Proyecto Final: Parte 1

Mecánica Estadística

Agosto-Diciembre 2020

Carla Judith López Zurita

Nov 15, 2020

1. **Distribuciones de dinero: repaso de la simulación dinámica realizada en la Tarea 2**

   Volver a realizar la simulación de la Tarea 2, considerando algunas de las observaciones hechas en la retroalimentación de la tarea, así como algunas adiciones. Obtener la distribución de equilibrio de un sistema de N agentes interactuantes con la restricción de la constancia del dinero total, es decir $\sum_{i=1}^{N} m_i = M =$constante. Escoger un valor conveniente de M, por ejemplo $M = 100$.

   Los valores que se utilizarán a lo largo de la simulación son los siguientes:

   a) Constancia del dinero: $M = 100$

   b) Número de agentes interactuantes: $N = 40$

   A continuación se describen las instrucciones que componen el proyecto, seguido de comentarios relevantes a cada inciso.

   I. *Definir un número conveniente C de clases de dinero M_k. Se recomienda usar valores equidistantes. Escoger un valor máximo conveniente. Notas: Es importante usar las mismas clases a lo largo de la simulación. Revisar si el valor de la clase máxima influye en los resultados.*

   Se escogieron $C = 40$ clases de dinero, con límites de 0 a 5, y el espaciado entre ellas es de $\Delta M = 0{,}125$. La razón detrás de esta decisión es poder mantener las mismas clases y cumplir con los requisitos para las distribuciones delta y uniforme, que se presentan enseguida.

   II. *Considerar las siguientes dos distribuciones iniciales y presentar la evolución del sistema para ambos casos:*

   - *Distribución delta $f(m_l) \propto \delta(m_l - M/N)$ decir, todos los agentes tienen la misma cantidad de dinero inicial, es decir $m_l = M/N, \forall l$*
   - *Distribución uniforme, es decir $f(m_l) =$ constante para todas las clases. Nótese que la distribución dependerá del valor de la máxima clase m_{max} que se haya escogido.*

   La primera distribución es la misma que se realizó en la Tarea 2. Con los valores escogidos, cada agente tendrá el mismo valor inicial de $m_l = 100/40 = 2{,}5$. Para la segunda distribución, se escogieron los valores de tal manera que cada clase está compuesta de un solo integrante y se conserva la constancia del dinero. Cada agente empieza con un valor inicial distinto, de 0 a 5, con una diferencia de $\Delta M = 0{,}125$ entre un agente y el siguiente, si se ordenaran de menor a mayor.

III. *Hacer un lazo sobre los índices k que enumeran los agentes. Para cada agente k seleccionar un agente l al azar. Modificar los dineros de los agentes k y l de la siguiente manera*:
   - $m'_k = m_k + \Delta ms$
   - $m'_l = m_l + \Delta ms$

   A menos que $m'_l < 0$, en cuyo caso se mantiene el dinero del agente l. Suponer Δm = constante > 0 es una variable aleatoria que toma los valores ± 1 con igual probabilidad.

   El programa necesario ya había sido implementado, sin embargo, se encontró un error cuando m_l y m_k resultaban ser iguales lo cual resultaba en un fallo en la constancia del dinero. Esto se arregló con una condición IF que omitiera el caso al presentarse.

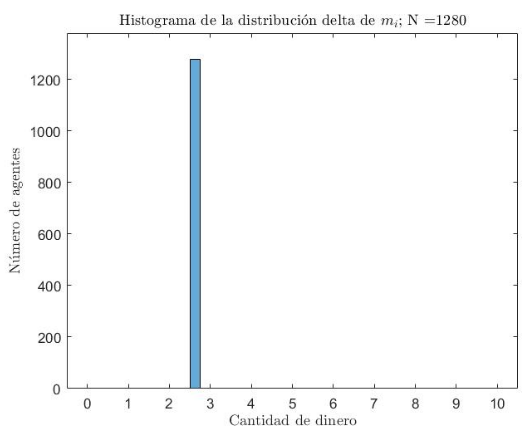
   - *Evaluar si la cantidad Δm influye en los resultados (por ejemplo, la forma de la distribución después de un tiempo fijo, o la evolución de la entropía S, ver abajo)*

   Se usarán las siguientes cantidades de intercambio de dinero Δm,

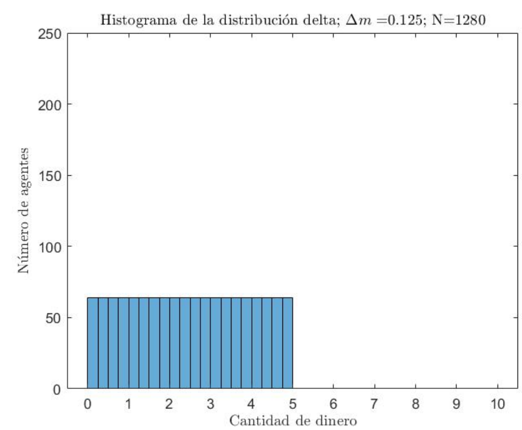
n	Δm
1	0.125
2	0.25
3	0.5
4	1.0

   Para valores más chicos de Δm, el tiempo de convergencia es mayor, pero tiene la ventaja de producir una evolución más precisa. Es relevante considerar qué valores de Δm son más convenientes, ya que un valor muy chico no produce una comportamiento general a menos que tenga un gran número de iteraciones, sino que se crea una distribución que asimila una gaussiana localizada alrededor del valor inicial. Por otra parte, un valor el doble del ancho de clase resulta en que nunca entren los agentes en ciertas clases. Esto podría ser considerado un desperdicio si no fuera porque nos permite observar más eficientemente la evolución de la distribución en el tiempo. Al tener una mayor diferencia de monto de intercambio entre agentes, se observa en las animaciones que los agentes distribuyen a lo largo del eje x más homogéneamente. La restricción del límite inferior causa que se pierda el efecto gaussiano y que se distribuyan en vez en la distribución más probable al encontrarse con el límite.

IV. *Para cada determinante tiempo de simulación generar un histograma de la distribución resultante. Usar las escalas lineal y semilogarítmica. Correr la simulación hasta obtener convergencia. Hacer una animación.*
Las animaciones de la evolución de los histogramas en el tiempo se inlcuyen ordenadas en carpetas de drive, en Histograma. Se adjuntaron los dos modelos requeridos, cada uno con los incrementos de dinero especificados en 1c. Para el caso de la distribución constante, las animaciones permiten ver que no hay un cambio muy significativo, es decir, ya se encuentran muy cerca de converger a su distribución final. Apoyados de las gráficas de la entropía que se incluirán y discutirán a continuación, se analizarán más a detalle los procesos involucrados. Los histogramas en escala semilogarítmica sirven para poder visualizar los grandes valores de la recurrencia de clase. Dado que las animaciones hechas con los parámetros bajos de número de agente y constancia del dinero no demuestran de manera efectiva el comportamiento del sistema o una convergencia especial, se añaden imágenes de escenarios más ilustrativos con $N = 1280$, $M = 3200$ y $t = 10^6$ en las Figuras 1, 2, 3, 4 y 5, para dos valores de $\Delta m = 0{,}125$ y $0{,}5$. Se puede ver que la distribución resultante es una exponencial, por lo que al evaluarla en escala semiloagrítmica parece una línea recta.



(a) Captura inicial de la distribución delta en escala lineal.

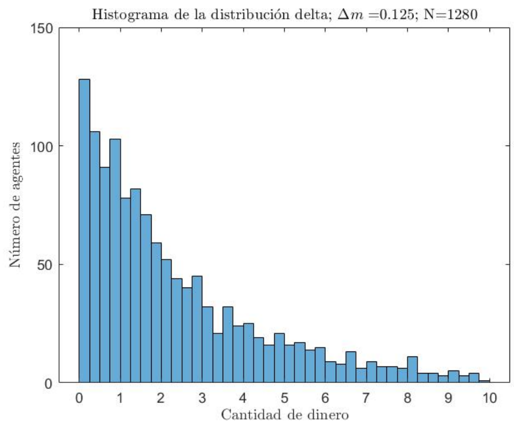


(b) Captura inicial de la distribución uniforme en escala lineal.

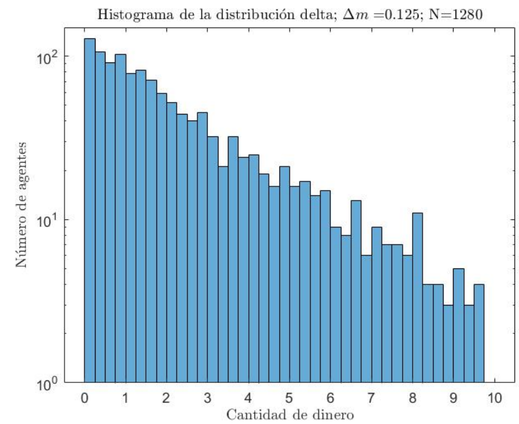
Figura 1: Distribución inicial

V. *En cada determinante tiempo de la simulación (ver inciso III) calcula la cantidad $S = N \ln N - \sum_{k=1}^{C} n_k \ln n_k$ donde n_k es el número de agentes en la clase k. Graficar S en función del tiempo.*
- *Combinar las curvas $S(t)$ para diferentes casos (diferentes distribuciones iniciales, diferentes cantidades Δm) en una misma gráfica y discutir las diferencias (si las hay).*

VI. *Discutir lo observado.* Podemos ver que a medida que la Δm va disminuyendo,

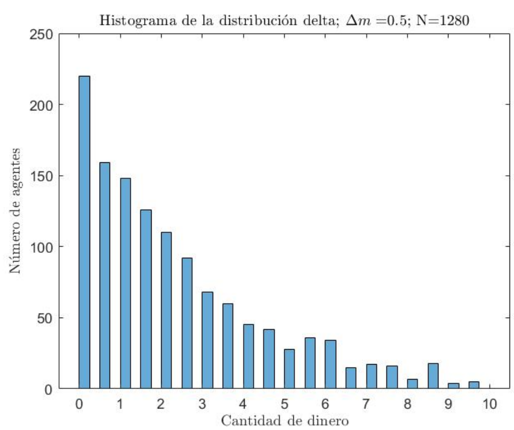


(a) Captura final de la distribución en escala lineal.

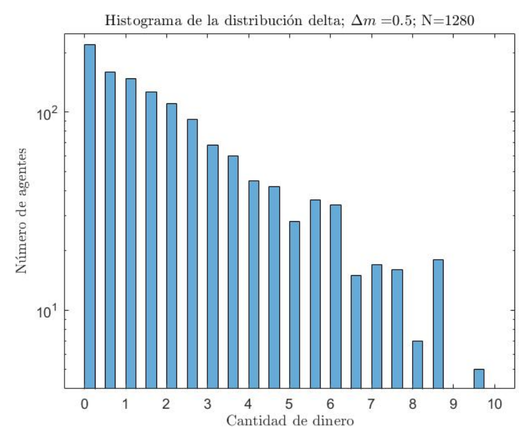


(b) Captura final de la distribución en escala semilogarítmica.

Figura 2: Distribución final delta con $\Delta m = 0{,}125$



(a) Captura final de la distribución en escala lineal.

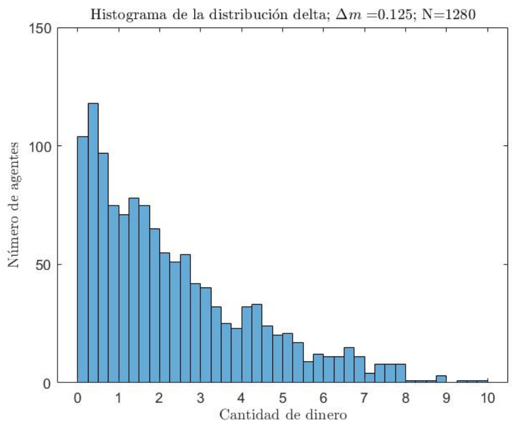


(b) Captura final de la distribución en escala semilogarítmica.

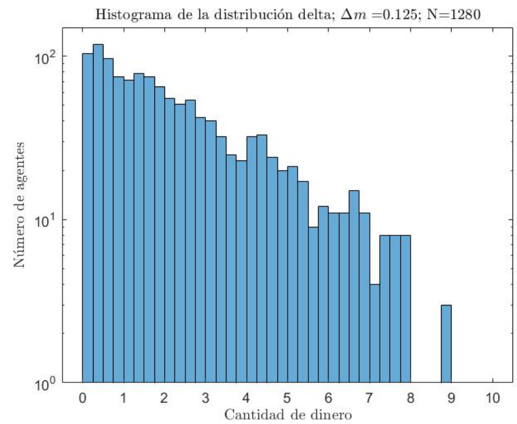
Figura 3: Distribución final delta con $\Delta m = 0{,}5$

el límite superior de la entropía aumenta y requiere de más iteraciones para estabilizarse, como podemos ver en la figura 6. Por otra parte, podemos ver también que, cuando partimos de una distribución uniforme, empezamos desde un valor inicial igual para todos, en este caso resulta en 150. El sistema disminuye su entropía a medida que progresa su valor de la entropía, lo cual indica que tiende hacia cierta distribución. Contrario al caso anterior, a mayor Δm, tiende más pronunciadamente hacia valores menores.

2. **Evaluando el beneficio colectivo: la función objetivo** *Ampliar la simulación anterior evaluando también la función objetivo* $O_i(n_1, n_2, \ldots, n_c) = \sum n_k o_i(M_k)$, *donde* M_k *es la cantidad de dinero que poseen los miembros de la clase* k *y* $o_1(M)$ *es la función objetivo elemental, midiendo el bienestar de un individuo con la cantidad*

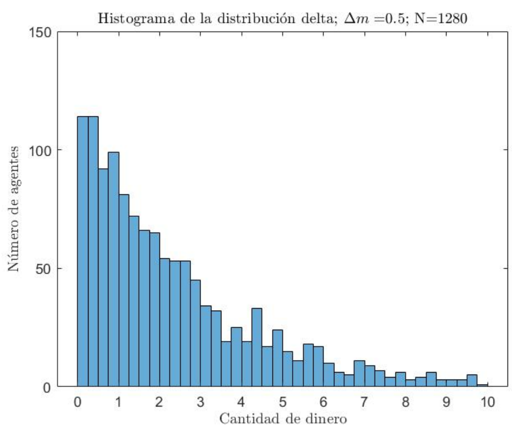


(a) Captura final de la distribución en escala lineal.

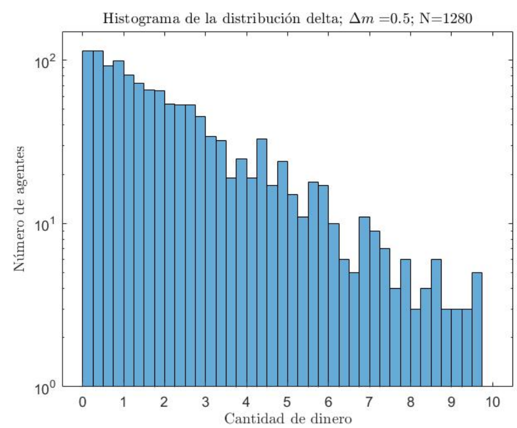


(b) Captura final de la distribución en escala semilogarítmica.

Figura 4: Distribución uniforme final de $\Delta m = 0{,}125$



(a) Captura final de la distribución en escala lineal.



(b) Captura final de la distribución en escala semilogarítmica.

Figura 5: Distribución uniforme final de $\Delta m = 0{,}5$

de dinero M.

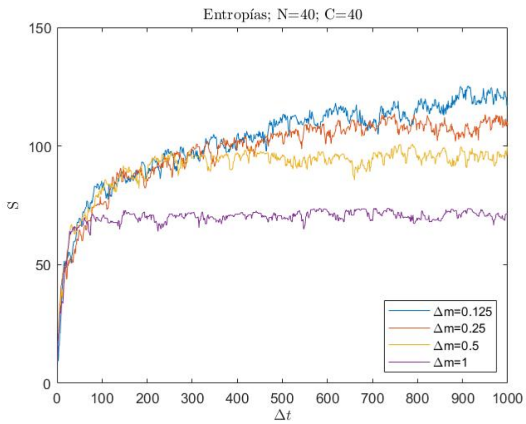
Evaluar la evolución en el tiempo *de* $O_i(n_1, n_2, \ldots, n_c)$ *para las simulaciones del inciso* (1.)*, considerando las siguientes funciones objetivo elementales*

a) $o_1(M) = aM$, con cierta constante $a > 0$

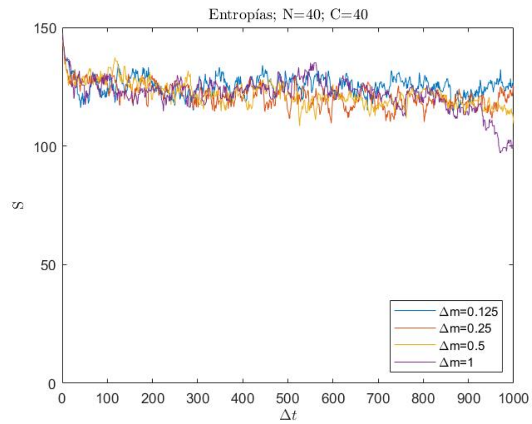
b) $o_2(M) = 1 - exp(-aM)$

Y discutir los resultados. Usaremos $a = 0{,}1$ para todos los casos.

Se graficaron las curvas de bienestar para ambos modelos de funciones objetivo elementales. Las gráficas, 7 muestran el desarrollo a partir de la distribución delta. Se puede observar un rápido decaimiento del valor inicial. Las diferencias principales es el valor inicial y el factor de atenuameinto. La primera función es simplemente una correlación lineal entre la cantidad de dinero de los agentes en una clase y el

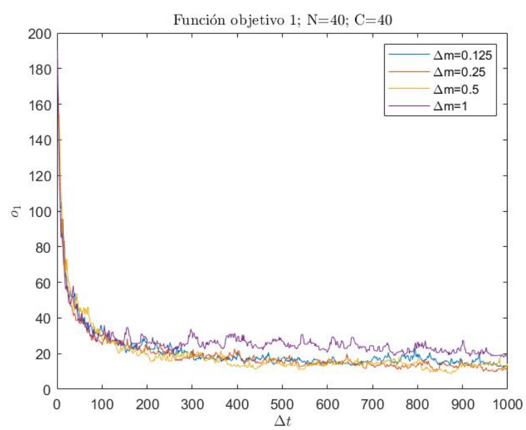


(a) Distribución delta

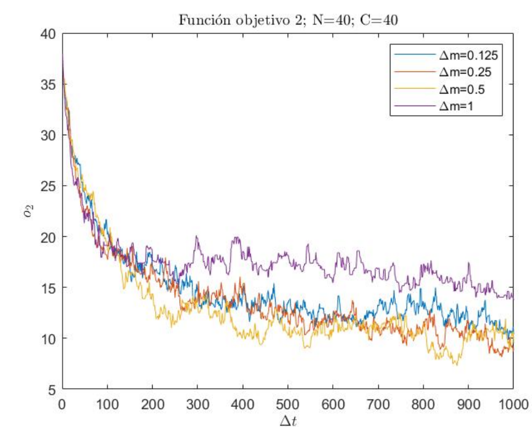


(b) Distribución uniforme

Figura 6: Curvas de entropía S(t) para los casos Δm



(a) Función objetivo $O_1(n_1, n_2, \ldots, n_c)$



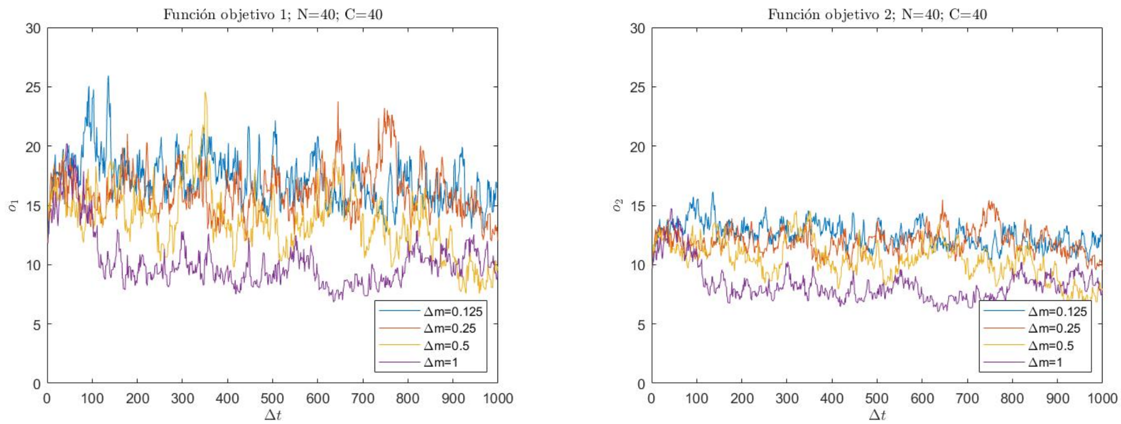
(b) Función objetivo $O_2(n_1, n_2, \ldots, n_c)$

Figura 7: Funciones objetivo para los casos Δm de la distribución delta.

número de agentes que conforma la clase. La segunda función toma en consideración un ajuste expenonecial. Las distintas Δm provocan distintos nveles de ruido; un mayor valor crea una mayor variación.

Las siguientes dos gráficas, figuras 8, demuestran el comportamiento de las curvas de bienestar para la distribución constante. Se observa que no hay mucha variación a medida que avanzan en el tiempo. Las distintos valores de Δm una vez más únicamente añaden variaciones y distintos niveles de ruido, más no afectan el comportamiento general de la curva. Al recordar que partimos de una distribución en la cual hay un agente por clase de dinero, es decir, un nivel más acercado a la convergencia o distribución final que la distribución delta, tiene sentido que el nivel de bienestar ya no varíe tanto. Esto se puede observar más individual y específicamente en los histogramas generados.

En la última gráfica añadida, la fig. 9, se muestran las curvas más representativas de



(a) Función objetivo $O_1(n_1, n_2, \ldots, n_c)$ (b) Función objetivo $O_2(n_1, n_2, \ldots, n_c)$

Figura 8: Funciones objetivo para los casos Δm de la distribución uniforme.

los cuatro escenarios mostrados. Esta visualizacion permite comparar efectivamente la forma de cada modelo, junto con sus magnitudes.

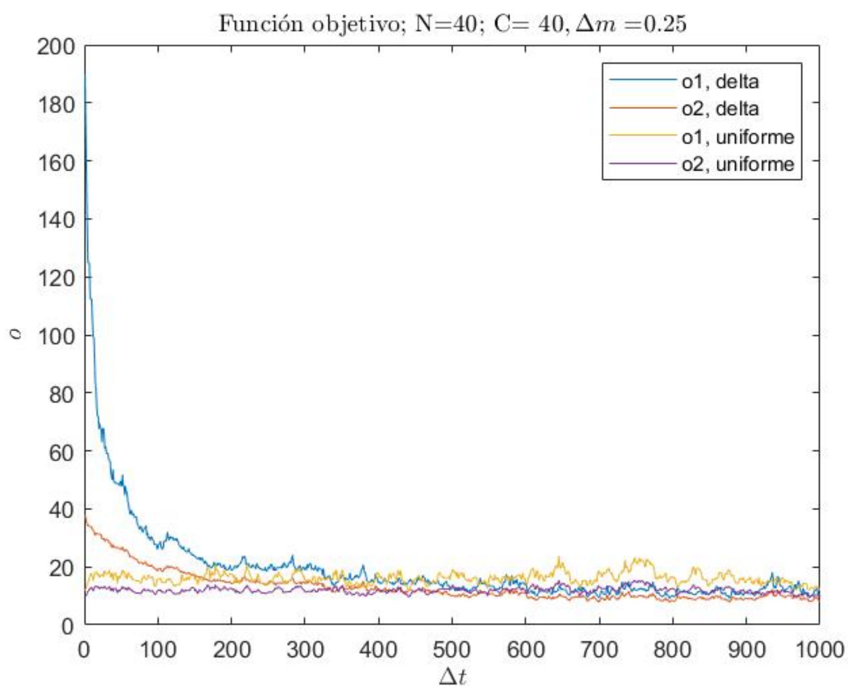


Figura 9: Curvas de las funciones objetivo $O_1(n_1, n_2, \ldots, n_c)$ y $O_2(n_1, n_2, \ldots, n_c)$ para ambas distribuciones uniforme y constante.

1. Códigos de Matlab

```
%% Distribucion termica del dinero en una sociedad

% Condiciones iniciales
N = 40; %agentes interactuantes
M = 100; %constancia del dinero
C = 40; %clases del dinero
deltam= [0.125,0.25,0.5,1]; %incrementos
t = 1000; %trials = tiempo

% Guardar espacio
S = zeros(length(deltam),t);
o11 = S; o12 = S; alpha = 0.1;
edges = linspace(0,5,C+1);

%% Iniciar simulacion
for p= 1:4 %n emro de deltam

ml = ones(1,N)*M/N; %distribucion delta
%ml = edges; %distribucion constante
k = round(rand(2,t)*(N-1))+1; %index
s = randi([0 1],1,t); %+1 -1 probabilidad
s(~s)=-1;

for n = 1:t % counter
    a = ml(k(1,n)) + deltam(p).*s(1,n);
    b = ml(k(2,n)) - deltam(p).*s(1,n);

    if k(1,n)==k(2,n)
        ml(k(1,n)) = ml(k(1,n));
        ml(k(2,n)) = ml(k(2,n));
    elseif a < 0 || b < 0
        ml(k(1,n)) = ml(k(1,n));
        ml(k(2,n)) = ml(k(2,n));
    else
        ml(k(1,n)) = a;
        ml(k(2,n)) = b;
    end

    % Entropia
    [counts1,~] = (histcounts(ml,edges));
```

```
    counts = counts1;
    counts(~counts) = [];
    S(p,n) = N*log(N)-sum(counts.*log(counts));

    % Funcion objetivo
    o1(p,n) = sum(alpha*counts1.*counts1.*edges(2:C+1)/2);
    o2(p,n) = sum(counts1.*(1-exp(-alpha.*counts1.*edges(2:C+1)/2)));

end
end
```