Αναστασία Τσάκαλου
2022201900226

Απαλλακτική Εργασία - Αριθμητική Ανάλυση

Θέμα 1

α)

x	f(x)	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	1	1	6	6
1	2	7	12	
2	9	19		
3	28			

$h = x_1 - x_0 = 1 - 0 \Rightarrow \boxed{h=1}$

Τα σημεία είναι ισαπέχοντα και $h=1$, άρα μπορώ να υπολογίσω το πολυώνυμο παρεμβολής Newton-Gregory. Ακόμα,

$$p = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1,5-0}{1} = 1,5$$

Υπολογίζω τιμές Δf, $\Delta^2 f$, $\Delta^3 f$:

$$\Delta f_0 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{2-1}{1-0} = 1$$

$$\Delta f_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-2}{2-1} = 7$$

$$\Delta f_2 = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} = \frac{28-9}{3-2} = 19$$

$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = 7 - 1 = 6$$

$$\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1 = 19 - 7 = 12$$

$$\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 = 12 - 6 = 6$$

Άρα έχουμε:

$$f(x) = f(x_0) + p\Delta f_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 f_0 =$$

$$= 1 + 1,5 \cdot 1 + \frac{1,5(1,5-1)}{2 \cdot 1} \cdot 6 + \frac{1,5(1,5-1)(1,5-2)}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} \cdot \cancel{6} =$$

$$= 2,5 + 2,25 - 0,375 = 4,375$$

β) Από τον τύπο του πολυωνύμου παρεμβολής με προς τα πίσω διαφορές του Newton έχουμε:

$$p_3(x) = f_0 - \theta \nabla f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2}\nabla^2 f_0 - \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{6}\nabla^3 f_0$$

Από τον πίνακα από το ερώτημα (α) ξέρουμε τις τιμές των $f_0, \nabla f_0, \nabla^2 f_0, \nabla^3 f_0$.

$\boxed{x_0 = 3}$, $\boxed{\theta = 3 - x}$

$$p_3(x) = 28 - (3-x)19 + \frac{(3-x)(3-x-1)}{2}12 -$$

$$- \frac{(3-x)(3-x-1)(3-x-2)}{\cancel{6}}\cancel{6} = 1 + x^3$$

- Αν επιλέξουμε τα πρώτα 3 σημεία:

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2} \cdot 6 = 1 + x + \frac{x(x-1)}{3}$$

$$p_2(1.5) = 1 + 1{,}5 + \frac{1{,}5(1{,}5-1)}{3} = 2{,}5 + \frac{1{,}5 \cdot 0{,}5}{3} = 4{,}75$$

- Αν επιλέξουμε τα τελευταία 3 σημεία:

$\boxed{x_0 = 1}$, $\boxed{\theta = \frac{1}{2}}$

$$p_2'(1{,}5) = 2 + 0{,}5 \cdot 7 + \frac{0{,}5(0{,}5-1)}{2} \cdot 12 = 4$$

Άρα το απόλυτο σφάλμα είναι:

$$E = |f(1.5) - p_2(1{,}5)| = |4{,}375 - 4{,}75| = 0{,}375$$

$$E' = |f(1{,}5) - p_2'(1{,}5)| = |4{,}375 - 4| = 0{,}375$$

Επομένως, όποια σημεία και να επιλέξουμε το απόλυτο σφάλμα είναι το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις. Άρα δεν έχει σημασία το πόσο κοντά είναι στο x τα σημεία που θα επιλέξουμε.

Θέμα 2

α) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$,

Επανάληψη 1: Έχουμε $(\alpha_0, b_0) = (1,2)$.

- $f(\alpha_0) = 1^3 + 2\,1^2 - 3\cdot 1 - 1 = -1 < 0$
- $f(b_0) = 2^3 + 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2 - 1 = 9 > 0$
- $c_0 = \frac{\alpha_0 + b_0}{2} = \frac{1+2}{2} = 1,5$ το μέσο του διαστήματος $(1,2)$.
- $f(c_0) = 1,5^3 + 2\cdot 1,5^2 - 3\cdot 1,5 - 1 = 2,375 > 0$

$f(\alpha_0)\cdot f(c_0) < 0$, δηλαδή $f(\alpha_0), f(c_0)$ ετερόσημα. Άρα η ρίζα βρίσκεται ανάμεσα στο (α_0, c_0).

Επανάληψη 2: Έχουμε $(\alpha_1, b_1) = (\alpha_0, c_0) = (1, 1,5)$

- $f(\alpha_1) = -1 < 0$
- $f(b_1) = 2,375 > 0$
- $c_1 = \frac{\alpha_1 + b_1}{2} = \frac{1+1,5}{2} = 1,25$
- $f(c_1) = 1,25^3 + 2\cdot 1,25^2 - 3\cdot 1,25 - 1 = 0,328125 > 0$

$f(\alpha_1) f(c_1) < 0$, άρα η ρίζα βρίσκεται μεταξύ των α_1, c_1.

Επανάληψη 3: Έχουμε $(\alpha_2, b_2) = (\alpha_1, c_1) = (1, 1,25)$

- $f(\alpha_2) = -1 < 0$
- $f(b_2) = 0,328125 > 0$
- $c_2 = \frac{\alpha_2 + b_2}{2} = \frac{1+1,25}{2} = 1,125$
- $f(c_2) = 1,125^3 + 2\cdot 1,125^2 - 3\cdot 1,125 - 1 = -0,419921 < 0$

$f(b_2) f(c_2) < 0$, Επομένως η ρίζα βρίσκεται μεταξύ των c_2, b_2.

<u>Επανάληψη 4</u>: Έχουμε $(\alpha_3, b_3) = (c_2, b_2) = (1{,}125, 1{,}25)$

- $f(\alpha_3) = -0{,}419921 < 0$
- $f(b_3) = 0{,}328125 > 0$
- $c_3 = \dfrac{\alpha_3 + b_3}{2} = 1{,}1875$
- $f(c_3) = -0{,}067626 < 0$

β) $f(x) = x^3 - 2x - 5$

- f συνεχής στο $[2,3]$
- $f(2) = 8-4-5 = -1 < 0$
- $f(3) = 27-6-5 = 16 > 0$

$f(2)\cdot f(3) < 0$.

Σύμφωνα με Θ. Bolzano, η $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$.

Αρκεί να δείξω ότι η $f(x)=0$ έχει το πολύ 1 ρίζα στο $(2,3)$.

Υποθέτω ότι η $f(x)=0$ έχει 2 ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (2,3)$ με $\rho_1 < \rho_2$.

- f συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$
- f παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $f'(x) = 3x^2 - 2$

Ισχύει ότι $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$

Σύμφωνα με το Θ. Rolle, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ ώστε να: $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \xi^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \xi = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$,

το οποίο είναι αδύνατο, αφού $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\rho_1, \rho_2 \in (2,3)$.

Επομένως είναι άτοπο, και η εξίσωση έχει το πολύ 1 ρίζα στο $(2,3)$.

Όμως, δείξαμε προηγουμένως με το Θ. Bolzano πως η $f(x)=0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$. Συνεπώς η $f(x)=0$ έχει 1 ακριβώς ρίζα στο $(2,3)$.