Andreina Sanchez / A01024927
Ana Paula Katsuda / A01025303

Regular Languages

1. Give a recursive definition of the set of strings over {*a*, *b*} that contain at least one *b* and have an even number of *a*'s before the first *b*. For example: *aab*, *bab*, and *aaaabbababab* are in the set, but *abb*, *aaab* do not

- Basis: $b \in L$
- Recursive Step: if $u \in L$ then $aau, ua, ub \in L$
- Closure: a string $v \in L$ only if it can be obtained from the basis following a finite set of applications of the recursive step

2. Let **X** = {*aa*, *bb*} and **Y** = {λ, *b*, *ab*}.
   I. List the strings in set **XY** = {aa, aab, aaab, bb, bbb, bbab}
   II. How many strings of length 6 are there in **X***? → 8 strings {aaaaaa, bbbbbb, aaaabb, aabbaa, bbaaaa, aabbbb, bbbbaa, bbaabb}
   III. List the strings in set **Y*** of length three or less → {λ, b, ab, bb, bab, abb, bbb}
   IV. List the strings in set **X*Y*** of length four or less → X^* elements of length 4 or less {λ, aa, aaaa, aabb, bb, bbbb, bbaa}

Y^* elements of length 4 or less {λ, b, bb bbb, bbbb, bab, bbab, babb, ab, abab, abb, abbb}

X^*Y^* elements of length 4 or less {λ, aa, aaaa, aabb, bb, bbbb, bbaa, b, bbb, bab, bbab, babb, ab, abab, abb, abbb, aab, aaab}

3. Give a recursive definition of the set $\{a^i b^j \mid 0 \le i \le j \le 2i\}$

- Basis: $\lambda \in L$
- Recursive Step: if $u \in L$ then $aub, aubb \in L$
- Closure: a string $v \in L$ only if it can be obtained from the basis following a finite set of applications of the recursive step

4. Let **L** be the set of strings over {*a*, *b*} generated by the recursive definition
   I. Basis: $b \in$ **L**
   II. Recursive step: if *u* is in **L** the *ub* ∈ **L**, *uab* ∈ **L**, *uba* ∈ **L** and *bua* ∈ **L**
   III. Closure: a string *v* is only in **L** if it can be obtained from the basis by a finite number of iterations of the recursive step

   a. List the elements in the sets L_0, L_1, L_2

L_0: {b}
L_1: {bb, bab, bba}
L_2: {bbb, bbab, bbba, bbba, babb, babab, babba, bbaba, bbab, bbaab, bbaba, bbbaa}

   b. Is the string *bbaaba* in **L**? If so, trace how it is produced. If not, explain why not.

Considerando la cadena planteada, es posible notar que no es parte de L. Lo anterior se debe a que no es posible generar las combinaciones necesarias mediante el paso recursivo y el contenido de L. Asimismo, tomando en consideración la longitud de cadenas en L y la longitud de la cadena deseada (6) vemos que aquellas cadenas con longitud de 5 solo podrían utilizar $u_n b$, lo que no es de utilidad ya que la cadena deseada termina en a; en cuanto a las cadenas en L con longitud de 4, no existe una combinación de u_n con el paso recursivo para llegar al string.

Dos maneras en las que se podría llegar a bbaaba, sería si se tuviera en L la cadena baab (con el paso bu_na) o bbaa (con el paso recursivo u_nba). Sin embargo, no se podrá generar esto con las cadenas de L.

   c. Is the string *bbaaaabb* in **L**? If so, trace how it is produced. If not, explain why not.

Considerando bbaaaabb y tomando su amplia longitud, se puede desglosar la manera en la que la cadena estaría conformada mediante el paso recursivo. Siguiendo lo anterior, la única manera de tener una terminación con dos "b", es teniendo u=bbaaaab con ub; consecuentemente para obtener bbaaaab, se requiere u=bbaaa con uab. Lo anterior nos deja con la opción de u=baa con bua. Es posible notar que dado el lenguaje, no hay manera de generar baa e inluso, no se pueden tener tantas "a"'s consecutivas dadas las condiciones del problema

5. Prove, using induction on the length of a string, that $(w^R)^R = w$ for all string $w \in \Sigma$

- Basis: length(w) = 0, then $w = \lambda$ and $(w^R)^R = (\lambda^R)^R = \lambda$
- Inductive Hypothesis: Assume that for any string w with length n, $(w^R)^R = w$
- Induction Step: if length(w) = n+1, then w = xa where x has length n and $a \in \Sigma$

$(w^R)^R = ((xa)^R)^R$

$((xa)^R)^R = (a^R x^R)^R$, using $(uv)^R = v^R u^R$

$= (x^R)^R (a^R)^R$, considering definition of reversal

$= xa = w \quad \therefore (w^R)^R = w$