

Лабораторная работа №1.

Аналитическое моделирование.

Построение аналитической модели по вербальному описанию.

Основой методов построения аналитических моделей является построение и программная реализация **МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**.

Основные этапы использования формальных математических методов:

- ☐ анализ ситуации и постановка задачи исследования
- ☐ построение математической модели
- ☐ формирование задачи выбора наилучшей стратегии
- ☐ решение задачи и анализ полученного решения с возможной корректировкой модели

Анализ ситуации позволяет выделить основные типы параметров, описывающих состояние системы: **УПРАВЛЯЕМЫЕ, ЦЕЛЕВЫЕ И НЕУПРАВЛЯЕМЫЕ**.

Управляемые параметры являются искомыми и их значения определяют стратегию.

Целевые параметры необходимы для описания поставленных целей.

Значения целевых параметров зависят от управляемых параметров.

Значения **неуправляемых** параметров не могут изменяться руководством, оставаясь постоянными, известными полностью или частично.

Разделение параметров на 3 основные группы носит относительный характер и может изменяться в зависимости от ситуации.

Построение мат. модели включает введение условных обозначений для параметров и, самое главное, **УСТАНОВЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТЕЙ**, которые связывают эти параметры. Любая модель является абстракцией, отражающей лишь самые важные черты, особенности описываемой системы.

Будем считать, что зависимости между параметрами задаются в виде следующего набора функций:

$$W_i = F(X_1, X_2, \dots, X_n, a_1, a_2, \dots, a_k), \quad i=(1, m), \quad (1.1)$$

где

W - обозначения целевых параметров,

X - обозначения управляемых параметров,

a - обозначения неуправляемых параметров,

m - число целевых параметров,

n - число управляемых параметров,

k - число неуправляемых параметров.

Построение статичной аналитической модели оптимизации с реализацией в среде MS Excel.

Задача оптимизации, или задача выбора наилучшей стратегии, формируется на основе мат. модели следующим образом:

1. из целевых параметров выбирается ОДИН, определяющий ЦЕЛЬ функционирования системы и, следовательно, конкретизирующий понятие наилучшей стратегии; значение этого параметра в зависимости от ситуации должно быть или как можно больше, или как можно меньше; соответствующая функция F называется ЦЕЛЕВОЙ или КРИТЕРИЕМ ЭФФЕКТИВНОСТИ; эта функция позволяет сравнивать стратегии между собой и выбирать наилучшую из них в соответствии с поставленной целью;
2. на значения остальных $(m-1)$ целевых параметров накладываются ОГРАНИЧЕНИЯ вида $b_i < W_i < c_i$, где b и c - заданные величины; эти ограничения определяют набор ДОПУСТИМЫХ стратегий, т.е. такие значения управляемых параметров, при которых выполняются СРАЗУ ВСЕ заданные условия; наилучшая стратегия должна выбираться ТОЛЬКО из допустимых.

В результате задача выбора наилучшей стратегии математически формулируется как ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ:

НАЙТИ ТАКИЕ ЗНАЧЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ, ПРИ КОТОРЫХ ВЫПОЛНЯЮТСЯ ВСЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ЗНАЧЕНИЯ ЦЕЛЕВЫХ ПАРАМЕТРОВ И ДОСТИГАЕТСЯ НАИБОЛЬШЕЕ (НАИМЕНЬШЕЕ) ЗНАЧЕНИЕ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ.

Условная запись:

$$\begin{aligned} &\text{найти } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ так, чтобы} \\ &W = F(x, a) \Rightarrow \max (\min) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} &\text{при выполнении ограничений} \\ &b_i < W_i = F(x, a) < c_i, \quad i=(2,m) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Наиболее простой и распространенной на практике задачей подобного типа является задача ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. Ее особенность состоит в том, что ВСЕ функции F являются ЛИНЕЙНЫМИ, т.е.

$$F(X, a) = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \quad (1.4)$$

Задача линейного программирования (ЗЛП).

Найти вектор стратегий $X = (X_1, \dots, X_n)$ при котором :

$$\begin{aligned}
F(X) &= c_1X_1 + \dots + c_nX_n \Rightarrow \max (\min) \\
a_{i,1}X_1 + \dots + a_{i,n}X_n &\# b_i \quad i=(1,m) \\
\text{где } \# & - \text{один из знаков } =, \leq, \geq, <, > \\
X_j &= 0 \quad j=(1,n)
\end{aligned}
\tag{1.5}$$

Пример 1

Неформальная постановка задачи

Автогараж располагает 3 видами грузовых машин: А,Б,В грузоподъемностью 8т, 4т и 3т соответственно. Одна машина типа А тратит на выполнение работы 60л бензина, типа Б - 30л, типа С - 20л. Найти число машин, исходя из следующих условий:

- затраты бензина не превосходят 3000л ,
- объем перевозок не менее 300т ,
- суммарное количество машин минимально.

I этап: Анализ словесного описания задачи

Управляемые параметры: количество машин каждого вида

Неуправляемые параметры: грузоподъемность каждой машины и расход бензина

Целевые параметры: суммарные затраты бензина, суммарный объем перевозок суммарное количество используемых машин

II этап: Построение математической модели

Таблица 1. 1

Характеристика машины	Машина типа А	Машина типа Б	Машина типа В
Грузоподъемность, т	8	4	3
Расход бензина	60	30	20

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ:

Управляемые параметры: X_1, X_2, X_3 - количество машин типа А,Б,В соответственно, т.е. $n=3$

Целевые параметры:

- W_1 - затраты бензина,
- W_2 - объем перевозок,
- W_3 - количество используемых машин,

т.е. $m = 3$

Неуправляемые параметры:

$$a_{1,1}=60 \ a_{1,2}=30 \ a_{1,3}=20$$

$$a_{2,1}=8 \ a_{2,2}=4 \ a_{2,3}=3$$

Соотношения между параметрами:

$$W_1 = 60X_1 + 30X_2 + 20X_3$$

$$W_2 = 8X_1 + 4X_2 + 3X_3 \quad (1.6)$$

$$W_3 = X_1 + X_2 + X_3$$

III этап: Формирование задачи выбора наилучшей стратегии

Искомые параметры: X_1, X_2, X_3

Целевая функция: $F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow \min$

Ограничения:

$$60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \leq 3000$$

$$8X_1 + 4X_2 + 3X_3 \geq 300$$

$$X_i \geq 0, (i=1,3)$$

(1.7)

Решение задач линейного программирования с помощью надстройки «поиск решений» в среде excel

Поиск решения - это надстройка EXCEL, которая позволяет решать оптимизационные задачи. Если во вкладке *Данные* отсутствует опция *Поиск решения*, значит, необходимо загрузить эту надстройку.

Для MS Excel 2010.

Перейдите во вкладку *Файл*, и выберите пункт меню *Параметры*:

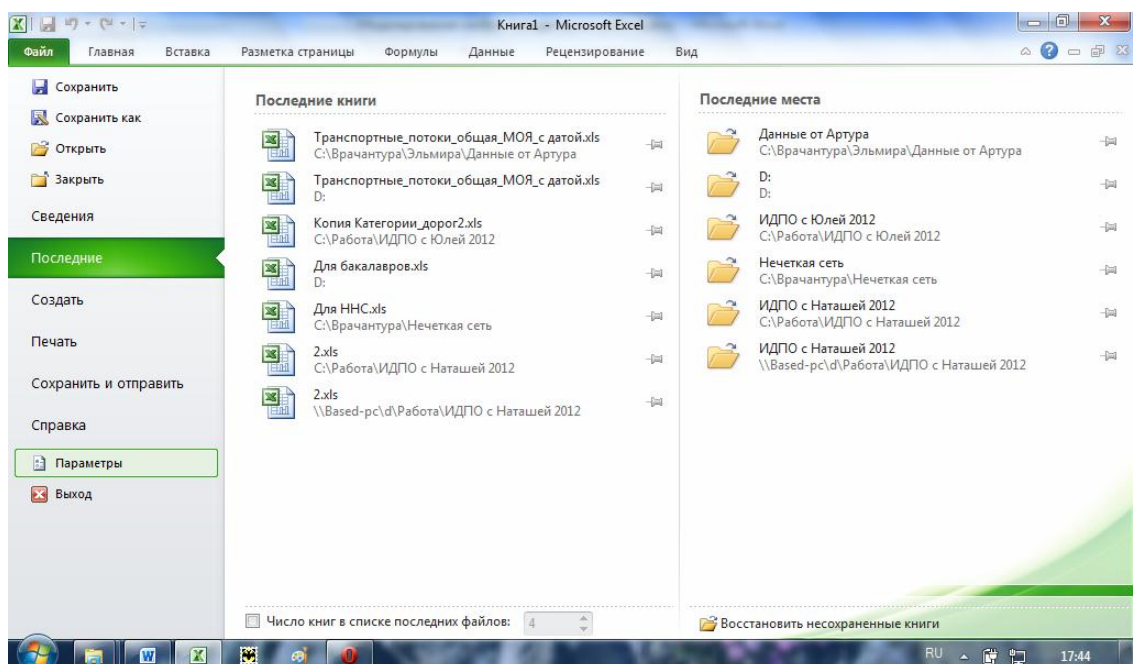


Рис.1. 1 Выбор пункта меню «Параметры».

В появившемся окне выберите пункт *Надстройки*, а в правой части пункт *«Поиск решения»*:

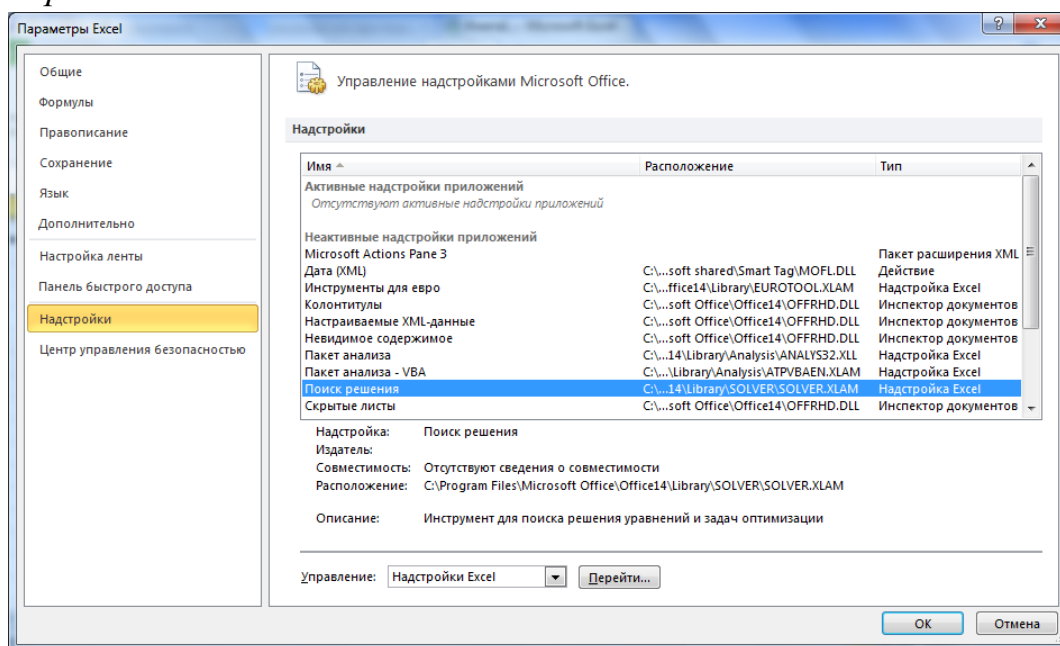


Рис.1. 2 Управление надстройками.

В нижней части окна нажмите на кнопку *«Перейти»*. Откроется окно выбора активируемых надстроек. Выберите *Поиск решения* и нажмите *«ОК»*:

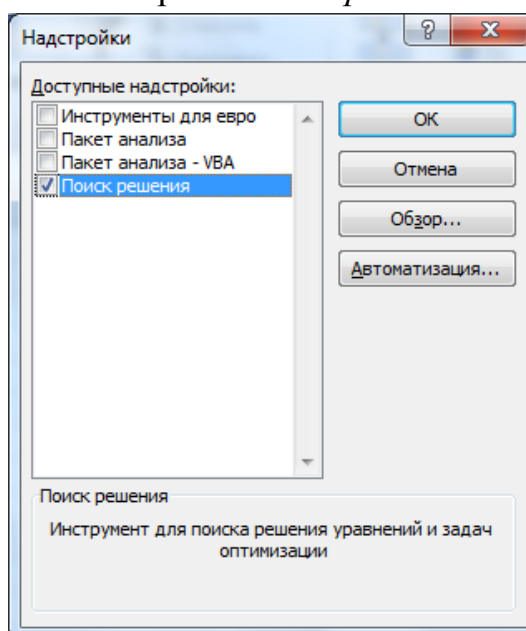


Рис.1. 3. Добавление надстройки «Поиск решения».

После этого пункт *Поиск решения* появится на вкладке *Данные*:

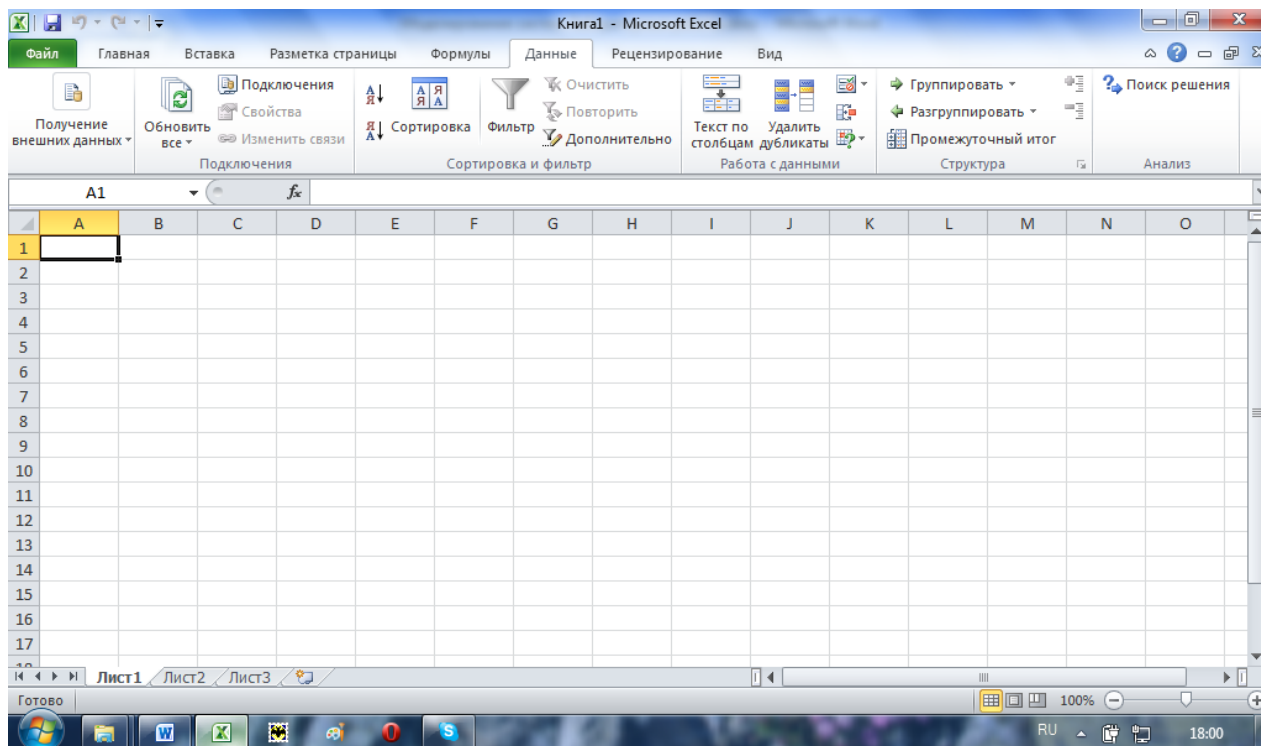


Рис.1. 4 Вкладка «Данные» с пунктом «Поиск решения».

Для непосредственного решения задачи оптимизации необходимо:

1. Создать форму для ввода условий задачи.
2. Указать адреса ячеек, в которые будет помещен результат решения (изменяемые ячейки).
3. Ввести исходные данные.
4. Ввести зависимость для целевой функции.
5. Ввести зависимости для ограничений.
6. Указать назначение целевой функции (установить целевую ячейку).
7. Ввести ограничения.
8. Ввести параметры для решения ЗЛП.

Рассмотрим процесс решения на примере *Задачи оптимального использования ресурсов*.

Задача оптимального использования ресурсов

Фабрика имеет в своем распоряжении определенное количество ресурсов: рабочую силу, деньги, сырье, оборудование, производственные и т.п. Допустим, например, ресурсы трех видов: рабочая сила, сырье и оборудование - имеются в количестве соответственно 80 (чел/дней), 480 (кг) и 130 (станко/ч). Фабрика может выпускать ковры четырех видов. Информация о количестве единиц каждого ресурса, необходимых для производства одного ковра каждого вида, и доходах, получаемых предприятием от единицы каждого вида товаров, приведена в таблице.

Таблица 1. 2

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на единицу изделия				Наличие ресурсов
	ковер «Лужайка»	ковер «Силуэт»	ковер «Детский»	ковер «Дымка»	
Труд	7	2	2	6	80
Сырье	5	8	4	3	480
Оборудование	2	4	1	8	130
Цена (т. руб.)	3	4	3	1	

Требуется найти такой план выпуска продукции, при котором будет максимальной общая стоимость продукции.

Обозначим через X_1 , X_2 , X_3 , X_4 количество ковров каждого типа.

Математическая модель задачи.

Целевая функция - это выражение, которое необходимо максимизировать:

$$f(X) = 3X_1 + 4X_2 + 3X_3 + X_4.$$

Ограничения по ресурсам

$$\begin{aligned} 7X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 6X_4 &\leq 80, \\ 5X_1 + 8X_2 + 4X_3 + 3X_4 &\leq 480, \\ 2X_1 + 4X_2 + X_3 + 8X_4 &\leq 130, \\ X_1, X_2, X_3, X_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

1. Для задачи *оптимального использования ресурсов* подготовим форму для ввода условий (Рис.1. 5).

2. В нашей задаче оптимальные значения вектора $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ будут помещены в ячейках **В3:Е3**, оптимальное значение целевой функции - в ячейке **F4**.

3. Введем исходные данные в созданную форму. Получим результат, показанный на Рис.1. 6.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			Переменные						
2		X1	X2	X3	X4				
3	значение					ЦФ			
4	коэф. в ЦФ								
5			Ограничения						
6	Вид ресурсов					левая часть	знак	правая часть	
7	труд								
8	сырье								
9	оборудование								
10									

Рис.1. 5. Введена форма для ввода данных.

Весь текст на Рис.1. 5 является комментарием и на решение задачи не влияет.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			Переменные						
2		x1	x2	x3	x4				
3	значение					ЦФ			
4	коэф. в ЦФ	3	4	3	1				
5			Ограничения						
6	Вид ресурсов					левая часть	знак	правая часть	
7	труд	7	2	2	6		<=	80	
8	сырье	5	8	4	3		<=	480	
9	оборудование	2	4	1	8		<=	130	
10									

Рис.1. 6. Данные введены.

4. Введем зависимость для целевой функции¹.

- Курсор в F4.
- Перейти на вкладку *Формулы*.
- Выбрать пункт «Вставить функцию».

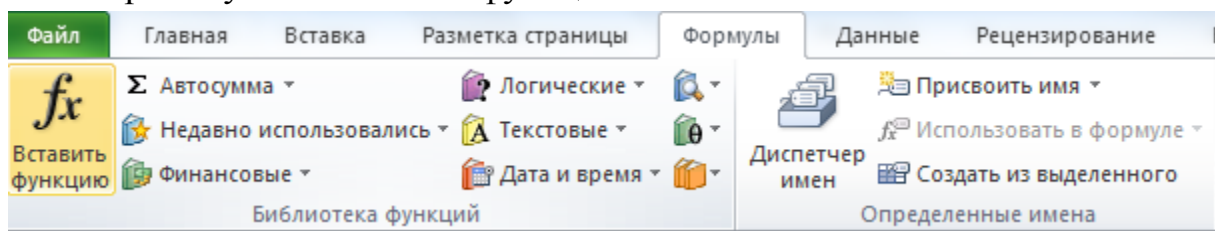


Рис.1. 7.

- M1. На экране диалоговое окно *Мастер функций* шаг 1 из 2.

¹ Обозначим через M1 действие «один щелчок левой кнопкой мыши »

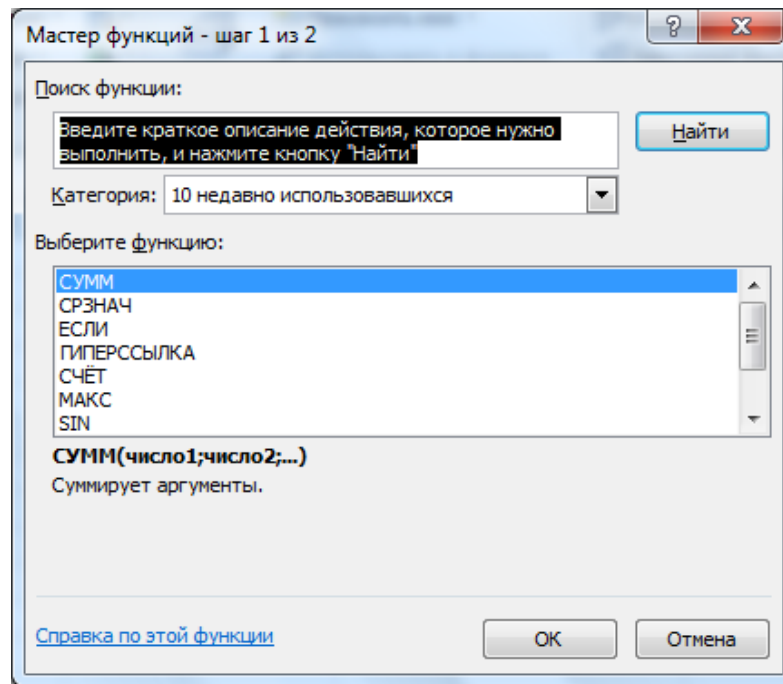


Рис.1. 8.

- Курсор в окно *Категория* на категорию *Математические*.
- М1.
- Курсор в окно *Функции* на СУММПРОИЗВ.
- М1.
- В массив 1 ввести² B\$3:E\$3.
- В массив 2 ввести B4:E4.

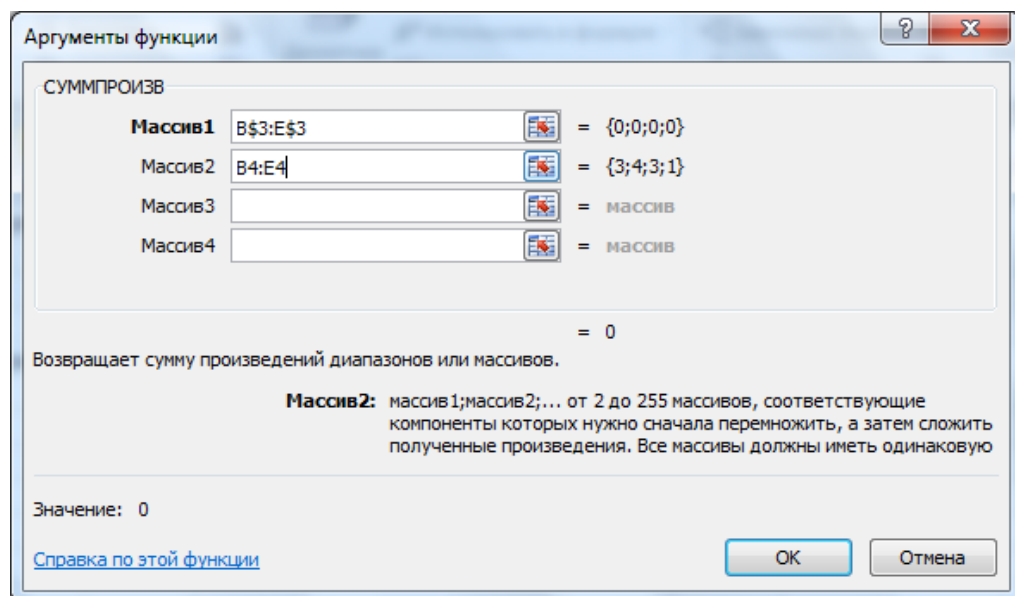


Рис.1. 9. Задание функции – значения целевой функции.

- На экране: в F4 введена функция, как показано на Рис.1. 10.

² Адреса ячеек во все диалоговые окна удобно вводить не с клавиатуры, а «протаскивая» мышью по ячейкам, чьи адреса следует ввести.

СУММПРОИЗВ X ✓ fx =СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B4:E4)											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			Переменные								
2		x1	x2	x3	x4						
3	значение					ЦФ					
4	коэф. В ЦФ	3	4	3	1	=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B4:E4)					
5			Ограничения				СУММПРОИЗВ(массив1; [массив2]; [массив3]; [массив4]; ...)				
6	Вид ресурсов					левая часть	знак	правая часть			
7	труд	7	2	2	6		<=	80			
8	сырье	5	8	4	3		<=	480			
9	оборудование	2	4	1	8		<=	130			
10											

Рис.1. 10. Ввод целевой функции.

5. Введем зависимость для левых частей ограничений:

- Курсор в F4.
- Копировать в буфер.
- Курсор в F7.
- Вставить из буфера.
- Курсор в F8.
- Вставить из буфера.
- Курсор в F9.
- Вставить из буфера.

На этом ввод зависимостей окончен.

СУММПРОИЗВ X ✓ fx =СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B9:E9)											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			Переменные								
2		x1	x2	x3	x4						
3	значение					ЦФ					
4	коэф. в ЦФ	3	4	3	1	0					
5			Ограничения								
6	Вид ресурсов					левая часть	знак	правая часть			
7	труд	7	2	2	6	0	<=	80			
8	сырье	5	8	4	3	0	<=	480			
9	оборудование	2	4	1	8	=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B9:E9)					
10						СУММПРОИЗВ(массив1; [массив2]; [массив3]; [массив4]; ...)					
11											

Рис.1. 11. Ввод выражений для вычисления левых частей ограничений.

Запуск «Поиска решения»

После перехода на вкладку *Данные* и выбора *Поиск решения* появится диалоговое окно *Поиск решения*.

В диалоговом окне *Поиск решения* есть три основных параметра:

- *Установить целевую ячейку*
- *Изменяя ячейки*
- *Ограничения*

Сначала нужно заполнить поле «Установить целевую ячейку». Во всех задачах для средства *Поиск решения* оптимизируется результат в одной из

ячеек рабочего листа. Целевая ячейка связана с другими ячейками этого рабочего листа с помощью формул. Средство *Поиск решения* использует формулы, которые дают результат в целевой ячейке, для проверки возможных решений. Можно выбрать поиск наименьшего или наибольшего значения для целевой ячейки или же установить конкретное значение.

Второй важный параметр средства *Поиск решения* - это параметр *Изменяя ячейки*. Изменяемые ячейки - это те ячейки, значения в которых будут изменяться для того, чтобы оптимизировать результат в целевой ячейке. Для поиска решения можно указать до 200 изменяемых ячеек. К изменяемым ячейкам предъявляется два основных требования: они не должны содержать формул, и изменение их значений должно отражаться на изменении результата в целевой ячейке. Другими словами, целевая ячейка зависит от изменяемых ячеек.

Третий параметр, который нужно вводить для *Поиска решения* – это *Ограничения*.

6. Назначение целевой функции (установить целевую ячейку).

- Курсор в поле «Установить целевую ячейку».
- Ввести адрес \$F\$4.
- Ввести направление целевой функции: Максимальному значению.

Ввести адреса искомых переменных:

- Курсор в поле «Изменяя ячейки».
- Ввести адреса B\$3:E\$3.

• 7. Ввод ограничений.

- Курсор в поле «Добавить». Появится диалоговое окно *Добавление ограничения*.
- В поле «Ссылка на ячейку» ввести адрес \$F\$7.
- Ввести знак ограничения \leq .
- Курсор в правое окно.
- Ввести адрес \$H\$7.

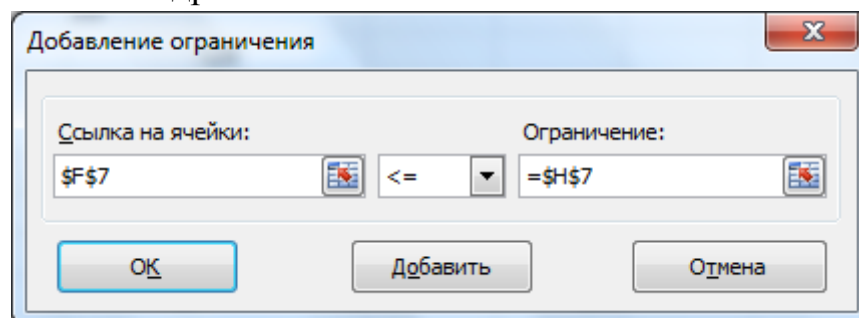


Рис.1. 12. Добавление ограничения.

- *Добавить*. На экране опять отобразится диалоговое окно *Добавление ограничения*.
- Ввести остальные ограничения.
- После ввода последнего ограничения ввести ОК.

8. Ввод параметров для решения ЗЛП.

- Выбрать из выпадающего списка метод решения – «*Поиск решения линейных задач симплекс-методом*».
- Установить флажок *Неотрицательные значения*.
 - На экране появится диалоговое окно *Поиск решения* с введенными условиями.

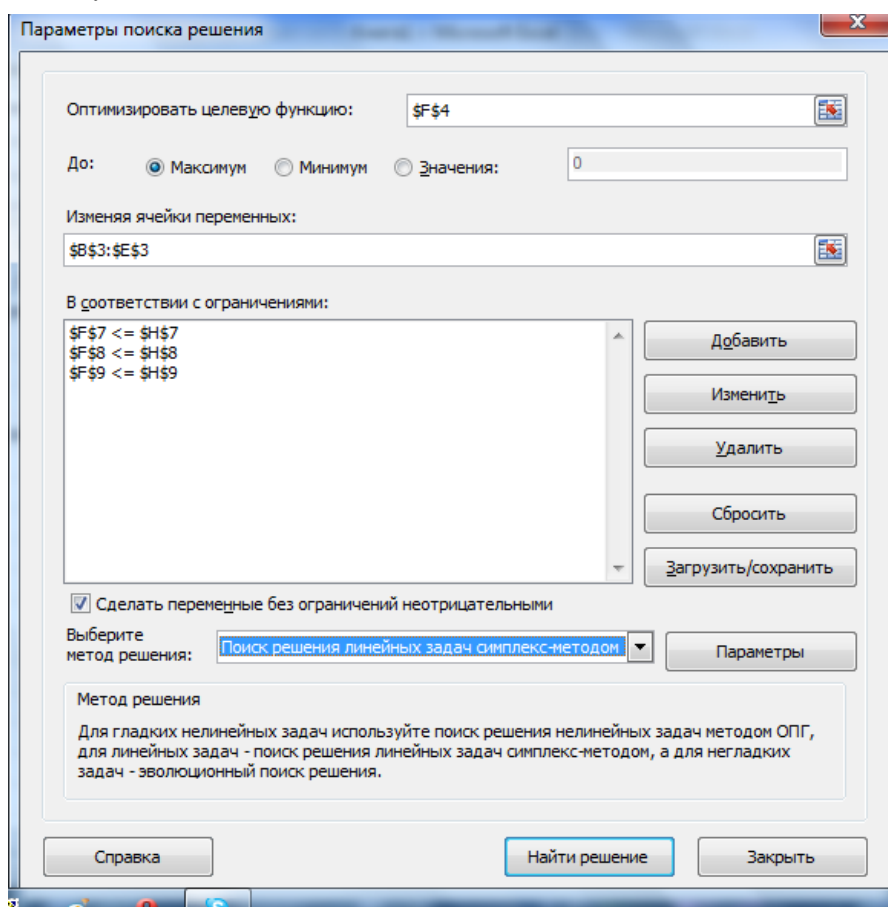


Рис.1. 13. Введены все условия для решения задачи.

- Нажать кнопку «Найти решение». Появится окно «Результат поиска решения»:

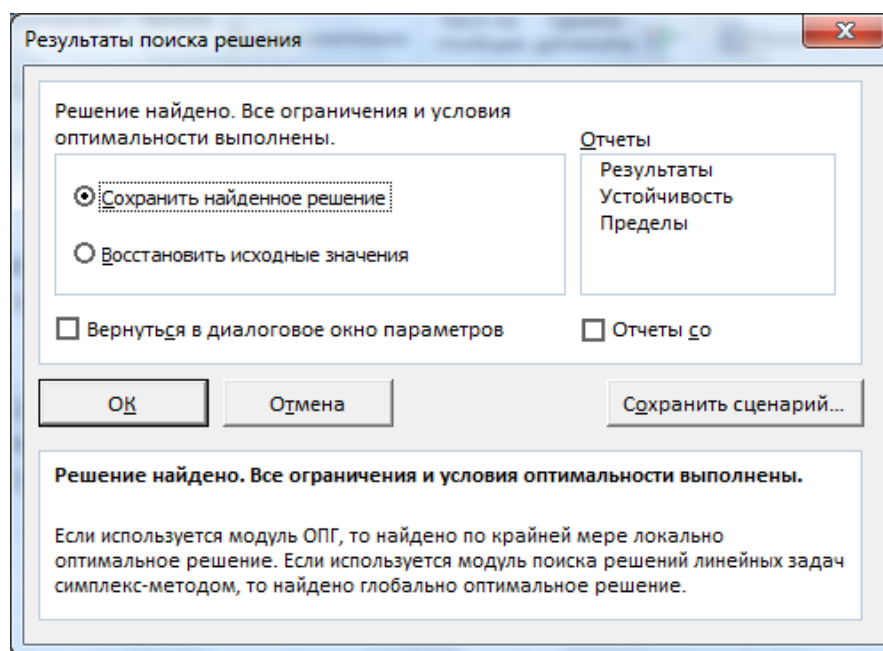


Рис.1. 14. Окно результата.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			Переменные						
2		x1	x2	x3	x4				
3	значение	0	30	10	0	ЦФ			
4	коэф. В ЦФ	3	4	3	1	150			
5			Ограничения						
6	Вид ресурсов					левая часть	знак	правая часть	
7	труд	7	2	2	6	80	<=	80	
8	сырье	5	8	4	3	280	<=	480	
9	оборудование	2	4	1	8	130	<=	130	
10									

Рис.1. 15. Решение на листе.

Полученное решение означает, что максимальный доход 150 тыс. руб. фабрика может получить при выпуске 30 ковров второго вида и 10 ковров третьего вида. При этом ресурсы труд и оборудование будут использованы полностью, а из 480 кг пряжи (ресурс сырье) будет использовано 280 кг.

Создание отчета по результатам поиска решения

EXCEL позволяет представить результаты поиска решения в форме отчета. Существует три типа таких отчетов:

Результаты (Answer). В отчет включаются исходные и конечные значения целевой и влияющих ячеек, дополнительные сведения об ограничениях.

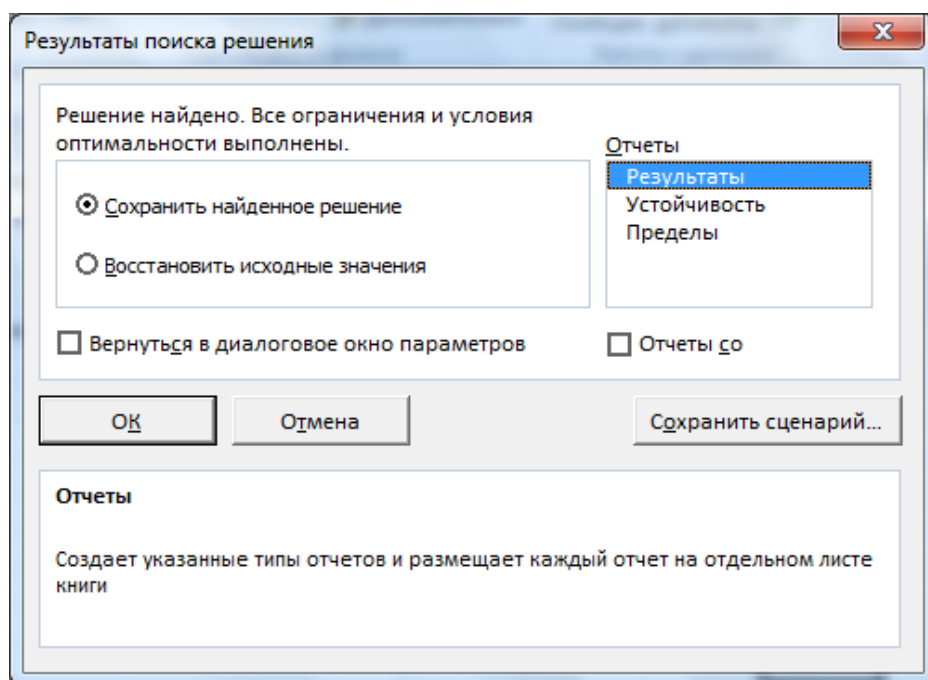


Рис.1. 16. Выбор отчета по результатам.

Устойчивость (Sensitivity). Отчет, содержащий сведения о чувствительности решения к малым изменениям в изменяемых ячейках или в формулах ограничений.

Пределы (Limits). Помимо исходных и конечных значений изменяемых и целевой ячеек в отчет включаются верхние и нижние границы значений, которые могут принимать влияющие ячейки при соблюдении ограничений.

Модуль: Поиск решения линейных задач симплекс-методом
 Время решения: 0,031 секунд.
 Число итераций: 2 Число подзадач: 0

Параметры поиска решения
 Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Precision 0,000001, Использовать автоматическое масштабирование
 Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 1%, Считать неотрицательными

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
\$F\$4	коэф. в ЦФ ЦФ	150	150

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
\$B\$3	значение X1	0	0	Продолжить
\$C\$3	значение X2	30	30	Продолжить
\$D\$3	значение X3	10	10	Продолжить
\$E\$3	значение X4	0	0	Продолжить

Рис.1. 17. Фрагмент отчета по результатам.

В отчете по результатам содержатся оптимальные значения переменных X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , которые соответственно равны 0, 30, 10, 0, значение целевой функции - 150, а также левые части ограничений.

Индивидуальные варианты заданий.

Задание №1.

Предприятие может выпускать изделия 4-х видов: А, В, С и D. Для каждого изделия известны:

- цена в рублях,
- трудоемкость изготовления в человеко-часах,
- зарплата рабочих в рублях.

Таблица 1. 3

Показатели	Виды изделий			
	А	В	С	Д
Цена единицы	1000	500	2600	4800
Трудоемкость единицы	10000	6000	4000	5000
Зарплата на единицу	4000	6000	400	3200

Найти объем выпуска всех изделий, исходя из следующих условий:

- 1) Прибыль от реализации изделий должна быть максимальна
- 2) Фонд зарплаты ограничен 1 млн. руб.
- 3) Численность рабочих ограничена 6 000 человек.

Примечание: численность рабочих $= (\text{трудоемкость изготовления} / 1800)$,
прибыль = цена - зарплата рабочих.

Задание №2.

Обработка деталей А, В, С может производиться на трёх станках (I, II, III). В следующей таблице указаны нормы затрат времени на обработку станком соответствующей детали, продажная цена единицы детали (в рублях) и предельное время работы станка:

Таблица 2.

Детали Станки	Нормы времени			Время работы станка
	А	В	С	
I	0.2	0.1	0.05	40
II	0.6	0.3	0.2	60
III	0.2	0.1	0.4	30
Цена	10	16	12	

Определить оптимальную производственную программу для получения максимума суммарной прибыли, предполагая, что любая деталь

может производиться на любом из станков и что станок II должен работать не менее 20 часов.

Задание №3.

Швейная фабрика может выпускать изделия трех видов: А , В и С . Эти изделия проходят 3 стадии производства. Известны нормы времени в человеко-часах для изготовления одного изделия на каждой стадии производства (Таблица 1. 4). Известна полная себестоимость и цена одного изделия для всех видов.

Таблица 1. 4.

Показатели	Виды изделий			Фонд времени
	А	В	С	
Нормы времени по стадиям:				
1-я стадия	0,3	0,4	0,6	3360
2-я стадия	0,4	0,4	0,7	2668
3-я стадия	0,5	0,4	0,8	5010
Полная себестоимость, руб.	15	40,5	97,8	-
Цена, руб.	17,5	42	100	

Примечание: прибыль = цена - себестоимость.

Задан действительный фонд времени для каждой стадии производства. Найти план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную прибыль.

Задание №4.

Предприятие производит замену оборудования четырех типов: А ,В ,С , D. Известны следующие показатели (Таблица 1. 5);

- повышение производительности от единицы оборудования каждого из типов;
- стоимость единицы оборудования каждого из типов;
- площадь, необходимая для размещения единицы оборудования

каждого из типов.

Найти количество оборудования всех типов, исходя из следующих условий: повышение производительности максимально, площадь, выделенная под размещение оборудования, не превосходит 200м^2 . Фонд средств, выделенных на приобретение оборудования, равен 140 тыс. руб.;

Таблица 1. 5.

Показатели	Типы оборудования			
	A	B	C	D
Повышение производительности	1,6	3	2,5	4
Стоимость единицы оборудования, тыс. руб.	2,8	3,2	4,5	6,8
Площадь под единицу оборудования, м ²	3	4,2	4,8	12,0

Задание №5. Предприятие может выпускать изделия трех видов: А, В, С, для изготовления которых нужны материалы двух типов. Известны нормы расхода этих материалов на изготовление одного изделия каждого вида (Таблица 1. 6), а также запас этих материалов на предприятии. Известны трудоемкости изготовления единицы каждого изделия, прибыль от реализации единицы изделия. Найти план выпуска продукции, исходя из следующих условий; прибыль максимальна, трудоемкость выпуска всех изделий не превосходит 16 800 человеко-часов, причем изделий типа А надо выпустить не менее 300 шт.;

Таблица 1. 6.

Показатели	Виды изделий			Запас материалов
	A	B	C	
Норма расхода материалов, т				
материал №1	0.32	0.31	0,38	900
материал № 2	0,2	0,2	0,08	300
Трудоемкость .человеко-часов	10.2	7,5	5.8	
Прибыль на единицу, руб.	100	40	20	