

**Задача 3.1.** Написать уравнение плоскости в отрезках, проходящей через точку  $M(1; -2; -1)$  перпендикулярно вектору  $\overline{OM}$ .

**Задача 3.2.** Написать уравнение плоскости в отрезках, проходящей через точки  $M_1(1; 2; -1)$ ,  $M_2(-1; 3; -1)$  и  $M_3(1; 1; 5)$ . Найти точки пересечения этой плоскости с осями координат.

**Задача 3.3.** Найти расстояние от начала координат до плоскости, проходящей через точки  $M_1(-3; 2; 4)$  и  $M_2(1; 3; 1)$  и перпендикулярной плоскости  $2x - y + 3z - 4 = 0$ .

**Задача 3.4.** Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости  $xOz$  и проходящей через точку  $M(2; -5; 3)$ .

**Задача 3.5.** Написать уравнение плоскости, параллельной оси  $Ox$  и проходящей через точки  $M_1(4; 0; -2)$  и  $M_2(5; 1; 7)$ .

**Задача 3.6.** Найти уравнения плоскостей, параллельных плоскости  $2x - 2y + z - 18 = 0$  и отстоящих от неё на 7 единиц.

**Задача 3.7.** Найти уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(5; 3; -2)$  перпендикулярно плоскостям  $x + y - z - 3 = 0$  и  $2x - 2y + 4z - 1 = 0$ .

**Задача 3.8.** Найти расстояние между параллельными плоскостями  $3x + 4y - 5 = 0$  и  $15x + 20y - 17 = 0$ .

**Задача 3.9.** Составить уравнение плоскостей, параллельных осям координат и проходящих через прямую пересечения плоскостей  $x + y + z - 3 = 0$  и  $2x - y - 2z + 5 = 0$ .

**Задача 3.10.** При каком значении параметра  $C$  плоскость, проходящая через начало координат параллельно плоскости  $5x - y - z + 7 = 0$ , перпендикулярна плоскости  $5x - y + Cz - 7 = 0$ ?

**Задача 3.11.** При каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  плоскости  $\alpha x - y + 2z - 3 = 0$  и  $x + y - \beta z + 1 = 0$  параллельны, а при каких - перпендикулярны?

**Задача 3.12.** Написать уравнения плоскостей, проходящих через ось  $Ox$  и составляющих угол  $60^\circ$  с плоскостью  $x = y$ .

**Задача 3.13.** Плоскость пересекается с осями координат в точках  $M_1(0; 0; 3)$ ,  $M_2(-9; 0; 0)$  и  $M_3(0; -6; 0)$ . Найти расстояние от этой плоскости до начала координат.

**Задача 3.14.** Привести к каноническому виду данные уравнения прямых:

$$1. \begin{cases} 2x - 3y + 2z + 3 = 0; \\ 5x + y + z + 4 = 0. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + 3y + 2z + 1 = 0; \\ x - y - 2z + 9 = 0. \end{cases}$$

**Задача 3.15.** Найти угол между двумя прямыми, заданными следующими уравнениями:

$$1. \begin{cases} x - y - 4z - 10 = 0; \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - 6y - 6z + 20 = 0; \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0. \end{cases}$$

$$2. \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-1}{12} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2t + 1; \\ y = -5t - 1; \\ z = 14t. \end{cases}$$

**Задача 3.16.** Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки  $M_1(2; -3; 0)$  и  $M_2(5; -1; 3)$ .

**Задача 3.17.** Написать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(5; -2; 3)$  параллельно прямой

$$\begin{cases} x + y - z - 2 = 0; \\ 2x + y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

**Задача 3.18.** Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(2; -3; 0)$  и параллельной оси  $Ox$ .

**Задача 3.19.** Написать уравнения перпендикуляров, опущенных из точки  $M(-12; 13; 4)$  на оси  $Oz$ ,  $Oy$ ,  $Ox$ .

**Задача 3.20.** При каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  прямые

$$\begin{cases} x = 2t; \\ y = -t + 6; \\ z = \alpha t - 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{\beta} = \frac{z}{1}$$

параллельны, а при каких - перпендикулярны?

**Задача 3.21.** Написать канонические и параметрические уравнения биссектрисы координатного угла  $yOz$ , а также задать её как прямую пересечения двух плоскостей.

**Задача 3.22.** Написать уравнение прямых, проходящих через точку  $M(13; -5; 1)$  параллельно биссектрисам координатных углов  $xOz$  и  $xOy$ .

**Задача 3.23.** Найти расстояние между двумя параллельными прямыми

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{3}.$$

**Задача 3.24.** Найти точку пересечения прямых

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x+5}{2} = \frac{y+13}{3} = \frac{z-5}{-1}.$$

**Задача 3.25.** Найти проекцию точки  $M(11; -1; -1)$  на плоскость  $2x + 10y + z + 199 = 0$ .

**Задача 3.26.** Найти проекцию точки  $M(7; -3; 0)$  на прямую

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-8}{7}.$$

**Задача 3.27.** Найти проекцию прямой

$$\frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

на плоскость  $x + y + z - 5 = 0$ . Представить ответ в виде общего уравнения прямой.

**Задача 3.28.** Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z-3}{0},$$

и точку  $M(1; 1; 3)$ .

**Задача 3.29.** Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{4}$$

перпендикулярно плоскости  $x - 3y - z - 6 = 0$ .

**Задача 3.30.** Показать, что прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$$

расположены в одной плоскости. Написать уравнение этой плоскости.

**Задача 3.31.** Найти кратчайшее расстояние между прямыми, заданными следующими уравнениями:

$$1) \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4};$$

$$2) \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{-2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{1} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z}{-1}.$$

**Задача 3.32.** Составить уравнение прямой, которая проходит через точку  $A(1; -2; 3)$  перпендикулярно к вектору  $\vec{a} = \{6, -3, -2\}$  и пересекает прямую

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}.$$

**Задача 3.33.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $A(-4; 3)$ , и параллельной ей прямой, проходящей через точки  $B(0; -2)$  и  $C(2; -5)$ .

**Задача 3.34.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $A(5; 0)$ , и перпендикулярной прямой, проходящей через точки  $B(-3; 1)$  и  $C(-2; 3)$ .

**Задача 3.35.** Найти угол между прямой  $2x + y = 6$  и прямой, проходящей через точки  $A(3; 7)$  и  $B(2; 4)$ .

**Задача 3.36.** Найти площадь треугольника, образованного осями координат и прямой, проходящей через точку  $A(-2; 7)$  и отсекающей на осях координат равные и положительные отрезки.

**Задача 3.37.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $A(0; 2)$  и образующей с осями координат треугольник, площадь которого равна 20 квадратным единицам, причём прямая отсекает от осей координат положительные отрезки.

**Задача 3.38.** Найти расстояние между двумя параллельными прямыми  $3x + 4y - 10 = 0$  и  $6x + 8y - 35 = 0$ .

**Задача 3.39.** Через точку  $P(-3; -1)$  провести прямую так, чтобы она прошла на одинаковом расстоянии от точек  $A(1; 3)$  и  $B(7; 1)$ .

**Задача 3.40.** Найти уравнения перпендикуляров к прямой  $2x - 3y = 6$ , проведенных в точках её пересечения с осями координат.

**Задача 3.41.** На оси  $Oy$  найти точку, равноудаленную от двух прямых  $3x - 5y - 15 = 0$  и  $5x - 3y + 10 = 0$ .

**Задача 3.42.** На оси  $Ox$  найти точку, равноудаленную от двух данных точек  $A(-4; 1)$  и  $B(4; 7)$ .

**Задача 3.43.** Даны две точки:  $A(-5; 0)$  и  $B(3; 4)$ . Найти уравнение перпендикуляра к отрезку  $AB$ , проходящему через его середину.

**Задача 3.44.** Найти расстояние от точки  $A(7; 2)$  до биссектрисы первого координатного угла.

**Задача 3.45.** Найти расстояние от центра окружности  $x^2 + y^2 + 2y = 0$  до прямой с уравнением  $y = 2(2 - x)$ .

**Задача 3.46.** Эллипс, симметричный относительно оси  $Ox$  и прямой  $x = -5$ , проходит через точки  $A(-1; 1,8)$  и  $B(-5; 3)$ . Составить уравнение эллипса и найти координаты его фокусов.

**Задача 3.47.** Найти уравнение и длину перпендикуляра, опущенного из фокуса параболы  $y = 8x^2$  на прямую, которая отсекает на осях координат отрезки  $a = b = 6$ .

**Задача 3.48.** Написать уравнение эллипса, проходящего через точку  $A(0; -3)$ , если его фокусы находятся в точках  $F_1(3; 3)$  и  $F_2(-3; 3)$ .

**Задача 3.49.** Установить, какие кривые определяют следующие уравнения и построить их относительно старых и новых осей координат:

1.  $x^2 + 4y^2 - 4x - 24y + 36 = 0$ ;

2.  $2x^2 - 3y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$ ;

3.  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 14 = 0$ ;

4.  $9x^2 + y^2 - 4y - 6x + 5 = 0$ ;

5.  $4x^2 - 9y^2 - 4x + 6y = 0$ ;

6.  $x = -2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$ ;

$$7. x = 5 - 0,75\sqrt{y^2 + 4y - 12};$$

$$8. y = 3 - 3\sqrt{-2x}.$$

**Задача 3.50.** Привести к каноническому виду следующие уравнения:

$$1. xy + 3x - 3y - 9 = 0;$$

$$2. 32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0;$$

$$3. 16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y + 50 = 0;$$

$$4. 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0;$$

$$5. 7x^2 + 24xy + 38x + 24y + 175 = 0.$$

**Задача 3.51.\*** Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 6z + 10} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 6z + 29} = 7.$$

**Задача 3.52.\*** Написать уравнение плоскости, симметричной плоскости  $x + 2y + 3z + 1 = 0$  относительно плоскости  $x + y + z = 0$ .

**Задача 3.53.\*** Определить угол между кривыми  $y = \operatorname{tg} x$  и  $y = \operatorname{ctg} x$ .

**Задача 3.54.\*** Среди прямых, проходящих через точку  $M(3;0)$ , найти такую, отрезок которой, заключённый между прямыми  $2x - y - 2 = 0$  и  $x + y + 3 = 0$ , делится точкой  $M$  пополам.

**Задача 3.51.\*** Дан эллипс  $4x^2 + y^2 = 5$ . Найти уравнение параболы, которая касается этого эллипса в точках  $A(1;-1)$  и  $B(-1;-1)$ .

### Глава 3.

$$3.1. \frac{x}{6} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{-6} = 1. 3.2. \frac{x}{14/3} + \frac{y}{7/3} + \frac{z}{14} = 1, A\left(\frac{14}{3}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{7}{3}; 0\right), C(0; 0; 14).$$

$$3.3. \sqrt{10}. 3.4. y + 5 = 0. 3.5. 9y - z - 2 = 0. 3.6. 2x - 2y + z - 39 = 0,$$

$$2x - 2y + z + 3 = 0. 3.7. x - 3y - 2z = 0. 3.8. \frac{8}{25}. 3.9. 3y + 4z - 11 = 0;$$

$$4x + y - 1 = 0; 3x - z + 2 = 0. 3.10. C = 26. 3.11. \alpha = -1, \beta = 2; \alpha = 2\beta + 1.$$

$$3.12. y \pm z = 0 \quad 3.13. 18/7. \quad 3.14. 1. \frac{x}{-5} = \frac{y+1}{8} = \frac{z+3}{17}; \quad 2. \frac{x}{1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-7}{1}.$$

$$3.15. 1. \cos \varphi = -\frac{4}{21}; 2. \cos \varphi = \frac{154}{195}. 3.16. x = 3t + 2; y = 2t - 3; z = 3t$$

$$3.17. \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}; x = 2t + 5; y = -t - 2; z = t + 3.$$

$$3.18. x = t + 2; y = -3; z = 0. 3.19. \frac{x+12}{-12} = \frac{y-13}{13} = \frac{z-4}{0};$$

$$\frac{x+12}{-12} = \frac{y-13}{0} = \frac{z-4}{4}; \quad \frac{x+12}{0} = \frac{y-13}{13} = \frac{z-4}{4}. \quad \mathbf{3.20.} \quad \alpha = -1, \beta = 1; \beta = \alpha - 4.$$

$$\mathbf{3.21.} \quad \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}; \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases} \quad \mathbf{3.22.} \quad \frac{x-13}{1} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-1}{1};$$

$$\frac{x-13}{1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-1}{0}. \quad \mathbf{3.23.} \quad 17/5. \mathbf{3.24.} \quad M_0(5; 2; 0). \quad \mathbf{3.25.} \quad M_0(7; -2; -3). \quad \mathbf{3.26.}$$

$$M_0(-1; 6; 1). \quad \mathbf{3.27.} \quad \begin{cases} 3x-4y+z+17=0 \\ x+y+z-5=0 \end{cases}. \quad \mathbf{3.28.} \quad z=3. \quad \mathbf{3.29.} \quad 3x+2y-3z+14=0.$$

$$\mathbf{3.30.} \quad x+2y-5z=0. \quad \mathbf{3.31.} \quad 1. \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad 2. \quad \frac{9}{\sqrt{5}}. \quad \mathbf{3.32.} \quad \frac{x-1}{9} = \frac{y+2}{26} = \frac{z-3}{-12}.$$

$$\mathbf{3.33.} \quad 3x+2y+6=0, \quad 3x+2y+4=0, \quad \mathbf{3.34.} \quad x+2y-5=0, \quad y-2x-7=0, \quad \mathbf{3.35.} \quad \pi/4$$

$$\text{или } 3\pi/4. \quad \mathbf{3.36.} \quad 12, 5. \quad \mathbf{3.37.} \quad x+10y-20=0. \quad \mathbf{3.38.} \quad 1, 5. \quad \mathbf{3.39.} \quad x+3y+6=0;$$

$$3x-7y+2=0. \quad \mathbf{3.40.} \quad 3x+2y+4=0; \quad 3x+2y-9=0. \quad \mathbf{3.41.} \quad M_1(0; -0,625);$$

$$M_2(0; -12,5). \quad \mathbf{3.42.} \quad M(3; 0). \quad \mathbf{3.43.} \quad y+2x=0. \quad \mathbf{3.44.} \quad 5\sqrt{2}/2. \quad \mathbf{3.45.} \quad \sqrt{5}. \quad \mathbf{3.46.}$$

$$\frac{(x+5)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad F_1(-9; 0); \quad F_2(-1; 0). \quad \mathbf{3.47.} \quad 2\sqrt{2}, \quad y = x + 2.$$

$$\mathbf{3.48.} \quad \frac{x^2}{45} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1. \quad \mathbf{3.49.} \quad 1. \text{ Эллипс } \frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{1} = 1, \quad O'(2; 3). \quad 2. \text{ Гипербола}$$

$$\frac{(x')^2}{3} - \frac{(y')^2}{2} = 1, \quad O'(1; -1). \quad 3. \text{ Окружность } (x')^2 + (y')^2 = 19, \quad O'(-1; 2). \quad 4.$$

$$\text{Точка } M\left(\frac{1}{3}; 2\right). \quad 5. \text{ Две прямые } 2x-3y=0 \text{ и } 2x+3y-2=0. \quad 6. \text{ Часть эллипса}$$

$$\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{4} = 1 \text{ в левой полуплоскости } (x \leq 0, -5 \leq y \leq -1), \quad O'(0; -3). \quad 7. \text{ Часть}$$

$$\text{гиперболы } \frac{(y')^2}{16} - \frac{(x')^2}{9} = 1 \text{ в левой полуплоскости } (x \leq 5, 2 \leq y, y \leq -6),$$

$$O'(5; -2). \quad 8. \text{ Дуга параболы } (y')^2 = -18x' \text{ в нижней полуплоскости } (x \leq 0, y \leq 3), \quad O'(0; 3). \quad \mathbf{3.50.} \quad 1. \text{ Две прямые } y'' = \pm x'' \quad (tg \alpha = 1, \quad O''(0, -3\sqrt{2})).$$

$$2. \text{ Гипербола } \frac{(y')^2}{9} - \frac{(x')^2}{4} = 1 \quad (tg \alpha = \frac{1}{2}, \quad O'(0, 0)). \quad 3. \text{ Парабола } (y'')^2 = x'' \quad ($$

$$tg \alpha = \frac{4}{3}, \quad O''(1, 1)). \quad 4. \text{ Эллипс } \frac{(x'')^2}{1} + \frac{(y'')^2}{9} = 1 \quad (tg \alpha = 1, \quad O''(\sqrt{2}, 0)).$$

$$5. \text{ Гипербола } \frac{(y'')^2}{16} - \frac{(x'')^2}{9} = 1 \quad \left( tg \alpha = \frac{3}{4}, \quad O''\left(-\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right) \right). \quad \mathbf{3.51*}.$$

$$\begin{cases} x = 2t; \\ y = 1 + 3t; \\ z = -3 + 6t; \end{cases} \quad t \in [0; 1]. \quad \mathbf{3.52*}. \quad 3x + 2y + z - 1 = 0. \quad \mathbf{3.53*}. \quad \varphi = \pi - 2 \arctan 2. \quad \mathbf{3.54*}.$$

$$y = 8(x - 3). \quad \mathbf{3.55*}. \quad y = 2x^2 - 3.$$