Подпространства и ранг

Слелин А. В.
a.slelin.work@mail.ru
ЯрГУ им. П. Г. Демидова

Подпространства линейного пространства. Примеры. Ранг и база системы векторов.

Пусть L – произвольное линейное пространство.
Определение 1. Непустое подмножество $L_1 \subset L$ называется *линейным подпространством*, если L_1 замкнуто относительно операций сложения и умножения на число:
1) $\forall x, y \in L_1 \quad x + y \in L_1$;
2) $\forall x \in L_1$ и $\forall \alpha \in \mathrm{R} \quad \alpha x \in L_1$.

Замечание: из второго условия при $\alpha = 0$ сразу следует то, что $0 \in L_1$. Таким образом, все линейные подпространства одного пространства L обязательно содержат общий элемент, а именно нулевой вектор L. Подмножество не содержащее нуля, линейным подпространством не является.

Примеры:

1) Линейным пространством являются $\{0\}$ и всё L. Они называются *несобственными подпространствами* L.

2) Собственные подпространства V_3 – прямые и плоскости, проходящие через т.O.

3) Совокупность L_1 n-мерных векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$, образуют линейное подпространство в $L = \mathrm{R}^n$.

4) Пусть $\mathrm{A} \in M_{m,n}$ – фиксированная матрица. Обозначим через L_1 подмножество пространства $L = \mathrm{R}^n$, состоящее из всех $x = (x_1, \dots, x_n)$ таких, что

$$\mathrm{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

L_1 является линейным подпространством.

5) Совокупности многочленов $\mathrm{R}_j[t]$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, степени $\le j$ составляют цепочку собственных линейных подпространств одного пространства $\mathrm{R}_n[t]$.

6) Каждое из функциональных пространств $C^{\infty}[a, b]$, $C^k[a, b]$, $C[a, b]$ является бесконечномерным подпространством пространства $B[a, b]$ ограниченных на $[a, b]$ функций.

7) Каждое из пространств последовательностей l_1, c_0, c является бесконечномерным линейным подпространством пространства $b = l_{\infty}$ ограниченных последовательностей.

8) Линейная оболочка $L_1 = \mathrm{lin}(x_1, \dots, x_k)$ является конечномерным линейным подпространством L.

Определение 2. Размерность подпространства $L_1 = \mathrm{lin}(x_1, \dots, x_k)$ называется *рангом системы векторов* $x_1, \dots, x_n$, а базис L_1, состоящий из каких-то векторов x_i, называется *базой системы* $x_1, \dots, x_k$.

Прямая сумма подпространства. Теорема о прямой сумме.

Пусть L – произвольное линейное пространство, L_1, L_2 – два его подпространства. Если их сумма $S := L_1 + L_2$ обладает одним из нескольких эквивалентных свойств, то эта сумма является прямой.

Определение 3. Сумма $S = L_1 + L_2$ называется *прямой*, если для любого $x \in S$ представление $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, является единственным.

Теорема 1. Сумма $S = L_1 + L_2$ является прямой тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих эквивалентных условий.

1) $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.

2) $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$.

3) Если $f_1, \dots, f_l$ – базис L_1, $g_1, \dots, g_m$ – базис L_2, то $f_1, \dots, f_l$, $g_1, \dots, g_m$ – базис $L_1 + L_2$.

4) Единственность разложения по L_1 и L_2 имеет место для нулевого вектора: если $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, то обязательно $x_1 = x_2 = 0$.

Утверждение 1. Каждая матрица $\mathrm{A} \in M_n$ единственным образом представляется в виде суммы симметричной B ($b_{ji} = b_{ij}$) и кососимметричной C ($c_{ji} = -c_{ij}$) матриц.

Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерностях суммы и пересечения.

Определение 4. *Сумма* и *пересечение* подпространств L_1, L_2 линейного пространства L определяется следующим образом:

$$L_1 + L_2 := \{x \in L \;:\; x = x_1 + x_2,\ x_i \in L_i,\ i = 1, 2\}, \tag{2}$$

$$L_1 \cap L_2 := \{x \in L \;:\; x \in L_i,\ i = 1, 2\}. \tag{3}$$

Теорема 2. $L_1 + L_2$, $L_1 \cap L_2$ – линейный подпространства L. Если основное пространство L конечномерно, то имеет место равенство

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim L_1 \cap L_2 = \dim L_1 + \dim L_2. \tag{4}$$

Размерность и базис подпространства R^n, задаваемого системой линейных однородных уравнений.

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений (1) с данной матрицей коэффициентов $\mathrm{A} \in M_{m,n}$. Пусть $L \in \mathrm{R}^n$ определяется равенством

$$L := \{x = (x_1, \dots, x_n) \;:\; x \text{ удовлетворяет (1)}\}. \tag{10}$$

Теорема 6. $\dim L = n - \mathrm{rg}(\mathrm{A})$.

С каждой матрицей $\mathrm{A} \in M_{m,n}$ можно связать два линейных подпространства R^n:

1) L_1 – линейная оболочка строк матрицы A. Размерность $\dim L_1 = \mathrm{rg}(\mathrm{A})$. Базис L_1 образует любая система из $r = \mathrm{rg}(\mathrm{A})$ линейно независимых строк.

2) L_2 – подпространство решений системы однородных уравнений. Размерность $\dim L_2 = n - \mathrm{rg}(\mathrm{A})$. Базис L_2 образует фундаментальную систему решений данной системы уравнений.

Ранг матрицы. Теорема о ранге. Свойства ранга матрицы.

Определение 5. *Рангом матрицы* A называется ранг системы её столбцов как элементов R^m, то есть размерность линейной оболочки системы столбцов $X_1, \dots, X_n$:

$$\mathrm{rg}(\mathrm{A}) \;:=\; \mathrm{rg}(X_1, \dots, X_n) \;=\; \dim\ \mathrm{lim}(X_1, \dots, X_n). \tag{5}$$

Теорема 3. Ранг матрицы равен максимальному порядку r отличного от нуля минора этой матрицы.

Следствие 1. Для каждой $\mathrm{A} \in M_{m,n} \quad \mathrm{rg}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A})$.

Свойства:

1) Для $\mathrm{A} \in M_{m,n} \quad \mathrm{rg}(\mathrm{A}) \le \min(m, n)$.

2) Пусть $\mathrm{A} \in M_{m,n}$. $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = n \iff |\mathrm{A}| \ne 0$.

3) Пусть $\mathrm{A} \in M_{m,n}$. Матрица A обратима $\iff \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = n$.

4) Если AB существует, то $\mathrm{rg}(\mathrm{AB}) \le \min\big(\mathrm{rg}(\mathrm{A}), \mathrm{rg}(\mathrm{B})\big)$.

5) Пусть $\mathrm{B} \in M_{m,n}$ и $\mathrm{rg}(\mathrm{B}) = n$. Если AB существует, то $\mathrm{rg}(\mathrm{AB}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A})$. То же – для произведения BA.

6) Для $\mathrm{A} \in M_{m,k}$, $\mathrm{B} \in M_{k,n} \quad \mathrm{rg}(\mathrm{A}) + \mathrm{rg}(\mathrm{B}) \le \mathrm{rg}(\mathrm{AB}) + k$.

7) Для $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in M_{m,n} \quad \mathrm{rg}(\mathrm{A} + \mathrm{B}) \le \mathrm{rg}(\mathrm{A}) + \mathrm{rg}(\mathrm{B})$.

8) Если все произведения существуют, то

$$\mathrm{rg}(\mathrm{AB}) + \mathrm{rg}(\mathrm{BC}) \le \mathrm{rg}(\mathrm{B}) + \mathrm{rg}(\mathrm{ABC}) \tag{6}$$

.

Применение понятия ранга к анализу систем линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли. Критерий определённости.

Пусть дана система m уравнений с n неизвестными $x_1, \dots, x_n$ и матрицей коэффициентов $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in M_{m,n}$:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{7}$$

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – столбцы матрицы A, $\mathbf{b}$ – столбец свободных членов. Обозначим через $\mathrm{A}|\mathbf{b}$ расширенную матрицу системы (7).

Теорема 4. Система (7) является совместной тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{rg}(\mathrm{A}|\mathbf{b}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}). \tag{8}$$

Теорема 5. Система линейных уравнений (7) является определённой тогда и только тогда, когда выполняются одновременно два равенства

$$\mathrm{rg}(\mathrm{A}|\mathbf{b}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = n. \tag{9}$$

Литература

1. *Невский М. В.* Подпространства и ранг. // Лекции по алгебре: Учебное пособие // Ярославль: ЯрГУ, 2002. с. 72 - 85