

Aula 6.2

Domínio da Frequência

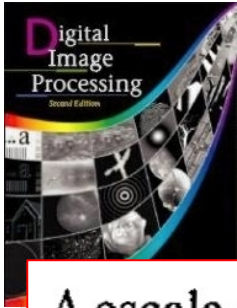
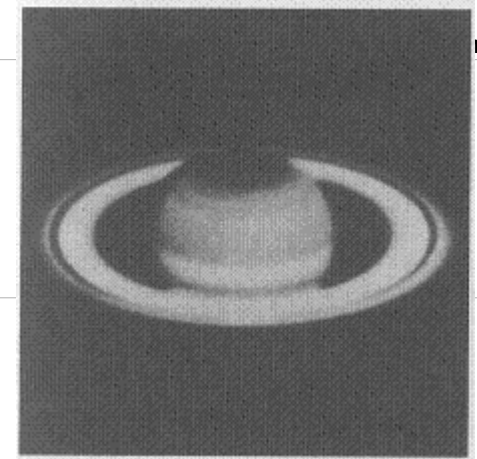


Imagem original



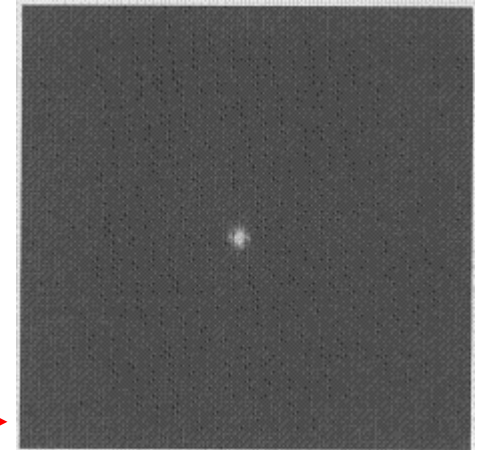
A escala dinâmica dos espectros de Fourier usualmente é muito mais alta do que aquela reproduzível com fidelidade por um dispositivo típico de exibição, e em tal caso apenas as partes mais brilhantes da imagem serão visíveis na tela de exibição.

Uma técnica útil que compensa essa dificuldade consiste na exibição da função

$$D(u, v) = c \log[1 + |F(u, v)|]$$

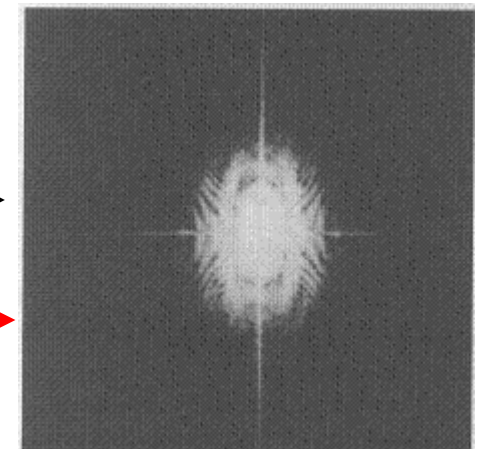
Espectro de Fourier

valores no intervalo $[0, 2,5 \times 10^6] \rightarrow$



$\log[1 + |F(u, v)|]$ variam de 0 a 6.4, \rightarrow

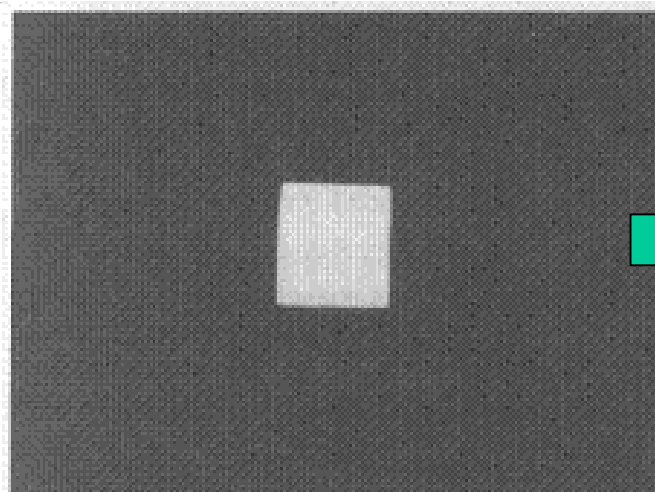
Espectro de Fourier
Compensando a escala





Transformada de Fourier

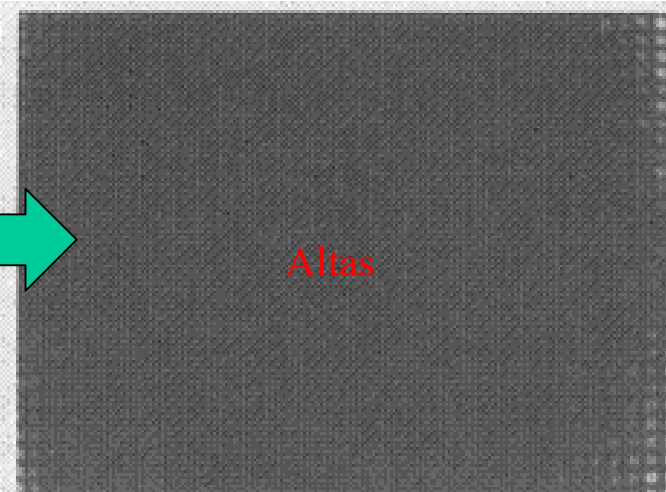
Imagem de um objeto
no domínio do espaço



Baixas

Baixas

(b)



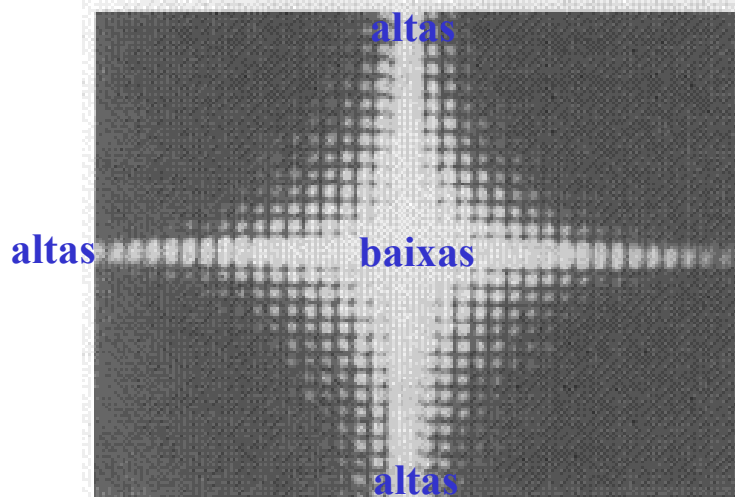
Altas

Baixas

Baixas



Imagem de um objeto no
domínio da frequência –
Espectro de Fourier



altas

altas

baixas

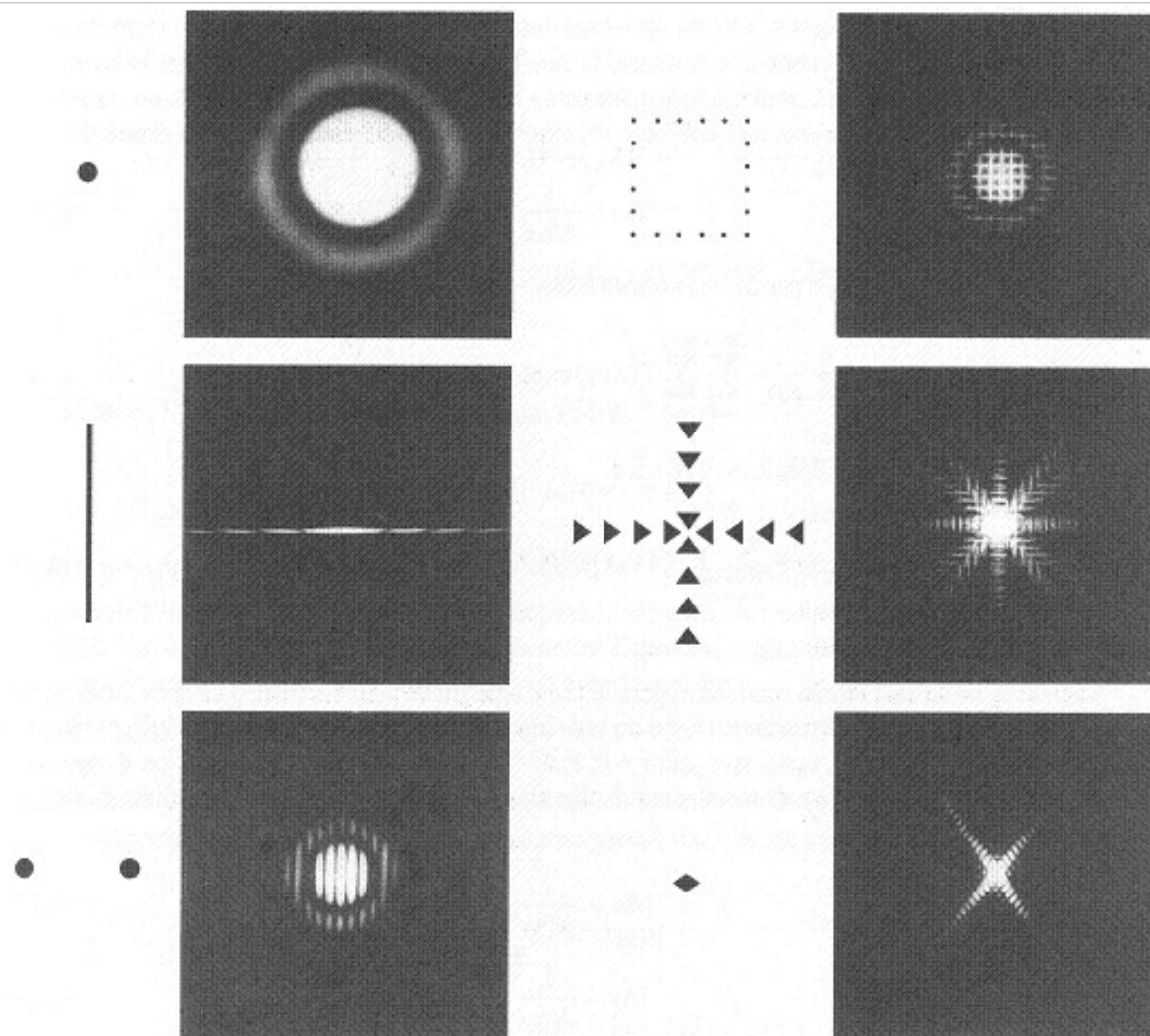
altas

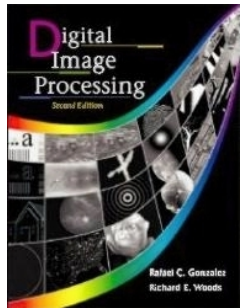
altas

Espectro deslocado (Shift)
para o centro da imagem



Transformada de Fourier





3.3 ALGUMAS PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA BIDIMENSIONAL DE FOURIER

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy) / N] \quad (3.2-9)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy) / N] \quad (3.2-10)$$

3.3.1 Separabilidade

O par de transformadas discretas de Fourier nas Equações (3.2-9) e (3.2-10) pode ser expressas em formas separáveis

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \exp[-j2\pi ux / N] \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi vy / N] \quad (3.3-2)$$

ou seja, o cálculo em 2D pode ser obtido processando em 1D

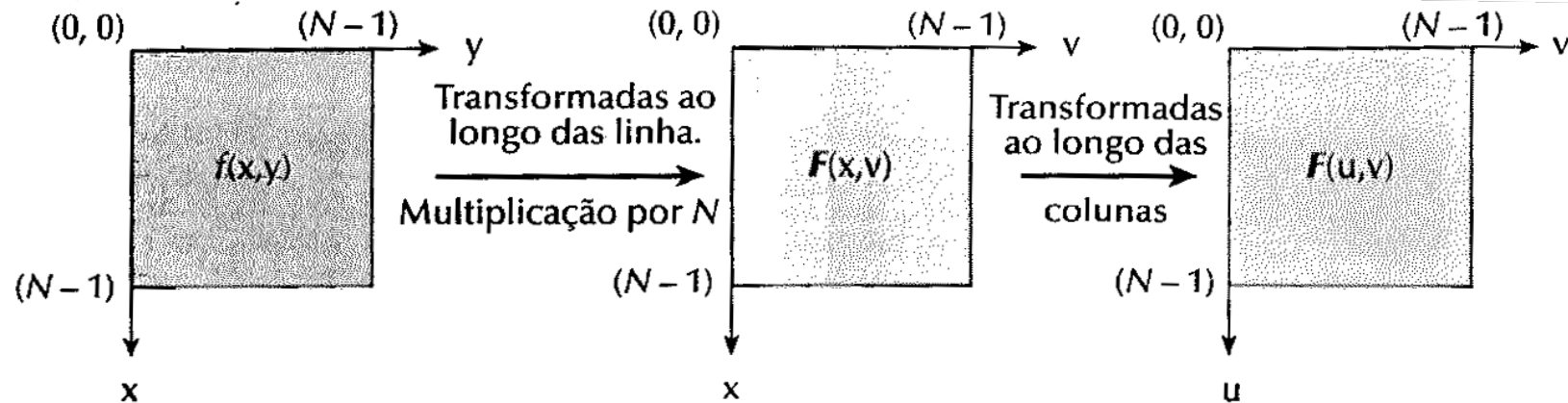
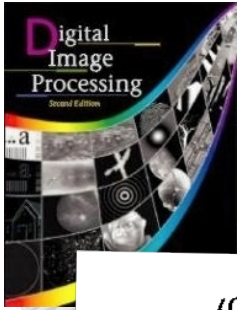


Figura 3.7 — Computação de uma transformada de Fourier bidimensional como uma série de transformadas em uma dimensão

para $u, v = 0, 1, \dots, N-1$, e

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \exp[j2\pi ux / N] \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[j2\pi vy / N] \quad (3.3-3)$$

para $x, y = 0, 1, \dots, N-1$.



Transformada de Fourier

3.3.2 Translação

As propriedades da translação do par de transformadas de Fourier são

$$f(x, y) \exp[j2\pi(u_0x + v_0y) / N] \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0) \quad (3.3-6)$$

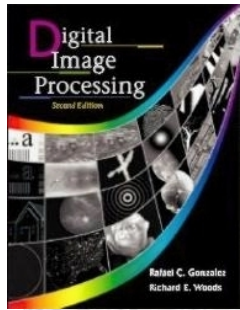
e

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) \exp[-j2\pi(ux_0 + vy_0) / N] \quad (3.3-7)$$

3.3.3 Periodicidade e Simetria Conjugada

A transformada discreta de Fourier e sua inversa são *periódicas* com período N ; isto é,

$$F(u, v) = F(u + N, v) = F(u, v + N) = F(u + N, v + N). \quad (3.3-10)$$



Transformada de Fourier

3.3.4 Rotação

Se introduzirmos as coordenadas polares

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \phi \quad v = \omega \sin \phi$$

então $f(x, y)$ e $F(u, v)$ tornam-se $f(r, \theta)$ e $F(\omega, \phi)$, respectivamente. A substituição direta no par de transformadas de Fourier contínuas ou discretas resulta

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \phi + \theta_0). \quad (3.3-13)$$

Em outras palavras, a rotação de $f(x, y)$ de um ângulo θ_0 implicará em uma rotação de $F(u, v)$ deste mesmo ângulo. A Figura 3.10 ilustra essa propriedade. (A seguir)

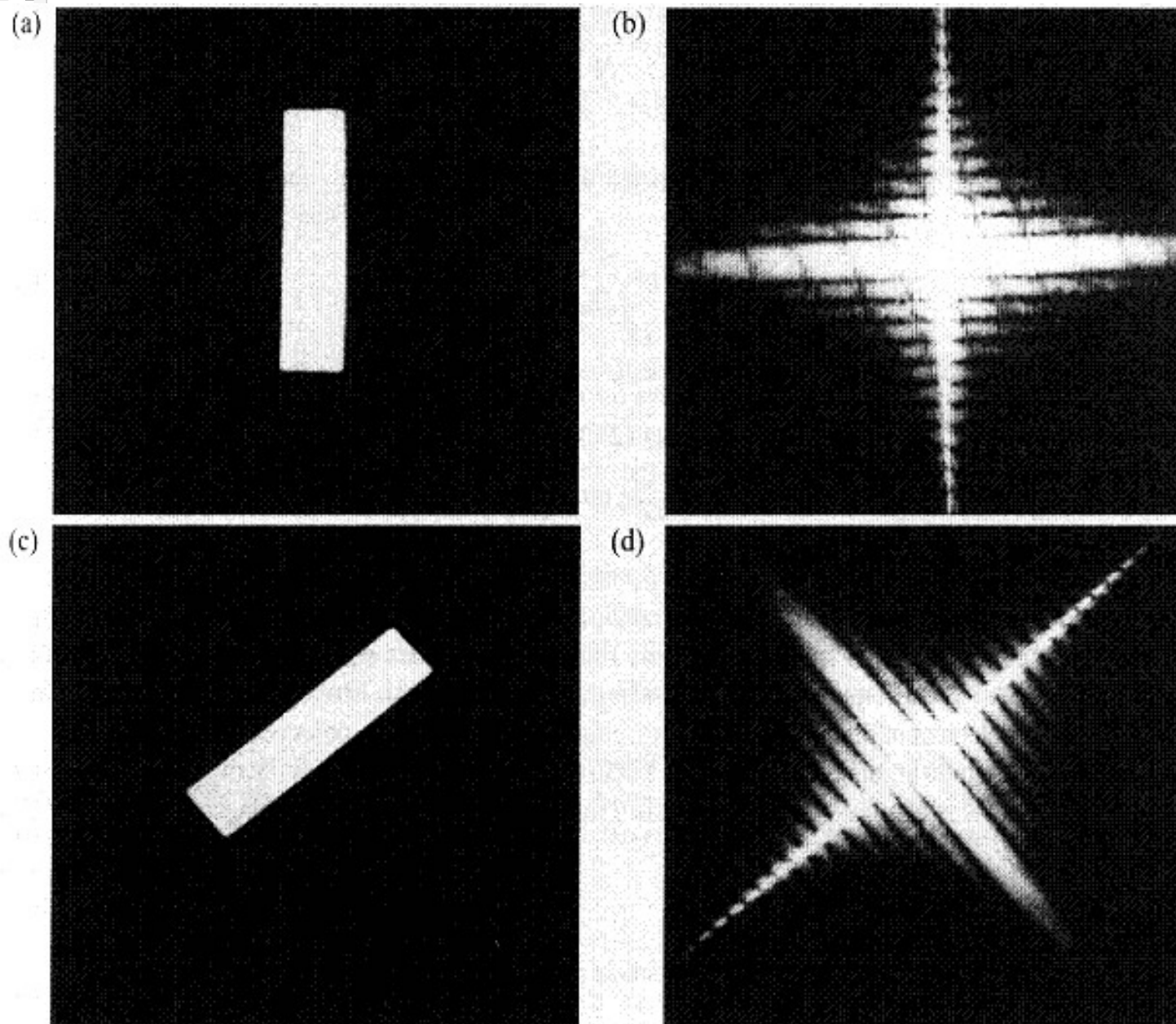
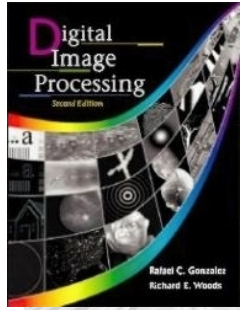


Figura 3.10 — Propriedades rotacionais da transformada de Fourier: (a) uma imagem simples; (b) espectro; (c) imagem rotacionada; (d) espectro resultante.



Transformada de Fourier

3.3.5 Distributividade e Mudança de Escala

Da definição do par de transformadas contínua ou discreta

$$\mathcal{F}\{f_1(x, y) + f_2(x, y)\} = \mathcal{F}\{f_1(x, y)\} + \mathcal{F}\{f_2(x, y)\} \quad (3.3-14)$$

e, em geral,

$$\mathcal{F}\{f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)\} \neq \mathcal{F}\{f_1(x, y)\} \cdot \mathcal{F}\{f_2(x, y)\}. \quad (3.3-15)$$

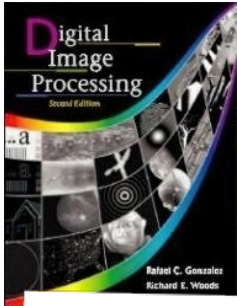
Em outras palavras, a transformada de Fourier e sua inversa são distributivas quanto à adição, mas não quanto à multiplicação.

Para dois escalares a e b ,

$$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v)$$

e

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F(u/a, v/b).$$



Transformada de Fourier

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy) / N]$$

3.3.6 Valor Médio

Uma definição largamente utilizada do valor médio de uma função discreta bidimensional é dada pela expressão:

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y). \quad (3.3-18)$$

Substituindo-se $u = v = 0$ na Equação (3.2-9) resulta

$$F(0, 0) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \quad (3.3-19)$$

Portanto $\bar{f}(x, y)$ é relacionada à transformada de Fourier de $f(x, y)$ por

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N} F(0, 0). \quad (3.3-20)$$

ou seja, a média de $f(x,y)$ é obtida dividindo $F(0,0)$ por N



Transformada de Fourier

3.3.7 O Laplaciano

O Laplaciano de uma função de duas variáveis $f(x, y)$ é definido como

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Da definição da transformada de Fourier bidimensional,

$$\mathcal{F}\{\nabla^2 f(x, y)\} \Leftrightarrow -(2\pi)^2(u^2 + v^2)F(u, v).$$

O operador Laplaciano é útil para reforçar as bordas de uma imagem como mostrado na Seção 7.1.3.



A derivada

Supondo $g(t)$ e $G(f)$ um par de Fourier genérico e i um número real não negativo, então

$$\frac{d^i g(t)}{dt^i} = D_i(f)G(f)$$

onde $D_i(f) = (j2\pi f)^i$

O que permite calcular, por exemplo, uma derivada tal como

$$\frac{d^{0,5} g(t)}{dt^{0,5}} \quad \text{ou ainda} \quad \frac{d^{\pi} g(t)}{dt^{\pi}}$$



Transformada de Fourier

Convolução e Correlação

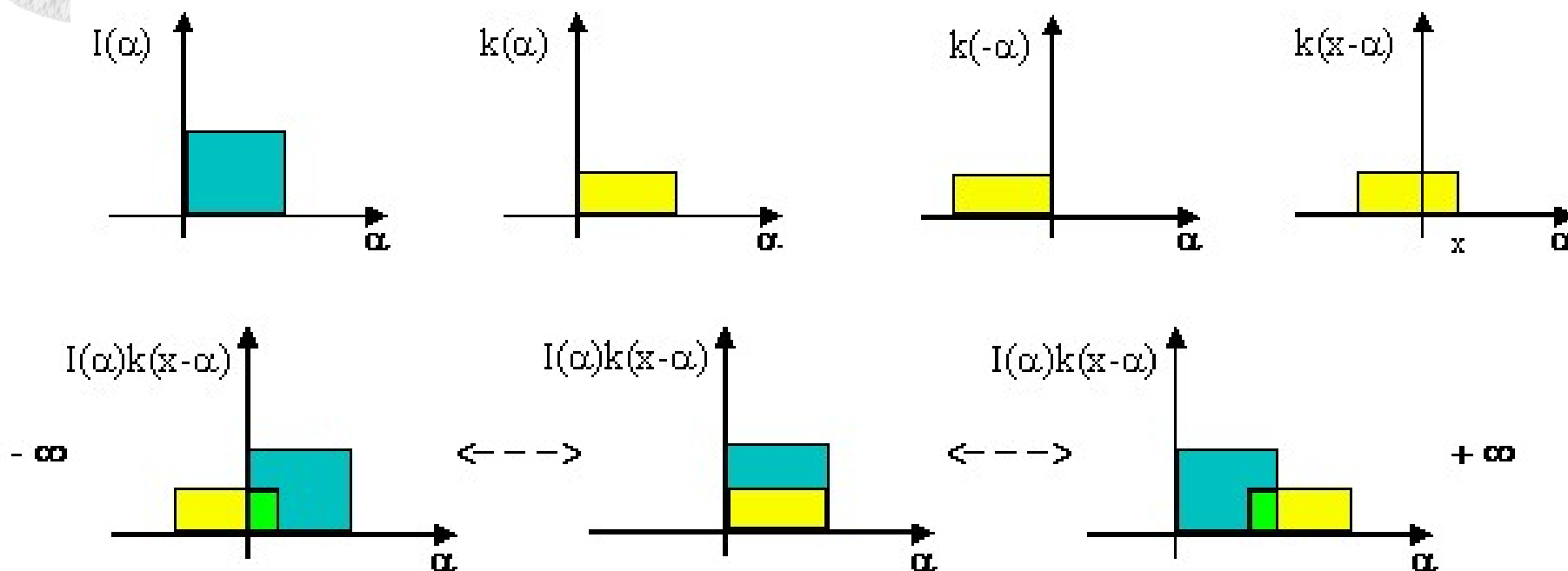
Convolução

A convolução de duas funções $f(x)$ e $g(x)$, denotada por $f(x)*g(x)$, é definida pela integral

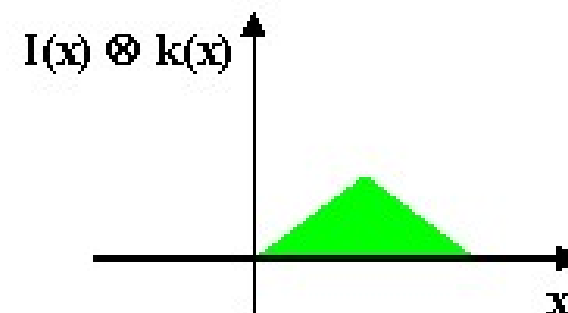
$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)g(x - \alpha) d\alpha$$

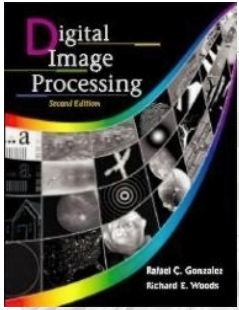


Transformada de Fourier



$$I(\alpha) * K(\alpha) = \int I(\alpha).K(x - \alpha)d\alpha$$

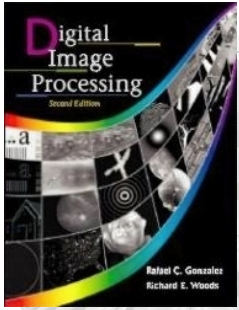




Transformada de Fourier

$$\begin{array}{ccc} \text{convolução} & & \text{produto} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(x) * g(x) & \Leftrightarrow & F(u).G(u) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \\ f(x).g(x) & \Leftrightarrow & F(u) * G(u) \\ \text{produto} & & \text{convolução} \end{array}$$



Transformada de Fourier

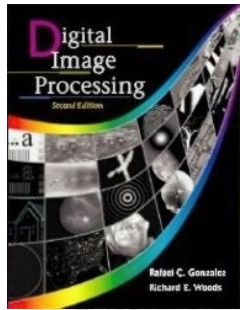
Correlação

A correlação \circ de duas funções contínuas $f(x)$ e $g(x)$, denotada por $f(x) \circ g(x)$, é definida pela relação


$$f(x) \circ g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\alpha) g(x + \alpha) d\alpha$$

sendo que $*$ é o conjugado complexo.

O complexo conjugado de um número complexos $z = a + bi$ é $\bar{z} = a - bi$



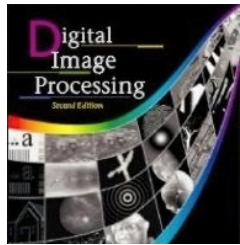
Transformada de Fourier

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp[-j2\pi ux / N]$$


3.4 A TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER (FFT)

O número de multiplicações e adições complexas necessárias para implementar a Equação (3.2-2) é proporcional a N^2 . Isto é, para cada um dos N valores de u , a expansão do somatório requer N multiplicações complexas de $f(x)$ por $\exp[-j2\pi ux/N]$ e $N-1$ adições dos resultados. Os termos de $\exp[-j2\pi ux/N]$ podem ser computados uma vez e armazenados numa tabela para todas as aplicações subseqüentes. Por essa razão, a multiplicação de u por x nestes termos não é usualmente considerada uma parte direta da implementação.

A decomposição adequada da Equação (3.2-2) pode tornar o número de operações de multiplicações e adições proporcional a $N \log_2 N$. O procedimento de decomposição é denominado *algoritmo da transformada rápida de Fourier* (FFT). A redução em proporcionalidade de N^2 para $N \log_2 N$ operações representa uma economia significativa no esforço computacional



Transformada de Fourier

3.4.1 O Algoritmo FFT

O algoritmo FFT desenvolvido nesta seção baseia-se no assim chamado método de dobramentos sucessivos. Por conveniência, expressamos a Equação (3.2-2) na forma

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W_N^{ux} \quad (3.4-1)$$

em que

$$W_N = \exp[-j2\pi / N] \quad (3.4-2)$$

e assume-se N como

$$N = 2^n \quad N=8, 16, 32, 64, \text{ etc.} \quad (3.4-3)$$

em que n é um inteiro positivo. Portanto N pode ser expresso como

$$N = 2M \quad N \text{ é par} \quad (3.4-4)$$

em que M é também um inteiro positivo.



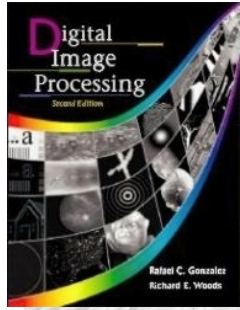
Transformada de Fourier

A substituição da Equação (3.4-4) na Equação (3.4-1) resulta

$$F(u) = \frac{1}{2M} \sum_{x=0}^{2M-1} f(x) W_{2M}^{ux}$$

Separa a parte par da ímpar

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x) W_{2M}^{u(2x)} + \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1) W_{2M}^{u(2x+1)} \right]$$



Transformada de Fourier

$$W_N = \exp[-j2\pi / N]$$

Da Equação (3.4-2), $W_{2M}^{2ux} = W_M^{ux}$, de modo que a Equação (3.4-5) pode ser expressa na forma

$$F(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x) W_M^{ux} + \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1) W_M^{ux} W_{2M}^u \right]. \quad (3.4-6)$$

Definindo-se

$$F_{\text{par}}(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x) W_M^{ux} \quad (3.4-7)$$

para $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$, e

$$F_{\text{impar}}(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1) W_M^{ux} \quad (3.4-8)$$

para $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$, simplifica-se a Equação (3.4-6) para

$$F(u) = \frac{1}{2} [F_{\text{par}}(u) + F_{\text{impar}}(u) W_{2M}^u]. \quad (3.4-9)$$



Também, uma vez que $W_M^{u+M} = W_M^u$ e $W_{2M}^{u+M} = -W_{2M}^u$, as Equações (3.4-7) e (3.4-9) nos dão

$$F(u + M) = \frac{1}{2} [F_{\text{par}}(u) - F_{\text{impar}}(u)W_{2M}^u]. \quad (3.4-10)$$

A análise cuidadosa das Equações (3.4-7)—(3.4-10) revela algumas propriedades interessantes dessas expressões. Uma transformada de N pontos pode ser computada pela divisão da expressão original em duas

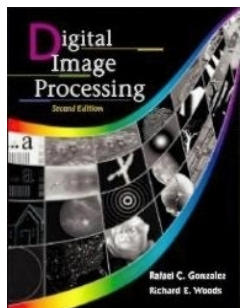


Tabela 3.1 Uma comparação de N^2 com $N \log_2 N$ para vários valores de N

N	N^2 (FT Direto)	$N \log_2 N$ (FFT)	Vantagem computacional ($N/\log_2 N$)
2	4	2	2,00
4	16	8	2,00
8	64	24	2,67
16	256	64	4,00
32	1.024	160	6,40
64	4.096	384	10,67
128	16.384	896	18,29
256	65.536	2.048	32,00
512	262.144	4.608	56,89
1.024	1.048.576	10.240	102,40
2.048	4.194.304	22.528	186,18
4.096	16.777.216	49.152	341,33
8.192	67.108.864	106.496	630,15

DFT

FFT

**Vantagem
computacional**



FFT

Fortran

Digital Image Processing, 2nd ed.

www.imageprocessingbook.com

```
SUBROUTINE FFT (F, LN)
COMPLEX F(1024), U, W, T, CMPLX
PI=3.141593
N=2**LN
NV2=N/2
NM1=N-1
J=1
DO 3 I=1, NM1
    IF(I.GE.J) GO TO 1
    T=F(J)
    F(J)=F(I)
    F(I)=T
1    K=NV2
2    IF(K.GE.J) GO TO 3
    J=J-K
    K=K/2
    GO TO 2
3    J=J+K
    DO 5 L=1, LN
        LE=2**L
        LE1=LE/2
        U=(1.0, 0.0)
        W=CMPLX(COS(PI/LE1), -SIN(PI/LE1))
        DO 5 J=1, LE1
            DO 4 I=J, N, LE
                IP=I+LE1
                T=F(IP)*U
                F(IP)=F(I)-T
4            F(I)=F(I)+T
5        U=U*W
        DO 6 I=1, N
6        F(I)=F(I)/FLOAT(N)
    RETURN
END
```