Линейное программирование. Приемы моделирования

Моделирование импликации. Вариант 1

- Импликация – логическая связка условия и следствия из него: «Если …, то …»
- Пусть I – конечное множество индексов, x_i— булева переменная, $i \in I$ и y — непрерывная переменная, такая, что $0 \le y \le 1$. Тогда импликация

«**если** $x_i = 0$ для всех $i \in I$; **то** $y = 0$»

моделируется неравенством:

$$y \le \sum_{i \in I} x_i$$

Моделирование импликации. Вариант 1

- Убедимся, что связка действительно реализуется
  - Если антецедент импликации выполняется
- Убедимся, что неравенство не накладывает дополнительных ограничений
  - Если антецедент не выполнен – y может принимать любое значение [0; 1]

Моделирование импликации. Вариант 1

- Пусть I – конечное множество индексов, x_i— булева переменная, $i \in I$ и y — непрерывная переменная, такая, что $0 \le y \le c$. Тогда импликация

«**если** $x_i = 0$ для всех $i \in I$; **то** $y = 0$»

моделируется неравенством:

$$y \le c \sum_{i \in I} x_i$$

Моделирование импликации. Вариант 1. Пример

Задано конечное множество возможных мест производства I некоторой однородной продукции и конечное множество клиентов J.

Известны затраты c_i на организацию производства в пункте i. Продукция доставляется клиентам, стоимость доставки клиенту j из пункта i равна d_{ij} . Каждый клиент может обслуживаться только из одного пункта.

Необходимо определить, в каких пунктах следует разместить производство, чтобы обслужить всех клиентов с наименьшими суммарными затратами.

Моделирование импликации. Вариант 1. Пример

Переменные: $x_i \in \{0,1\}$ – в пункте i размещено производство, $y_{ij} \in \{0,1\}$ – клиент j обслуживается из пункта производства i.

Ограничения:

1) Каждый клиент обслуживается ровно одним предприятием;

2) «Если в пункте i производство не размещено, то клиент j из него не обслуживается», «если $x_i = 0$, то $y_{ij} = 0$».

$$\min \sum_{i \in I} c_i x_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} y_{ij}$$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = 1, \forall j \in J$$

Импликация

$$y_{ij} \le x_i, \forall i \in I, j \in J$$

Моделирование импликации. Вариант 1. Пример 2

Задано конечное множество возможных мест производства I некоторой однородной продукции и конечное множество клиентов J.

Пусть производственная мощность предприятия i составляет u_i единиц, а величина b_j задает спрос клиента j. Величины d_{ij} задают затраты на доставку единицы продукции от клиента j до пункта i.

Необходимо определить, в каких пунктах следует разместить производство, чтобы обслужить всех клиентов с наименьшими суммарными затратами.

Моделирование импликации. Вариант 1. Пример 2

Переменные: $x_i \in \{0,1\}$ – в пункте *i* размещено производство, y_{ij} – количество продукции клиенту *j* из пункта производства *i*.

$$\min \sum_{i\in I} c_i x_i + \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} d_{ij} y_{ij}$$

$$\sum_{i\in I} y_{ij} = b_j, \qquad j \in J$$

$$\sum_{j\in J} y_{ij} \le u_i x_i, \qquad i \in I$$

$$x_i \in \{0,1\}, \qquad i \in I$$

$$y_{ij} \ge 0, \qquad i \in I, j \in J$$

Моделирование импликации. Вариант 1. Пример 2

Переменные: $x_i \in \{0,1\}$ – в пункте *i* размещено производство, y_{ij} – количество продукции клиенту *j* из пункта производства *i*.

$$\min \sum_{i\in I} c_i x_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_{ij} y_{ij}$$

$$\sum_{i\in I} y_{ij} = b_j, \qquad j \in J$$

$$\sum_{j\in J} y_{ij} \le u_i x_i, \qquad i \in I$$

$$x_i \in \{0,1\}, \qquad i \in I$$

$$y_{ij} \ge 0, \qquad i \in I, j \in J$$

1) Сумма y_{ij} <= u_i
2) Импликация: Если $x_i = 0$, то каждый y_{ij} (и их сумма) равны 0

Моделирование импликации. Вариант 2

Пусть x_i — булева переменная, $i \in I$, где I — конечное множество индексов; I_0 и I_1 — непересекающиеся подмножества множества I и y — целочисленная или непрерывная, переменная, удовлетворяющая неравенству $0 \le y \le 1$.

Тогда логическая импликация

«**если** $x_i = 0$ для всех $i \in I_0$ и $x_i = 1$ для всех $i \in I_1$; **то** $y = 0$»

моделируется неравенством:

$$y \le \sum_{i \in I_0} x_i + \sum_{i \in I_1} (1 - x_i)$$

Моделирование импликации. Вариант 2

Пусть x_i — булева переменная, $i \in I$, где I — конечное множество индексов; I_0 и I_1 — непересекающиеся подмножества множества I и y — целочисленная или непрерывная, переменная, удовлетворяющая неравенству $0 \le y \le 1$.

Тогда логическая импликация

«если $x_i = 0$ для всех $i \in I_0$ и $x_i = 1$ для всех $i \in I_1$; то $\boldsymbol{y = 1}$»

моделируется неравенством:

$$(1 - y) \le \sum_{i \in I_0} x_i + \sum_{i \in I_1} (1 - x_i)$$

Моделирование импликации. Вариант 2. Пример

- **«Если** в пункте *s* размещено предприятие и другие открытые предприятия дальше, чем *s* по отношению к клиенту *i*, то клиент *i* должен обслуживаться из предприятия *s*»
- **Переменные** x_s – размещено ли предприятие в пункте *s*, y_{is} – назначен ли клиент *i* предприятию *s*. Пусть C_{is} – множество всех предприятий, которые находятся к клиенту *i* ближе, чем *s*. Тогда:

«если $x_s = 1$ и $x_t = 0$ для всех $t \in C_{is}$, то $y_{is} = 1$»

моделируется с помощью ограничения:

$$1 - y_{is} \leq (1 - x_s) + \sum_{t \in C_{is}} x_t$$

Выбор минимального элемента

Необходимо, чтобы переменная y принимала значение $\min(u_1, u_2)$.

Значит, должны выполняться следующие равенства:

$$y \le u_1 \text{ и } y \le u_2$$

и **одно из**:

$$y \ge u_1 \textbf{ или } y \ge u_2$$

Введем вспомогательные бинарные переменные x_1 и x_2, означающие, что выполняется неравенство 1 или 2 соответственно.

Тогда:

$$\begin{gathered} y \le u_1 \\ y \le u_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ y \ge u_1 - W(1 - x_1) \\ y \ge u_2 - W(1 - x_2) \end{gathered}$$

Линеаризация в математических моделях

Линеаризация произведения

Если в задаче встречается квадратичное выражение вида $x_i x_j$, (x_i, $x_j \in \{0,1\}$), его можно преобразовать в линейный вид.

Введем новую булеву переменную y_{ij}, такую, что $y_{ij} = x_i x_j$, т.е.

$y_{ij} = 1$ **тогда и только тогда**, когда $x_i = 1$ и $x_j = 1$,

То есть,

если $y_{ij} = 1$, **то** $x_i = 1$

если $y_{ij} = 1$, **то** $x_j = 1$

если $x_i = 1$ и $x_j = 1$, **то** $y_{ij} = 1$

Таким образом,

$$1 - x_i \leq 1 - y_{ij}$$
$$1 - x_j \leq 1 - y_{ij}$$
$$1 - y_{ij} \leq 1 - x_i + 1 - x_j$$

Линеаризация произведения. Пример. Задача о клике

Задан неориентированный граф *G* с множеством вершин *V* и множеством ребер *E*. Задача заключается в том, чтобы найти максимальный (по количеству вершин) полный подграф, т. е. клику.

Переменные: x_v – входит ли вершина *v* в подграф.

Подграф является кликой тогда и только тогда, когда он не содержит пару вершин, между которыми нет ребра в исходном графе, то есть

Если $x_w = 1$, **то** $x_v = 0$, для $(v, w) \notin E$.

Тогда:

$$\max \sum_{v \in V} x_v$$

$$x_v \leq 1 - x_w, \qquad (v, w) \notin E$$

$$x_v \in \{0,1\}, \qquad v \in V$$

Линеаризация произведения. Пример. Задача о клике максимального веса

Переменные: x_v – входит ли вершина v в подграф. y_{vw} – входит ли в подграф ребро (v, w).

Очевидно, $y_{vw} = x_v x_w$, т.е.

$y_{vw} = 1$ **тогда и только тогда**, когда $x_v = 1$ и $x_w = 1$,

Тогда:

$$\max \sum_{(v,w)\in E} c_{vw} y_{vw}$$

$$x_v \leq 1 - x_w, \qquad (v, w) \notin E$$

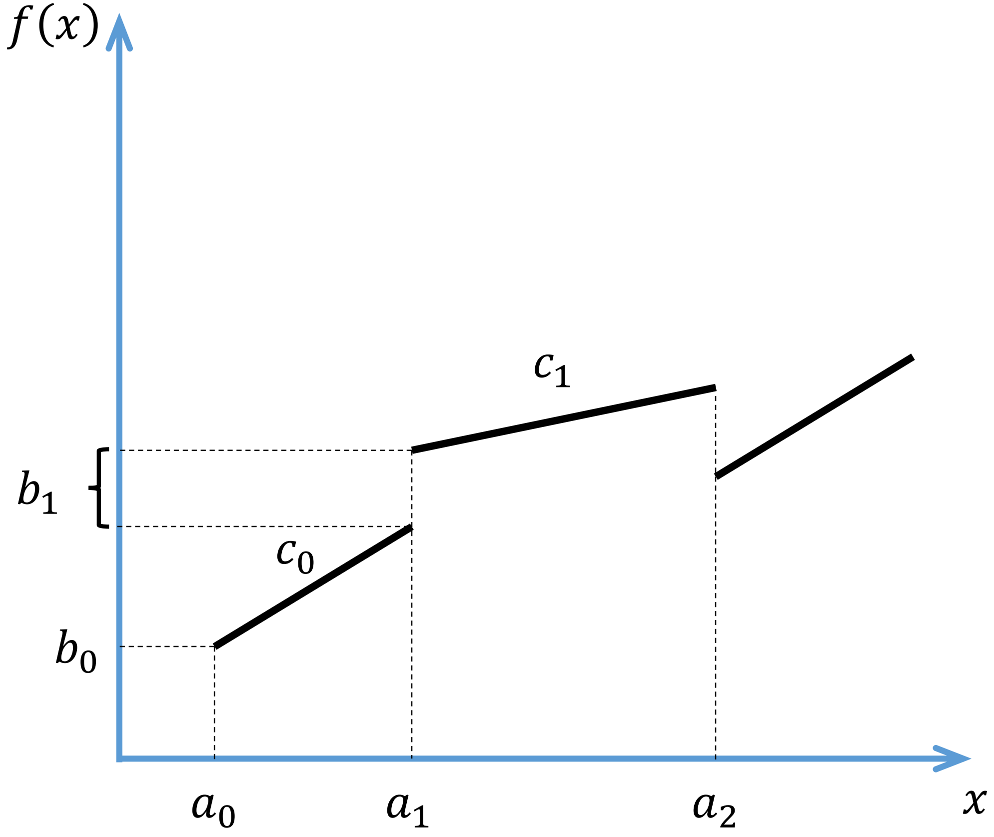
$$1 - y_{vw} \leq 1 - x_v$$

$$1 - y_{vw} \leq 1 - x_w$$

$$1 - y_{vw} \leq 1 - x_v + 1 - x_w$$

Кусочно-линейные функции. Вариант 1

Пусть на отрезке $[a_0, a_k]$ задана кусочно-линейная функция $f(x)$. Требуется смоделировать поиск минимума функции.



$$f(x) = \begin{cases} b_0, \text{если } x = a_0 \\ b_0 + c_0(x - a_0), \text{если } a_0 < x \le a_1 \\ b_0 + c_0(a_1 - a_0) + b_1 + c_1(x - a_1), \\ \text{если } a_1 < x \le a_2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{k-1} [b_{i-1} + c_{i-1}(a_i - a_{i-1})] + b_{k-1} + c_{k-1}(x - a_{k-1}), \\ \text{если } a_{k-1} < x \le a_k \end{cases}$$

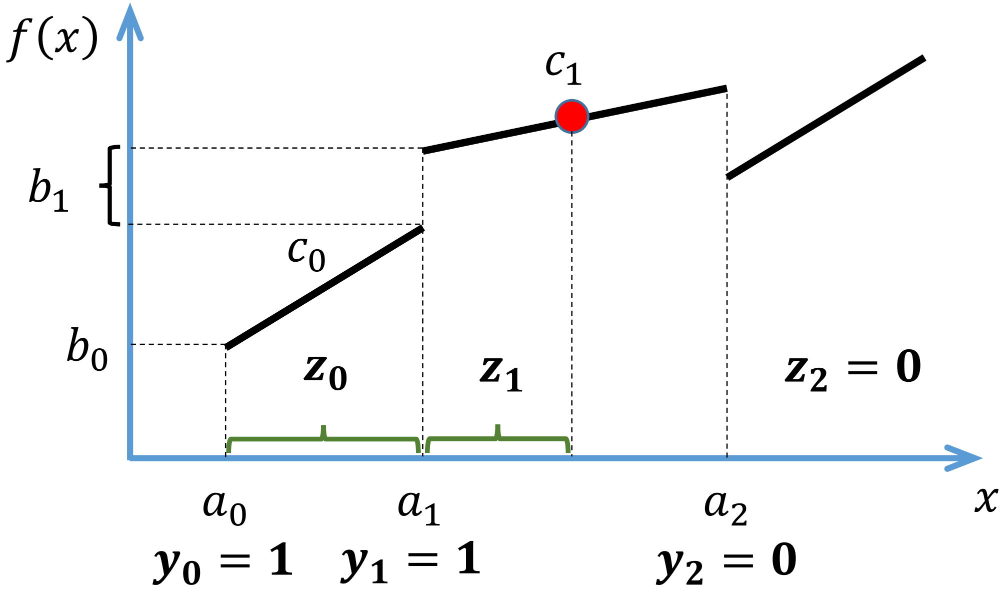
Кусочно-линейные функции. Вариант 1

Введем:

1) Булевы переменные:

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{если } x > a_i \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

2) Неотрицательные переменные z_i – какая часть (в абсолютных единицах) от числа x лежит на интервале $[a_i; a_{i+1}]$.



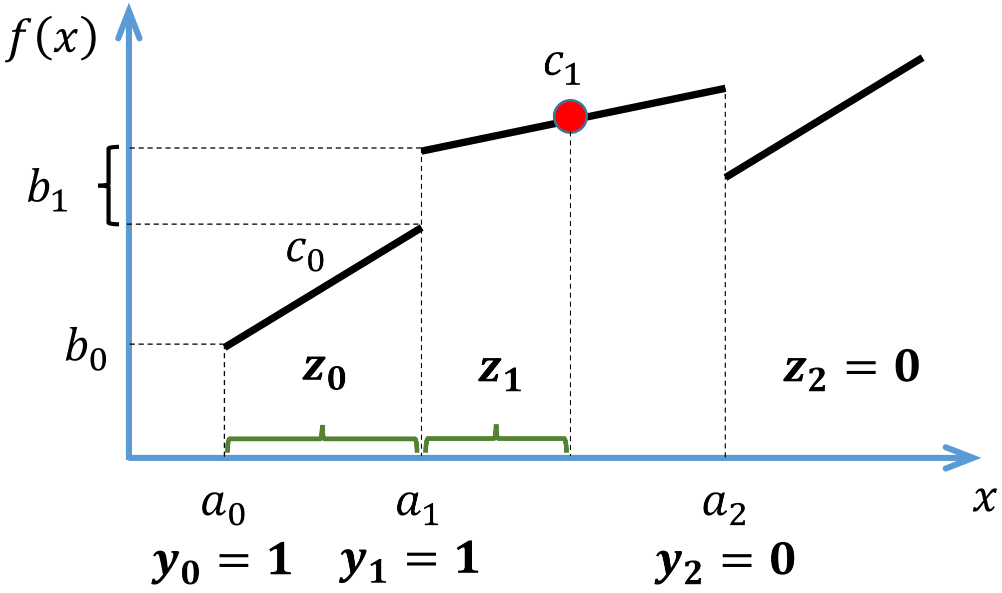
Кусочно-линейные функции. Вариант 1

Задача минимизации сводится к следующей:

$$\min \sum_{i=0}^{k-1} (b_i y_i + c_i z_i)$$

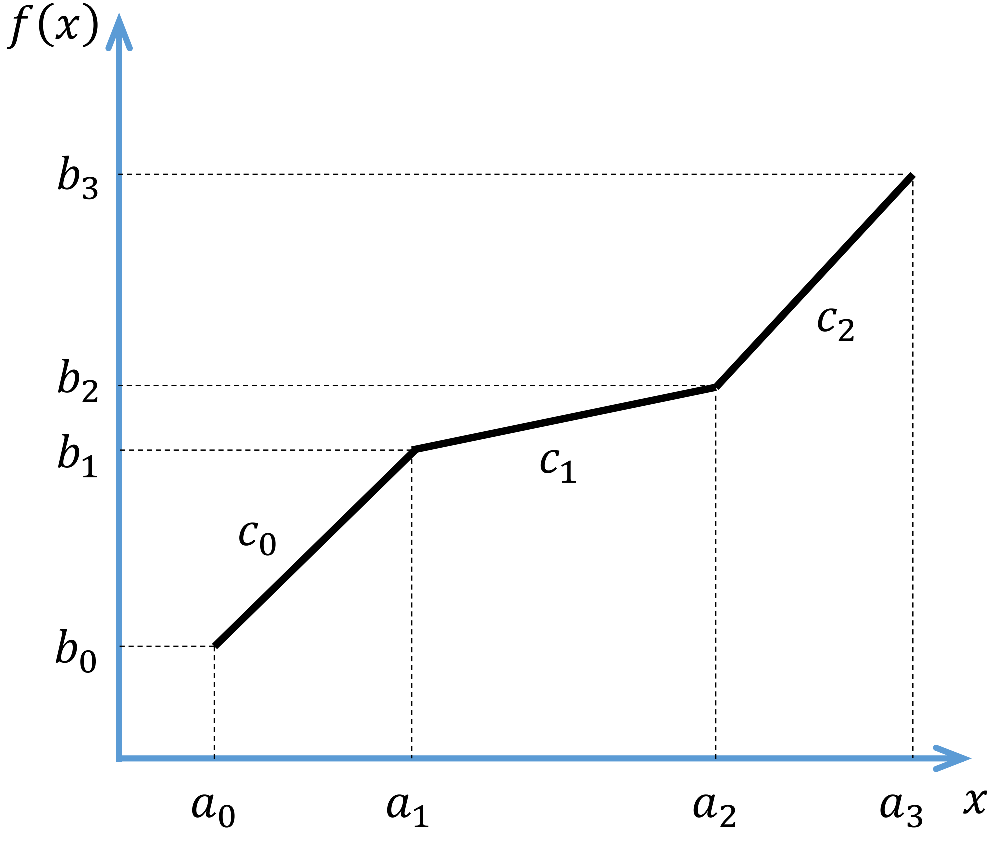
При ограничениях:

$$y_{i+1} \le y_i$$
$$(a_1 - a_0) y_1 \le z_0 \le (a_1 - a_0) y_0$$
$$(a_2 - a_1) y_2 \le z_1 \le (a_2 - a_1) y_1$$
$$\dots$$
$$0 \le z_{k-1} \le (a_k - a_{k-1}) y_{k-1}$$
$$x = \sum_{i=0}^{k-1} z_i + a_0$$
$$x \ge 0, y_i \in \{0,1\}, z_i \ge 0, i = 0, \dots, (k-1)$$



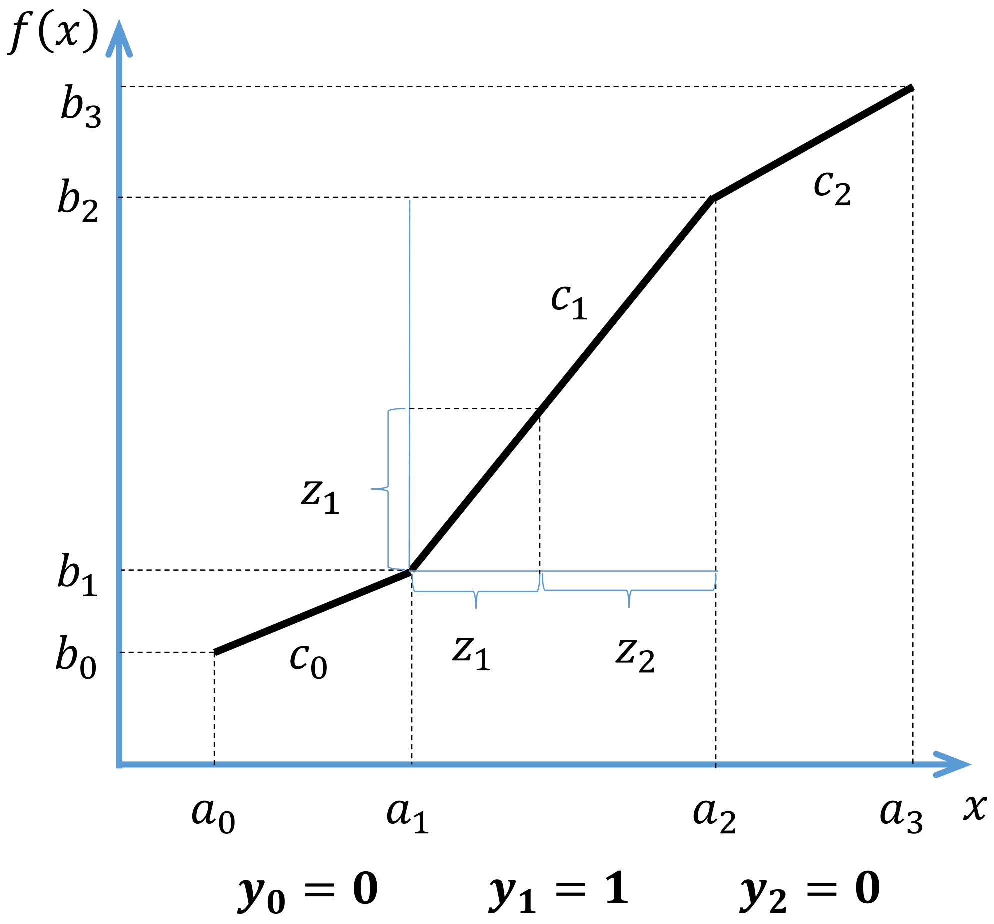
Кусочно-линейные функции. Вариант 2

Пусть на отрезке $[a_0, a_k]$ задана кусочно-линейная функция $f(x)$. Требуется смоделировать поиск минимума функции.



$$f(x) = \begin{cases} b_0, \text{если } x = a_0 \\ b_0 + c_0(x - a_0), \text{если } a_0 < x \le a_1 \\ b_1 + c_1(x - a_1), \text{если } a_1 < x \le a_2 \\ \\ \dots \\ b_{k-1} + c_{k-1}(x - a_{k-1}), \text{если } a_{k-1} < x \le a_k \end{cases}$$

Кусочно-линейные функции. Вариант 2



Введем:

1) Булевы переменные:

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{если } a_i \le x < a_{i+1} \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

2) Неотрицательные переменные z_i – коэффициент при a_i (или b_i) в значении x (или y).

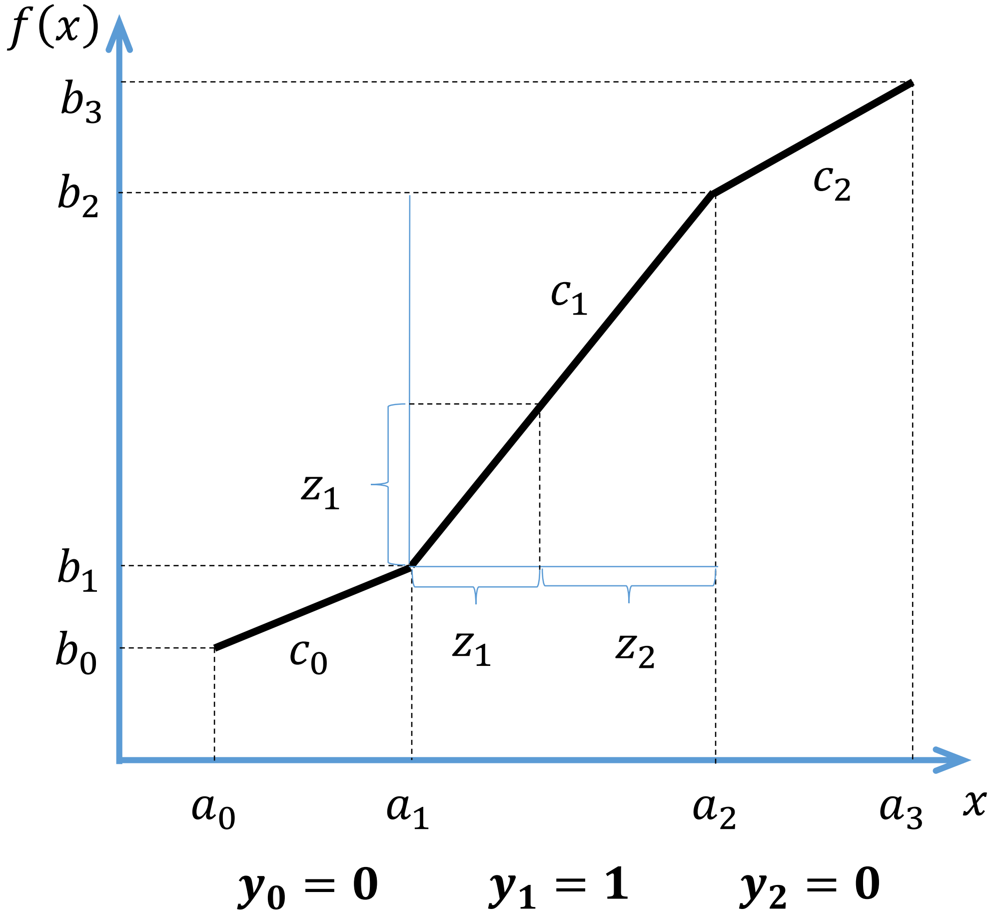
Обратите внимание, что внутри интервала $[a_i; a_{i+1}]$ x может быть представлен в виде:

$$x = z_i a_i + (1 - z_i) a_{i+1}$$

или:

$$x = z_i a_i + z_{i+1} a_{i+1}$$
$$z_i + z_{i+1} = 1$$

Кусочно-линейные функции. Вариант 2



Задача минимизации сводится к следующей:

$$\min \sum_{i=0}^{k} b_i z_i$$

При ограничениях:

$$\sum\nolimits_{i=0}^{k-1} y_i = 1$$

$$\sum\nolimits_{i=0}^{k} z_i = 1$$

$$z_0 \le y_0$$

$$z_1 \le y_0 + y_1$$

$$\dots$$

$$z_k \le y_{k-1} + y_k$$

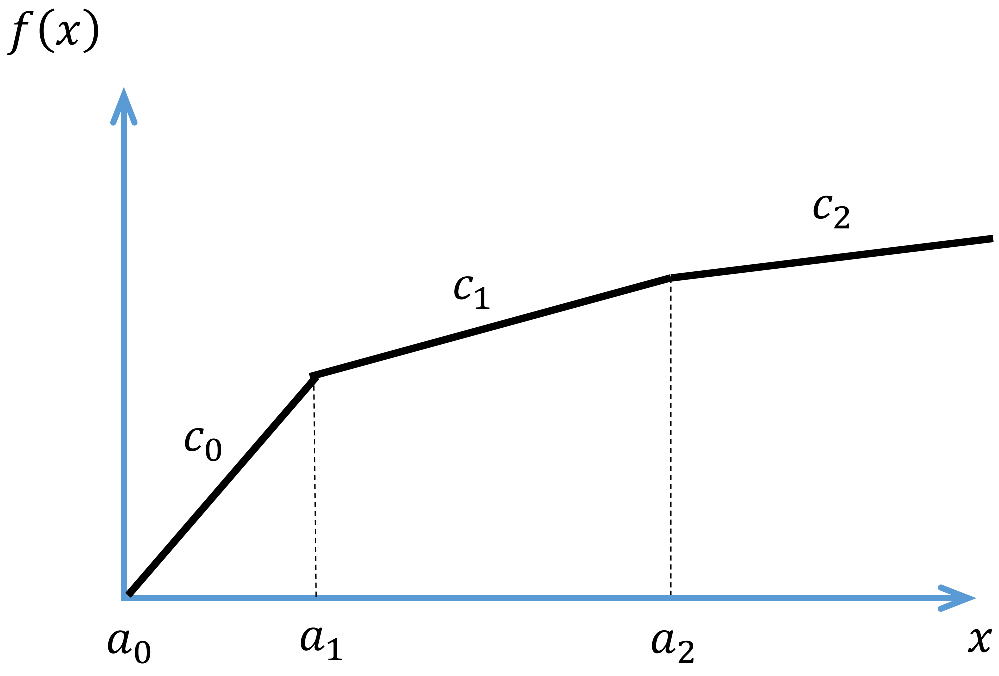
$$x = \sum_{i=0}^{k} a_i z_i$$

$$y_i \in \{0,1\}, i \in \{0, \dots, k-1\}$$

$$z_i \ge 0, i \in \{0, \dots, k\}$$

Кусочно-линейные функции. Вариант 3

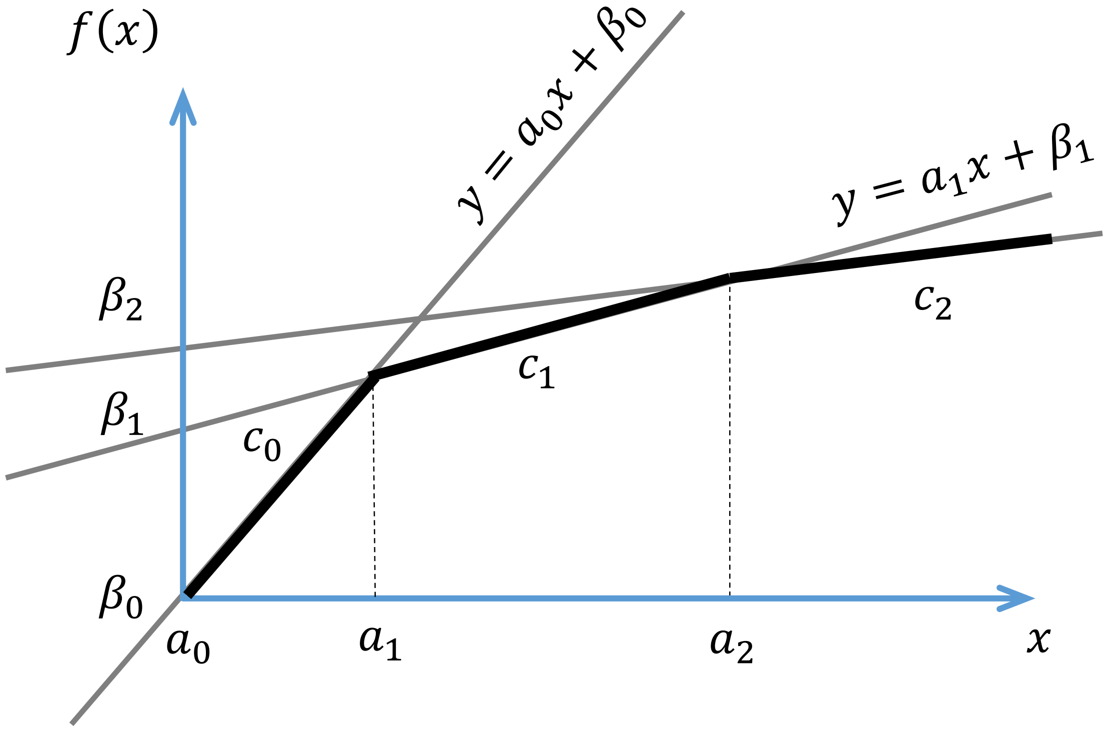
Пусть на отрезке $[0, a_k]$ задана **выпуклая** кусочно-линейная функция $f(x)$, значение которой используется в качестве правой части какого-либо ограничения.



Например, подобным образом часто может быть смоделирована зависимость убывающего эффекта от каких-либо вложений.

Кусочно-линейные функции. Вариант 3

Функция (с учетом выпуклости) является **нижней огибающей** набора функций-фрагментов. Ее значение в каждой точке области определения равно **минимуму значений функций**, описывающих каждый из ее фрагментов.



Таким образом, значение функции может быть смоделировано переменной f и следующим набором ограничений:

$$f \leq a_0x + \beta_0$$
$$f \leq a_1x + \beta_1$$

…

$$f \leq a_kx + \beta_k$$

Резюме

- Бинарные переменные можно использовать для моделирования ряда полезных условий и ограничений:
  - Импликация
  - Минимум-максимум
  - Альтернативные ограничения
  - Линеаризации
- Литература для дальнейшего углубления в тему:
  - Алексеева Е. В. Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи: Учеб. пособие