Aulas 09 e 10

Transformações Geométricas 2D

Transformações Geométricas 2D

Transformações são usadas para modificar os objetos, podendo ser:

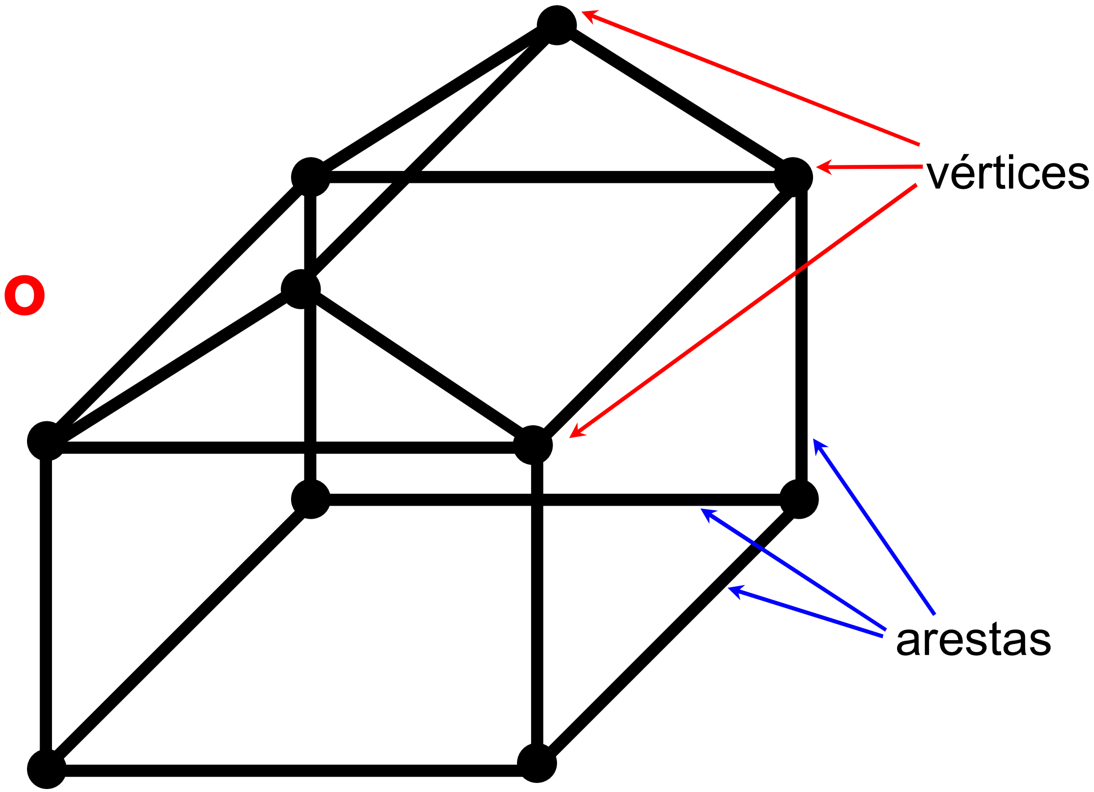
- aumentar ou diminuir o tamanho (escala);
- mover os objetos (translação);
- espelhar os objetos;
- rotacionar os objetos;
- outras operações

Em computação gráfica, as transformações se dão através do uso de matrizes de **transformações geométricas**

Transformações Geométricas 2D

Para transformar um objeto complexo, formado por diversos pontos (vértices), as transformações devem ser aplicadas em cada vértice.

Exemplo de objeto com 10 vértices e 13 arestas



Transformações Geométricas 2D

Representação de pontos

Um ponto **no plano** pode ser representado por [x y] e, vários pontos podem ser agrupados em uma matriz de pontos

$$\begin{pmatrix} x1 & y1 \\ x2 & y2 \\ x3 & y3 \end{pmatrix}$$

Transformações de Matrizes

A transformação se dá multiplicando o ponto ou matriz de pontos, pela matriz de transformações T

[x   y] [T] = [x*   y*]

Transformações Geométricas 2D

<u>Obtenção da matriz T, dados pontos de entrada e saída</u>

Embora seja comum ter os pontos de entrada e a matriz com a transformação desejada, é possível obter a transformação, caso se tenha os pontos de entrada e saída e, a matriz A seja inversível

$$[\ A\ ]\,[\ T\ ] = [\ B\ ]$$

Isto é feito multiplicando os dois lados da equação por $[\ A\ ]^{-1}$

tem-se

$$[\ A\ ]^{-1}\,[\ A\ ]\,[\ T\ ] = [\ A\ ]^{-1}\,[\ B\ ]$$

$$\Rightarrow \quad [\ T\ ] = [\ A\ ]^{-1}\,[\ B\ ]$$

Transformações Geométricas 2D

Transformação de pontos

É o resultado da multiplicação do ponto [x y] pela matriz de transformação T

[x y] [T] = [x* y*]

exemplo:

$$\underbrace{[x \quad y]_{1\times 2} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2}}_{2=2} = [xa+yc \quad xb+yd]_{1\times 2} = [x^* \quad y^*]$$

Transformações Geométricas 2D

<u>Transformação Identidade</u>

Esta transformação transforma um ponto nele mesmo. Embora isto tenha pouca utilidade, algumas bibliotecas usam carregar uma matriz identidade em um acumulador, como forma de inicializá-los

$$[T] = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$[x \quad y].\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad y]$$

Transformações Geométricas 2D

<u>Transformação Escala</u>

Esta transformação altera o tamanho dos objetos (aumenta ou diminui), embora possa também realizar um espelhamento

$$[x \quad y].\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [ax + cy \quad \mathrm{bx} + \mathrm{d}y]$$

quando a = 1, b = c = 0 tem-se escala apenas em y

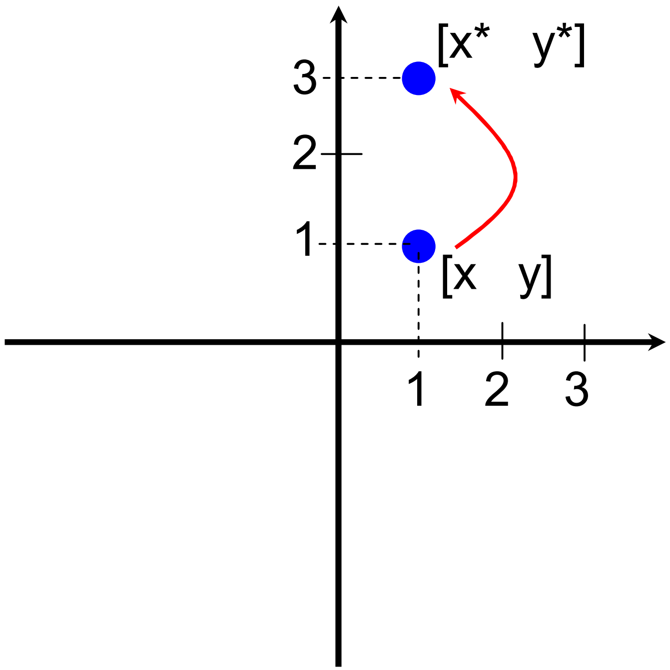
exemplo: **aumento em y (d > 1)**

$$[x \quad y].\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = [x \quad 3y]$$

Transformações Geométricas 2D

Geometricamente,
um ponto [1   1] ficará [1   3]:

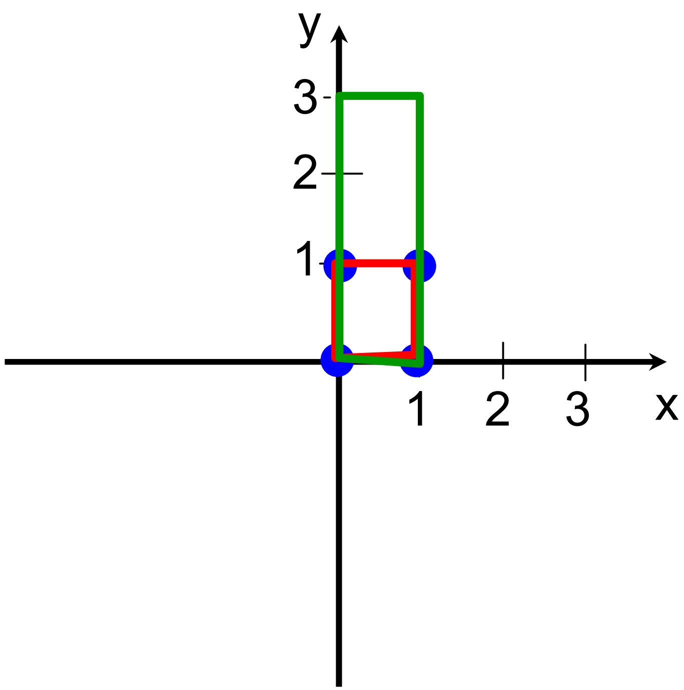
$$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}$$



Esta transformação não parece um aumento de escala, mas um deslocamento do ponto, mas veja o exemplo a seguir

Transformações Geométricas 2D

Suponha um quadrado, com coordenadas (0,0), (0,1), (1,1) e (1,0), após a mesma transformação T anterior, serão obtidos os pontos (0,0), (0,3), (1,3) e (1,0)



$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Este exemplo mostra que a transformação, de fato, aumenta (em y) a dimensão do quadrado original, convertendo ele em um retângulo

Transformações Geométricas 2D

quando a = 1, b = c = 0 tem-se escala apenas em y

exemplo: **redução em y (0 < d < 1)**

$$[x \quad y] . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} = [x \quad 0.2y]$$

quando d = 1, b = c = 0 tem-se escala apenas em x

exemplo: **aumento em x (a > 1)**

$$[x \quad y] . \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [3x \quad y]$$

Transformações Geométricas 2D

Transformação Escala

Também é possível aumentar ou diminuir em x e y, na mesma matriz

exemplo: **aumento em x e redução em y**

$$[x \quad y].\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} = [3x \quad 0.1y]$$

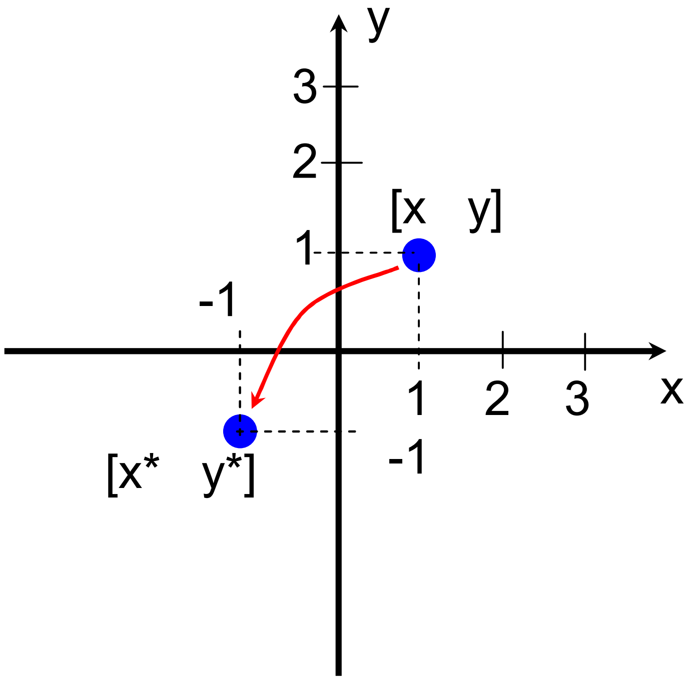
Transformações Geométricas 2D

Transformação Escala

quando b = c = 0 e a ou d são negativos, tem-se reflexão do ponto

exemplo: a = d = -1 **reflexão em relação a origem (x e y)**

$$[x \quad y].\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [-x \quad -y]$$



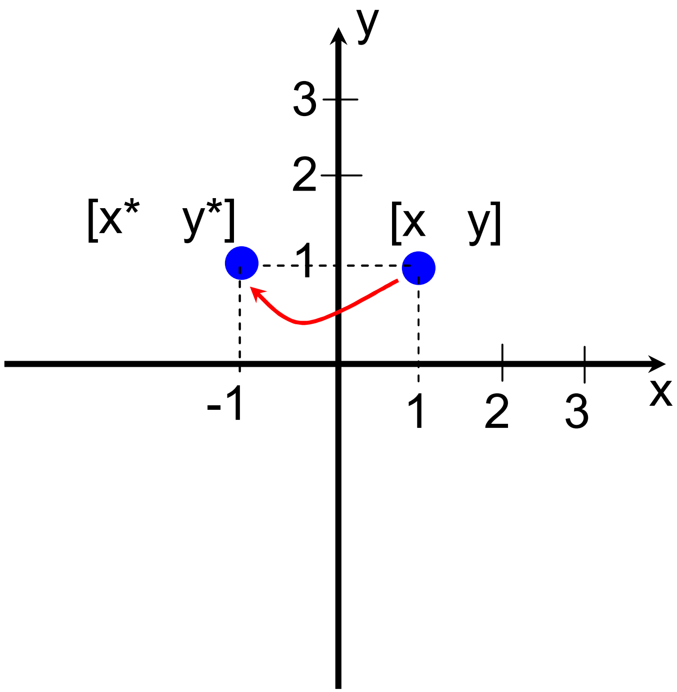
Transformações Geométricas 2D

<u>Transformação Escala</u>

quando b = c = 0 e a ou d são negativos, tem-se reflexão do ponto

exemplo: a = -1 e d = 1 **reflexão em relação ao eixo y**

$$[x \quad y].\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-x \quad y]$$



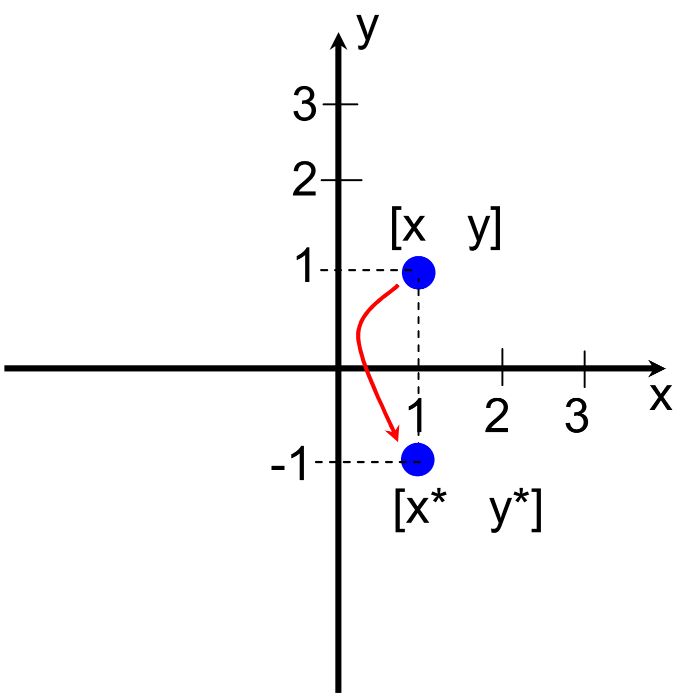
Transformações Geométricas 2D

Transformação Escala

quando b = c = 0 e a ou d são negativos, tem-se reflexão do ponto

exemplo: a = 1 e d = -1 **reflexão em relação ao eixo x**

$$[x \quad y].\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [x \quad -y]$$



Transformações Geométricas 2D

<u>Transformação Escala</u>

quando $a \neq d$ tem-se o stretching

<u>Resumo:</u>

Se a e d > 0, então é escala

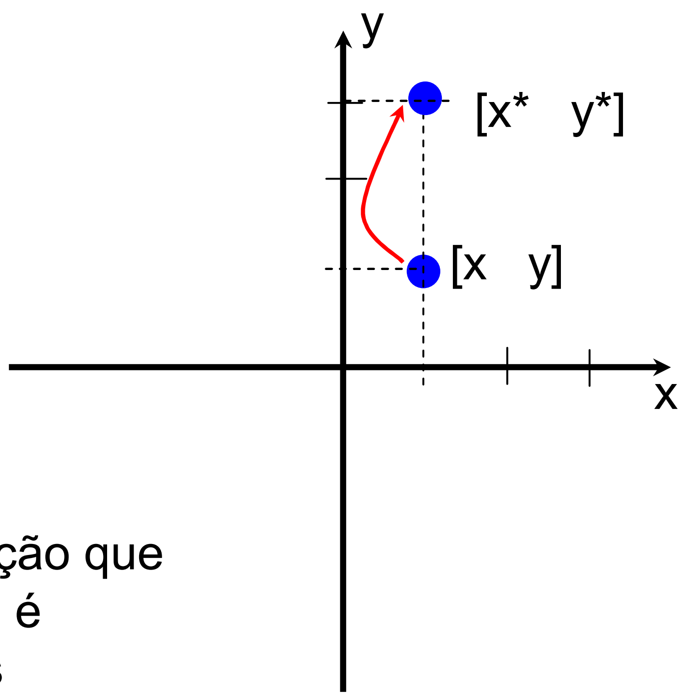
Se $a \neq d$, então é stretching

Se a e/ou d < 0, então é reflexão

Transformações Geométricas 2D

Transformação Shearing (deslizamento) em x

$$[x \quad y] . \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad y + xb]$$

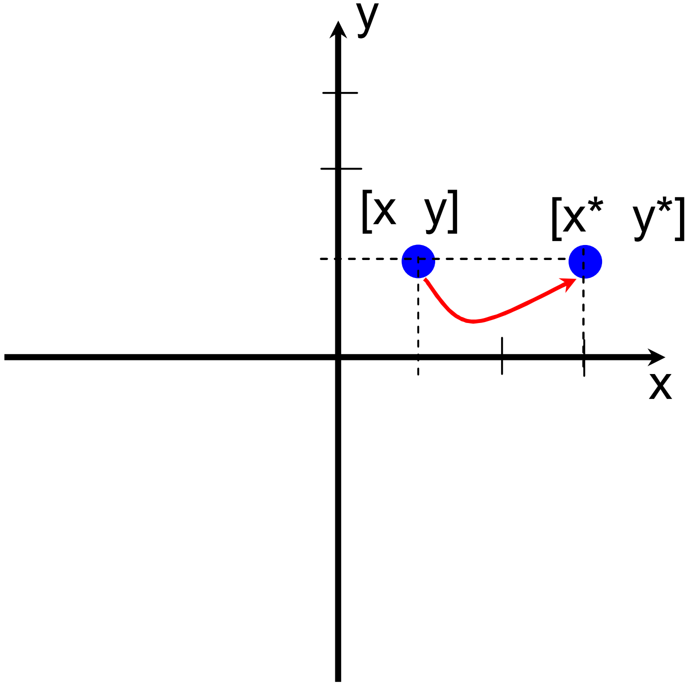


Shearing (cisalhamento) é uma transformação que distorce o formato de um objeto - em geral, é aplicado um deslocamento aos valores das coordenadas x ou das coordenadas y do objeto

Transformações Geométricas 2D

Transformação Shearing (deslizamento) em y

$$[x \quad y] . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} = [x + yc \quad y]$$



Transformações Geométricas 2D

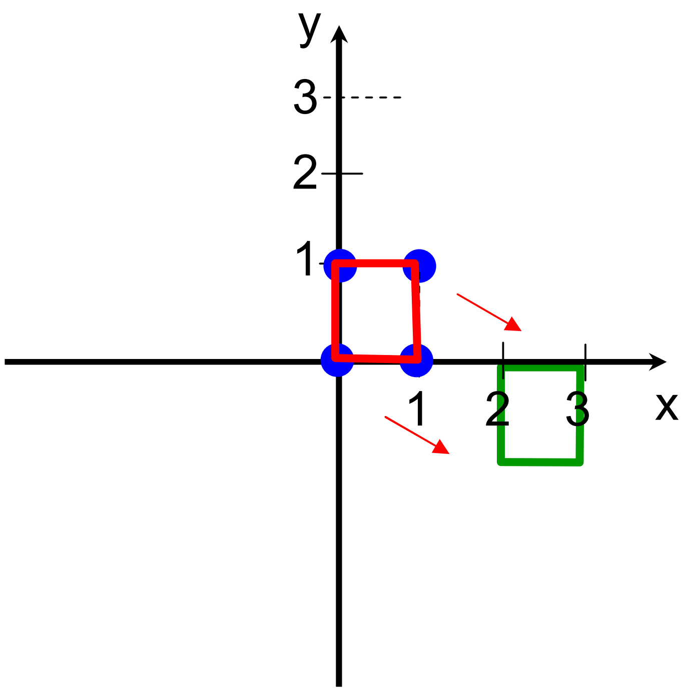
<u>Transformação Translação</u>

Diferente das transformações anteriores, a translação se dá somando uma matriz com os deslocamentos em x e y

$$[x \quad y] + [e \quad f] = [x+e \quad y+f]$$

Transformações Geométricas 2D

Supondo um quadrado, com coordenadas (0,0), (0,1), (1,1) e (1,0), e supondo e = 2 e f = -1, tem-se as coordenadas (2,-1), (2,0), (3,0) e (3,-1)

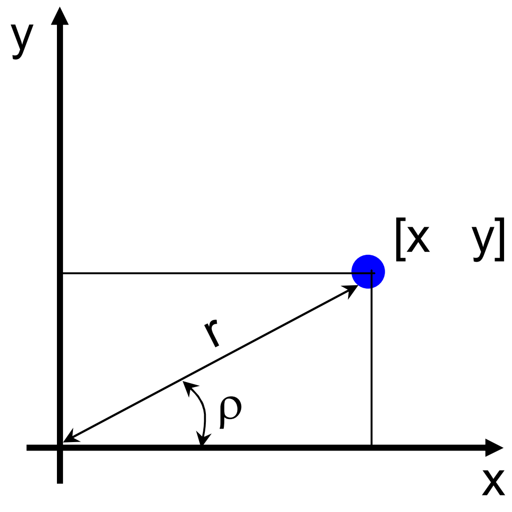


Transformações Geométricas 2D

Transformação Rotação

A rotação de um ponto P ao redor da origem, por um ângulo α pode ser facilmente obtida, usando coordenadas polares.

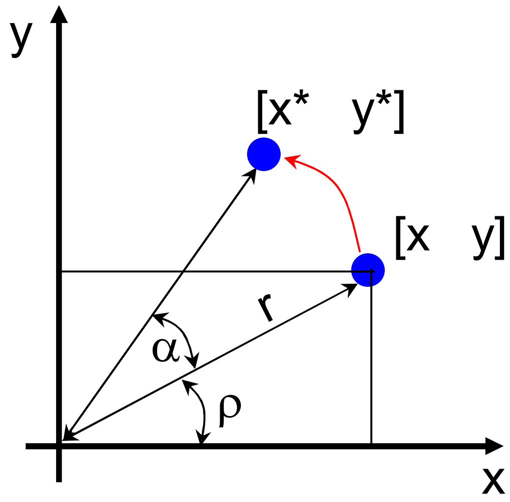
Assim, dado um ponto P = [x   y], em coordenadas polares tem-se P = [r.cosρ r.senρ]



Transformações Geométricas 2D

<u>Transformação Rotação</u>

Para se obter a rotação de P ao redor da origem, por um ângulo α basta somar α à ρ como mostra a figura



Assim, se $P = [r.\cos\rho \ , \ r.\mathrm{sen}\rho]$

então, $P^* = [x^* \quad y^*] = [r.\cos(\rho+\alpha) \ , \ r.\mathrm{sen}(\rho+\alpha)]$

logo, $P^* = [r(\cos\rho.\cos\alpha - \mathrm{sen}\rho.\cos\alpha) \ ,$

$r(\cos\rho.\mathrm{sen}\alpha + \mathrm{sen}\rho.\cos\alpha)]$

$$= [(\underbrace{r.\cos\rho}_{x}.\cos\alpha - \underbrace{r.\mathrm{sen}\rho}_{y}.\mathrm{sen}\alpha) \ ,$$

$$(\underbrace{r.\cos\rho}_{x}.\mathrm{sen}\alpha + \underbrace{r.\mathrm{sen}\rho}_{y}.\cos\alpha)]$$

Transformações Geométricas 2D

Transformação Rotação

Assim, obtem-se que

P*=[x*   y*] = [x.cosα - y.senα , x.senα + y.cosα]

levando a se obter a matriz de transformação T

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Obs. Esta rotação sempre ocorre no sentido anti-horário
Para ir no sentido horário, coloque ângulos negativos

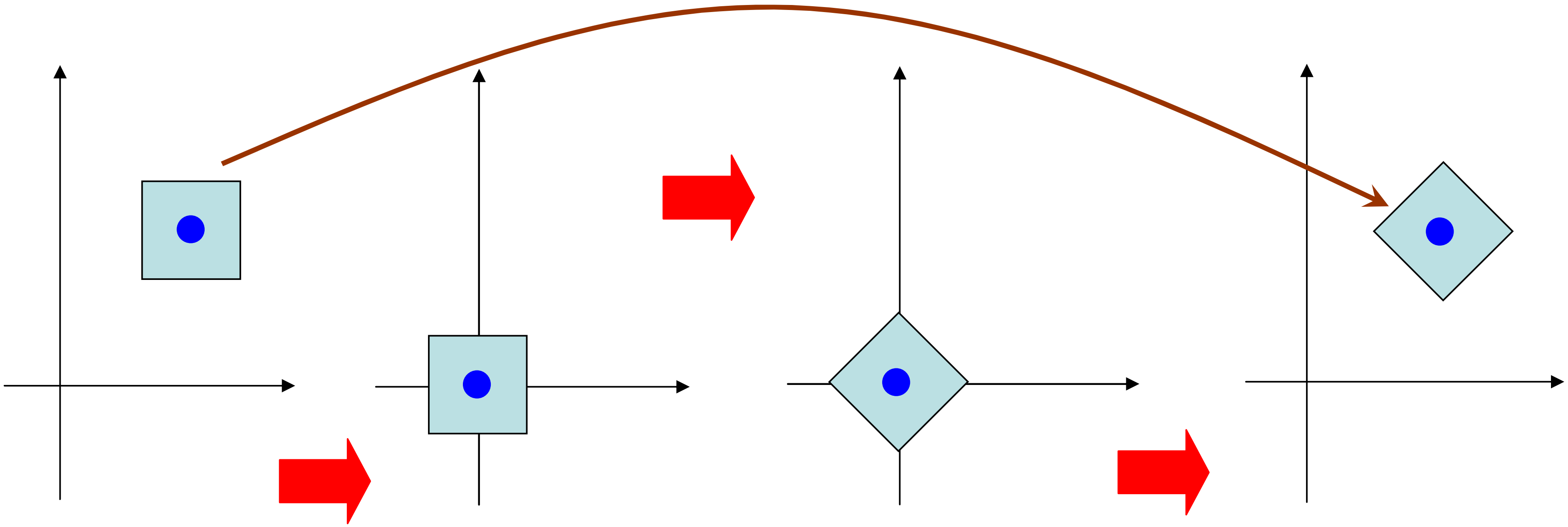
pois

$$P^* = [x \quad y].\begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = [x\cos\alpha - ysen\alpha\,,\ xsen\alpha + y\cos\alpha]$$

Transformações Geométricas 2D

<u>Transformação Rotação</u>

A rotação de um ponto P ao redor de um ponto Q qualquer é feita, transladando o ponto para a origem, rotacionando ele pelo ângulo desejado e transladando ele de volta à posição Q



Transformações Geométricas 2D

<u>Transformações de segmentos de retas</u>

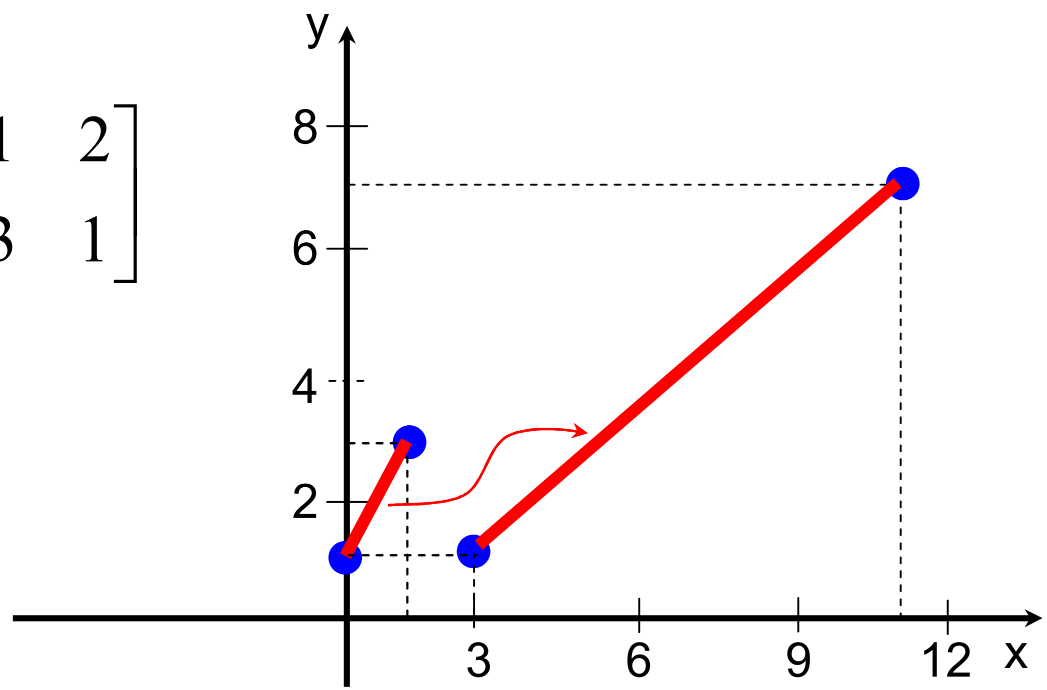
Segmentos de retas podem ser definidos pelos seus pontos extremos

Supondo os Pontos A = [0,1] e B = [2,3], que definem um segmento de reta AB, a transformação T abaixo pode ser aplicada diretamente à matriz contendo os dois pontos, que define o segmento de reta

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz contendo os pontos A e B

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$$



Transformações Geométricas 2D

Transformações de objetos formados por pontos

Objetos mais complexos também podem ser definidos pelos seus pontos extremos

Assim, um triângulo ABC, definido por três pontos, formam uma matriz, como a seguir:

$$\Delta ABC = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

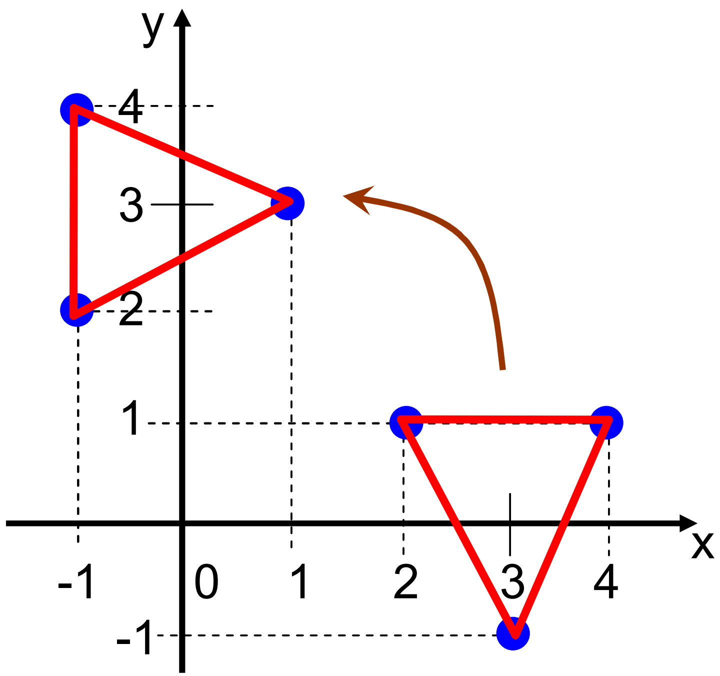
pode ser rotacionado 90º no sentido anti-horário usando a matriz de rotação

$$T = \begin{bmatrix} \cos 90^o & sen 90^o \\ -sen 90^o & \cos 90^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Transformações Geométricas 2D

Transformações de objetos formados por pontos

$$\Delta ABC.[T] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$



Uma rotação de 180º é dada por $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Uma rotação de 270º é dada por $T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Uma rotação de 360º é dada por $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Transformações Geométricas 2D

Transformações Compostas

Na prática, os objetos gráficos são formados por uma grande quantidade (milhões) de pontos (vértices), para se obter uma boa resolução (superfícies bem suaves), assim, é preciso aplicar as transformações em grandes conjuntos de pontos, várias vezes.

Por exemplo, para fazer um objeto ir se afastando do observador, é preciso aplicar uma escala para reduzir ele, uma rotação e uma translação

Para melhorar o desempenho dos algoritmos, é possível juntar todas as transformação em uma única e, então, processar todos os pontos com uma única transformação

Transformações Geométricas 2D

Transformações Compostas

Exemplo **(deseja-se aplicar T1 e depois T2 ao ponto)**

Seja um ponto (x,y) e as matrizes de transformação

$$T1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad [x \quad y].\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = [2x + y \quad x + 3y]$$

$$[2x + y \quad x + 3y].\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = [2x + y + 2(x + 3y) \quad 3(2x + y) + 2(x + 3y)]$$

$$= [4x + 7y \quad 8x + 9y]$$

Logo, a transformação final é equivalente à

$$[x \quad y].\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Transformações Geométricas 2D

Transformações Compostas

Exemplo

que pode ser obtida multiplicando T1 por T2

$$T1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Transformações Geométricas 2D

<u>Transformações Compostas</u>

Para três transformações T1, T2 e T3, a serem aplicadas nesta ordem, faça:

$$M1 = T1 \;.\; T2$$

$$M2 = M1 \;.\; T3$$

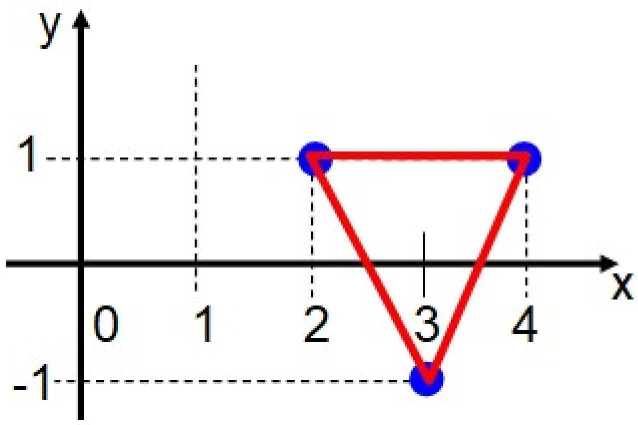
$$\overbrace{\overbrace{T1 \;.\; T2} \;.\; T3}$$

então, M2 é a transformação composta

obs. não inverter a ordem destas operações, pois o produto de matrizes, em geral, não é comutativo

Prática - Entregar agora

1) Dada o triângulo ao lado, aplique a matriz de transformação abaixo e apresente o triângulo em sua posição final



$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0{,}2 & -0{,}8 \end{bmatrix}$$

2) Obtenha uma única matriz de transformação para realizar uma rotação de um objeto 45º sentido anti-horário, ao redor do seu centro c_x,c_y