GROUPE DE PICARD DES VARIÉTÉS DE MODULES DE FIBRÉS SEMI-STABLES SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES

J.–M. DRÉZET ET M.S. NARASIMHAN

目录

0 引言

设 X 为 $\mathbb{C}$ 上一条光滑射影代数曲线, 其亏格 $g \geq 2$;r,d 为整数且 $r \geq 2$. 记 $U(r,d)$ 为 X 上秩 r, 度 d 的半稳定代数向量丛的模空间,$U_s(r,d)$ 为 $U(r,d)$ 中对应稳定丛的开子集. 已知 $U(r,d)$ 是不可约, 正规的射影代数簇. 若 r 与 d 不互质, 则 $U(r,d)$ 非光滑, 除非在例外情形:$g=2$,$r=2$ 且 d 为偶数 (参见 [17]). 下文假设不处于该例外情形. 此时有 $\operatorname{codim}_{U(r,d)}\left(U(r,d)\backslash U_s(r,d)\right) \geq 2$, 且 $U(r,d)\backslash U_s(r,d)$ 是 $U(r,d)$ 的奇点轨迹. 若 L 是 X 上度为 d 的线丛, 记 $U(r,L)$(相应地 $U_s(r,L)$) 为 $U(r,d)$(相应地 $U_s(r,d)$) 中对应行列式同构于 L 的向量丛的闭子簇. 本文旨在研究 Pic($U(r,d)$) 与 Pic($U(r,L)$) 的结构.

0.1 $U(r,d)$ 与 $U(r,L)$ 的因子性

首要结果为

定理 A. *簇 $U(r,d)$ 与 $U(r,L)$ 均为局部因子环.*

简述定理证明思路. 对任意代数簇 Y, 记 Cl(Y) 为 Y 上 Weil 除子的线性等价类群. 有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Pic}(U(r,d)) & \xrightarrow{\phi} & \operatorname{Cl}(U(r,d)) \\
\downarrow{\scriptstyle r_1} & & \downarrow{\scriptstyle r_2} \\
\operatorname{Pic}\left(U_s(r,d)\right) & \xrightarrow{\phi_s} & \operatorname{Cl}\left(U_s(r,d)\right)
\end{array}$$

53

其中水平箭头为典范同态, 垂直箭头为限制映射. 因 $U_s(r,d)$ 光滑,ϕ_s 是双射; 同理因 $\operatorname{codim}_{U(r,d)}\left(U(r,d)\backslash U_s(r,d)\right) \geq 2$,$r_2$ 亦是双射. 我们将证明 $U(r,d)$ 局部因子当且仅当 ϕ 是同构, 这等价于 r_1 为同构.r_1 的单射性由 $U(r,d)$ 的正规性保证, 故核心在于证明 r_1 的满射性.

为此, 考虑将 $U(r,d)$ 构造为 Grothendieck 概形中光滑开集 R^{ss} 在 PGL(q) 型群下的良商 (参见 1.1.4). 设

$$\pi : R^{ss} \longrightarrow U(r,d)$$

为商态射,$R^s = \pi^{-1}\left(U_s(r,d)\right)$,$\pi_s : R^s \to U_s(r,d)$ 为 π 的限制. 记 $\operatorname{Pic}^G\left(R^{ss}\right)$ 为 R^{ss} 上 PGL(q)-线丛的同构类群 (即 R^{ss} 上配备 PGL(q) 线性代数作用的代数线丛). 类似定义 $\operatorname{Pic}^G\left(R^s\right)$.

由于 PGL(q) 在 R^s 上自由作用, 可得自然同构

$$\operatorname{Pic}\left(U_s(r,d)\right) \simeq \operatorname{Pic}^G\left(R^s\right)$$

(若 L 是 $U_s(r,d)$ 上的线丛, 对应 PGL(q)-线丛 $\pi_s^*(L)$; 反之, 若 L' 是 R^s 上的 PGL(q)-线丛, 则存在良商 $L'/\operatorname{PGL}(q)$, 其自然成为 $U_s(r,d)$ 上的代数线丛, 且 L' 对应于此商丛).

进一步, 可证限制同态

$$\operatorname{Pic}^G(R^{ss}) \longrightarrow \operatorname{Pic}^G(R^s)$$

是满射. 因此, 对任意 $U_s(r,d)$ 上线丛 L, 可定义 PGL(q)-线丛 L' 于 R^{ss} 使得 $\pi_s^*(L) \simeq L'_{|R^s}$.

后续将运用"下降引理"给出存在线丛 $\overline{L}$ 于 $U(r,d)$ 使得 $\pi^*(\overline{L}) \simeq L'$ 的充分条件. 此引理的最终版本归功于 Kempf. 先前我们采用更复杂的版本 (需对 L' 验证更多条件), 受 [1] 命题 2.3 启发. 需验证的条件为: 对 R^{ss} 中任意闭点 y, 若其轨道在 R^{ss} 中闭, 则 PGL(q) 在 y 的稳定子群平凡作用于纤维 L'_y. 我们将验证此条件成立, 从而保证 $\overline{L}$ 存在.

所得线丛 $\overline{L}$ 即为 L 的延拓. 证明过程中还得到同构

$$\operatorname{Pic}(U(r,d)) \simeq \operatorname{Pic}^G(R^{ss}).$$

对于 $U(r,L)$, 仅需将 R^{ss} 替换为 $\pi^{-1}(U(r,L))$ 并重复上述证明.

注记. 容易看出 $U(r,d)$ 奇点处局部环的完备化未必是因子环 (参见 [3]).

54

0.2 Pic($U(r,d)$) 与 Pic($U(r,L)$) 的描述

我们给出 Pic($U(r,d)$) 的两种描述. 第一种推广了 Jacobian 簇的"theta 除子"概念至半稳定丛模空间; 第二种利用 X 的 Grothendieck 群 $K(X)$ 的子群.

0.2.1 广义 theta 除子

设 $n = \operatorname{PGCD}(r,d)$. 取 X 上向量丛 F 满足

$$\deg(F) = \frac{-d + r(g-1)}{n}, \quad \operatorname{rg}(F) = \frac{r}{n}.$$

此条件保证对所有秩 r, 度 d 的向量丛 E 有 $\chi(E \otimes F) = 0$. 据 [8], 存在此类 F 及稳定丛 E 使得

$$H^0(X, E \otimes F) = H^1(X, E \otimes F) = 0.$$

定义 Θ_F^s(相应地 $\Theta_{F,L}^s$) 为 $U_s(r,d)$(相应地 $U_s(r,L)$) 中满足 $H^0(X, E \otimes F) \neq 0$ 的稳定丛 E 对应的点集.

可证此为 $U_s(r,d)$(相应地 $U_s(r,L)$) 的超曲面. 记 Θ_F(相应地 $\Theta_{F,L}$) 为其在 $U(r,d)$(相应地 $U(r,L)$) 中的闭包, 称为 theta **除子**.

由定理 A,Θ_F(相应地 $\Theta_{F,L}$) 的理想层是线丛 $\mathcal{O}(\Theta_F)$(相应地 $\mathcal{O}(\Theta_{F,L})$). 这些线丛亦可由 universal 性质定义: 例如 $\mathcal{O}(\Theta_F)$ 由以下性质唯一确定: 对任意代数簇 S 及 S 参数化的半稳定丛族 E, 存在"跳跃子概形" $Z \subset S$ 使得 $H^0(E_s \otimes F) \neq 0$ 当且仅当 $s \in Z$, 且 $\mathcal{O}(Z)$ 局部自由. 若 $f_E : S \to U(r,d)$ 为由 E 诱导的态射, 则有同构

$$f_E^*(\mathcal{O}(\Theta_F)) \simeq \mathcal{O}(Z).$$

$\mathcal{O}(\Theta_{F,L})$ 有类似定义 (下文不依赖这些事实). 我们将证明:

定理 B. *(a)* 线丛 $\mathcal{O}(\Theta_{F,L})$ 与 F 的选取无关.

(b) 群 $\mathrm{Pic}(U(r,L))$ 同构于 $\mathbb{Z}$, 且由 $\mathcal{O}(\Theta_{F,L})$ 生成.

当 $n=1$ 时,Seshadri 曾用不同方法证明 $\mathrm{Pic}(U(r,L)) \simeq \mathbb{Z}$(参见 [20]). 55
现考察 $\mathrm{Pic}(U(r,d))$. 记 $J^{(d)}$ 为 X 上度 d 线丛的 Jacobian 簇. 典范态射

$$\det : U(r,d) \longrightarrow J^{(d)}$$

允许将 $\mathrm{Pic}\left(J^{(d)}\right)$ 视为 $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ 的子群. 则有:

定理 C. 包含关系 $\mathrm{Pic}\left(J^{(d)}\right) \subset \mathrm{Pic}(U(r,d))$ 与 $\mathbb{Z}.\mathcal{O}(\Theta_F) \subset \mathrm{Pic}(U(r,d))$ 诱导同构

$$\mathrm{Pic}(U(r,d)) \simeq \mathrm{Pic}\left(J^{(d)}\right) \oplus \mathbb{Z}.$$

我们将在另一种描述中阐明 $\mathcal{O}(\Theta_F)$ 对 F 的依赖性.

0.2.2 X **的 Grothendieck 群与** $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ 设 S 为代数簇.$U(r,d)$ 的 S-参数化丛族指 $S \times X$ 上平坦于 S 的向量丛 E, 使得对 S 的任意闭点 s,$E_s = E_{|\{s\}\times X}$ 为半稳定, 秩 r, 度 d. 记 p_S,p_X 分别为投影 $S \times X \to S$ 与 $S \times X \to X$. 两族 E,E' 等价若存在 S 上线丛 L 使得 $E' \simeq E \otimes p_S^*(L)$.

定义反变函子 $F(r,d)$:

$$\text{Variétés algbriques} \longrightarrow \text{Ensembles}$$

将 S 映至 $U(r,d)$ 的 S-参数化丛族的等价类集. 对态射 $f : S' \to S$ 及丛族 E,$F(r,d)(f)$ 将 E 的类映至 $f^*(E)$ 的类. 已知存在典范函子态射

$$F(r,d) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bullet, U(r,d)).$$

即对任意丛族 E, 存在唯一态射

$$f_E : S \longrightarrow U(r,d)$$

仅依赖于 E 的等价类.

对代数簇 Y, 记 $K(Y)$ 为其 Grothendieck 群,$[E]$ 表示相干层 E 的类. 设 η 为 $K(X)$ 中秩 r, 度 d 向量丛的类,H 为同态

$$\begin{aligned} K(X) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \alpha &\longmapsto \chi(\alpha \otimes \eta) \end{aligned}$$

的核. 事实上 H 仅依赖于 r 和 d, 故记 $H = H(r,d)$.0.2.1 中丛 F 的类即属于 $H(r,d)$. 可将 $\mathrm{Pic}^0(X)$ 视为 $H(r,d)$ 的子群 (参见 3.3), 且有

$$H(r,d) \simeq \mathrm{Pic}^0(X) \oplus \mathbb{Z}[F].$$ 56

设 E 为光滑簇 S 参数化的 $U(r,d)$ 丛族,$\alpha \in H(r,d)$. 依次定义:

$$\begin{aligned} E \otimes p_X^*(\alpha) &\in K(S \times X), \\ p_{S!}\left(E \otimes p_X^*(\alpha)\right) &\in K(S), \\ \gamma_E(\alpha) = \det\left(p_{S!}\left(E \otimes p_X^*(\alpha)\right)\right) &\in \mathrm{Pic}(S). \end{aligned}$$

因 $\alpha \in H(r,d)$,$\gamma_E(\alpha)$ 仅依赖于 E 的等价类.$\gamma_E(\alpha)$ 具函子性, 由此可定义 $\operatorname{Pic}(F(r,d))$ 的元素 (参见 §3).

注意到 $\operatorname{Pic}^0(X)$ 可自然嵌入 $\operatorname{Pic}\left(J^{(d)}\right)$ 或 $H(r,d)$. 我们将证明:

定理 D. *(a)* 对任意 $\alpha \in H(r,d)$, 存在唯一 $\mathbb{L}(\alpha) \in \operatorname{Pic}(U(r,d))$ 使得对任意光滑簇 S 及丛族 E, 有

$$\gamma_E(\alpha) \simeq f_E^*(\mathbb{L}(\alpha)).$$

(b) 群同态 $\mathbb{L}: H(r,d) \to \operatorname{Pic}(U(r,d))$ 是单射.

(c) 有分解 $\operatorname{Pic}(U(r,d)) = \operatorname{im}(\mathbb{L}) \oplus \operatorname{Pic}\left(J^{(d)}\right)$, 且下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Pic}^0(X) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & H(r,d) \arrow[ddl, "\mathbb{L}"] \\
\operatorname{Pic}(J^{(d)}) \arrow[d, hook, "\det^*"] & \\
\operatorname{Pic}(U(r,d)) &
\end{tikzcd}$$

且满足

$$\operatorname{im}(\mathbb{L}) \cap \operatorname{Pic}\left(J^{(d)}\right) = \mathbb{L}\left(\operatorname{Pic}^0(X)\right) = \det^*\left(\operatorname{Pic}^0(X)\right).$$

我们有一个自然的包含映射 $i: \operatorname{Pic}(U(r,d)) \to \operatorname{Pic}(F(r,d))$, 并且定义了一个群同态 $\gamma: H(r,d) \to \operatorname{Pic}(F(r,d))$. 定理 D 的 (a) 部分简单地说明 γ 的像包含在 i 的像中. 我们将证明实际上有 $\operatorname{Pic}(U(r,d)) = \operatorname{Pic}(F(r,d))$. 为了联系这两种描述, 注意到我们有

$$\mathcal{O}\left(\Theta_F\right) = \mathbb{L}(-[F]).$$

从 (c) 可以推出, 如果 F' 是 X 上另一个与 F 具有相同性质的向量丛, 那么

$$\mathcal{O}\left(\Theta_{F'}\right) = \mathcal{O}\left(\Theta_F\right) \otimes \det^*\left(\det\left(F'\right) \otimes \det(F)^{-1}\right)$$

(其中 $\det\left(F'\right) \otimes \det(F)^{-1}$ 被视为 $\operatorname{Pic}^0(X) \subset \operatorname{Pic}\left(J^{(d)}\right)$ 的元素). 57

现在给出定理 B,C,D 的证明思路. 我们使用 Seshadri 的一个构造. 总可以假设 d 足够大, 此时任何秩 r, 度 d 的半稳定丛 E 可以写成如下扩张形式

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow E \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0,$$

其中 L_0 是一个与 $\det(E)$ 同构的线丛. 所有这些扩张的族构成 $J^{(d)}$ 上的一个射影空间丛 $\mathbb{P}$(参见 §7). 设 $\mathbb{P}^s$ 为其中间项稳定的扩张的开子集. 通过精确研究典范态射 $\mathbb{P}^s \to U_s(r,d)$, 可以从 $\operatorname{Pic}\left(\mathbb{P}^s\right)$(我们将看到它同构于 $\operatorname{Pic}(P)$) 推导出 $\operatorname{Pic}\left(U_s(r,d)\right)$.

0.3 对偶层与典范层 可以计算 $U(r,d)$ 或 $U(r,L)$ 的对偶层. 设 T_U 为 $U(r,d)$ 的切层. 由于它在余维数至少为 2 的闭子集外局部自由, 可以定义其行列式, 即 $U(r,d)$ 上的一个线丛 Δ. 记 ω 为 Δ 的对偶. 类似地定义 $U(r,L)$ 上的线丛 ω_L.

定理 E. *(a)* 设 F_0 为 X 上秩 $2r$, 度 $2(-d+r(g-1))$ 的向量丛. 则有

$$\omega \simeq \mathbb{L}\left([F_0]\right) \otimes \det{}^*(\Lambda),$$

其中 Λ 是 $J^{(d)}$ 上的线丛

$$\Lambda = \left(\det\left(p_{J!}([L])\right) \otimes \det\left(p_{J!}\left([L^*]\right)\right)\right)^{r-1} \otimes \det\left(p_{J!}\left([L \otimes p_X^*\left(F_0\right)]\right)\right)^{-1},$$

这里 L 表示 $J^{(d)} \times X$ 上的 *Poincaré* 丛,p_J, p_X 是投影 $J^{(d)} \times X \to J^{(d)}$ 和 $J^{(d)} \times X \to X$.

(b) $U(r,d)$ 的对偶层同构于 ω.

回忆 $n = \mathrm{PGCD}(r,d)$. 则有

定理 F. *(a)* 有 $\omega_L \simeq \mathcal{O}\left(-2n\Theta_{F,L}\right)$.

(b) $U(r,L)$ 的对偶层同构于 ω_L.

0.4 相关结果 设 U 为 $U_s(r,d)$ 的非空开子集. 称 U 上的 Poincaré 丛为一个向量丛 E 在 $U \times X$ 上, 使得对于 U 的任意闭点 u,E_u 是秩 r, 度 d 的稳定丛, 且 u 是对应于 E_u 的 $U_s(r,d)$ 的点. 这等价于说典范态射 $f_E : U \to U(r,d)$ 是包含映射. 我们给出了 Ramanan [20] 结果的另一个证明: 如果 $n > 1$, 则 U 上不存在 Poincaré 丛 (定理 5.5). 58

这一结果源于对 R^{ss} 上 GL(q)-线丛的研究. 如果 L 是其中一个, 存在整数 k 使得在 R^{ss} 的任意点 y,$\mathbb{C}^* \subset GL(q)$ 的元素 t 的作用是乘以 t^k. 我们将看到 k 总是 n 的倍数 (命题 5.1), 并且 U 上 Poincaré 丛的存在将导致存在一个 L 使得 $k = 1$.

我们的方法也适用于 $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ 上半稳定层的模空间 (可能也适用于其他情形). 更精确地说, 设 $r \geq 2, c_1, c_2$ 为整数,$M\left(r, c_1, c_2\right)$ 为 $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ 上秩 r,Chern 类 c_1, c_2 的半稳定层的模空间,$M_s\left(r, c_1, c_2\right)$ 为对应于稳定层的开子集. 假设 $\dim\left(M\left(r, c_1, c_2\right)\right) > 0$. 令

$$\chi = r - c_2 + \frac{c_1\left(c_1+3\right)}{2}$$

(这是 $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ 上秩 r,Chern 类 c_1, c_2 层的 Euler-Poincaré 特征). 如果 r, c_1 和 χ 互素, 则 $M_s\left(r, c_1, c_2\right)$ 上存在 Poincaré 丛 (Maruyama [13], 定理 6.11). 在其他情况下, 我们得到

定理 G. 如果 r, c_1 和 χ 不互素, 且 U 是 $M_s\left(r, c_1, c_2\right)$ 的非空开子集, 则 U 上不存在 *Poincaré* 丛.

0.5 情形 $g=2, r=2$ 且 d 为偶数 在这种情况下,$U(r,d)$ 和 $U(r,L)$ 有明确的描述, 可以证明定理 A 到 F(参见 [18]).

第一作者感谢 National Board for Higher Mathematics 邀请他在印度度过几周, 期间开始了这项工作. 第二作者感谢 DFG 和 Kaiserslautern 大学在本文撰写期间的热情款待.

定义与记号

如果 $X_1, \ldots, X_p$ 是集合, 记 p_{X_i} 为投影 $X_1 \times \cdots \times X_p \to X_i$.

如果 $f: S' \to S$ 是代数簇的态射,F 是 $S \times X$ 上的凝聚层, 设 $f^\sharp(F) = (f \times I_X)^*(F)$.

设 G 为代数群,Y 为 G 代数作用的代数簇.Y 上的 G-丛是 Y 上的代数向量丛,G 在其上线性且代数地作用, 覆盖 G 在 Y 上的作用. 59

如果 $E = Y \times \mathbb{C}^r$ 是平凡丛,G 在 E 上纤维平凡的作用定义为 $Y \times \mathbb{C}^r$ 的积作用,$\mathbb{C}^r$ 赋予 G 的平凡作用.

设 E 为射影代数簇 Y 上的凝聚层. 若无歧义, 设

$$H^i(E) = H^i(Y,E) \quad \text{且} \quad h^i(E) = \dim_{\mathbb{C}}\left(H^i(Y,E)\right)$$

对任意整数 i.

设 m 为整数且 $m \geq 1$. 记 $m.E$ 为 E 的 m 次直和的层 $E \oplus \cdots \oplus E$.

设 Y 为代数簇,H 为 $\mathrm{Pic}(Y)$ 的子群. 设 L 为 Y 上的线丛. 为简化起见, 我们说 $\mathrm{Pic}(Y)$ 同构于 $H \oplus \mathbb{Z}L$, 如果同态

$$\begin{aligned} i : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathrm{Pic}(Y) \\ m &\longrightarrow L^m \end{aligned}$$

是单射, 并且有 $\mathrm{Pic}(Y) = H \oplus \mathrm{im}(i)$.

1 预备知识

1.1 半稳定丛的模空间

1.1.1 **稳定丛与半稳定丛** 设 E 为 X 上的非零向量丛. 设

$$\mu(E) = \frac{\deg(E)}{\mathrm{rg}(E)},$$

称为 E 的斜率. 称 E 为半稳定 (resp. 稳定) 如果对于 E 的任何真子丛 F 有

$$\mu(F) \leq \mu(E) \quad (\text{resp.} \ <).$$

1.1.2 **模空间** 设 r, d 为整数,$r \geq 1$. 在引言中定义了由代数簇 S 参数化的秩 r, 度 d 的半稳定丛族, 以及这些族的等价概念, 和函子 $F(r,d)$. 模空间 $U(r,d)$ 由以下两个性质定义 (在同构意义下):

(i) 存在函子态射:

$$\Psi : F(r,d) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bullet, U(r,d)),$$

因此对于任何由 S 参数化的秩 r, 度 d 的半稳定丛族 E, 关联一个态射

$$f_E : S \longrightarrow U(r,d), \tag{60}$$

且 f_E 仅依赖于 E 的等价类.

(ii) 如果 M 是代数簇, 且

$$\Psi' : F(r,d) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bullet, M)$$

是函子态射, 存在唯一态射

$$f : U(r,d) \longrightarrow M$$

使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
F(r,d) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\Psi'"] & \mathrm{Hom}(\bullet, U(r,d)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\bullet, f)"] \\
& \mathrm{Hom}(\bullet, M)
\end{tikzcd}$$

簇 $U(r,d)$ 是射影的, 正规的且不可约的.

1.1.3 Jordan-Hölder 滤过 设 E 为 X 上的半稳定丛. 存在 E 的子丛滤过

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_p = E$$

使得对于 $1 \le i \le p$,E_i/E_{i-1} 稳定且与 E 同斜率. 这样的滤过一般不唯一, 但分次 $\bigoplus_{1\le i\le p} E_i/E_{i-1}$ 的同构类唯一. 前述滤过称为 E 的 Jordan-Hölder **滤过**, 记

$$\mathrm{Gr}(E) = \bigoplus_{1\le i\le p} E_i/E_{i-1}.$$

两个半稳定丛 E, E' 称为 **等价**如果 $\mathrm{Gr}(E) \simeq \mathrm{Gr}(E')$.$U(r,d)$ 的闭点自然对应于 X 上秩 r, 度 d 的半稳定丛的等价类. 特别地,X 上秩 r, 度 d 的稳定丛的同构类构成 $U(r,d)$ 的开子集 $U_s(r,d)$. 该开子集非空且光滑. 如果 r 和 d 互素, 稳定与半稳定概念等价, 因此 $U(r,d) = U_s(r,d)$ 是光滑簇. 如果 r 和 d 不互素,$U(r,d)$ 的光滑点开子集仅为 $U_s(r,d)$, 除了引言中提到的例外情况.

1.1.4 $U(r,d)$ 的构造 设 $\mathcal{O}_X(1)$ 为 X 上的极强线丛. 存在整数 m_0 使得对于任意 $m \ge m_0$ 和 X 上任何秩 r, 度 d 的半稳定丛 E,$E(m) = E \otimes \mathcal{O}_X(m)$ 由其截面生成, 且 $h^1(E(m)) = 0$. 设 $m \ge m_0$,

$$q = h^0(E(m)) = d + r \cdot \deg(\mathcal{O}_X(1))\, m + r(1-g), \tag{61}$$

且设 P 为多项式

$$d + r(1-g) + r \cdot \deg(\mathcal{O}_X(1)) \cdot T.$$

设

$$R = \mathrm{Quot}_P\left(\mathcal{O}_X(-m) \otimes \mathbb{C}^q\right).$$

回忆这是表示函子

$$\Psi_0 : \textsf{Variétés algbriques} \longrightarrow \textsf{Ensembles}$$

的射影簇, 将 S 关联到 $S \times X$ 上满射层态射的同构类

$$p_X^*\left(\mathcal{O}_X(-m) \otimes \mathbb{C}^q\right) \longrightarrow E,$$

其中 E 在 S 上平坦, 且对于 S 的任何闭点 s,E_s 相对于 $\mathcal{O}_X(1)$ 有 Hilbert 多项式 P(两个这样的态射 $f : p_X^*\left(\mathcal{O}_X(-m) \otimes \mathbb{C}^q\right) \longrightarrow E$ 和 $f' : p_X^*\left(\mathcal{O}_X(-m) \otimes \mathbb{C}^q\right) \longrightarrow E'$ 同构如果存在同构 $\phi : E \to E'$ 使得 $f' = \phi \circ f$). 存在 "universal" 满射态射

$$\theta : p_X^*\left(\mathcal{O}_X(-m) \otimes \mathbb{C}^q\right) \longrightarrow \mathbb{F}_0$$

在 $R \times X$ 上 (参见 [6]). 记 R^{ss}(resp. R^s) 为 R 中满足

$$\theta_y : \mathcal{O}_X(-m) \otimes \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{F}_{0y}$$

诱导同构

$$\mathbb{C}^q \simeq H^0\left(\mathbb{F}_{0y}(m)\right),$$

且 $\mathbb{F}_{0y}$ 半稳定 (resp. 稳定) 的点 y 的开子集. 这是 R 的光滑开子集. 从 $\mathbb{F}_0$ 在 $R^{ss} \times X$ 上的限制, 导出态射

$$\pi = f_{\mathbb{F}_0} : R^{ss} \longrightarrow U(r,d).$$

群 $\mathrm{PGL}(q)$ 自然作用在 R^{ss} 上, 可以证明如果 m 足够大,π 是 R^{ss} 对 $\mathrm{PGL}(q)$ 的好商, 而 $\pi : R^s \to U(r,d)$ 的限制是几何商 (例如参见 [23]). 后续总假设 m 足够大以使前述性质成立.

从 $\mathrm{PGL}(q)$ 在 R^{ss} 上的作用导出 $\mathrm{GL}(q)$ 的作用. 如果 y 是 R^{ss} 的闭点,y 在 $\mathrm{GL}(q)$ 中的稳定子自然等同于 $\mathbb{F}_{0y}$ 的自同构群.

2 向量丛的下降

设 Y 为整代数簇, 其上代数群 G 可约代数作用. 假设存在好商 $\pi : Y \to M$(参
见 [15], [19]). 62

引理 2.1 设 y 为 Y 的闭点. 存在唯一闭轨道 Γ 包含在 $\overline{Gy}$ 中. 该闭轨道也是唯一包含在 $\pi^{-1}(\pi(y))$ 中的轨道.

证明 存在性: 只需取 $\overline{Gy}$ 中维数最小的轨道.

唯一性: 设 Γ_1,Γ_2 为 Y 的两个闭轨道, 包含在 $\pi^{-1}(\pi(y))$ 中. 则 $\pi(\Gamma_1) = \pi(\Gamma_2) = \{\pi(y)\}$, 由于 π 是好商且 Γ_1,Γ_2 闭,$\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ 非空. 因此 $\Gamma_1 = \Gamma_2$. 证毕. ■

对于 M 上的任何代数向量丛 E, 丛 $\pi^*(E)$ 在 Y 上具有自然的 G-向量丛结构. 如果 F 是 Y 上的一个 G-向量丛, 我们说 F 可以下降到 M, 如果存在 M 上的一个向量丛 E, 使得 G-丛 F 和 $\pi^*(E)$ 是同构的.

引理 2.2 设 F 是 Y 上的一个秩为 r 的 G-向量丛. 那么 F 可以下降到 M 当且仅当对于 M 的每个闭点 m, 存在 m 的一个邻域 U 和一个 G-同构

$$F_{|\pi^{-1}(U)} \simeq r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)},$$

其中 G 在 $r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)}$ 的纤维上的作用是平凡的.

证明 必要性: 取 U 为 m 的一个邻域, 使得 $E_{|U}$ 是平凡的.

充分性: 假设引理的条件成立. 那么存在 M 的一个开覆盖 $(U_i)_{i\in I}$, 使得对于每个 $i \in I$, 存在一个 G-同构

$$f_i : F_{|\pi^{-1}(U_i)} \xrightarrow{\simeq} r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U_i)},$$

令

$$g_{ij} = f_j \circ f_i^{-1} : r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U_i\cap U_j)} \xrightarrow{\simeq} r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U_i\cap U_j)}.$$

g_{ij} 是 G-不变的同构, 因此定义了一族同构

$$\overline{g}_{ij} : r\mathcal{O}_{U_i\cap U_j} \longrightarrow r\mathcal{O}_{U_i\cap U_j}.$$

$\overline{g}_{ij}$ 构成了一族上循环, 定义了一个 M 上的向量丛 E, 使得 $\pi^*(E)$ 与 F 同构. 这证明了引理2.2. ■

定理 2.3 (下降引理) 设 F 是 Y 上的一个 G-向量丛. 那么 F 可以下降到 M 当且仅当对于 Y 的每个闭点 y, 使得 Gy 是闭的,y 在 G 中的稳定子群在 F_y 上的作用是平凡的.

这个结果归功于 Kempf. 我们之前有一个更复杂的版本, 仅限于 F 的秩为 1 的情况, 且需要对丛 F 验证更多的条件. 这个版本受到了 [1] 命题 2.3 的启发.

证明 如果 F 可以下降到 M, 显然 Y 的每个点的稳定子群在 F 的该点纤维上的作用是平凡的. 63

反之, 假设 F 满足定理2.3的性质. 设 y 是 Y 的一个闭点. 根据引理2.2, 需要证明存在一个包含 $\pi(y)$ 的开集 U 和一个 G-不变的同构

$$s : r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)} \xrightarrow{\simeq} F_{|\pi^{-1}(U)}$$

即对于 $\pi^{-1}(U)$ 的每个点 y' 和所有 $v \in r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U),y'}$,$g \in G$, 有 $s(gv) = gs(v)$. 等价于找到 r 个 G-不变的截面

$$s_i : \mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)} \longrightarrow F_{|\pi^{-1}(U)}$$

生成 $F_{|\pi^{-1}(U)}$. 设 $C=Gz$ 是 Y 中包含在 $\pi^{-1}(\pi(y))$ 中的唯一闭轨道. 证明存在 r 个 G-不变的截面

$$\sigma_i:\mathcal{O}_C\longrightarrow F_C$$

生成 $F_{|C}$: 设 $u_1,\ldots,u_r$ 是 F_z 的一个基,G_z 是 z 在 G 中的稳定子群. 有一个交换图

$$\begin{tikzcd} g \arrow[d, mapsto] & G \arrow[r, "g\mapsto gu_i"] \arrow[d] & F_{|C} \arrow[d, "\text{投影}"] \\ gz & C \arrow[r, Rightarrow] & C \end{tikzcd}$$

由于 G_z 在 F_z 上的作用是平凡的, 可以得到一个交换图

$$\begin{tikzcd} G/G_z \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"] & F_{|C} \arrow[d] \\ C \arrow[r, Rightarrow] & C \end{tikzcd}$$

态射 ϕ 是一个同构. 因此得到

$$\psi\circ\phi^{-1}:C\longrightarrow F_{|C}$$

定义了 $F_{|C}$ 的 G-不变截面 σ_i. 显然这些截面生成 $F_{|C}$.

设 V 是 M 中包含 $\pi(y)$ 的一个仿射开集. 由于 π 是一个好商,$\pi^{-1}(V)$ 是 Y 的一个仿射开集, 包含 C. 考虑 G 在 $H^0\left(\pi^{-1}(V),F\right)$ 上的作用:

$$(g,s)\to g.s,$$

其中 $g.s\left(y'\right)=gs\left(g^{-1}y'\right)$ 对于所有 $y'\in\pi^{-1}(V).H^0\left(\pi^{-1}(V),F\right)$ 的 G-不变元素恰好是 $F_{|\pi^{-1}(V)}$ 的 G-不变截面. 64

证明存在一个 Reynolds 算子

$$R:H^0\left(\pi^{-1}(V),F\right)\longrightarrow H^0\left(\pi^{-1}(V),F\right)^G$$

尽管 $H^0\left(\pi^{-1}(V),F\right)$ 不是有限维的. 为此只需验证在 $H^0\left(\pi^{-1}(V),F\right)$ 中, 每个 G-轨道包含在一个有限维子空间中. 考虑 F 在其上平凡的一个稠密仿射开集 $V_0\subset\pi^{-1}(V)$. 设 $s\in H^0\left(\pi^{-1}(V),F\right)$. 态射

$$\begin{aligned} G\times V_0 &\longrightarrow F_{|V_0}\simeq r\mathcal{O}_{V_0} \\ (g,v_0) &\longmapsto gs\left(g^{-1}v_0\right) \end{aligned}$$

可以看作一个正则函数

$$f:G\times V_0\longrightarrow\mathbb{C}^r.$$

由于 $\mathbb{C}[G\times V_0]\simeq\mathbb{C}[G]\otimes\mathbb{C}[V_0]$, 可以将 f 表示为

$$f=\sum_{1\leq i\leq p}\phi_i\otimes\psi_i,$$

其中对于 $1\leq i\leq p,\phi_i:G\to\mathbb{C},\psi_i:V_0\to\mathbb{C}^r$ 是态射. 那么 $G.s_{|V_0}$ 包含在 $H^0(V_0,F)$ 的由 $\psi_1,\ldots,\psi_p$ 生成的子空间中, 且 Gs 包含在该子空间与 $H^0\left(\pi^{-1}(V),F\right)$ 的交中. 因此证明了 R 的存在性.

类似地有一个 Reynolds 算子

$$R':H^0(C,F)\longrightarrow H^0(C,F)^G.$$

设 $\alpha:r\mathcal{O}_C\to F_{|C}$ 是一个 G-不变的同构, 其存在性之前已证明. 设

$$\alpha_i:\mathcal{O}_C\longrightarrow F_{|C},\quad 1\leq i\leq r,$$

是 α 在 $r\mathcal{O}_C$ 的直和因子上的限制. 由于 $\pi^{-1}(C)$ 是仿射簇 $\pi^{-1}(V)$ 的闭子簇,α_i 有一个延拓

$$\overline{\alpha}_i:\mathcal{O}_{\pi^{-1}(V)}\longrightarrow F_{|\pi^{-1}(V)},$$

这是一个不一定 G-不变的截面. 但 $R(\overline{\alpha}_i)$ 是 G-不变的, 且由 Reynolds 算子的函子性,$R(\overline{\alpha}_i)_{|C}=\alpha_i$. 令

$$\overline{\alpha}=\left(R(\overline{\alpha}_1),\ldots,R(\overline{\alpha}_p)\right):r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(V)}\longrightarrow F_{|\pi^{-1}(V)},$$

这是一个 G-不变的态射, 延拓了 α.

还需证明 $\pi^{-1}(V)$ 的开集 W, 在其上 $\overline{\alpha}$ 是同构, 包含一个形如 $\pi^{-1}(U)$ 的开集, 其中 U 是 M 中包含 $\pi(y)$ 的开集.$\pi^{-1}(V)\backslash W$ 和 C 是 $\pi^{-1}(V)$ 的 G-不 65
变闭子集且不相交, 因此由于 $\pi:\pi^{-1}(V)\to V$ 是一个好商,$\pi\left(\pi^{-1}(V)\backslash W\right)$ 和 $\pi(C)=\{\pi(y)\}$ 是 V 的不相交闭子集. 只需取

$$U=V\backslash\pi\left(\pi^{-1}(V)\backslash W\right).$$

这完成了定理 2.3 的证明. ■

注记. 向量丛 E 在 M 上使得 G-向量丛 $\pi^*(E)$ 和 F 同构的唯一性在同构意义下是显然的, 因为由引理2.2容易推出投影 $\pi^*(E)\to E$ 是 PGL(q) 的一个好商. 因此有 $E=F/\,$PGL(q).

.

3 $F(r,d)$ 的 Picard 群与R^{ss} 上的PGL(q)-线丛

3.1 定义

定义 1. 一个 $F(r,d)$ **上的线丛** L 由以下数据定义:

(i) 对于任何由光滑簇 S 参数化的 $U(r,d)$ 的丛族 F, 一个线丛 L_F 在 S 上, 仅依赖于 F 的等价类.

(ii) 对于任何光滑簇之间的态射 $f: S' \to S$, 一个同构

$$\alpha_F^L(f): L_{f^\sharp(F)} \xrightarrow{\simeq} f^*\left(L_F\right)$$

仅依赖于 F 的等价类, 使得如果 $g: S'' \to S'$ 是另一个光滑簇之间的态射, 有

$$\alpha_F^L(f \circ g) = \alpha_{f^\sharp(F)}^L(g) \circ g^*\left(\alpha_F^L(f)\right),$$

(特别地 $\alpha_F^L\left(I_S\right) = I_{L_F}$).

定义 2. 设 L, L' 是 $F(r,d)$ 上的线丛. 一个**同构** $L \simeq L'$ 由以下数据定义: 对于任何由光滑簇 S 参数化的 $U(r,d)$ 的丛族 F, 一个同构

$$\sigma_F: L_F \xrightarrow{\simeq} L_F'$$

仅依赖于 F 的等价类, 使得如果 $f: S' \to S$ 是一个光滑簇之间的态射, 有

$$\sigma_{f\sharp(F)} = \alpha_F^{L'}(f) \circ f^*\left(\sigma_F\right) \circ \alpha_F^L(f)^{-1}.$$

定义 3. 线丛在 $F(r,d)$ 上的同构类显然构成一个交换群, 称为 $F(r,d)$ **的 Picard 群**, 记作 $\operatorname{Pic}(F(r,d))$. 66

设 L_0 是 $U(r,d)$ 上的一个线丛. 由此得到一个 $F(r,d)$ 上的线丛 L, 定义为 $L_F = f_F^*\left(L_0\right)$, 对于任何由光滑簇参数化的 $U(r,d)$ 的丛族 F,$\alpha_F^L(f)$ 显然定义. 因此得到一个群同态

$$i: \operatorname{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \operatorname{Pic}(F(r,d)).$$

定义 4. 称 $\operatorname{Pic}(F(r,d))$ 的一个元素**来自** $\operatorname{Pic}(U(r,d))$, 如果它在 i 的像中.

3.2 $F(r,d)$ 的 Picard 群与 R^{ss} 和 R^{s} 上的 PGL(q)-线丛

设

$$\begin{aligned} \eta: R^{ss} \times \mathrm{PGL}(q) &\longrightarrow R^{ss} \times \mathrm{PGL}(q) \\ (y,g) &\longrightarrow (gy,g) \end{aligned}$$

引理 3.1 族 $\eta^\sharp\left(p_{R^{ss}}^\sharp\left(\mathbb{F}_0\right)\right)$ 和 $p_{R^{ss}}^\sharp\left(\mathbb{F}_0\right)$ 作为 $U(r,d)$ 的丛族参数化由 $R^{ss} \times \mathrm{PGL}(q)$ 是等价的.

证明 显然对于 R^{ss} 的每个点 y 和每个 $g \in \mathrm{PGL}(q)$, 有一个同构

$$\eta^\sharp\left(p_{R^{ss}}^\sharp\left(\mathbb{F}_0\right)\right)_{\mid (y,g)\times X} \simeq p_{R^{ss}}^\sharp\left(\mathbb{F}_0\right)_{\mid (y,g)\times X}.$$

由此, 由于稳定丛的简单性,

$$p_{\left(R^{ss}\times \mathrm{PGL}(q)\right)*}\left(\mathcal{H}om\left(\eta^\sharp\left(p_{R^{ss}}^\sharp\left(\mathbb{F}_0\right)\right), p_{R^{ss}}^\sharp\left(\mathbb{F}_0\right)\right)\right)_{\mid R^{s}\times \mathrm{PGL}(q)}$$

是 $R^s \times \mathrm{PGL}(q)$ 上的一个线丛 L. 因此有一个同构

$$p^{\sharp}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0)_{|R^s\times \mathrm{PGL}(q)\times X} \simeq p^*_{R^s}(L)\otimes \eta^{\sharp}\left(p^{\sharp}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0)\right)_{|R^s\times \mathrm{PGL}(q)\times X}.$$

由于 R^{ss} 是光滑的,L 可以延拓到 $R^{ss}\times \mathrm{PGL}(q)$ 上的一个线丛, 仍记为 L. 由于 $\mathrm{codim}_{R^{ss}}(R^{ss}\backslash R^s) \geq 2$, 上述同构可以延拓到 $R^{ss}\times \mathrm{PGL}(q)\times X$. 这证明了引理3.1. ■

设 L 是 $F(r,d)$ 上的一个线丛. 由引理3.1得到一个同构

$$\eta^*\left(p^*_{R^{ss}}\left(L_{\mathbb{F}_0}\right)\right)\simeq p^*_{R^{ss}}\left(L_{\mathbb{F}_0}\right).$$

这个同构定义了 $L_{\mathbb{F}_0}$ 上的一个 PGL(q)-线丛结构 (这由定义1(ii) 得出).

记 $\mathrm{Pic}^G(R^{ss})$ 为 R^{ss} 上的 PGL(q)-线丛的同构类群. 因此得到一个群同态

$$\mathrm{Pic}(F(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}^G(R^{ss}).$$

引理 3.2 遗忘同态 $\mathrm{Pic}^G(R^{ss}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(R^{ss})$ 是单射. 67

证明 设 L 是一个 PGL(q)-线丛, 作为线丛是平凡的. 需要证明它作为 PGL(q)-丛也是平凡的. 固定一个同构 $L\simeq \mathcal{O}_{R^{ss}}$. 证明 G 在 L 上的作用是平凡的.PGL(q) 在 $R^{ss}\times\mathbb{C}$ 上的作用来自一个 "交叉态射", 即一个态射

$$\chi : \mathrm{PGL}(q)\times R^{ss} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

满足

$$\chi\left(gg',y\right)=\chi\left(g,g'y\right)\chi\left(g',y\right) \tag{*}$$

对于所有 $g,g'\in \mathrm{PGL}(q)$ 和 $y\in R^{ss}$(于是有 $g\cdot(y,t)=(gy,\chi(g,y)t)$).PGL($q$) 上唯一的可逆正则函数是常数, 因此 $\chi(g,y)$ 仅是 y 的函数:$\chi(g,y)=\chi_0(y)$. 关系 (*) 变为

$$\chi_0(y)=\chi_0\left(g'y\right)\chi_0(y)$$

因此 $\chi_0=1$, 且 $\chi=1$.PGL(q) 在 L 上的作用确实是平凡的. 这证明了引理3.2. ■

命题 3.3 群同态

$$\mathrm{Pic}(F(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(R^{ss})$$
$$L\longmapsto L_{\mathbb{F}_0}$$

是单射.

证明 设 L 为 $F(r,d)$ 上的一个线丛, 满足 $L_{\mathbb{F}_0}\simeq\mathcal{O}_{R^{ss}}$. 设 S 为光滑簇,F 为 S 参数化的 $U(r,d)$ 丛族. 我们将证明存在一个典范同构

$$u_F : L_F \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_S$$

凝聚层 $W = p_{S*}\left(F \otimes p_X^*\left(\mathcal{O}_X(m)\right)\right)$ 是秩为 q 的局部自由层. 取 $z \in S$ 及其邻域 U_z, 使得存在平凡化

$$\beta_z : W_{|U_z} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_{U_z} \otimes \mathbb{C}^q.$$

存在典范满射态射

$$p_S^*(W) \otimes p_X^*\left(\mathcal{O}_X(-m)\right) \longrightarrow F,$$

利用平凡化 β_z, 得到满射态射

$$p_X^*\left(\mathcal{O}_X(-m) \otimes \mathbb{C}^q\right) \longrightarrow F_{U_z \times X}.$$

由此导出态射

$$f_z : U_z \longrightarrow R^{ss}$$ 68

及同构 $f_z^\sharp\left(\mathbb{F}_0\right) \simeq F_{|U_z \times X}$. 于是得到交换图

$$\begin{tikzcd}
L_{F|U_z} \simeq L_{(F_{|U_z \times X})} \arrow[r, "\alpha^L_{(F_{|U_z \times X})}"] \arrow[ddr, "\lambda_z"] & f_z^*(L_{\mathbb{F}_0}) \arrow[d, "\simeq"] \\
& f_z^*(\mathcal{O}_{R^{ss}}) \arrow[d, Rightarrow] \\
& \mathcal{O}_{U_z}
\end{tikzcd}$$

我们将证明 λ_z 不依赖于平凡化 β_z. 假设存在另一平凡化

$$\beta_z' : W_{|U_z} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_{U_z} \otimes \mathbb{C}^q.$$

由此导出 $f_z' : U_z \to R^{ss}$ 和 $\lambda_z' : L_{F|U_z} \to \mathcal{O}_{U_z}$. 平凡化 β_z' 是 β_z 与态射 $\epsilon : U_z \to \mathrm{PGL}(q)$ 的乘积: 对任意 $y \in U_z$ 有

$$\beta_{z,y}' = \epsilon(y) \circ \beta_{z,y}.$$

从而 $f_z'(y) = \epsilon(y) \cdot f_z(y)$. 对任意 $t \in L_{F,y}$, 有 $\lambda_z'(t) = \epsilon(y) \cdot \lambda_z(t)$(其中 $\lambda_z(t)$ 和 $\lambda_z'(t)$ 分别视为 $L_{\mathbb{F}_0, f_z(y)}$ 和 $L_{\mathbb{F}_0, f_z'(y)}$ 的元素). 由于引理 3.2 表明 PGL(q) 在 $L_{\mathbb{F}_0}$ 上的作用是平凡的, 故 $\lambda_z'(t) = \lambda_z(t)$(作为复数). 因此同构 λ_z 可粘合, 并定义出

$$u_F : L_F \longrightarrow \mathcal{O}_S$$

还需验证这些同构与 α_F^L 相容, 即对光滑簇的态射 $f : S' \to S$, 存在交换图

$$\begin{tikzcd}
L_{f^\sharp(F)} \arrow[r, "u_{f^\sharp(F)}"] \arrow[d, "\alpha_F^L(f)"] & \mathcal{O}_{S'} \arrow[d, "\simeq"] \\
f^*(L_F) \arrow[r, "f^* u_F"] & f^*(\mathcal{O}_S)
\end{tikzcd}$$

为此, 只需证明 S 的每点有邻域 U, 使得将 S, S' 分别替换为 $U, f^{-1}(U)$ 且 F 限制到 U 时上述成立. 取 $U = U_z$, 沿用前述记号. 若 69

$$W' = p_{S'*}\left(f^{\sharp}(F) \otimes p_X^*\left(\mathcal{O}_X(m)\right)\right),$$

则由 β_z 导出 $W'_{|f^{-1}(U)}$ 的平凡化及态射 $\lambda' : f^{-1}(U) \to R^{ss}$, 使得交换图

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(U) \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "f"] & R^{ss} \arrow[d, Rightarrow, no head] \\
U \arrow[r, "\lambda"] & R^{ss}
\end{tikzcd}$$

成立. 根据 $u_F, u_{f^{\sharp}(F)}$ 的定义, 得到交换图

$$\begin{tikzcd}
L_{f^{\sharp}(F)|f^{-1}(U)} \arrow[r, "u_{f^{\sharp}(F)|f^{-1}(U)}"] \arrow[d, "\alpha_F^L(f)_{|f^{-1}(U)}"] & \mathcal{O}_{f^{-1}(U)} \arrow[d, Rightarrow, no head] \\
f^*(L_{F|f^{-1}(U)}) \arrow[r, "f^*(u_{F|^{-1}(U)})"] & \mathcal{O}_{f^{-1}(U)}
\end{tikzcd}$$

这证明了命题 3.3. ■

推论 3.4 群同态

$$\begin{aligned} \operatorname{Pic}(F(r,d)) &\longrightarrow \operatorname{Pic}\left(R^s\right) \\ L &\longmapsto L_{\mathbb{F}_0|R^s} \end{aligned}$$

是单射.

证明 这直接由命题 3.3 及 $\operatorname{codim}_{R^{ss}}\left(R^{ss} \backslash R^s\right) \geq 2$ 得出. ■

回顾 (参见 §2), 若 L 是 R^{ss} 上的 $\mathrm{PGL}(q)$-线丛, 称 L 下降到 $U(r,d)$ 若存在 $U(r,d)$ 上的线丛 L_0 使得 $\mathrm{PGL}(q)$-线丛 L 与 $\pi^*\left(L_0\right)$ 同构. 命题 3.3 的另一直接推论是:

推论 3.5 设 $L \in \operatorname{Pic}(F(r,d))$. 则 L 来自 $\operatorname{Pic}(U(r,d))$ 当且仅当 $L_{\mathbb{F}_0}$ 下降到 $U(r,d)$. 若 L_0 是 $\operatorname{Pic}(U(r,d))$ 中唯一满足 $L_{\mathbb{F}_0} \simeq \pi^*\left(L_0\right)$ 的元素, 则 $L = i\left(L_0\right)$.

70

3.3 Pic($F(r,d)$) 的基本例子

设 $K(X)$ 为 X 的 Grothendieck 群. 已知群同态

$$\begin{aligned} K(X) &\longrightarrow \operatorname{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z} \\ \alpha &\longmapsto (\det(\alpha), \operatorname{rg}(\alpha)) \end{aligned}$$

是同构. 如引言所述, 记 $H(r,d)$ 为 $K(X)$ 的子群, 由满足 $\chi([E] \otimes \alpha) = 0$ 的 α 构成 (E 为 X 上秩 r, 度 d 的丛). 这意味着

$$\operatorname{rg}(\alpha) d + \deg(\alpha) r + \operatorname{rg}(\alpha) r(1-g) = 0.$$

特别地,$H(r,d)$ 包含所有秩与度为零的 α. 这些构成子群 $Z \subset K(X)$, 同构于 $\mathrm{Pic}^{(0)}(X)$, 同构为

$$\begin{aligned}\mathrm{Pic}^{(0)}(X) &\longrightarrow Z\\ L &\longrightarrow [L_0 \otimes L] - [L_0]\,,\end{aligned}$$

(固定 X 上线丛 L_0, 上述同构不依赖于 L_0 的选择).

设 $\alpha \in H(r,d)$. 由此导出 $\mathrm{Pic}(F(r,d))$ 的元素 $\gamma(\alpha)$. 若 S 为光滑代数簇,F 为 S 参数化的 $U(r,d)$ 丛族, 则有

$$\gamma(\alpha)_F = \det\left(p_{S!}\left(F \otimes p_X^*(\alpha)\right)\right).$$

立即验证 $\gamma(\alpha)_F$ 仅依赖于 F 的等价类. 设 L 为 S 上线丛, 则有

$$\gamma(\alpha)_{F\otimes p_S^*(L)} = \gamma(\alpha)_F \otimes L^{\chi(F_s\otimes\alpha)},$$

(s 为 S 的任意闭点). 由于 $\alpha \in H(r,d)$, 有 $\chi\left(F_s \otimes \alpha\right) = 0$, 故 $\gamma(\alpha)_{F\otimes p_S^*(L)} = \gamma(\alpha)_F$.

虽然无法从 α 导出 $F(r,d)$ 上的线丛, 但可得到 $\mathrm{Pic}(F(r,d))$ 的元素. 为获得 $F(r,d)$ 上线丛 L, 考虑 α 的表示

$$\alpha = [E_1] - [E_2]\,,$$

其中 E_1, E_2 为 X 上向量丛. 定义

$$L_F = \det\left(p_{S!}\left(F \otimes p_X^*\left(E_1\right)\right)\right) \otimes \det\left(p_{S!}\left(F \otimes p_X^*\left(E_2\right)\right)\right)^{-1}.$$

$\alpha_F^L(f)$ 的定义显然, 且易见对不同的 E_1, E_2 选择 (给出相同 α), 所得 $F(r,d)$ 上线丛 L 同构. 按定义 $\gamma(\alpha)$ 为 L 的同构类.

注记. 沿用前述记号, 设 S 仅为整的. 则易见 $p_{S!}\left(F \otimes p_X^*(\alpha)\right)$ 包含在由局部自由层类生成的 $K(S)$ 子群中. 利用此事实, 亦可在此情形定义 $\gamma(\alpha)_F$. 为简化论述, 71
我们限制于光滑簇情形.

例. 情形 $r = 1$.
前述定义也适用于 $r = 1$ 的情形. 对任意 $\alpha \in Z$,$\gamma(\alpha)$ 来自 $\mathrm{Pic}(U(1,d)) = \mathrm{Pic}\left(J^{(d)}\right)$, 因此可将 $Z = \mathrm{Pic}^{(0)}(\mathrm{X})$ 视为 $\mathrm{Pic}\left(J^{(d)}\right)$ 的子群 (参见 [12]).

3.4　线丛扭转的影响

设 k 为整数,L_0 为 X 上度为 k 的线丛. 存在同构

$$U(r,d) \xrightarrow{\phi} U(r,d+kr)$$

将 E 的等价类映至 $E \otimes L_0$ 的等价类. 对 X 上任意度为 d 的线丛 L, 此同构导出

$$U(r,L) \longrightarrow U\left(r, L \otimes L_0^r\right).$$

同构 ϕ 与函子的显然同构相容:

$$F(r,d) \longrightarrow F(r,d+kr).$$

存在群自同构

$$\begin{aligned} K(X) &\longrightarrow K(X) \\ \alpha &\longmapsto \alpha \otimes \left[L_0^{-1}\right], \end{aligned}$$

导出同构 $H(r,d) \to H(r,d+kr)$. 显然有交换图

$$\begin{tikzcd} H(r,d) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(F(r,d)) \arrow[d] \\ H(r,d+kr) \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{Pic}(F(r,d+kr)) \end{tikzcd}.$$

由此, 为证明引言中所有结果, 可设 d 任意大.

4 $R^{(ss)}$ 上PGL(q)-线丛的研究

以下结果结合下降引理 (§2), 可证明 R^{ss} 上任意 PGL(q)-线丛均下降到 $U(r,d)$: 72

命题 4.1 设 L 为 R^{ss} 上的 PGL(q)-线丛,y 为 R^{ss} 的闭点且轨道 PGL(q)y 闭. 则 y 在 PGL(q) 中的稳定子群在 L_y 上的作用平凡.

引理 4.2 设 y 为 R^{ss} 的闭点. 则轨道 PGL(q)y 闭当且仅当丛 F_{0y} 同构于稳定丛的直和.

证明 设 $y \in R^{ss}$ 使得存在正合列

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow F_{0y} \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0,$$

其中 E_1, E_2 为斜率 $\frac{d}{r}$ 的向量丛. 利用 E_2 由 E_1 的扩张, 可构造 $\mathbb{C}$ 参数化的 $U(r,d)$ 丛族 $\mathcal{E}$, 满足 $\mathcal{E}_t = \mathbb{F}_{0y}$(若 $t \neq 0$) 且 $\mathcal{E}_0 = E_1 \oplus E_2$. 由此在 $\overline{\mathrm{PGL}(q)y}$ 中存在点 z 使得 $F_{0z} \simeq E_1 \oplus E_2$.

通过归纳法可证, 任意轨道的闭包中存在点 z 使得 $\mathbb{F}_{0z}$ 同构于稳定丛的直和. 引理 4.2 由此易得. ■

现证明命题 4.1. 设 $y \in R^{ss}$ 满足 PGL(q)y 闭. 由引理 4.1,F_{0y} 同构于稳定丛的直和:

$$F_{0y} \simeq m_1 E_1 \oplus \cdots \oplus m_p E_p,$$

其中 $1 \leq i \leq p$ 时 m_i 为正整数,E_i 为稳定丛, 且 $i \neq j$ 时 $E_i \not\simeq E_j$.

对任意 $y' \in R^{ss}$, 记 $G_{y'}$ 为 y' 在 GL(q) 中的稳定子群. 则 G_y 同构于 $\mathrm{GL}\left(m_1\right) \times \cdots \times \mathrm{GL}\left(m_p\right)$.$G_y$ 在 L_y 上的作用形如

$$\begin{aligned} G_y \times L_y &\longrightarrow L_y \\ (g,u) &\longmapsto \lambda(g)u, \end{aligned}$$

其中 λ 为 G_y 的特征标, 由整数 $n_1, \ldots, n_p$ 定义且满足

$$m_1 n_1 + \cdots + m_p n_p = 0; \tag{*}$$

对 $g=\left(g_1,\ldots,g_p\right)\in G_y=\mathrm{GL}\left(m_1\right)\times\cdots\times\mathrm{GL}\left(m_p\right)$, 有

$$\lambda(g)=\prod_{1\leq i\leq p}\det\left(g_i\right)^{n_i},$$

(等式 (*) 源于 GL(q) 中位似子群在 L 上作用平凡). 若 $p=1$, 即 $\mathbb{F}_{0y}\simeq m_1E_1$, 则命题 4.1 成立, 因 λ 平凡.

只需证明以下断言: 存在整代数簇 R_0 及态射 $\phi: R_0\to R^{ss}$ 满足:

(i) ϕ 的像包含 y.

(ii) ϕ 的像包含点 y_0 使得

$$\mathbb{F}_{0y_0}\simeq nE,$$ 73

其中 E 为稳定丛.

(iii) 对 ϕ 的像中任意点 y', 有 $G_y\subset G_{y'}$.

事实上, 若此成立, 则当将 ϕ 的像替换为其闭包 S(R^{ss} 的不可约子簇) 时, 性质 (i), (ii), (iii) 仍成立, 且 G_y 在 S 上作用平凡. 先验地,G_y 在 $L_{|S}$ 上的作用形如

$$\begin{aligned}G_y\times L_{|S}&\longrightarrow L_{|S}\\(g,u)&\longmapsto\lambda_{\alpha(u)}(g)u,\end{aligned}$$

其中 $\alpha: L_{|S}\to S$ 为投影, 且对任意 $s\in S$,λ_s 为 G_y 的特征标.

我们证明对于 $s\in S$, 有 $\lambda_s=\lambda$. 设 $g\in G_y$. 通过取 $L_{|S}$ 的局部平凡化, 可以看到

$$\begin{aligned}\Psi: G_y\times L_{|S}&\longrightarrow\mathbb{C}^*\\(g,u)&\longrightarrow\lambda_{\alpha(u)}(g)\end{aligned}$$

是一个态射. 由于 G_y 的特征群是可数的, 对于任意 $g\in G_y$,Ψ 的限制

$$\begin{aligned}\Psi: L_{|S}&\longrightarrow\mathbb{C}^*\\u&\longmapsto\lambda_{\alpha(u)}(g)\end{aligned}$$

取可数个值, 因此是常数. 特征 λ_s 不依赖于 S 中的点 s, 故 $\lambda_s=\lambda$.

我们已经看到 G_{y_0} 在 L_{y_0} 上平凡作用, 因此根据 (iii),G_y 同样如此. 因此 λ 是平凡的, 且 G_y 在 L_y 上平凡作用, 这证明了命题 4.1.

接下来需要找到态射 $\phi: R_0\to R^{ss}$. 这样的态射等价于在 $R_0\times X$ 上给出一个满射层态射:

$$p_X^*(\mathcal{O}(-m))\otimes\mathbb{C}^q\xrightarrow{\theta'}\mathbb{E},$$

其中 $\mathbb{E}$ 是由 R_0 参数化的 $U(r,d)$ 的向量丛族, 使得对于 R_0 的任意闭点 z,θ'_z 诱导一个同构 $\mathbb{C}^q\simeq H^0\left(X,\mathbb{E}_z(m)\right)$. 条件 (iii) 等价于以下内容: 对于任意 $g\in G_y$, 存在交换图

$$\begin{tikzcd}p_X^*(\mathcal{O}(-m))\otimes\mathbb{C}^q \arrow[r, "\theta'"] \arrow[d, "g"] & \mathbb{E} \arrow[d, "\simeq"] \\ p_X^*(\mathcal{O}(-m))\otimes\mathbb{C}^q \arrow[r, "\theta'"] & \mathbb{E}\end{tikzcd}$$

(g 视为 GL(q) 的元素). 74

对于 $1 \le i \le p$, 考虑对应于 E_i 的 Grothendieck 概型的开集 R_i^{ss},

$$\theta_i : p_X^*(\mathcal{O}(-m)) \otimes \mathbb{C}^{q_i} \longrightarrow \mathbb{F}_{0i}$$

是 $R_i^{ss} \times Y$ 上的 universal 满射态射. 固定同构

$$\mathbb{C}^{q_i} \simeq H^0\left(E_i(m)\right) \text{ 对于} 1 \le i \le p.$$

然后从点 y 导出一个同构

$$\mathbb{C}^q \simeq \bigoplus_{1\le i\le p} \left(\mathbb{C}^{q_i}\right)^{m_i} \simeq \bigoplus_{1\le i\le p} \mathbb{C}^{m_i} \otimes \mathbb{C}^{q_i}.$$

现在取 $R_0 = R_1^{ss} \times \cdots \times R_p^{ss}$,$\theta'$ 是复合态射

$$p_X^*(\mathcal{O}(-m)) \otimes \mathbb{C}^q \simeq \bigoplus_{1\le i\le p} p_X^*(\mathcal{O}(-m)) \otimes \left(\mathbb{C}^{q_i}\right)^{m_i} \longrightarrow \bigoplus_{1\le i\le p} \left(p^\sharp_{R_i^{ss}}\left(\mathbb{F}_{0i}\right)\right)^{m_i},$$

第二个态射是 θ_i 的积. 显然 θ' 满足所需条件. 因此命题 4.1 得证. ■

推论 4.3 典范态射

$$i : \mathrm{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(F(r,d))$$

是一个同构.

证明 这直接由推论 3.5, 命题 4.1 和下降引理 (定理 2.3) 得出. ■

5 研究R^{ss} 上的GL(q)-线丛

回顾 $n = \mathrm{PGCD}(r,d)$,R^s 上的 GL(q)-线丛是指 R^s 上的代数线丛, 配备有 GL(q) 在 PGL(q) 作用于 R^s 上的线性代数作用.

设 L 是 R^s 上的 GL(q)-线丛. 则存在整数 p 使得对于任意 $y \in R^s$ 和任意 $t \in \mathbb{C}^* \subset \mathrm{GL}(q)$,$t$ 在 L_y 上的作用是乘以 t^p. 记

$$e(L) = p.$$

如果 $e(L) = 0$,L 实际上是 R^s 上的 PGL(q)-线丛.

命题 5.1 设 p 为整数. 则存在 R^s 上的 GL(q)-线丛 L 满足 $e(L) = p$ 当且仅当 p 是 n 的倍数.

证明 设 p 是 n 的倍数:$p = kn$. 证明存在 R^s 上的 GL(q)-线丛 L 满足 $e(L) = p$. 只需处理 $k = 1$ 的情况, 即 $p = n$, 因为如果 L_0 是 R^s 上的 GL(q)-线丛且 $e\left(L_0\right) = n$, 只需取 $L = L_0^k$. 75

考虑 GL(q) 在 $\mathbb{F}_0$ 上的作用. 标量 t 在 $\mathbb{F}_0$ 的纤维上的作用是乘以 t. 因此对于 R^s 上的 GL(q)-丛

$$E_1 = p_{R^s *}\left(\mathbb{F}_0 \otimes p_X^*\left(\mathcal{O}_X(m)\right)\right), \quad E_2 = p_{R^s *}\left(\mathbb{F}_0 \otimes p_X^*\left(\mathcal{O}_X(m) \otimes \Lambda\right)\right),$$

(Λ 是 X 上度为 1 的线丛), 同样如此. 有

$$\mathrm{rg}\,(E_1) = d + r\,(1 - g + \deg\,(\mathcal{O}_X(1))\,m)\,, \quad \mathrm{rg}\,(E_2) = \mathrm{rg}\,(E_1) + r,$$

因此 $\mathrm{PGCD}\,(\mathrm{rg}\,(E_1)\,, \mathrm{rg}\,(E_2)) = n$. 因此存在整数 a, b 使得

$$\mathrm{rg}\,(E_1)\,a + \mathrm{rg}\,(E_2)\,b = n.$$

只需取

$$L_0 = \det\,(E_1)^a \otimes \det\,(E_2)^b\,.$$

反之, 设 L 是 R^s 上的 GL(q)-线丛. 需要证明 $e(L)$ 是 n 的倍数.

引理 5.2 任意 R^s 上的 GL(q)-线丛可以延拓到 R^{ss} 上的 GL(q)-线丛.

由此得出, 任意 R^s 上的 PGL(q)-线丛也可以延拓到 R^{ss} 上的 PGL(q)-线丛 (我们将在 §6 中利用此结果证明定理 A).

证明 设 L 是 R^s 上的 GL(q)-线丛. 由于 R^{ss} 是光滑的, 线丛 L 可以延拓到 R^{ss} 上的线丛, 仍记为 L. 需要证明 L 上的 GL(q)-丛结构也可以延拓. 只需证明态射

$$\phi : \mathrm{GL}(q) \times L_{|R^s} \longrightarrow L_{|R^s}$$

(定义 GL(q) 的作用) 可以延拓为态射 $\mathrm{GL}(q) \times L \to L$, 因为该态射需要满足的性质将由 ϕ 的连续性导出. 设 $(U_i)_{i\in I}$ 是 $U(r,d)$ 的仿射开覆盖. 则 $\left(\pi^{-1}\,(U_i)\right)_{i\in I}$ 是 R^{ss} 的 PGL(q)-不变仿射开覆盖. 只需证明态射

$$\phi_i : \mathrm{GL}(q) \times L_{|R^s \cap \pi^{-1}(U_i)} \to L_{|R^s \cap \pi^{-1}(U_i)}$$

的限制可以延拓为态射

$$\mathrm{GL}(q) \times L_{\left|\pi^{-1}(U_i)\right.} \to L_{\left|\pi^{-1}(U_i)\right.}, \qquad 76$$

因为这些态射将粘合. 从 ϕ_i 导出环态射

$$\mathbb{C}\left[L_{|R^s \cap \pi^{-1}(U_i)}\right] \longrightarrow \mathbb{C}\left[\mathrm{GL}(q) \times L_{|R^s \cap \pi^{-1}(U_i)}\right].$$

由于 $\mathrm{codim}_{R^{ss}}\,(R^{ss} \backslash R^s) \geq 2$, 有

$$\mathbb{C}\left[L_{|R^s \cap \pi^{-1}(U_i)}\right] = \mathbb{C}\left[L_{|\pi^{-1}(U_i)}\right], \quad \mathbb{C}\left[\mathrm{GL}(q) \times L_{|R^s \cap \pi^{-1}(U_i)}\right] \simeq \mathbb{C}\left[\mathrm{GL}(q) \times L_{|\pi^{-1}(U_i)}\right].$$

因此有态射

$$\mathbb{C}\left[L_{|\pi^{-1}(U_i)}\right] \longrightarrow \mathbb{C}\left[\mathrm{GL}(q) \times L_{|\pi^{-1}(U_i)}\right].$$

由于簇 $L_{|\pi^{-1}(U_i)}$ 和 $\mathrm{GL}(q) \times L_{|\pi^{-1}(U_i)}$ 是仿射的, 由此环态射导出态射

$$\mathrm{GL}(q) \times L_{|\pi^{-1}(U_i)} \longrightarrow L_{|\pi^{-1}(U_i)},$$

这是 ϕ_i 的延拓. 至此完成引理 5.2 的证明. ∎

现在回到命题 5.1 的证明. 设 $y \in R^{ss}$ 使得 F_{0y} 同构于 n 个稳定丛的直和:$\mathbb{F}_0 \simeq nE$. 回顾记 L 为 R^s 上 $\mathrm{GL}(q)$-线丛 L 到 R^{ss} 的延拓. 则 $\mathrm{GL}(q)$ 中 y 的稳定子 G_y 等同于 $\mathrm{GL}(n)$. 因此, 从 $\mathrm{GL}(q)$ 在 L 上的作用导出 $\mathrm{GL}(n)$ 在 L_y 上的作用, 其形式为

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(n) \times L_y &\longrightarrow L_y \\ (\sigma, u) &\longrightarrow \det(\sigma)^a u, \end{aligned}$$

其中 a 为整数: 因此伸缩子群的作用为

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times L_y &\longrightarrow L_y \\ (t, u) &\longmapsto t^{an} u, \end{aligned}$$

因此 $e(L) = an$, 这证明了命题 5.1. ■

命题 5.1 将在 §7 中使用, 但这里给出其他推论. 本章后续结果不用于定理 A 至 F 的证明. 77

5.1 universal 丛 设 U 是 $U_s(r,d)$ 的非空开集. 回顾 U 上的 Poincaré 丛是指由 U 参数化的 $U(r,d)$ 的向量丛族 E, 使得典范态射 $f_E : U \to U(r,d)$ 是包含 $U \subset U(r,d)$.

引理 5.3 U 上存在 Poincaré 丛当且仅当 $U_s(r,d)$ 上存在 Poincaré 丛.

证明 需要证明如果 U 上存在 Poincaré 丛, 则 $U_s(r,d)$ 上也存在. 显然可以定义 U 上的 “射影 universal 丛” 概念: 这是一个光滑态射

$$\phi : W \longrightarrow U \times X$$

使得对于任意 $u \in U$,$\phi^{-1}(\{u\} \times X)$ 是 X 上的射影空间丛: $\phi^{-1}(\{u\} \times X) = \mathbb{P}(E)$ (E 的直线), E 是 X 上秩 r 度 d 的稳定丛, 其在 $U(r,d)$ 中的对应点为 u.

$U_s(r,d)$ 上存在射影 universal 丛: 即 $\mathbb{P}(\mathbb{F}_0) / \mathrm{PGL}(q) = \mathbb{P}_0$.

设 V 是 U 上的 Poincaré 丛. 则由于 X 上的任意稳定丛都是单的,

$$\Lambda = p_{\pi^{-1}(U)*}\left(\mathcal{H}om\left(\mathbb{F}_0, \pi^\sharp(V)\right)\right)$$

是 $\pi^{-1}(U)$ 上的线丛. 由此导出同构

$$\Lambda \otimes F_{0|\pi^{-1}(U)\times X} \simeq \pi^\sharp(V),$$

从而有同构

$$\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}_{0|U},$$

即 $\mathbb{P}_{0|U}$ 是平凡的. 但射影丛的平凡性是双有理问题 (参见 [9]). 因此如果 $\mathbb{P}_{0|U}$ 是平凡的, 则 $\mathbb{P}_0$ 亦然, 即 $U_s(r,d)$ 上存在 Poincaré 丛. 这证明了引理 5.3. ■

引理 5.4 以下断言等价:

(i) 存在 R^s 上的 $\mathrm{GL}(q)$-线丛 L 满足 $e(L) = 1$.

(ii) 存在 $U_s(r,d)$ 上的 Poincaré 丛.

证明 假设 L 存在. 只需取 Poincaré 丛为

$$\left(\mathbb{F}_0 \otimes p_X^*\left(L^{-1}\right)\right) / \mathrm{PGL}(q). \qquad 78$$

反之, 如果 V 是 $U_s(r,d)$ 上的 Poincaré 丛, 则

$$L = p_{R^s *}\left(\mathcal{H}om\left(\pi^\sharp(V), \mathbb{F}_0\right)\right)$$

是 $\mathrm{GL}(q)$-线丛且 $e(L) = 1$. ■

由命题 5.1 和前述两个引理, 可得

定理 5.5 如果 r 和 d 不互质, 且 U 是 $U_s(r,d)$ 的非空开集, 则 U 上不存在 Poincaré 丛.

这是 Ramanan 的结果 [20].

注记. 当 $g=2$,$r=2$ 且 d 为偶数时, 此证明不适用, 因为此时

$$\mathrm{codim}_{R^{ss}}\left(R^{ss} \backslash R^s\right) = 1.$$

但在此情况下,$U(r,d)$ 有非常精确的描述, 可以直接证明定理 5.5(参见 [18]).

5.2 $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ 上半稳定模空间上的 Poincaré 层

定理 G 的证明完全遵循定理 5.5 的证明, 基于以下两点:

- $M(r,c_1,c_2)$ 同样可以通过将 Grothendieck 概型的某个光滑不可约开集除以 $\mathrm{PGL}(q)$ 型群得到 (参见 [13]).
- $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ 上作为秩 r 且 Chern 类为 c_1, c_2 的半稳定层的一族相干层的直和项的最大数目恰好是 $\mathrm{PGCD}(r,c_1,\chi)$.

显然, 上述内容仅在

$$\mathrm{codim}_{M(r,c_1,c_2)}\left(M(r,c_1,c_2) \backslash M_s(r,c_1,c_2)\right) \geq 2$$

时成立. 否则, 可以证明 $M(r,c_1,c_2)$ 等同于 $\mathbb{P}_5$($\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ 的二次曲线空间),$M_s(r,c_1,c_2)$ 是非退化二次曲线的开集 (参见 [2]). 不深入细节, 可以说为了证明 $M_s(r,c_1,c_2)$ 上不存在 Poincaré 丛, 利用了以下事实: 投影

$$\mathbb{P}_5 \times \mathbb{P}_2 \supset Q \longrightarrow \mathbb{P}_5,$$

其中 Q 是 universal 二次曲线, 不存在截面.

6 定理 A 的证明

我们希望证明 $U(r,d)$ 和 $U(r,L)$ 是局部因子分解的. 仅处理 $U(r,d)$ 的情况,$U(r,L)$ 的情况类似.

根据 [7] 的命题 6.2 和 [14] 第 141 页的结论,$U(r,d)$ 是局部唯一分解的当且仅当 $U(r,d)$ 的每个除子都是局部主除子, 也就是说当且仅当 $U(r,d)$ 上每个超
曲面的理想层都是局部自由的. 79

由于 $U(r,d)$ 是正规的, 这一条件等价于: 典范态射

$$\mathrm{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Cl}(U(r,d))$$

是一个同构.

我们在引言中已经看到, 只需证明限制态射

$$\mathrm{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(U_s(r,d))$$

是满射即可. 设 L 是 $U_s(r,d)$ 上的一个线丛, 那么 $\pi_s^*(L)$ 就是 R^s 上的一个 $\mathrm{PGL}(q)$-线丛. 根据引理5.2, 这个 $\mathrm{PGL}(q)$-线丛可以延拓为 R^{ss} 上的一个 $\mathrm{PGL}(q)$-线丛 $\overline{L'}$. 根据命题4.1,$\overline{L'}$ 满足下降引理 (定理2.3) 的条件. 因此存在 $U(r,d)$ 上的一个线丛 $\overline{L}$, 使得 $\mathrm{PGL}(q)$-线丛 $\overline{L'}$ 和 $\pi^*(\overline{L})$ 是同构的. 于是我们有

$$\overline{L}_{|R^s} = L' / \mathrm{PGL}(q) = L,$$

因此 $\overline{L}$ 就是 L 所需的延拓.

至此, 定理A得证.

7 $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ 与$\mathrm{Pic}(U(r,L))$ 的描述

7.1 由整体截面生成的向量丛

引理 7.1 设 E 是 X 上秩为 r 的向量丛, 且由整体截面生成. 那么存在 $H^0(E)$ 的一个 $r-1$ 维子空间 H, 使得典范求值态射的限制

$$H \otimes \mathcal{O}_X \to E$$

是一个向量丛的单射态射.

证明 取 $x \in X$. 典范态射 $H^0(E) \to E_x$ 是满射. 由此可知, 在 x 点为零的 $H^0(E)$ 的子空间余维数为 r. 因此, 在 X 的至少一个点为零的 $H^0(E)$ 的齐次子簇的余维数为 $r-1$. 引理7.1立即得证. ■

存在一个整数 k_0, 使得对于所有 $k \geq k_0$, 任何秩 r, 次数 $d+kr$ 的半稳定丛都由整体截面生成 (参见 [23]). 根据 3.4 节, 我们可以假设所有秩 r, 次数 d 的半稳定丛都由整体截面生成. 设 E 是这样的丛. 根据引理 7.1, 我们有一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow E \longrightarrow \det(E) \longrightarrow 0.$$ 80

7.2　构造一个大的稳定丛族　设 $J^{(d)}$ 是 X 上次数 d 的线丛的 Jacobian 簇,D 是 $J^{(d)} \times X$ 上的 Poincaré 丛. 令

$$V = R^1 p_{J*}\left(D^* \otimes \mathbb{C}^{r-1}\right).$$

这是 $J^{(d)}$ 上的一个秩为 $(r-1)(g-1+d)$ 的向量丛. 设 $\mathbb{P}$ 是与 V 相关联的射影空间丛. 根据 [23] 的附录 II 命题 2, 存在 $\mathbb{P} \times X$ 上的一个向量丛 $\mathbb{E}$ 和一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \pi_0^{\sharp}(D) \otimes p_{\mathbb{P}}^*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)\right) \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

(其中 π_0 表示投影 $\mathbb{P} \to J^{(d)}$), 使得对于所有 $y \in \mathbb{P}$, 若 $\alpha = \pi_0(y)$, 则 (*) 在 $\{y\} \times X$ 上的限制为

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{E}_y \longrightarrow D_\alpha \otimes y \longrightarrow 0$$

对应于包含

$$y \hookrightarrow \operatorname{Ext}^1\left(D_\alpha, \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1}\right) = V_\alpha,$$

(视为 $\operatorname{Ext}^1\left(D_\alpha \otimes y, \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1}\right)$ 的元素).

记 $\mathbb{P}_s$ 为 $\mathbb{P}$ 中使得 $\mathbb{E}_y$ 稳定的点 y 组成的开子集.$\mathbb{E}$ 在 $\mathbb{P}_s \times X$ 上的限制 (仍记为 $\mathbb{E}$) 是 X 上秩 r, 次数 d 的稳定丛的一个族. 根据引理7.1, 典范态射 $f_{\mathbb{E}} : \mathbb{P}_s \to U_s(r,d)$ 是满射.

7.3　同一族的另一种构造

7.3.1　设 $\mathbb{F}_0$ 是 $R^s \times X$ 上的典范丛 (参见1.1). 那么层 $F_0 = p_{R^s*}(\mathbb{F}_0)$ 是局部自由的, 秩为 $k = d + r(1-g)$. 设 Gr_0 是 F_0 的 $r-1$ 维子空间的 Grassmann 丛.

存在一个好的商 $\mathrm{Gr}_0 / \mathrm{PGL}(q)$: 为此考虑 $\mathrm{GL}(q)$ 在 R^s 上的作用. 群 $\mathrm{GL}(q)$ 典范地作用在 $\mathbb{F}_0$ 上, 因此也作用在 F_0 和 $\wedge^{r-1}F_0$ 上. 投影 $\wedge^{r-1}F_0 \to R^s$ 是一个 $\mathrm{GL}(q)$-仿射态射. 根据 Ramanathan([21], 引理 4.1), 存在一个好的商 $\wedge^{r-1}F_0 / \mathrm{GL}(q)$. 因此存在一个好的商 $\mathrm{Gr}_0 / \mathrm{PGL}(q)$. 这是一个几何商. 记 $\Gamma_0 = \mathrm{Gr}_0 / \mathrm{PGL}(q)$.

设 $p_0 : \Gamma_0 \to U_s(r,d)$ 是由投影 $\mathrm{Gr}_0 \to R^s$ 导出的态射. 设 $y \in R^s$. 那么存在一个典范同构

$$p_0^{-1}(\pi(y)) \simeq \mathrm{Gr}^{r-1}\left(H^0\left(\mathbb{F}_{0y}\right)\right).$$

记 $\pi_{Gr} : \mathrm{Gr}_0 \to \Gamma_0$ 为商态射. 81

7.3.2　**Γ_0 的 Picard 群**　设 Q_{Gr} 是 Gr_0 上的典范相对商丛 (若 $y \in R^{ss}$, 且 $H \subset H^0\left(\mathbb{F}_{0y}\right)$ 是 $r-1$ 维的, 则 $Q_{\mathrm{Gr},H} = H^0\left(\mathbb{F}_{0y}\right)/H$), 且 $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(1) = \wedge^{k-r+1}Q_{\mathrm{Gr}}$. 已知

$$\operatorname{Pic}\left(\mathrm{Gr}_0\right) \simeq \operatorname{Pic}\left(R^s\right) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(1).$$

丛 $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(1)$ 带有 $\mathrm{GL}(q)$ 的典范作用, 且

$$e\left(\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(1)\right) = k - r + 1$$

(记号类似于 §5).

命题 7.2 (a) 存在 Γ_0 上的一个线丛, 记为 $\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)$, 使得对于所有 $y \in R^s$

$$\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)\big|_{p_0^{-1}(\pi(y))} \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}^{r-1}\left(H^0\left(\mathbb{F}_{0y}\right)\right)}(n).$$

(b) 有一个典范同构

$$\mathrm{Pic}\,(\Gamma_0) \simeq \mathrm{Pic}\,(U_s(r,d)) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n).$$

证明 首先构造 $\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)$. 丛 F_0 的秩为 $k = d + r(1-g)$, 且若 $x \in X, \mathbb{F}_{0x} = \mathbb{F}_{0|R^s\times\{x\}}$ 的秩为 r. 我们有 $\mathrm{PGCD}(r,k) = n$, 因此存在整数 a, b 使得

$$ak + br = -n(k-1+r).$$

因此, 若 $L = \det\,(F_0)^a \otimes \det\,(\mathbb{F}_{0x})^b$, 则 $e(L) = -n(k-1+r)$. 于是有

$$e\left(L \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(n)\right) = 0,$$

且 $L \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(n)$ 实际上带有 $\mathrm{PGL}(q)$ 的作用. 由于 π_{Gr} 是一个几何商, 存在 Γ_0 上的一个线丛 $\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)$ 使得

$$\pi_{\mathrm{Gr}}^*\left(\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)\right) \simeq L \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(n).$$

显然 $\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)$ 具有所需的性质. 这证明了 (a).

证明 (b). 若 L 是 $U_s(r,d)$ 上的一个线丛, 我们有 $p_{0*}\left(p_0^*(L)\right) \simeq L$, 因此 $p_0^* : \mathrm{Pic}\,(U_s(r,d)) \to \mathrm{Pic}\,(\Gamma_0)$ 是单射. 结合 (a), 我们得到一个单射态射

$$\mathrm{Pic}\,(U_s(r,d)) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n) \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(\Gamma_0)\,.$$

还需证明它是满射. 设 Δ 是 Γ_0 上的一个线丛. 由于 $\mathrm{Pic}\,(\mathrm{Gr}_0) \simeq \mathrm{Pic}\,(R^s) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(1)$, 存在整数 m 和 R^s 上的线丛 Λ' 使得

$$\pi_{\mathrm{Gr}}^*(\Delta) \simeq p_1^*\left(\Lambda'\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(-m),$$ 82

其中 p_1 表示投影 $\mathrm{Gr}_0 \to R^s$. 丛 Λ' 带有 $\mathrm{GL}(q)$ 的作用, 且

$$e\left(\Lambda'\right) = m(k-r+1).$$

根据命题5.1,$e\left(\Lambda'\right)$ 是 n 的倍数, 且由于 n 和 $k-r+1$ 互质,n 整除 m: 设 $m = -an$. 那么 $\pi_{\mathrm{Gr}}^*\left(\Delta \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)^a\right) = p_1^*\left(\Lambda''\right)$, 其中 Λ'' 是 R^s 上的线丛且 $e\left(\Lambda''\right) = 0$. 由此可知 Λ'' 来自 $U_s(r,d)$. 因此 $\Delta \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)^a$ 也来自 $U_s(r,d)$. 这证明了 (b) 并完成了命题7.2的证明. ∎

7.3.3 设 Gr_0' 是 Gr_0 中由点 H 组成的开子集, 使得典范向量丛态射 $\mathcal{O}_X \times H \to \mathbb{F}_{0y}$ 是单射 (y 表示 H 在 R^{ss} 中的像). 这是一个 $\mathrm{PGL}(q)$-不变的开子集, 且 $\Gamma_0' = \pi_{\mathrm{Gr}}\left(\mathrm{Gr}_0'\right)$ 是 Γ_0 的一个开子集.

引理 7.3 对于 R^{ss} 的每个点 y,$p_0^{-1}(\pi(y)) \cap (\Gamma_0 \backslash \Gamma_0')$ 是 $p_0^{-1}(\pi(y))$ 的一个不可约超曲面.

证明 这意味着以下内容: 若 E 是 X 上秩 r, 次数 d 的稳定丛,$\mathrm{Gr}^{r-1}\left(H^0(E)\right)$ 的闭子簇 Y 由使得向量丛态射 $\mathcal{O}_X \otimes H \to E$ 非单射的子空间 H 组成, 是一个不可约超曲面.

设 W 是 $X \times \mathrm{Gr}^{r-1}\left(H^0(E)\right)$ 的闭子簇, 由使得在 x 点的求值 $H \to E_x$ 非单射的偶 (x, H) 组成. 若 $p_G : X \times \mathrm{Gr}^{r-1}\left(H^0(E)\right) \to \mathrm{Gr}^{r-1}\left(H^0(E)\right)$ 是投影, 则 $p_G(W) = Y$. 因此只需证明 W 是不可约的且余维数为 2, 且 $p_G : W \to Y$ 在 Y 的一般点上的纤维是有限的. 为证明第一个断言, 注意到对于所有 $x \in X$,$p_X^{-1}(x)$ 是 $\mathrm{Gr}^{r-1}\left(H^0(E)\right)$ 的一个不可约闭子簇, 余维数为 2: 它由满足

$$H \cap \ker\left(H^0(E) \to E_x\right) \neq \{0\}$$

的子空间 H 组成. 还需证明存在 Y 的一个点 H, 使得 $\mathcal{O}_x \otimes H \to E$ 仅在 X 的有限个点上非单射. 为此, 选择 X 的一个点 x 和 $H^0(E)$ 的一个 $r-1$ 维子空间 H, 使得求值 $H \to E_x$ 的限制是单射 (这是可能的, 因为 $H^0(E) \to E_x$ 是满射). 这证明了引理7.3. ■

推论 7.4 闭子簇 $\Gamma_0 \backslash \Gamma_0'$ 是 Γ_0 的一个不可约超曲面.

证明 $p_0 : \Gamma_0 \backslash \Gamma_0' \to U_s(r, d)$ 的限制是满射, 且根据引理7.3, 其纤维是不可约的且维数相同. 根据 [24](定理 8, 第 61 页),$\Gamma_0 \backslash \Gamma_0'$ 是不可约的. 显然它是一个超曲面. ■

引理 7.5 $\Gamma_0 \backslash \Gamma_0'$ 的理想层形如 $p_0^*(\Lambda) \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)^{-d/n}$, 其中 $\Lambda \in \mathrm{Pic}\left(U_s(r, d)\right)$. 83

证明 只需证明对于 X 上任何秩 r, 次数 d 的稳定丛 E,$\mathrm{Gr}^{r-1}\left(H^0(E)\right)$ 中由使得向量丛态射 $\mathcal{O}_x \otimes H \to E$ 非单射的子空间 H 组成的超曲面 Y 的次数为 d. 为此, 考虑 X 上的典范向量丛态射

$$\Phi : p_G^*(U) \longrightarrow p_X^*(E),$$

其中 U 是 $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))} \otimes H^0(E)$ 的 universal 子丛,p_G 是投影 $X \times \mathrm{Gr}^{r-1}\left(H^0(E)\right) \to \mathrm{Gr}^{r-1}\left(H^0(E)\right)$. 设 W 是 $X \times \mathrm{Gr}^{r-1}\left(H^0(E)\right)$ 的子簇, 由使得求值 $H \to E_x$ 非单射的偶 (x, H) 组成. 那么 W 是 Φ 非单射的点集. 根据 Porteous 公式 (参见 [4]),$c_2\left(p_X^*(E) - p_G^*(U)\right)$ 是 $A^2\left(X \times \mathrm{Gr}^{r-1}\left(H^0(E)\right)\right)$ 中 $[W]$ 的整数倍. 我们有

$$c_2\left(p_X^*(E) - p_G^*(U)\right) = \alpha_1^2 - \alpha_2 - \alpha_1 \det(E),$$

其中 α_1, α_2 分别是 U 的第一和第二陈类.
由于 $c_2\left(p_X^*(E) - p_G^*(U)\right)$ 在 $A^2\left(X \times \mathrm{Gr}^{r-1}\left(H^0(E)\right)\right)$ 中不可约, 我们有

$$[W] = \alpha_1^2 - \alpha_2 - \alpha_1 \det(E).$$

于是在 $A^1\left(X \times \mathrm{Gr}^{r-1}\left(H^0(E)\right)\right)$ 中

$$[Y] = p_G^*([W]) = -\deg(E)\alpha_1$$

因此 Y 的次数为 d. 这证明了引理7.5. ∎

命题 7.6 我们有一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}\left(U_s(r,d)\right) \longrightarrow \mathrm{Pic}\left(\Gamma_0'\right) \longrightarrow \mathbb{Z}/(d/n)\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

证明 首先证明 $\Phi = p_0^* : \mathrm{Pic}\left(U_s(r,d)\right) \to \mathrm{Pic}\left(\Gamma_0'\right)$ 是单射. 设 L_0 为 $U_s(r,d)$ 上的线丛, 使得 $p_0^*\left(L_0\right)$ 在 Γ_0' 上平凡. 我们有一个群的正合序列

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathrm{Pic}\left(\Gamma_0\right) \xrightarrow{\text{restriction}} \mathrm{Pic}\left(\Gamma_0'\right) \longrightarrow 0$$

([7], 命题 II.6.5), 其中态射 i 将 m 映为 $\Gamma_0 \backslash \Gamma_0'$ 的理想层的 m 次幂. 由此可得, 在 $\mathrm{Pic}\left(\Gamma_0\right)$ 中,

$$p_0^*\left(L_0\right) \simeq p_0^*\left(\Lambda^m\right) \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)^{-dm/n},$$

其中 m 为整数, 根据引理 7.5,$p_0^*(\Lambda) \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)^{-d/n}$ 是 $\Gamma_0 \backslash \Gamma_0'$ 的理想层. 根据命题 7.2(b), 我们有 $m = 0$, 因此 $p_0^*\left(L_0\right) \simeq \mathcal{O}_{\Gamma_0}$, 并进一步由同一命题得出 L_0 是平凡的. 因此 Φ 是单射. 84

我们有一个交换群图, 其行与列均为正合:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathbb{Z} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "j"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \arrow[r, "p_0^*"] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{Pic}(\Gamma_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \arrow[r, "\Phi"] & \mathrm{Pic}(\Gamma_0') \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

第一行正合序列由命题 7.2(b) 得出, 且 j 是乘以 d/n 的映射. 我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pic}\left(\Gamma_0'\right) / \mathrm{Pic}\left(U_s(r,d)\right) &= \mathrm{Pic}\left(\Gamma_0\right) / i(\mathbb{Z}) / \mathrm{Pic}\left(U_s(r,d)\right) \\
&= \mathrm{Pic}\left(\Gamma_0\right) / \left(i(\mathbb{Z}) + \mathrm{Pic}\left(U_s(r,d)\right)\right) \\
&= \mathbb{Z}/j(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(d/n)\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

这完成了命题 7.6 的证明. ∎

7.3.4 设 U_{Gr} 为 Gr_0 上的相对 universal 子丛. 对于任意 $y \in R^{ss}$ 和任意 $H \in \mathrm{Gr}^{r-1}\left(H^0\left(\mathbb{F}_{0y}\right)\right)$, 有 $U_{\mathrm{Gr},H} = H$. 设

$$T = \mathcal{H}om\left(\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0} \otimes \mathbb{C}^{r-1}, U_{\mathrm{Gr}}\right),$$

为 Gr_0 上的向量丛, 具有 $\mathrm{GL}(q)$ 的明显作用. 我们定义

$$\mathbb{T} = T/\,\mathrm{GL}(q) = P(T)/\,\mathrm{PGL}(q), \quad T' = \mathcal{I}som\left(\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0} \otimes \mathbb{C}^{r-1}, U_{\mathrm{Gr}}\right).$$

引理 7.7 在 $\mathbb{T}$ 上存在一个局部平凡于 Γ_0 的射影空间丛结构.

证明 若 $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(1) = \Lambda^{r-1}U_{\mathrm{Gr}}$, 配备由 $\mathrm{GL}(q)$ 在 U_{Gr} 上的作用导出的 $\mathrm{GL}(q)$ 作用, 则 $e\left(\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(1)\right) = r-1$. 另一方面, 根据命题 5.1, 存在一个来自 R^{ss} 的线丛 L 在 Gr_0 上, 使得 $e(L) = n$. 由于 $r-1$ 和 n 互素, 存在整数 a, b 使得 $an + b(r-1) = 1$. 因此, 若 $L_0 = L^a \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(b)$, 则 $e\left(L_0\right) = 1$. 由此可得 $T \otimes L_0^{-1}$ 实际上具有 $\mathrm{PGL}(q)$ 的作用.商 $\left(T \otimes L_0^{-1}\right)/\,\mathrm{PGL}(q)$ 是 Γ_0 上的一个向量丛, 其 85
关联的射影空间丛为 $\mathbb{T}$. 这证明了引理 7.7. ∎

设 $p_0' : \mathbb{T} \to \Gamma_0$ 为典范态射. 对于任意 $y \in R^{ss}$ 和任意 $H \in p_0^{-1}(\pi(y)) = \mathrm{Gr}^{r-1}\left(H^0\left(\mathbb{F}_{0y}\right)\right)$, 有 $p_0'^{-1}(H) = \mathbb{P}\left(\mathrm{Hom}\left(\mathbb{C}^{r-1}, H\right)\right)$. 设 $\mathbb{T}'$ 为 $\mathbb{T}$ 中位于 Γ_0' 上的点对应的开子集, 对应于同构. 我们有

$$p_0'^{-1}(H) \cap \mathbb{T}' = \mathbb{P}\left(\mathrm{Isom}\left(\mathbb{C}^{r-1}, H\right)\right).$$

命题 7.8 我们有一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}\left(\Gamma_0'\right) \longrightarrow \mathrm{Pic}\left(\mathbb{T}'\right) \longrightarrow \mathbb{Z}/(r-1)\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

证明 证明类似于命题 7.6 的证明, 考虑到 $\mathbb{T}\backslash\mathbb{T}'$ 的理想层具有形式 $\mathcal{O}_T(r-1) \otimes \phi^*(L)$, 其中 L 是 Γ_0' 上的线丛,$\phi : \mathbb{T}' \to \Gamma_0'$ 为投影. ∎

7.3.5 结论

命题 7.9 (Seshadri) 我们有同构 $\mathbb{P}^s \simeq \mathbb{T}'$.

证明 设 $y \in P^s$. 因此有一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1} \xrightarrow{i} \mathbb{E}_y \longrightarrow D_\alpha \otimes y \longrightarrow 0,$$

其中 $\alpha = \pi_0(y)$(参见 7.2). 从 $\mathbb{E}_y$ 我们得到 $U_s(r,d)$ 的一个点 z, 从 $\mathrm{im}\left(H^0(i)\right) \subset H^0\left(\mathbb{E}_y\right)$ 得到 Γ_0' 中位于 z 上的点 H, 然后从由 i 导出的同构 $\mathbb{C}^{r-1} \simeq \mathrm{im}\left(H^0(i)\right)$ 得到 $\mathbb{T}'$ 中位于 H 上的点. 为了证明我们由此定义了一个态射 $\Phi : \mathbb{P}^s \to \mathbb{T}'$, 对于任意 $y \in \mathbb{P}^s$, 考虑在 y 的邻域 U 上的同构:

$$\mathcal{O}_U \otimes \mathbb{C}^q \simeq p_{\mathbb{P}^s *}\left(\mathbb{E} \otimes p_X^*\left(\mathcal{O}_X(m)\right)\right)$$

使得 $\Phi_{|U}$ 可通过 T 分解. 逆同构定义如下: 设 $y \in R^{ss}, \gamma \in T$ 位于 y 上. 由此导出一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{F}_{0y} \longrightarrow \det\left(\mathbb{F}_{0y}\right) \longrightarrow 0.$$

若 α 为 $J^{(d)}$ 中对应于 $\det\left(\mathbb{F}_{0y}\right)$ 的点, 则上述正合序列定义了 $\mathbb{P}^s$ 中位于 α 上的点. 由此得到一个 $\mathrm{GL}(q)$ 不变态射 $T' \to \mathbb{P}^s$, 通过商映射给出一个态射 $\mathbb{T}' \to \mathbb{P}^s$, 为 Φ 的逆. 这证明了命题 7.9. ■

注记. 1- 设 L 为 X 上度为 d 的线丛,

$$\mathbb{P}_L = \pi_0^{-1}(L), \quad \mathbb{P}_L^s = \mathbb{P}_L \cap \mathbb{P}^s,$$ 86

$\Gamma'_{0L}, \mathbb{T}'_L$ 分别为 $\Gamma'_0, \mathbb{T}'$ 的闭子簇, 为 $U_s(r,L)$ 的原像. 同构 Φ 诱导一个同构 $\mathbb{P}_L^s \simeq \mathbb{T}'_L$, 并且有以下正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}\left(U_s(r,L)\right) \longrightarrow \mathrm{Pic}\left(\Gamma'_{0L}\right) \longrightarrow \mathbb{Z}/(d/n)\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}\left(\Gamma'_{0L}\right) \longrightarrow \mathrm{Pic}\left(\mathbb{P}_L^s\right) \longrightarrow \mathbb{Z}/(r-1)\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

注意 $\mathbb{P}_L$ 是一个射影空间.

2- 设 $p_1 : \mathrm{Gr}'_0 \to R^s$ 为投影. 在引理 7.7 中我们看到存在一个 $\mathrm{GL}(q)$ 线丛 L 在 Gr'_0 上, 使得 $e(L) = 1$. 则 $V = p_1^\sharp\left(F_{0|R^s \times X}\right) \otimes L^{-1}$ 实际上是 $\mathrm{PGL}(q)$ 向量丛在 $\mathrm{Gr}'_0 \times X$ 上. 商 $\mathbb{E}' = V / \mathrm{PGL}(q)$ 是由 Γ'_0 参数化的 $U(r,d)$ 的向量丛族. 典范态射 $f_{\mathbb{E}'} : \Gamma'_0 \to U(r,d)$ 无非是 p_0 的限制, 定义于 7.3.1. 若 $p' : \mathbb{P}^s = \mathbb{T}' \to \Gamma'_0$ 为投影, 则存在 $\mathbb{P}^s$ 上的线丛 L_0 和同构 $p'^*\left(\mathbb{E}'\right) \otimes L_0 \simeq \mathbb{E}$(这由稳定丛的简单性容易得出).

7.4 应用于研究 Pic$(U(r,d))$ 和 Pic$(U(r,L))$

7.4.1 **研究** $\mathrm{Pic}\left(J^{(d)}\right)$ **在** $\mathrm{Pic}\left(U_s(r,d)\right)$ **中的像** 设 $L_0 \in \mathrm{Pic}^{(0)}(X)$, 可视为 $\mathrm{Pic}^{(0)}\left(J^{(d)}\right)$ 或 $Z \subset H(r,d)$ 的元素 (参见 §3). 设 $\det : U(r,d) \to J^{(d)}$ 为典范态射. 在 §3 中我们定义了一个群态射

$$\gamma : H(r,d) \longrightarrow \mathrm{Pic}(F(r,d)) = \mathrm{Pic}(U(r,d)).$$

命题 7.10 我们有 $\gamma\left(L_0\right) = \det^*\left(L_0\right)$.

引理 7.11 态射

$$\mathrm{Pic}(F(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}\left(\mathbb{P}^s\right)$$
$$L \longmapsto L_{\mathbb{E}}$$

是单射. 87

证明 我们有一个交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T}' = \mathbb{P}^s \arrow[r, "f_{\mathbb{E}}"] & U_s(r,d) \\
T' \arrow[u, "\pi'"] \arrow[r, "p"] & R^{ss} \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

其中 π' 为商态射,p 为典范投影. 若 $L \in \mathrm{Pic}(F(r,d))$ 使得 $L_{\mathbb{E}}$ 平凡, 则 $\pi'^{*}(L_{\mathbb{E}}) = L_{\pi'^{*}(\mathbb{E})}$ 也平凡. 但根据 7.3.4 的注记 2, 族 $\pi'^{*}(\mathbb{E})$ 等价于 $p^{*}\left(F_{0|R^{s}\times X}\right)$. 因此

$$L_{p^{*}\left(F_{0|R^{s}\times X}\right)} = p^{*}\left(L_{F_{0|R^{s}\times X}}\right)$$

也平凡. 态射

$$p^{*} : \mathrm{Pic}\left(R^{ss}\right) \longrightarrow \mathrm{Pic}\left(\mathbb{T}'\right)$$

是单射: 证明类似于命题 7.6 中 $\mathrm{Pic}\left(U_{s}(r,d)\right) \to \mathrm{Pic}\left(\Gamma_{0}'\right)$ 的单射性. 由此可得 $L_{F_{0|R^{s}\times X}}$ 平凡. 根据推论 3.4,L 也平凡. 这证明了引理 7.11. ■

为证明命题 7.10, 只需证明

$$\gamma\left(L_{0}\right)_{\mathbb{E}} \simeq f_{\mathbb{E}}^{*}\left(\det^{*}\left(L_{0}\right)\right).$$

设 L_1 为 X 上度为 0 的线丛. 对应于 L_0 的 Z 中元素为 $[L_0 \otimes L_1] - [L_1]$, 且对应于 L_0 的 $\mathrm{Pic}^{(0)}\left(J^{(d)}\right)$ 中元素也来自前述 Z 中的元素 (参见 3.3). 另一方面, 复合态射

$$\mathbb{P}^{s} \longrightarrow U_{s}(r,d) \xrightarrow{\det} J^{(d)}$$

由族 $\det(\mathbb{E})$ 定义, 其为 X 上度为 d 的线丛族. 因此只需证明以下结果: 对于 X 上任意度为 0 的线丛 L_1, 有同构

$$\det\left(p_{\mathbb{P}^{s}*}\left(\mathbb{E} \otimes p_{X}^{*}\left(L_{1}\right)\right)\right) \simeq \det\left(p_{\mathbb{P}^{s}*}\left(\det(\mathbb{E}) \otimes p_{X}^{*}\left(L_{1}\right)\right)\right) \tag{*}$$

且

$$R^{1} p_{\mathbb{P}^{s}*}\left(\mathbb{E} \otimes p_{X}^{*}\left(L_{1}\right)\right) = R^{1} p_{\mathbb{P}^{s}*}\left(\det(\mathbb{E}) \otimes p_{X}^{*}\left(L_{1}\right)\right) = 0.$$

上述等式成立因为 d 为正. 因此只需证明同构 $(*)$. 根据正合序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{s}\times X} \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \pi_{0}^{\sharp}(D) \otimes p_{\mathbb{P}^{s}}^{*}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)\right) \longrightarrow 0,$$

有

$$\det(\mathbb{E}) \simeq \pi_{0}^{\sharp}(D) \otimes p_{\mathbb{P}^{s}}^{*}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)\right).$$ 88

因此有正合序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{s}\times X} \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \det(\mathbb{E}) \longrightarrow 0,$$

同构 $(*)$ 由此直接得出. 这证明了命题 7.10.

7.4.2 定理 B 的证明

设

$$r' = \frac{r}{n}, \quad d' = \frac{-d + r(g-1)}{n}.$$

根据 [8],§4.6, 存在一个秩为 r' 且度为 d' 的向量丛 F 在 X 上, 使得存在一个秩为 r 且度为 d 的稳定丛 E 满足

$$h^{0}(E \otimes F) = 0.$$

如引言所述, 记 $\Theta_{F,L}^{s}$ 为 $U_{s}(r,L)$ 的子集, 由满足 $h^{0}(E \otimes F) \neq 0$ 的稳定丛 E 对应的点组成.

引理 7.12 群 $\mathrm{Pic}(U(r,L))$ 同构于 $\mathbb{Z}$.

证明 由于 $\mathrm{codim}_{U(r,L)}\left(U(r,L)\backslash U_s(r,L)\right) \geq 2$, 且 $U(r,L)$ 是局部因子的, 只需证明 $\mathrm{Pic}\left(U_s(r,L)\right) \simeq \mathbb{Z}.\mathbb{P}_L^s$ 的 Picard 群是 $\mathbb{Z}$ 的商群, 因为 $\mathbb{P}_L^s$ 是射影空间的一个开集. 由于 $\mathrm{codim}_{U(r,L)}\left(U(r,L)\backslash U_s(r,L)\right) \geq 2$,$\mathrm{Pic}\left(U_s(r,L)\right)$ 至少有一个非有限阶元素, 且根据 7.3.5 的备注 1,$\mathrm{Pic}\left(U_s(r,L)\right) \subset \mathrm{Pic}\left(\mathbb{P}_L^s\right)$, 因此 $\mathrm{Pic}\left(U_s(r,L)\right) \simeq \mathbb{Z} \simeq \mathrm{Pic}\left(\mathbb{P}_L^s\right)$, 这证明了引理 7.12. ■

命题 7.13 $\mathrm{Pic}\left(U_s(r,L)\right)$ 在 $\mathrm{Pic}\left(\mathbb{P}_L^s\right) \simeq \mathbb{Z}$ 中的像是子群 $(r-1)\frac{d}{n}\mathbb{Z}$.

证明 根据 7.3.5, 有以下正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}\left(U_s(r,L)\right) \longrightarrow \mathrm{Pic}\left(\Gamma'_{0L}\right) \longrightarrow \mathbb{Z}/\frac{d}{n}\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}\left(\Gamma'_{0L}\right) \longrightarrow \mathrm{Pic}\left(\mathbb{P}_L^s\right) \longrightarrow \mathbb{Z}/(r-1)\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

因此得到一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/(r-1)\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Pic}\left(\mathbb{P}_L^s\right)/\mathrm{Pic}\left(U_s(r,L)\right) \longrightarrow \mathbb{Z}/\frac{d}{n}\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

由此可知 $\mathrm{Pic}\left(\mathbb{P}_L^s\right)/\mathrm{Pic}\left(U_s(r,L)\right)$ 有 $(r-1)\frac{d}{n}$ 个元素, 这证明了命题 7.13. ■

根据推论 4.3, 典范态射

$$i : \mathrm{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(F(r,d))$$

是一个同构. 设

$$\mathbb{L} := i^{-1} \circ \gamma : H(r,d) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U(r,d))$$ 89

(参见 §3). 记 $\mathbb{E}_L$ 为 $\mathbb{E}$ 在 $\mathbb{P}_L^s \times X$ 上的限制, 对于任意整数 m, 设 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_L^s}(m) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_L}(m)_{|\mathbb{P}_L^s}$.

引理 7.14 有 $\gamma([F])_{\mathbb{E}_L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_L^s}\left(-(r-1)\frac{d}{n}\right)$.

证明 考虑正合序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_L^s \times X} \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{E}_L \longrightarrow p_{\mathbb{P}_L^s}^*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_L^s}(-1)\right) \otimes L \longrightarrow 0.$$

由此得到正合序列

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_L^s} \otimes H^0\left(\mathbb{C}^{r-1} \otimes F\right) \longrightarrow p_{\mathbb{P}_L^s *}\left(\mathbb{E}_L \otimes F\right) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_L^s}(-1) \otimes H^0(F \otimes L) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_L^s} \otimes H^1\left(\mathbb{C}^{r-1} \otimes F\right) \longrightarrow R^1 p_{\mathbb{P}_L^s *}\left(\mathbb{E}_L \otimes F\right) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_L^s}(-1) \otimes H^1(F \otimes L) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

以及同构

$$\det\left(p_{\mathbb{P}_L^s !}\left(\mathbb{E}_L \otimes F\right)\right) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_L^s}(-\chi(F \otimes L)).$$

引理 7.14 由 $\chi(F \otimes L) = (r-1)\frac{d}{n}$ 得出. ■

为了证明定理 B, 还需证明 $\Theta_{F,L}^{s}$ 是 $U_s(r,L)$ 的一个超曲面, 且

$$\mathcal{O}\left(-\Theta_{F,L}^{s}\right) \simeq \mathbb{L}([F])_{|U_s(r,L)}.$$

考虑态射

$$\alpha : \mathcal{O}_{\mathbb{P}_L^s}(-1) \otimes H^0(F \otimes L) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_L^s} \otimes H^1\left(\mathbb{C}^{r-1} \otimes F\right)$$

来自引理 7.14. 由于 $p_{\mathbb{P}_L^s *}(\mathbb{E}_L \otimes F)$ 是挠的,α 是一个一般双射的态射, 其零点概形恰好是 $f_{\mathbb{E}_L}^{-1}\left(\Theta_{F,L}^{s}\right)$. 由此可知 $f_{\mathbb{E}_L}^{-1}\left(\Theta_{F,L}^{s}\right)$ 是 $\mathbb{P}_L^s$ 的一个超曲面. 由于 $f_{\mathbb{E}_L}$ 的纤维具有常维数,$\Theta_{F,L}^{s}$ 确实是 $U_s(r,L)$ 的一个超曲面.

线丛 $\gamma(-[F])_{\mathbb{E}_L}$ 同构于 α 的零点概形的理想层, 并且根据命题 7.13 生成了 $\operatorname{Pic}(U_s(r,d))$ 在 $\operatorname{Pic}\left(\mathbb{P}_L^s\right)$ 中的像. 线丛 $\mathcal{O}\left(f_{\mathbb{E}_L}^{-1}\left(\Theta_{F,L}^{s}\right)\right)$ 是 $\gamma([F])_{\mathbb{E}_L}$ 的一个幂. 因此必须有

$$\mathcal{O}\left(f_{\mathbb{E}_L}^{-1}\left(\Theta_{F,L}^{s}\right)\right) = \gamma(-[F])_{\mathbb{E}_L},$$

从而

$$\mathcal{O}\left(-\Theta_{F,L}^{s}\right) = \mathbb{L}([F])_{|U_s(r,L)}.$$

这完成了定理 B 的证明.

7.4.3 定理 C 的证明 首先以与 $U(r,L)$ 相同的方式证明 $\operatorname{Pic}(U_s(r,d))$ 在 $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^s)$ 中的像是由 $\operatorname{Pic}\left(J^{(d)}\right)$ 和 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}\left((r-1)\frac{d}{n}\right)$ 生成的子群. 然后, 如前面的 90
证明所示, 证明

$$f_{\mathbb{E}}^{*}\left(\mathcal{O}\left(-\Theta_{F}^{s}\right)\right) = \gamma([F])_{\mathbb{E}},$$

并且该线丛可以表示为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}\left((r-1)\frac{d}{n}\right) \otimes L$, 其中线丛 L 来自 $\operatorname{Pic}\left(J^{(d)}\right)$. 结合定理 A, 定理 C 立即得证. 同时得到

$$\mathbb{L}([F]) = \mathcal{O}\left(-\Theta_F\right),$$

这表明, 如引言所述, 如果 F' 是与 F 类似的向量丛, 则有

$$\mathcal{O}\left(\Theta_{F'}\right) = \mathcal{O}\left(\Theta_F\right) \otimes \det^{*}\left(\det\left(F'\right) \otimes \det(F)^{-1}\right),$$

其中 $\left(\det\left(F'\right) \otimes \det(F)^{-1}\right.$ 被视为 $\left.\operatorname{Pic}\left(J^{(d)}\right)\right)$ 的元素.

7.4.4 定理 D 的证明 注意到

$$H(r,d) = Z + \mathbb{Z}[F],$$

其中 Z 是 $H(r,d)$ 中同构于 $\operatorname{Pic}^{(0)}(X)$ 的子群 (参见 §3). 定理 D 的 (a) 部分直接由推论 4.3 得出.

证明 (b). 只需证明

$$\mathbb{L} : H(r,d) \longrightarrow \operatorname{Pic}(U(r,d))$$

在 Z 上的限制是单射. 实际上, 复合映射

$$H(r,d) \xrightarrow{\mathbb{L}} \mathrm{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U(r,L))$$

在 Z 上是平凡的, 根据 7.4.2 在 $\mathbb{Z}[F]$ 上是单射. 因此, 如果 $\mathbb{L}$ 在 Z 上的限制是单射, 则 $\mathbb{L}$ 本身也是单射. 根据命题 7.10, 为了证明 $\mathbb{L}_{|Z}$ 的单射性, 只需证明

$$\det{}^* : \mathrm{Pic}^{(0)}(X) \subset \mathrm{Pic}\left(J^{(d)}\right) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U(r,L))$$

的单射性. 如果 L_0 是 $J^{(d)}$ 上的一个线丛, 由于 $\det : U(r,d) \to J^{(d)}$ 的纤维是射影且不可约的, 有

$$\det{}_*\left(\det{}^*\left(L_0\right)\right) \simeq L_0,$$

因此 $\det^*$ 是单射. 这证明了 (b).

由定理 C 和等式 $\mathbb{L}([F]) = \mathcal{O}\left(-\Theta_F\right)$ 可得

$$\mathrm{Pic}(U(r,d)) = \mathrm{im}(\mathbb{L}) + \mathrm{Pic}\left(J^{(d)}\right).$$ 91

等式

$$\mathrm{im}(\mathbb{L}) \cap \mathrm{Pic}\left(J^{(d)}\right) = \mathrm{Pic}^{(0)}(X)$$

也是定理 C 和命题 7.10 的结果. 因此定理 D 得证.

7.5 典范层和对偶层 这里证明定理 E 和 F. 我们仅证明定理 E, 另一个类似. 首先证明 (a). 记 T_U 为 $U_s(r,d)$ 的切丛. 有同构

$$f_{\mathbb{E}}^*\left(T_U\right) \simeq R^1 p_{\mathbb{P}^s *}\left(\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{E}\right),$$

只需在 $\mathrm{Pic}\left(\mathbb{P}^s\right)$ 中计算后者的行列式. 有正合序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s \times X} \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow E \longrightarrow \pi_0^{\sharp}(D) \otimes p_{\mathbb{P}^s}^*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1)\right) \longrightarrow 0, \qquad (**)$$

由此得到正合序列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1) \otimes p_{\mathbb{P}^s *}\left(\mathbb{E}^* \otimes \pi_0^{\sharp}(D)\right) \\ \longrightarrow R^1 p_{\mathbb{P}^s *}\left(\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{C}^{r-1}\right) \longrightarrow R^1 p_{\mathbb{P}^s *}\left(\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{E}\right) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

(因为 $d \gg 0$). 因此

$$\det\left(R^1 p_{\mathbb{P}^s *}\left(\mathbb{E}^* \otimes E\right)\right) \simeq \det\left(R^1 p_{\mathbb{P}^s *}\left(\mathbb{E}^*\right)\right)^{r-1} \otimes \det\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1) \otimes p_{\mathbb{P}^s *}\left(\mathbb{E}^* \otimes \pi_0^{\sharp}(D)\right)\right)^{-1}.$$

利用 (**) 的对偶序列, 得到正合序列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s} \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(1) \otimes R^1 p_{\mathbb{P}^s *}\left(\pi_0^{\sharp}\left(D^*\right)\right) \\ \longrightarrow R^1 p_{\mathbb{P}^s *}\left(\mathbb{E}^*\right) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s} \otimes \mathbb{C}^{(r-1)g} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

因此有同构

$$\det\left(R^1 p_{\mathbb{P}^s *}\left(\mathbb{E}^*\right)\right) \simeq \det\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(1) \otimes R^1 p_{\mathbb{P}^s *}\left(\pi_0^{\sharp}\left(D^*\right)\right)\right).$$

类似地, 利用 (**) 的对偶序列得到同构

$$\det\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1) \otimes p_{\mathbb{P}^s *}\left(\mathbb{E}^* \otimes \pi_0^{\sharp}(D)\right)\right) \simeq \det\left(p_{\mathbb{P}^s *}\left(\pi_0^{\sharp}(D)\right) \otimes \mathbb{C}^{r-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1)\right).$$

如果 L 是 X 上度为 d 的线丛, 有

$$h^0(L) = \chi(L) = d + 1 - g, \qquad h^1(L^*) = \chi(L^*) = d + g - 1,$$

因此

$$\det\left(R^1 p_{\mathbb{P}^s *}\left(\mathbb{E}^*\right)\right) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(d + g - 1) \otimes \det\left(R^1 p_{\mathbb{P}^s *}\left(\pi_0^{\sharp}(D)\right)\right),$$

且

$$\det\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1) \otimes p_{\mathbb{P}^s *}\left(\mathbb{E}^* \otimes \pi_0^{\sharp}(D)\right)\right) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}((r-1)(g-d-1)) \otimes \det\left(p_{\mathbb{P}^s *}\left(\pi_0^{\sharp}(D)\right)\right)^{r-1}.$$

最终得到 92

$$\det\left(R^1 p_{\mathbb{P}^s *}\left(\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{E}\right)\right) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(2(r-1)d) \otimes \Delta^{r-1},$$

其中

$$\Delta = \det\left(p_{\mathbb{P}^s *}\left(\pi_0^{\sharp}\left(D^*\right)\right)\right) \otimes \det\left(p_{\mathbb{P}^s *}\left(\pi_0^{\sharp}(D)\right)\right)^{-1}.$$

设 F_0 是一个秩为 $2r$ 且度为 $2(-d + r(g-1))$ 的向量丛. 利用正合序列 (**) 可见

$$\gamma\left(\left[F_0\right]\right)_{\mathbb{E}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}\left(-2d(r-1)\right) \otimes \det{}^*\left(p_{J^{(d)} *}\left(D \otimes p_X^*\left(\mathbb{F}_0\right)\right)\right),$$

因此

$$\det\left(R^1 p_{\mathbb{P}^s *}\left(\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{E}\right)\right) \simeq \gamma\left(\left[F_0\right]\right)_{\mathbb{E}}^{-1} \otimes \det{}^*\left(p_{J^{(d)} *}\left(D \otimes p_X^*\left(F_0\right)\right)\right) \otimes \Delta^{r-1},$$

这证明了 (a)(定理 E 的表述略有不同, 以便在 $d \gg 0$ 不成立时仍然有效).

(b) 的证明. 根据 [22], 正规簇的对偶层是可除的, 即来自该簇的 Weil 除子. 因此 $U(r,d)$ 的对偶层是可除的. 但该簇是局部因子的, 因此 $U(r,d)$ 的任何 Weil 除子都是 Cartier 除子, 从而 $U(r,d)$ 的对偶层是局部自由的. 它与 ω 同构, 因为它在 $U_s(r,d)$ 上与 ω 一致, 且 $\operatorname{codim}_{U(r,d)}\left(U(r,d) \backslash U_s(r,d)\right) \geq 2$. 这完成了定理 E 的证明.

注记. 以下是 $U(r,d)$ 的对偶层局部自由的另一种证明: 由于 R^{ss} 是光滑的,$U(r,d)$ 是一个 Cohen-Macaulay 簇 (这源于 Hochster-Roberts 定理 ([15], 第 153 页,[10, 11]). 而局部因子的 Cohen-Macaulay 簇是 Gorenstein 的, 即其F偶层是可逆的 (参见 [16]).

References

[1] Drézet, J.-M. Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Ann. Inst. Fourier 38 (1988), 105-168.

[2] Drézet, J.-M. Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Journ. Reine angew. Math. 380 (1987), 14-58.

[3] Drézet, J.-M. Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$. Singularities, Representations of Algebras and Vector Bundles (Proc. Lambrecht 1985) LN 1273 Springer (1987), 337-362.

[4] Fulton, W. Intersection theory. Erg. der Math. und ihre Grenzg. Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1984).

[5] Gieseker, D. On the moduli of vector bundles on an algebraic surface. Ann. Math. 106 (1977), 45-60.

[6] Grothendieck, A. Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV - Les schémas de Hilbert. Séminaire Bourbaki 221, (1960/61).

[7] Hartshorne, R. Algebraic geometry. Grad. Texts in Math. Vol. 52. Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1977).

[8] Hirschowitz, A. Problèmes de Brill-Noether en rang supérieur. C. R. Acad. Sci. Paris 307 (1988), 153-156.

[9] Hirschowitz, A., Narasimhan, M.S. Fibres de 't Hooft specifications. Enumerative geometry and classical algebraic geometry, Progr. Math. 24, Birkhäuser, Boston (1982), 143-164. 93

[10] Hochster, M., Roberts, J. Rings of invariants of reductive groups and on regular rings are Cohen-Macaulay. Adv. Math. 13, 115 (1974), 115-175.

[11] Kempf, G. The Hochster-Roberts theorem in invariant theory. Mich. Math. J. 26 (1979), 19-32.

[12] Lang, S. Abelian varieties. New-York, Interscience Publ. 1959.

[13] Maruyama, M. Moduli of stable sheaves II. Math. Kyoto Univ. 18, 3 (1978), 557-614.

[14] Matsumura, H. Commutative algebra. New York, W.A. Benjamin Co. (1970).

[15] Mumford, D., Fogarty, J. Geometric invariant theory. Erg. der Math. und ihre Grenzg. Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1984).

[16] Murthy, M.P. A note on factorial rings. Arch. Math. 15 (1964), 418-420.

[17] Narasimhan, M.S., Ramanan, S. Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface. Ann. Math. 89 (1969), 14-51.

[18] Narasimhan, M.S., Ramanan, S. Vector bundles on curves. Proc. of Bombay Coll. of Algebraic Geometry. Oxford Univ. Press (1969), 335-346.

[19] Newstead, P.E. Introduction to moduli problems and orbit spaces. TIFR Lect. Notes 51 (1978).

[20] Ramanan, S. The moduli spaces of vector bundles on an algebraic curve. Math. Ann 200 (1973), 69-84.

[21] Ramanathan, A. Stable principal bundles on a compact Riemann surface, construction of moduli space. Ph.D. Thesis. Univ. of Bombay (1976).

[22] Reid, M. Canonical 3-folds. Journées de Géométrie Algébrique d'Angers (1979), 273-310.

[23] Seshadri, C.S. Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques. Astérisque 96 (1982).

[24] Shafarevich, I.R. Basic algebraic Geometry. Grundl. Bd 213. Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1974). 94

Note : 本文机器翻译了
Drézet, J.-M., Narasimhan, M.S. Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques. Invent. Math. **97** (1989), 53-94.

J.-M. Drézet –Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

M.S. Narasimhan –Centre for Applicable Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Bangalore, India

翻译: DeepSeek v3