PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA I

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS

2º BIMESTRE

DISCIPLINA: PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA I

CURSO: CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

PROF. MA. CAMILA GONÇALVES COSTA

05/2025

2.4 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS DISCRETAS

2.4.1 INTRODUÇÃO

Em muitas situações, é comum que um experimento aleatório gere mais de uma variável de interesse e, quase sempre, o interesse estará em estudar o comportamento simultâneo de 2 ou mais variáveis, em busca de relações e associações. Torna-se necessário, então, conhecer o comportamento probabilístico conjunto de tais variáveis.

EXEMPLO 2.7

Consideremos um estudo da composição de famílias com 3 filhos quanto ao sexo das crianças (Morettin & Bussab). Podemos definir as seguintes variáveis:

$$X = \text{números de meninos}$$

$$Y = \begin{cases} 1 \text{ se } 1^{\text{º}} \text{ filho é homem} \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$Z = \text{nº de vezes que houve variação de sexo entre nascimentos consecutivos}$$

Suponhamos que a probabilidade de nascer homem ou mulher seja igual a $\frac{1}{2}$, ou seja, que todas as composições de família tenham a mesma probabilidade. Quais são os possíveis valores das variáveis? Como fica a distribuição de probabilidades para as variáveis aleatória X, Y e Z?

Solução:

Os possíveis resultados e os valores das variáveis são os apresentados na tabela a seguir:

Evento	X	Y	Z	P
HHH	3	1	0	1/8
HHM	2	1	1	1/8
HMH	2	1	2	1/8
MHH	2	0	1	1/8
HMM	1	1	1	1/8
MHM	1	0	2	1/8
MMH	1	0	1	1/8
MMM	0	0	0	1/8

A partir desses resultados obtemos as seguintes distribuições de probabilidades para as variáveis aleatórias X, Y, Z:

X:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

$E(X) = \frac{3}{2}$ $\quad E(X^2) = 3$ $\quad Var(X) = \frac{3}{4}$

Y:

y	0	1
$P(Y=y)$	1/2	1/2

$E(Y) = \frac{1}{2}$ $\quad E(Y^2) = \frac{1}{2}$ $\quad Var(Y) = \frac{1}{4}$

Z:

z	0	1	2
$P(Z=z)$	1/4	1/2	1/4

$E(Z) = 1$ $\quad E(Z^2) = \frac{3}{2}$ $\quad Var(Z) = \frac{1}{2}$

Em que $\mu = E(x) = \sum x.p(x)$ e $Var = E[(x-\mu)^2] = E[x^2] - \mu^2$.

2.4.1.1 DISTRIBUIÇÕES CONJUNTAS

Vamos analisar agora a distribuição conjunta de 2 dessas variáveis, ou seja, queremos analisar, por exemplo, a probabilidade de X ser igual a 1 e Y ser igual a 0, simultaneamente. Vamos calcular essas probabilidades e apresentá-las em forma de tabela de dupla entrada.

(X, Y):

		X				$p_Y(y)$
		0	1	2	3	
Y	0	1/8	2/8	1/8	0	1/2
	1	0	1/8	2/8	1/8	1/2
$p_X(x)$		1/8	3/8	3/8	1/8	1

(X, Z):

		X				
		0	1	2	3	$p_Z(z)$
Z	0	1/8	0	0	1/8	2/8
	1	0	2/8	2/8	0	4/8
	2	0	1/8	1/8	0	2/8
$p_X(x)$		1/8	3/8	3/8	1/8	1

(Y, Z):

		Z			$p_Y(y)$
		0	1	2	
Y	0	1/8	2/8	1/8	4/8
	1	1/8	2/8	1/8	4/8
$p_Z(z)$		2/8	4/8	2/8	1

Analisando simultaneamente as três variáveis, temos:

(x, y, x)	$P(X = x, Y = y, Z = z)$
$(0, 0, 0)$	1/8
$(1, 0, 1)$	1/8
$(1, 0, 2)$	1/8
$(1, 1, 1)$	1/8
$(2, 0, 1)$	1/8
$(2, 1, 2)$	1/8
$(2, 1, 1)$	1/8
$(3, 1, 0)$	1/8

2.4.1.2 DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS

A partir da distribuição conjunta de (X,Y), como podemos obter a distribuição de X? E de Y?

Note que, em termos dessa distribuição conjunta, o evento {X = 0} pode ser escrito como:

$$\{X = 0\} = \{X = 0 \cap Y = 0\} \cup \{X = 0 \cap Y = 1\}$$

e como estes são eventos mutuamente exclusivos, resulta

$$P(X = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}$$

Analogamente,

$$P(X = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = P(X = 2, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3)=P(X=3,Y=0)+P(X=3,Y=1)=0+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

Para a distribuição de Y temos:

$$\begin{aligned}P(Y=0)&\\&=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)+P(X=2,Y=0)\\&+P(X=3,Y=0)=\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}+0=\frac{4}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(Y=1)&\\&=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=1)\\&+P(X=3,Y=1)=0+\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}\end{aligned}$$

De maneira análoga, podemos obter a distribuição de Y a partir da distribuição conjunta de (Y,Z), por exemplo e, obviamente, obteremos o mesmo resultado.

2.4.1.3 DISTRIBUIÇÕES CONDICIONAIS

A partir da distribuição conjunta de (X,Y) pode-se obter a distribuição condicional de X, ou seja, a probabilidade condicional de cada valor de X, condicionada a um determinado valor de Y. Aplicando a definição de probabilidade condicional, temos que:

$$X|Y=0: \quad \begin{cases} P(X=0\,|\,Y=0) = \dfrac{P(X=0,Y=0)}{P(Y=0)} = \dfrac{1/8}{1/2} = \dfrac{1}{4} \\[2ex] P(X=1\,|\,Y=0) = \dfrac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)} = \dfrac{2/8}{1/2} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] P(X=2\,|\,Y=0) = \dfrac{P(X=2,Y=0)}{P(Y=0)} = \dfrac{1/8}{1/2} = \dfrac{1}{4} \\[2ex] P(X=3\,|\,Y=0) = \dfrac{P(X=3,Y=0)}{P(Y=0)} = \dfrac{0}{1/2} = 0 \end{cases}$$

Logo, a distribuição condicional de X dado que Y = 0 é:

$X|Y=0:$

x	0	1	2	3
p	1/4	1/2	1/4	0

Sendo uma distribuição de probabilidades, podemos calcular sua esperança e sua variância:

$$E(X \mid Y=0) = \sum_x x\,P(X=x|Y=0) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times 0 = 1$$

$$E(X^2 \mid Y=0) = \sum_x x^2\,P(X=x|Y=0) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times 0 = \frac{3}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X \mid Y=0) = E(X^2 \mid Y=0) - [E(X \mid Y=0)]^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

Analogamente, obtém-se a distribuição de X dado que Y = 1 ou a distribuição de Y dado que X = 0, por exemplo:

$$Y \mid X = 0: \quad \begin{cases} P(Y = 0 \mid X = 0) = \dfrac{P(X = 0, Y = 0)}{P(X = 0)} = \dfrac{1/8}{1/8} = 1 \\ \\ P(Y = 1 \mid X = 0) = \dfrac{P(X = 0, Y = 1)}{P(X = 0)} = \dfrac{0}{1/8} = 0 \end{cases}$$

$Y \mid X = 0:$

y	0	1
p	1	0

$$E(Y \mid X = 0) = 0 \qquad E(Y^2 \mid X = 0) = 0 \qquad \mathrm{Var}(Y \mid X = 0) = 0$$

ou então:

$$Y \mid X = 1: \quad \begin{cases} P(Y = 0 \mid X = 1) = \dfrac{P(X = 1, Y = 0)}{P(X = 1)} = \dfrac{2/8}{3/8} = \dfrac{2}{3} \\ \\ P(Y = 1 \mid X = 1) = \dfrac{P(X = 1, Y = 1)}{P(X = 1)} = \dfrac{1/8}{3/8} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$Y \mid X = 1$:

y	0	1
p	2/3	1/3

$$E(Y \mid X = 1) = \frac{1}{3} \qquad E(Y^2 \mid X = 1) = \frac{1}{3} \qquad \mathrm{Var}(Y \mid X = 1) = \frac{2}{9}$$

A seguir vamos formalizar os conceitos apresentados através do exemplo acima.

2.4.2 DEFINIÇÕES

2.4.2.1 VETOR ALEATÓRIO BIDIMENSIONAL DISCRETO

Um vetor aleatório bidimensional é uma função bivariada que associa, a cada ponto de um espaço amostral Ω, um par de números reais (x,y). Se a imagem de tal função é um conjunto enumerável de pontos em $\mathbb{R}^2$, então o vetor é dito um vetor discreto. Veja a Figura.

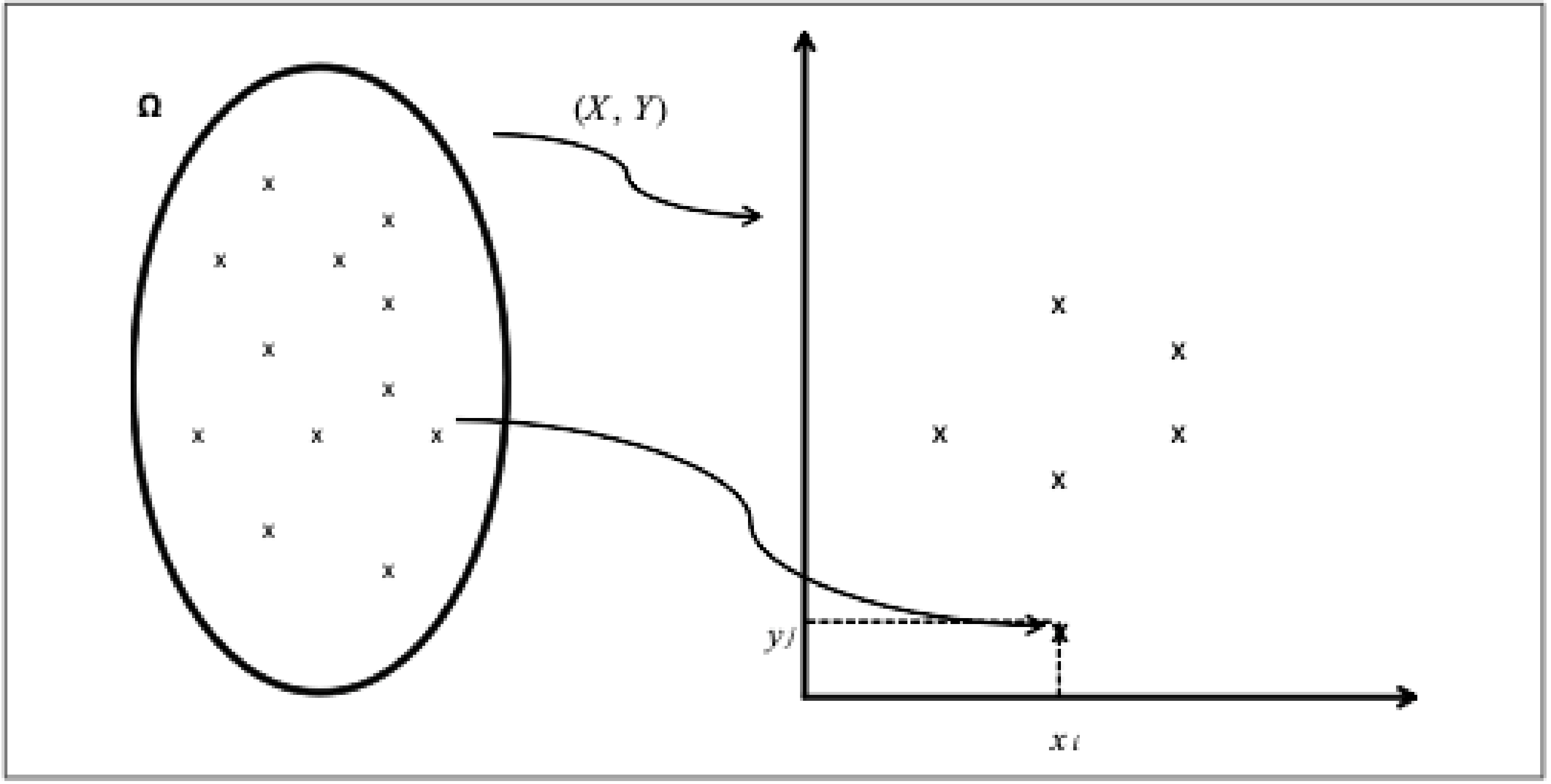

FIGURA: Definição de vetor aleatório discreto

Podemos pensar que um vetor aleatório bidimensional discreto é um vetor formado por duas variáveis aleatórias discretas definidas no mesmo espaço amostral. De forma análoga, podemos definir um vetor aleatório $k-$dimensional discreto como sendo um vetor formado por k variáveis aleatórias discretas definidas no mesmo espaço amostral.

2.4.2.2 FUNÇÃO DE PROBABILIDADE

Seja (X,Y) um vetor aleatório discreto assumindo os valores (x_i, y_j), para $i, j = 1,2, \ldots$. A função de probabilidade conjunta é a função que associa a cada ponto (x_i, y_j) a sua respectiva probabilidade:

$$p(x_i, y_j) = \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

(Veja a Figura abaixo). Note que P(Ω) = 1, resulta que

$$\sum_i \sum_j \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j) = 1$$

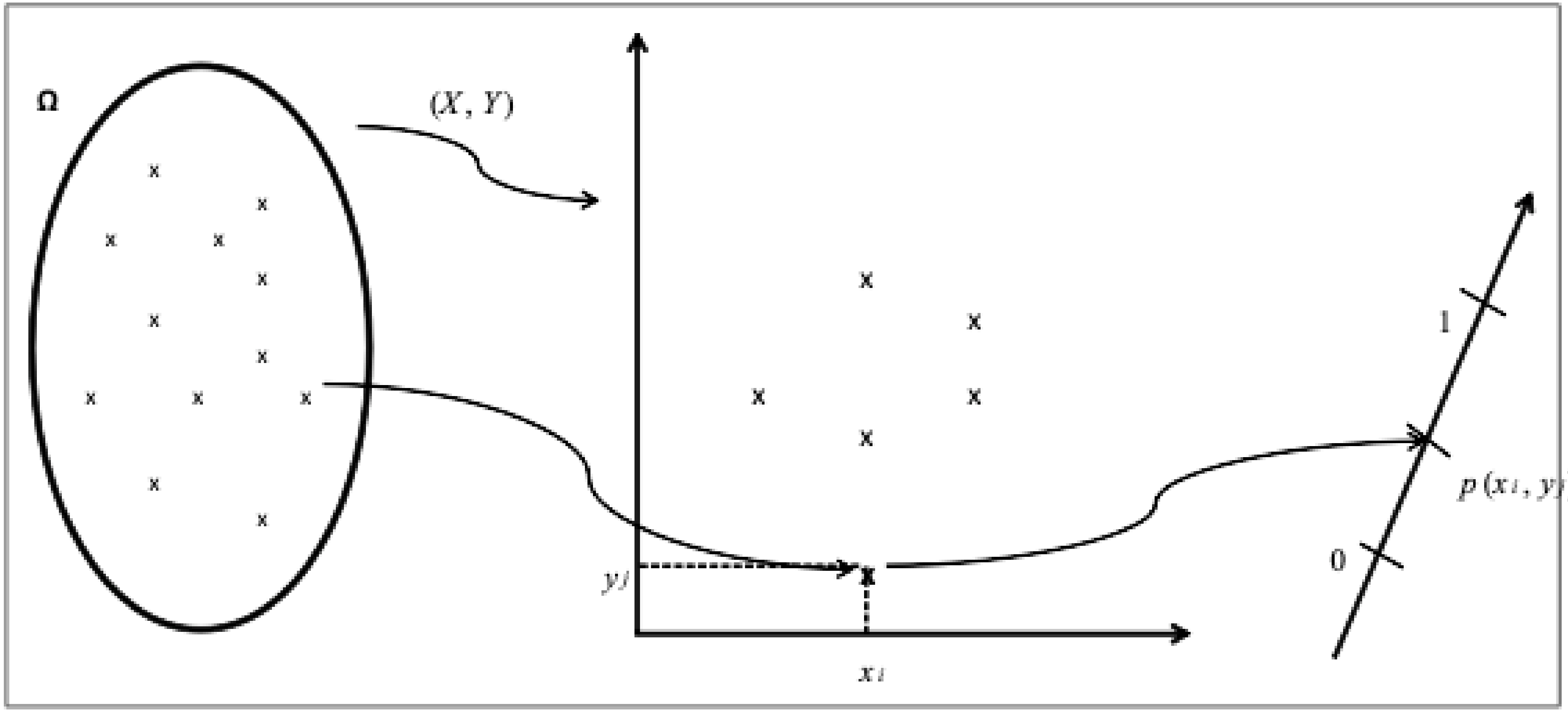

FIGURA: Definição de função de probabilidade conjunta

Para vetores k–dimensionais, a função de probabilidade é $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k)$ e

$$\sum_{x_1}\sum_{x_2}\dots\sum_{x_k} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k) = 1$$

2.4.2.3 DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS

Seja (X,Y) um vetor aleatório discreto com distribuição conjunta $\mathrm{P}(x_i, y_j)$. Para não sobrecarregar a notação, vamos denotar essa distribuição conjunta por ***p*(*x*,*y*),** devendo ficar claro que (x,y) representa um par qualquer de valores do vetor (X,Y). A distribuição marginal de X é definida como:

$$\mathrm{P}(X = x) = \sum_{y} p(x, y) = \sum_{y} \mathrm{P}(X = x, Y = y) \qquad \forall x$$

Analogamente, a distribuição marginal de Y é definida como

$$\mathrm{P}(Y = y) = \sum_{x} p(x, y) = \sum_{x} \mathrm{P}(X = x, Y = y) \qquad \forall y$$

Em geral, se $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ é um vetor aleatório $k-$dimensional

$$\mathrm{P}(X_i = x_i) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} \cdots \sum_{x_k} \mathrm{P}\left(X_1 = x_1, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \ldots, X_k = x_k\right)$$

2.4.2.4 DISTRIBUIÇÕES CONDICIONAIS

Seja (X,Y) um vetor aleatório discreto com distribuição conjunta $p(x,y)$. A distribuição condicional de X dado $Y = y$ é definida como:

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} \qquad \forall x$$

Analogamente define-se a distribuição condicional de Y dado X = x como

$$P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} \qquad \forall y$$

Note que existe uma distribuição condicional de X para cada valor y e uma distribuição condicional de Y para cada valor x. Assim, se X assumir n valores distintos e Y m valores distintos, teremos ao todo $n + m$ distribuições condicionais.

2.4.2.5 ESPERANÇA CONDICIONAL

Para cada uma das distribuições condicionais, podemos calcular a respectiva esperança condicional:

$$E_X(X \mid Y = y) = \sum_x x\, P(X = x \mid Y = y)$$

$$E_Y(Y|X = x) = \sum_y y\, P(Y = y|X = x)$$

Os subscritos *X* e *Y* nas definições acima, embora desnecessários, serão usados aqui para enfatizar a dependência em *X* e *Y* de cada uma das esperanças. Note que o subscrito *X* indica que a variável aleatória é *X* e, portanto, estamos calculando a média (ou esperança) dos valores *x*; ***Y* está fixa** no valor *y*. Observação análoga vale para o subscrito *Y*.

Note que, para cada valor y de Y temos um valor diferente de $E(X|Y=y)$ e para cada valor x de X, temos um valor diferente de $E(Y|X=x)$. Sendo assim, podemos definir uma função g que associa, a cada valor y de Y, o valor $g(y) = E(X|Y=y)$ e outra função h que associa a cada valor x de X, o valor $h(x) = E(Y|X=x)$, ou seja,

$$g \quad : \quad y \longmapsto g(y) = \mathrm{E}_X(X|Y=y)$$

$$h \quad : \quad x \longmapsto h(x) = \mathrm{E}_Y(Y|X=x)$$

Como X e Y são variáveis aleatórias, resulta que essas funções definem novas variáveis aleatórias $g(Y)$ e $h(X)$ e suas esperanças podem também ser calculadas. Para lembrar a dependência em cada uma das variáveis, vamos denotar essas esperanças por $E_Y[g(Y)]$ e $E_X[h(X)]$, que são calculadas como

$$\mathrm{E}_Y[g(Y)] = \sum_y g(y)\,\mathrm{P}(Y=y)$$

$$\mathrm{E}_X[h(X)] = \sum_x h(x)\,\mathrm{P}(X=x)$$

Para deixar clara a definição das funções g e h, vamos estabelecer a seguinte notação:

$$
\begin{aligned}
g(Y) &= \mathrm{E}_X(X|Y) \\
h(X) &= \mathrm{E}_Y(Y|X)
\end{aligned}
$$

Usando a definição da esperança condicional dada em

$$E_X(X|Y=y) = \sum_x x\, P(X=x|Y=y) = \sum_x x\, \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)},$$

temos que:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_Y[g(Y)] &= \mathrm{E}_Y[\mathrm{E}_X(X|Y)] = \sum_y g(y)\,\mathrm{P}(Y=y) \\
&= \sum_y \mathrm{E}_X(X|Y=y)\,\mathrm{P}(Y=y) \\
&= \sum_y \sum_x x\,\mathrm{P}(X=x|\,Y=y)\,\mathrm{P}(Y=y) \\
&= \sum_y \sum_x x\,\frac{\mathrm{P}(X=x,Y=y)}{\mathrm{P}(Y=y)}\,\mathrm{P}(Y=y) \\
&= \sum_y \sum_x x\,\mathrm{P}(X=x,Y=y) \\
&= \sum_x x \sum_y \mathrm{P}(X=x,Y=y) \\
&= \sum_x x\,\mathrm{P}(X=x) = \mathrm{E}(X)
\end{aligned}
$$

Nas duas últimas linhas usamos a definição da distribuição marginal de Y.

Analogamente, por $E_Y(Y|X = x) = \sum_y y\, P(Y = y|X = x) = \sum_y y\, \frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)}$, resulta que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_X[h(X)] &= \mathrm{E}_X[\mathrm{E}_Y(Y|X)] = \sum_x h(x)\,\mathrm{P}(X = x) \\
&= \sum_x \mathrm{E}(Y|X = x)\,\mathrm{P}(X = x) \\
&= \sum_x \sum_y y\,\mathrm{P}(\,Y = y|X = x)\,\mathrm{P}(X = x) \\
&= \sum_x \sum_y y\,\frac{\mathrm{P}(X = x, Y = y)}{\mathrm{P}(X = x)}\,\mathrm{P}(X = x) \\
&= \sum_x \sum_y y\,\mathrm{P}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_y y \sum_x \mathrm{P}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_y y\,\mathrm{P}(Y = y) = \mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

Resumindo:

$$E_Y[E_X(X|Y)] = E(X)$$

$$E_X[E_Y(Y|X)] = E(Y)$$

EXEMPLO 2.8

Vamos continuar calculando as distribuições condicionais de Y dado $X = x_i$ e suas esperanças:

$Y|X=0$:

y	0	1
p	1	0

$E_Y(Y|X=0)=0$

$Y|X=1$:

y	0	1
p	2/3	1/3

$E_Y(Y|X=1)=\frac{1}{3}$

$Y|X=2$:

y	0	1
p	1/3	2/3

$E_Y(Y|X=2)=\frac{2}{3}$

$Y|X=3$:

y	0	1
p	0	1

$E_Y(Y|X=3)=1$

Os valores possíveis de $h(X)=E_Y(Y|X)$ são $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ e 1 e esses valores ocorrem quando
$X=0, X=1, X=2$ ou $X=3$, respectivamente.

Logo, as probabilidades de ocorrência de cada um deles **são exatamente as probabilidades de X assumir os seus valores**, isto é, temos a seguinte distribuição:

$h(X) = \mathrm{E}_Y(Y|X)$:

e	0	1/3	2/3	1
p	1/8	3/8	3/8	1/8

A esperança dessa distribuição é

$$\mathrm{E}_X[h(X)] = \mathrm{E}_X[\mathrm{E}_Y(X|Y)] = 0 \times \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \mathrm{E}(Y)$$

Para a distribuição condicional de X dado Y, temos os seguintes resultados:

$X|Y = 0$:

x	0	1	2	3
p	2/8	4/8	2/8	0

$\mathrm{E}_X(X|Y = 0) = 1$

$X|Y = 1$:

x	0	1	2	3
p	0	2/8	4/8	2/8

$\mathrm{E}_X(X|Y = 1) = 2$

e para a variável aleatória $g(Y) = E_X(X|Y)$ temos a seguinte função de probabilidade:

e	1	2
p	1/2	1/2

e

$$\mathrm{E}[g(Y)] = \mathrm{E}_Y[\mathrm{E}_X(X|Y)] = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \mathrm{E}(X)$$

2.4.3 INDEPENDÊNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Consideremos a distribuição conjunta de (*Y*, *Z*) do Exemplo 2.8, reproduzida a seguir:

		Z			$p_Y(y)$
		0	1	2	
Y	0	1/8	2/8	1/8	4/8
	1	1/8	2/8	1/8	4/8
$p_Z(z)$		1/4	2/4	1/4	1

Como as duas linhas da distribuição conjunta são iguais, resulta que

$$P(Z = z \mid Y = 0) = P(Z = z \mid Y = 1) \quad \forall z$$

Além disso, temos também que

$$P(Z = z \mid Y = y) = P(Z = z) \quad \forall y, z$$

Em analogia com a definição de independência de eventos aleatórios, esse fato nos leva à definição de variáveis aleatórias **independentes**.

No caso de eventos, a definição de independência $P(A|B) = P(A)$ tinha que considerar eventos B tais que $P(B) \neq 0$, mas ela também levava a uma definição mais geral: os eventos A e B são independentes se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Analogamente, vamos definir variáveis aleatórias independentes da seguinte forma.

DEFINIÇÃO 2.4.1

Seja (X, Y) um vetor aleatório discreto com distribuição conjunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$. Dizemos que X e Y são **independentes** se e somente se

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \qquad \forall x, y.$$

ou seja, a distribuição conjunta é o produto das distribuições marginais.

Note que a condição acima tem que valer para todo par possível de valores (x,y).

EXEMPLO 2.9

Vamos continuar com o Exemplo 2.8, *X* e *Y* <u>não são independentes</u> porque:

$$P(X=0, Y=0) = \frac{1}{8} \neq P(X=0)\,P(Y=0) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}$$

X e *Z* <u>não são independentes</u> porque:

$$P(X=0, Z=0) = \frac{1}{8} \neq P(X=0)\,P(Z=0) = \frac{1}{8} \times \frac{2}{8}$$

Y e Z <u>são independentes</u> porque:

$$P(Y=0, Z=0) = \frac{1}{8} = P(Y=0)\,P(Z=0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{8}$$

$$P(Y=0, Z=1) = \frac{1}{4} = P(Y=0)\,P(Z=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$P(Y=0, Z=2) = \frac{1}{8} = P(Y=0)\,P(Z=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$P(Y=1, Z=0) = \frac{1}{8} = P(Y=1)\,P(Z=0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{8}$$

$$P(Y=1, Z=1) = \frac{1}{4} = P(Y=1)\,P(Z=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$P(Y=1, Z=2) = \frac{1}{8} = P(Y=1)\,P(Z=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

2.4.4 FUNÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Muitas vezes, conhecida a distribuição conjunta de (X,Y), estaremos interessados em estudar a distribuição de uma variável aleatória definida como uma função $f(X,Y)$. Lidaremos aqui com funções reais, isto é, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e uma atenção especial será dada às combinações lineares, ou seja, funções do tipo $f(X,Y) = aX + bY$, com a e b números reais quaisquer.

EXEMPLO 2.10

Para o Exemplo 2.8, considere a seguinte função:

$$f_1(X,Y) = X^2 + Y$$

cujos valores e probabilidades estão a seguir:

X	Y	$P(X = x, Y = y)$	$f_1(X, Y) = X^2 + Y$
0	0	1/8	0
1	0	2/8	1
2	0	1/8	4
3	0	0	9
0	1	0	1
1	1	1/8	2
2	1	2/8	5
3	1	1/8	10

Então, a esperança de $X^2 + Y$ é

$$\begin{aligned} E\left(X^2+Y\right) &= 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{2}{8} + \cdots + 10 \times \frac{1}{8} \\ &= f_1(0,0) \times P(X=0, Y=0) + f_1(1,0) \times P(X=1, Y=0) + \cdots \\ &\quad + f_1(3,1) \times P(X=3, Y=1) \\ &= \sum_x \sum_y f_1(x,y)\, P(X=x, Y=y) \end{aligned}$$

O resultado apresentado neste exemplo se generaliza para qualquer função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, conforme o seguinte teorema.

TEOREMA 2.4.1

Seja (X,Y) um vetor aleatório discreto com função de probabilidade conjunta $P(X = x, Y = y)$. Seja $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real tal que cada par (x,y) é levado a h(x,y). Então

$$E[h(X,Y)] = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$$

Lembre-se que há um resultado análogo para variáveis unidimensionais, que foi utilizado, $\boldsymbol{E_Y[g(Y)] = \sum_y g(y)\, P(Y = y)}$ e $\boldsymbol{E_X[h(X)] = \sum_x h(x)\, P(X = x)}$, no estudo de esperança condicional.

Um caso particular importante é abordado a seguir.

TEOREMA 2.4.2

Seja (X,Y) um vetor aleatório discreto com função de probabilidade conjunta $P(X = x, Y = y)$. Seja $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real tal que $h(x,y) = x + y$. Então

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

(Esperança da soma é a soma das esperanças)

Demonstração

Usando o teorema anterior, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X+Y) &= \sum_x \sum_y (x+y)\,\mathrm{P}(X=x, Y=y) \\
&= \sum_x \sum_y x\,\mathrm{P}(X=x, Y=y) + \sum_x \sum_y y\,\mathrm{P}(X=x, Y=y) \\
&= \sum_x x \sum_y \mathrm{P}(X=x, Y=y) + \sum_y y \sum_x \mathrm{P}(X=x, Y=y) \\
&= \sum_x x\,\mathrm{P}(X=x) + \sum_y y\,\mathrm{P}(Y=y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

Dos resultados já vistos, segue o resultado mais geral:

TEOREMA 2.4.3

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ variáveis aleatórias discretas com distribuição conjunta $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Então:

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \cdots + a_nE(X_n)$$

Usando definições e propriedades da esperança e da variância, vamos estudar a **variância da soma de duas variáveis aleatórias**.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{E}[(X+Y) - \mathrm{E}(X+Y)]^2 = \mathrm{E}[X + Y - \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y)]^2 \\
&= \mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X) + Y - \mathrm{E}(Y)]^2 \\
&= \mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X)]^2 + \mathrm{E}[Y - \mathrm{E}(Y)]^2 + 2\,\mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X)][Y - \mathrm{E}(Y)] \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X)][Y - \mathrm{E}(Y)]
\end{aligned}$$

Então, na variância da soma, aparece um termo envolvendo a esperança do produto dos desvios em torno das médias. Esse termo define a covariância de duas variáveis aleatórias. Note que as variáveis $X' = X - E(X)$ e $Y' = Y - E(Y)$ são variáveis aleatórias ambas com média zero, isto é, $E(X') = E(Y') = 0$.

2.4.5 COVARIÂNCIA

TEOREMA 2.4.4

A covariância entre duas variáveis aleatórias X e Y é definida por

$$Cov(X,Y) = E[X - E(X)] \cdot E[Y - E(Y)]$$

Substituindo essa definição na expressão da variância da soma de duas variáveis aleatórias obtém-se o

RESULTADO 2.4.1

A variância da soma de duas v.a. é dada por

$$Var(X + Y) = Var(x) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

Uma forma alternativa de cálculo da covariância resulta de

$$E[X - E(X)] \cdot E[Y - E(Y)]$$
$$= E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)]$$

$$= E(XY) - E[XE(Y)] - E[YE(X)] + E(X)E(Y)$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$$

Aqui usamos que $E(kX) = k\,E(X)$ e que $E(k) = k$. Lembre-se que a esperança é um número! Logo,

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

que pode ser lido como *a covariância é a esperança do produto menos o produto das esperanças*.

2.4.5.1 PROPRIEDADES DA COVARIÂNCIA

PROPRIEDADES DA COVARIÂNCIA

Vamos usar as seguintes propriedades já vistas para a esperança para demonstrar propriedades análogas da covariância:

$$E(X+b)=E(X)+b$$

$$E(aX)=a\,E(X)$$

$$E(aX+b)=a\,E(X)+b$$

1. $Cov(aX+b,cY+d)=a\,c\,Cov(X,Y)$
2. $Cov(X+Y,Z+W)=Cov(X,Z)+Cov(X,W)+Cov(Y,Z)+Cov(Y,W)$
3. $Var(X-Y)=Var(x)+Var(Y)-2Cov(X,Y)$

Demonstrações:

1. $Cov(aX + b, cY + d) = a\,c\,Cov(X, Y)$

De fato,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) &= \mathrm{E}\,[(aX + b) - \mathrm{E}\,(aX + b)][(cY + d) - \mathrm{E}\,(cY + d)] \\
&= \mathrm{E}[aX + b - a\,\mathrm{E}(X) - b][cY + d - c\,\mathrm{E}(Y) - d] \\
&= \mathrm{E}[aX - a\,\mathrm{E}(X)][cY - c\,\mathrm{E}(Y)] \\
&= \mathrm{E}\{a[X - \mathrm{E}(X)]c[Y - \mathrm{E}(XY)]\} \\
&= ac\,\mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X)](Y - \mathrm{E}(Y)] \\
&= ac\,\mathrm{Cov}(X, Y)
\end{aligned}$$

2. $Cov(X+Y,Z+W) = Cov(X,Z) + Cov(X,W) + Cov(Y,Z) + Cov(Y,W)$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X+Y,Z+W) &= \mathrm{E}(X+Y)(Z+W) - \mathrm{E}(X+Y)\,\mathrm{E}(Z+W) \\
&= \mathrm{E}(XZ+XW+YZ+YW) - [\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)][\mathrm{E}(Z)+\mathrm{E}(W)] \\
&= \mathrm{E}(XZ)+\mathrm{E}(XW)+\mathrm{E}(YZ)+\mathrm{E}(YW)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Z) \\
&\quad -\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(W)-\mathrm{E}(Y)\,\mathrm{E}(Z)-\mathrm{E}(Y)\,\mathrm{E}(W) \\
&= [\mathrm{E}(XZ)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Z)]+[\mathrm{E}(XW)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(W)]+ \\
&\quad +[\mathrm{E}(YZ)-\mathrm{E}(Y)\,\mathrm{E}(Z)]+[\mathrm{E}(YW)-\mathrm{E}(Y)\,\mathrm{E}(W)] \\
&= \mathrm{Cov}(X,Z)+\mathrm{Cov}(X,W)+\mathrm{Cov}(Y,Z)+\mathrm{Cov}(Y,W)
\end{aligned}
$$

3. $Var(X-Y) = Var(x) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$

Dos resultados anteriores,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X-Y) &= Var[X+(-Y)] = \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\,\mathrm{Cov}[X,(-1\cdot Y)] \\
&= \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\cdot(-1)\,\mathrm{Cov}(X,Y) \\
&= Var(X)+\mathrm{Var}(Y)-2\,\mathrm{Cov}(X,Y)
\end{aligned}
$$

2.4.5.2 INTERPRETAÇÃO DA COVARIÂNCIA

No estudo da estatística descritiva, dados dois conjuntos de dados $x_1, x_2, \dots, x_n$ e $y_1, y_2, \dots, y_n$ referentes a duas variáveis de interesse X e Y, definimos a covariância entre X e Y como

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

No contexto de variáveis aleatórias, a média é calculada como uma média ponderada pelas probabilidades; assim, temos uma total analogia entre as definições de covariância nos dois contextos.

Ainda da estatística descritiva, **a covariância é uma medida de associação linear entre as variáveis.** Construindo um diagrama de dispersão para as variáveis, se existir uma associação linear crescente, os pontos (x,y) tenderão a se concentrar nos primeiro e terceiro quadrantes, onde o produto das coordenadas é positivo. Se existir uma associação linear decrescente, os pontos se concentrarão no segundo e quarto quadrantes, onde o produto é negativo. O fato de se tomar $E[X - E(X)][Y - E(Y)]$, e não $E(XY)$, garante que estamos sempre trabalhando com variáveis "centradas" em (0,0) e não em $(E(X), E(Y))$.

2.4.5.3 INDEPENDÊNCIA E COVARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Da definição de independência de variáveis aleatórias, resulta o seguinte fato: **se *X* e *Y* são variáveis aleatórias independentes, qualquer conhecimento sobre *Y* não nos dá informação sobre *X*.** Usando essa interpretação, mais a interpretação do conceito de covariância, é de se esperar que **a covariância entre variáveis independentes seja nula** (se elas são independentes, não deverá existir qualquer associação entre elas, muito menos uma associação linear). Vamos ver um resultado geral que trata dessa relação.

RESULTADO 2.4.2

Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então $Cov(X, Y) = 0$.

Demonstração:

Se X e Y são independentes, então $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$. Mas nesse caso,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(XY) &= \sum_x \sum_y xy\, \mathrm{P}(X = x, Y = y) = \sum_x \sum_y xy\, \mathrm{P}(X = x)\, \mathrm{P}(Y = y) \\ &= \sum_x x\, \mathrm{P}(X = x) \sum_y y\, \mathrm{P}(Y = y) = \mathrm{E}(X)\, \mathrm{E}(Y) \end{aligned}$$

Logo, $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$.

Note que **a recíproca desse resultado não é verdadeira, isto é, covariância nula não significa independência entre as variáveis**. Esse resultado pode ser visto intuitivamente a partir da interpretação de covariância: **covariância nula significa ausência de associação linear**. <u>Nada impede que exista outro tipo de associação entre as variáveis</u>, o que caracterizaria a falta de independência entre elas. Como exemplo, consideremos a seguinte de distribuição de probabilidade conjunta:

		X			$p_Y(y)$
		0	1	2	
	1	3/20	3/20	2/20	2/5
Y	2	1/20	1/20	2/20	1/5
	3	4/20	1/20	3/20	2/5
$p_X(x)$		2/5	1/4	7/20	1

Para essa distribuição temos:

$$\mathrm{E}(X) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{7}{20} = \frac{19}{20}$$

$$\mathrm{E}(Y) = 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{2}{5} = 2$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= 0 \times \frac{3}{20} + 1 \times \frac{3}{20} + 2 \times \frac{2}{20} + \\
&\quad +0 \times \frac{1}{20} + 2 \times \frac{1}{20} + 4 \times \frac{2}{20} + \\
&\quad +0 \times \frac{4}{20} + 3 \times \frac{1}{20} + 6 \times \frac{3}{20} \\
&= \frac{38}{20} = \frac{19}{20} \times 2 = \mathrm{E}(X) \times \mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

Logo, $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$ mas X e Y não são independentes porque, por exemplo:

$$\mathrm{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{3}{20} \neq \mathrm{P}(X = 0) \times \mathrm{P}(Y = 1) = \frac{8}{20} \times \frac{8}{20}$$

2.4.6 COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO

Como visto, a covariância é uma medida de associação linear entre duas variáveis, com valores "grandes" positivos indicando uma "forte" associação linear crescente e valores negativos, uma associação linear decrescente. Mas como saber o que é grande?

Por exemplo, suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias que representem grandezas, ambas medidas em milhares de reais e suponha, também, que haja uma forte associação linear crescente entre ambas.

Se transformarmos essas variáveis de modo que elas representem os mesmos fenômenos, mas agora em reais, a covariância ficará multiplicada por 10^6, já que cada uma das variáveis originais fica multiplicada por $1000 = 10^3$.

Esse fato ocorre porque a covariância depende da unidade de medida de cada uma das variáveis envolvidas. Para contornar esse fato, em vez de trabalharmos com as variáveis originais, podemos trabalhar com as variáveis padronizadas, o que dá origem aos *coeficientes de correlação*.

DEFINIÇÃO 2.4.2
O coeficiente de correlação entre duas variáveis aleatórias X e Y é a covariância entre as variáveis padronizadas, ou seja,

$$Corr(X,Y) = E\left[\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right] \cdot E\left[\frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}\right] = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

onde σ_X e σ_Y são os desvios padrão de X e Y respectivamente.

A propriedade fundamental do coeficiente de correlação é dada no seguinte teorema:

TEOREMA 2.4.5
Dadas duas variáveis aleatórias X e Y com esperança, variância e covariância finitas, então

$$-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$$

Demonstração:

Sejam

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma_X} \qquad\qquad Y^* = \frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}$$

as variáveis padronizadas. Das propriedades de esperança e variância, sabemos que $E(X^*) = E(Y^*) = 0$ e $Var(X^*) = Var(Y^*) = 1$. Sabemos também que a variância de qualquer variável aleatória é não-negativa. Em particular,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(X^* + Y^*) \geq 0 \Rightarrow \\
&\mathrm{Var}(X^*) + \mathrm{Var}(Y^*) + 2\,\mathrm{Cov}(X^*, Y^*) \geq 0 \Rightarrow \\
&1 + 1 + 2\,\mathrm{Cov}(X^*, Y^*) \geq 0 \Rightarrow \\
&\mathrm{Cov}(X^*, Y^*) \geq -1
\end{aligned}$$

.

Analogamente,

$$\text{Var}(X^* - Y^*) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Var}(X^*) + \text{Var}(Y^*) - 2\,\text{Cov}(X^*, Y^*) \geq 0 \Rightarrow$$

$$1 + 1 - 2\,\text{Cov}(X^*, Y^*) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Cov}(X^*, Y^*) \leq 1$$

Temos, então, que

$$-1 \leq Cov(X^*, Y^*) \leq 1$$

Mas $Cov(X^*, Y^*) = Corr(X, Y)$, o que completa a demonstração.

EXEMPLO 2.11

Associação linear perfeita

(a) Consideremos o caso em que $Corr(X, Y) = 1$. Então, $Cov(X^*, Y^*) = 1$ e, portanto

$$\mathrm{Var}\,(X^* - Y^*) = \mathrm{Var}(X^*) + \mathrm{Var}(Y^*) - 2\,\mathrm{Cov}(X^*, Y^*) = 1 + 1 - 2 \times 1 = 0$$

Mas $Var(X^* - Y^*) = 0$ significa que $X^* - Y^*$ é uma constante, isto é,

$$\frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma_X} - \frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sigma_Y} = k \Rightarrow$$

$$\frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma_X} = \frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sigma_Y} + k \Rightarrow$$

$$X - \mathrm{E}(X) = \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} Y - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \mathrm{E}(Y) + \sigma_X k \Rightarrow$$

$$X = \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} Y + \left[\mathrm{E}(X) - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \mathrm{E}(Y) + \sigma_X k \right] \Rightarrow$$

$$X = \left(\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \right) Y + k^*$$

em que $k^* = E(X) - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}E(Y) + \sigma_X k$. Isso significa que existe uma associação linear crescente perfeita entre X e Y: note que o coeficiente angular é $\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} > 0$.

(b) Analogamente, se $Corr(X, Y) = -1$, então $Cov(X^*, Y^*) = -1$ e

$$\text{Var}\,(X^* + Y^*) = \text{Var}(X^*) + \text{Var}(Y^*) + 2\,\text{Cov}(X^*, Y^*) = 1 + 1 + 2 \times (-1) = 0$$

o que significa que $X^* + Y^*$ é uma constante, isto é,

$$\frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma_X} + \frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sigma_Y} = k \Rightarrow$$

$$\frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma_X} = -\frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sigma_Y} + k \Rightarrow$$

$$X - \mathrm{E}(X) = -\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} Y + \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \mathrm{E}(Y) + \sigma_X k \Rightarrow$$

$$X = -\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} Y + \left[\mathrm{E}(X) + \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \mathrm{E}(Y) + \sigma_X k \right] \Rightarrow$$

$$X = \left(-\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \right) Y + k^*$$

em que $k^* = E(X) - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} E(Y) + \sigma_X k$. Isso significa que existe uma associação linear decrescente perfeita entre X e Y: note que o coeficiente angular é $\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} < 0$.

EXEMPLO 2.12

Sejam X, Y variáveis aleatórias discretas com a seguinte distribuição conjunta:

		X		
		0	1	2
Y	0	0,1	0,3	0,2
	1	0,1	0,1	0,2

(a) Obtenha as distribuições marginais de X e Y.

(b) Calcule $E(X), Var(X), E(Y), Var(Y), Cov(X,Y)$.

(c) Obtenha as distribuições condicionais de $X|Y=0$ e $X|Y=1$ e para cada uma delas calcule a esperança e a variância.

(d) Defina as seguintes variáveis aleatórias: $h(Y)=E(X|Y)$ e $g(Y)=Var(X|Y)$. Calcule

i. $E_Y[h(Y)]=E_Y[E_X(X|Y)]$

ii. $Var_Y[h(Y)] = Var_Y[E_X(X|Y)]$

iii. $E_Y[g(Y)] = E_Y[Var_X(X|Y)]$

iv. Verifique que $E_Y[h(Y)] = E_Y[E_X(X|Y)] = E(X)$ e $Var(X) = E_Y[Var_X(X|Y)] + Var_Y[E_X(X|Y)]$

Solução

(a)

		X			
		0	1	2	$P(Y = y)$
Y	0	0,1	0,3	0,2	0,6
	1	0,1	0,1	0,2	0,4
$P(X = x)$		0,2	0,4	0,4	

(b)

$$E(X) = 1 \times 0,4 + 2 \times 0,4 = 1,2$$
$$E(X^2) = 1^2 \times 0,4 + 2^2 \times 0,4 = 2,0$$
$$Var(X) = 2 - 1,2^2 = 0,56$$

$$E(Y) = 1 \times 0,4 = 0,4$$
$$E(Y^2) = 1^2 \times 0,4 = 0,4$$
$$Var(Y) = 0,4 - 0,4^2 = 0,24$$

$$E(XY) = 1 \times 1 \times 0,1 + 1 \times 2 \times 0,2 = 0,5$$
$$Cov(X,Y) = 0,5 - 1,2 \times 0,4 = 0,02$$

(c)

x	0	1	2
$P(X = x \mid Y = 0)$	$0,1/0,6 = \frac{1}{6}$	$0,3/0,6 = \frac{3}{6}$	$0,2/0,6 = \frac{2}{6}$
$P(X = x \mid Y = 1)$	$0,1/0,4 = \frac{1}{4}$	$0,1/0,4 = \frac{1}{4}$	$0,2/0,4 = \frac{2}{4}$

$$E(X \mid Y = 0) = 1 \times \frac{3}{6} + 2 \times \frac{2}{6} = \frac{7}{6}$$

$$E(X^2 \mid Y = 0) = 1^2 \times \frac{3}{6} + 2^2 \times \frac{2}{6} = \frac{11}{6}$$

$$\text{Var}(X \mid Y = 0) = \frac{11}{6} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{17}{36}$$

$$E(X \mid Y = 1) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

$$E(X^2 \mid Y = 1) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{2}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\text{Var}(X \mid Y = 1) = \frac{9}{4} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{11}{16}$$

(d)

h	$\frac{7}{6}$	$\frac{5}{4}$
$P[h(Y) = h]$	$0,6$	$0,4$

$$E[h(Y)] = 0,6 \times \frac{7}{6} + 0,4 \times \frac{5}{4} = 1,2 = E(X)$$

$$E[h^2(Y)] = 0,6 \times \left(\frac{7}{6}\right)^2 + 0,4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{173}{120}$$

$$\text{Var}[h(Y)] = \frac{173}{120} - \frac{144}{100} = \frac{1730 - 1728}{1200} = \frac{1}{600}$$

g	$\frac{17}{36}$	$\frac{11}{16}$
$P[g(Y) = g]$	$0,6$	$0,4$

$$E[g(Y)] = 0,6 \times \frac{17}{36} + 0,4 \times \frac{11}{16} = \frac{67}{120}$$

$$E[\text{Var}(X|Y)] + \text{Var}[E(X|Y)] = \frac{67}{120} + \frac{1}{600} = \frac{335 + 1}{600} = \frac{336}{600} = \frac{14}{25} = 0,56 = \text{Var}(X)$$

EXERCÍCIOS 2.4.1-2.4.4

2.4.1 A tabela abaixo dá a distribuição conjunta de X e Y:

	X		
Y	1	2	3
0	0,1	0,1	0,1
1	0,2	0,0	0,3
2	0,0	0,1	0,1

(a) Determine as distribuições marginais de X e Y.
(b) Calcule a esperança e a variância de cada uma das variáveis X e Y.
(c) Verifique se X e Y são independentes, justificando sua resposta.
(d) Calcule $P(X = 1|Y = 0)$ e $P(Y = 2|X = 3)$.
(e) Calcule $P(X \leq 2)$ e $P(X = 2, Y \leq 1)$.
(f) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y.

2.4.2 Sejam X e Y variáveis aleatórias com $E(X) = E(Y) = 0$ e $Var(X) = Var(Y) = 1$. Prove que $Corr(U, V) = 0$, onde $U = X + Y$ e $V = X - Y$.

2.4.3 Um aluno faz um teste de múltipla escolha com 4 questões do tipo Verdadeiro-Falso. Suponha que o aluno esteja "chutando" todas as questões, uma vez que ele não estudou a matéria da prova. Defina as seguintes variáveis aleatórias:

X_1 = número de acertos entre as duas primeiras questões da prova

Y_1 = número de acertos entre as duas últimas questões da prova

X_2 = número de acertos entre as três primeiras questões da prova

Y_2 = número de acertos entre as três últimas questões da prova

(a) Construa uma tabela com o espaço amostral associado a este experimento, listando todas as possibilidades de acerto e os valores de X_1, Y_1, X_2, Y_2 e suas probabilidades.

(b) Construa a função de distribuição conjunta de (X_1, Y_1) com as respectivas marginais.

(c) Construa a função de distribuição conjunta de (X_2, Y_2) com as respectivas marginais.

(d) Verifique se X_1 e Y_1 são independentes.

(e) Verifique se X_2 e Y_2 são independentes.

(f) Por que já era de se esperar as diferenças observadas em (d) e (e)?

(g) Calcule a covariância entre X_1 e Y_1.
(h) Calcule a covariância entre X_2 e Y_2.
(i) Calcule as seguintes distribuições condicionais com suas esperanças condicionais:

$X_2|Y_2 = 0 \qquad X_2|Y_2 = 1 \qquad X_2|Y_2 = 2 \qquad X_2|Y_2 = 3$

(j) Calcule $E[E(X_2|Y_2)]$.

2.4.4 Uma moeda honesta é lançada 4 vezes. Seja X o número de caras nos 2 primeiros lançamentos e seja Y o número de caras nos 3 últimos lançamentos.

(a) Liste todos os elementos do espaço amostral deste experimento, especificando os valores de X e Y.
(b) Construa a função de distribuição conjunta de X e Y.
(c) Calcule $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$
(d) Calcule $Cov(X,Y)$ e $Corr(X,Y)$.
(e) Se $Z = X + Y$, calcule $E(Z)$ e $Var(Z)$
(f) Se $W = X - Y$, calcule $E(W)$ e $Var(W)$.

2.4.5 X e Y têm função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < y < x; 0 < x < 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Determine as densidades marginais de X e Y.

2.4.6 Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Calcule

(a) $P(X > 1/2)$;

(b) $P(Y < X)$;

(c) $P(Y < 1/2 | X < 1/2)$

2.4.7 Considere a seguinte função de densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{se } 0 < x < y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Obtenha as densidades marginais de X e Y, identificando as suas respectivas distribuições de probabilidade.

(b) Verifique se X e Y são independentes, justificando a sua resposta.

2.4.8 Se X, Y e Z são variáveis aleatórias duas a duas não correlacionadas e Var(X) = 1, Var(Y) = 4 e Var(Z) = 9, calcule

(a) Cov(X + Y , X + Z)

(b) Corr(U, V) em que U = 5X + 2Y e V = Y + Z.