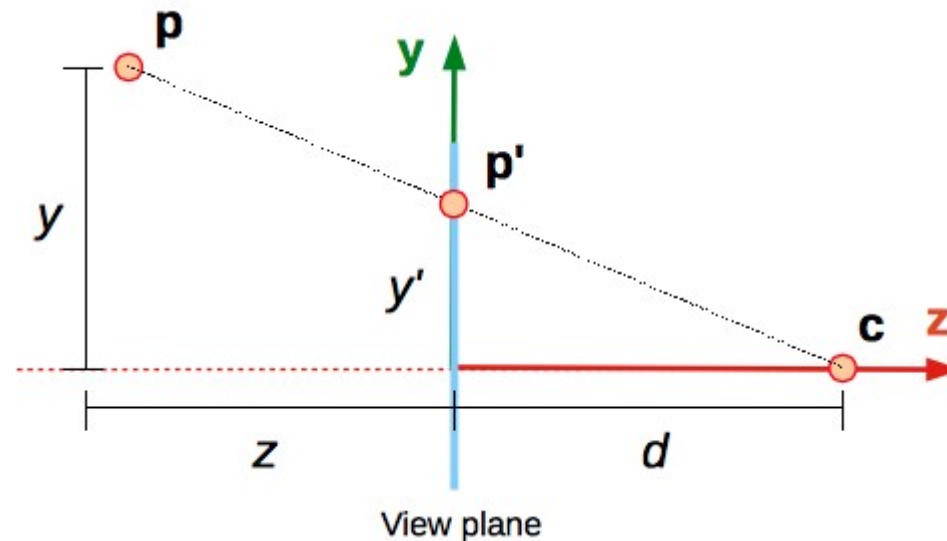
A projeção em perspectiva mais simples usa a **origem** como centro de projeção e o plano em  **$z = 1$**  como o plano da imagem. Então a forma funcional desta transformação é  **$x' = x / z$**  e  **$y' = y / z$**

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & z \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{x}{z} & \frac{y}{z} & \frac{z}{z} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{z} & \frac{y}{z} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Projeções (3D → 2D)

## Matrizes de Projeção

De modo geral, a figura mostra a projeção  $p'$  do ponto  $p$  no plano



Por semelhança de triângulos,  $\frac{y}{z+d} = \frac{y'}{d} \Rightarrow y' = \frac{y}{1-\frac{z}{d}}$  e fazendo o mesmo para  $x'$  e  $z'$  tem-se

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{1-\frac{z}{d}} & \frac{y}{1-\frac{z}{d}} & \frac{z}{1-\frac{z}{d}} & 1 \end{bmatrix}$$

# Projeções (3D → 2D)

## Matrizes de Projeção

Para facilitar a matriz de transformação, reescreve-se

para 
$$\begin{bmatrix} \frac{x}{1 - \frac{z}{d}} & \frac{y}{1 - \frac{z}{d}} & \frac{z}{1 - \frac{z}{d}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 - \frac{z}{d} \end{bmatrix}$$

e a matriz fica

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Projeções (3D → 2D)

## Matrizes de Projeção

Exemplos de projeções de dois e três pontos são:

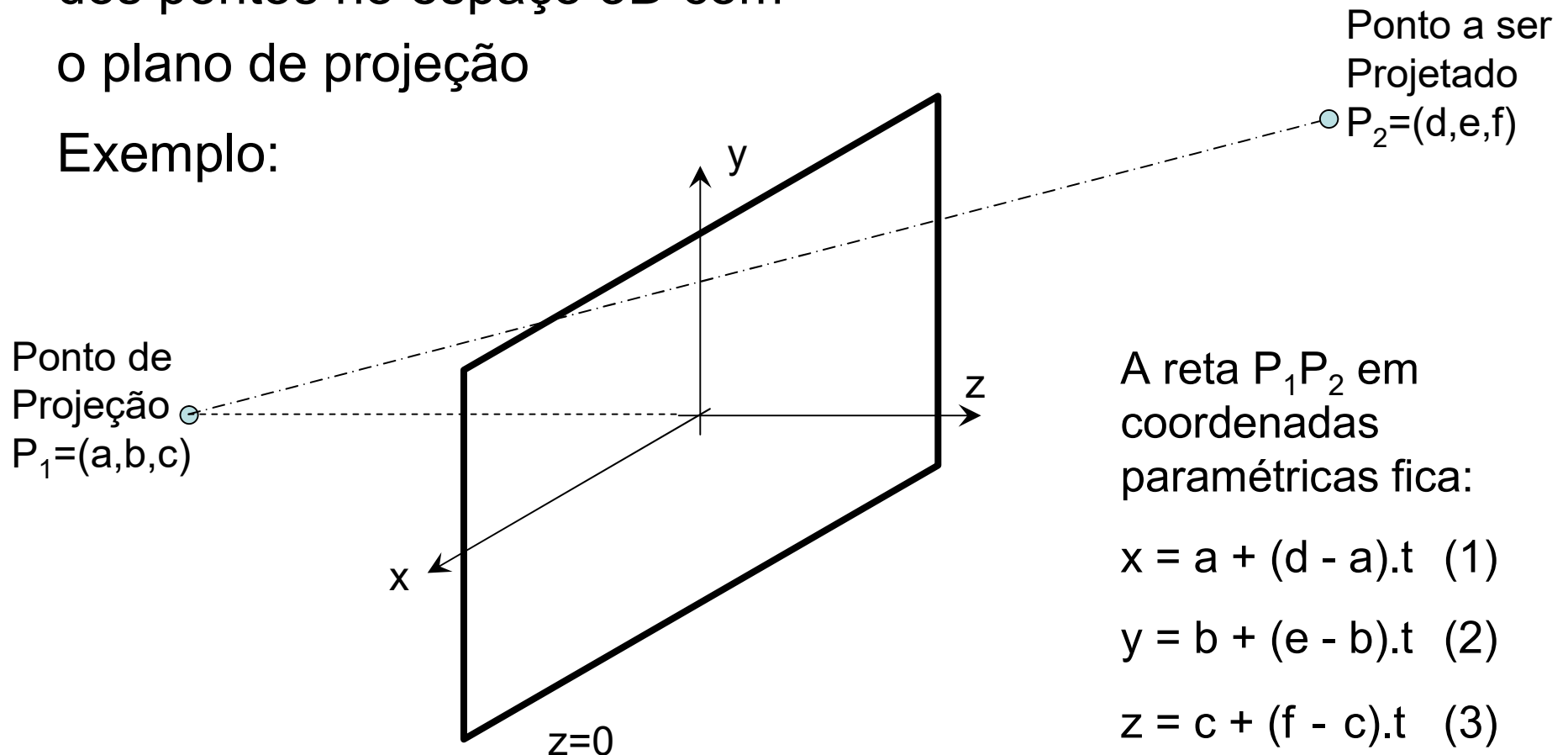
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/R1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/R2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/R1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/R2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/R3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Projeções (3D $\rightarrow$ 2D)

## Geometria da Projeção Perspectiva

A projeção perspectiva pode ser construída geometricamente, encontrando as interseções dos pontos no espaço 3D com o plano de projeção

Exemplo:



# Projeções (3D → 2D)

## Geometria da Projeção Perspectiva

Em (3) , quando  $z=0$

$$c + (f - c).t = 0$$

$$\text{logo } (f - c).t = -c$$

$$\text{então, } t = \frac{-c}{f - c} \text{ ou, ainda } t = \frac{c}{c - f}$$

substituindo  $t$  em (1) e (2) tem - se :

$$x = a + \frac{c}{c - f}(d - a)$$

$$y = b + \frac{c}{c - f}(e - b)$$

A reta  $P_1P_2$  em coordenadas paramétricas fica:

$$x = a + (d - a).t \quad (1)$$

$$y = b + (e - b).t \quad (2)$$

$$z = c + (f - c).t \quad (3)$$

deste modo, dado um ponto qualquer  $(d,e,f)$  no espaço 3D, é projetado no plano  $z=0$  com o ponto de projeção em  $(a,b,c)$



# Projeções (3D $\rightarrow$ 2D)

## Exercício: entregar agora

Considerando o ponto de projeção  $(10, 10, -10)$ , projete o ponto  $(40, 30, 50)$  no plano  $z = 0$

