Αναστασία Τσάκαλου
2022201900226

Απαλλακτική Εργασία - Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

α) Μία γελατερί πουλάει στους πελάτες της 3 είδη παγωτών μάρκας Alfa, μάρκας Δέλτα, και μάρκας Δωδώνη.

- Το κέρδος της γελατερί για κάθε μονάδα των τριών ειδών παγωτών είναι:

  4€ ανά μονάδα παγωτού Alfa
  2€ ανά μονάδα παγωτού Δέλτα
  1€ ανά μονάδα παγωτού Δωδώνη

- Επιπλέον, για τη φύλαξη των παγωτών σε καταψύκτες παγωτών και παγωτομηχανές, διατίθενται το πολύ 20 ώρες, ενώ η κάθε μονάδα είδους παγωτού απαιτεί τις παρακάτω ώρες:

  1 ώρα ανά μονάδα παγωτού Alfa
  2 ώρες ανά μονάδα παγωτού Δέλτα
  3 ώρες ανά μονάδα παγωτού Δωδώνη

- Ακόμα, όσον αφορά την προετοιμασία των παγωτών από τους υπαλλήλους για το σερβίρισμα στους πελάτες, όπως μπορεί να είναι η ανάμειξη γεύσεων, πρόσθεση γεύση σε παγωτά, υλικά που θέλει να προσθέσει ο πελάτης, στο κάθε είδος παγωτού, κ.ό.κ, διατίθενται 10 εργατοώρες, ενώ η κάθε μονάδα είδους παγωτού χρειάζεται τις εξής ώρες:

  2 εργατοώρες ανά μονάδα παγωτού Alfa
  4 εργατοώρες ανά μονάδα παγωτού Δέλτα
  1 εργατοώρα ανά μονάδα παγωτού Δωδώνη.

β)
$$\left.\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\le 20 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &\le 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 20 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 &= 10 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0, \text{ για } i = 1, 2, \ldots, 5.$$

c_j	Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_0	$\theta_i = \frac{P_{0i}}{X_{0i}}$
0	x_4	1	2	3	1	0	20	20
0	x_5	2	4	1	0	1	10	5
	c_j	4	2	1	0	0		
	z_j	0	0	0	0	0		
	$c_j - z_j$	4	2	1	0	0		

$r_2' \to \frac{r_2}{2}$, $r_1' \to -r_2' + r_1$; $r_3' \to 4r_2' + r_3$

c_j	Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_0	$\theta_i = \frac{P_{0i}}{X_{0i}}$
0	x_4	0	0	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	15	
4	x_1	1	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5	
	c_j	4	2	1	0	0		
	z_j	4	8	2	0	2	20	
	$c_j - z_j$	0	-6	-1	0	-2		

Αφού όλα τα στοιχεία στην γραμμή $c_j - z_j$ είναι αρνητικά ή μηδέν, αυτό σημαίνει πως φτάσαμε στη βέλτιστη λύση του προβλήματος.
Άρα, έχουμε τη βέλτιστη λύση $\max z = 20$, με $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, και $x_3 = 0$.

γ) ii) Έχοντας βρει τη βέλτιστη στήλη, δηλαδή την 1η στήλη, και την προς αντικατάσταση γραμμή, δηλαδή την 2η γραμμή, βρίσκουμε το στοιχείο-οδηγό. Το σημείο τομής της γραμμής και στήλης αυτής, θα είναι το στοιχείο-οδηγός. Εδώ συγκεκριμένα, είναι το 2. Αυτή η τιμή θα πρέπει να γίνει 1 με τη βοήθεια γραμμοπράξεων.

δ)

$$\left.\begin{aligned} \min z &= 20y_1 + 10y_2 \\ y_1 + 2y_2 &\geq 4 \\ 2y_1 + 4y_2 &\geq 2 \\ 3y_1 + y_2 &\geq 1 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\min z = 20y_1 + 10y_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + MA_1 + MA_2 + MA_3$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} y_1 + 2y_2 - S_1 + A_1 &= 4 \\ 2y_1 + 4y_2 - S_2 + A_2 &= 2 \\ 3y_1 + y_2 - S_3 + A_3 &= 1 \end{aligned}$$

$y_1, y_2 \geq 0$, $S_i \geq 0$, $A_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$.

c_j	Βάση	y_1	y_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	b	θ
M	A_1	1	2	-1	0	0	1	0	0	4	2
M	A_2	2	4	0	-1	0	0	1	0	2	$\frac{1}{2}$
M	A_3	3	1	0	0	-1	0	0	1	1	1
	c_j	20	10	0	0	0	M	M	M		
	z_j	6M	7M	-M	-M	-M	M	M	M		
	$z_j - c_j$	6M-20	7M-10	-M	-M	-M	0	0	0		

$r_2' \to \frac{r_2}{4}$, $r_1' \to r_1 - 2r_2'$, $r_3' \to r_3 - r_2'$, $r_4' \to (-7M+10)r_2' + r_4$

c_j	Βάση	y_1	y_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	b	θ
M	A_1	0	0	-1	$\frac{1}{2}$	0	1		0	3	-
0	y_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	0		0	$\frac{1}{2}$	1
M	A_3	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	-1	0		1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$
	c_j	20	10	0	0	0	M		M		
	z_j	$\frac{5}{2}M+5$	10	-M	$\frac{3}{4}M-\frac{5}{2}$	-M	M		M		
	$z_j - c_j$	$\frac{5}{2}M-15$	0	-M	$\frac{3}{4}M-\frac{5}{2}$	-M	0		0		

$r_3' \to \frac{r_3}{\frac{5}{2}} \Rightarrow r_3' \to \frac{2r_3}{5}$, $r_1' \to r_1$, $r_2' \to r_2 - \frac{1}{2}r_3'$, $r_4' \to (-\frac{5}{2}M + 15)r_3' + r_4$

c_j	Βάση	y_1	y_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	b	Θ
M	A_1	0	0	-1	$\frac{1}{2}$	0	1	///	///	3	6
10	y_2	0	1	0	-0.3	$\frac{1}{5}$	0	///	///	$\frac{2}{5}$	-
20	y_1	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	0	///	///	$\frac{1}{5}$	2
	c_j	20	10	0	0	0	M	///	///		
	z_j	20	10	-M	$\frac{1}{2}M-1$	-6	M	///	///		
	z_j-c_j	0	0	-M	$\frac{1}{2}M-1$	-6	0	///	///		

$r_3' \to 10r_3$, $r_1' \to r_1 - \frac{1}{2}r_3'$, $r_2' \to r_2 + \frac{10}{3}r_3'$, $r_4' \to -(\frac{1}{2}M-1)r_3' + r_4$

c_j	Βάση	y_1	y_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	b	Θ
M	A_1	-5	0	-1	0	2	1	///	///	2	1
10	y_2	3	1	0	0	-1	0	///	///	1	-
0	S_2	10	0	0	1	-4.	0	///	///	2	-
	c_j	20	10	0	0	0	M	///	///		
	z_j	-5M+30	10	-M	0	2M-10		///	///		
	z_j-c_j	-5M+10	0	-M	0	2M-10	0				

$r_1' \to \frac{r_1}{2}$, $r_2' \to r_2 + r_1'$, $r_3' \to r_3 + 4r_1'$, $r_4' \to r_4 - (2M-10)r_1'$

c_j	Βάση	y_1	y_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	b	Θ
0	S_3	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	///	///	///	1	
10	y_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	///	///	///	2	
0	S_2	0	0	-2	1	0	///	///	///	6	
	c_j	20	10	0	0	0	///	///	///		
	z_j	5	10	-5	0	0	///	///	///		
	z_j-c_j	-15	0	-5	0	0	///	///	///		

Άρα η βέλτιστη λύση είναι η $\min z = 20$, με $y_1 = 0, y_2 = 2$.

ε) <u>Πλεονεκτήματα:</u>

i) Είναι από τις μεθόδους που δεν χρησιμοποιούν παραγώγους, και μόνο τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης.

ii) Μπορούν να εφαρμοστούν σε ασυνεχείς συναρτήσεις, ή συναρτήσεις με θόρυβο.

iii) Λειτουργεί για 2 μεταβλητές και πάνω, ιδανικά έως 10 για ικανοποιητική απόδοση, σε αντίθεση με τη γραφική μέθοδο, που λειτουργεί κατά μόνο για 2 μεταβλητές, καθώς με παραπάνω μεταβλητές δυσκολεύεται η διαδικασία της.

<u>Μειονεκτήματα:</u>

i) Χαμηλή απόδοση όταν έχουμε πολλές μεταβλητές, συνήθως $n>10$.

ii) Δεν υπάρχουν θεωρητικές αποδείξεις σύγκλισης.

iii) Δεν χρησιμοποιείται για να εξετάσει όλες τις εφικτές λύσεις.