ESPACES DE MODULES DE FIBRÉS PARABOLIQUES ET BLOCS CONFORMES

CHRISTIAN PAULY

1 Introduction Soit C une courbe irréductible, projective et lisse sur $\mathbb{C}$ de genre $g \geq 2$. Dans [Bea94], Beauville et Laszlo ont construit un isomorphisme canonique entre d'une part un espace vectoriel, appelé espace des blocs conformes, étudié en théorie conforme des champs, et d'autre part l'espace de sections d'un fibré en droites sur l'espace des modules $\mathscr{SU}_C(r)$ des fibres vectoriels semi-stables de rang r et de déterminant trivial. Par analogie avec le cas du rang $r = 1$, on appelle ces sections *fonctions thêta généralisées.*

Le but de cet article est d'étendre cet isomorphisme aux espaces de modules de fibres paraboliques semi-stables $\mathscr{M}(r, k, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{n})$ introduits par Mehta et Seshadri [MS80] (voir section 2). Ces espaces de modules dépendent d'un ensemble fini I de points de C, appelés points paraboliques, et d'entiers $(k, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{n})$, appelés poids paraboliques, donnant la condition de stabilité pour fibres paraboliques. On peut construire (voir section 3) de manière canonique un fibré en droites ample $\mathcal{O}$ sur l'espace de modules $\mathscr{M} := \mathscr{M}(r, k, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{n})$.

La théorie conforme des champs [TUY89] associe à un ensemble fini I de points de C et à un ensemble $\overrightarrow{\lambda} = \{\lambda_x\}_{x \in I}$ de poids dominants de l'algèbre de Lie simple $\mathfrak{sl}_r(\mathbb{C})$ un espace vectoriel $V_C(I, \overrightarrow{\lambda})$, appelé espace des blocs conformes. Ces espaces sont définis à l'aide de représentations des algèbres de Kac-Moody affines. Le résultat principal (corollaire 6.7) est qu'il existe un isomorphisme canonique entre le dual de $V_C(I, \overrightarrow{\lambda})$ et l'espace des sections globales $H^0(\mathscr{M}, \Theta)$. Les poids dominants $\overrightarrow{\lambda} = \{\lambda_x\}_{x \in I}$ dépendent des poids paraboliques $(k, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{n})$. Rappelons que les espaces de blocs conformes satisfont aux règles de factorisation [TUY89], ce qui a permis d'établir, d'une manière combinatoire, une formule, dite formule de Verlinde, qui donne leur dimension [Bea94].

L'idée de la démonstration est la suivante : soit z une coordonnée locale autour d'un point $p \in C$ et A_C l'anneau des fonctions algébriques sur $C - p$, qui se plonge dans $\mathbb{C}((z))$ en associant à une fonction son développement de Laurent en p. En remarquant qu'un fibré de déterminant trivial est trivial sur $C - p$ et sur un "voisinage" de p, on peut montrer que le double quotient

$\mathsf{SL}_r(A_C)\backslash\mathsf{SL}_r(\mathbb{C}((z)))/\mathsf{SL}_r(\mathbb{C}[[z]])$ est en bijection avec les classes d'isomorphisme de fibres de rang r et de déterminant trivial. Cette construction peut se faire dans le contexte des champs et peut être mise en relation avec l'espace (resp., champ) de modules de fibrés (voir section 4).

Considérons pour chaque point parabolique $x \in I$ la variété de drapeaux Drap_x correspondante. On peut adapter la construction précédente au cas des fibrés paraboliques. Le quotient, en tant que champ, du produit $\mathscr{S}^{\text{par}} := \mathsf{SL}_r(C((z)))/\mathsf{SL}_r(C[[z]]) \times \left\{\prod_{x\in I} \mathsf{Drap}_x\right\}$ par le groupe $\mathsf{SL}_r(A_C)$ est isomorphe au champ $\mathscr{PAR}$ paramétrant fibrés paraboliques de rang r et de déterminant trivial (section 4). On peut définir de manière naturelle un fibré en droites $\mathscr{L}^{\text{par}}$ sur le champ $\mathscr{PAR}$. Un argument de type Hartog permet de montrer que les espaces $H^0(\mathscr{PAR}, \mathscr{L}^{\text{par}})$ et $H^0(\mathscr{M}, \Theta)$ sont isomorphes. En utilisant les résultats de [BL94], on peut déterminer l'image réciproque $q^*\mathscr{L}^{\text{par}}$ de $\mathscr{L}^{\text{par}}$ sur $\mathscr{S}^{\text{par}}$. Or le fibré en droites $q^*\mathscr{L}^{\text{par}}$ est muni d'une action linéaire de $\mathsf{SL}_r(A_C)$ et $H^0(\mathscr{PAR}, \mathscr{L}^{\text{par}})$ s'identifie à l'espace des sections $\mathsf{SL}_r(A_C)$-invariantes de $H^0(\mathscr{S}^{\text{par}}, q^*\mathscr{L}^{\text{par}})$.

Le théorème de Borel-Weil-Bott, ainsi qu'une version analogue pour les algèbres de Kac-Moody affines, démontrée par Kumar et Mathieu, permettent de décrire l'espace $H^0(\mathscr{S}^{\text{par}}, q^*\mathscr{L}^{\text{par}})$ en termes de représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_r(\mathbb{C})$ et de l'algèbre de Lie affine $\widehat{\mathfrak{sl}_r(\mathbb{C})}$. On déduit le résultat final, en utilisant une proposition, due à Beauville, sur les espaces de blocs conformes, qui généralise la "propagation des vacuas" de [TUY89].

Je tiens à remercier mon directeur de thèse A. Beauville pour son aide considérable pendant la réalisation de ce travail.

2 Espace de modules de fibrés paraboliques

Définitions et rappels. Soit I un ensemble fini non vide de points de C.

Définition 2.1. Un fibré parabolique sur C est la donnée d'un fibré vectoriel E sur C et, pour tout point $x \in I$, d'un drapeau de E_x, c'est-à-dire d'une filtration

$$E_x = F_0(E)_x \supset F_1(E)_x \supset \cdots \supset F_{l_x}(E)_x \supset F_{l_x+1}(E)_x = \{0\}$$

de E_x par des sous-espaces vectoriels, et d'une suite d'entiers appelés poids paraboliques

$$0 \leqslant a_1(x) < a_2(x) < \cdots < a_{l_x+1}(x) < k.$$

La suite d'entiers

$$n_i(x) = \dim(F_{i-1}(E)_x / F_i(E)_x) \quad \forall x \in I \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant l_x + 1$$

est appelée *suite de multiplicités* et l'on note pour $1 \leqslant i \leqslant l_x$

$$r_i(x) = n_1(x) + \cdots + n_i(x) = \dim(E_x / F_i(E)_x). \tag{1}$$

Soit E' un sous-fibré d'un fibré parabolique E. Alors on peut munir E' d'une structure parabolique canonique de la manière suivante : la filtration parabolique $F_i\left(E'\right)_x$ est constituée des termes distincts de la filtration $F_i(E)_x \cap E'_x$ et le poids parabolique a'_{xj} de E' est telle que si i est le plus grand entier tel que $F_j\left(E'\right)_x \subset F_i(E)_x$, alors on a $a'_j(x) = a_i(x)$.

Définition 2.2. On appelle degré parabolique d'un fibré parabolique E le nombre rationnel :

$$\operatorname{pardeg}(E) := \deg(E) + \frac{1}{k} \sum_{x \in I} \sum_{i=1}^{l_x+1} n_i(x) a_i(x).$$

On dit que E est semi-stable(resp., stable) par rapport au poids parabolique $(k, \overrightarrow{a})$, où $\overrightarrow{a} = (a_i(x))$, si pour tout sous-fibré non nul E' de E, muni de sa structure parabolique canonique, on a :

$$\frac{\operatorname{pardeg}\left(E'\right)}{\operatorname{rg}\left(E'\right)} \leqslant \frac{\operatorname{pardeg}(E)}{\operatorname{rg}(E)} (\text{ resp.}, <).$$

On peut définir la notion de filtration de Jordan-Hölder et de S-équivalence correspondante [Ses82, théorème 12]. Alors Mehta et Seshadri ont construit un espace de modules de fibrés paraboliques [MS80].

Théorème 2.3. *Étant donné un poids parabolique $\overrightarrow{a} = (a_i(x))$ et une suite de multiplicités $\overrightarrow{n} = (n_i(x))$, il existe un espace de module grossier $\mathscr{M}(r, k, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{n})$ projectif et irréductible, paramétrant les fibrés paraboliques semi-stables de rang r et de déterminant trivial modulo S-équivalence. De plus, l'ouvert des fibrés paraboliques stables $\mathscr{M}^s(r, k, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{n}) \hookrightarrow \mathscr{M}(r, k, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{n})$ est lisse.*

Dans la suite, on fixe les entiers k, $\overrightarrow{a} = (a_i(x))$ et $\overrightarrow{n} = (n_i(x))$ et on note $\mathscr{M} := \mathscr{M}(r, k, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{n})$.

Construction de l'espace de modules $\mathscr{M}$ Choisissons un fibré ample de degré 1 sur C noté $\mathcal{O}(1)$ et un entier ν assez grand. Notons Q le schéma de Hilbert des faisceaux de rang r, de déterminant $\mathcal{O}_C$ quotients de $\mathcal{O}_C^n(-\nu)$ avec $n = r\nu + r(1-g)$ et Ω l'ouvert des points de Q tel que si $\mathcal{O}_C^n(-\nu) \to \mathscr{F}_q \to 0$ est le quotient correspondant, alors $\mathscr{F}_q$ est localement libre,

$H^1(C, \mathscr{F}_q(\nu)) = 0$ et $\mathcal{O}_C^n \to \mathscr{F}_q(\nu)$ induit un isomorphisme sur les sections globales. Soit $\mathscr{F}$ le fibré universel sur $\Omega \times C$. Notons $\mathscr{D}r_x := \mathscr{D}r\left(\mathscr{F}_{|\Omega\times\{x\}}\right)$ le fibré en variétés de drapeaux de type $(n_i(x))$ sur Ω. Plus précisément, pour $q \in \Omega$, la fibre $(\mathscr{D}r_x)_q$ au-dessus de q correspond aux filtrations de suite de multiplicités $(n_i(x))$ de $(\mathscr{F}_q)_x$

$$(\mathscr{F}_q)_x \supset F_1(\mathscr{F}_q)_x \supset \cdots \supset F_{l_x}(\mathscr{F}_q)_x \supset \{0\}.$$

Notons $\mathscr{R}$ le produit fibré sur Ω de la famille $(\mathscr{D}r_x)_{x\in I}$. Sur $\mathscr{D}r_x$ on a, pour $1 \leqslant i \leqslant l_x$, des fibrés quotients universels de rang $r_i(x)$, noté $\mathscr{Q}_{xi}$: au-dessus d'un point $y = (f, q)$ de $\mathscr{D}r_x$, la fibre $(\mathscr{Q}_{xi})_y$ correspond au quotient $(\mathscr{F}_q)_x / F_i(\mathscr{F}_q)_x$, où la filtration de $(\mathscr{F}_q)_x$ est égale à f.

On notera aussi $\mathscr{Q}_{xi}$ (resp., $\mathscr{F}$) l'image réciproque de $\mathscr{Q}_{xi}$ (resp., $\mathscr{F}$) par la projection $\pi_x : \mathscr{R} \to \mathscr{D}r_x$ (resp., $\pi_\Omega : \mathscr{R} \to \Omega$). Soit $\mathscr{R}^{ss}$ (resp., $\mathscr{R}^s$) l'ouvert de $\mathscr{R}$ correspondant aux fibrés paraboliques E semi-stables (resp., stables) par rapport au poids parabolique $(k, \overrightarrow{a})$.

Décrivons d'abord l'action de $\mathsf{SL}(n)$ sur le fibré universel $\mathscr{F}$ sur $\Omega \times C$. À un point $q \in \Omega$ correspond un quotient $\beta : \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{O}_C(-\nu) \to \mathscr{F}_q$. Un élément $g \in \mathsf{SL}(n)$ agit sur Ω par $\beta \mapsto \beta \circ g^{-1}$. On notera cet automorphisme de Ω aussi g. Nous pouvons munir le fibré trivial $\mathcal{O}_\Omega^n = \Omega \times \mathbb{C}^n$ d'une action de $\mathsf{SL}(n)$ définie par $g.(q, v) = (g.q, g.v)$ pour tout $g \in \mathsf{SL}(n)$, $q \in \Omega$ et $v \in \mathbb{C}^n$. On obtient ainsi des isomorphismes de fibrés $g^*\mathcal{O}_\Omega^n \simeq \mathcal{O}_\Omega^n$ pour tout $g \in \mathsf{SL}(n)$. Faisons agir $\mathsf{SL}(n)$ trivialement sur C et $\mathcal{O}_C(-\nu)$. Nous munissons le fibré $\mathcal{O} := \pi_\Omega^*\mathcal{O}_\Omega^n \otimes \pi_C^*\mathcal{O}(-\nu)$ sur $\Omega \times C$ de l'action produit de $\mathsf{SL}(n)$. Or le fibré universel $\mathscr{F}$ s'écrit comme quotient $\mathcal{O} \to \mathscr{F} \to 0$ et l'isomorphisme $g^*\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}$, qui définit l'action de g sur $\mathcal{O}$, passe au quotient : $g^*\mathscr{F} \simeq \mathscr{F}$.

On munit ainsi $\mathscr{F}$ d'une action linéaire de $\mathsf{SL}(n)$, ce qui permet de définir l'action de $\mathsf{SL}(n)$ sur les fibrés en variétés de drapeaux $\mathscr{D}r_x$ et finalement sur $\mathscr{R}$. D'autre part, les fibrés quotient universels $\mathscr{Q}_{xi}$ s'écrivent comme quotient $\mathscr{F}_{|\mathscr{R}\times\{x\}} \to \mathscr{Q}_{xi}$ et on les munit de l'action linéaire quotient de $\mathsf{SL}(n)$.

Pour un entier μ assez grand on a un plongement $\mathsf{SL}(n)$-équivariant

$$\begin{aligned} \mathscr{R} &\hookrightarrow \mathrm{Grass}_{P(\mu)}(\mathbb{C}^n \otimes W) \times \prod_{x\in I}\left\{\mathrm{Grass}_{r_1(x)}(\mathbb{C}^n) \times \cdots \times \mathrm{Grass}_{r_{l_x}(x)}(\mathbb{C}^n)\right\} \\ q &\mapsto \left(H^0(C, \mathscr{F}_q(\mu)), \left\{(\mathscr{F}_q)_x / F_1(\mathscr{F}_q)_x, \ldots, (\mathscr{F}_q)_x / F_{l_x}(\mathscr{F}_q)_x\right\}_{x\in I}\right) \end{aligned}$$

où $P(\mu) = r(1-g) + r\mu$ et $W = H^0(C, \mathcal{O}_C(-\nu+\mu))$. On appellera $\mathscr{G}$ le produit des grassmanniennes. Introduisons pour $1 \leqslant i \leqslant l_x$ les entiers strictement positifs :

$$d_i(x) = a_{i+1}(x) - a_i(x). \tag{2}$$

Décrivons la linéarisation de l'action de $\mathsf{SL}(n)$ sur $\mathscr{G}$: l'action naturelle de $\mathsf{SL}(n)$ sur $\mathbb{C}^n$ induit une action sur chaque grassmannienne, facteur direct de $\mathscr{G}$. Le groupe de Picard d'une grassmannienne est cyclique infini et est engendré par le fibré ample $\det \mathscr{U}$, où $\mathscr{U}$ le fibré quotient universel. On munit $\det \mathscr{U}$ de l'action linéaire naturelle de $\mathsf{SL}(n)$. Ceci définit une action linéaire de $\mathsf{SL}(n)$ sur tout fibré en droites sur $\mathscr{G}$. Dans notre cas, on considère la linéarisation donnée par le fibré en droites, dont la classe dans $\mathrm{Pic}(\mathscr{G})$ est un multiple de $\varepsilon \times \prod_{x\in I} \{d_1(x), \dots, d_{l_x}(x)\}$ où ε un nombre rationnel qui dépend de μ, ν et des poids paraboliques. On peut montrer [NR93, Appendix A] que l'ensemble des points semi-stables (resp., stables) sous l'action de $\mathsf{SL}(n)$ sur $\mathscr{R}$ est $\mathscr{R}^{ss}$ (resp., $\mathscr{R}^{s}$). L'espace de modules $\mathscr{M}$ est alors obtenu comme bon quotient de $\mathscr{R}^{ss}$ par $\mathsf{SL}(n)$ [Ses82].

Remarque. Dans la construction ci-dessus, on a omis dans le produit $\mathscr{G}$ le facteur $\mathrm{Grass}_r(\mathbb{C}^n)$ qui apparait dans la construction de l'espace de modules $\mathscr{U}_C$ des fibrés paraboliques de rang 2 et de *degré* fixé de [NR93]. On vérifie aisément(en rang 2) que la restrictionà $\mathscr{M}$ du fibré thêta du théorème 1 de [NR93] coincide avec le fibré Θ du théorème 3.3.

3 Le fibré en droites Θ

Définition 3.1. Une famille de fibrés paraboliques de rang r, de déterminant trivial ayant comme suite de multiplicités $\overrightarrow{n} = (n_i(x))$ paramétrée par un schéma S est la donnée d'un fibré $\mathscr{E}$ de rang r sur $S\times C$ tel que $\forall s \in S$ $\det \mathscr{E}_s \cong \mathcal{O}_C$ et,pour $1 \leqslant i \leqslant l_x$, de fibrés quotients $\mathscr{Q}_{S,xi}$ de rang $r_i(x)$ sur $S \times \{x\}$

$$0 \to F_i\left(\mathscr{E}_{|S\times\{x\}}\right) \to \mathscr{E}_{|S\times\{x\}} \to \mathscr{Q}_{S,xi} \to 0$$

tel que, si l'on note $F_i\left(\mathscr{E}_{|S\times\{x\}}\right)$ le fibré noyau correspondant, alors $\forall s \in S$ le drapeau $\left(\mathscr{E}_s\right)_x \supset F_1\left(\mathscr{E}_s\right)_x \supset \cdots F_{l_x}\left(\mathscr{E}_s\right) \supset \{0\}$ a comme multiplicités $(n_i(x))$.

Si l'on suppose enplus que la famille est semi-stable, alors, comme $\mathscr{M}$ est un espace de modules grossier, il existe un morphisme classifiant $\Phi_S : S \to \mathscr{M}$.

Rappelons le lemme de descente dà Kempf [DN89, théorème 2.3] considérons le bon quotient $\pi : \mathscr{R}^{ss} \to \mathscr{M}$ et un $\mathsf{SL}(n)$ -fibré en droites L sur $\mathscr{R}^{ss}$, c'està dire un fibré en droites L sur $\mathscr{R}^{ss}$ sur lequel agit $\mathsf{SL}(n)$ linéairement, au-dessus de l'action de $\mathsf{SL}(n)$ sur $\mathscr{R}^{ss}$. Pour tout fibré en droites L' sur $\mathscr{M}$, le fibré π^*L' est muni d'une structure naturelle de $\mathsf{SL}(n)$ -fibré en droites. Si L est un $\mathsf{SL}(n)$ -fibré en droites sur $\mathscr{R}^{ss}$, on dit que L *descend sur* $\mathscr{M}$ s'il existe un fibré en droites L' sur $\mathscr{M}$ tel que les $\mathsf{SL}(n)$ -fibrés L et π^*L' soient isomorphes.

Lemme 3.2. *L descend sur $\mathscr{M}$ si et seulement si pour tout point fermé q tel que l'orbite de q sous l'action de $\mathsf{SL}(n)$ soit fermée, le stabilisateur de q dans $\mathsf{SL}(n)$ agit trivialement sur la fibre L_q .*

On suppose désormais que $\sum_{x\in I}\sum_{i=1}^{l_x+1} a_i(x)n_i(x)$ est divisible par r. Le théo-rème suivant est une généralisation au rang quelconque du théorème 1 de [NR93].

Théorème 3.3. *Il existe un unique fibré en droites ample Θ sur $\mathscr{M}$ tel que pour toute famille parabolique $\mathscr{E}$ (défini dans 3.1), paramétrée par S, on ait : $\Phi_S^*\Theta = \Theta_{\mathscr{E}}$ où*

$$\Theta_{\mathscr{E}} = (\det \mathsf{R}\pi_S\mathscr{E})^k \otimes \left\{ \bigotimes_{x\in I} \bigotimes_{i=1}^{l_x} (\det \mathscr{Q}_{S,xi})^{d_i(x)} \right\} \otimes \left(\det \mathscr{E}_{|S\times\{y\}}\right)^e$$

où y est un point de C et e est déterminé par l'équation :

$$-kr(1-g) + \sum_{x\in I}\sum_{i=1}^{l_x} d_i(x)r_i(x) + re = 0. \tag{3}$$

Remarques. (i) En vertu du théorème see-saw [Mum70], le fibré $\det \mathscr{E}_{|S\times\{y\}}$ est indépendant du point y de C.

(ii) En utilisant les relations (1) et (2), on trouve que l'équation (3) est équivalente à :

$$\sum_{x\in I}\sum_{i=1}^{l_x+1} a_i(x)n_i(x) = r\left(e - k(1-g) + \sum_{x\in I} a_{l_x+1}(x)\right). \tag{4}$$

(iii) On utilise ici, comme dans [BL94], l'inverse de la définition usuelle [KM76] du fibré déterminant. Avec les notations du théorème on a au-dessus d'un point $s\in S$:

$$(\det \mathsf{R}\pi_S\mathscr{E})_s = \det H^0(C,\mathscr{E}_s)^{-1} \otimes \det H^1(C,\mathscr{E}_s).$$

Démonstration. Considérons la famille parabolique universelle $(\mathscr{F},\{\mathscr{Q}_{xi}\})$ sur $\mathscr{R}\times C$ (voir section 2). Alors $\mathsf{SL}(n)$ agit de manière naturelle sur $\Theta_{\mathscr{F}}$ et on va montrer que la restriction de $\Theta_{\mathscr{F}}$ à $\mathscr{R}^{ss}$, notée aussi $\Theta_{\mathscr{F}}$, descend sur $\mathcal{M}$. Soit $q\in\mathscr{R}^s$. Alors l'orbite de q sous l'action de $\mathsf{SL}(n)$ est fermée et d'après la proposition 9 de [Ses82], $\mathsf{Stab}_{\mathsf{SL}(n)}(q) = \mathbb{C}^*\,\mathrm{Id}\cap\mathsf{SL}(n)$. Par définition de l'action de $\mathsf{SL}(n)$, $\lambda\,\mathrm{Id}\in\mathsf{SL}(n)$ agit comme multiplication par λ sur le fibré $\mathscr{F}_q$ et sur les quotients $(\mathscr{Q}_{xi})_q$. La fibre au-dessus de q de $\det \mathsf{R}\pi_{\mathscr{R}^{ss}}\mathscr{F}$ est isomorphe à $\det H^0(C,\mathscr{F}_q)^{-1}\otimes\det H^1(C,\mathscr{F}_q)$ et $\lambda\,\mathrm{Id}$ y agit par $\lambda^{-\chi(\mathscr{F}_q)}$. Finalement l'action de $\lambda\,\mathrm{Id}$ sur la fibre au-dessus de q de

$$\Theta_{\mathscr{F}} = (\det \mathsf{R}\pi_{\mathscr{R}^{ss}}\mathscr{F})^k \otimes \left\{ \bigotimes_{x\in I} \bigotimes_{i=1}^{l_x} (\det \mathscr{Q}_{xi})^{d_i(x)} \right\} \otimes \left(\det \mathscr{F}_{|\mathscr{R}^{ss}\times\{y\}}\right)^e$$

est la multiplication par

$$\lambda^{-kr(1-g)+\sum_{x\in I}\sum_{i=1}^{l_x} d_i(x)r_i(x)+re} = \lambda^0 = 1.$$

Soit $q \in \mathscr{R}^{ss}\backslash\mathscr{R}^s$ un point dont l'orbite est fermée. Alors d'après le lemme 4.2 de [DN89] $\mathscr{F}_q$ est isomorphe à une somme directe de fibrés paraboliques stables $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_s$, avec $\forall \alpha \in \{1, \ldots, s\}$:

$$\frac{\operatorname{pardeg}(E_\alpha)}{r_\alpha} = \frac{\operatorname{pardeg}(E)}{r} = \frac{1}{rk}\sum_{x\in I}\sum_{i=1}^{l_x+1} a_i(x)n_i(x)$$

avec $r_\alpha = \operatorname{rg}(E_\alpha)$. Au-dessus du point $x \in I$ on a le drapeau

$$E_x = F_0(E)_x \supset F_1(E)_x \supset \cdots \supset F_{l_x}(E)_x \supset \{0\}.$$

Les sous-fibrés $E_\alpha \hookrightarrow E$ sont munis de la structure parabolique canonique

$$F_i(E_\alpha)_x = F_i(E)_x \cap E_\alpha$$

et si l'on note $m_i^\alpha(x) = \dim\left(F_{i-1}(E_\alpha)_x / F_i(E_\alpha)_x\right)$, on a

$$\operatorname{pardeg}(E_\alpha) = \deg(E_\alpha) + \frac{1}{k}\sum_{x\in I}\sum_{i=1}^{l_x+1} a_i(x)m_i^\alpha(x). \tag{6}$$

Pour des raisons de dimension, on a $F_i(E)_x = \bigoplus_\alpha F_i(E_\alpha)_x$ et par conséquent

$$(E_x/F_i(E)_x) \cong \bigoplus_\alpha \left(E_{\alpha x}/F_i(E_\alpha)_x\right)$$

et $\dim\left(E_{\alpha x}/F_i(E_\alpha)_x\right) = \sum_{j=1}^i m_j^\alpha(x)$.

On a vu que les homothéties $\lambda \operatorname{Id} \in \mathsf{SL}(n)$ agissent trivialement sur $\Theta_{\mathscr{F}}$, donc $\Theta\mathscr{F}$ est en fait un $\mathsf{PSL}(n)$-fibré. Supposons d'abord que les fibrés E_α sont tels que E_α n'est pas isomorphe à E_β si $\alpha \neq \beta$ (ceci est le cas pour $r = 2$). Alors, d'après la proposition 25 (ii) de [Ses82], le stabilisateur de q sous l'action de $\mathsf{PSL}(n)$ est isomorphe au quotient $\mathsf{Aut}(\mathscr{F}_q)/\mathbb{C}^*\operatorname{Id}$, où $\mathsf{Aut}(\mathscr{F}_q)$ désigne le groupe des isomorphismes paraboliques de $\mathscr{F}_q$, qui dans ce cas, est égal à $\mathbb{C}^*\operatorname{Id} \times \cdots \times \mathbb{C}^*\operatorname{Id} \subset \mathsf{GL}(n_1) \times \cdots \times \mathsf{GL}(n_s) \subset \mathsf{GL}(n)$, où $n_\alpha = h^0(C, E_\alpha(\nu))$ et $\sum_\alpha n_\alpha = n$.

L'action de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in \mathbb{C}^* \times \cdots \times \mathbb{C}^*$ sur la fibre au-dessus de q de $\Theta_{\mathscr{F}}$ est la multiplication par

$$\prod_{\alpha} \lambda_\alpha^{-k\chi(E_\alpha)+\sum_{x\in I}\sum_{i=1}^{l_x} d_i(x)\left(\sum_{j=1}^{i} m_j^\alpha(x)\right)+r_\alpha e}.$$

En utilisant la relation (1) :

$$\sum_{x\in I}\sum_{i=1}^{l_x} d_i(x)\left(\sum_{j=1}^{i} m_j^\alpha(x)\right) = \sum_{x\in I}\left(\sum_{i=1}^{l_x+1} -a_i(x)m_i^\alpha(x) + r_\alpha a_{l_x+1}(x)\right)$$

l'exposant de λ_α s'écrit encore

$$\begin{aligned}
&-k(\deg(E_\alpha)+r_\alpha(1-g)) + \sum_{i\in I}\left(\sum_{i=1}^{l_x+1} -a_i(x)m_i^\alpha(x) + r_\alpha a_{l_x+1}(x)\right) + r_\alpha e\\
&= -k\,\mathrm{pardeg}\,(E_\alpha) - kr_\alpha(1-g) + \sum_{x\in I} r_\alpha a_{l_x+1}(x) + r_\alpha e\\
&= \frac{r_\alpha}{r}(-k\,\mathrm{pardeg}(E)) + r\left(\sum_{x\in I} a_{l_x+1}(x) + e - k(1-g)\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les équations(4),(5), et(6).

Considérons maintenant le cas général où E est isomorphe à une somme directe de fibrés paraboliques stables

$$E = m_1E_1 \oplus \cdots \oplus m_sE_s$$

avec $m_\alpha \geqslant 1$ et E_α n'est pas isomorphe à E_β, si $\alpha \neq \beta$. Alors le stabilisateur $\mathsf{Stab}_{\mathsf{GL}(n)}(q)$ de q est isomorphe à $\mathsf{GL}\,(m_1) \times \cdots \times \mathsf{GL}\,(m_s) \subset \mathsf{GL}(n)$ et un élément $g \in \mathsf{Stab}_{\mathsf{GL}(n)}(q)$ agit sur la fibre au-dessus de q de $\Theta_{\mathscr{F}}$ comme multiplication par $\chi(g)$, où χ est un caractère du groupe $\mathsf{GL}\,(m_1) \times \cdots \times \mathsf{GL}\,(m_s)$, défini par des entiers $l_1, \ldots, l_s$. On a pour $g = (g_1, \ldots, g_s)$

$$\chi(g) = \prod_{i=1}^{s} \det\,(g_i)^{l_i}\,.$$

On utilise maintenant le fait, démontré plus haut, que les éléments "diagonaux" $(\lambda_1\,\mathrm{Id}, \ldots, \lambda_s\,\mathrm{Id}) \in \mathsf{GL}\,(m_1) \times \cdots \times \mathsf{GL}\,(m_s)$ agissent trivialement, ce qui implique que $l_i = 0, \forall i$. On peut donc conclure, d'après le lemme 3.2, que le fibré $\Theta_{\mathscr{F}}$ descend en un fibré noté Θ sur $\mathscr{M}$. On peut montrer que Θ a les propriétés universelles énoncées dans le théorème en utilisant les mêmes arguments que dans [DN89].

Il reste à montrer que Θ est ample. Choisissons comme fibré ample $\mathcal{O}(1)$ sur C le fibré $\mathcal{O}(y)$. Il est alors facile de montrer que le fibré en droites, polarisant l'action de $\mathsf{SL}(n)$ sur $\mathscr{G}$ (voir section 2), restreint à $\mathscr{R}^{ss}$, est isomorphe à un multiple de $\Theta_{\mathscr{F}}$. Or, la construction par géométrie invariante de $\mathscr{M}$ montre qu'un multiple de la polarisation descend en un fibré ample, d'où l'on déduit que Θ est ample. $\square$

4 Le champ de modules $\mathscr{PAR}$

Fibrés vectoriels et $\mathsf{SL}_r(K)$ Rappelons brièvement (cf. section 1 de [BL94]) les relations entre fibrés vectoriels et le groupe $\mathsf{SL}_r(K)$.

Soit p un point de C distinct des points paraboliques $x \in I$. On pose $C^* = C - p$ et on note $\mathcal{O}$ la complétion de l'anneau local en p et K le corps de fractions de $\mathcal{O}$. En choisissant une coordonnée locale ξ_p en p, on peut identifier $\mathcal{O}$ à $\mathbb{C}[[z]]$, l'anneau des séries formelles en $z = \xi_p$, et K à $\mathbb{C}((z))$. Appelons A_C l'anneau des fonctions algébriques sur C^*. Posons $D = \mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ et $D^* = \mathrm{Spec}(K)$. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} D^* & \longrightarrow & D \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow f \\ C^* & \xrightarrow{j} & C \end{array}$$

où j est l'immersion ouverte et f le morphisme canonique. Considérons un fibré vectoriel E sur C de rang r et de déterminant trivial. Alors, on montre que E est algébriquement trivial sur C^* et sur D. Les images réciproques ρ^* et σ^* de deux trivialisations $\rho : \mathcal{O}_C^r \simeq E_{|C^*}$ et $\sigma : \mathcal{O}_D^r \simeq E_{|D}$ sur D^* diffèrent par un élément $\gamma = \rho^{*-1} \circ \sigma^* \in \mathsf{SL}_r(K)$. Inversement, un élément $\gamma \in \mathsf{SL}_r(K)$ permet de recoller des fibrés triviaux de rang r sur C^* et D, ce qui définit (à isomorphisme près) un fibré E_γ sur C de determinant trivial. Il en résulte que $\mathsf{SL}_r(K)$ est en bijection avec l'ensemble des triples (E, ρ, σ) modulo isomorphisme.

Remarquons que deux trivialisations ρ et ρ' diffèrent par un élément de $\mathsf{SL}_r(A_C)$ et deux trivialisations σ et σ' diffèrent par un élément de $\mathsf{SL}_r(\mathcal{O})$. Le double quotient $\mathsf{SL}_r(A_C)\backslash\mathsf{SL}_r(K)/\mathsf{SL}_r(\mathcal{O})$ est alors en bijection avec les classes d'isomorphismes de fibrés E de rang r et de déterminant trivial.

Nous pouvons décrire cette correspondance bijective dans un contexte algébrique en introduisant les notions de $\mathbb{C}$-espace et de champ sur $\mathbb{C}$. On pourra établir le lien avec les espaces de modules de fibrés (paraboliques).

$\mathbb{C}$-espaces Rappelons qu'un $\mathbb{C}$-espace (resp., $\mathbb{C}$-groupe) [LM92] est un faisceau d'ensembles (resp., de groupes) sur (Aff), la catégorie des schémas affines sur $\mathbb{C}$ munie de la topologie fidelement plate et de présentation finie (fppf). Dans la suite, on va considérer les $\mathbb{C}$-groupes suivants :

$$\begin{aligned}
&\mathsf{SL}_r(\mathcal{O}) : R \mapsto \mathsf{SL}_r\left(R[[z]]\right) \\
&\mathsf{SL}_r(K) : R \mapsto \mathsf{SL}_r(R((z))) \\
&\mathsf{SL}_r\left(A_C\right) : R \mapsto \mathsf{SL}_r\left(A_{C_R}\right).
\end{aligned}$$

Nous pouvons considerer le quotient $\mathscr{S} = \mathsf{SL}_r(K)/\mathsf{SL}_r(\mathcal{O})$ comme étant le faisceau associé au préfaisceau $R \mapsto \mathsf{SL}_r(R((z)))/\mathsf{SL}_r(R[[z]])$. La proposition suivante (proposition 2.1 de [BL94]) décrit alors la relation avec les fibrés vectoriels (voir aussi la proposition 4.3 pour le cas parabolique). Posons $C_R = C \times \operatorname{Spec}(R)$ et $C_R^* = C^* \times \operatorname{Spec}(R)$. L'anneau A_{C_R} désigne l'anneau des fonctions algébriques sur C_R^*.

Proposition 4.1. *Le $\mathbb{C}$-espace $\mathscr{S}$ représente le foncteur qui associe à une $\mathbb{C}$-algèbre R l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets (E, ρ) où E est un fibré de rang r sur C_R, ρ une trivialisation de E sur C_R^* tel que $\bigwedge^r \rho$ s'etend en une trivialisation de $\bigwedge^r E$ sur C_R.*

Rappelons [BL94, théorème 2.5] que $\mathscr{S}$ est limite inductive de variétés projectives $\left(\mathscr{S}^{(N)}\right)_{N \geqslant 0}$.

Champs sur $\mathbb{C}$ Pour une définition précise voir [LM92]. Donnons des exemples de champs, qu'on utilisera dans la suite :

(i) Le champ de modules $\mathscr{SL}_C(r)$ associe à R le groupoide de couples (E, δ), où E est un fibré de rang r sur C_R et $\delta : \mathcal{O}_{C_R} \simeq \bigwedge^r E$ un isomorphisme. Les flèches sont les isomorphismes de fibrés compatibles avec les trivialisations des déterminants.

(2) Soit X un $\mathbb{C}$-espace et Γ un $\mathbb{C}$-groupe agissant sur X (à gauche). On peut définir le champ quotient $\Gamma \backslash X$ tel que les objets de $\Gamma \backslash X(R)$ sont les paires (P, α), où P est un Γ_R-torseur (à gauche) sur $\operatorname{Spec}(R)$ et $\alpha : P \to X$ un morphisme Γ_R-équivariant. Rappelons qu'un Γ-torseur P sur $\operatorname{Spec}(R)$ est un $\mathbb{C}$-espace muni d'une action de Γ vérifiant la propriété suivante : il existe une extension fppf $U' = \operatorname{Spec}(R') \to U = \operatorname{Spec}(R)$ tel que $P \times_U U'$ soit isomorphe à $\Gamma \times_U U'$ muni de l'action de $\Gamma \times_U U'$ par translation (à gauche). Le champ quotient $\Gamma \backslash X$ est alors un quotient dans la catégorie des champs au sens suivant : tout morphisme Γ-invariant de X dans un champ $\mathscr{X}$ se factorise à travers $\Gamma \backslash X$.

(3) Le champ de modules de fibrés paraboliques $\mathscr{PAR}_C(r, \overrightarrow{n})$ (aussi noté $\mathscr{PAR}$) associe à R le groupoide ayant comme objets $\left(E, \delta, \{\hat{\pi}_x\}_{x\in I}\right)$, où E est un fibré de rang r sur C_R, δ est un isomorphisme $\mathcal{O}_{C_R} \simeq \bigwedge^r E$ et $\hat{\pi}_x$ est une suite de quotients, pour $1 \leqslant i \leqslant l_x$:

$$\pi_{xi} : E_{|\mathrm{Spec}(R)\times\{x\}} \to Q_{xi} \to 0$$

où Q_{xi} est un fibré de rang $r_i(x)$ (voir (1)) sur $\mathrm{Spec}(R)$ et $\mathrm{Ker}\,(\pi_{xi+1}) \subset \mathrm{Ker}\,(\pi_{xi})$. Les flèches entre les objets de $\mathscr{PAR}(R)$ sont les isomorphismes de fibrés compatibles avec les trivialisations des déterminants et les drapeaux aux points $x \in I$.

Soit Drap_x la variété de drapeaux de type $(n_i(x))$, c'est-à-dire des filtrations $\mathbb{C}^r \supset F_1 \supset \cdots \supset F_{l_x} \supset \{0\}$ tel que $\dim(\mathbb{C}^r/F_i) = r_i(x)$. D'après [GD71, 9.9.2] la variété Drap_x représente le foncteur, noté aussi Drap_x, associant à un schéma T sur $\mathbb{C}$ la suite des quotients $(\omega_{x1}, \ldots, \omega_{xl_x})$:

$$\omega_{xi} : \mathcal{O}_T^r \to Q_{xi} \to 0$$

où Q_{xi} est un fibré de rang $r_i(x)$ et $\mathrm{Ker}\,(\omega_{xi+1}) \subset \mathrm{Ker}\,(\omega_{xi})$.

Considérons le $\mathbb{C}$-espace

$$\mathscr{S}^{\mathrm{par}} := \mathscr{S} \times \left\{ \prod_{x\in I} \mathsf{Drap}_x \right\}.$$

D'après la proposition 4.2, le $\mathbb{C}$-espace $\mathscr{S}^{\mathrm{par}}$ représente le foncteur qui associe à R l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets $\left(E, \rho, \{\hat{\omega}_x\}_{x\in I}\right)$, où $\hat{\omega}_x$ est une suite de quotients, élément de $\mathsf{Drap}_x(\mathrm{Spec}(R))$.

On peut considérer A_C comme un sous-anneau de K, en associant à une fonction algébrique son développement de Laurent en p. Le $\mathbb{C}$-groupe $\mathsf{SL}_r\,(A_C)$ agit de manière naturelle sur l'espace homogène $\mathscr{S}$. Soit $\mathrm{ev}(x) : \mathsf{SL}_r\,(A_C) \to \mathsf{SL}_r(\mathbb{C})$ le morphisme induit par l'évaluation d'une fonction algébrique au point $x \neq p$ de C. $\mathsf{SL}_r(\mathbb{C})$ agit de manière naturelle sur Drap_x et le morphisme $\mathrm{ev}(x)$ induit alors une action de $\mathsf{SL}_r\,(A_C)$ sur Drap_x. Ceci permet de considérer l'action du $\mathbb{C}$-groupe $\mathsf{SL}_r\,(A_C)$ sur le $\mathbb{C}$-espace $\mathscr{S}^{\mathrm{par}}$.

Proposition 4.2. *Le champ quotient* $\mathsf{SL}_r\,(A_C)\backslash\mathscr{S}^{\mathrm{par}}$ *est canoniquement isomorphe au champ* $\mathscr{PAR}$.

Démonstration. Soit R une $\mathbb{C}$-algèbre. A un élément $\left(E, \rho, \{\hat{\omega}_x\}_{x\in I}\right)$ de $\mathscr{S}^{\mathrm{par}}(R)$, on peut associer un élément $\left(E, \delta, \{\hat{\pi}_x\}_{x\in I}\right)$ en posant $\delta = \bigwedge^r \rho$ et $\pi_{xi} = \omega_{xi} \circ \rho^{-1}_{|\mathrm{Spec}(R)\times\{x\}}$

$$\pi_{xi} : E_{|\mathrm{Spec}(R)\times\{x\}} \xrightarrow{\rho^{-1}} \mathcal{O}^r_{\mathrm{Spec}(R)} \longrightarrow Q_{xi}.$$

Ceci définit un morphisme $\Pi : \mathscr{S}^{\mathrm{par}} \to \mathscr{PAR}$ et on vérifie que Π est $\mathsf{SL}_r(A_C)$-équivariant, donc induit un morphisme de champs $\bar{\Pi} : \mathsf{SL}_r(A_C) \backslash \mathscr{S}^{\mathrm{par}} \to \mathscr{PAR}$.

Inversement, soit $\left(E, \delta, \{\hat{\pi}_x\}_{x \in I}\right)$ un élément de $\mathscr{PAR}(R)$. Pour toute R-algèbre S, posons $P(S)$ l'ensemble des trivialisations ρ de E_S sur C_S^* tel que $\bigwedge^r \rho$ soit le pull-back de δ par le morphisme $C_S^* \to C_R^* \cdot P$ est un R-espace avec une action du groupe $\mathsf{SL}_r(A_C)$. D'après le lemme 3.5 de [BL94], P est un $\mathsf{SL}_r(A_C)$-torseur. A chaque $\rho \in P(S)$ on peut associer la famille de quotients $\omega_{xi} = \pi_{xi} \circ \rho_{|\mathrm{Spec}(R) \times \{x\}}$, donc d'après la proposition 4.3, un élément de $\mathscr{S}^{\mathrm{par}}(S)$. A chaque $(E, \delta, \{\hat{\pi}_x\})$ de $\mathscr{PAR}(R)$ correspond donc un $\mathsf{SL}_r(A_C)$-torseur et une application $\mathsf{SL}_r(A_C)$-équivariante $\alpha : P \to \mathscr{S}^{\mathrm{par}}$, ce qui definit un morphisme de champs $\mathscr{PAR} \to \mathsf{SL}_r(A_C) \backslash \mathscr{S}^{\mathrm{par}}$ inverse de $\bar{\Pi}$. □

5 Les espaces $H^0(\mathscr{M}, \Theta)$ et $H^0(\mathscr{PAR}, \mathscr{L}^{\mathrm{par}})$ Rappelons d'abord la notion de fibrés en droites sur un champ. Un fibré en droites $\mathscr{L}$ sur un champ $\mathscr{X}$ est la donnée, pour toute $\mathbb{C}$-algèbre R et tout objet μ du groupoïde $\mathscr{X}(R)$, d'un fibré en droites $\mathscr{L}_\mu$ sur $\mathrm{Spec}(R)$ et d'un isomorphisme $g_\alpha : f^*\mathscr{L}_\mu \to \mathscr{L}_\nu$ pour tout morphisme $f : \mathrm{Spec}(R') \to \mathrm{Spec}(R)$ et toute flèche $\alpha : f^*\mu \to v$ dans $\mathscr{X}(R')$. De plus, ces données doivent vérifier certaines conditions de compatibilités (voir [LM92]).

Une section de $\mathscr{L}$ est la donnée, pour tout R et $\mu \in \mathscr{X}(R)$, d'une section $s_\mu \in H^0(\mathrm{Spec}(R), \mathscr{L}_\mu)$ tel que $g_\alpha(f^* s_\mu) = s_\nu$ pour toute flèche $\alpha : f^*\mu \to v$ dans $\mathscr{X}(R')$.

Rappelons à cet endroit un lemme décrivant la descente de sections dans le contexte des champs (lemme 7.2 de [BL94]). On considère un $\mathbb{C}$-espace X et un $\mathbb{C}$-groupe Γ agissant sur X, et on note $\pi : X \to \Gamma \backslash X$ le morphisme de passage au quotient. On considère un fibré en droites $\mathscr{L}$ sur le champ quotient $\Gamma \backslash X$.

Lemme 5.1. *L'application $\pi^* : H^0(\Gamma\backslash X, \mathscr{L}) \to H^0(X, \pi^*\mathscr{L})$ induit un isomorphisme de $H^0(\Gamma\backslash X, \mathscr{L})$ avec l'espace des sections Γ-invariantes de $\pi^*\mathscr{L}$.*

Fibrés en droites sur $\mathscr{PAR}$. On peut alors définir des fibrés en droites sur le champ $\mathscr{PAR}$: pour toute $\mathbb{C}$-algèbre R et tout objet $\left(E, \delta, \{\hat{\pi}_x\}_{x \in I}\right)$ du groupoïde $\mathscr{PAR}(R)$ on peut considerer les fibrés en droites sur $\mathrm{Spec}(R)$

$$\det R\pi_{\mathrm{Spec}(R)}(E) \quad \text{et} \qquad \det Q_{xi} \, (1 \leqslant i \leqslant l_x) \, .$$

Il est alors facile de vérifier que ces données définissent des fibrés en droites sur $\mathscr{PAR}$ notés

$\mathscr{L}$ et $\det \mathscr{Q}_{xi}$. Posons

$$\mathscr{L}^{\mathrm{par}} = \mathscr{L}^k \otimes \left\{ \bigotimes_{x\in I} \bigotimes_{i=1}^{l_x} (\det \mathscr{Q}_{xi})^{d_i(x)} \right\}.$$

Considérons le sous-champ ouvert $\mathscr{PAR}^{ss}$ de $\mathscr{PAR}$ paramétrant les fibrés paraboliques semi-stables par rapport au poids parabolique $(k, \overrightarrow{a})$. La restriction de $\mathscr{L}^{\mathrm{par}}$ à $\mathscr{PAR}^{\mathrm{ss}}$ sera aussi notée $\mathscr{L}^{\mathrm{par}}$. On peut alors considérer le morphisme d'oubli

$$\varphi : \mathscr{PAR}^{ss} \to \mathscr{M}$$

et il résulte alors du théorème 3.3 que $\varphi^*\Theta = \mathscr{L}^{\mathrm{par}}$, car pour tout objet $\left(E, \delta, \{\hat{\pi}_x\}_{x\in I}\right) \in \mathscr{PAR}(R)$ on a $\det E_{|\mathrm{Spec}(R)\times\{y\}} \cong \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}$.

Proposition 5.2. *On a un isomorphisme canonique (à scalaire près)*

$$H^0(\mathscr{M}, \Theta) \simeq H^0\left(\mathscr{PAR}, \mathscr{L}^{\mathrm{par}}\right).$$

Démonstration. Nous utilisons les notations de la section 2. Considérons le sous-champ ouvert $\mathscr{PAR}_\nu$ du champ $\mathscr{PAR}$ paramétrisant fibrés paraboliques E sur C tel que $h^1(C, E(\nu)) = 0$ et tel que $E(\nu)$ soit engendré par ses sections globales. Notons H_ν le complément de la section nulle dans $\pi_{R*}\left(\bigwedge^r \mathscr{F}\right)$, où $\mathscr{F}$ est le fibré universel sur $\mathscr{R} \times C$. Rappelons que $\mathscr{R}$ dépend de l'entier ν. Alors le schéma lisse H_ν est muni d'une action naturelle de $\mathsf{GL}(n)$ et le champ quotient est $\mathscr{PAR}_\nu$. Notons H_ν^{ss} l'ouvert de H_ν correspondant aux fibrés paraboliques semi-stables. D'après le lemme 24 de [Ses82], $\mathscr{PAR}^{ss}$ est un sous-champ ouvert de $\mathscr{PAR}_\nu$, dès que $\nu \geqslant 2g$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_\nu^{ss} & \longrightarrow & H_\nu \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{PAR}^{ss} & \longrightarrow & \mathscr{PAR}_\nu \end{array}$$

où les flèches verticales sont les morphismes de passage au quotient. D'après le lemme 5.1, les sections de $\mathscr{L}^{\mathrm{par}}$ sur $\mathscr{PAR}^{\mathrm{ss}}$ (resp., $\mathscr{PAR}_\nu$) sont les sections $\mathsf{GL}(n)$-invariantes de l'image réciproque de $\mathscr{L}^{\mathrm{par}}$ sur H_ν^{ss} (resp., H_ν). D'après le lemme 6.14 de [NR93] la codimension dans $\mathscr{R}$ de $\mathscr{R}^{ss}$ est $\geqslant 2$ et pareil pour H_ν^{ss} et H_ν (car H_ν est un $\mathbb{C}^*$-fibré sur $\mathscr{R}$). Donc, les sections sur H_ν^{ss} s'étendent à H_ν et par conséquent la restriction $H^0\left(\mathscr{PAR}_\nu, \mathscr{L}^{\mathrm{par}}\right) \to H^0\left(\mathscr{PAR}^{\mathrm{ss}}, \mathscr{L}^{\mathrm{par}}\right)$ est un isomorphisme pour tout $\nu \geqslant 2g$. D'autre part, comme tout morphisme d'un schéma dans $\mathscr{PAR}$ se factorise à travers $\mathscr{PAR}_\nu$ pour ν assez grand, on a un isomorphisme $H^0\left(\mathscr{PAR}, \mathscr{L}^{\mathrm{par}}\right) \simeq H^0\left(\mathscr{PAR}^{\mathrm{ss}}, \mathscr{L}^{\mathrm{par}}\right)$. Alors le théorème résulte du fait que l'application linéaire donnée par image réciproque $\varphi^* : H^0(\mathscr{M}, \Theta) \to H^0\left(\mathscr{PAR}^{ss}, \mathscr{L}^{\mathrm{par}}\right)$ est un isomorphisme (proposition 8.4 de [BL94] dans le cas des fibrés paraboliques). $\square$

Quelques rappels de [BL94]. Considérons le morphisme de passage au quotient :

$$q : \mathscr{S}^{\mathrm{par}} \to \mathscr{PAR}$$

$q^*\mathscr{L}$ provient alors d'un fibré en droites sur $\mathscr{S} = \mathsf{SL}_r(K)/\mathsf{SL}_r(\mathcal{O})$. Le fibré $q^*\mathscr{L}$ sur $\mathscr{S}$ n'admet pas de linéarisation de l'action de $\mathsf{SL}_r(K)$, mais admet cependant une action d'un $\mathbb{C}$-groupe $\widehat{\mathsf{SL}_r(K)}$, qui est une extension centrale de $\mathsf{SL}_r(K)$ par $\mathbb{C}^*$. Cette extension est triviale sur le sous-groupe $\mathsf{SL}_r(\mathcal{O})$ et, par conséquent, $\mathscr{S}$ est isomorphe à $\widehat{\mathsf{SL}_r(K)}/\widehat{\mathsf{SL}_r(\mathcal{O})}$, où $\widehat{\mathsf{SL}_r(\mathcal{O})} = \mathsf{SL}_r(\mathcal{O}) \times \mathbb{C}^*$. On peut associer au caractère $\chi : \widehat{\mathsf{SL}_r(\mathcal{O})} \to \mathbb{C}^*$, donnée par projection sur le second facteur, un fibré en droites $\mathscr{L}_\chi$ sur $\mathscr{S}$ de la manière suivante : on fait agir le $\mathbb{C}$-groupe $\widehat{\mathsf{SL}_r(\mathcal{O})}$ sur le fibré trivial $\widehat{\mathsf{SL}_r(K)} \times \mathbb{C}$ par $h \cdot (g,t) = \left(gh, \underline{\chi}\left(h^{-1}\right) t\right)$ et on définit le fibré en droites $\mathscr{L}_\chi$ comme étant le $\mathbb{C}$-espace quotient $\left(\widehat{\mathsf{SL}_r(K)} \times \mathbb{C}\right)/\widehat{\mathsf{SL}_r(\mathcal{O})}$. On vérifie que cette construction donne un fibré en droites sur $\mathscr{S}$. Le corollaire 5.5 de [BL94] affirme alors que $q^*\mathscr{L} = \mathscr{L}_\chi$.

L'image réciproque $q^*\left(\det \mathscr{Q}_{xi}\right)$ provient du fibré en droites $\det \mathscr{U}_{xi}$ sur Drap_x, où $\mathscr{U}_{xi}$ est le fibré quotient universel de rang $r_i(x)$ sur Drap_x. Finalement on obtient

$$q^*\mathscr{L}^{\mathrm{par}} = \pi^*_{\mathscr{S}}\left(\mathscr{L}_\chi^k\right) \otimes \left\{ \bigotimes_{x \in I} \pi^*_{\mathsf{Drap}_x} \left(\bigotimes_{i=1}^{l_x} \left(\det \mathscr{U}_{xi}\right)^{d_i(x)} \right) \right\}.$$

Lemme 5.3. *On a un isomorphisme*

$$H^0\left(\mathscr{S}^{\mathrm{par}}, q^*\mathscr{L}^{\mathrm{par}}\right) \cong H^0\left(\mathscr{S}, \mathscr{L}_\chi^k\right) \otimes \left\{ \bigotimes_{x \in I} H^0 \left(\mathsf{Drap}_x, \bigotimes_{i=1}^{l_x} \left(\det \mathscr{U}_{xi}\right)^{d_i(x)} \right) \right\}.$$

Démonstration. On sait que $\mathscr{S}^{\mathrm{par}}$ est limite inductive de variétés projectives $\left(\mathscr{S}^{(N)} \times \left\{\prod_{x \in I} \mathsf{Drap}_x\right\}\right)_{N \geqslant 0}$. Si l'on note $\mathscr{L}_\chi^{(N)}$ la restriction de $\mathscr{L}_\chi$ à $\mathscr{S}^{(N)}$, alors $H^0\left(\mathscr{S}, \mathscr{L}_\chi^k\right)$ est limite projective du système $\left(H^0\left(\mathscr{S}^{(N)}, \mathscr{L}_\chi^{(N)k}\right)\right)_{N \geqslant 0}$. $\forall N \geqslant 0$ la formule de Kunneth donne

$$\begin{aligned} H^0 &\left(\mathscr{S}^{(N)} \times \left\{\times_x \mathsf{Drap}_x\right\}, \pi^*_{\mathscr{S}^{(N)}}\left(\mathscr{L}_\chi^{(N)k}\right) \otimes \left\{ \bigotimes_{x \in I} \pi^*_{\mathsf{Drap}_x} \left(\bigotimes_{i=1}^{l_x} \left(\det \mathscr{U}_{xi}\right)^{d_i(x)} \right) \right\} \right) \\ &\cong H^0\left(\mathscr{S}^{(N)}, \mathscr{L}_\chi^{(N)k}\right) \otimes \left\{ \bigotimes_{x \in I} H^0 \left(\mathsf{Drap}_x, \bigotimes_{i=1}^{l_x} \left(\det \mathscr{U}_{xi}\right)^{d_i(x)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Le lemme résulte alors du fait que la limite projective du membre de gauche est $H^0\left(\mathscr{S}^{\mathrm{par}}, q^*\mathscr{L}^{\mathrm{par}}\right)$ et que la limite projective commute avec le produit tensoriel par des espaces vectoriels de dimension finie. $\square$

Rappelons aussi que l'extension $\widehat{\mathsf{SL}_r(K)}$ donne, au niveau des algèbres de Lie, une extension centrale

$$0 \to \mathbb{C} \to \widehat{\mathfrak{sl}_r(K)} \to \mathfrak{sl}_r(K) \to 0$$

qui est étudiée en théorie des algèbres de Kac-Moody [Kac90]. L'algèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{sl}_r(K)}$ est isomorphe (en tant qu'algèbre de Lie) à $\mathfrak{sl}_r(K) \oplus \mathbb{C}c$, où $\mathfrak{sl}_r(K) = \mathfrak{sl}_r(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((z))$ et $\mathbb{C}c$ est le centre. Le crochet de Lie est défini par

$$[X \otimes f, Y \otimes g] = [X, Y]_0 \otimes fg + c \operatorname{Tr}(XY) \operatorname{Res}_0(gdf)$$

où $X, Y \in \mathfrak{sl}_r(\mathbb{C})$, $f, g \in \mathbb{C}((z))$ et $[-,-]_0$ désigne le crochet dans l'algèbre $\mathfrak{sl}_r(\mathbb{C})$.

D'après la proposition 6.7 de [BL94], il existe un unique plongement de $\mathsf{SL}_r\left(A_C\right)$ dans $\widehat{\mathsf{SL}_r(K)}$ au-dessus de l'inclusion $\mathsf{SL}_r\left(A_C\right) \hookrightarrow \mathsf{SL}_r(K)$. Au niveau des algèbres de Lie, ce plongement $\mathfrak{sl}_r\left(A_C\right) \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{sl}_r(K)}$ est donnée par l'inclusion dans le facteur direct $\mathfrak{sl}_r(K)$. Le $\mathbb{C}$-groupe $\mathsf{SL}_r\left(A_C\right)$ agit donc sur l'espace de sections $H^0\left(\mathscr{S}, \mathscr{L}_\chi^k\right)$ ainsi que sur $H^0\left(\mathsf{Drap}_x, \bigotimes_{i=1}^{l_x}\left(\det \mathscr{U}_{xi}\right)^{d_i(x)}\right)$ via les morphismes d'évaluation $\operatorname{ev}(x) : \mathsf{SL}_r\left(A_C\right) \to \mathsf{SL}_r(\mathbb{C})$.

Proposition 5.4. *$H^0\left(\mathscr{PAR}, \mathscr{L}^{\mathrm{par}}\right)$ est isomorphe au sous-espace des sections de $H^0\left(\mathscr{S}, \mathscr{L}_\chi^k\right) \otimes \left\{\bigotimes_{x \in I} H^0\left(\mathsf{Drap}_x, \bigotimes_{i=1}^{l_x}\left(\det \mathscr{U}_{xi}\right)^{d_i(x)}\right)\right\}$ annulées par l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_r\left(A_C\right)$.*

Démonstration. D'après le lemme 7.8 de [BL94], $\mathscr{L}_\chi$, et par conséquent $q^*\mathscr{L}^{\mathrm{par}}$, admet une unique $\mathsf{SL}_r\left(A_C\right)$-linéarisation. Nous savons (lemme 5.1) que $H^0\left(\mathscr{PAR}, \mathscr{L}^{\mathrm{par}}\right)$ est isomorphe à l'espace des sections $\mathsf{SL}_r\left(A_C\right)$-invariantes de $H^0\left(\mathscr{S}^{\mathrm{par}}, q^*\mathscr{L}^{\mathrm{par}}\right)$. Or, d'après la proposition 7.4 de [BL94], une section est invariante par $\mathsf{SL}_r\left(A_C\right)$ si et seulement si elle est annulée par l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_r\left(A_C\right)$. La proposition résulte alors du lemme 5.3. $\square$

6 Représentations d'algèbres de Lie et blocs conformes

Représentations de $\mathfrak{sl}_r(\mathbb{C})$ Rappelons quelques résultats sur l'algèbre de Lie simple $\mathfrak{sl}_r(\mathbb{C})$ (voir [Ser87]). Considérons la décomposition triangulaire $\mathfrak{sl}_r(\mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-$, où $\mathfrak{h}$ est la sous-algèbre correspondant aux matrices diagonales $H = \operatorname{diag}\left(u_1, \ldots, u_r\right)$, $\mathfrak{n}^+$ (resp., $\mathfrak{n}^-$) la sous-algèbre des matrices triangulaires supérieures (resp., inférieures). Soit $X_\theta \in \mathfrak{n}^+$ la matrice dont l'élément $(1, r)$ est 1 et tous les autres 0. Notons $\mathfrak{h}^*$ le dual de $\mathfrak{h}$. Considérons, pour $1 \leqslant i \leqslant r-1$, les formes linéaires $\varpi_i \in \mathfrak{h}^*$ définies par

$$\varpi_i\left(\operatorname{diag}\left(u_1, \ldots, u_r\right)\right) = u_1 + \cdots + u_i.$$

Les formes linéaires ϖ_i sont appelées les poids fondamentaux et l'on note $\mathbf{P} = \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathbb{Z}\varpi_i \hookrightarrow \mathfrak{h}^*$. Considérons le sous-ensemble

$$\mathbf{P}_+ = \left\{ \lambda = \sum n_i \varpi_i \in \mathbf{P} \mid n_i \geqslant 0 \ \forall i \right\}.$$

Les éléments de $\mathbf{P}_+$ sont appelés poids dominants. On peut associer à chaque $\lambda \in \mathbf{P}_+$ un $\mathfrak{sl}_r(\mathbb{C})$-module V_λ irréductible et de dimension finie, et l'application $\lambda \mapsto [V_\lambda]$ est une bijection de $\mathbf{P}_+$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathfrak{sl}_r(\mathbb{C})$-modules irréductibles et de dimension finie. V_λ contient un unique vecteur (à scalaire près) v_λ, appelé vecteur de plus haut poids, caractérisé par les propriétés $\mathfrak{n}^+ \cdot v_\lambda = 0$ et $H \cdot v_\lambda = \lambda(H) v_\lambda \ \forall H \in \mathfrak{h}$.

Déterminons le $\mathfrak{sl}_r(\mathbb{C})$-module $H^0 \left(\mathsf{Drap}_x, \otimes_{i=1}^{l_x} (\det \mathscr{U}_{xi})^{d_i(x)} \right)$.

Considérons le tore maximal T de $G = \mathsf{SL}_r(\mathbb{C})$ correspondant à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ via l'application exponentielle $x \mapsto \exp(2i\pi x)$ et les sous-groupes de Lie U (resp., B) correspondant à $\mathfrak{n}^+$ (resp., $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$). Alors B est produit semi-direct de T et de U. Un poids $\lambda \in \mathbf{P}$ donne via l'application exponentielle un caractère, aussi appelé λ, de T et donc du sous-groupe de Borel B. On peut associer à chaque $\lambda \in \mathbf{P}$ un fibré en droites L_λ sur l'espace homogène G/B défini par

$$\begin{aligned} L_\lambda &= G \times {}_B \mathbb{C} \\ &= (G \times \mathbb{C}) / \left\{ (g, v) \sim \left(gx, \lambda \left(x^{-1} \right) v \right) \forall x \in B \right\}. \end{aligned}$$

Comme le groupe G agit sur L_λ, les espaces de sections $H^0 (G/B, L_\lambda)$ sont des représentations de G et sont décrits par le théorème suivant [Bot57].

Théorème 6.1 (Borel-Weil-Bott). *Si λ est un poids dominant, le $\mathfrak{sl}_r(\mathbb{C})$-module $H^0 (G/B, L_{-\lambda})$ est isomorphe au dual de V_λ.*

Lemme 6.2. *Considérons le morphisme de projection canonique sur la variété de drapeaux $\varphi_x : G/B \to \mathsf{Drap}_x$. Alors pour tout fibré en droites L sur Drap_x, on a un isomorphisme*

$$\varphi_x^* : H^0 (\mathsf{Drap}_x, L) \xrightarrow{\sim} H^0 (G/B, \varphi_x^* L).$$

Démonstration. La variété Drap_x est projective et lisse, et les fibres géométriques de φ_x sont isomorphes à la variété projective, lisse et connexe P_x/B, où P_x est le sous-groupe parabolique de G, correspondant à $\mathsf{Drap}_x \cong G/P_x$. On en déduit que $\varphi_{x*} \left(\mathcal{O}_{G/B} \right) \cong \mathcal{O}_{\mathsf{Drap}_x}$ [Har77, corollaire III, 11.5] ce qui entraîne $\varphi_{x*} (\varphi_x^* L) \cong L \otimes \varphi_{x*} \left(\mathcal{O}_{G/B} \right) \cong L$ (formule de projection), prouvant l'isomorphisme. $\square$

Associons à chaque point parabolique $x \in I$ un poids dominant $\lambda_x \in \mathbf{P}_+$ défini par

$$\lambda_x = \varepsilon_1(x)\varpi_1 + \cdots + \varepsilon_{r-1}(x)\varpi_{r-1}$$

avec $\varepsilon_{r_j}(x) = d_j(x)$ et $\varepsilon_i(x) = 0$ si $i \neq r_1(x), \ldots, r_{l_x}(x)$. Remarquons que dans le cas d'un drapeau complet $\mathsf{Drap}_x = G/B$ ($l_x = r-1$ et $r_j(x) = j$), on a $\lambda_x = d_1(x)\varpi_1 + \cdots + d_{r-1}(x)\varpi_{r-1}$.

Proposition 6.3. *Le $\mathfrak{sl}_r(\mathbb{C})$-module $H^0\left(\mathsf{Drap}_x, \bigotimes_{i=1}^{l_x} (\det \mathscr{U}_{xi})^{d_i(x)}\right)$ est isomorphe au dual de V_{λ_x}.*

Démonstration. Soit $\mathscr{U}_s$ le fibré quotient universel de rang s sur la variété de drapeaux G/B. Il est alors facile de voir que $\det \mathscr{U}_s = L_{-\varpi_s}$. De plus, comme $L_\mu \otimes L_{\mu'} = L_{\mu+\mu'}$ pour $\mu, \mu' \in \mathbf{P}$, on obtient (sur G/B) $\bigotimes_{i=1}^{l_x} (\det \mathscr{U}_{xi})^{d_i(x)} = L_{-\lambda_x}$. La proposition résulte alors du lemme 6.2. $\square$

Représentations de l'algèbre de Lie affine $\widehat{\mathfrak{sl}_r(K)}$ Considérons l'algèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{sl}_r(K)}$ de la section 5 et introduisons la décomposition

$$\widehat{\mathfrak{sl}_r(K)} = \hat{\mathfrak{g}}_+ \oplus \mathfrak{sl}_r(\mathbb{C}) \oplus \hat{\mathfrak{g}}_- \oplus \mathbb{C}c$$

où $\mathbb{C}c$ est le centre et $\hat{\mathfrak{g}}_+ = \mathfrak{sl}_r(\mathbb{C}) \otimes z\mathbb{C}[[z]]$ et $\hat{\mathfrak{g}}_- = \mathfrak{sl}_r(\mathbb{C}) \otimes z^{-1}\mathbb{C}\left[z^{-1}\right]$ sont des sous-algèbres de Lie de $\widehat{\mathfrak{sl}_r(K)}$.

Fixons un entier $l > 0$, appelé le niveau, et considérons l'ensemble fini $\mathbf{P}_l = \{\lambda = \sum n_i\varpi_i \in \mathbf{P}_+ \mid \sum n_i \leqslant l\}$. On a alors le résultat fondamental suivant [Kac90] ou [TUY89] : on peut associer à chaque $\lambda \in \mathbf{P}_l$ un unique $\widehat{\mathfrak{sl}_r(K)}$-module $\mathscr{H}_\lambda$, qui a les propriétés suivantes :

(1) le sous-espace de $\mathscr{H}_\lambda$ annulé par $\hat{\mathfrak{g}}_+$ est isomorphe à V_λ en tant que $\mathfrak{sl}_r(\mathbb{C})$-module ;

(2) le centre c agit comme $l \,\mathrm{Id}_{\mathscr{H}_\lambda}$;

(3) $\mathscr{H}_\lambda$ est engendré par V_λ sur $\hat{\mathfrak{g}}_-$ avec une unique relation

$$\left(X_\theta \otimes z^{-1}\right)^{l-\sum n_i+1} \cdot v_\lambda = 0.$$

Le théorème suivant est dû à Kumar et à Mathieu (théorème 7.7 de [BL94]).

Proposition 6.4. *L'espace de sections $H^0\left(\mathscr{S}, \mathscr{L}_\chi^k\right)$ est isomorphe au dual du $\widehat{\mathfrak{sl}_r(K)}$-module $\mathscr{H}_0$ de niveau k.*

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_r\,(A_C)$ agit sur V_{λ_x} via le morphisme d'évaluation $\mathrm{ev}(x) : \mathfrak{sl}_r\,(A_C) \to \mathfrak{sl}_r(\mathbb{C})$. Notons $\left[\mathscr{H}_0 \otimes \left\{\bigotimes_{x\in I} V_{\lambda_x}\right\}\right]_{\mathfrak{sl}_r(A_C)}$ le quotient de $\mathscr{H}_0 \otimes \left\{\bigotimes_{x\in I} V_{\lambda_x}\right\}$ par le sous-espace engendré par les vecteurs $X \cdot v$ pour $X \in \mathfrak{sl}_r\,(A_C)$ et $v \in \mathscr{H}_0 \otimes \left\{\bigotimes_{x\in I} V_{\lambda_x}\right\}$.

On peut résumer les résultats des propositions 5.4, 6.3, et 6.4.

Proposition 6.5. *L'espace de sections $H^0\left(\mathscr{PAR}, \mathscr{L}^{\mathrm{par}}\right)$ est canoniquement isomorphe au dual de $\left[\mathscr{H}_0 \otimes \left\{\bigotimes_{x\in I} V_{\lambda_x}\right\}\right]_{\mathfrak{sl}_r(A_C)}$.*

Remarque. Dans la proposition 6.5, on sous-entend que $\mathscr{H}_0$ est de niveau k. De plus $\sum_{i=1}^{l_x} d_i(x) < k$ et, par conséquent, $\lambda_x \in \mathbf{P}_k$.

Blocs conformes La théorie conforme des champs [TUY89] associe à l'ensemble fini I de points de C et aux poids dominants $\overrightarrow{\lambda} = \{\lambda_x\}_{x\in I}$ un espace vectoriel $V_C(I, \overrightarrow{\lambda})$ appelé espace des blocs conformes. Une proposition de Beauville, généralisant la "propagation des vacuas", permet de montrer que le dual $V_C^*(I, \overrightarrow{\lambda})$ et l'espace considéré dans la proposition 6.5 sont canoniquement isomorphes.

Soit $\mathcal{O}(U)$ l'anneau des fonctions algébriques sur $C - I$; on note $\mathfrak{sl}_r(U) = \mathfrak{sl}_r(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}(U)$. On choisit une coordonnée locale ξ_x en chaque point $x \in I$ et l'on note f_x le développement de Laurent de la fonction $f \in \mathcal{O}(U)$ au point x. Ceci définit pour tout point parabolique $x \in I$, en posant $z = \xi_x$, un homomorphisme d'anneau $\mathcal{O}(U) \to \mathbb{C}((z))$ et par conséquent un homomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{sl}_r(U) \to \mathfrak{sl}_r(K)$. Fixons le niveau k. On définit l'action de $\mathfrak{sl}_r(U)$ sur le $\widehat{\mathfrak{sl}_r(K)}$-module $\mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}} = \bigotimes_{x\in I} \mathscr{H}_{\lambda_x}$ par

$$(X \otimes f)\left(\bigotimes_{x\in I} v_x\right) = \sum_{y\in I} (X \otimes f_y)\, v_y \otimes \left(\bigotimes_{x\neq y} v_x\right)$$

pour $X \in \mathfrak{sl}_r(\mathbb{C})$ et $v_x \in \mathscr{H}_{\lambda_x}$. On peut montrer que l'espace de représentation $\mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}}$ est en fait indépendant des coordonnées locales ξ_x [Bea94, remarque 1.7].

On notera $V_C(I, \overrightarrow{\lambda})$ le quotient de $\mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}}$ par le sous-espace engendré par les vecteurs $A.v$ avec $A \in \mathfrak{sl}_r(U)$ et $v \in \mathscr{H}_{\overrightarrow{\lambda}}$. Rappelons [Bea94, corollaire 2.5].

Proposition 6.6. *Il existe un isomorphisme canonique*

$$V_C(I, \overrightarrow{\lambda}) \simeq \left[\mathscr{H}_0 \otimes \left\{\bigotimes_{x\in I} V_{\lambda_x}\right\}\right]_{\mathfrak{sl}_r(A_C)}.$$

Corollaire 6.7. *Il existe un isomorphisme canonique (à scalaire près)*

$$V_C^*(I, \overrightarrow{\lambda}) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathscr{M}, \Theta).$$

Remarques. (1) Les espaces $V_C(I, \overrightarrow{\lambda})$ sont étudiés en théorie conforme des champs. Le résultat fondamental (voir [TUY89]) est l'existence d'une connexion projectivement plate sur le "faisceau des vacuas" sur l'espace des modules des courbes pointées, permettant d'établir les règles de factorisation, dont on peut déduire, de manière combinatoire, la dimension de $V_C(I, \overrightarrow{\lambda})$.

La forme bilinéaire de Cartan-Killing $(X, Y) \mapsto \mathrm{Tr}(XY)$ sur $\mathfrak{h}$ est non-dégénérée et induit un isomorphisme de $\mathfrak{h}$ avec son dual $\mathfrak{h}^*$. On notera $(- \mid -)$ la forme bilinéaire induite sur $\mathfrak{h}^*$ et on pose $\rho = \sum_{i=1}^{r-1} \varpi_i$ et $V_{\overrightarrow{\lambda}} = \bigotimes_{i \in I} V_{\lambda_x}$. $\mathrm{Tr}_{V_{\overrightarrow{\lambda}}}(t)$ désigne la trace de l'application linéaire de $V_{\overrightarrow{\lambda}}$ donnée par $t \in T$. Alors on a (formule de Verlinde ; voir [Bea94]) :

$$\begin{aligned}&\dim H^0(\mathscr{M}, \Theta)\\ &\quad = \left(r(k+r)^{r-1}\right)^{g-1} \sum_{\mu \in \mathbf{P}_k} \mathrm{Tr}_{V_{\overrightarrow{\lambda}}}\left(\exp 2\pi i \frac{\mu+\rho}{k+r}\right) \prod_{\alpha>0} \left| 2 \sin \pi \frac{(\alpha \mid \mu+\rho)}{k+r} \right|^{2-2g}\end{aligned}$$

où le produit est pris sur toutes les racines positives.

Cette formule se simplifie dans le cas des fibrés paraboliques de rang 2 ($r = 2$). On retrouve la formule de [Ber93] :

$$\dim H^0(\mathscr{M}, \Theta) = \left(\frac{k+2}{2}\right)^{g-1} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\prod_{x \in I} \sin((d(x)+1)(j\pi/k+2))}{\sin^{2g-2+|I|}(j\pi/k+2)}.$$

(2) ***Dualité.*** Pour tout poids dominant $\lambda \in \mathbf{P}_+$ le dual de V_λ est un $\mathfrak{sl}_r(\mathbb{C})$-module irréductible, dont le poids dominant sera noté λ^*. En particulier, on a $\varpi_i^* = \varpi_{r-i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant r-1$ et par conséquent, l'ensemble $\mathbf{P}_k$ est stable par l'involution $\lambda \mapsto \lambda^*$ de $\mathbf{P}_+$. Posons $\overrightarrow{\lambda}^* = \{\lambda_x^*\}_{x \in I}$. D'après la proposition 2.8 de [Bea94], il existe un isomorphisme naturel

$$V_C(I, \overrightarrow{\lambda}) \simeq V_C\left(I, \overrightarrow{\lambda}^*\right).$$

Cet isomorphisme a une interprétation au niveau des fibrés paraboliques : introduisons les poids paraboliques *duaux* et les multiplicités *duales* définis par

$$a_i^*(x) = k - 1 - a_{l_x+2-i}(x) \quad \text{et} \quad n_i^*(x) = n_{l_x+2-i}(x)$$

pour $1 \leqslant i \leqslant l_x + 1$ et $\forall x \in I$. En particulier, on a $d_i^*(x) = d_{l_x+1-i}(x)$. On peut associer à un fibré parabolique $\left(E, \{F_i(E)_x\}_{x \in I}\right)$ le fibré parabolique dual $\left(E^*, \{F_i\,(E^*)_x\}_{x \in I}\right)$, dont la structure parabolique est définie par

$$F_i\,(E^*)_x = \mathrm{Ann}\,(F_{l_x+1-i}(E)_x)\,.$$

Ann(W) désigne le sous-espace des formes linéaires s'annulant sur W. Il est alors facile de vérifier que $\left(E, \{F_i(E)_x\}_{x\in I}\right)$ est semi-stable par rapport au poids $(k, \overrightarrow{a})$ si et seulement si $\left(E^*, \{F_i\left(E^*\right)_x\}_{x\in I}\right)$ est semi-stable par rapport au poids $(k, \overrightarrow{a}^*)$. Notons $\mathscr{M}^* := \mathscr{M}\left(r, k, \overrightarrow{a}^*, \overrightarrow{n}^*\right)$ et Θ^* le fibré en droites correspondant (théorème 3.3). Alors la dualité induit un isomorphisme sur les sections globales

$$H^0\left(\mathscr{M}^*, \Theta^*\right) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathscr{M}, \Theta)$$

qui correspond, via le corollaire 6.7, à l'isomorphisme précédent entre espaces de blocs conformes.

Références

[Bea94] A. Beauville. “Conformal blocks, fusion rules and the Verlinde formula”. Prépublication. 1994.

[Ber93] A. Bertram. “Generalized SU(2) theta functions”. In : *Inventiones Mathematicae* 113 (1993), p. 351-372.

[BL94] A. Beauville et Y. Laszlo. “Conformal blocks and generalized theta functions”. In : *Communications in Mathematical Physics* 164 (1994), p. 385-419.

[Bot57] R. Bott. “Homogeneous vector bundles”. In : *Annals of Mathematics* 66.2 (1957), p. 203-248.

[DN89] J. M. Drezet et M. S. Narasimhan. “Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques”. In : *Inventiones Mathematicae* 97 (1989), p. 53-94.

[GD71] A. Grothendieck et J. Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique, I.* 2nd. T. 166. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Berlin : Springer-Verlag, 1971.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* T. 52. Graduate Texts in Mathematics. New York : Springer-Verlag, 1977.

[Kac90] V. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras.* 3rd. Cambridge : Cambridge University Press, 1990.

[KM76] F. Knudson et D. Mumford. “The projectivity of the moduli space of stable curves I : Preliminaries on "det" and "Div"”. In : *Mathematica Scandinavica* 39 (1976), p. 19-55.

[LM92] G. LAUMON et L. MORET-BAILLY. “Champs algébriques”. Prépublication, Université Paris-Sud. 1992.

[MS80] V. B. MEHTA et C. S. SESHADRI. “Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures”. In : *Mathematische Annalen* 248 (1980), p. 205-239.

[Mum70] D. MUMFORD. *Abelian Varieties*. T. 5. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics. London : Oxford University Press, 1970.

[NR93] M. S. NARASIMHAN et T. R. RAMADAS. “Factorisation of generalized theta functions, I”. In : *Inventiones Mathematicae* 114 (1993), p. 565-623.

[Ser87] J.-P. SERRE. *Complex Semisimple Lie Algebras*. New York : Springer-Verlag, 1987.

[Ses82] C. S. SESHADRI. *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*. T. 96. Astérisque. 1982.

[TUY89] A. TSUCHIYA, K. UENO et Y. YAMADA. “Conformal Field Theory on Universal Family of Stable Curves with Gauge Symmetries”. In : *Advanced Studies in Pure Mathematics*. T. 19. 1989, p. 459-566.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS, UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID, CANTOBLANCO, E-28049 MADRID, SPAIN ; *pauly@ccuam3.sdi.uam.es*