Tecnológico de Monterrey

Física Experimental I

Práctica Numérica 01

Difracción y Transformada de Fourier

Names:

Rubén Darío Casso De León	A01196975
Bernardo Barrera Godínez	A01194182
Carla Judith López Zurita	A00822301

Profesor:

Raúl Hernández Aranda

Jueves 16 de abril, 2020

1. Apertura rectangular: Fresnel

1.1. Calculen el patrón de difracción de Fresnel para una apertura rectangular que tiene anchuras D_x y D_y respectivamente, y que es iluminada por una onda plana de amplitud unitaria.

1: a) Calcula analíticamente el patrón de difracción de Fresnel para:

$$U(x_0, y_0, 0) = \text{rect}\left(\frac{x_0}{D_x}\right)\text{rect}\left(\frac{y_0}{D_y}\right)$$

$$U(\vec{r}_t, z) = \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0, y_0, 0)\, e^{i\frac{k_0}{2z}\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]}\, dx_0 dy_0$$

$$= \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda z}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\text{rect}\left(\frac{x_0}{D_x}\right)e^{i\frac{k_0}{2z}(x-x_0)^2}dx_0\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\text{rect}\left(\frac{y_0}{D_y}\right)e^{i\frac{k_0}{2z}(y-y_0)^2}dy_0\right) = \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda z}\left(\int_{-D_x}^{D_x} e^{i\frac{k_0}{2z}(x-x_0)^2}dx_0\right)\left(\int_{-D_y}^{D_y} e^{i\frac{k_0}{2z}(y-y_0)^2}dy_0\right)$$

Usamos el cambio de variable: $u = (x_0 - x)\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}$ $\quad v = (y_0 - y)\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}$ $\quad \frac{k_0}{2z}(x-x_0)^2 = \frac{k_0}{2z}\frac{\lambda z}{2}u^2 = \frac{2\pi u^2 \cancel{\lambda z}}{2\cancel{z}\cancel{\lambda}\, 2} = \frac{\pi}{2}u^2$

$du = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\, dx_0$ $\quad dv = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\, dy_0$

$$= \frac{e^{ik_0 z}}{i\cancel{\lambda z}}\frac{\cancel{\lambda z}}{2}\left(\int_{(-D_x - x)\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}}^{(D_x - x)\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}} e^{i\frac{\pi}{2}u^2}du\right)\left(\int_{(-D_y - y)\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}}^{(D_y - y)\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}} e^{i\frac{\pi}{2}v^2}dv\right)$$

Sabemos que: $\int_{-D-x}^{D-x} f(x)dx = \int_{-D-x}^{0} f(x)dx - \int_{D-x}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{D-x} f(x)dx - \int_{0}^{-D-x} f(x)dx$

$$= \frac{e^{ik_0 z}}{2i}\left(\int_0^{(D_x - x)\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}} e^{i\frac{\pi}{2}u^2}du - \int_0^{(-D_x - x)\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}} e^{i\frac{\pi}{2}u^2}du\right)\left(\int_0^{(D_y - y)\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}} e^{i\frac{\pi}{2}v^2}dv - \int_0^{(-D_y - y)\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}} e^{i\frac{\pi}{2}v^2}dv\right)$$

Además, podemos reescribir: $\int_0^x e^{i\frac{\pi}{2}u^2}du = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du + i\int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du = C(x) + iS(x)$

Donde $S(x)$, $C(x)$ son las integrales de Fresnel. $S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du$, $C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du$

Aprovechando que $S(-x) = -S(x)$, $C(-x) = -C(x)$:

$$= \frac{e^{ik_0 z}}{2i}\left[C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x - D_x)\right) - C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(D_x + x)\right) + i\left[S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x - D_x)\right) - S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x + D_x)\right)\right]\right]$$

$$\times\left[C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(y - D_y)\right) - C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(y + D_y)\right) + i\left[S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(y - D_y)\right) - S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(y + D_y)\right)\right]\right]$$

Definiendo:

$$F(x) = C(x) + iS(x) \tag{1}$$

Donde C(x), S(x) son las integrales de Fresnel

$$\boxed{U(\mathbf{r_t}, z) = \frac{e^{ikz}}{2i}\left[F\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x - D_x)\right) - F\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x + D_x)\right)\right]\left[F\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(y - D_y)\right) - F\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(y + D_y)\right)\right]}$$

1.2. Utilicen MATLAB para obtener las gráficas del perfil transversal de difracción para los valores de $N_F = [10, 5, 1, 0.1]$

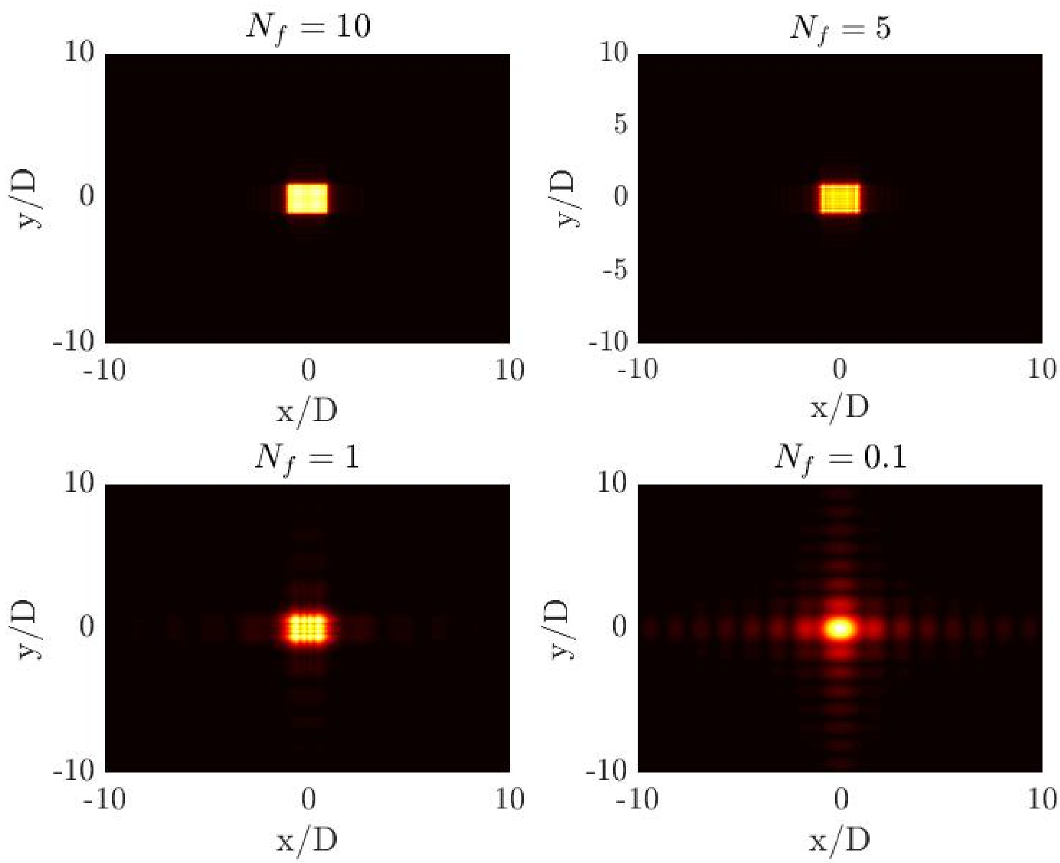


Figura 1: Perfil transversal de intensidad para los valores N_f = [10,5,1,0.1]

1.3. Demuestren analíticamente que para valores de z pequeños la intensidad del haz difractado se asemeja a la forma de la apertura rectangular

c) Las integrales de Fresnel tienen la siguiente propiedad:

$$\lim_{v\to\infty} C(v) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{v\to-\infty} C(v) = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{v\to\infty} S(v) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{v\to-\infty} S(v) = -\frac{1}{2}$$

Consideramos el caso $z \ll\ll 1$, $x > D_x$, en la región a la derecha de la apertura. Como $x - D_x > 0$ y $x + D_x > 0$:

$$\lim_{z\to 0} U(\vec{r}_t, z) = g(y,z)\Big[\underbrace{C(+\infty) - C(+\infty)}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} + i\big(\underbrace{S(+\infty) - S(+\infty)}_{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)}\big)\Big] = \underline{0}$$

Para $x < -D_x$, en la región a la izquierda de la apertura, como $x - D_x < 0$ y $x + D_x < 0$

$$\lim_{z\to 0} U(\vec{r}_t, z) = g(y,z)\Big[\underbrace{C(-\infty) - C(-\infty)}_{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)} + i\big(S(-\infty) - S(-\infty)\big)\Big] = \underline{0}$$

$$+\, i\left(-\frac{1}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right)\right)$$

Los mismos argumentos funcionan para $y > D_y$ y $y < -D_y$. Esto nos lleva a concluir que, para $z \ll\ll 1$, $U = 0$ si $|x| > D_x$ o $|y| > D_y$. Ahora consideramos las región adentro de la apertura: $|x| < D_x$ y $|y| < D_y$

Si $0 < x < D_x$ → Esto implica: $x - D_x < 0$ y $x + D_x > 0$

$$\therefore \lim_{z\to 0} U = g(y,z)\big[C(-\infty) - C(+\infty) + i\big(S(-\infty) - S(+\infty)\big)\big] = \underline{-g(y,z)(1+i)}$$

Si $-D_x < x < 0$ → Esto implica: $x - D_x < 0$ y $x + D_x > 0$

$\therefore \lim_{z\to 0} U = -g(y,z)(1+i)$ Lo mismo ocurre para $|y| < D_y$

$$\therefore \text{Para } |x| < D_x \text{ y } |y| < D_y, \quad \lim_{z\to 0} U = \frac{e^{ik_0 z}}{\cancel{2i}}\cancel{(1+i)}^{2} = \underline{\text{constante}}$$

$$\lim_{z\to 0} U = \begin{cases} 0, & |x| > D_x \text{ o } |y| > D_y \\ \frac{e^{ik_0 z}}{\cancel{2i}}\cancel{2i}, & |x| < D_x \text{ y } |y| < D_y \end{cases} = \boxed{e^{ik_0 z}\, \underbrace{rect\left(\frac{x}{D_x}\right) rect\left(\frac{y}{D_y}\right)}}$$

Podemos identificar

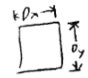
$$\boxed{|U|^2 = rect^2\left(\frac{x}{D_x}\right) rect^2\left(\frac{y}{D_y}\right)} \tag{2}$$

Es decir, se reduce a la forma de una apertura rectangular.

2. Apertura rectangular: Fraunhofer

2.1. Calculen el patrón de difracción de Fraunhofer de la apertura rectangular del problema 1. Hagan una gráfica del perfil transversal del campo difractado.

$$u_0(x_0, y_0, 0) = \mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{D_x}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{D_y}\right)$$



$$\mathrm{rect}\left(\frac{x}{D}\right) = \begin{cases} 1 & |x| \leq D/2 \\ 0 & |x| > D/2 \end{cases}$$

$$U(\vec{r}_t, z) = e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2+y^2)}\frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x_0, y_0, 0)\, e^{-i2\pi(x_0 f_x + y_0 f_y)}\, dx_0\, dy_0 \qquad f_x = \frac{x}{\lambda z} \quad f_y = y/\lambda z$$

$$\mathcal{F}\{u_0(x_0, y_0, 0)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{D_x}\right)e^{-i2\pi x_0 f_x}\, dx_0 \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{D_y}\right)e^{-i2\pi y_0 f_y}\, dy_0$$

$$= \int_{-D/2}^{D/2} e^{-i2\pi x_0 f_x}\, dx_0 \int_{-D/2}^{D/2} e^{-i2\pi y_0 f_y}\, dy_0$$

$$= \left[\frac{e^{-i2\pi x_0 f_x}}{-i2\pi f_x}\right]_{-D/2}^{D/2}\left[\frac{e^{-i2\pi y_0 f_y}}{-i2\pi f_y}\right]_{-D/2}^{D/2} = \left[\frac{e^{-i\pi D f_x} - e^{i\pi D f_x}}{-i2\pi f_x}\right]\left[\frac{e^{-i\pi D f_y} - e^{i\pi D f_y}}{-i2\pi f_y}\right]$$

aprox. de Fraunhofer $\rightarrow$ $$\boxed{U(\vec{r}_t) = D_x D_y \,\mathrm{sinc}(\pi D_x f_x)\,\mathrm{sinc}(\pi D_y f_y)\,\frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda z}\, e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2+y^2)}}$$

A continuación, se muestra una gráfica del perfil transversal en la zona de Fraunhofer, para un N_f dado.

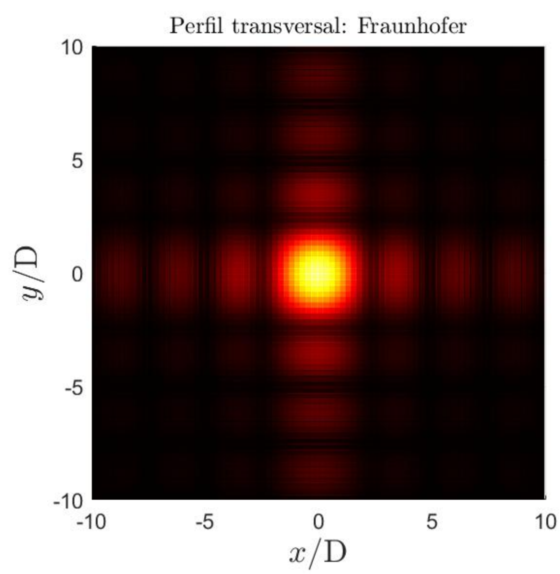


Figura 2: Perfil transversal de Fraunhofer para $N_f = 0{,}05$

3. Apertura circular: Fraunhofer

3.1. Calculen el patrón de difracción en la aproximación de Fraunhofer para el caso de una apertura circular de diámetro D, que es iluminada con una onda plana de amplitud unitaria. Hagan gráficas del patrón de difracción para distintos valores del diámetro de la apertura.

$u(x_0,y_0,0) = \mathrm{circ}\left(\frac{r_0}{D}\right)$ $\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad \mathrm{circ}\left(\frac{r}{D}\right) = \begin{cases}1 & |r|\le D/2 \\ 0 & |x|>D\end{cases}$

Integral de Franhoffer

$$U(\vec{r}_t,z) = e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2+y^2)}\frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x_0,y_0,0)\, e^{-i2\pi(x_0 f_x + y_0 f_y)}\, dx_0\, dy_0 \qquad f_x=\frac{x}{\lambda z},\ f_y=\frac{y}{\lambda z}$$

$x_0 = r_0\cos\theta$

$$\mathcal{F}\{u_0\} = \int_0^{D/2}\int_0^{2\pi} e^{-i2\pi(r_0\cos\theta f_x + r_0\sin\theta f_y)}\, r_0\, dr_0\, d\theta$$

$f_x = f_r\cos\alpha$ $\qquad f_r=\sqrt{f_x^2+f_y^2}$

$f_y = f_r\sin\alpha$ $\qquad \alpha=\tan^{-1}(f_y/f_x)$

$$\int_0^{D/2}\int_0^{2\pi} e^{-i2\pi r_0 f_0(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)}\, r_0\, dr_0\, d\theta = \int_0^{D/2}\int_0^{2\pi} e^{-i2\pi r_0 r\cos(\theta-\alpha)}\, r_0\, dr_0\, d\theta$$

$$= \int_0^{D/2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i2\pi r_0 f_r\cos\theta'}\, r_0\, dr_0\, d\theta' = 2\pi\int_0^{D/2} r_0\, dr_0\, J_0(2\pi r_0 f_r)$$

$\rho = -2\pi r_0 f_r$ $\qquad r_0 = \frac{\rho}{-2\pi f_r}$

$d\rho = -2\pi f_r\, dr_0$ $\qquad dr_0 = \frac{d\rho}{-2\pi f_r}$

$\rho = 2\pi f_r D/2$

$$= 2\pi\int_0^{\pi f_r D}\frac{\rho}{2\pi f_r}\frac{d\rho}{2\pi f_r}J_0(\rho) = \frac{1}{2\pi(f_r)^2}\pi f_r D\, J_1(\pi D f_r) = \frac{\lambda D z}{2r}J_1\left(\frac{D\pi r}{\lambda z}\right)$$

$J_0(-\lambda) = J_0(\lambda)$

$$u(\vec{r}_t,z) = \frac{e^{i\frac{k_0}{2z}(x^2+y^2)}e^{ik_0 z}}{i\lambda z}\left(\lambda z\frac{D}{2r}J_1\left(\frac{D\pi r}{\lambda z}\right)\right) = \boxed{e^{i\frac{k_0}{2z}r^2}e^{ik_0 z}\frac{D}{i2r}J_1\left(\frac{D\pi r}{\lambda z}\right)}$$

$$\boxed{U(\mathbf{r_t},z) = \frac{D}{i2r}e^{i\frac{kr^2}{2z}}e^{ikz}J_1\left(\frac{D\pi r}{\lambda z}\right)} \tag{3}$$

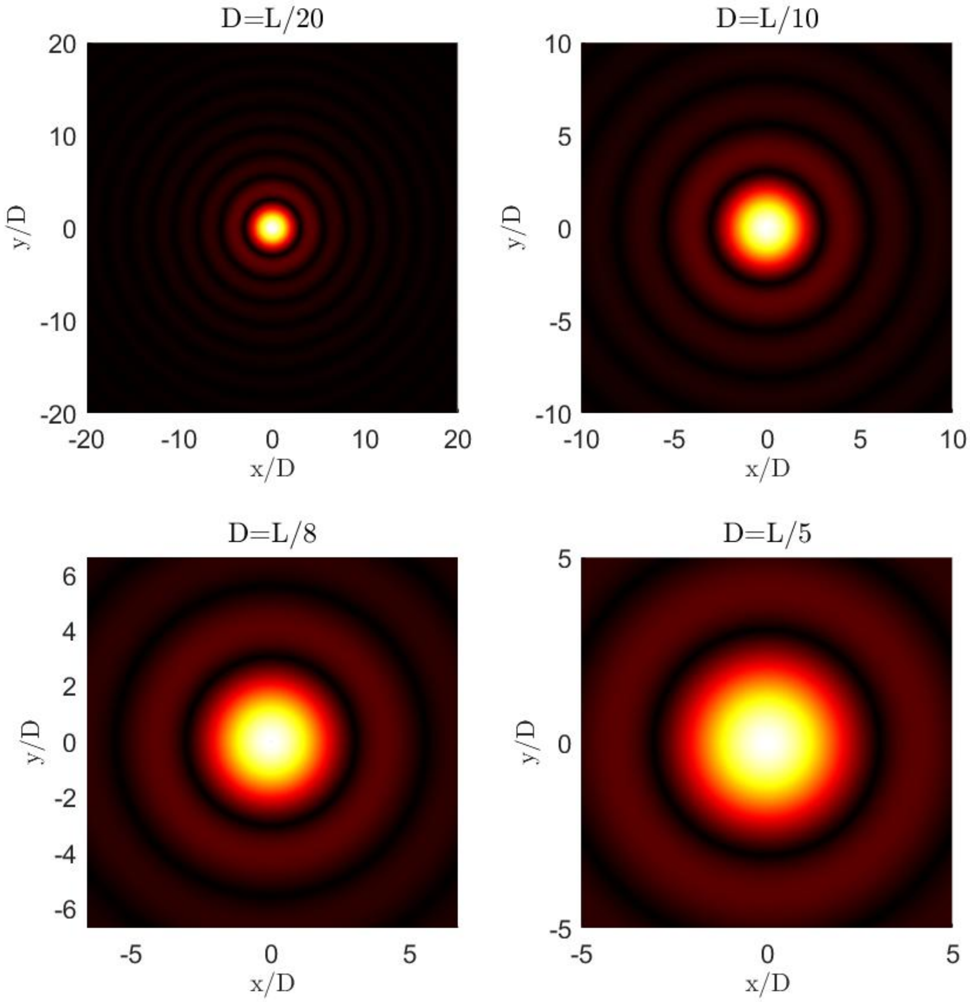


Figura 3: Patrón de intensidad transversal para distintos valores del diámetro

4. Lente delgada: Fourier

4.1. Una lente delgada tiene una función de transmitancia dada por:

$$t_1 = \exp\left[-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right]$$

Demuestra que la distribución del campo en el plano focal de la lente es proporcional a la transformada de Fourier bidimensional.

4: $t_e = e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)}$

a)

Integral de Fresnel: $U(\vec{r}_t, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty} U_0'(x_0,y_0,0)\, e^{i\frac{k}{2z}\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)}\, dx_0\, dy_0$

Al pasar por el lente $U'(x_0,y_0,0) = U(x_0,y_0)\, e^{-i\frac{k}{2f}(x_0^2+y_0^2)}$

En el plano focal $(z=f)$:

$$\therefore U(\vec{r}_t, f) = \frac{e^{ikf}}{i\lambda f}\iint_{-\infty}^{\infty} U(x_0,y_0)\, e^{-i\frac{k}{2f}(\cancel{x_0^2}+\cancel{y_0^2})}\, e^{i\frac{k}{2f}(x^2-2xx_0+\cancel{x_0^2}+y^2-2yy_0+\cancel{y_0^2})}\, dx_0$$

$$= \frac{e^{ikf}}{i\lambda f}\iint_{-\infty}^{\infty} U e^{i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)}\, e^{-i\frac{k}{f}(xx_0+yy_0)}\, dx_0 dy_0 = \underbrace{\frac{e^{ik\left(f+\frac{x^2+y^2}{f}\right)}}{i\lambda f}}_{g(x,y)} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x_0,y_0)\, e^{-i\frac{k}{f}(xx_0+yy_0)}$$

Recordando la definición de la transformada de Fourier:

$$\tilde{F}(k_x,k_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\iint_{-\infty}^{\infty} f\, e^{-i(k_x x_0+k_y y_0)}\, dx_0 dy_0 \,, \quad \text{reconocemos:}$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} U(x_0,y_0)\, e^{-i\left(\frac{k}{f}xx_0+\frac{k}{f}yy_0\right)}\, dx_0 dy_0 = \sqrt{2\pi}\,\tilde{f}\left(\frac{kx}{f},\frac{ky}{f}\right) = \sqrt{2\pi}\,\tilde{f}\left(\frac{k}{f}\vec{r}_t\right)$$

$$\therefore \boxed{U(\vec{r}_t, f) = \sqrt{2\pi}\, g(x,y)\,\tilde{f}\left(\frac{k}{f}\vec{r}_t\right) \propto \tilde{f}\left(\frac{k}{f}\vec{r}_t\right)}$$

4.2. Asume que el campo incidente en la lente está dado por un haz gaussiano. Calcula la distribución del campo en el plano focal de la lente.

b) Usando el resultado anterior: $U(\vec{r}_t, f) = \sqrt{2\pi}\,\dfrac{e^{ik\left(f+\frac{x^2+y^2}{f}\right)}}{i\lambda f}\,\tilde{f}\left(\frac{k}{f}\vec{r}_t\right)$

$$\tilde{f}\left(\frac{k}{f}\vec{r}_t\right) = \frac{U_0}{\sqrt{2\pi}}\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_0^2+y_0^2}{2w_0^2}}\, e^{-i\frac{k}{f}(xx_0+yy_0)}\,dx_0\,dy_0 = \frac{U_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_0^2}{2w_0^2}-i\frac{k}{f}xx_0}\,dx_0\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y_0^2}{2w_0^2}-i\frac{k}{f}yy_0}\,dy_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_0^2}{2w_0^2}-i\frac{k}{f}xx_0}\,dx_0 \qquad u=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x_0}{w_0},\quad du=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{dx_0}{w_0} \qquad = \sqrt{2}\,w_0\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-i\frac{\sqrt{2}kw_0}{f}xu}\,dx_0 = \sqrt{2}\,w_0\int e^{-\left(u+\frac{ikw_0x}{\sqrt{2}f}\right)^2-\frac{k^2w_0^2x^2}{2f^2}}\,du$$

$$= \sqrt{2}\,w_0\,e^{-\frac{k^2w_0^2x^2}{2f^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(u+\frac{ikw_0x}{\sqrt{2}f}\right)^2}du \qquad u+\frac{ikw_0x}{\sqrt{2}f}=s,\quad du=ds \qquad = \sqrt{2}\,w_0\,e^{-\frac{k^2w_0^2x^2}{2f^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}ds = \sqrt{2\pi}\,w_0\,e^{-\frac{k^2w_0^2x^2}{2f^2}}$$

$$\therefore\ \tilde{f}\left(\frac{k}{f}\vec{r}_t\right) = \sqrt{2\pi}\,w_0^2\,e^{-\frac{k^2w_0^2}{2f^2}(x^2+y^2)} \longrightarrow \boxed{U(\vec{r}_t,f) = 2\pi\,\frac{e^{ik\left(f+\frac{x^2+y^2}{f}\right)}}{i\lambda f}\,w_0^2\,e^{-\frac{k^2w_0^2}{2f^2}(x^2+y^2)}}$$

4.3. ¿Qué puedes decir de la distribución del campo en el plano focal cuando $w_0 \to \infty$?

$$U(\vec{r}_t,z) = 2\pi\,\frac{e^{ik\left(f+\frac{x^2+y^2}{f}\right)}}{i\lambda f}\left(w_0\,e^{-\frac{k^2w_0^2}{2f^2}x^2}\right)\left(w_0\,e^{-\frac{k^2w_0^2}{2f^2}y^2}\right) = \frac{4\pi^2 f}{i\lambda k^2}\,e^{ik\left(f+\frac{x^2+y^2}{f}\right)}\left(\frac{kw_0}{\sqrt{2\pi}f}\,e^{-\frac{k^2w_0^2}{2f^2}x^2}\right)\left(\frac{kw_0}{\sqrt{2\pi}f}\,e^{-\frac{k^2w_0^2}{2f^2}y^2}\right)$$

Consideramos la función $f(x) = \dfrac{kw_0}{\sqrt{2\pi}f}\,e^{-\frac{k^2w_0^2}{2f^2}x^2}$

El área bajo la curva $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kw_0}{\sqrt{2\pi}f}\,e^{-\frac{k^2w_0^2}{2f^2}x^2}dx \qquad u=\frac{kw_0}{\sqrt{2}f}x \qquad du=\frac{kw_0}{\sqrt{2}f}dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = \boxed{1}$$, independiente de w_0.

Además, $\displaystyle\lim_{w_0\to\infty}\left\{\frac{kw_0}{\sqrt{2\pi}f}\,e^{-\frac{k^2w_0^2}{2f^2}x^2}\right\} = \begin{cases}\infty, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$

Estas propiedades definen una función delta de Dirac.

$$\therefore\ \lim_{w_0\to\infty}\left\{\frac{kw_0}{\sqrt{2\pi}f}\,e^{-\frac{k^2w_0^2}{2f^2}x^2}dx\right\} = \delta(x)$$

$$\lim_{w_0\to\infty} U(\vec{r}_t,z) = \frac{4\pi^2 f}{i\lambda k^2}\,e^{ik\left(f+\frac{x^2+y^2}{f}\right)}\lim_{w_0\to\infty}\left\{\frac{kw_0}{\sqrt{2\pi}f}\,e^{-\frac{k^2w_0^2}{2f^2}x^2}\right\}\lim_{w_0\to\infty}\left\{\frac{kw_0}{\sqrt{2\pi}f}\,e^{-\frac{k^2w_0^2}{2f^2}y^2}\right\}$$

$$= \frac{4\pi^2 f}{i\lambda k^2}\,e^{ik\left(f+\frac{x^2+y^2}{f}\right)}\,\delta(x)\,\delta(y) = \boxed{\frac{4\pi^2 f}{i\lambda k^2}\,e^{ik\left(f+\frac{x^2+y^2}{f}\right)}\,\delta^2(\vec{r}_t)}$$

La distribución del campo en el plano focal tiende a una distribución delta de Dirac.

5. Rejilla de amplitud cuadrada: Fresnel

5.1. Considera la funcióon de transmitancia de una rejilla de amplitud cuadrada que está dada por:

$$t_A(x,y) = [\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos 2\pi f_0 x] rect(\frac{x}{D}) rect(\frac{y}{D})$$

Obtengan el patrón de difracción en la región de Fresnel para esta rejilla, y hagan gráficas en MATLAB del perfil de intensidad considerando los números de Fresnel del problema 1.

5: Integral de Fresnel: $U(\vec{r}_t, z) = \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(x_0, y_0) e^{i\frac{k_0}{2z}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} dx_0 dy_0$

$$= \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda z} e^{i\frac{k_0}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 x_0)\right] rect\left(\frac{x_0}{D}\right) rect\left(\frac{y_0}{D}\right) e^{i\frac{k_0}{2z}(x_0^2+y_0^2)} e^{-i\frac{k_0}{z}(xx_0 + yy_0)} dx_0 dy_0$$

$$= 2\pi\frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda z} e^{i\frac{k_0}{2z}(x^2+y^2)} \mathcal{F}\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 x_0)\right) rect\left(\frac{x_0}{D}\right) rect\left(\frac{y_0}{D}\right) e^{i\frac{k_0}{2z}(x_0^2+y_0^2)}\right\}\left(\frac{k_0 x}{z}, \frac{k_0 y}{z}\right)$$

$$= \underbrace{\mathcal{F}\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 x_0)\right)\right\}}_{1} * \underbrace{\mathcal{F}\left\{rect\left(\frac{x_0}{D}\right) rect\left(\frac{y_0}{D}\right) e^{i\frac{k_0}{2z}(x_0^2+y_0^2)}\right\}}_{2}$$

1 $\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 x_0)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{4}\left(e^{i2\pi f_0 x_0} + e^{-i2\pi f_0 x_0}\right)\right] e^{-i\left(\frac{k_0 x}{z}x_0 + \frac{k_0 y}{z} y_0\right)} dx_0 dy_0$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-i\frac{k_0 x}{z}x_0} + \frac{m}{4} e^{ix_0(2\pi f_0 - \frac{k_0}{z}x)} + \frac{m}{4} e^{-ix_0(2\pi f_0 + \frac{k_0}{z}x)} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{k_0}{z}yy_0} dy_0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{2}\delta\left(\frac{x}{\lambda z}\right) + \frac{m}{4}\delta\left(f_0 - \frac{x}{\lambda z}\right) + \frac{m}{4}\delta\left(f_0 + \frac{x}{\lambda z}\right)\right)\delta\left(\frac{y}{\lambda z}\right)$$

$$= \frac{(\lambda z)^2}{2\sqrt{2\pi}}\left[\delta(x) + \frac{m}{2}\delta(f_0\lambda z - x) + \frac{m}{2}\delta(f_0 \lambda z + x)\right]\delta(y) \Big\}$$ Usando $\delta\left(\frac{x}{a}\right) = a\delta(x)$

2 $\mathcal{F}\left\{rect\left(\frac{x_0}{D}\right) rect\left(\frac{y_0}{D}\right) e^{i\frac{k_0}{2z}(x_0^2+y_0^2)}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-D}^{D}\int_{-D}^{D} e^{i\frac{k_0}{2z}(x_0^2+y_0^2)} e^{-i\left(\frac{k_0 x}{z}x_0 + \frac{k_0 y}{z}y_0\right)} dx_0 dy_0$ $\quad \frac{2\pi}{z\lambda}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-D}^{D} e^{i\frac{2}{\lambda z}\left[\frac{\pi}{2}x_0^2 - \pi x_0 x\right]} dx_0 \int_{-D}^{D} e^{i\frac{2}{\lambda z}\left[\frac{\pi}{2}y_0^2 - \pi y_0 y\right]} dy_0 \qquad \int_{-D}^{D} e^{i\frac{2}{\lambda z}\left(\frac{\pi}{2}\right)(x_0 - 2x)x_0} dx_0$$

$$\int_{-D-y}^{D-y} f(x)dx = \int_{-D-y}^{0} f(x)dx + \int_{D-y}^{0} f(x)dx$$

$u = x_0 - x$, $du = dx_0$ $\qquad \int_{-D-x}^{D-x} e^{i\frac{2}{\lambda z}\left(\frac{\pi}{2}\right)(u-x)(u+x)} du = \int_{-D}^{D} e^{i\frac{2}{\lambda z}\left(\frac{\pi}{2}u^2 - \frac{\pi}{2}x^2\right)} du$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)} \int_{-D-x}^{D-x} e^{i\frac{2}{\lambda z}u^2\frac{\pi}{2}} du \int_{-D-y}^{D-y} e^{i\frac{2}{\lambda z}v^2\frac{\pi}{2}} dv = \frac{\lambda z}{2}\frac{e^{-i\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)}}{\sqrt{2\pi}}\left(F\left(\sqrt{\tfrac{2}{\lambda z}}(x-D)\right) - F\left(\sqrt{\tfrac{2}{\lambda z}}(x+D)\right)\right)\left(F\left(\sqrt{\tfrac{2}{\lambda z}}(y-D)\right) - F\left(\sqrt{\tfrac{2}{\lambda z}}(y+D)\right)\right)$$

$$= \underbrace{1 * 2}_{\text{Recorriendo en las deltas}} \propto \boxed{e^{ikz}\left[F\left(\sqrt{\tfrac{2}{\lambda z}}(x-D)\right) - F\left(\sqrt{\tfrac{2}{\lambda z}}(x+D)\right) + \frac{m}{2}F\left(\sqrt{\tfrac{2}{\lambda z}}(x-D-f_0\lambda z)\right) - \frac{m}{2}F\left(\sqrt{\tfrac{2}{\lambda z}}(x+D-f_0\lambda z)\right) + \frac{m}{2}F\left(\sqrt{\tfrac{2}{\lambda z}}(x-D+f_0\lambda z)\right) - \frac{m}{2}F\left(\sqrt{\tfrac{2}{\lambda z}}(x+D+f_0\lambda z)\right)\right] * \left[F\left(\sqrt{\tfrac{2}{\lambda z}}(y-D)\right) - F\left(\sqrt{\tfrac{2}{\lambda z}}(y+D)\right)\right]}$$

$$U(\mathbf{r_t}, z) \propto \left[F\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x-D)\right) - F\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x+D)\right) + \frac{m}{2}F\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x-D-f_o\lambda z)\right) - \frac{m}{2}F\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x+D-f_o\lambda z)\right) + \frac{m}{2}F\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x-D+f_o\lambda z)\right) - \frac{m}{2}F\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x+D+f_o\lambda z)\right)\right] \times \left[F\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(y-D)\right) - F\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(y+D)\right)\right] \quad (4)$$

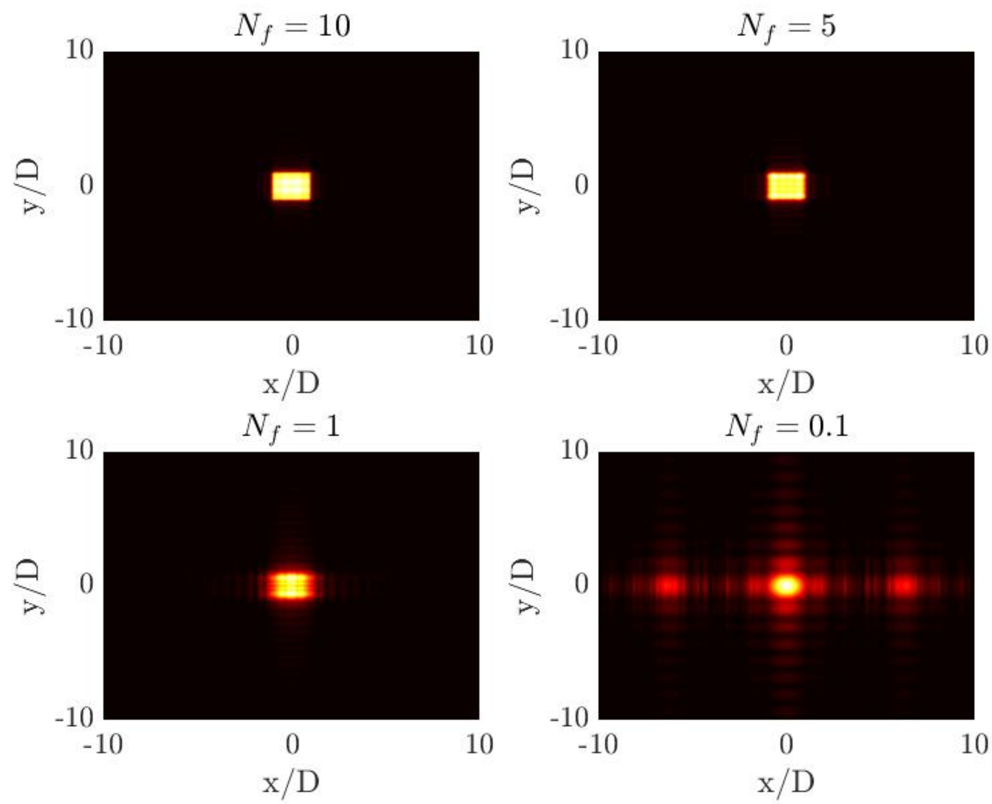


Figura 4: Gráficas de intensidad transversal generadas considerando $m = 0{,}8$, $(f_0 D) = 2{,}5$

5.2. Determinen la intensidad del patrón de difracción a una determinada distancia z que satisface la condición

$$z = \frac{2n}{\lambda f_0^2} \quad (5)$$

Donde n es un número entero. Las distancias que cumplen con esta condición dan origen a las imágenes de Talbot.

$$|U(\mathbf{r_t}, \frac{2n}{\lambda f_0^2})|^2 \propto \Bigg| \Bigg[F\Big(\frac{f_0}{\sqrt{n}}(x-D)\Big) - F\Big(\frac{f_0}{\sqrt{n}}(x+D)\Big) + \frac{m}{2}F\Big(\frac{f_0}{\sqrt{n}}(x-D-\frac{2n}{f_0})\Big) - \frac{m}{2}F\Big(\frac{f_0}{\sqrt{n}}(x+D-\frac{2n}{f_0})\Big) + \frac{m}{2}F\Big(\frac{f_0}{\sqrt{n}}(x-D+\frac{2n}{f_0})\Big) - \frac{m}{2}F\Big(\frac{f_0}{\sqrt{n}}(x+D+\frac{2n}{f_0})\Big) \Bigg] \times \Bigg[F\Big(\frac{f_0}{\sqrt{n}}(y-D)\Big) - F\Big(\frac{f_0}{\sqrt{n}}(y+D)\Big) \Bigg] \Bigg|^2 \quad (6)$$

6. Rejilla de apertura cuadrada: Fraunhofer

6.1. Calculen el patrón de difracción de Fraunhofer para una rejilla de fase limitada por una apertura cuadrada. La función de transmitancia de la rejilla está dada por

$$t(x,y) = \exp[-i\frac{m}{2}\sin 2\pi f_0 x] rect(\frac{x}{D}) rect(\frac{y}{D})$$

función de transmitancia de la rejilla

$$t_A(x,y) = \underbrace{\exp\left[i\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0 x)\right]}_{g(x,y)} \underbrace{rect\left(\frac{x}{D}\right) rect\left(\frac{y}{D}\right)}_{h(x,y)}$$

Integral de Fraunhofer

$$U(\vec{r}_t, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0 x)} rect\left(\frac{x}{D}\right) rect(y/D)\, e^{-i2\pi(x_0 f_x + y_0 f_y)} dx_0 dy_0$$

$$U(x,y,z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{i(x^2+y^2)k}{2z}} \mathcal{F}\{u_0(x_0,y_0)\}$$

$$\mathcal{F}\{u_0(x_0,y_0)\} = \mathcal{F}\{g(x_0,y_0)\} * \mathcal{F}\{h(x_0,y_0)\}$$

$$\mathcal{F}\left\{rect\left(\frac{x}{D}\right) rect(y/D)\right\} = D^2 \operatorname{sinc}(\pi D f_x) \operatorname{sinc}(\pi D f_y)$$

$$\mathcal{F}\{g\} = \frac{1}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0 x_0)} e^{-i2\pi(x_0 f_x + y_0 f_y)} dx_0 dy_0$$

$$= \frac{1}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right) e^{in(2\pi f_0 x_0) - i2\pi(x_0 f_x + y_0 f_y)} dx_0 dy_0 = \frac{1}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right) e^{i2\pi x_0(nf_0 - f_x)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f_y y_0} dy_0$$

$$= \frac{1}{i\lambda z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right) \delta(f_x - nf_0, f_y)$$

$$\mathcal{F}\{g\} * \mathcal{F}\{h\} = D^2 \operatorname{sinc}(\pi D f_x) \operatorname{sinc}(\pi D f_y) \frac{1}{i\lambda z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right) \delta(f_x - nf_0, f_y)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{D^2}{i\lambda z} \operatorname{sinc}[\pi D(f_x - nf_0)] \sin(\pi D f_y)\, J_n\left(\frac{m}{2}\right)$$

$$f_x = \frac{x}{\lambda z} \qquad f_y = \frac{y}{z\lambda}$$

$$\boxed{U(\vec{r},t) = e^{ikz} e^{\frac{i(x^2+y^2)k}{2z}} \frac{D^2}{i\lambda z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right) \operatorname{sinc}[\pi D(f_x - nf_0)] \sin(\pi D f_y)}$$

6.2. Hagan una gráfica del perfil de intensidad usando MATLAB, y comenten cómo está distribuida la energía del campo en los distintos órdenes de difracción.

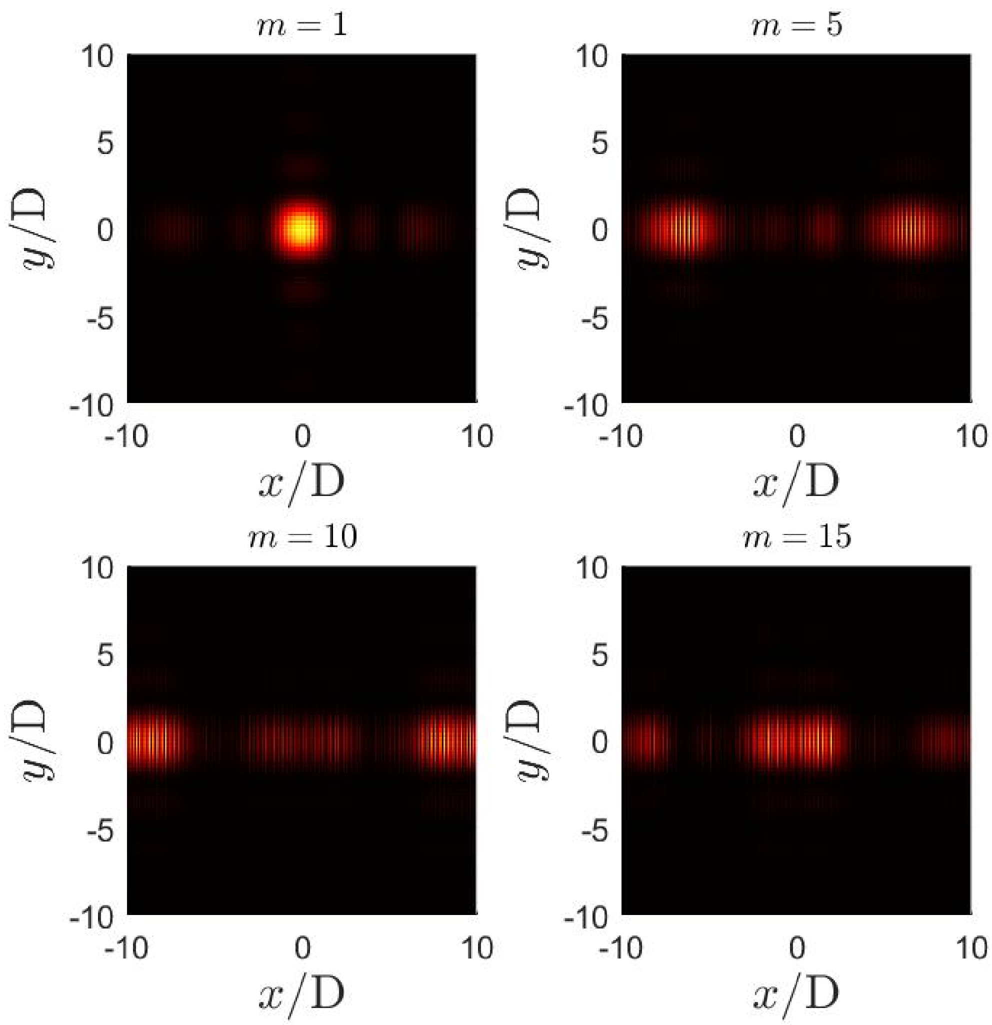
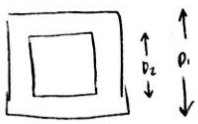


Figura 5: Perfil transversal de intensidad para diferentes valores de m

Como se aprecia en la figura, mientras incrementa m, la energía parece estar menos localizada en el centro de la imágen y más distribuida en las regiones laterales. Para el modo m = 1, la energía parece estar del todo localizada en el origen. Para el modo m = 20, parecería que la energía está distribuida de forma más equitativa entre las regiones laterales.

7. Fresnel y Fraunhofer

7.1. Calculen el patrón de difracción de Fraunhoffer para las siguientes dos aperturas. Apertura rectangular:



Integral de Fraunhoffer

$$U(\vec{r}_t, z) = e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2+y^2)} \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0, y_0, 0)\, e^{-i2\pi(x_0 f_x + y_0 f_y)}\, dx_0 dy$$

$$U(\vec{r}_t, z) \propto \Bigg(\underbrace{\int_{-D_1/2}^{D_1/2} e^{-i2\pi x_0 f_x} dx_0 \int_{-D_1/2}^{D_1/2} e^{-i2\pi y_0 f_y} dy_0}_{1} - \underbrace{\int_{-D_2/2}^{D_2/2} e^{-i2\pi x_0 f_x} dx_0 \int_{-D_2/2}^{D_2/2} e^{-i2\pi y_0 f_y} dy_0}_{2} \Bigg)$$

$$U_0 \begin{cases} 1 & D_1 > |x| > D_2 \\ 0 & D_2 > |x| \end{cases}$$

$$_0 = rect\left(\frac{x}{D_1}\right) rect\left(\frac{y}{D_1}\right) - rect\left(\frac{x}{D_2}\right) rect\left(\frac{y}{D_2}\right)$$

Basándonos en el ej 2

1. $D_1^2 \left[sinc(\pi D_1 f_x) sinc(\pi D_1 f_y) \right]$
2. $D_2^2 \left[sinc(\pi D_2 f_x) sinc(\pi D_2 f_y) \right]$

$f_x = \frac{x}{\lambda z}$

entonces

$$U(\vec{r}_t, z) = e^{\frac{ik_0}{2z}(x^2+y^2)} \frac{e^{ik_0 z}}{i\lambda z} \left[D_1^2 sinc(\pi D_1 f_x) sinc(\pi D_1 f_y) - D_2^2 sinc(\pi D_2 f_x) sinc(\pi D_2 f_y) \right]$$

El patrón de difracción de Fraunhoffer para una apertura circular de diámetro exterior D_1 e interior D_2 está dado por:

$$\boxed{U(\mathbf{r_t}, z) = \frac{1}{iz} e^{i\frac{kr^2}{2z}} e^{ikz} \left[D_1^2 sinc(\frac{\pi D_1 x}{z}) sinc(\frac{\pi D_1 y}{\lambda z}) - D_2^2 sinc(\frac{\pi D_2 x}{\lambda z}) sinc(\frac{\pi D_2 y}{\lambda z}) \right]} \tag{7}$$

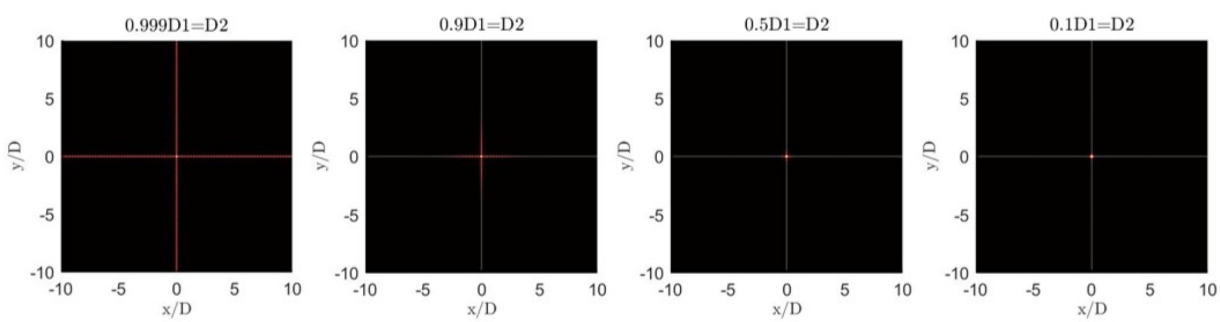


Figura 6: Gráficas de intensidad transversal para una apertura rectangular en la zona de Fresnel, $N_f = 1$

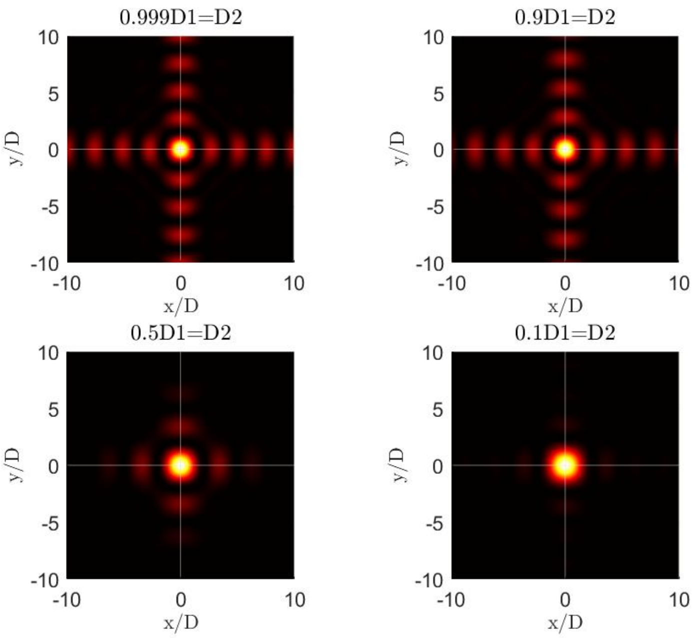
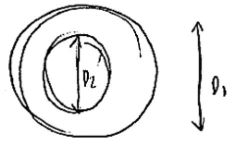


Figura 7: Gráficas de intensidad transversal para una apertura rectangular en la zona de Fraunhoffer, $N_f = 0{,}1$

7.2. Apertura circular

Similar al ej. 3



$$U_0 \begin{cases} 1 & D_2 < r < D_1 \\ 0 & r < D_2 \end{cases}$$

$$U(\vec{r}_t, z) = \alpha \int_{D_2/2}^{D_1/2} \int_0^{2\pi} e^{-i 2\pi r f_r \cos\theta'} \, r dr d\theta'$$

$$U_0 = \text{circ}\left(\frac{r_0}{D_1}\right) - \text{circ}\left(\frac{r_0}{D_2}\right)$$

$$\propto 2\pi \int_{D_2/2}^{D_1/2} J_0(-2\pi r f_r) \, r dr d\theta'$$

$$\text{circ}\left(\frac{r}{D}\right) = \begin{cases} 1 & |r| \leq D/2 \\ 0 & |r| > D \end{cases}$$

$$f_r = \frac{r}{\lambda z}$$

$$\rho = 2\pi r f_r$$
$$d\rho = 2\pi f_r dr$$

$$\propto \frac{2\pi}{(2\pi f_r)^2} \left[\int_0^{\pi f_r D_1} J_0(2\pi r f_r) - \int_0^{\pi f_r D_2} J_0(2\pi r f_r) \right] r d$$

$$\propto \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda z}{r}\right)^2 \left[\pi f_r D_1 \, J_1(\pi D_1 f_r) - \pi f_r D_2 \, J_1(\pi D_2 f_r) \right]$$

$$\propto \frac{\lambda z}{2r} \left[D_1 J_1\left(\frac{\pi D_1 r}{\lambda z}\right) - D_2 J_1\left(\frac{\pi D_2 r}{\lambda z}\right) \right]$$

$$U(\vec{r}_t, z) = e^{\frac{i k_0}{2z}(x^2+y^2)} e^{i k_0 z} \frac{1}{i 2 r} \left[D_1 J_1\left(\frac{\pi D_1 r}{\lambda z}\right) - D_2 J_1\left(\frac{\pi D_2 r}{\lambda z}\right) \right]$$

El patrón de difracción de Fraunhoffer para una apertura circular de diámetro exterior D_1 e interior D_2 está dado por:

$$\boxed{U(\mathbf{r_t}, z) = \frac{1}{i2r} e^{i\frac{kr^2}{2z}} e^{ikz} \left[D_1 J_1\left(\frac{D_1 \pi r}{\lambda z}\right) - D_2 J_1\left(\frac{D_2 \pi r}{\lambda z}\right)\right]} \tag{8}$$

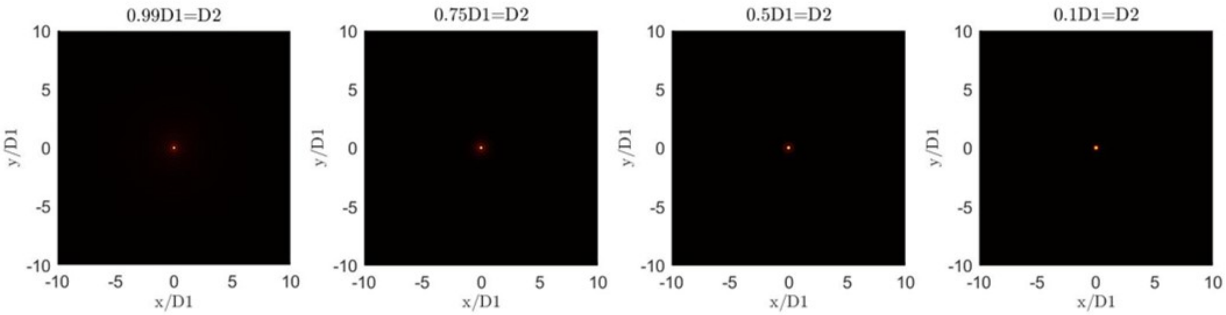


Figura 8: Gráficas de intensidad transversal para una apertura circular en la zona de Fresnel, $N_f = 1$

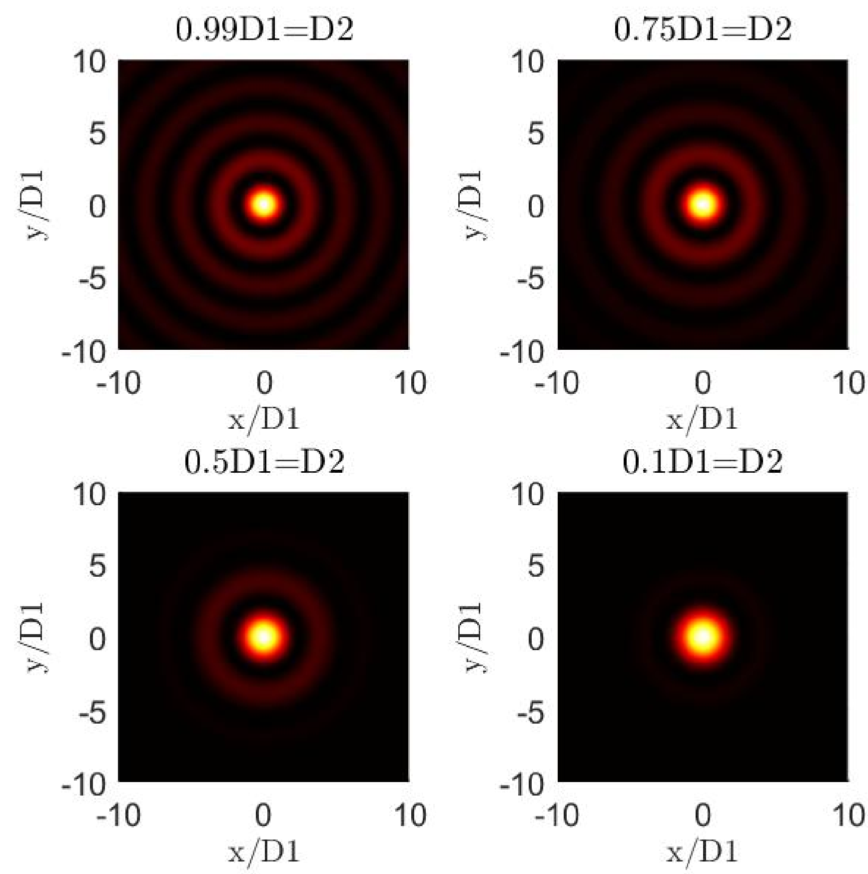


Figura 9: Gráficas de intensidad transversal para una apertura circular en la zona de Fraunhoffer, $N_f = 0{,}1$

8. Código de Matlab

8.1. Problema 1

```
N = 2^9;
x = linspace(-30,30,N+1);
y = linspace(-30,30,N+1);
Nf = 5; %Cambiar
[X,Y] = meshgrid(x,-y);
setlatex();

U1 = fresnelc(2*sqrt(2*Nf)*(x-1)) - fresnelc(2*sqrt(2*Nf)*(x+1)) + 1i*(fresnels(2*sqrt(2*Nf)*(X-1)) - fresnels(2*sqrt(2*Nf)*(X+1)));
U = (1/(2*1i))*(U1'*U1);

subplot(2,2,2); %Cambiar
surf(X,Y,abs(U));
view(2), colormap(hot), shading interp;
title('$N_f = 5$'); %Cambiar

xlabel('x/D'), ylabel('y/D');
xlim([-10,10]),ylim([-10,10]);
```

8.2. Problema 2

```
% Propagador de Fourier
clear all; close all;
set(0,'defaultTextInterpreter','latex');

N = 2^9;                    % Numero de puntos, escogemos una potencia de 2
                            % para que el calculo de la transformada sea m s
                            % r pido

% Creamos el vector de indices
NV = (-N/2:1:N/2-1);        % Con esto nos aseguramos de tener la frecuencia 0
                            % y de que NV tiene N elementos
L = 1e-3;                   % Las unidades son metros
dx = 2*L/N;
kmax = pi/dx;
[X,Y] = meshgrid(NV*dx);
%r = sqrt(X.^2+Y.^2);
[Kx,Ky] = meshgrid(kmax*2/N*NV);

lambda = 633e-9;
k = 2*pi/lambda;
kt = sqrt(Kx.^2+Ky.^2);


Nf = 0.05;

```

```
D = L/10;
z = D.^2/(4*lambda*Nf);       %Distancia de propagaci n maxima
nz = 300;
dz = z/nz;

%***************************** Propagador ******************************
Prop = (exp(-1i*0.5*dz*(kt.^2)/k));       %Full paraxial propagator
%Prop = exp(i*dz*sqrt(k^2-kt.^2));        %Non paraxial propagator

%************************ Perfil Inicial *******************************
Tlens = 1;         %Funci n de transmitacia

U0=zeros(N);
U0(floor(N/2-N*D/(2*L)):floor(N/2+N*D/(2*L)),floor(N/2-N*D/(2*L)):floor(N/2+N*D/(2*L)))=1;
U0 = U0.*Tlens;
Ur(:,1) = U0(:,N/2+1);

%****************** Inicia la propagacion ******************************
F = fftshift(fft2(U0));
for ii=1:nz
    F = F.*Prop;
    A = ifft2(F);
    Ur(:,ii+1)=A(:,N/2+1);
end

%******************  Grafica del campo inicial ************************
figure(1),surf(X(N/2+1,:)/D,Y(:,N/2+1)/D,abs(A));shading interp, lighting phong, colormap hot, view(2)
ejes = gca;
ejes.FontSize = 13;
title('Perfil␣transversal:␣Fraunhofer')
xlabel('$x$/D','FontSize',20);
ylabel('$y$/D','FontSize',20);
axis square;
```

8.3. Problema 3

```
% Propagador de Fourier
clear all; close all;
set(0,'defaultTextInterpreter','latex');

N = 2^10;                  % Numero de puntos, escogemos una potencia de 2
                           % para que el calculo de la transformada sea m s
                           % r pido

```

```
% Creamos el vector de indices
NV = (-N/2:1:N/2-1);      % Con esto nos aseguramos de tener la frecuencia 0
                          % y de que NV tiene N elementos
L = 1e-3;                 % Las unidades son metros
dx = 2*L/N;
kmax = pi/dx;
[X,Y] = meshgrid(NV*dx);
r = sqrt(X.^2+Y.^2);
lambda = 633e-9;
k = 2*pi/lambda;

for n=1:4
    a=20;
    if n==1
    a = 20;
    elseif n==2
        a = 10;
    elseif n==3
        a = 8;
    elseif n==4
        a = 5;
    end

Nf = 0.1;
D = L/a;
z = (L/a).^2/(4*lambda*Nf);       %Distancia de propagaci n maxima

A=-1i*D./(2*r).*besselj(1,D*pi*r./(lambda.*z)).*exp(1i*k*r.^2./(2*z)).*exp(1i*k*z);
%****************** Grafica del campo inicial ************************
figure(1),subplot(2,2,n),surf(X(N/2+1,:)*a/L,Y(:,N/2+1)*a/L,abs(A)); shading interp,lighting phong, colormap hot, view(2)
ejes = gca;
ejes.FontSize = 13;
title('D=L/'+string(a))
xlabel('x/D','FontSize',13);
ylabel('y/D','FontSize',13);
axis square;
end
```

8.4. Problema 5

```
N = 2^7;
x = linspace(-10,10,N+1);
y = linspace(-10,10,N+1);
Nf = 5; %Cambiar
l = 10;
z = 1/(4*l*Nf);
p = 2.5; %f0D >> 1/2
m = 0.8; %0 < m < 1
```

```
[X,Y] = meshgrid(x,-y);
setlatex();
F = @(x)fresnelc(x) + 1i*fresnels(x);

U = (F(2*sqrt(2*Nf)*(X - 1)) - F(2*sqrt(2*Nf)*(X + 1)) + (m/2)...
    .*(F(2*sqrt(2*Nf)*(X - 1 - p/(4*Nf))) - F(2*sqrt(2*Nf)*(X + 1 - p/(4*Nf))) +...
    F(2*sqrt(2*Nf)*(X - 1 + p/(4*Nf))) - F(2*sqrt(2*Nf)*(X + 1 + p/(4*Nf)))))...
    .*(F(2*sqrt(2*Nf)*(Y - 1)) - F(2*sqrt(2*Nf)*(Y + 1)));

subplot(2,2,2); %Cambiar
surf(X,Y,abs(U));
view(2), colormap(hot), shading interp;
title('$N_f␣=␣5$'); %Cambiar

xlabel('x/D'), ylabel('y/D');
xlim([-10,10]),ylim([-10,10]);
```

8.5. Problema 6

```
% Propagador de Fourier
clear all; close all;
set(0,'defaultTextInterpreter','latex');

N = 2^9;                  % Numero de puntos, escogemos una potencia de 2
                          % para que el calculo de la transformada sea m s
                          % r pido

% Creamos el vector de indices
NV = (-N/2:1:N/2-1);      % Con esto nos aseguramos de tener la frecuencia 0
                          % y de que NV tiene N elementos
L = 1e-3;                 % Las unidades son metros
dx = 2*L/N;
kmax = pi/dx;
[X,Y] = meshgrid(NV*dx);
%r = sqrt(X.^2+Y.^2);
[Kx,Ky] = meshgrid(kmax*2/N*NV);

lambda = 633e-9;
k = 2*pi/lambda;
kt = sqrt(Kx.^2+Ky.^2);

Nf = 0.05;
D = L/10;
z = D.^2/(4*lambda*Nf);       %Distancia de propagaci n maxima
nz = 300;
dz = z/nz;

%****************************** Propagador ******************************
```

```
Prop = (exp(-1i*0.5*dz*(kt.^2)/k));       %Full paraxial propagator
%Prop = exp(i*dz*sqrt(k^2-kt.^2));        %Non paraxial propagator

%************************ Perfil Inicial ******************************
for n=1:4
m=1;
if n==1
    m = 1;
elseif n==2
    m = 5;
elseif n==3
    m = 10;
elseif n==4
    m = 15;
end


Ui=zeros(N);
Ui(floor(N/2-N*D/(2*L)):floor(N/2+N*D/(2*L)),floor(N/2-N*D/(2*L)):floor(N/2+N*D/(2*L)))=1;
f0=51;
Tlens = exp(1i*m/2*sin(2*pi*f0*NV/N));        %Funci n de transmitacia

U0 = Ui.*Tlens;
Ur(:,1) = U0(:,N/2+1);

%****************** Inicia la propagacion ******************************
F = fftshift(fft2(U0));
for ii=1:nz
    F = F.*Prop;
    A = ifft2(F);
    Ur(:,ii+1)=A(:,N/2+1);
end
I = A.*conj(A);
%******************  Grafica del campo inicial ************************
figure(1),subplot(2,2,n),surf(X(N/2+1,:)/D,Y(:,N/2+1)/D,abs(I));shading interp,lighting phong,colormap hot, view(2)
ejes = gca;
ejes.FontSize = 13;

if n==1
    title('$m␣=1$')
elseif n==2
    title('$m␣=␣5$')
elseif n==3
    title('$m␣=␣10$')
elseif n==4
    title('$m␣=␣15$')
end
xlabel('$x$/D','FontSize',20);
ylabel('$y$/D','FontSize',20);
```

```
axis square;

end
```

8.6. Problema 7

```
% Propagador de Fourier
clear all; close all;
set(0,'defaultTextInterpreter','latex');

N = 2^10;                  % Numero de puntos, escogemos una potencia de 2
                          % para que el calculo de la transformada sea m s
                          % r pido

% Creamos el vector de indices
NV = (-N/2:1:N/2-1);       % Con esto nos aseguramos de tener la frecuencia 0
                           % y de que NV tiene N elementos
L = 1e-3;                  % Las unidades son metros
dx = 2*L/N;
kmax = pi/dx;
[X,Y] = meshgrid(NV*dx);
r = sqrt(X.^2+Y.^2);
lambda = 633e-9;
k = 2*pi/lambda;


for n=1:4
    if n==1
    a = 0.001;
    elseif n==2
        a = 0.1;
    elseif n==3
        a = 0.5;
    elseif n==4
        a = 0.9;
    end

D1 = L/10;
D2 = L/10.*(1-a);

Nf = 1;
z = D1.^2/(4*lambda*Nf);        %Distancia de propagaci n maxima

A=-1i./(lambda*z).*exp(1i*k*r.^2./(2*z)).*exp(1i*k*z)...
    .*(D1^2.*sin(pi*D1.*X./(lambda*z))./(pi*D1.*X./(lambda*z)).*sin(pi*D1.*Y/(lambda*z))./(pi*D1.*Y/(lambda*z))-...
    D2^2.*sin(pi*D2.*X/(lambda*z))./(pi*D2.*X/(lambda*z)).*sin(pi*D2.*Y/(lambda*z))./(pi*D2.*Y/(lambda*z)));
%*****************  Grafica del campo inicial ***********************
```

```
figure(1),subplot(2,2,n),surf(X(N/2+1,:)/D1,Y(:,N/2+1)/D1,abs(A)); shading interp,lighting phong, colormap hot, view(2)
ejes = gca;
ejes.FontSize = 13;
title('D1-D2='+string(a))
xlabel('x/D','FontSize',13);
ylabel('y/D','FontSize',13);
axis square;
end
```

```
% Propagador de Fourier
clear all; close all;
set(0,'defaultTextInterpreter','latex');

N = 2^10;                  % Numero de puntos, escogemos una potencia de 2
                           % para que el calculo de la transformada sea m s
                           % r pido

% Creamos el vector de indices
NV = (-N/2:1:N/2-1);       % Con esto nos aseguramos de tener la frecuencia 0
                           % y de que NV tiene N elementos
L = 1e-3;                  % Las unidades son metros
dx = 2*L/N;
kmax = pi/dx;
[X,Y] = meshgrid(NV*dx);
r = sqrt(X.^2+Y.^2);
lambda = 633e-9;
k = 2*pi/lambda;

for n=1:4
    a=20;
    if n==1
    a = 0.001;
    elseif n==2
        a = 0.1;
    elseif n==3
        a = 0.5;
    elseif n==4
        a = 1;
    end


D1 = L/10;
D2 = L/10.*(1-a);

Nf = 0.1;
z = D1.^2/(4*lambda*Nf);        %Distancia de propagaci n maxima

A=-1i./(2*r).*exp(1i*k*r.^2./(2*z)).*exp(1i*k*z).*(D1*besselj(1,D1*pi*r./(lambda.*z))-D2*besselj(1,D2*pi*r./(lambda.*z)));
%****************** Grafica del campo inicial
```

```
*************************
figure(1),subplot(2,2,n),surf(X(N/2+1,:)/D1,Y(:,N/2+1)/D1,abs(A.*A'));shading interp,lighting phong, colormap hot, view(2)
ejes = gca;
ejes.FontSize = 13;
title('D1-D2='+string(a))
xlabel('x/D1','FontSize',13);
ylabel('y/D1','FontSize',13);
axis square;
end
```