Métodos Computacionais para Equações Diferenciais

Aula 9

Prof.ª Dr.ª Analice Costacurta Brandi

Optativa - Tópicos de Matemática Aplicada
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

Sumário

Problema de Valor de Fronteira (PVF)

Forma geral:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha \quad \text{e} \quad y(b) = \beta. \end{cases} \tag{1.1}$$

O valor da solução é fixado em dois pontos distintos.

E, ainda, $y'' = p(x)y' + q(x)y(x) + r(x)$.

Teorema de Existência e Unicidade

i) f é Lipschitziana em relação a y e y';

ii) f_y é limitada para $a \leq x \leq b$ e $|y| = \infty$, então o PVF tem solução única.

Usando o método de diferenças finitas para discretizar o PVF em que a diferença centrada é utilizada para aproximar as derivadas e utilizando uma malha uniforme com $h = \frac{b-a}{N+1}$.

Sabendo que a diferença centrada é dada por:

$$\underbrace{y_i''}_{} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + O(h^2).$$

$$\underbrace{y_i'}_{} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2).$$

Substituindo essas aproximações no PVF abaixo, temos:

$$y'' - p(x)y' - q(x)y(x) = r(x). \tag{1.2}$$

$$\underbrace{\left[\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}\right]}_{} - p(x_i)\underbrace{\left[\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right]}_{} - q(x_i)y(x_i) = r(x_i),$$

$$i = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.3}$$

As condições de fronteiras são substituídas por: $y_0 = \alpha$ e $y_{N+1} = \beta$.
Multiplicando a equação (1.3) por $\frac{-h^2}{2}$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{-h^2}{2}\left[\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}\right] &- \frac{h^2}{2}\left[-p(x_i)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right] + \\
&- \frac{h^2}{2}[-q(x_i)y(x_i)] = -\frac{h^2}{2}r(x_i),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\underbrace{y_{i-1}}_{} + \underbrace{y_i}_{} - \frac{1}{2}\underbrace{y_{i+1}}_{} + \frac{h}{4}p(x_i)\underbrace{y_{i+1}}_{} - \frac{h}{4}p(x_i)\underbrace{y_{i-1}}_{} + \frac{h^2}{2}q(x_i)\underbrace{y(x_i)}_{} &= \\
= -\frac{h^2}{2}r(x_i)&.
\end{aligned}
$$

Reagrupando os termos, temos

$$
\begin{aligned}
\left[-\frac{1}{2} - \frac{h}{4}p(x_i)\right]\underbrace{y_{i-1}}_{} + \left[1 + \frac{h^2}{2}q(x_i)\right]\underbrace{y_i}_{} + \left[-\frac{1}{2} + \frac{h}{4}p(x_i)\right]\underbrace{y_{i+1}}_{} &= \\
= -\frac{h^2}{2}r(x_i)&.
\end{aligned}
$$

E, ainda, podemos escrever

$$\underbrace{-\frac{1}{2}\left[1+\frac{h}{2}p(x_i)\right]}_{b_i} y_{i-1} + \underbrace{\left[1+\frac{h^2}{2}q(x_i)\right]}_{a_i} y_i \underbrace{-\frac{1}{2}\left[1-\frac{h}{2}p(x_i)\right]}_{c_i} y_{i+1} =$$

$$= -\frac{h^2}{2}r(x_i).$$

Assim,

$$-b_i y_{i-1} + a_i y_i - c_i y_{i+1} = -\frac{h^2}{2}r(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Se $i = 1$ tenho uma equação linear com incógnitas y_1 e y_2.
Se $i = 2$ tenho uma equação linear com incógnitas y_1, y_2 e y_3.

$\vdots$

Se $i = N$ tenho uma equação linear com incógnitas y_{N-1} e y_N, onde y_0 e $y_N + 1$ são as condições de fronteira.

Essas equações fornecem um sistema linear de ordem N que pode ser representado na forma vetorial por $Ay = r$, onde

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -b_2 & a_2 & -c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -b_{N-1} & a_{N-1} & -c_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -b_N & a_N \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix}}_{y} =
$$

$$
= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{h^2}{2} r(x_1) + b_1 \alpha \\ -\frac{h^2}{2} r(x_2) \\ \vdots \\ -\frac{h^2}{2} r(x_{N-1}) \\ -\frac{h^2}{2} r(x_N) + c_N \beta \end{bmatrix}}_{r} . \qquad (1.4)
$$

A matriz dos coeficientes A é tridiagonal, resolvendo esse sistema obtemos os valores de $y_i, i = 1, 2, \dots, N$ que são aproximações de $y(x_i)$, solução exata, onde $x_i = x_0 + ih$.

Dado o método vamos conhecer a consistência e convergência, assim:

- Se $det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ é não singular $\Rightarrow$ o sistema tem solução única.
- Se $|det(A)| \ll 1 \Rightarrow$ instabilidade numérica.
- Se A for uma matriz diagonal dominante então A é não singular $\Rightarrow$ o sistema tem solução única.

Sendo assim, vamos criar condições para que A seja diagonalmente dominante

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{N} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Se h for escolhido de modo que:

$$\frac{h}{2}\,|p(x_i)| \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.5}$$

Então segue que $|b_i| + |c_i| = b_i + c_i = 1$ e $a_i > 1$.
Logo,

$$\begin{aligned} |a_1| &> |c_1|, \\ |a_i| &> |b_i| + |c_i|, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \\ |a_N| &> |b_N|, \end{aligned}$$

e a matriz é diagonalmente dominante, por conseguinte inversível e o problema discreto tem solução única

A solução de (1.4) pode ser obtida por simples fatoração de A, como o método de Eliminação de Gauss, por exemplo. Sendo A diagonalmente dominante, a fatoração é estável e não é necessário pivotamento.

Observação: Se $q(x_i) < 0$ então A terá diagonal dominante se $h \leq \frac{2}{|p(x_i)|}$. **(Critério de Estabilidade)**

Erro de Truncamento Local

Agora, vamos estimar o erro na aproximação numérica definida em (1.3). O ETL é obtido substituindo a solução exata na equação (1.3), assim definimos τ_i, o ETL por:

$$\tau_i = [\text{eq. (1.3) para } y(x_i)] - r(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.6}$$

Como $y(x)$ é solução de (1.2), temos

$$\tau_i = \frac{y(x_i - h) - 2y(x_i) + y(x_i + h)}{h^2} - p(x_i)\frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h} + \\ - \underline{q(x_i)y(x_i)} - [y''(x_i) - p(x_i)y'(x_i) - \underline{q(x_i)y(x_i)}].$$

$$\begin{aligned} \tau_i &= \left[\frac{y(x_i - h) - 2y(x_i) + y(x_i + h)}{h^2} - y''(x_i)\right] + \\ &- p(x_i)\left[\frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h} - y'(x_i)\right], \quad i = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

Supondo que $y^4(x)$ é contínua e usando a expressão do erro nas fórmulas centradas, obtemos

$$\tau_i \;=\; \frac{h^2}{12}\left[y^4(\xi_i) - 2p(x_i)y'''(\eta_i)\right], \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad (1.7)$$

onde $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$. Assim o erro de truncamento local é $O(h^2)$ e dizemos que o método é consistente de ordem 2.

Exercícios:

1. Se mudarmos a condição de fronteira (CF) muda algo?

$$y'(a) + \gamma y(a) = 0.$$

Com relação à utilização de tamanhos de passos maiores, é possível a construção do método menos restritivo. Esse método é denominado upwind (combina diferenças progressivas e regressivas conforme sinal de p(x)). Isso reduz a ordem do método mas a restrição sobre h é relaxada.

Método Upwind

$$y'(x_i) = \varepsilon \, \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + (1 - \varepsilon) \, \frac{y_i - y_{i-1}}{h},$$

- $\varepsilon = 0 \;\Rightarrow\;$ diferença regressiva,
- $\varepsilon = 1 \;\Rightarrow\;$ diferença progressiva,
- $\varepsilon = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\;$ diferença centrada,
- Se $p(x_i) > 0 \;\Rightarrow\; \varepsilon = 0$,
- Se $p(x_i) < 0 \;\Rightarrow\; \varepsilon = 1$.

1. Considere o seguinte PVF definido no intervalo $[0, 20]$:

$$\begin{cases} 4y'' - 2y' + y + x = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(20) = 10 \end{cases}$$

Aplique o método de diferenças finitas, utilizando diferenças centrais para as derivadas, e resolva numericamente esta equação.

Exercícios

2. Considere o seguinte PVF definido no intervalo $[1, 2]$ e utilize os espaçamentos $h = 0.1$, $h = 0.05$ e $h = 0.025$.

$$\begin{cases} \dfrac{y''}{3} - 6y' + xy + cos(x)x = 0 \\ y(1) = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

   Aplique o método de diferenças finitas, utilizando as fórmulas avançada, atrasada e centrada para as derivadas, e discuta as soluções aproximadas encontradas.