UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

ANA SOFIA DE MATOS LIMA
NEMUEL LUCAS SEVERO VIEIRA

APROXIMAÇÃO DE DERIVADAS POR DIFERENÇAS FINITAS E IMPLEMENTAÇÃO DA SOMA DE RIEMANN PARA CÁLCULO DE INTEGRAL

JUAZEIRO-BA
2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

ANA SOFIA DE MATOS LIMA
NEMUEL LUCAS SEVERO VIEIRA

APROXIMAÇÃO DE DERIVADAS POR DIFERENÇAS FINITAS E IMPLEMENTAÇÃO DA SOMA DE RIEMANN PARA CÁLCULO DE INTEGRAL

Trabalho apresentado à Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, Campus Tecnológico, como requisito para obtenção de nota na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.
Professor: Carlos Antônio Freitas

JUAZEIRO - BA
2025

RESUMO

Este trabalho aborda métodos numéricos para aproximação de derivadas utilizando diferenças finitas e a implementação da Soma de Riemann para cálculo de integrais. No contexto das diferenças finitas, são apresentados esquemas como diferença progressiva, regressiva e central, cada um com suas respectivas ordens de precisão $\left(O(h)\right)$ ou $\left(O(h^2)\right)$. Além disso, são discutidas fórmulas de alta ordem para derivadas de segunda ordem e quarta ordem ilustradas com exemplos numéricos, como a aproximação da derivada de e^x e da segunda derivada de $\sin(x)$.

Na parte dedicada à Soma de Riemann, o trabalho explica sua definição matemática, métodos para escolha de pontos (esquerdo, direito e médio) e sua aplicação no cálculo de integrais definidas, exemplificando com a função e^{-x^2}. O trabalho destaca a importância desses métodos em áreas como matemática, ciências aplicadas e análise de dados, reforçando sua utilidade prática quando funções são conhecidas apenas por pontos discretos ou não possuem expressões analíticas simples.

Palavras-chave: Diferenças finitas, derivadas numéricas, diferença progressiva, diferença regressiva, diferença central, Soma de Riemann, integração numérica, aproximação de integrais, métodos numéricos, cálculo diferencial e integral.

SUMÁRIO

APROXIMAÇÃO DE DERIVADAS POR DIFERENÇAS FINITAS

1. INTRODUÇÃO

O cálculo de derivadas é fundamental em diversas áreas da matemática e ciências aplicadas. Em muitos casos, não dispomos de uma expressão analítica para a derivada de uma função ou a função é conhecida apenas por meio de pontos discretos. Nesses casos, métodos numéricos, como **diferenças finitas**, são amplamente utilizados para aproximar derivadas.

Neste trabalho, discutiremos os principais esquemas de diferenças finitas para aproximação de derivadas, suas ordens de precisão e exemplos de aplicação.

2. DIFERENÇAS FINITAS

A ideia central do método de diferenças finitas é substituir a derivada de uma função f por uma combinação linear de valores da função em pontos próximos.

2.1. DIFERENÇA PROGRESSIVA (Forward Difference)

Aproxima a derivada utilizando um ponto à frente:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ordem de precisão: $O(h)$.

2.2. DIFERENÇA REGRESSIVA (Backward Difference)

Aproxima a derivada utilizando um ponto atrás:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Ordem de precisão: $O(h)$.

2.3. DIFERENÇA CENTRAL (Central Difference)

Combina os pontos à frente e atrás para maior precisão:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Ordem de precisão: $O(h^2)$.

3. FÓRMULAS DE ALTA ORDEM

Para melhorar a precisão, podemos usar esquemas com mais pontos:

3.1. DIFERENÇA CENTRAL DE SEGUNDA ORDEM PARA $f''(x)$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

3.2. DIFERENÇA PROGRESSIVA DE QUARTA ORDEM PARA $f'(x)$

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}$$

4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Exemplo 1: Aproximação de $f'(x)$ para $f(x) = e^x$ em $x = 1$

- Valor exato: $f'(1) = e^1 = 2.71828$.
- Usando diferença progressiva com $h = 0.1$:

$$f'(1) \approx \frac{e^{1.1} - e^1}{0.1} \approx 2.8588$$

- Usando diferença central com $h = 0.1$:

$$f'(1) \approx \frac{e^{1.1} - e^{0.9}}{0.2} \approx 2.7228$$

Exemplo 2: Aproximação de $f''(x)$ para $f(x) = \sin(x)$ em $x = \frac{\pi}{2}$

- Valor exato: $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
- Usando diferença central com $h = 0.01$:

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 0.01\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 0.01\right)}{0.0001} \approx -0.99998$$

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O método de diferenças finitas é uma ferramenta poderosa para aproximação numérica de derivadas. A escolha do esquema (progressivo, regressivo ou central) e do passo h impacta diretamente na precisão.

SOMA DE RIEMANN PARA CÁLCULO DE INTEGRAL

6. INTRODUÇÃO

A Soma de Riemann é um método fundamental no Cálculo Integral para aproximar a área sob uma curva de uma função em um intervalo definido. Sendo fundamental para fornecer a base teórica para a definição da integral definida. Seu uso vai desde cálculo de áreas e volumes de figuras geométricas até análise de dados e machine learning.

7. DEFINIÇÃO MATEMÁTICA

Dada uma função $f(x)$ contínua em $[a, b]$, dividimos o intervalo em n subintervalos de largura $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$. Em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escolhemos um ponto c_i (pode ser o extremo esquerdo, direito ou o ponto médio). A Soma de Riemann é dada por:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x$$

Quando $n \to \infty$, S_n converge para a integral definida:

$$\lim_{n\to\infty} \quad S_n = \int_a^b f(x)dx$$

8. MÉTODOS DE ESCOLHA DO PONTO c_i

- **Ponto esquerdo:** $c_i = x_i - 1$
- **Ponto direito:** $c_i = x_i$
- **Ponto médio:** $c_i = \frac{(x_{i-1}+x_i)}{2}$

É válido notar que a escolha do ponto médio geralmente fornece uma aproximação mais precisa porque reduz o erro de superestimação/subestimação.

Exemplo: Calcular a **integral definida** da função $f(x) = e^{-x^2}$ no intervalo $[0, 1]$:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

Resolução:

Dividimos o intervalo em quatro partes iguais, logo:

$$\Delta x = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

Obtendo o ponto médio desses intervalos, descobrimos que suas alturas serão:

$$0.125,\ 0.375,\ 0.625 \text{ e } 0.875$$

Assim, podemos calcular a área, chegando em:

$$S_4 = \sum_{i=1}^{4} f(c_i) \cdot \Delta x$$

$$S_4 = \left(e^{-0.125^2} + e^{-0.375^2} + e^{-0.625^2} + e^{-0.875^2}\right) \cdot 0.25$$

$$S_4 \approx (0.984 + 0.868 + 0.677 + 0.472) \cdot 0.25 \approx 0.750$$

REFERÊNCIAS

STEWART, J. *Cálculo - Volume 1.* 8ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise Numérica.* 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

- **Capítulo 4:** Diferenciação Numérica.
- **Obra completa:** 688 p.

ATKINSON, K. E. *An Introduction to Numerical Analysis. 2.* ed. New York: Wiley, 1989.

- **Seção 5.1:** Finite Difference Approximations.
- **Obra completa:** 712 p.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia.* 5. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2008.

- **Capítulo 23:** Diferenciação Numérica.
- **Obra completa:** 839 p.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.* 2. ed. São Paulo: Pearson, 1996.

- **Capítulo 7:** Derivação Numérica.
- **Obra completa:** 406 p.

FORNBERG, B. Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrarily Spaced Grids. *Mathematics of Computation,* v. 51, n. 184, p. 699-706, 1988.

- **DOI:** 10.1090/S0025-5718-1988-0935077-0.

- **Disponível em:** https://www.ams.org/journals/mcom/1988-51-184/S0025-5718-1988-0935077-0/. Acesso em: 10 jul. 2025.

LEVEQUE, R. J. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Philadelphia: SIAM, 2007.

- **Capítulo 1:** Introduction to Finite Differences.
- **Obra completa:** 340 p.

PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing.* 3. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

- **Capítulo 5:** Numerical Derivatives.
- **Obra completa:** 1256 p.