F1004B:
Matemáticas, Tema 1
Principios de modelación, la derivada y vectores

MSc Edoardo Bucheli

1 Introducción

En el módulo de matemáticas hablaremos de Modelación Matemática. La modelación matemática consiste en traducir problemas de la vida real en operaciones matemáticas manejables que nos ayuden a entender mejor el fenómeno. Al escuchar esta definición seguramente te darás cuenta que ya has aplicado la modelación matemática anteriormente con distintos niveles de complejidad. En este bloque, aprenderás a modelar un fenómeno relativamente sencillo y más adelante tendrás que aplicar esto a sistemas más y más complejos.

1.1 ¿Para qué modelar?

Modelar tiene muchas ventajas, una de ellas es que nos ayuda a entender mejor un fenómeno, pero ¿a qué nos referimos con esto? Si tenemos un conocimiento sobre el tipo de funciones y relaciones matemáticas típicas como las funciones lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, trigonométricas, entre otras, tendremos una mejor capacidad para identificar su presencia en problemas del mundo real. Identificar el problema como una de estas funciones nos puede ayudar mucho de las siguientes maneras.

- Entender cómo evoluciona el fenómeno. Podemos responder esto típicamente con la pendiente de una línea, también podemos sacar conclusiones basados en la función, por ejemplo sabremos que una función exponencial crecerá de manera muy rápida.
- Si tenemos un buen modelo del sistema podemos utilizar la función matemática encontrada para hacer predicciones a futuro o de puntos para los que no tenga información.
- Especialmente para funciones cuadráticas y polinomiales podemos encontrar puntos de interés dentro de la función como máximos y mínimos o los intervalos donde crece o disminuye una función.
- Si el modelo obtenido es muy complejo, al expresarlo como una función matemática podemos utilizar recursos computacionales para resolver el problema de manera eficiente.

1.2 ¿Qué conocimientos se necesitan?

1. Primero que nada, necesitamos conocimientos básicos de geometría analítica y trigonometría. Es decir, conocer funciones matemáticas y sus representaciones gráficas, como líneas, parábolas, funciones polinomiales, etcétera. Probablemente ya tienes suficientes conocimientos al respecto.
2. Utilizando nuestro conocimiento de estas funciones, modelaremos fenómenos físicos. Existen muchas maneras de modelar fenómenos de la vida real. En este caso, lo haremos simplemente utilizando conceptos que aprenderás en los módulos de Física y que tendrán que ver con las Leyes de Newton. Otra manera típica de modelar es por medio de regresión o algoritmos de Machine Learning pero esos métodos tendrán que esperar.
3. Ya que tengamos un modelo, lo analizaremos utilizando cálculo. Esto nos ayudará a entender de mejor manera el fenómeno.
4. Para modelar los fenómenos de una mejor manera integraremos el conocimiento que ya tienes de geometría analítica y cálculo (los cuales además seguiremos desarrollando) con el conocimiento nuevo que tendrás de vectores. Esto nos llevará a un nuevo tipo de función llamada funci on vectorial.

2 La derivada otra vez

Los pasos que acabo de describir harán parecer que empezaremos hablando de funciones pero más bien empezaremos desarrollando tus conocimientos sobre Cálculo Diferencial.

Para este momento, probablemente ya sabes varias cosas sobre cálculo, seguramente has estudiado técnicas para derivar, un poco de análisis de funciones y optimización, tal vez has hecho integrales y probablemente tienes una idea de la utilidad de esta rama de las matemáticas. Ya que has tenido tiempo de aplicar estos conceptos en tus cursos anteriores, me gustaría retroceder y tratar de entender la derivada una vez más, ojalá de una mejor manera, más que como un procedimiento matemático, como un concepto.

2.1 Pendiente

La derivada tiene algo que muchos conceptos matemáticos no tienen, esa cualidad es que la podemos describir con una sola palabra. Esa palabra es **Pendiente**. Así es, la derivada se puede describir como la pendiente de una función en algún punto. Claro, describirla con una palabra parecerá reducir su importancia, pero la manera en que yo lo veo es que más bien la importancia de la pendiente no debe ser subestimada.

Cuando empezaste a estudiar funciones lineales una de las primeras ecuaciones que te enseñaron fue como encontrar la pendiente dados dos puntos. Es decir,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

Otras dos maneras de escribir esto serían,

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2}$$

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x} \tag{3}$$

Donde Δ significa, *cambio*. Así que tenemos que la pendiente es igual al cambio en y dividido entre el cambio en x. Es importante notar la diferencia entre el cambio de y y el cambio de x, por ahora la primera conclusión que podemos tomar es que la pendiente depende de ambos cambios.

2.2 Encontrando la definición de derivada

Esto es muy sencillo para ecuaciones lineales pero ¿qué pasa cuando tenemos una función no lineal? Lo primero que podemos hacer es una aproximación. Tomamos dos puntos del gráfico y sacamos la pendiente de ambos. Ciertamente, no será perfecta esta aproximación pero entre más cercanos sean los puntos, mejor será nuestra aproximación.

Matemáticamente un cambio más pequeño es una Δx más pequeña. Así que podemos replantear la conclusión del párrafo anterior como. Entre menor sea Δx, mejor será la aproximación. Eso significaría que si $\Delta x = 0$ nuestra aproximación se vuelve perfecta. Desfortunadamente, no podemos hacer esto de manera directa, si intentamos hacer esto tendremos una división entre 0 y el resultado no se puede evaluar, pero es aquí donde entran los límites.

Seguramente ya has estudiado los límites así que no te molestaré tanto con eso. Pero lo que me quiero transmitir es que los límites son una manera de calcular un resultado cuando no podemos evaluarlo directamente, en este caso, porque tenemos una división entre cero.

Planteemos entonces nuestro problema. Queremos encontrar la pendiente entre dos puntos, nos gustaría que la distancia entre esos dos puntos sea básicamente 0 pero no podemos hacer eso. Utilizando la ecuación de la pendiente, límites, y recordando que $y = f(x)$ podemos expresar esto de la siguiente manera,

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x} \tag{4}$$

Lo único que estoy agregando a comparación de la ecuación 3 es la idea de que Δx sea lo más cercana a 0 posible, eso es todo. Ahora, hay un pequeño problema con la ecuación 4, no me gusta tener un valor para x_1 y otro para x_2, prefiero mostrarlo en términos de Δx, puedo hacer esto de la siguiente forma,

$$\Delta x = x_2 - x_1 \tag{5}$$
$$x_2 = \Delta x + x_1 \tag{6}$$

Y por lo tanto si sustituyo esto tengo,

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x_1) - f(x_1)}{\Delta x} \tag{7}$$

A veces utilizamos las sustituciones $h = \Delta x$ y si queremos generalizar, solamente tomamos cualquier punto x en lugar de x_1 y obtenemos,

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(h + x) - f(x)}{h} \tag{8}$$

De tus clases de cálculo, habrás aprendido la derivada por su definición y la podrás reconocer como la ecuación 8, quizá nunca entendiste exactamente de donde salía la ecuación pero espero que ahora te quede más claro.

2.3 Técnicas de Derivación

Afortunadamente, no tenemos que resolver este límite siempre, sino que podemos utilizar técnicas de derivación las cuales incluyen,

- Regla del Exponente
- Regla del Producto
- Regla del Cociente
- Regla de la Cadena
- Diferenciación Implícita
- Entre otras...

No indagaremos tanto en este curso sobre ellas pero en caso de ser necesario para resolver un problema, nos detendremos para recordar los conceptos.

3 Vectores y geometría del espacio

La segunda meta del módulo es aprender un poco más sobre vectores para que puedas llevar a cabo operaciones matemáticas e inclusive cálculo con ellos. Aprenderás mucho más de este segundo aspecto el próximo semestre pero me gustaría que entiendas lo básico durante este bloque. Todo esto, con la meta de que puedas modelar fenómenos físicos por medio de matemáticas y programación para la solución del reto.

3.1 Vectores

Un vector es una cantidad con magnitud y dirección, se suelen visualizar como flechas como lo vemos en la figura 1. En general escribimos un vector por sus componentes, aunque podemos a veces expresarlos como magnitud y ángulo, para más dimensiones la única buena manera de hacerlo es por componentes.

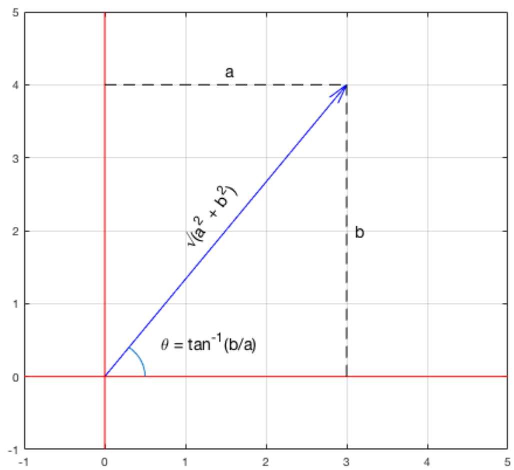


Figure 1: Visualización de un vector de dos dimensiones

3.1.1 Notaciónes de Vectores

Cuando hablamos de las componentes de un vector nos referimos a cada valor que posee; un vector con dos valores tiene dos componentes, uno de tres valores tiene tres componentes, etc. Podemos pensar en cada componente como los pasos que da el vector en cada dimensión o dirección. Esto tiene más sentido en dos o tres dimensiones pero es cierto para cualquier número de dimensiones.

Por ejemplo, si tenemos el vector $< 3, 4 >$ como en la figura 1, como son dos dimensiones, podemos pensarlo como una flecha que toma 3 pasos en el eje x hacia la derecha y 4 pasos en el eje y hacia arriba.

Existen varias maneras de escribir un vector por componentes aquí se presentan tres formas básicas,

$$\vec{x} =< a, b > \tag{9}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\vec{\mathbf{x}} = a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} \tag{11}$$

Todas significan lo mismo pero en diferentes campos de estudio se suelen usar más unas notaciones que otras.

Cuando contextualizamos los vectores con matrices y operaciones de Álgebra Lineal, suele ser importante la distinción entre un vector de fila o columna, que es algo que solo la segunda notación nos permite. Es decir que podemos escribirlos como,

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

ó

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$$

Y ciertas operaciones de vectores y matrices nos darían resultados distintos. Por eso a mí me gusta la forma 2 pero hablaremos más de eso cuando toquemos el tema de matrices.

3.1.2 Magnitud y Ángulo de un Vector

Cuando definimos un vector dijimos que era una cantidad con una magnitud y dirección. Pero, ¿cuál es la magnitud y cúal es la dirección? Para responder eso volvamos a ver la figura 1.

En el plano cartesiano tenemos una flecha, es obvio cual es la dirección pero lo que puede no ser tan obvio es que el tamaño de la flecha nos dice la magnitud. Podríamos tener una flecha apuntando en la misma dirección pero de diferente tamaño y su vector sería diferente. Por ejemplo, los vectores $\vec{a} = [3\ 4]$ y $\vec{b} = [6\ 8]$ apuntan en la misma dirección pero tienen distinta magnitud, ¿puedes notar la relación entre ellos?

A continuación se presentan las fórmulas para calcular la magnitud y ángulo con el origen de un vector de dos dimensiones,

$$|\vec{a}| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{12}$$

$$\theta = \tan^{-1}(b/a) \tag{13}$$

Hace rato describimos el vector de la figura 1 como una flecha que se movía tres pasos hacia la derecha y cuatro hacia arriba. En la representación de Magnitud y Ángulo lo pensamos más bien como

> Una flecha de magnitud $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2}$ (que es igual a 5) con ángulo de desplazamiento de $\theta = \tan^{-1}(b/a)$ (que es mas o menos $53.13°$)

3.1.3 Vectores Unitarios

Un vector unitario es una especie de vector especial donde la magnitud es 1. Para cualquier vector $\vec{a}$ podemos encontrar su vector unitario de la siguiente manera

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \tag{14}$$

Recuerda que la magnitud de un vector es un solo número o escalar, es decir que dividimos cada componente del vector entre la misma magnitud.

Los vectores unitarios son muy útiles cuando solo nos interesa la dirección del vector o cuando los queremos usar como la base de un espacio vectorial, un ejemplo típico de ello es la notación de la ecuación 3, es decir,

$$\vec{u} = a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}}$$

Donde $\hat{\mathbf{i}} =< 1, 0 >$ y $\hat{\mathbf{j}} =< 0, 1 >$.

> *Nota*: En física suele ser muy importante la representación gráfica (flecha) porque se usa para modelar fenómenos físicos, como velocidades o fuerzas. Pero en computación los vectores toman un nuevo significado y nos enfocamos en la parte numérica (es decir que en muchas ocasiones vale más la pena pensar en un vector como un arreglo de números) pero nos apoyamos de las visualizaciones para entender mejor los conceptos.

3.2 Escalares

Ahora que definimos a un vector, podemos definir un escalar. Un escalar es una cantidad que solo posee magnitud. Es decir un número común y corriente pero cuando hablamos de vectores y matrices vale la pena diferenciarlo.

3.3 Operaciones entre vectores y escalares

Existen muchos tipos de operaciones entre vectores, algunas muy sencillas otras un poco menos intuitivas.

3.3.1 Suma, resta y producto escalar

Sean $\vec{u} =< u_1, u_2 >$ y $\vec{v} =< v_1, v_2 >$ dos vectores y sean α y β dos escalares tenemos,

$$\vec{u} + \vec{v} =< u_1 + v_1, u_2 + v_2 > \tag{15}$$

$$\vec{u} - \vec{v} =< u_1 - v_1, u_2 - v_2 > \tag{16}$$

$$\alpha \cdot \vec{u} =< \alpha \cdot u_1, \alpha \cdot u_2 > \tag{17}$$

Estas tres operaciones las podemos combinar para hacer una combinación lineal que tiene la siguiente forma,

$$\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} = < \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot v_1, \alpha \cdot u_2 + \beta \cdot v_2 > \tag{18}$$

Al aplicar estas operaciones obtenemos nuevos vectores. Veamos unos ejemplos, para $\vec{u} = 3\hat{\mathbf{\imath}} + 4\hat{\mathbf{\jmath}}$ y $\vec{v} = 6\hat{\mathbf{\imath}} + 1\hat{\mathbf{\jmath}}$ tenemos,

Suma:

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (3+6)\hat{\mathbf{\imath}} + (4+1)\hat{\mathbf{\jmath}} \\ &= 9\hat{\mathbf{\imath}} + 5\hat{\mathbf{\jmath}}\end{aligned}$$

Resta:

$$\begin{aligned}\vec{u} - \vec{v} &= (3-6)\hat{\mathbf{\imath}} + (4-1)\hat{\mathbf{\jmath}} \\ &= -3\hat{\mathbf{\imath}} + 3\hat{\mathbf{\jmath}}\end{aligned}$$

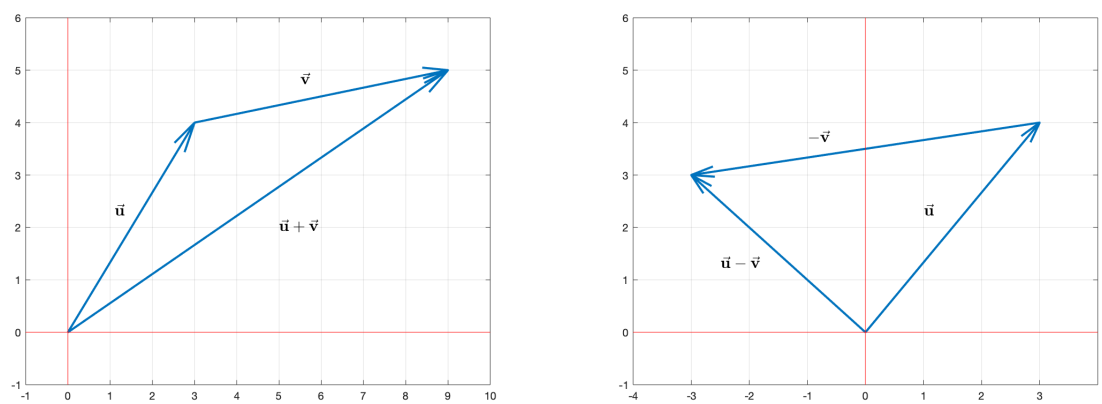
Producto Escalar:

$$\begin{aligned}2 \cdot \vec{u} &= 2 \cdot (3\hat{\mathbf{\imath}} + 4\hat{\mathbf{\jmath}}) \\ &= (2 \cdot 3)\hat{\mathbf{\imath}} + (2 \cdot 4)\hat{\mathbf{\jmath}} \\ &= 6\hat{\mathbf{\imath}} + 8\hat{\mathbf{\jmath}}\end{aligned}$$

División con Escalar:

$$\begin{aligned}\frac{\vec{u}}{2} &= \frac{1}{2} \cdot (3\hat{\mathbf{\imath}} + 4\hat{\mathbf{\jmath}}) \\ &= (\frac{1}{2} \cdot 3)\hat{\mathbf{\imath}} + (\frac{1}{2} \cdot 4)\hat{\mathbf{\jmath}} \\ &= \frac{3}{2}\hat{\mathbf{\imath}} + 2\hat{\mathbf{\jmath}}\end{aligned}$$

Las figuras 2 y 3 muestran ejemplos visuales de suma, resta, producto escalar y combinación lineal para los vectores $\vec{u} = 3\hat{\mathbf{\imath}} + 4\hat{\mathbf{\jmath}}$ y $\vec{v} = 6\hat{\mathbf{\imath}} + 1\hat{\mathbf{\jmath}}$



(a) Suma de Vectores: $\vec{u} + \vec{v} = 9\hat{\mathbf{\imath}} + 5\hat{\mathbf{\jmath}}$

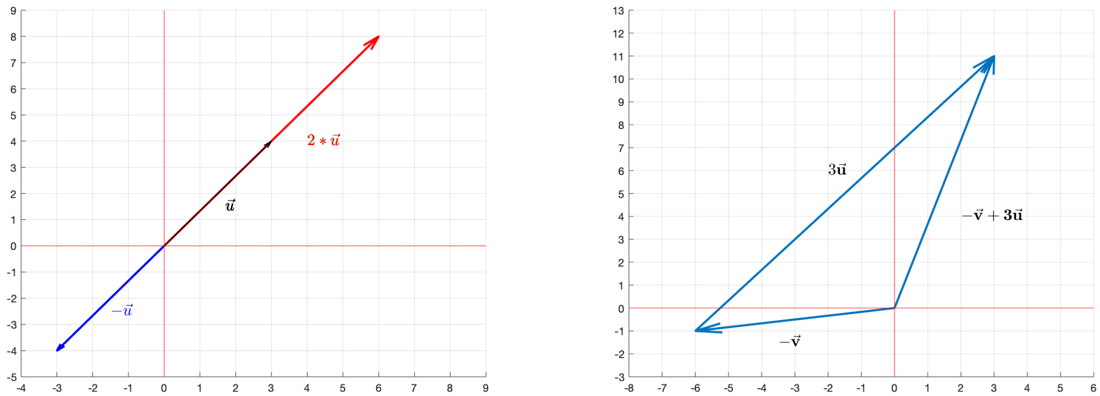
(b) Resta de Vectores: $\vec{u} - \vec{v} = -3\hat{\mathbf{\imath}} + 3\hat{\mathbf{\jmath}}$

Figure 2: Operaciones sencillas con vectores Pt. 2

3.3.2 Producto Punto

Una de las operaciones más importantes en Álgebra Lineal (si no es que la más importante) es el producto punto. Definimos el producto punto de la siguiente manera,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 \tag{19}$$



(a) Producto Escalar

(b) Combinación lineal de vectores: $-\vec{v} + 3\vec{u} = 3\hat{\mathbf{i}} + 11\hat{\mathbf{j}}$

Figure 3: Operaciones sencillas con vectores Pt. 2

Y un ejemplo con $\vec{u} = 3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{v} = 6\hat{\mathbf{i}} + 1\hat{\mathbf{j}}$ sería,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}) \cdot (6\hat{\mathbf{i}} + 1\hat{\mathbf{j}}) \tag{20}$$
$$= 3 \cdot 6 + 4 \cdot 1 \tag{21}$$
$$= 18 + 4 \tag{22}$$
$$= 22 \tag{23}$$

Algo muy importante que notar es que el producto punto es un escalar. Es decir que en lugar de obtener un nuevo vector obtenemos un valor. Geométricamente podemos definir al producto punto de esta manera,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta \tag{24}$$

Donde θ es el ángulo entre los vectores. Cuando el ángulo entre los vectores es de 90° entonces como $\cos(90°) = 0$ el resultado del producto punto es 0. Esto es muy muy muy relevante.

3.3.3 Producto Cruz

La otra manera de multiplicar vectores es el producto cruz. A diferencia del producto punto, el producto cruz regresa un vector.

Geométricamente, el vector resultante de un producto cruz tiene dos características principales las cuales se visualizan en la figura 4.

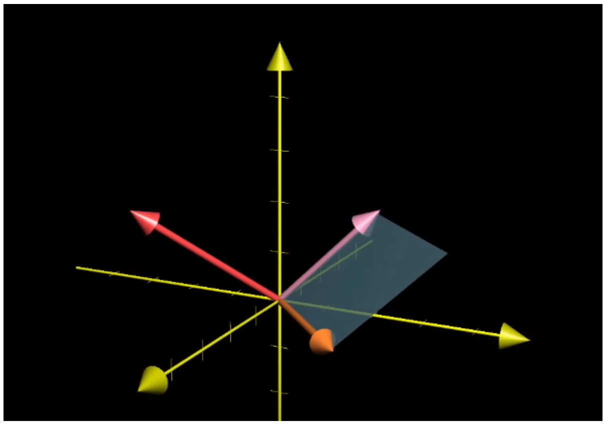
1. La dirección del vector resultante es perpendicular al plano formado entre los vectores de entrada.
2. La magnitud del vector resultante es igual al área del paralelogramo formado entre los vectores de entrada.

Existen varias formas de definir el producto cruz, la primera de ellas es geométrica,

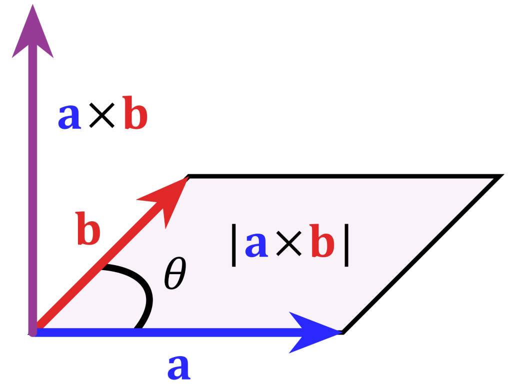
$$\vec{u} \times \vec{v} = (|\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta)\hat{\mathbf{n}} \tag{25}$$

Donde $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores de entrada, θ es el ángulo que se forma entre ellos y $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario normal, es decir, un vector unitario perpendicular al plano formado entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

La manera más general de calcular el producto cruz es por medio de **determinantes**.



(a) Visualización 3D del Producto Cruz



(b) Visualizacón del Producto Cruz con anotaciones

Figure 4: Dos visualizaciones del produccto cruz

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{\hat{\imath}} & \mathbf{\hat{\jmath}} & \mathbf{\hat{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{26}$$

$$= (u_2 * v_3 - v_2 * u_3)\mathbf{\hat{\imath}} + (u_1 * v_3 - v_1 * u_3)\mathbf{\hat{\jmath}} + (u_1 * v_2 - v_1 * u_2)\mathbf{\hat{k}} \tag{27}$$

$$\tag{28}$$