



# ALGORYTMY ALGEBRY I TEORII LICZB

ZAGADNIENIA NA EGZAMIN

---

*„Zrobię sobie Państwo dużo wrogów, ale i tak zachęcam”*

POPEŁNIONE PRZEZ

CHRZĄSZCZOWY POMP

ANIMOWANY PONTON

POMPONA VANILLA

Kraków

Anno Domini 2025

# Spis treści

|  |           |
|--|-----------|
| <b>A Grupa A</b>   | <b>5</b>  |
| A.1 Opisać rozszerzony algorytm Euklidesa znajdowania NWD . . . . .  | 5         |
| A.2 Opisać binarny algorytm Euklidesa znajdowania NWD . . . . .  | 6         |
| A.3 Opisać algorytmy szyfrowania RSA i Elgamal<br>oraz na czym polega trudność ich łamania . . . . .   | 7         |
| A.3.1 Algorytm RSA . . . . .   | 7         |
| A.3.2 Algorytm Elgamal . . . . .   | 8         |
| A.4 Opisać metodę klucza jednorazowego Vernama, trudność jej łamania i prak-<br>tyczne zastosowanie . . . . .                                  | 8         |
| A.5 Zdefiniować problemy Primes oraz Factoring<br>i podać ich umiejscowienie w klasach złożoności . . . . .                                    | 9         |
| A.5.1 Primes . . . . .   | 9         |
| A.5.2 Factoring . . . . .  | 10        |
| A.6 Podać efektywną metodę znalezienia liczby pierwszej o zadanej liczbie bitów . .  | 10        |
| A.7 Opisać efektywną implementację działań arytmetycznych w ciele skończonym<br>$\mathbb{Z}_p/(w)$ . . . . .                                   | 11        |
| A.8 Opisać ideę algorytmu AKS (Agrawal, Kayal, Saxena) . . . . .   | 11        |
| A.9 Pokazać, że wielomianowy algorytm na problem pierwiastka dyskretnego da się<br>zamienić na wielomianowy algorytm na faktoryzację . . . . . | 12        |
| A.10 Zdefiniować problemy Discrete-Log i Diffie-Hellman, ich miejsce w klasach zło-<br>żoności, opisać protokół Diffie-Hellmana . . . . .      | 13        |
| A.10.1 Discrete-Log . . . . .  | 13        |
| A.10.2 Diffie-Helman . . . . .   | 14        |
| A.11 Podać definicję krzywej eliptycznej i grupy z nią związanej . . . . .   | 14        |
| A.11.1 Działania na krzywej eliptycznej . . . . .  | 14        |
| A.11.2 Grupa krzywej eliptycznej . . . . .   | 15        |
| <b>B Grupa B</b>   | <b>17</b> |
| B.1 Opisać algorytm Karatsuby mnożenia dużych liczb binarnych . . . . .  | 17        |
| B.2 Opisać algorytm Tooma-Cooka mnożenia dużych liczb binarnych . . . . .  | 17        |
| B.3 Zapisać i udowodnić Chińskie Twierdzenie o Resztach . . . . .  | 18        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| B.4      | Zdefiniować pojęcie ideału, pierścienia ilorazowego oraz pokazać, że $\mathbb{Z}_p[X]/(W)$ jest ciałem wtw gdy $W$ jest nierozkładalny . . . . . | 19        |
| B.4.1    | Ideał . . . . .  | 19        |
| B.4.2    | Pierścień ilorazowy . . . . .  | 19        |
| B.5      | Pokazać, że każde ciało skończone ma $p^k$ elementów . . . . .   | 20        |
| B.6      | Opisać algorytm faktoryzacji Fermata . . . . .   | 20        |
| B.7      | Opisać algorytm DSA . . . . .  | 21        |
| B.8      | Opisać metodę Baby-Step-Giant-Step . . . . .   | 23        |
| B.9      | Opisać kryptosystem plecakowy i uzasadnić, dlaczego nie jest stosowany w praktyce . . . . .  | 23        |
| B.10     | Pokazać, że pierwiastki wielomianu $X^{p^k} - X$ stanowią ciało, podać praktyczną metodę generowania ciała skończonego . . . . .                 | 24        |
| B.10.1   | Generowanie ciała skończonego . . . . .  | 25        |
| B.11     | Opisać algorytm Tonellego-Shanksa . . . . .  | 25        |
| <b>C</b> | <b>Grupa C</b> . . . . .   | <b>28</b> |
| C.1      | Opisać algorytm Millera-Rabina . . . . .   | 28        |
| C.2      | Pokazać, że grupa multiplikatywna ciała skończonego jest grupą cykliczną. . . . .  | 30        |
| C.3      | Opisać algorytm „ro” Pollarda na faktoryzację . . . . .  | 30        |
| C.3.1    | Metoda Floyda . . . . .  | 31        |
| C.3.2    | Metoda Brenta . . . . .  | 32        |
| C.4      | Opisać algorytm sita kwadratowego . . . . .  | 32        |
| C.4.1    | Faktoryzacja przez liczby $B$ -gładkie . . . . .   | 32        |
| C.4.2    | Sito kwadratowe . . . . .  | 33        |
| C.4.3    | Metoda Multi Polynomial Quadratic Sieve (MPQS) . . . . .   | 33        |
| C.5      | Opisać algorytm „ro” Pollarda na logarytm dyskretny . . . . .  | 34        |
| C.6      | Opisać algorytm Pohliga-Hellmana . . . . .   | 34        |
| C.7      | Opisać algorytm rachunku indeksów . . . . .  | 36        |
| C.7.1    | Atak Logjam . . . . .  | 37        |
| C.8      | Opisać ideę algorytmu Schönhage-Strassena . . . . .  | 37        |
| C.8.1    | Teoretyczna Transformata Numeryczna (NTT) . . . . .  | 37        |
| C.8.2    | Algorytm Schönhage-Strassena . . . . .   | 37        |
| C.9      | Opisać algorytm Schreiera-Simsa . . . . .  | 39        |
| C.10     | Opisać algorytm Grovera . . . . .  | 39        |
| C.10.1   | Krótko o bramkach . . . . .  | 39        |
| C.11     | Opisać ideę (bez dowodów) algorytmu Shora . . . . .  | 41        |

## Licencja



Ten utwór jest dostępny na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa na tych samych warunkach 4.0 Międzynarodowe.

titlesec chngctr

# Grupa A

## A.1 Opisać rozszerzony algorytm Euklidesa znajdowania NWD

Dla danych  $a, b > 0$  algorytm zwraca  $d = \gcd(a, b)$  oraz liczby całkowite  $s$  i  $t$ , które spełniają  $d = s \cdot a + t \cdot b$ .

Algorytm:

1. Jeśli  $a < b$ , zamień  $a$  i  $b$ .
2. Jeśli  $b = 0$ , zwróć  $d = a$  oraz parę  $(1, 0)$ .
3. Podziel z resztą  $a$  przez  $b$ , otrzymując  $a = q \cdot b + r$ .
4. Wywołaj  $\gcd(b, r)$ , otrzymując  $d$  oraz parę  $(s', t')$  taką, że  $s' \cdot b + t' \cdot r = d$ .
5. Zwróć  $d$  oraz parę  $(t', s' - q \cdot t')$ .

*Algorytm zwraca poprawne  $d = \gcd(a, b)$ .*

*Dowód.* Wystarczy pokazać, że  $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$ , jeśli  $a = q \cdot b + r$ . Niech  $d = \gcd(a, b)$ .

$$a = 0 \pmod{d}$$

$$b = 0 \pmod{d}$$

$$r = a - q \cdot b = 0 \pmod{d}$$

□

*Algorytm zwraca poprawne  $(s, t)$ .*

*Dowód.* Z tożsamości Bézout wiemy, że

$$\forall_{a,b \neq 0} \exists_{s,t} a \cdot s + b \cdot t = \gcd(a, b)$$

Jako krok bazowy indukcji po  $a, b$  sprawdzamy przypadek  $b = 0$ , rzeczywiście  $a \cdot 1 + 0 = \gcd(a, 0)$ .

Niech  $a = q \cdot b + r$ . Korzystając z tego, że  $\gcd(a, b) = \gcd(b, r) = d$ , otrzymujemy:

$$b \cdot s' + r \cdot t' = d$$

$$b \cdot s' + (a - q \cdot b) \cdot t' = d$$

Przyrównując równania, otrzymujemy  $s = t'$ ,  $t = s' - q \cdot t'$ , co było do pokazania.  $\square$

Własności algorytmu:

1. Liczba iteracji: co najwyżej  $\log_{\varphi} a$ , gdzie  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
2. Złożoność:  $\mathcal{O}(\log^2 a)$
3.  $|s| \leq b$ ,  $|t| \leq a$

Ad 1. Dowiedzione na ćwiczeniach w pierwszym zestawie zadań.

Ad 2. Zauważmy, że przy każdym wywołaniu rekurencyjnym przynajmniej jeden z argumentów zmniejsza się o połowę:

Jeśli  $b \leq \frac{a}{2}$ , to  $r < b < \frac{a}{2}$ .

Jeśli  $b > \frac{a}{2}$ , to  $r = a - b < \frac{a}{2}$ .

Złożoność operacji w kroku rekursji to  $\mathcal{O}(\log a)$ , więc cały algorytm ma złożoność  $\mathcal{O}(\log^2 a)$ .

## A.2 Opisać binarny algorytm Euklidesa znajdowania NWD

Dla danych  $a, b > 0$  algorytm zwraca  $\gcd(a, b)$ , wykonując tylko odejmowanie i operacje binarne.

Algorytm:

1. Jeśli  $a < b$ , zamień  $a$  i  $b$ .
2. Jeśli  $2 \mid a$  i  $2 \nmid b$ , zwróć  $\gcd(\frac{a}{2}, b)$ ,
3. Jeśli  $2 \nmid a$  i  $2 \mid b$ , zwróć  $\gcd(a, \frac{b}{2})$ ,
4. Jeśli  $2 \mid a$  i  $2 \mid b$ , zwróć  $2 \cdot \gcd(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ ,
5. Jeśli  $2 \nmid a$  i  $2 \nmid b$ , zwróć  $\gcd(b, a - b)$ .

Algorytm zwraca poprawne  $d = \gcd(a, b)$ .

*Dowód.* Jeśli któryś z argumentów jest nieparzysty (przypadki 2 i 3), to  $2 \nmid \gcd(a, b)$ , dlatego możemy podzielić parzysty argument przez 2.

Jeśli oba argumenty są parzyste (przypadek 4), to  $d = \gcd(a, b)$  też jest parzyste, ponieważ inaczej  $2 \cdot d$  dzieliłoby obie liczby, co byłoby sprzecznością z tym, że  $d$  jest największym dzielnikiem. Dlatego możemy wydzielić 2 i obliczyć  $2 \cdot \gcd(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ .

Jeśli obie liczby są nieparzyste, to obliczamy  $d = \gcd(b, a - b) = \gcd(a, b)$ , ponieważ:

$$a \equiv 0 \pmod{d}$$

$$b \equiv 0 \pmod{d}$$

$$a - b \equiv 0 \pmod{d}$$

□

W każdym z przypadków od 2 do 4, co najmniej jeden z argumentów wywołania rekurencyjnego zmniejsza się o połowę. Takich wywołań jest więc co najwyżej logarytmicznie wiele. Pozostaje do przeanalizowania przypadek 5. Ponieważ  $a$  i  $b$  są nieparzyste, to  $a - b$  jest parzyste, więc w kolejnym wywołaniu wykona się przypadek 2 lub 3. Czyli któryś z argumentów zmniejszy się o połowę w co najwyżej dwóch krokach. To dowodzi złożoności  $\mathcal{O}(\log(a) \cdot M(a))$ , gdzie  $M(a)$  to koszt odejmowania i operacji bitowych, który jest liniowy od długości zapisu liczb.

### A.3 Opisać algorytmy szyfrowania RSA i Elgamał oraz na czym polega trudność ich łamania

Algorytmy RSA i Elgamał są asymetryczne, czyli wykorzystują jawną funkcję szyfrującą  $E$  (klucz publiczny) i tajną funkcję deszyfrującą  $D$  (klucz prywatny). Najważniejszym założeniem jest, że nie potrafimy efektywnie odtworzyć klucza prywatnego z publicznego. Dodatkowo zakładamy, że problem Factoring nie jest w klasie BPP.

#### A.3.1 Algorytm RSA

Algorytm RSA:

1. Oblicz  $N = p \cdot q$  dla wybranych liczb pierwszych  $p, q$ .  
Wtedy  $\varphi(N) = (p - 1) \cdot (q - 1)$ .
2. Wybierz  $e$  względnie pierwsze z  $\varphi(N)$ . Oblicz  $d$  takie, że  $e \cdot d = 1 \pmod{\varphi(N)}$ .
3. Zdefiniuj  $E(x) = x^e \pmod{N}$  oraz  $D(x) = x^d \pmod{N}$ . Kluczem publicznym jest  $(e, n)$ .

Ad 1. Zamiast  $\varphi(N)$  można użyć (rozwiązanie często stosowane) funkcji Carmichaela

$$\lambda(N) = \text{lcm}(p - 1, q - 1)$$

Funkcja  $\lambda$  znajduje najmniejszą liczbę całkowitą  $x$  taką, że  $x^{\lambda(N)} = 1 \pmod{N}$  dla każdego  $x$  względnie pierwszego z  $N$ . Wybór  $\lambda(N)$  zamiast  $\varphi(N)$  nie zmniejsza bezpieczeństwa, a daje zazwyczaj mniejszy wykładnik.

Ad 2. Do znalezienia liczby  $d$  można użyć rozszerzonego algorytmu Euklidesa:

$$e \cdot s + \varphi(N) \cdot t = 1$$

$$s + \varphi(N) \cdot t \cdot e^{-1} = e^{-1} \pmod{\varphi(N)}$$

$$d = s = e^{-1} \pmod{\varphi(N)}$$

Dlaczego deszyfrowanie działa?

Rząd grupy moltiplikatywnej modulo  $N$  jest równy  $\varphi(N)$ , więc dla każdego  $x$  względnie pierwszego z  $N$  zachodzi

$$(x^e)^d = x^{ed} = x,$$

ponieważ  $e \cdot d = 1 \pmod{\varphi(N)}$ , czyli  $e \cdot d$  dzieli rząd grupy moltiplikatywnej modulo  $N$ .

Szyfrowanie RSA można złamać, jeśli wyznaczy się liczby  $p$  i  $q$ , czyli pozna się rozkład  $N$  na czynniki pierwsze. Można wtedy obliczyć  $\varphi(N)$  oraz  $d$  algorytmem Euklidesa. Dlatego tak ważne jest założenie o dużej trudności problemu Factoring. W tym dniu (18.05.2025), nie ma ani dowodu na to, że algorytm rozkładu na czynniki pierwsze nie istnieje, ani dowodu NP-zupełności problemu Factoring.

### A.3.2 Algorytm Elgamal

Algorytm Elgamal:

1. Wybierz jakąś grupę  $G$  (np. grupę moltiplikatywną ciała  $\mathbb{F}_q$ ) oraz element  $g \in G$  (najlepiej generator).
2. Wylosuj liczbę  $x \in \{1, \dots, |G| - 1\}$ .
3. Klucz publiczny to  $(g, g^x)$ , a klucz prywatny to  $(g, x)$ .
4. Szyfrowanie wiadomości  $M$ : wylosuj liczbę  $y$ , wyślij  $(g^y, M \cdot g^{xy})$ .

Otrzymawszy  $(g^y, M \cdot g^{xy})$  i znając klucz prywatny  $x$  łatwo obliczyć  $g^{xy}$ , czyli też odtworzyć  $M = (M \cdot g^{xy}) \cdot g^{-xy}$ . Gdyby odszyfrowanie  $M$  było łatwe, to również problem Diffiego-Hellmana byłby rozwiązywalny, podstawiając  $M = g^{-xy}$ . Jednak tak nie jest, ponieważ znając  $g^x$ ,  $g^y$ , nie potrafimy efektywnie obliczyć  $g^{xy}$  – wymaga to wyznaczenia logarytmu dyskretnego.

## A.4 Opisać metodę klucza jednorazowego Vernama, trudność jej łamania i praktyczne zastosowanie

Osoby A i B mają bezpieczny kanał komunikacji do przesyłania kluczy i niechroniony kanał do zwykłej komunikacji. Osoba A chce przesłać osobie B ciąg bitów  $M$ . Szyfruje go kluczem  $k$



o takiej samej długości za pomocą bitowej operacji XOR:  $E(M) = M \oplus k$ . Osoba A przesyła bezpiecznym kanałem wartość  $k$  oraz normalnym kanałem wartość  $E(M)$ . Żeby osoba B mogła odczytać  $M$  wystarczy, że wykona ponownie operację z kluczem  $k$  na  $E(M)$ , ponieważ

$$(M \oplus k) \oplus k = M \oplus (k \oplus k) = M \oplus 0 = M$$

z łączności operacji XOR.

Przy dobrze wylosowanym (czyli „naprawdę losowym”)  $k$  każdy wynik szyfrowania jest równie prawdopodobny, więc zaszyfrowana wiadomość ma takie same właściwości, co gdyby wylosować osobno każdy bit.

Pozostaje jedno uzasadnione zastrzeżenie – jeśli musimy mieć sposób na bezpieczne przesłanie klucza o długości  $|M|$ , równie dobrze można po prostu przesłać  $M$ . Jednak metoda może być przydatna, jeśli potrzebne jest awaryjne, jednorazowe przesłanie zaszyfrowanej wiadomości i adresaci wcześniej mieli okazję wymienić się kluczem o długości z odpowiednim zapasem. Przy okazji pomysł Vernama dał podstawę współczesnym algorytmom kryptograficznym.

## A.5 Zdefiniować problemy Primes oraz Factoring i podać ich umiejscowienie w klasach złożoności

### A.5.1 Primes

**Wejście:** Liczba  $p$

**Problem:** Czy  $p$  jest liczbą pierwszą?

**Klasa złożoności:** P

Primes  $\in$  coNP:

Jeśli otrzymamy od wyroczni  $d$  potencjalny dzielnik  $p$ , możemy w wielomianowym czasie sprawdzić, czy  $d$  rzeczywiście jest dzielnikiem i odpowiedzieć NIE na pytanie o pierwszość.

Primes  $\in$  NP:

Korzystamy z tego, że  $\mathbb{Z}_p^*$  ma rząd równy  $p - 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $p$  jest pierwsze.

Jeśli otrzymamy od wyroczni  $g$ , generator  $\mathbb{Z}_p^*$  oraz rozkład liczby  $p - 1$  na czynniki pierwsze  $p - 1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ , możemy:

- rekurencyjnie sprawdzić pierwszość  $p_i$ .  
(Nie trzeba uwzględniać potęg  $p_i$ , ponieważ jeśli  $p_i$  nie przejdzie testu, to potęgi  $p_i$  tym bardziej.)
- sprawdzić, czy  $g^{p-1} = 1 \pmod{p}$ .
- sprawdzić, czy  $g^{\frac{p-1}{p_i}} \neq 1 \pmod{p}$ .

Jeżeli wszystkie z powyższych warunków są spełnione, to odpowiedzią jest TAK.

Primes  $\in$  BPP:

Dowodem jest algorytm Millera-Rabina, który myli się przy odpowiedzi TAK z prawdopodobieństwem nie większym niż  $\frac{1}{2}$ .

Primes  $\in$  P:

Dowodem jest algorytm Agrawala-Kayala-Saxena (AKS).

## A.5.2 Factoring

**Wejście:** Liczby  $n, k$

**Problem:** Czy istnieje nietrywialny dzielnik  $n$  mniejszy lub równy  $k$ ?

**Klasa złożoności:**  $NP \cap coNP$ ?

Factoring  $\in$  NP:

Jeśli otrzymamy od wyroczni  $2 \leq d \leq k$  potencjalny dzielnik  $n$ , możemy w wielomianowym czasie sprawdzić, czy  $d$  rzeczywiście jest dzielnikiem i odpowiedzieć TAK.

Factoring  $\in$  coNP:

Otrzymujemy od wyroczni rozkład liczby  $n$  na czynniki pierwsze  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ . Sprawdzamy, czy  $p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} = n$  oraz czy każde  $p_i$  jest pierwsze albo algorytmem AKS, albo niedeterministycznie z pomocą wyroczni. Jeśli poprawność rozkładu się potwierdzi, to odpowiedzią jest  $(p_1 \leq k)$  ? TAK : NIE, gdzie  $p_1$  to najmniejszy z dzielników.

Na ten moment nie potrafimy powiedzieć więcej o tym problemie.

## A.6 Podać efektywną metodę znalezienia liczby pierwszej o zadanej liczbie bitów

Dla zadanej liczby  $k$  chcemy znaleźć liczbę pierwszą  $p \in [2^k, 2^{k+1} - 1]$ .

Liczby pierwsze są dość gęsto upakowane – w przedziale od 1 do  $n$  jest asymptotycznie  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{\log n}\right)$  liczb pierwszych. Zatem w przedziale  $[2^k, 2^{k+1} - 1]$  jest ich około

$$\mathcal{O}\left(\frac{2^{k+1} - 1}{k + 1} - \frac{2^k - 1}{k}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{2^k(1 - \frac{1}{k}) - 1}{k + 1}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{2^k}{k}\right)$$

Możemy więc po prostu losować liczbę całkowitą  $p$  z przedziału  $[2^k, 2^{k+1} - 1]$ , dopóki nie trafi się liczba pierwsza. Skoro w przedziale jest  $\mathcal{O}(2^k)$  liczb całkowitych, z których  $\mathcal{O}\left(\frac{2^k}{k}\right)$  jest liczbami pierwszymi, to w oczekiwaniu po  $\mathcal{O}(k)$  losowaniach trafimy na liczbę pierwszą. Sprawdzanie, czy liczba jest pierwsza, wykonuje się w czasie  $\mathcal{O}(k^3)$ , więc oczekiwana złożoność algorytmu losowania liczby pierwszej to  $\mathcal{O}(k^4)$ .

## A.7 Opisać efektywną implementację działań arytmetycznych w ciele skończonym $\mathbb{Z}_p/(w)$

Jeśli  $w$  jest wielomianem nierozkładalnym stopnia  $n$ , to elementy elementy  $\mathbb{Z}_p/(w)$  to wielomiany stopnia co najwyżej  $n$  nad  $\mathbb{Z}_p$ .

- Dodawanie –  $\mathcal{O}(n)$   
Dodajemy po współrzędnych modulo  $p$ .
- Mnożenie –  $\mathcal{O}(n^2)$  lub lepiej  
Wykonujemy zwykłe mnożenie z wynikiem modulo  $w$ . Można przyspieszyć tę operację algorytmem Karatsuby, Tooma-Cooka lub Schönhage-Strassena do  $\mathcal{O}(n \log n)$ .
- Dzielenie –  $\mathcal{O}(n^2)$   
Obliczamy odwrotność rozszerzonym algorytmem Euklidesa, korzystając z tego, że wszystkie wielomiany w  $\mathbb{Z}_p/(w)$  są względnie pierwsze z  $w$ . Następnie mnożymy przez odwrotność.

## A.8 Opisać ideę algorytmu AKS (Agrawal, Kayal, Saxena)

Algorytm opiera się na poniższym twierdzeniu:

**Twierdzenie A.8.1.** Niech  $n, a \in \mathbb{Z}$  będą liczbami względnie pierwszymi. Równość

$$(X + a)^n = X^n + a \pmod{n}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $n$  jest liczbą pierwszą.

*Szkic dowodu.* Jeśli  $n$  jest liczbą pierwszą, to wszystkie współczynniki  $\binom{n}{k}$  dla  $0 < k < n$  są podzielne przez  $n$ , więc  $(X + a)^n = X^n + a^n \pmod{n}$  oraz z małego twierdzenia Fermata wiemy, że  $a^n = a \pmod{n}$ .

Jeśli  $n$  nie jest liczbą pierwszą, to któryś współczynnik  $\binom{n}{k}$  nie jest podzielny przez  $n$ , więc wielomian  $(X + a)^n$  zawiera wyraz  $\binom{n}{k} X^k a^{n-k}$ , gdzie  $k$  jest najmniejszym dzielnikiem  $n$ .  $\square$

Ponieważ obliczenie  $(X + a)^n$  jest zbyt czasochłonne, przenosimy się do pierścienia ilorazowego  $\mathbb{Z}_n[X]/(X^r - 1)$  dla pewnego  $r$  takiego, że rząd  $n$  modulo  $r$  jest wysoki, co najmniej  $\log^2 n$ . Przeprowadzenie testu dla jednego  $a$  nie wystarczy, ale potrzeba pierwiastkowo-logarytmicznie mało powtórzeń.

Algorytm AKS:

1. Jeśli  $n = m^k$  dla  $k \geq 2$ , zwróć ZŁOŻONA.
2. Znajdź najmniejsze  $r$  takie, że rząd  $n$  modulo  $r$  jest większy od  $\log^2 n$ .
3. Jeśli  $1 < \gcd(a, n) < n$  dla jakiegoś  $a \leq r$ , zwróć ZŁOŻONA.
4. Jeśli  $n \leq r$ , zwróć PIERWSZA.
5. Dla  $1 \leq a \leq \sqrt{r} \log n$  sprawdź równość:

$$(X + a)^n = X^n + a \pmod{(p, X^r - 1)}$$

Jeśli równość nie zachodzi, zwróć ZŁOŻONA.

6. Zwróć PIERWSZA.

(W kolorze wyróżniony jest właściwy algorytm. Pozostałe kroki obsługują przypadki brzegowe.)

### Złożoność

Sprawdzamy  $\mathcal{O}(\sqrt{r} \log n)$  równań na wielomianach stopnia  $r$  każde w  $\tilde{\mathcal{O}}(r \log^2 n)$  krokach, co daje złożoność  $\tilde{\mathcal{O}}(r^{3/2} \log^3 n) = \tilde{\mathcal{O}}(\log^{10.5} n)$ .

Panowie Lenstry i Pomerance przyspieszyli algorytm AKS do  $\tilde{\mathcal{O}}(\log^6 n)$ .

## A.9 Pokazać, że wielomianowy algorytm na problem pierwiastka dyskretnego da się zamienić na wielomianowy algorytm na faktoryzację

Pomysł na wykorzystanie algorytmu wyznaczania pierwiastka dyskretnego opiera się na tym, że możemy sprowadzić faktoryzację  $n$  do szukania nietrywialnych rozwiązań  $x^2 = y^2 \pmod n$ .

**Lemat A.9.1.** Niech  $n$  będzie nieparzystą liczbą złożoną, nie potęgą liczby pierwszej. Dla dowolnego  $s$  równanie:

$$x^2 = s \pmod n,$$

jeśli ma jakiegokolwiek rozwiązanie, to ma co najmniej 4 różne.

*Dowód.* Przedstawmy liczbę  $n$  jako  $n = p \cdot q$ , gdzie  $p, q$  są względnie pierwsze. Jeśli  $x$  jest rozwiązaniem równania postaci  $x^2 = s \pmod p$ , to  $-x$  również. Zapiszmy kongruencje:

$$x^2 = s \pmod p$$

$$x^2 = s \pmod q$$

Z Chińskiego Twierdzenia o Resztach wynika, że rozwiązań oryginalnego równania jest co naj-

mniej tyle, ile wynosi iloczyn liczby rozwiązań poszczególnych równań w powyższym układzie, czyli  $2 \cdot 2 = 4$ .  $\square$

To wystarczy, żeby skonstruować algorytm.

Algorytm na faktoryzację:

1. Wylosuj  $x < n$  i oblicz  $s = x^2 \pmod{n}$ .
2. Oblicz  $y = \text{sqrt}(s, n)$ .
3. Jeśli  $x \neq \pm y$ , to  $\gcd(x + y, n)$  lub  $\gcd(x - y, n)$  jest nietrywialnym dzielnikiem  $n$ .
4. Jeśli  $x = y$  lub  $x = -y$ , powtórz losowanie.

(Funkcja  $\text{sqrt}(x, n)$  to czarna skrzynka, która oblicza lub zgaduje w czasie wielomianowym pierwiastek z liczby  $x$  modulo  $n$ .)

Algorytm działa poprawnie, bo skoro  $x^2 = y^2 \pmod{n}$ , to  $n \mid (x + y)(x - y)$ . W każdej iteracji szansa na znalezienie nietrywialnego dzielnika jest równa  $\frac{1}{2}$ , ponieważ tyle wynosi prawdopodobieństwo, że wylosowaliśmy  $x \neq \pm y$ , przy losowym wyborze  $x$ , czyli każde z 4 rozwiązań  $y^2 = s \pmod{n}$  było równie prawdopodobne.

Podsumowując, gdyby algorytm Tonellego-Shanksa działał na grupie  $\mathbb{Z}_n$  dla dowolnej liczby całkowitej  $n$ , to dałoby się w czasie wielomianowym rozłożyć  $n$  na czynniki pierwsze.

## A.10 Zdefiniować problemy Discrete-Log i Diffie-Hellman, ich miejsce w klasach złożoności, opisać protokół Diffiego-Hellmana

Niech  $G = \langle g \rangle$  będzie pewną grupą cykliczną o znanym nam generatorze.

### A.10.1 Discrete-Log

**Wejście:**  $a \in G$

**Wyjście:**  $x$  takie, że  $g^x = a$

Discrete-Log  $\in$  NP:

Jeśli otrzymamy od wyroczni  $x$ , możemy sprawdzić, czy  $g^x = a$ .

W kryptografii zakładamy, że Discrete-Log  $\notin$  P oraz Discrete-Log  $\notin$  BPP, ale nie jest to udowodnione. Nie wiadomo też, czy ten problem jest NP-trudny.

## A.10.2 Diffie-Helman

**Wejście:**  $g^x, g^y$

**Wyjście:**  $g^{xy}$

Diffie-Helman  $\in$  NP:

Jeśli otrzymamy od wyroczni  $x$ , po sprawdzeniu z  $g^x$ , możemy obliczyć  $(g^y)^x = g^{xy}$ .

Tak jak w poprzednim przypadku, nie ma dowodu, że Diffie-Helman  $\notin$  P. Wiemy natomiast, że za pomocą Discrete-Log możemy rozwiązać problem Diffiego-Helmana.

### Protokół Diffiego-Helmana:

Korespondenci uzgadniają klucz symetryczny – jeden z nich ustala swój klucz prywatny  $x$ , drugi  $y$ , po czym publicznym kanałem wraz z wiadomością przesyłają  $g^x$  oraz  $g^y$ . Kluczem deszyfrującym wiadomość jest  $g^{xy}$ .

## A.11 Podać definicję krzywej eliptycznej i grupy z nią związanej

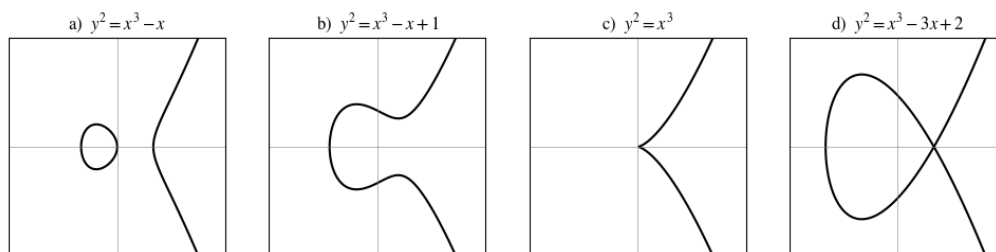
**Definicja A.11.1.** Krzywa eliptyczna to zbiór rozwiązań  $(x, y)$  w pewnym ciele  $\mathbb{F}$  równania:

$$y^2 + a_1xy + a_2y = x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3,$$

które można sprowadzić do postaci Weierstrassa:

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

Chcemy, żeby krzywa była „gładka” (nie jak Rys. A.1d) i nie miała „ostrza” (nie jak Rys. A.1c), czyli formalnie, żeby wyznacznik krzywej  $\Delta = 4a^3 + 27b^2$  był różny od 0.

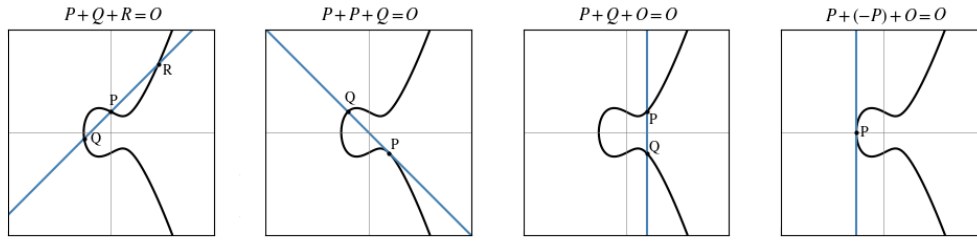


Rysunek A.1: Możliwe kształty krzywych eliptycznych w  $\mathbb{R}^2$

### A.11.1 Działania na krzywej eliptycznej

Jeśli punkt  $P = (x, y)$  leży na krzywej eliptycznej, to  $-P = (x, -y)$  również. Jeśli  $P$  i  $Q$  są punktami na krzywej eliptycznej, to prosta  $PQ$  przecina krzywą jeszcze w jednym punkcie  $R$ .

Ustalamy, że  $P + Q + R = O$ , gdzie  $O$  jest sztucznym punktem, który leży „w nieskończoności”.



Rysunek A.2: Możliwe przecięcia prostej z krzywą eliptyczną

Jeżeli  $Q = P$ , traktujemy punkt  $P$  trochę jak podwójny pierwiastek wielomianu, który odbija się od osi, nie przecinając jej. Za prostą  $PQ$  przyjmujemy wtedy styczną do krzywej w  $P$  (Rys. A.2b).

Jeżeli  $Q = -P$ , przyjmujemy, że  $P + Q = P + (-P) = O$  oraz  $P + O = P$  (Rys. A.2c).

Podsumowując:

**Definicja A.11.2** (Dodawanie). Jeśli  $P, Q$  są punktami na krzywej eliptycznej, to punkt  $R$  przecięcia prostej  $PQ$  z krzywą daje wynik dodawania  $P + Q = -R$ . Jeśli prosta  $PQ$  nie przecina krzywej w dodatkowym punkcie, to  $P + Q = O$ .

Ponieważ mnożenie wymaga stałej liczby operacji, to dla dowolnego punktu  $P$  oraz liczby  $k$  można obliczyć  $k \cdot P$  w  $\mathcal{O}(\log k)$  operacjach arytmetycznych w ciele, stosując coś w rodzaju szybkiego potęgowania.

## A.11.2 Grupa krzywej eliptycznej

Dodawanie punktów na krzywej jest przemienne i (co nieoczywiste) łączne, więc otrzymujemy grupę przemienną.

Najczęściej używa się krzywych:

- nad  $\mathbb{Z}_p$ , gdzie  $p$  jest dużą liczbą pierwszą,
- nad ciałem  $\text{GF}(2^s)$ .

**Twierdzenie A.11.1.** Niech  $\mathbb{F}$  będzie ciałem,  $|\mathbb{F}| = q$  oraz niech  $E$  będzie grupą dla pewnej krzywej eliptycznej nad  $\mathbb{F}$ . Grupa  $E$  jest albo grupą cykliczną, albo produktem dwóch grup cyklicznych.

Pozostawiamy to twierdzenie bez dowodu.

Rozmiar grupy  $|E|$  może być rozumiany jako liczba rozwiązań równania opisującego krzywą. Dla każdego  $x \in \mathbb{F}$  wartość  $x^3 + ax + b$  jest resztą kwadratową z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$ . Jeśli uda się trafić, to otrzymamy dwa możliwe  $y$ , więc punktów powinno być blisko  $q$ .

Dokładnie, z twierdzenie Hassego:

$$q - 2\sqrt{q} + 1 \leq |E| \leq q + 2\sqrt{q} + 1$$



# Grupa B

## B.1 Opisać algorytm Karatsuby mnożenia dużych liczb binarnych

Algorytm mnożenia Karatsuby opiera się o technikę „dziel i zwyciężaj”. Chcemy pomnożyć  $n$ -cyfrowe liczby  $A$  oraz  $B$  zapisane w systemie binarnym. Zakładamy, że  $n$  jest potęgą dwójki (zawsze można dodać zera wiodące).

Zapisujemy liczby w postaci:

$$A = A_1 \cdot K + A_0,$$

$$B = B_1 \cdot K + B_0,$$

gdzie  $K = 2^{\frac{n}{2}}$ . Zauważmy teraz, że

$$A \cdot B = A_1 B_1 \cdot K^2 + (A_0 B_1 + A_1 B_0) \cdot K + A_0 B_0$$

Mnożenie przez  $K$  to po prostu przesunięcie bitowe, więc możemy wykonać je w czasie  $\mathcal{O}(n)$ , podobnie dodawanie. Korzystając z obserwacji, że:

$$A_0 B_1 + A_1 B_0 = (A_0 + A_1) \cdot (B_0 + B_1) - A_0 B_0 - A_1 B_1$$

pozostają nam do wykonania 3 rekurencyjne mnożenia:  $A_0 B_0$ ,  $A_1 B_1$  i  $(A_0 + A_1) \cdot (B_0 + B_1)$ . W ten sposób otrzymujemy  $T(n) = 3 \cdot T(\frac{n}{2}) + \mathcal{O}(n)$ , więc z Uniwersalnego Twierdzenia o Rekurencji złożoność algorytmu Karatsuby wynosi  $\mathcal{O}(n^{\log_2 3}) \approx \mathcal{O}(n^{1.59})$ .

## B.2 Opisać algorytm Tooma-Cooka mnożenia dużych liczb binarnych

Omówimy algorytm w wersji Toom- $m$  z przykładem dla  $m = 3$ . Chcemy pomnożyć  $n$ -cyfrowe liczby  $A$  oraz  $B$  zapisane w systemie binarnym. Rozkładamy je podobnie jak w algorytmie Karatsuby, tym razem na  $K = 2^{n/m}$  składników:

$$A = A_{m-1} \cdot K^{m-1} + \dots + A_1 \cdot K + A_0$$

$$B = B_{m-1} \cdot K^{m-1} + \dots + B_1 \cdot K + B_0$$

Traktujemy tak zapisane liczby jak wielomiany:

$$\mathcal{A}(X) = A_{m-1} \cdot X^{m-1} + \dots + A_1 \cdot X + A_0$$

$$\mathcal{B}(X) = B_{m-1} \cdot X^{m-1} + \dots + B_1 \cdot X + B_0$$

Wtedy wynikiem mnożenia, którego szukamy, będzie  $\mathcal{C}(K) = \mathcal{A}(K) \cdot \mathcal{B}(K)$ . Ponieważ wielomian  $\mathcal{C}$  jest stopnia  $2m - 2$ , obliczamy wartości wielomianów  $\mathcal{A}(X)$  i  $\mathcal{B}(X)$  w  $2m - 1$  punktach. Następnie mnożymy punktowo i interpolujemy  $\mathcal{C}$ , korzystając z twierdzenia, że dla dowolnych wielomianów  $f, g$  zachodzi:

$$f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$$

Wartość wielomianu w punkcie obliczamy w czasie  $\mathcal{O}(n)$ .

Przyjrzyjmy się złożoności całego algorytmu dla  $m = 3$ . Dzielimy  $A$  i  $B$  na 3 części i interpretujemy je jako wielomiany  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{B}$  stopnia 2. Wyznaczamy wartości tych wielomianów w 5 wybranych punktach rekurencyjnie na liczbach długości  $\frac{n}{3}$ . To daje złożoność  $T(n) = 5T(\frac{n}{3}) + \mathcal{O}(n)$ , czyli  $T(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_3 5}) \approx \mathcal{O}(n^{1.46})$ .

## B.3 Zapisać i udowodnić Chińskie Twierdzenie o Resztach

**Twierdzenie B.3.1** (Chińskie Twierdzenie o Resztach). Dla parami względnie pierwszych liczb całkowitych  $m_1, \dots, m_k \geq 1$ ,  $M = m_1 \cdot \dots \cdot m_k$  oraz liczb  $a_1, \dots, a_k$ , gdzie  $0 \leq a_i \leq m_i$ , układ kongruencji:

$$x = a_1 \pmod{m_1}$$

$$\dots$$

$$x = a_k \pmod{m_k}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie  $x < M$ .

*Dowód.* Trzeba udowodnić, że rozwiązanie istnieje oraz że wszystkie rozwiązania przystają do siebie modulo  $M$ .

### Istnienie<sup>1</sup>

Korzystamy z twierdzenia Bézout, które mówi, że dla względnie pierwszych liczb całkowitych  $x, y$  istnieją takie liczby całkowite  $a$  i  $b$ , że  $ax + by = 1$ .

Definiujemy  $M_i = \frac{M}{m_i}$ , wtedy  $M_i$  oraz  $m_i$  są względnie pierwsze oraz istnieją takie liczby  $B_i, b_i$ , że  $B_i M_i + b_i m_i = 1$ . Możemy zatem skonstruować rozwiązanie:

$$x = \sum_{i=1}^k a_i B_i M_i$$

---

<sup>1</sup>Dowód został zaczerpnięty z „Chinese remainder theorem”, Wikipedia.

Rozwiązanie rzeczywiście spełnia układ kongruencji, ponieważ:

$$a_i B_i M_i = 0 \pmod{m_j} \text{ dla } i \neq j$$

$$a_i B_i M_i = a_i(1 - b_i m_i) = a_i \pmod{m_i}$$

### Jedyność

Założmy, że istnieją dwa rozwiązania  $x$  oraz  $y$ , które są różne modulo  $M$ . Wiemy, że zachodzi:

$$x = a_i \pmod{m_i}$$

$$y = a_i \pmod{m_i}$$

Zatem otrzymujemy  $x - y = 0 \pmod{m_i}$ . Skoro  $m_i$  są parami względnie pierwsze, to zachodzi  $x - y = 0 \pmod{M}$ . Ponieważ  $x, y < M$ , to musi zachodzić  $x = y$ .  $\square$

## B.4 Zdefiniować pojęcie ideału, pierścienia ilorazowego oraz pokazać, że $\mathbb{Z}_p[X]/(W)$ jest ciałem wtw gdy $W$ jest nierozkładalny

### B.4.1 Ideał

Jeżeli  $R$  jest pierścieniem, to  $I \subseteq R$  jest ideałem wtedy i tylko wtedy, gdy:

- $x, y \in I \implies x + y \in I$  (zamknięcie na sumę)
- $x \in I, y \in R \implies y \cdot x \in I$  (własność wciągania – silniejsza niż zamkniętość na mnożenie)

Definicję ideału można uogólnić na więcej elementów – ideał  $I \subseteq R$  generowany przez elementy  $(a_1, \dots, a_s)$  to:

$$\{x_1 a_1 + \dots + x_s a_s : a_1, \dots, a_s \in I, x_1, \dots, x_s \in R\}$$

zbiór sum wszystkich wielokrotności elementów  $a_1, \dots, a_s$ .

Ideałem głównym nazywamy ideał generowany przez jeden element. Przykładowo zbiór liczb całkowitych jest pierścieniem ideałów głównych, czyli każdy jego ideał jest ideałem głównym.

### B.4.2 Pierścień ilorazowy

Definiujemy relację równoważności  $R$  następująco:

$$x \sim y \iff x - y \in I$$

Pierścień ilorazowy to zbiór klas abstrakcji  $R/I = \{[x]_\sim : x \in R\} = \{x + I : x \in R\}$ .

Mniej formalnie mówimy po prostu o operacjach modulo ideał  $I$ .

Przykładem pierścienia ilorazowego jest pierścień  $\mathbb{Z}$  z ideałem głównym  $n\mathbb{Z} = \{n \cdot x : x \in \mathbb{Z}\}$ , dla pewnego  $n$ . Wtedy pierścień ilorazowy  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  to pierścień liczb całkowitych z działaniami modulo  $n$ .

**Twierdzenie B.4.1.** Pierścień  $\mathbb{Z}_p[X]/(W)$  jest ciałem wtw, gdy  $W$  jest nierozkładalny, czyli nie daje się przedstawić jako iloczyn wielomianów stopnia co najmniej 1.

*Dowód.* Pierścień  $\mathbb{Z}_p[X]/(W)$  jest ciałem  $\implies W$  jest nierozkładalny

Założmy nie wprost, że  $\mathbb{Z}_p[X]/W$  jest ciałem oraz  $W$  jest rozkładalny, czyli można zapisać  $W = g_1 \cdot g_2$ , gdzie  $1 < \deg(g_1), \deg(g_2) < \deg(W)$ . Wynika z tego, że  $g_1 \cdot g_2 = 0$ , czyli są dzielnikami zera w tym ciele. Nie mają więc odwrotności względem mnożenia, co daje sprzeczność.

*Pierścień  $\mathbb{Z}_p[X]/(W)$  jest ciałem  $\Leftarrow W$  jest nierozkładalny*

Wiemy, że  $\mathbb{Z}_p[X]/W$  jest pierścieniem. Wystarczy pokazać, że każdy wielomian  $g$  stopnia mniejszego niż  $W$  ma odwrotność. Skoro  $W$  jest nierozkładalny, to  $\gcd(g, W) = 1$ . Możemy więc zastosować rozszerzony algorytm Euklidesa do znajdowania odwrotności  $g$ , która istnieje dla każdego  $g \neq 0$ , zatem  $\mathbb{Z}_p[X]/W$  jest ciałem.  $\square$

## B.5 Pokazać, że każde ciało skończone ma $p^k$ elementów

**Twierdzenie B.5.1.** Ciało skończone  $\mathbb{F}$  o charakterystyce  $p$  ma  $p^k$  elementów dla pewnego  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Dowód.* Wiedząc, że  $\mathbb{Z}_p$  jest ciałem, możemy wprowadzić mnożenie przez element z  $\mathbb{Z}_p$  elementów z ciała  $\mathbb{F}$ :

$$a \cdot x = \underbrace{x + x + \dots + x}_a, \quad a \in \mathbb{Z}_p, \quad x \in \mathbb{F}$$

Definiujemy w ten sposób przestrzeń liniową  $\mathbb{F}$  nad  $\mathbb{Z}_p$ , jako że mamy dodawanie oraz mnożenie przez skalar. Nasza przestrzeń liniowa ma skończony wymiar  $k$  oraz bazę  $x_1, \dots, x_k$ .

Każdy element  $x \in \mathbb{F}$  możemy zapisać jako:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k$$

Różne ciągi  $(a_1, \dots, a_k)$  dają różne elementy  $\mathbb{F}$  z definicji bazy. Stąd liczba elementów  $\mathbb{F}$  jest równa liczbie ciągów  $(a_1, \dots, a_k)$ , czyli  $p^k$ .  $\square$

## B.6 Opisać algorytm faktoryzacji Fermata

Celem jest rozłożyć liczbę  $n$  na czynniki pierwsze. Zakładamy, że  $n$  jest nieparzysta (można wydzielić największą potęgę 2) i nie jest liczbą pierwszą. Podsumowując,  $n = p \cdot q$ , gdzie  $p, q$  są nieparzyste. Bez straty ogólności przyjmujemy, że  $p > q$ . Definiujemy  $a = \frac{p+q}{2}$  oraz  $b = \frac{p-q}{2}$ .

Wtedy:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b) = p \cdot q = n$$

Zatem jeśli znajdziemy  $a$  takie, że  $a^2 - n = b^2$ , gdzie  $b^2$  jest dowolnym kwadratem liczby naturalnej, to możemy łatwo wyliczyć  $p$  oraz  $q$ .

Algorytm faktoryzacji Fermata:

1. Przypisz  $a = \lceil \sqrt{n} \rceil$ .
2. Jeśli istnieje  $b \in \mathbb{N}$  takie, że  $b^2 = a^2 - n$ , to zwróć dzielniki  $p = a + b$ ,  $q = a - b$ .
3. Wpp powtórz procedurę dla  $a = a + 1$ .

**Złożoność:**

Algorytm znajduje rozkład  $n$  na dwa czynniki po około  $a - \sqrt{n}$  krokach, bo trzeba sprawdzić po kolei przypadki dla  $\sqrt{n}, \dots, a$ , każdy w  $\Theta(1)$ . Całkowita liczba operacji jest równa:

$$a - \sqrt{n} = \frac{a^2 - n}{a + \sqrt{n}} = \frac{b^2}{a + \sqrt{n}} \leq \frac{b^2}{\sqrt{n}} = \frac{(p - q)^2}{4\sqrt{n}}$$

Pesymistyczna złożoność algorytmu to  $\mathcal{O}(n)$ . Jednak przy małej różnicy  $|p - q|$  algorytm działa szybko, a dla  $|p - q| \leq \sqrt[4]{n}$  nawet w czasie stałym.

Wniosek jest taki, żeby do RSA nie używać liczb pierwszych położonych blisko siebie.

## B.7 Opisać algorytm DSA

**Digital Signature Algorithm (DSA)** służy do generowania podpisu cyfrowego – mając wiadomość  $M$  oraz klucz prywatny chcemy wygenerować podpis, czyli obliczyć wartość pewnej funkcji na  $M$ , którą może sprawdzić każdy, kto dysponuje kluczem publicznym. Bez klucza prywatnego powinno być trudno wygenerować podpis przechodzący pomyślnie weryfikację.

Algorytm składa się z następujących etapów:

Przygotowanie:

1. Wybieramy duże liczby pierwsze  $p$  i  $q$  takie, że  $q \mid (p - 1)$ . Zaleca się  $p$  o długości 2048 lub 3072 bitów i  $q$  o długości 256 bitów.
2. Znajdujemy element  $\zeta$ , który jest równy  $q$  modulo  $p$ . Możemy wylosować  $\xi$ , po czym ustalić

$$\zeta = \xi^{\frac{p-1}{q}}$$

Wtedy otrzymujemy

$$\zeta^q = \xi^{p-1} = 1 \pmod{p},$$

czyli rząd  $\zeta$  rzeczywiście jest równy  $q$ , bo  $q$  jest liczbą pierwszą, więc rząd nie może być mniejszy.

Wartości  $p$ ,  $q$  oraz  $\zeta$  są publiczne, wszyscy mogą ich używać (dokładnie tych samych).

Generowanie klucza:

1. Losujemy  $x$  i obliczamy  $y = \zeta^x \pmod p$ .
2. Wartość  $x$  jest kluczem prywatnym, a wartość  $y$  kluczem publicznym.

Odzyskanie klucza prywatnego wymaga rozwiązania logarytmu dyskretnego w grupie  $\mathbb{Z}_p^*$ .

Podpisywanie wiadomości:

1. Obliczamy hash  $H$  wiadomości  $M$ , np. za pomocą SHA-2.
2. Losujemy  $k$  z  $\{2, \dots, q-1\}$ .
3. Podpisem jest para  $(r, s)$ , gdzie:

$$r = (\zeta^k \pmod p) \pmod q$$

$$s = \frac{H + x \cdot r}{k} \pmod q$$

Weryfikacja podpisu:

1. Obliczamy

$$\alpha = \frac{H}{s} \pmod q,$$

$$\beta = \frac{r}{s} \pmod q,$$

$$\gamma = (\zeta^\alpha \cdot y^\beta \pmod p) \pmod q$$

2. Jeśli  $\gamma = r$ , to podpis się zgadza.

Algorytm działa poprawnie.

*Dowód.* Definiujemy  $w = (H + x \cdot r)^{-1} \pmod q$ , a wtedy  $\alpha = H \cdot k \cdot w \pmod q$  oraz  $\beta = r \cdot k \cdot w \pmod q$ . Element  $\zeta$  jest dobrany tak, że ma rząd  $q$  modulo  $p$ , czyli dla dowolnego  $t$  zachodzi

$$\zeta^t \pmod p = \zeta^{t \pmod q} \pmod p$$

$$\gamma = (\zeta^\alpha y^\beta \pmod p) \pmod q = (\zeta^{Hkw \pmod q} (\zeta^x)^{rkw} \pmod p) \pmod q = \zeta^{kw \cdot (H + xr) \pmod q} \pmod p, q$$

Z definicji  $w$  jest odwrotnością  $(H + x \cdot r)$  modulo  $q$ , zachodzi więc  $\gamma = (\zeta^k \pmod p) \pmod q$ , co (ponownie z definicji) jest równe  $r$ .  $\square$

## B.8 Opisać metodę Baby-Step-Giant-Step

Algorytm Baby-Step-Giant-Step służy do rozwiązywania problemu logarytmu dyskretnego w czasie wykładniczym około  $\sqrt{G}$ , czyli prawie najlepszym osiągalnym aktualnie dla ludzkości.

W pewnej grupie  $G$  dla zadanych  $a, b \in G$ , chcemy obliczyć  $x$ , spełniające  $a^x = b$ .

Algorytm Baby-Step-Giant-Step:

1. Ustal  $s = \lceil \sqrt{|G|} \rceil$ .
2. Oblicz  $A = \{a^0, \dots, a^{s-1}\}$ .
3. Oblicz  $B = \{b \cdot a^{-s}, \dots, b \cdot a^{-(s-1)s}\}$ .
4. Jeśli  $A \cap B = \emptyset$ , nie ma rozwiązania.
5. Wybierz  $u, v$  takie, że  $b \cdot a^{-us} = a^v \in A \cap B$ .
6. Zwróć  $x = u \cdot s + v$ .

Wadą tej metody jest złożoność pamięciowa równa czasowej, czyli  $\Theta(\sqrt{|G|})$ .

## B.9 Opisać kryptosystem plecakowy i uzasadnić, dlaczego nie jest stosowany w praktyce

Kryptosystem plecakowy jest systemem kryptograficznym opartym na założeniu o trudności problemu Subset-Sum.

### Problem Subset-Sum

**Wejście:** Zbiór  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  oraz liczba  $s$

**Wyjście:** Czy istnieje taki zbiór  $A \subseteq V$ , że  $\sum_{a \in A} a = s$ ?

**Klasa złożoności:** NP (problem NP-zupełny)

Problem Subset-Sum jest jednak łatwy do rozwiązania, jeśli  $v_1, \dots, v_n$  tworzą ciąg nadrosnący, czyli  $v_i > v_{i-1} + \dots + v_1$ . W takim przypadku działa liniowy algorytm zachłanny, ponieważ jeśli  $v_i \leq s$  jest największym elementem nie przekraczającym  $s$ , to musi zostać wybrany, bo  $v_1 + \dots + v_{i-1} < s$ .

W kryptosystemie plecakowym ustalamy nadrosnący ciąg  $v_1, \dots, v_n$ , liczbę  $m > v_1 + \dots + v_n$  oraz  $a$  względnie pierwsze z  $m$ . Konstruujemy ciąg  $w_1, \dots, w_n$ , obliczając  $w_i = a \cdot v_i \bmod m$ , który posłuży za klucz publiczny.

### Szyfrowanie:

Chcąc zaszyfrować bity  $b_1, \dots, b_n$ , obliczamy i wysyłamy  $s = \sum_i w_i \cdot b_i$ . Odtworzenie wartości  $b_i$  jest równoznaczne z wyborem podzbioru  $\{w_1, \dots, w_n\}$ , który sumuje się do  $s$ .

**Deszyfrowanie:**

Otrzymawszy  $s$ , obliczamy odwrotność  $a$  modulo  $m$  i otrzymujemy równanie:

$$s \cdot a^{-1} = \sum_i b_i \cdot v_i \pmod{m}$$

Ponieważ  $m > \sum_i v_i$ , rozwiązanie można znaleźć wspomnianym algorytmem zachłannym.

Kryptosystem plecakowy można jednak złamać, ponieważ wielokrotność ciągu nadrosnącego jest szczególnym przypadkiem problemu Subset-Sum, który można rozwiązać w czasie wielomianowym, jak udowodnił Adi Shamir w 1982.

## B.10 Pokazać, że pierwiastki wielomianu $X^{p^k} - X$ stanowią ciało, podać praktyczną metodę generowania ciała skończonego

**Twierdzenie B.10.1.** Dane jest ciało  $\mathbb{F}$  charakterystyki  $p$  oraz liczba  $q = p^k$  dla pewnego  $k$ . Jeśli wielomian  $f(X) = X^q - X$  ma  $q$  pierwiastków, to stanowią one  $q$ -elementowe podciało  $\mathbb{F}$ .

*Dowód.* Niech  $A = \{a \in \mathbb{F} : f(a) = 0\} = \{a \in \mathbb{F} : a^q = a\}$  będzie rozważanym zbiorem wszystkich pierwiastków. Wystarczy pokazać, że  $A$  jest zamknięty na działania, bo inne aksjomaty ciała (łączność, przemienność, rozdzielność, etc.) wynikają z faktu, że cały czas pracujemy w  $\mathbb{F}$ , które od początku je spełniało.

- Elementy neutralne:  $0, 1 \in A$
- Element  $-1 \in A$ :  
 $(-1)^q = -1$  (również dla  $p = 2$ )
- Elementy odwrotne:  
 $(a^{-1})^q \cdot a = (a^{-1})^q \cdot a^q = 1$ , czyli  $(a^{-1})^q = a^{-1} \in A$
- Zamkniętość na mnożenie:  
 $(a \cdot b)^q = a^q \cdot b^q = a \cdot b$   
W szczególności, jeśli  $a \in A$ , to  $-a = -1 \cdot a \in A$ .

- Zamkniętość na dodawanie:  
Najpierw udowodnimy, że w  $\mathbb{F}$  zachodzi  $(a + b)^p = a^p + b^p$  dla dowolnych  $a, b$ .  
Wiemy, że:

$$(a + b)^p = a^p + \dots + \binom{p}{i} a^{p-i} b^i + \dots + b^p$$

Wszystkie współczynniki  $\binom{p}{i}$  dla  $1 \leq i < p$  są podzielne przez  $p$ , bo licznik jest równy  $p!$  a mianownik jest niepodzielny przez  $p$ , czyli w ciele charakterystyki  $p$  wszystkie składniki oprócz  $a^p, b^p$  są równe 0.



Korzystając z tego, że  $q = p^k$ , dostajemy:

$$(a+b)^q = ((a+b)^p)^{p^{k-1}} = (a^p + b^p)^{p^{k-1}} = (a^{p^2} + b^{p^2})^{p^{k-2}} = \dots = a^{p^k} + b^{p^k} = a^q + b^q = a+b$$

□

### B.10.1 Generowanie ciała skończonego

Archiwalne niezweryfikowane rozwiązanie do drugiej części pytania:

Generowanie innych grup o liczności  $p^k$  – po prostu strzelamy w wielomian stopnia  $k$  i sprawdzamy, czy jest nierozkładalny i mamy na to bardzo dużą szansę.

## B.11 Opisać algorytm Tonellego-Shanksa

Algorytm Tonellego-Shanksa służy do obliczania pierwiastka dyskretnego w czasie wielomianowym randomizowanym.

**Lemat B.11.1.** Grupa cykliczna  $G$  o liczbie elementów  $n = 2m$ , zawiera dokładnie  $m$  kwadratów, a każdy kwadrat ma dokładnie dwa pierwiastki.

*Dowód.* Zauważmy, że każdy element grupy  $G$  należy do zbioru  $\{g^0, g^1, \dots, g^{2m-1}\}$ , czyli traktujemy potęgi generatora modulo  $2m$ . Do rozważenia są dwa przypadki:

1.  $a$  jest parzystą potęgą generatora:

Wtedy pierwiastkami  $a = g^{2k}$  są  $g^k$  oraz  $g^{k+m}$ , ponieważ

$$(g^k)^2 = g^{2k} = a$$

$$(g^{k+m})^2 = g^{2k+2m} = g^{2k} = a$$

Element  $a$  nie ma też żadnego innego pierwiastka.

2.  $a$  jest nieparzystą potęgą generatora:

Dla dowodu nie wprost, założmy że istnieje  $b = g^j$ , które jest pierwiastkiem  $a = g^{2k+1}$ .

Wtedy

$$b^2 = g^{2j} = g^{2k+1},$$

czyli  $2j = 2k + 1 \pmod{2m}$ , co prowadzi do sprzeczności.

Zatem tylko parzyste potęgi generatora są kwadratami.

□

**Lemat B.11.2.** Niech  $G$  będzie grupą cykliczną o  $n = 2m$  elementach. Element  $a$  jest kwadratem w  $G$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a^m = 1$ .

*Dowód.* Jeśli  $a$  jest kwadratem, to  $a^m = 1$ .

Z lematu B.11.1 wynika, że jeśli  $a$  jest kwadratem, to musi być postaci  $a = g^{2k}$ . Zatem

$$a^m = (g^{2k})^m = g^{2m \cdot k} = g^0 = 1$$

Jeśli  $a$  nie jest kwadratem, to  $a^m \neq 1$ .

Z lematu B.11.1 wynika, że  $a$  jest postaci  $a = g^{2k+1}$  dla pewnego nieparzystego  $k$ . Zatem

$$g^{(2k+1)m} = g^{2m \cdot k} \cdot g^m = g^m = \xi = -1,$$

ponieważ rząd  $g$  jest równy  $2m$ . □

Tak przygotowani możemy przejść do algorytmu: Mając grupę  $G$  o liczności  $|G| = n = 2m$  oraz dane na wejściu  $a \in G$ , celem jest znaleźć  $x$  takie, że  $x^2 = a$  w grupie  $G$ .

Algorytm Tonellego-Shanksa:

1. Wylosuj  $z$  takie, że  $z^m \neq 1$ .
2. Przypisz  $q = m$ ,  $t = 2m$ .
3. Dopóki  $2 \nmid q$ :
  - (a) Zaktualizuj  $q = q/2$ ,  $t = t/2$ .
  - (b) Jeśli  $a^q \cdot z^t \neq 1$ , to zaktualizuj  $t = t + m$ .
4. Zwróć  $a^{\frac{q+1}{2}} \cdot z^{\frac{t}{2}}$ .

Algorytm zachowuje niezmienniki:

- $a^q \cdot z^t = 1$
- Jeśli  $2^k \mid q$ , to  $2^{k+1} \mid t$ .

Początkowo  $a^q = z^t = 1$  oraz  $t = 2q$ . Z pierwszego niezmiennika wiadomo, że  $a^{\frac{q}{2}} \cdot z^{\frac{t}{2}} = \pm 1$ , ponieważ kwadrat tej liczby jest jedyneką. Jeśli  $a^{\frac{q}{2}} \cdot z^{\frac{t}{2}} = 1$ , to możemy podzielić  $q$ ,  $t$  przez 2 i niezmiennik pozostaje zachowany. Jeśli  $a^{\frac{q}{2}} \cdot z^{\frac{t}{2}} = \xi$ , to

$$a^{\frac{q}{2}} \cdot z^{\frac{t}{2}+m} = (a^{\frac{q}{2}} \cdot z^{\frac{t}{2}}) \cdot z^m = \xi \cdot \xi = 1$$

Korzystamy z tego, że  $m$  niezmiennie jest wielokrotnością  $2q$ .

Ostateczny wynik to:

$$x^2 = a^{q+1} \cdot z^t = a \cdot (a^q \cdot z^t) = a$$

Algorytm wykonuje  $\mathcal{O}(\log n)$  iteracji, bo po tylu dzieleniach  $q$  staje się nieparzyste, więc jest to algorytm wielomianowy. Z lematu B.11.1 wynika, że przy losowaniu  $z$  znajdziemy niekwadrat z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$ , czyli w oczekiwaniu po stałej liczbie kroków będzie można przejść do kroku 2. Nie potrafimy zdeterminizować tego kroku, ponieważ gdyby dało się znaleźć niekwadrat bez losowania, czyli policzyć pierwiastek dyskretny deterministycznie, to również można by deterministycznie rozłożyć liczbę na czynniki pierwsze (patrz: pytanie A.9).

# Grupa C

## C.1 Opisać algorytm Millera-Rabina

Jak wiadomo, każda liczba pierwsza  $p$  spełnia Małe Twierdzenie Fermata:

$$a^{p-1} = 1 \pmod{p}$$

Byłby to dobry test pierwszości przy wylosowanej bazie  $a$ , gdyby nie to, że liczba złożona też może go zdać dla pewnych szczególnych  $a$ . Algorytm Millera-Rabina rozwiązuje, a przynajmniej minimalizuje ten problem.

Zanim algorytm, parę kluczowych spostrzeżeń. W grupie  $\mathbb{Z}_p$  równanie  $x^2 = 1 \pmod{p}$  ma dokładnie dwa rozwiązania:  $1$  oraz  $p - 1 = -1$ .

Mając  $a$  takie, że  $a^{n-1} = 1 \pmod{n}$ , wynika z tego, że:

- jeśli  $a^{\frac{n-1}{2}} \neq \pm 1$ , to mamy dowód, że  $n$  jest liczbą złożoną.
- jeśli  $a^{\frac{n-1}{2}} = -1 \pmod{n}$ , to  $a$  nie nada się na świadka niepierwszości  $n$ .
- jeśli  $a^{\frac{n-1}{2}} = 1 \pmod{n}$ , to możemy powtórzyć sprawdzenie dla  $a^{\frac{n-1}{4}}$ .

Składając powyższe przypadki w całość, otrzymujemy algorytm.

Algorytm Millera-Rabina:

1. Znajdź  $s$  i nieparzyste  $k$ , dla których  $n - 1 = k \cdot 2^s$ .
2. Wylosuj  $a \in \{2, \dots, p - 1\}$ .
3. Oblicz  $(r_1, \dots, r_s) = (a^k, a^{2k}, \dots, a^{2^{s-1}k}, a^{n-1})$ .
4. Jeśli  $(r_1, \dots, r_s) = (1, \dots, 1)$ , zwróć PIERWSZA.
5. Jeśli  $(r_1, \dots, r_s) = (\dots, -1, 1, \dots, 1)$ , zwróć PIERWSZA.
6. Zwróć ZŁOŻONA.

Jeśli algorytm zwraca ZŁOŻONA, na pewno jest to poprawna odpowiedź. W przeciwnym wypadku prawdopodobieństwo pomyłki jest nie większe niż  $\frac{1}{2}$ , w praktyce mniejsze od  $\frac{1}{4}$ .

**Lemat C.1.1.** Niech  $n$  będzie liczbą złożoną. Dla losowego  $a$  liczba  $n$  nie przechodzi testu Millera-Rabina z prawdopodobieństwem co najmniej  $\frac{1}{2}$ .

*Dowód.* Rozważamy dwa przypadki:

- $n = p^k$  jest potęgą liczby pierwszej  $p$ .

*Podobno będzie opublikowane.*

- $n$  nie jest potęgą liczby pierwszej

Zapisujemy  $n = pq$ , gdzie liczby  $p, q > 1$  są względnie pierwsze. Dla grupy

$$\mathbb{Z}_n^* = \{a : 1 \leq a < n, \gcd(a, n) = 1\}$$

dobieramy takie  $m = \frac{n-1}{2^t}$  dla pewnego  $t$ , żeby jakieś  $a \in \mathbb{Z}_n^*$  nie spełniało  $a^m = 1$ . Sprawdzając  $m = n-1, \frac{n-1}{2}, \dots, \frac{n-1}{2^t}$ , w końcu znajdziemy odpowiednie  $m$ . Oznaczmy któreś z  $a$  takich, że  $a^m \neq 1$  przez  $\alpha$ . Gdyby takie  $m$  nie istniało, oznaczałoby to, że  $n-1$  jest nieparzyste, a wtedy dla  $a = -1$  na pewno  $a^{\frac{n-1}{2}} = -1 \neq 1$ .

Wybieramy największe takie  $m$  – albo  $m = n-1$ , albo  $a^{2m} = 1$  dla każdego  $a \in \mathbb{Z}_n^*$ .

Wykażemy, że istnieje  $\beta$  takie, że  $\beta^m \neq \pm 1$ . Jeśli  $\alpha^m \neq -1$ , to mamy  $\beta = \alpha$ . W przeciwnym przypadku rozwiązujemy układ równań:

$$\beta = 1 \pmod{p}$$

$$\beta = \alpha \pmod{q}$$

Chińskie Twierdzenie o Resztach zapewnia istnienie rozwiązania modulo  $pq = n$ . Wtedy  $\beta^m = 1 \pmod{p}$  oraz  $\beta^m = \alpha^m = -1 \pmod{q}$ . Zatem niemożliwe, żeby  $\beta^m$  przystawało do 1 lub do  $-1$  modulo  $n$ .

Ustalamy zbiór  $M = \{a : a^m = \pm 1\}$ , który stanowi podgrupę  $\mathbb{Z}_n^*$ , ponieważ jest podzbiorem elementów odwracalnych zamkniętym na mnożenie. Wiadomo też, że  $M \subsetneq \mathbb{Z}_n^*$ , ponieważ  $\beta \in \mathbb{Z}_n^* \setminus M$ . Rząd  $M$  musi więc dzielić rząd  $\mathbb{Z}_n^*$ , w szczególności  $|M| < \frac{n-1}{2}$ . Zatem losując  $a \in \{1, \dots, n-1\}$  trafimy na  $a \notin M$  z prawdopodobieństwem co najmniej  $\frac{1}{2}$ . Taka podstawa  $a$  świadczy o niepierwszości  $n$ , ponieważ dla  $m = n-1$  albo  $a^{n-1} = 1$ , albo  $a^{2m} = 1$  i  $a^m \neq \pm 1$ , co jest wychwytywane przez algorytm.

□

Oczywiście można uzyskać jeszcze lepszą wiarygodność, powtarzając test dla kilku  $a$ , na przykład 12 kolejnych liczb pierwszych.

Złożoność jednego powtórzenia algorytmu to  $\mathcal{O}(\log^3(n))$ , ponieważ trzeba wykonać  $\mathcal{O}(\log(n))$  mnożeń na liczbach o długości  $\log(n)$ . Można zrobić to szybciej, używając FFT.

## C.2 Pokazać, że grupa multiplikatywna ciała skończonego jest grupą cykliczną.

**Twierdzenie C.2.1.** Dla ciała skończonego  $\mathbb{F}_q$  istnieje taki generator  $g$ , że  $\mathbb{F}_q^* = \{1, g, g^2, \dots\}$ .

*Dowód.* Oznaczmy  $n = |\mathbb{F}_q^*| = q - 1$ . Definiujemy zbiory:

$$A_d = \{a \in \mathbb{F}_q : a^d = 1\}$$

$$B_d = \left\{a \in \mathbb{F}_q : a^d = 1, a^{d'} \neq 1 \text{ dla } d' < d\right\}$$

czyli  $B_d$  zawiera elementy, których rząd jest równy  $d$ . Widać, że  $B_d \subseteq A_d$ .

Z twierdzenia Lagrange'a wynika, że  $B_d$  może być niepusty tylko dla  $d$  będącego dzielnikiem  $n$ , a także  $\sum_{d|n} |B_d| = n$ , bo każdy element należy do któregoś  $B_d$ . Celem jest pokazanie, że  $B_n \neq \emptyset$ , czyli istnieje element rzędu  $n$ .

Jeśli dla pewnego  $d$  zachodzi  $B_d \neq \emptyset$ , to  $|A_d| \geq d$ , bo jeśli pewne  $a^d = 1$ , to również  $(a^j)^d = 1$  dla  $0 \leq j < d$ . Z drugiej strony,  $|A_d| \leq d$ , bo wielomian  $X^d - 1$  może mieć co najwyżej  $d$  pierwiastków. Zatem jeśli istnieje element rzędu  $d$ , to  $|A_d| = d$  oraz  $|B_d| = \varphi(d)$ . Na ćwiczeniach udowodniliśmy, że jeśli istnieje jakiś generator, to można znaleźć  $\varphi(d)$  generatorów. Podsumowując, dla każdego  $d$  zachodzi jedna z dwóch możliwości:

- $|B_d| = 0$
- $|B_d| = \varphi(d)$

Wynika stąd, że

$$n = \sum_{d|n} |B_d| \leq \sum_{d|n} \varphi(d),$$

przy czym jeśli chociaż jedno  $d$  ma  $B_d = \emptyset$ , to nierówność jest ostra.

Wiemy jednak, że  $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ , ponieważ możemy rozważyć wszystkie  $n$  ułamków właściwych postaci  $\frac{k}{n}$  dla  $1 \leq k \leq n$ . Po skróceniu mają postać  $\frac{k'}{d}$ , gdzie  $d | n$  oraz  $k'$  jest względnie pierwsze z  $d$ , więc dokładnie  $\varphi(d)$  ułamków ma taki mianownik. To dowodzi równości.

Zatem nierówność nie może być ostra i zachodzi  $B_d \neq \emptyset$  dla każdego  $d | n$ , w szczególności istnieje element rzędu  $n$ . □

## C.3 Opisać algorytm „ro” Pollarda na faktoryzację

Celem jest rozłożyć na czynniki liczbę złożoną  $n$ . Załóżmy, że  $p$  jest jakimś jej dzielnikiem pierwszym oraz  $p \leq \sqrt{n}$ . Wybieramy pewną łatwo obliczalną funkcję (wielomian niskiego stopnia), niech to będzie  $f(x) = x^2 + 1$ . Chcemy zbadać ciąg  $x_0 = 2, x_k = f(x_{k-1})$ . Zakładamy, że wartości będą się rozkładały równomiernie modulo  $n$ . Ciąg powinien się zapętlić po około

$\sqrt{n}$  krokach. Przypuszczamy jednak, że uda się to zaobserwować już wcześniej, po około  $\sqrt{p}$  krokach.

Jeśli uda się znaleźć  $x_i = x_j \pmod{p}$ , to  $\gcd(x_i - x_j, n)$  powinno być nietrywialnym dzielnikiem  $n$ , ponieważ wykonaliśmy zbyt mało kroków, żeby  $n \mid (x_i - x_j)$ . Jeśli powstanie cykl modulo  $p$  o długości  $s$ , to taka sytuacja będzie się powtarzać dla dowolnych  $x_i, x_{i+s}$ . Nie można jednak co krok sprawdzać dla wszystkich  $x_{i < j}$  przystawania do  $x_j$ . Zamiast tego, żeby wykryć długość  $s$  cyklu, wykorzystujemy metodę Floyda lub Brenta.

Podsumowując, algorytm poszukiwania nietrywialnego dzielnika dla zadanej liczby złożonej  $n$  wygląda tak:

Algorytm Pollarda:

1. Jeśli  $2 \mid n$ , zwróć 2.
2. Zdefiniuj  $x = x_0, y = x_0, d = 1$ .
3. Dopóki  $d$  jest trywialny:
  - (a) Oblicz  $x = f(x) \pmod{n}, y = f(f(y)) \pmod{n}$ .
  - (b) Oblicz  $d = \gcd(x - y, n)$ .
4. Jeśli  $d \neq n$ , zwróć  $d$ .
5. Powtórz procedurę od kroku 2, losując nowe  $x_0$  oraz funkcję  $f$ .

### Złożoność

Zapętlenie oraz wyłapanie tego wymaga w oczekiwaniu około  $\sqrt{p} + s \leq 2\sqrt{p} = \mathcal{O}(\sqrt[4]{n})$  kroków. Jeśli algorytm zakończy się powodzeniem, po tylu krokach  $\gcd(x_{2k} - x_k, n)$  będzie dzielnikiem  $n$ . Są jednak dwa scenariusze niepowodzenia:

- Wyrazy ciągu mogą nie powtórzyć się wystarczająco szybko
  - przerywamy procedurę po  $5\sqrt[4]{n}$  krokach.
- Ciąg zapętlił się modulo  $p$  oraz modulo  $n$ , czyli  $\gcd(x_i - x_j, n) = n$ 
  - od razu przerywamy procedurę.

### C.3.1 Metoda Floyda

Pomysł polega na tym, żeby w każdym kroku sprawdzać tylko wartość  $\gcd(x_{2k} - x_k, n)$ , ponieważ te dwa wyrazy przystają do siebie modulo  $p$ , kiedy  $k$  jest wielokrotnością  $s$ . Ciąg  $x_{2k}$  można zdefiniować jako  $y_0 = x_0, x_{2k} = y_k = f(f(y_{k-1}))$ , unikając w ten sposób przechowywania wielu poprzednich wartości.

### C.3.2 Metoda Brenta

Sprawdzamy, czy ciąg się zapętlili, wykonując kolejno  $K = 1, 2, 4, 8, \dots$  kroków. Jeśli w  $K$  krokach wyraz ciągu powtórzy się modulo  $p$ , to udało się znaleźć wspólny dzielnik. Jeśli nie, to powtarzamy próbę dla kolejnego  $K$ , zaczynając od miejsca, w którym skończyliśmy.

Ten wariant ma nieco lepszą stałą niż metoda Floyda.

## C.4 Opisać algorytm sita kwadratowego

### C.4.1 Faktoryzacja przez liczby $B$ -gładkie

**Definicja C.4.1.** Dla ustalonego  $B$  liczba  $B$ -gładka to taka, której wszystkie pierwsze dzielniki są mniejsze od  $B$ .

Celem jest rozłożyć  $N$  na czynniki pierwsze. Ustalamy pewne  $a_1, \dots, a_k$ , po czym obliczamy  $b_i = a_i^2 \pmod{N}$ . Chcemy wybrać taki podzbiór  $b_i$ , żeby iloczyn jego elementów był pełnym kwadratem.

**Lemat C.4.1.** Niech  $\{p_1, \dots, p_s\}$  będzie zbiorem wszystkich liczb pierwszych mniejszych od  $B$ . W każdym zbiorze liczb  $B$ -gładkich o liczności większej od  $s$  istnieje podzbiór, którego iloczyn jest kwadratem.

*Dowód.* Niech  $\{x_1, \dots, x_k\}$  dla  $k > s$  będą liczbami  $B$ -gładkimi. Rozkładamy każdą z nich na czynniki pierwsze:

$$x_i = p_1^{\alpha_{1,i}} \cdots p_s^{\alpha_{s,i}},$$

a następnie przypisujemy jej wektor:

$$v_i = (\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{s,i}) \pmod{2}$$

Jeśli dla  $\{x_1, \dots, x_k\}$  każdy czynnik  $p_i$  występuje parzystą liczbą razy, czyli  $v_1 \oplus \dots \oplus v_k = 0$ , jest to poszukiwany podzbiór  $b_i$ . Skoro  $k > s$ , to wektory  $v_1, \dots, v_k$  są liniowo zależne w  $\mathbb{Z}_2^s$ , więc taki podzbiór musi istnieć i można go znaleźć za pomocą eliminacji Gaussa w  $\mathcal{O}(s^3)$ .  $\square$

Powyższą teorię można przekształcić na praktyczną metodę faktoryzacji liczby  $N$ .

Algorytm faktoryzacji:

1. Znajdź takie  $a_1, \dots, a_k$ , że  $b_i = a_i^2 \pmod{N}$  jest  $B$ -gładkie.
2. Dla każdego  $b_i$  wyznacz wektor  $v_i$ .
3. Znajdź taki podzbiór  $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ , że wektory  $v_{i \in I}$  są liniowo zależne.
4. Przypisz  $u = \prod_{i \in I} a_i \pmod{N}$  oraz  $v = \sqrt{\prod_{i \in I} b_i} \pmod{N}$ .



5. Jeśli  $u \neq \pm v$ , to  $\gcd(u + v, N)$  jest nietrywialnym dzielnikiem  $N$ , ponieważ  $u^2 = v^2 \pmod{N}$ .
6. Jeśli  $u = \pm v$ , to powtórz procedurę.

Krok 1. jest na razie czarną skrzynką, ale można za nią podstawić algorytm sita kwadratowego.

### C.4.2 Sito kwadratowe

Poszukiwane liczby  $a_i$  muszą być większe od  $\sqrt{N}$ , więc sprawdzamy po kolei dla potencjalnych kandydatów, czy reszty są  $B$ -gładkie. Dla pewnej ustalonej stałej  $K$  oraz  $i \in \{0, \dots, K-1\}$  definiujemy:

$$X[i] = \lceil \sqrt{N} \rceil + i$$

$$Y[i] = X[i]^2 \pmod{N} = \left( \lceil \sqrt{N} \rceil + i \right)^2 - N$$

Trzeba rozłożyć liczby  $Y[i]$  na czynniki - najlepiej wszystkie na raz, poniższym algorytmem.

Algorytm sita kwadratowego:

1. Dla każdego  $p < B$ :
  - (a) Usuń ze zbioru  $\{p_1, \dots, p_s\}$  te liczby, dla których  $X[j]^2 \not\equiv N \pmod{p}$ , czyli  $Y[i] \not\equiv 0 \pmod{p}$ .
  - (b) Algorytmem Tonellego-Shanksa znajdź rozwiązanie  $X[i] = \pm k$  równania  $X[i]^2 \equiv N \pmod{p}$ .
  - (c) Podziel przez  $p$  wszystkie  $Y[i]$ , dla których  $X[j] \equiv \pm k \pmod{p}$ .
2. Jeśli  $Y[i]$  zmaleje do 1, to początkowo musiało być liczbą  $B$ -gładką.

W ramach dodatkowego usprawnienie algorytmu, możemy uniknąć dzielenia dużych liczb. Zamiast wartości  $Y[i]$  przechowujemy  $Z[i] = \log Y[i]$ . Wtedy operację  $\frac{Y[i]}{p}$  zastępujemy działaniem  $Z[i] - \log p$ . Warunkiem  $B$ -gładkości jest (prawie) wyzerowanie się  $Z[i]$ . Problemem może być występowanie czynników  $Y[i]$  z potęgą  $\alpha > 1$ . Należy wykryć od razu liczby  $Y[i]$  podzielne przez  $p^\alpha$  dla każdego możliwego  $\alpha$ , stosując tę samą metodę.

#### Złożoność:

Przy optymalnym wyborze parametrów, czyli  $B, K$  rzędu  $e^{\sqrt{\ln N \ln \ln N}}$ , złożoność algorytmu wynosi  $\mathcal{O}(e^{(1+o(1))\sqrt{\ln N \ln \ln N}})$ , czyli jest podwykładnicza.

### C.4.3 Metoda Multi Polynomial Quadratic Sieve (MPQS)

Algorytm sita kwadratowego można zrównoleglić, używając wielu różnych wielomianów postaci  $(A \cdot X + B)^2 - N$  zamiast  $X^2 - N$ .

## C.5 Opisać algorytm „ro” Pollarda na logarytm dyskretny

Trudno na ten moment poprawić złożoność czasową  $\Theta(\sqrt{|G|})$  algorytmu Baby-Step-Giant-Step, można jednak zmniejszyć użycie pamięci – algorytm „ro” Pollarda osiąga złożoność pamięciową  $\mathcal{O}(1)$ .

Główny pomysł polega na tym, żeby generować pary postaci  $a^{\alpha_i} \cdot b^{\beta_i}$ , dla różnych  $\alpha_i$  oraz  $\beta_i$ , aż wystąpi kolizja.

Krótkie uzasadnienie: Jeśli  $a^{\alpha_i} \cdot b^{\beta_i} = a^{\alpha_j} \cdot b^{\beta_j}$ , to  $a^{\alpha_i - \alpha_j} = b^{\beta_j - \beta_i}$ . Wystarczy więc znaleźć  $\beta^* = (\beta_j - \beta_i)^{-1}$  modulo  $|G|$  i otrzymamy  $a^{\beta^*(\alpha_i - \alpha_j)} = b$ .

Ciąg  $(\alpha_i, \beta_i)$  definiujemy, losując wartości początkowe  $(\alpha_0, \beta_0)$ , a kolejne obliczając za pomocą pewnej deterministycznej funkcji  $f$ , która zapewni pseudolosowość wyników. Jeśli w jakimś momencie  $(\alpha_i, \beta_i) = (\alpha_j, \beta_j)$ , to tak już zostanie, czyli ciąg wpada w pętlę literki „ro”. Drugi ciąg można zdefiniować za pomocą metody Floyda (patrz: pytanie C.3):

$$(\alpha'_{i+1}, \beta'_{i+1}) = f(f(\alpha'_i, \beta'_i))$$

W każdym kroku sprawdzamy, czy  $(\alpha_i, \beta_i) = (\alpha'_i, \beta'_i)$ . Jeśli ciągi są losowe, to kolizja wystąpi w oczekiwaniu po  $\sqrt{|G|}$  krokach.

Pozostaje uszczegółowić wybór funkcji  $f$ . Powinna ona rozrzucać wartości ciągu możliwie przypadkowo wśród elementów  $G$ . Technika stosowana w praktyce jest następująca:

- Wybieramy małą liczbę naturalną  $n$ .
- Wybieramy funkcję haszującą  $h$ , która parze liczb całkowitych  $(\alpha, \beta)$  przyporządkowuje liczbę ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ .
- Losujemy liczby naturalne  $x_1, \dots, x_n$  oraz  $y_1, \dots, y_n$ .
- Definiujemy  $f(\alpha, \beta) = (\alpha + x_s, \beta + y_s)$ , gdzie  $s = h(\alpha, \beta)$ .

Algorytm „ro” działa w oczekiwanym czasie  $\mathcal{O}(\sqrt{|G|})$  i stałej pamięci.

## C.6 Opisać algorytm Pohliga-Hellmana

Algorytm ten jest heurystyką, korzystającą z faktu, że rząd grupy często jest liczbą złożoną. Mając daną grupę  $G = \langle g \rangle$  o  $n$  elementach oraz  $b \in G$ , chcemy znaleźć  $x$ , będącym rozwiązaniem równania  $g^x = b$ .

Algorytm Pohliga-Hellmana:

1. Jeśli  $n$  jest liczbą pierwszą, to wyznacz  $x$  algorytmem Baby-Step-Giant-Step  $\rightarrow \mathcal{O}(\sqrt{n})$ .

2. Jeśli  $n = p^k$ , gdzie  $p$  jest pierwsze oraz  $k > 1$ , to:

(a) Zapisz (nieznany jeszcze)  $x$  w systemie o podstawie  $p$  jako

$$x = x_0 + x_1 \cdot p + \dots + x_{k-1} \cdot p^{k-1}$$

(b) Na podstawie równania:

$$(g^x)^{p^{k-1}} = (g^{x_0})^{p^{k-1}} = b^{p^{k-1}},$$

zdefiniuj  $\gamma = g^{p^{k-1}}$  o rzędzie  $p$ .

(c) Rozwiąż równanie postaci  $\gamma^{x_0} = b^{p^{k-1}}$  dla  $x_0$ , czyli oblicz logarytm dyskretny w grupie  $\{1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{p-1}\} \rightarrow \mathcal{O}(\sqrt{p})$  (przypadek 1).

(d) Sprowadź równanie do postaci:

$$g^{x_1 \cdot p + \dots + x_{k-1} \cdot p^{k-1}} = b \cdot g^{-x_0}$$

Po podniesieniu równania do potęgi  $p^{k-2}$ , oblicz  $x_1$ , rozwiązując  $\gamma^{x_1} = (b \cdot g^{-x_0})^{p^{k-2}}$ .

Powtórz procedurę dla  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \rightarrow \mathcal{O}(k\sqrt{p})$ .

3. Jeśli  $n = q_1 \cdot q_2$ , gdzie  $\gcd(q_1, q_2) = 1$ , to:

(a) Zapisz  $x$  jako  $x = u_1 \cdot q_1 + r_1$ .

(b) Podnieś równanie do potęgi  $q_2$ :

$$g^{u_1 n + r_1 q_2} = b^{q_2}$$

Przy  $g^n = 1$  daje to  $g^{r_1 q_2} = b^{q_2}$ , czyli  $h^{r_1} = b^{q_2}$ , gdzie  $h = g^{q_2}$  ma rząd  $q_1$ .

(c) Oblicz  $r_1$  takie, że  $x = r_1 \pmod{q_1}$ , wywołując się rekurencyjnie na grupie  $H = \langle h \rangle$ .

(d) Analogicznie, oblicz  $r_2$ , dla którego  $x = r_2 \pmod{q_2}$ .

(e) Z Chińskiego Twierdzenia o Resztach wyznacz rozwiązanie  $x$  układu powyższych dwóch kongruencji.

Jeżeli  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$ , to rekurencyjnie wywołaj przypadek 2 dla każdego  $p_i^{\alpha_i} \rightarrow \mathcal{O}(\sum_i \alpha_i \sqrt{p_i}) \leq \mathcal{O}(\log n \cdot \sqrt{\max p_i})$ , bo  $\alpha_i \leq \log n$

Algorytm działa szybko, jeśli rząd grupy ma tylko małe dzielniki. Z dużym prawdopodobieństwem poradzi sobie efektywnie również z grupą  $GF(p^k)$  ciała skończonego, ponieważ rząd grupy  $p^k - 1$  najczęściej jest liczbą złożoną. Rozsądnym wyborem jest natomiast  $\mathbb{Z}_p^*$  dla  $p = 2q + 1$ , gdzie  $p, q$  są pierwsze (liczby pierwsze Sophie Germain).

## C.7 Opisać algorytm rachunku indeksów

Rachunek indeksów to obecnie najlepszy znany algorytm na logarytm dyskretny w  $\mathbb{Z}_p$ .

Działając w grupie  $\mathbb{Z}_p$  o znanym generatorze  $g$  modulo  $p$ , dla zadanej liczby  $b$ , chcemy rozwiązać równanie:  $g^x = b$ . Zapisujemy  $x = \log b$  i taki logarytm zachowuje własności zwykłego logarytmu

$$\log(u \cdot v) = \log(u) + \log(v) \pmod{p-1},$$

$$\log(u^k) = k \cdot \log(u) \pmod{p-1}.$$

### Faza I:

Ustalamy zbiór małych liczby pierwszych  $Q = \{q_1, \dots, q_r\}$  – bazę czynników. Wybieramy lub losujemy  $k$ , tak żeby uzyskać  $r$  różnych liczb, dla których  $g^k \pmod{p}$  jest gładkie, czyli rozkłada się na czynniki z bazy  $Q$ . W ten sposób otrzymujemy  $r$  równań postaci

$$g^k = q_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot q_r^{\beta_r} \pmod{p},$$

$$\text{czyli } k = \beta_1 \cdot \log q_1 + \dots + \beta_r \cdot \log q_r \pmod{p-1}$$

### Faza II:

Znając wszystkie  $\beta_i$  oraz  $k$ , chcemy rozwiązać układ równań:

$$k^{(1)} = \beta_1^{(1)} \cdot \log q_1 + \dots + \beta_r^{(1)} \cdot \log q_r,$$

...

$$k^{(r)} = \beta_1^{(r)} \cdot \log q_1 + \dots + \beta_r^{(r)} \cdot \log q_r,$$

gdzie niewiadomymi są  $\log q_i$ . Możemy wykorzystać do tego metody algebry liniowej z dokładnością do jednej trudności – operacje są modulo  $p-1$ , które nie jest pierwsze, więc niekoniecznie da się policzyć odwrotność względem mnożenia. Jako wynik otrzymujemy logarytmy dyskretny liczb  $q_1, \dots, q_r$ .

### Faza III:

Żeby znaleźć  $\log b$ , próbujemy wygenerować jakąkolwiek liczbę postaci  $b^u \cdot a^v$ , która jest gładka modulo  $p$ . Wystarczy przyjąć  $u = 1$  i losować  $v$  do skutku. Z równości

$$b^u \cdot a^v = q_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot q_r^{\gamma_r}$$

ostatecznie wynika:

$$x = \log b = u^{-1} \cdot (\gamma_1 \cdot \log q_1 + \dots + \gamma_r \cdot \log q_r - v)$$

Oczekiwana złożoność algorytmu to  $e^{(\sqrt{2} + \mathcal{O}(1))\sqrt{\ln n \ln \ln n}}$ , czyli podwykładnicza. Metoda rachunku indeksów daje się uogólnić na ciała skończone  $\mathbb{Z}_p/h(X)$ , gdzie  $h$  jest pewnym wielomianem. Wtedy baza czynników, zamiast liczb pierwszych, zawiera nierozkładalne wielomiany małych stopni.

### C.7.1 Atak Logjam

Rachunek indeksów, jeśli stosowany w sposób leniwy, ma słaby punkt – fazy I i II są niezależne od wejściowego elementu  $b$ , co więcej dobrze się zrównolegają. Żeby rozszyfrować ciąg informacji, dla których zawsze używana była ta sama liczba pierwsza  $p$ , wystarczy wykonać fazy I i II tylko raz, a faza III jest już bardzo szybka.

## C.8 Opisać ideę algorytmu Schönhage-Strassena

### C.8.1 Teoretyczna Transformata Numeryczna (NTT)

Transformata NTT (*Number Theoretic Transform*) jest wersją algorytmu FFT, która w przeciwieństwie do algorytmu Cooleya-Tukeya nie używa liczb rzeczywistych. Zamiast nad  $\mathbb{R}$ , obliczenia są wykonywane nad  $\mathbb{Z}_p$ . Procedura wyznaczania splotu dwóch ciągów o wyrazach całkowitych modulo  $p$  jest praktycznie taka sama – wzory rekurencyjne oraz własność wzajemnej odwrotności DFT i IDFT przenoszą się na pierścień  $\mathbb{Z}_p$ . Jedynym warunkiem jest, żeby  $\omega \in \mathbb{Z}_p$  spełniało  $\omega^n = 1$  oraz  $\omega^{\frac{n}{2}} = -1$ , czyli żeby  $\omega$  było rzędu  $n$ . Z twierdzenia Lagrange’a oraz faktu, że  $\mathbb{Z}_p$  jest cykliczna wiemy, że taki element istnieje, jeśli  $n \mid (p-1)$ . Algorytm FFT modulo  $p$  (czyli właśnie NTT) działa dla pewnych konkretnych  $p$  postaci  $q \cdot n + 1$ .

Algorytm na splot ciągów  $A = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  i  $B = (b_0, b_1, \dots, b_n)$  wygląda następująco:

1. Znajdź  $p$  postaci  $q \cdot n + 1$ , gdzie  $q$  jest niedużą liczbą pierwszą – można ją wylosować i sprawdzić pierwszość albo szukać po kolei.
2. Znajdź generator  $\gamma$  grupy  $\mathbb{Z}_p^*$  – ponieważ generatorów jest  $\phi(q \cdot n) = (q-1) \cdot \frac{n}{2}$ , to losując, ma się dużą szansę trafić. Generator musi spełniać  $\gamma^{\frac{p-1}{2}} \neq 1 \pmod{p}$  oraz  $\gamma^{\frac{p-1}{q}} \neq 1 \pmod{p}$ .
3. Ustal  $\omega = \gamma^q$  rzędu  $n$  i oblicz splot za pomocą NTT.

Można wybrać na tyle duże  $p$ , żeby modulo nie miało wpływu na wynik. Przy mnożeniu liczb binarnych wystarczy  $p > n$ .

### C.8.2 Algorytm Schönhage-Strassena

Algorytm służy do mnożenia dużych liczb w zapisie binarnym. Ponieważ daje on zysk praktyczny dopiero w przypadku naprawdę dużych liczb, musi radzić sobie z problemami wynikającymi z długości ich zapisu.

Pierwszym z wyzwań jest wybór pierścienia do obliczeń – jeśli liczba  $p$  jest duża, to operacje w  $\mathbb{Z}_p$  nie są jednostkowe.

Liczba  $p$  nie musi być pierwsza, wystarczy nam względna pierwszość z  $n$ , (potrzebne jest dzielenie przez  $n$ ) i musi istnieć element  $\omega$  rzędu  $n$  modulo  $p$ . Te warunki spełniają  $p$  postaci  $2^m + 1$  i  $\omega = 2^\alpha$  takie, żeby  $\omega^n = 1 \pmod{p}$ . Ten sprytny dobór liczb upraszcza obliczenia:

- branie reszty modulo  $p$  – zauważamy, że  $2^m = p - 1 = -1 \pmod{p}$ , więc możemy podzielić liczbę na  $m$ -cyfrowe fragmenty i dodać je z naprzemiennymi znakami:

$$101001110 \pmod{2^3 + 1} = 101 - 001 + 110 \pmod{2^3 + 1}$$

- mnożenie przez  $\omega$  – to mnożenie przez potęgę 2, czyli dopisanie zer na końcu liczby binarnej i wyciągnięcie reszty modulo  $p$
- mnożenie dwóch liczb w  $\mathbb{Z}_p$  – nadal trudne, ale wykonywane niewiele razy i można sobie z nim poradzić rekurencją na liczbach o długości  $m$
- dzielenie przez  $\omega = 2^\alpha$  – to mnożenie przez  $\omega^{-1} = -2^{m-\alpha}$ , czyli też potęgę 2

Algorytm Schönhage-Strassena służy do obliczania iloczynu  $N$ -bitowych liczb  $U, V$  modulo  $p = 2^N + 1$ . Jeśli chce się otrzymać wynik pełny (nie modulo), wystarczy przyjąć  $N$  większe od sumy długości liczb na wejściu. Zakładamy, że  $N$  jest potęgą 2. Algorytm działa rekurencyjnie, sprowadzając iloczyn  $U$  i  $V$  do splotu wielomianów w mniejszym pierścieniu.

Algorytm fastmul( $U, V, N$ ):

1. Rozbijamy liczby  $U$  i  $V$  na fragmenty o długości około  $\sqrt{N}$ , czyli na  $t$  binarnych liczb  $b$ -cyfrowych. Liczby  $t, b$  powinny być potęgami dwójki wielkości mniej więcej  $\sqrt{N}$ :

$$U = u_0 + u_1 \cdot 2^b + u_2 \cdot 2^{2b} + \dots + u_{t-1} \cdot 2^{(t-1)b}$$

$$V = v_0 + v_1 \cdot 2^b + v_2 \cdot 2^{2b} + \dots + v_{t-1} \cdot 2^{(t-1)b}$$

Zadanie sprowadza się do pomnożenia dwóch liczb  $t$ -cyfrowych w systemie o podstawie  $2^b$ .

2. Wykonujemy algorytm NTT w pierścieniu  $\mathbb{Z}_p$ . Wymaga to obliczenia  $2t$  iloczynów modulo  $2^{b'} + 1$  rekurencyjnie.

W punkcie 1 splatamy liczby w pierścieniu  $\mathbb{Z}_p$  dla  $p = 2^{b'} + 1$ , gdzie  $b' \approx 2b + \log t$  oraz  $t \mid b'$ . Bierze się to stąd, że wynik splotu nie przekracza  $p$ , czyli  $p > t \cdot (2^b)^2$ , więc  $b \geq 2b + \log t$ . Podzielność  $t \mid b'$  jest ważna, żeby rząd  $\omega = 2^{\frac{2b}{t}}$  był równy  $t$ , czyli  $\omega^{\frac{t}{2}} = 2^{b'} = -1 \pmod{p}$ .

Algorytm można opisać ogólnym równaniem

$$T(n) = 2\sqrt{n} \cdot T(\alpha\sqrt{n}) + \Theta(n \log n)$$

dla pewnego  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ .

Opisana procedura pozwala sprowadzić mnożenie dwóch liczb  $N$ -bitowych do około  $2\sqrt{N}$  mnożeń liczb o długości  $4\sqrt{N}$ , co daje złożoność  $\mathcal{O}(N \log^2 N)$ . Poprawienie jej do  $\mathcal{O}(N \log N \log \log N)$  wymaga zmniejszenia stałych  $(2, 4) \rightarrow (1, 2)$  poprzez zastosowanie technicznych sztuczek.

W praktyce rekursja jest płytka, ponieważ dla  $N < 10^3$  lepiej użyć prostszych algorytmów, Tooma-Cooka albo nawet kwadratowego mnożenia.

## C.9 Opisać algorytm Schreiera-Simsa

## C.10 Opisać algorytm Grovera

### C.10.1 Krótko o bramkach

Bramka H

Bramka T

Algorytm Grovera to kwantowy algorytm wyszukiwania – dla zdefiniowanej funkcji

$$f : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \{0, 1\}$$

znajduje z prawdopodobieństwem  $\frac{2}{3}$ , ciąg  $x^*$  wartościowany przez  $f$  inaczej niż pozostałe w  $\mathcal{O}(\sqrt{N})$  obliczeniach  $f$ . Na potrzeby algorytmu zakładamy, że  $N = 2^n$  oraz  $f$  jest określona na  $n$ -bitowych ciągach z  $\{0, 1\}^n$ , z których tylko na  $x^*$  przyjmuje wartość -1, a na pozostałych  $x$  jest równa 1.

Tworzymy bramkę  $O_f$  z  $n$  kubitowymi wejściami, określoną regułą  $O_f(|x\rangle) = f(x) \cdot |x\rangle$ , czyli:

$$f(|00 \dots 0\rangle) = |00 \dots 0\rangle$$

$$f(|00 \dots 1\rangle) = |00 \dots 1\rangle$$

...

$$f(|x\rangle) = -|x\rangle$$

...

$$f(|11 \dots 1\rangle) = |11 \dots 1\rangle$$

Wykorzystując specjalną bramkę  $O_f$ , konstruujemy obwód kwantowy, który:

- składa się z bramek  $H$ ,  $T$  i  $O_f$ ,
- ma  $n$  wejść i  $n$  wyjść,
- otrzymuje na wejściu  $|00 \dots 0\rangle$ ,
- zwraca na wyjściu ciąg  $x^*$ , dla którego  $f(x^*) = -1$  z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{10}$ ,

- zawiera  $\mathcal{O}(\sqrt{N} \log N)$  bramek, w tym  $\mathcal{O}(\sqrt{N}) = \mathcal{O}(\sqrt{2^n})$  bramek  $O_f$ .

Dysponując opisanym wyżej obwodem, możemy przejść do właściwego algorytmu.

Algorytm Grovera:

1. Przepuść każdy z  $n$  kubitów przez bramkę H:

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

Układ  $n$  kubitów ma stan  $\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle$ , czyli każdy  $n$ -bitowy ciąg jest równie prawdopodobny.

2. Kilkukrotnie przepuść kubity przez warstwę bramek, która wykonuje następujące przekształcenie:

$$\sum_{x \in \{0,1\}^n} \delta_x |x\rangle \rightarrow \sum_{x \in \{0,1\}^n} \delta'_x |x\rangle$$

Każda warstwa zwiększa współczynnik przy  $x^*$ , a zmniejsza przy  $x \neq x^*$ , zachowując niezmienniki:  $\delta_x \in \mathbb{R}^+$  oraz  $\delta'_{x^*} > \delta_{x^*} + \frac{1}{\alpha\sqrt{N}}$  dla stałej  $\alpha$ .

Po  $\mathcal{O}(\sqrt{N})$  krokach  $|\delta_{x^*}|^2 > \frac{1}{10}$ , czyli z prawdopodobieństwem co najmniej  $\frac{1}{10}$  ciągiem wyjściowym jest  $x^*$ . Do osiągnięcia tego służą operacje liniowe:

- bramka  $O_f$ , wykonująca przekształcenie:

$$\delta_{x^*} \rightarrow -\delta_{x^*}, \quad \delta_x \rightarrow -\delta_x \text{ dla } x \neq x^*$$

- bramka dyfuzyjna Grovera (operacja  $D$ ), wykonująca przekształcenie:

$$(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{N-1}) \rightarrow (2s - \delta_0, 2s - \delta_1, \dots, 2s - \delta_{N-1}),$$

gdzie  $s = \frac{1}{N}(\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{N-1})$ , czyli jest średnią współczynników. Operacja  $D$  jest określona macierzą unitarną i odbija symetrycznie każde  $\delta_x$  względem  $s$ .

Ad krok 2: Operacje  $D$  i  $O_f$  wystarczają, żeby zwiększyć współczynnik przy  $x^*$ , a zmniejszyć przy pozostałych  $x \neq x^*$ .

*Dowód.* Stan układu kubitów to  $\sum_{x \in \{0,1\}^n} \delta'_x |x\rangle$ . Początkowo  $\delta_x = \frac{1}{\sqrt{N}}$  dla każdego  $x$ , a w każdym kroku jeden ze współczynników ( $\delta_{x^*}$ ) jest zamieniany na przeciwny. Następnie odejmujemy wszystkie współczynniki od  $2s$ . Wynika z tego, że po  $k$  krokach wszystkie ( $\delta_x$ ) dla  $x \neq x^*$  są sobie równe (oznaczymy  $(\delta_x) = a_k$ ) z wyjątkiem  $(\delta_{x^*}) = b_k$ . Bramka  $O_f$  zamienia  $b_k$  na  $-b_k$ , po czym bramka  $D$  oblicza  $b_{k+1} = 2s_k + b_k$ , gdzie  $s_k$  jest średnią współczynników w  $k$ -tym kroku. Można udowodnić indukcyjnie, że  $b_{k+1} - b_k > \frac{1}{\sqrt{N}}$  tak długo, jak  $b_k < \frac{1}{2}$ . Stąd po co najwyżej  $\frac{1}{10}\sqrt{N}$  krokach, dostaniemy  $b_k > \frac{1}{10}$ , co było do pokazania.  $\square$



Operację  $D$  można wyrazić jako kombinację  $\mathcal{O}(\log N)$  bramek  $H$  i  $T$ .

*Dowód.* Bramka  $D$  jest opisana macierzą:

$$D = \frac{2}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} - I,$$

czyli  $D = 2 \cdot v \cdot v^T - I$ , gdzie  $v = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ . Macierz  $D$  jest postaci Householdera, więc jest unitarna. Faktem jest, że  $D = H_n \cdot Z_0 \cdot H_n$ , gdzie  $Z_0$  jest macierzą jednostkową z -1 zamiast 1 w komórce  $(0,0)$ , a  $H_n$  jest macierzą opisującą bramkę  $H$  na każdym z kubitów. Składa się ona z  $n$  bramek  $H$ . Do konstrukcji bramki  $Z_0$  również wystarcza  $\mathcal{O}(n)$  dwuwęściowych bramek logicznych. Zatem całościowo potrzebujemy  $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(\log N)$  bramek, co było do pokazania.  $\square$

## C.11 Opisać ideę (bez dowodów) algorytmu Shora