

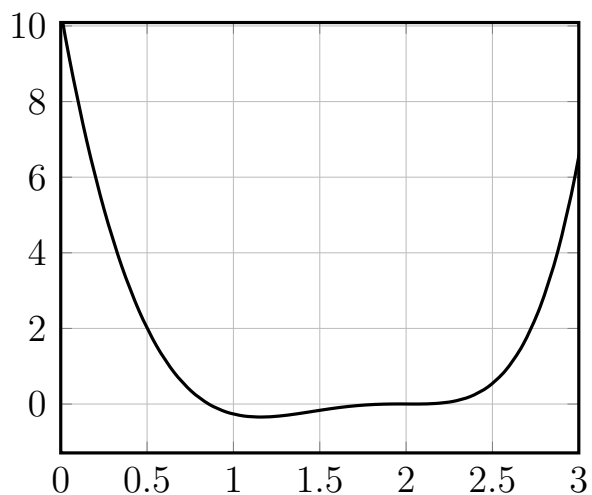
1η Υποχρεωτική Εργασία Στο Μάθημα της Αριθμητικής Ανάλυσης

Ονοματεπώνυμο: Αχιλλέας Στεργιανάς
ΑΕΜ: 3351

Δεκέμβριος 2021

Άσκηση 1

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 14xe^{x-2} - 12e^{x-2} - 7x^3 + 20x^2 - 26x + 12$ στο διάστημα $[0, 3]$ είναι:



α) Μέθοδος Διχοτόμησης

Εφαρμόζω την μέθοδο της διχοτόμησης ξεχωριστά στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[1, 3]$, στα οποία η f είναι συνεχής και εταιρόσημη στα

άκρα.

Με τον τύπο $N > \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2}$ βρίσκω το πλήθος των επαναλήψεων που θα χρειαστούν για σφάλμα ε (στην περίπτωση μας που θέλουμε ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων $\varepsilon = 0.00001$) στο διάστημα $[a, b]$.

Στη συνέχεια σε κάθε επανάληψη βρίσκουμε το μέσο του διαστήματος $[a, b]$ με τον τύπο $m = \frac{a+b}{2}$ και αν $f(m) = 0$ τότε βρήκαμε μια ρίζα και σταματάμε.

Αλλιώς επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στο διάστημα (a, m) αν $f(m) * f(a) < 0$ ή στο διάστημα (m, b) αν $f(m)f(a) \geq 0$.

Στο διάστημα $[0, 1]$ εκτελέστηκαν 17 επαναλήψεις και βρέθηκε η προσεγγιστική ρίζα 0.85714 ενώ στο διάστημα $[1, 3]$ εκτελέστηκε 1 επανάληψη και βρέθηκε η ρίζα 2.

β) Μέθοδος Newton-Raphson

Για την μέθοδο Newton-Raphson χρειαζόμαστε τις f' και f'' οι τύποι των οποίων είναι:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 14xe^{x-2} + 2e^{x-2} - 21x^2 + 40x - 26 \\f''(x) &= 14xe^{x-2} + 16e^{x-2} - 42x + 40\end{aligned}$$

Η μέθοδος Newton-Raphson μπορεί να βρει μόνο τη μία ρίζα της f καθώς οι f' και η f'' μηδενίζουν στη δεύτερη ρίζα που είναι το 2.

Εφαρμόζω την μέθοδο Newton-Raphson στο διάστημα $[0, 1]$ όπου $f', f'' \neq 0$ και $f(0)f(1) < 0$.

Η προσέγγιση της ρίζας θα βρεθεί από το όριο της αναδρομικής ακολουθίας:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, n = 0, 1, \dots$$

Το σφάλμα κατά την προσέγγιση δίνεται από τον τύπο:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2$$

όπου $m = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|, M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

Σε αυτή τη περίπτωση το πρόγραμμα θα τερματίσει όταν το σφάλμα είναι μικρότερο από $\varepsilon = 0.00001$ δηλαδή μετά από 6 επαναλήψεις.

Η προσεγγιστική ρίζα που βρέθηκε είναι η 0.85714.

γ) Μέθοδος Τέμνουσας

Η μέθοδος της τέμνουσας μπορεί να βρει μόνο τη μία ρίζα της f καθώς για τον ίδιο λόγο με την Newton-Raphson.

Εφαρμόζω τη μέθοδο της τέμνουσας το διάστημα $[0, 1]$.

Η προσεγγιστική ρίζα είναι το όριο της αναδρομικής ακολουθίας:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, n = 1, \dots,$$

όπου ως αρχικά σημεία x_0, x_1 της αναδρομικής σχέσης μπορούν να θεωρηθούν για ευκολία τα άκρα του διαστήματος $(0, 1)$, δηλαδή $x_0 = 0, x_1 = 1$.

Η τάξη σύγκλισης της μεθόδου είναι $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.62$.

Σε αυτή τη περίπτωση η προσεγγιστική ρίζα είναι η $x_7 = 0.968625$.

Άσκηση 2

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $54x^6 + 45x^5 - 102x^4 - 69x^3 + 35x^2 + 16x - 4$ στο διάστημα $[-2, 2]$ είναι:

