Динамическое программирование.
Задача о рюкзаке

Условие задачи о рюкзаке

- Есть набор товаров (n штук), каждый из которых характеризуется весом q_i и стоимостью p_i.
  - (6, 9.5), (4, 6), (4, 6), (3, 4)
- Рюкзак, загрузка которого не должна превышать Q_{max}
  - 12
- Необходимо выбрать такой набор вещей, которые максимизируют стоимость при условии выполнения требования по максимальной загрузке

Перебор (в том числе, полный)

i	q	p
1	6	9.5
2	4	6
3	4	6
4	3	4
Q_{max}	12	

- Перебрать все варианты: $O(2^n)$
  - {} -> (0, 0)
  - {1} -> (6, 9.5)
  - {2} -> (4, 6)
  - {3} -> (4, 6)
  - {1,2,3} -> (**14**, 21.5)
  - …
  - {2,3,4} -> (11, 16)

  16 вариантов
- Улучшение:
  - Поиск с возвратами
  - Метод ветвей и границ
  - (*) – вернуться к этому позже

«Жадные» эвристики

i	q	p
1	6	9.5
2	4	6
3	4	6
4	3	4
Q_{max}	12	

- «Жадный» алгоритм – принятие локально-оптимальных решений на каждом шаге…
- Эвристика (эвристический алгоритм) – алгоритм, не являющийся гарантированно точным или оптимальным (как правило, построенный в соответствии со «здравым смыслом»)
- Варианты:
  - Берем самый дорогой из тех, что можем: 1, 2 –> 15.5
  - Берем с наибольшим удельным весом: 1, 2 -> 15.5
- Быстро – O(n^2) или даже O($n\log n$), но не находит максимума
- NP-трудная

Динамическое программирование

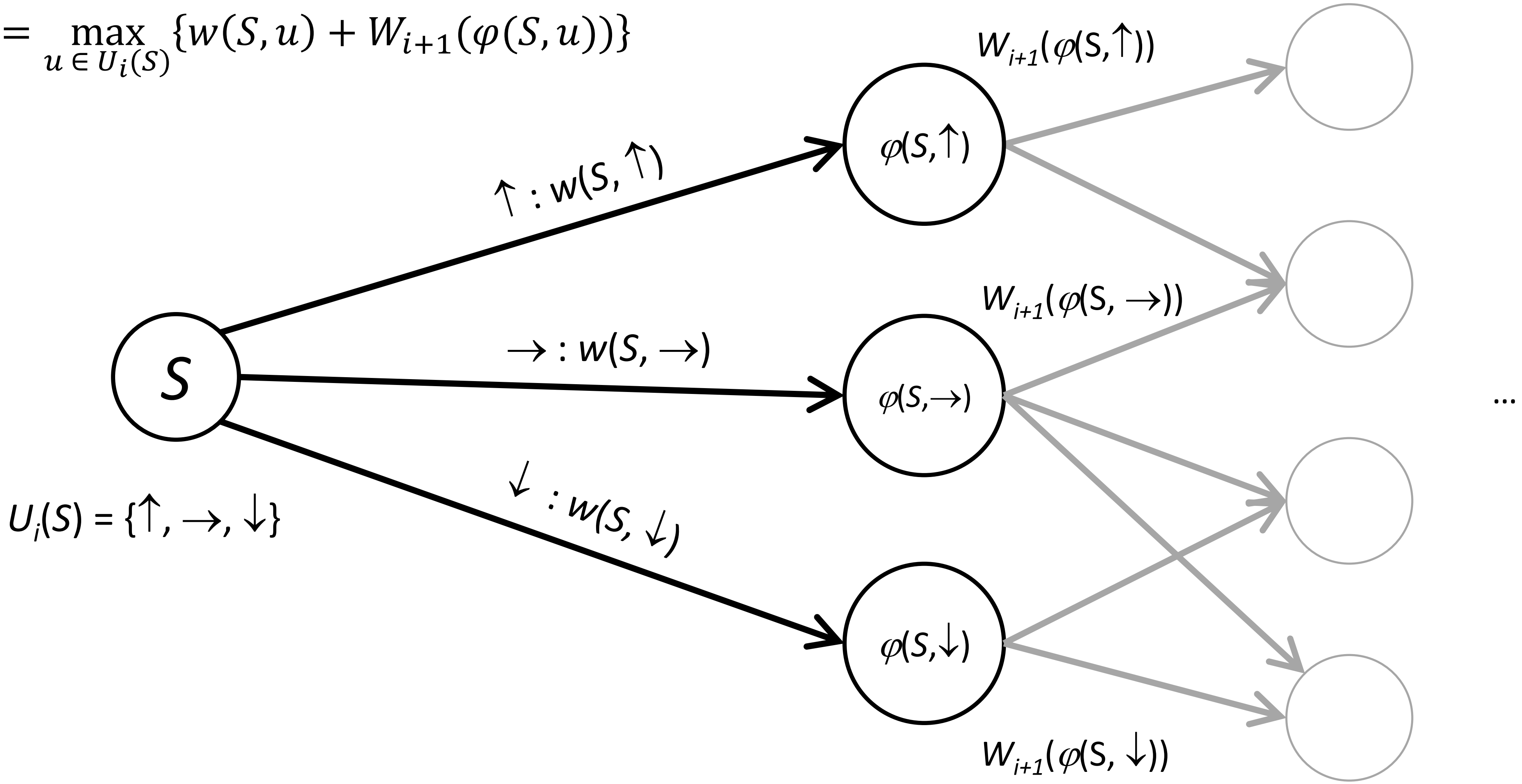
- Принцип ДП (принцип Беллмана):
  - Каково бы ни было **состояние системы** в результате какого-то числа шагов, мы должны выбирать управление на ближайшем шаге так, чтобы оно**, в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах**, приводило к максимальному выигрышу **на всех оставшихся шагах, включая данный**.

$$W_i(S_i) = \max_{u_i \in U_i(S_i)} \{w_i(S_i, u_i) + W_{i+1}(\varphi_i(S_i, u_i))\}$$

- $W_i(S_i)$ – условный оптимальный выигрыш на всех шагах от *i*-того и до последнего;
- $u_i(S_i)$ – управление на *i*-том шаге. То управление, при котором $W_i(S_i)$ максимально – условно-оптимальное управление.

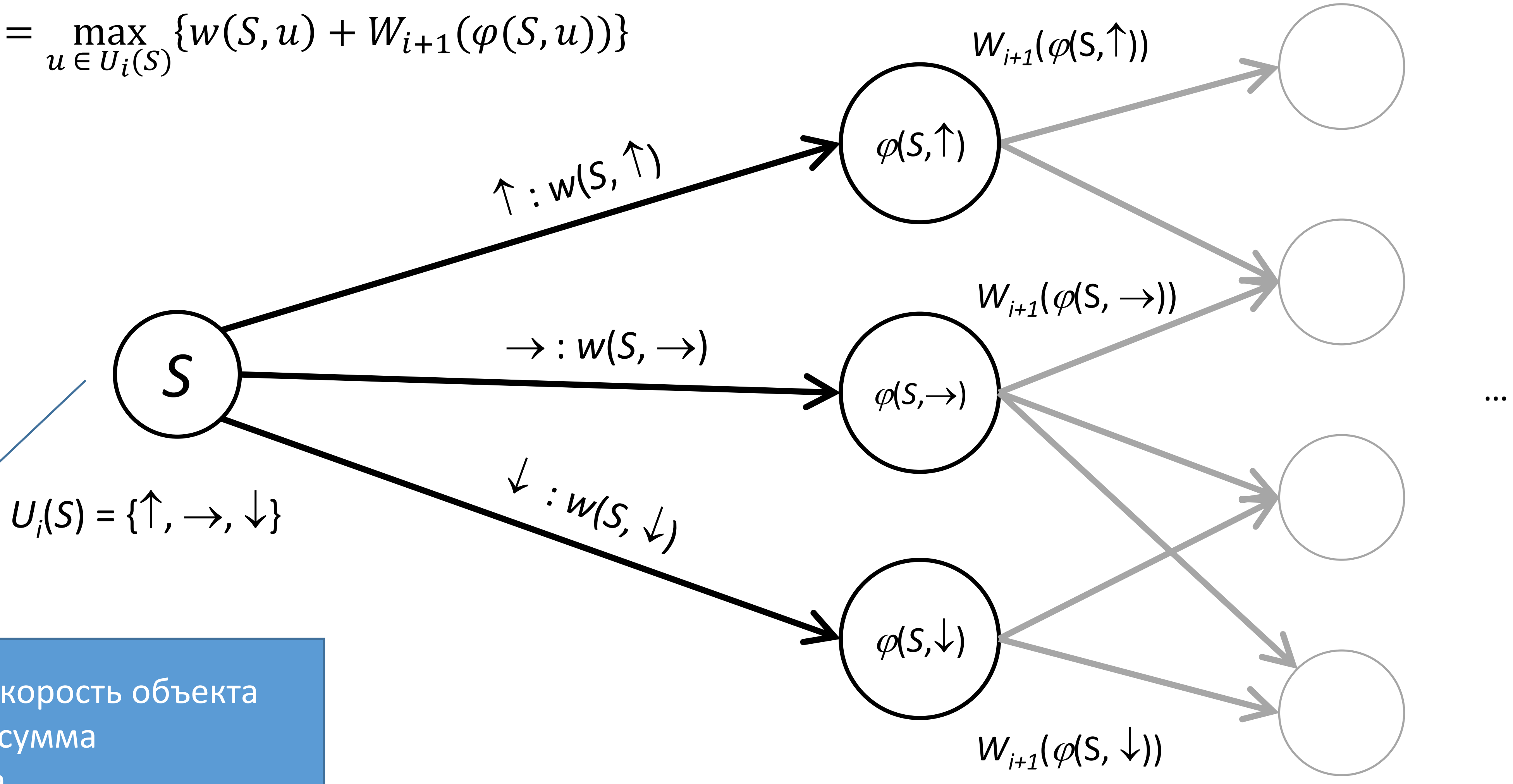
Динамическое программирование

$$W_i(S) = \max_{u \in U_i(S)} \{w(S,u) + W_{i+1}(\varphi(S,u))\}$$



Динамическое программирование

$$W_i(S) = \max_{u \in U_i(S)} \{w(S,u) + W_{i+1}(\varphi(S,u))\}$$



- Координаты и скорость объекта
- Располагаемая сумма
- Сложная задача (декомпозируемая на простые)

Динамическое программирование. Алгоритм (1)

- Шаг 1: Выбрать способ описания процесса.
  - **Этапы** – предметы в некотором порядке (фиксированном)
    - (6, 9.5), (4, 6), (4, 6), (3, 4)
  - **Выигрыш** – это стоимость предметов в рюкзаке.
  - **Управление** – это то, что мы можем контролировать. В данном случае – положить предмет или не положить предмет. Но управляем мы в разных точках (их 4) поэтому u_i, $i \in \{1..4\}$.
  - **Состояние.** Неформально это можно определить как все характеристики системы, важные с точки зрения решаемой задачи. В задачах распределения ресурсов для идентификации параметров состояния может быть важным анализ того, что именно **ограничивает** управление. В данном случае, это вместимость рюкзака.
    - Сначала (в первой точке) это Q_{max}. Потом – неясно.

Динамическое программирование. Алгоритм (2)

- Шаг 2: Записать выигрыш на *i*-том шаге в зависимости от состояния системы и управления.
  - $w_i(S_i, u_i) = p_i * u_i$
- Шаг 3: Записать для *i*-того шага функцию, выражающую изменения состояния системы под влиянием управления u_i:
  - $\varphi_i(S_i, u_i) = S_i - q_i * u_i$
- Шаг 4: Записать **основное функциональное уравнение**, включающее функцию $W_i(S_i)$ через $W_{i+1}(S_i)$:

$$W_i(S_i) = \max_{u_i \in \{u | u \in \{0,1\}, u q_i \leq S_i\}} \{p_i u_i + W_{i+1}(S_i - q_i u_i)\}$$

Динамическое программирование. Алгоритм (3)

- Шаг 5: Найти функцию условного оптимального выигрыша для последнего этапа:

$$W_i(S_i) = \max_{u_i \in \{u | u \in \{0,1\}, u q_i \leq S_i\}} \{p_i u_i\}$$

- Шаг 6: Вычислить $W_i(S_i)$, зная $W_{i+1}(S_i)$.

- Шаг 7: Зная $W_1(Q_{max})$ и оптимальное управление $u_1^* = u_1^*(Q_{max})$, определить $u_2^* = Q_{max} - u_1^* q_i$ и далее остальные u_i^*

Динамическое программирование. Пример вычислений. Этап 4

i	q	p
1	6	9.5
2	4	6
3	4	6
4	3	4
Q_{max}	12	

Этап (предмет) 4
Вес: 3
Стоимость: 4

$$W_4(S_4) = \max_{u_i \in \{u|u\in\{0,1\}, uq_i \le S_i\}} \{p_i u_i\}$$

S_4	$W_4(S_4)$	$U_4(S_4)$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Динамическое программирование. Пример вычислений. Этап 3

i	q	p
1	6	9.5
2	4	6
3	4	6
4	3	4
Q_{max}	12	

$$W_3(S_3) = \max\{p_3u_3 + W_4(S_3 - q_3u_3)\}$$

Этап (предмет) 3
Вес: 4
Стоимость: 6

S_3	$W_3(S_4)$	$U_3(S_3)$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Этап (предмет) 4
Вес: 3
Стоимость: 4

S_4	$W_4(S_4)$	$U_4(S_4)$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	4	1
4	4	1
5	4	1
6	4	1
7	4	1
8	4	1
9	4	1
10	4	1
11	4	1
12	4	1

Динамическое программирование. Пример вычислений. Этап 1

i	*q*	*p*
1	6	9.5
2	4	6
3	4	6
4	3	4
Q_{max}	12	

Этап (предмет) 1
Вес: 6
Стоимость: 9.5

S_1	$W_1(S_1)$	$U_1(S_1)$
12		

U_1=0:
$0 + W_2(12) = 16$

U_1=1:
$9.5 + W_2(6) = 15.5$

Этап (предмет) 2
Вес: 4
Стоимость: 6

S_2	$W_2(S_2)$	$U_2(S_2)$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	4	0
4	6	1
5	6	1
6	6	1
7	10	1
8	10	1
9	10	1
10	10	1
11	16	1
12	16	1

Этап (предмет) 3
Вес: 4
Стоимость: 6

S_3	$W_3(S_3)$	$U_3(S_3)$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	4	0
4	6	1
5	6	1
6	6	1
7	10	1
8	10	1
9	10	1
10	10	1
11	10	1
12	10	1

Этап (предмет) 4
Вес: 3
Стоимость: 4

S_4	$W_4(S_4)$	$U_4(S_4)$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	4	1
4	4	1
5	4	1
6	4	1
7	4	1
8	4	1
9	4	1
10	4	1
11	4	1
12	4	1

Сложность точных алгоритмов для задачи о рюкзаке

- Перебор: $O(2^n)$

- Псевдополиномиальный алгоритм (динамическое программирование): $O(n * Q_{max})$

(Собирались вернуться позже)

$$\sum_{i=1}^{4} u_i p_i \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{4} u_i q_i \leq Q_{max}$$

$$u_i \in \{0,1\}$$

На GMPL

```
param p{i in 1..4} >= 0;
param q{i in 1..4} >= 0;
param Qmax >= 0;

var u{i in 1..4} binary;

maximize profit: sum {i in 1..4} u[i]*p[i];

s.t. weight: sum {i in 1..4} u[i]*q[i] <= Qmax;

solve;
```

$$\sum_{i=1}^{4} u_i p_i \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{4} u_i q_i \leq Q_{max}$$

$$u_i \in \{0,1\}$$

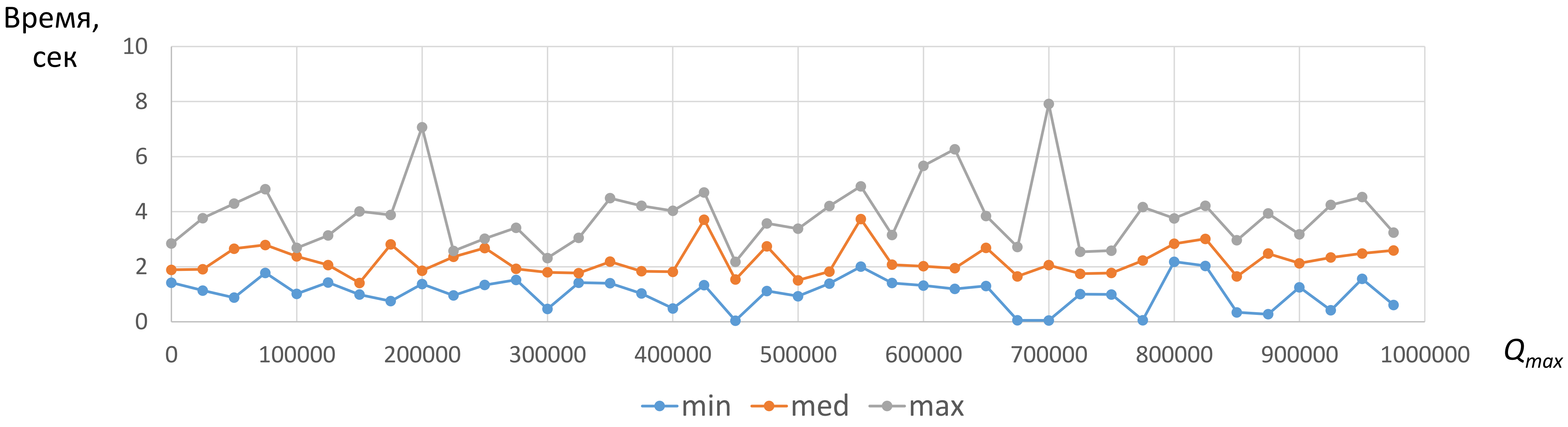
Время решения

- Тестовые задачи:
  - Количество объектов: 2000
  - Вес и стоимость: равномерно случайно распределены на [50; 1000]
  - Размер рюкзака изменяется от 10 до 1000000
- Время решения:

???

Время решения

- Тестовые задачи:
  - Количество объектов: 2000
  - Вес и стоимость: равномерно случайно распределены на [50; 1000]
  - Размер рюкзака изменяется от 10 до 1000000
- Время решения:



Промежуточное резюме

- Динамическое программирование – метод, позволяющий конструировать псевдополиномиальные алгоритмы для сложных задач комбинаторной оптимизации
- Несмотря на экспоненциальную сложность *некоторых* задач (целочисленного линейного программирования в общем), конкретные экземпляры задач комбинаторной оптимизации могут быть достаточно «простыми» для решателей
  - Поэтому всегда имеет смысл моделировать задачу и пытаться решить ее стандартным решателем
  - Только если это не приводит к желаемому результату, начинать разработку специфической процедуры решения – точной или приближенной