Módulos 2 y 3: Física

Prof. Octavio de los Santos Sánchez

Tecnológico de Monterrey
Campus Santa Fe

24/08/2020

- **Examen de contenidos:** 60 %
  - Tanto resultados como procedimientos serán aspectos a evaluar.
- **Actividades** (tareas): 40 %
  - Las actividades se entregarán en la fecha indicada por el profesor.
  - Resultados y procedimientos serán también aspectos a evaluar en cada actividad.

Coordenadas

Para describir, cuantitativamente, un punto en el espacio, necesitamos un sistema coordenado.

- Debemos elegir un punto en el espacio definido como el origen.
- Asimismo, elegimos tres ejes perpendiculares que se intersectan en el punto antes mencionados.
- Los tres ejes elegidos son etiquetados con las letras *x*, *y* y *z*.

Este sistema de ejes se denomina **sistema coordenado cartesiano**.

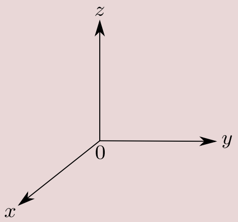


Figure: Sistema coordenado Cartesiano tridimensional.

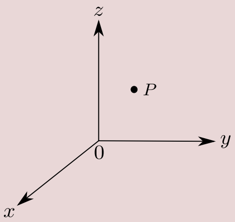


Figure: Un punto en el espacio Cartesiano.

- Para la descripción de un punto en el espacio, llamémoslo P, damos las coordenadas x, y y z del punto. Este es identificado con la tripleta ordenada de numeros (x_1, y_1, z_1).

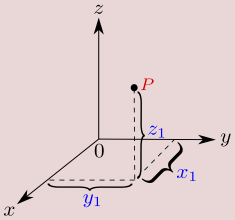


Figure: Un punto en el espacio Cartesiano.

- Cuando estudiamos el movimiento, la variable adicional que debemos considerar es el **tiempo**. Elegimos nuestro origen del tiempo como el inicio de nuestro experimento (o *inicio nuestras observaciones*). Una vez elegido, no lo podemos cambiar.

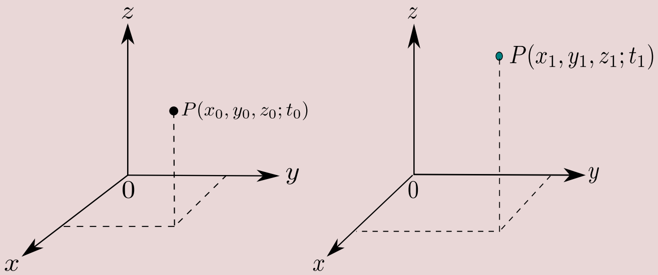


Figure: Un punto en el espacio Cartesiano en distintos tiempos.

- Se deben establecer **unidades de tiempo**. Las unidades más usuales de tiempo son los *segundos*. Etiquetamos el tiempo con la letra t.
- El tiempo se puede comparar en distintas ubicaciones. Así pues, las cuatro coordenadas $(x, y, z; t)$ definirán un **marco de referencia**. *A cualquier evento en el marco de referencia se le debe asignar una valor para cada una de las coordenadas*.

Visualización gráfica de funciones

- Ejemplo. Dada la función $f(t) = t^2$, podemos graficar los puntos sobre un sistema coordenado. Usaremos un eje para el tiempo, t, y el otro para la función, $f(t)$.

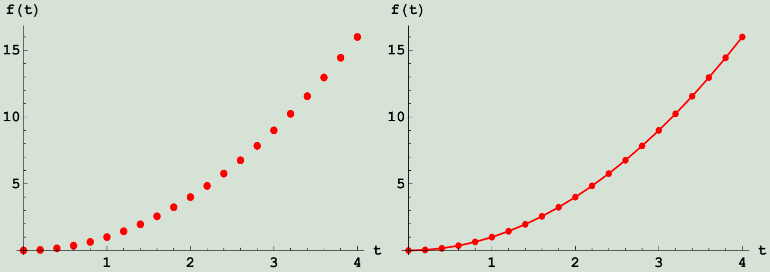


Figure: Izquierda. Graficando los puntos de $f(t) = t^2$. Derecha. Uniendo los puntos graficados con líneas.

Trigonometría

- Como medida de ángulo generalmente se usa el radián:

$$1 \text{ radián} = \frac{180^o}{\pi} \approx 57^o \tag{1}$$

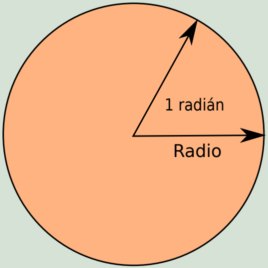


Figure: El radián como el ángulo subtendido por un arco igual al radio del círculo.

- Ejemplo 1. Determine el equivalente en radianes de los siguientes ángulos:
  1. 30^o
  2. 90^o
  3. 45^o
  4. 180^o
  5. 360^o
- Ejemplo 2. Grafique cada una de las siguientes funciones:
  1. $f(t) = 1$
  2. $f(t) = t^2 + 1$
  3. $f(t) = t^2 - 1$
  4. $f(t) = -t^2$
  5. $f(t) = (t-1)^2$
- Ejemplo 3. Dado el triángulo rectángulo de la figura, determine lo siguiente:

  1. Si $\theta = 45^o$ y $c = \sqrt{2}$, ¿cuál es el valor de a?
  2. Si $\theta = 45^o$ y $c = \sqrt{2}$, ¿cuál es el valor de b?
  3. Si $a = \frac{b}{2}$, ¿cuál es el valor de θ?
  4. Si $a = 2b$, ¿cuál es el valor de θ?

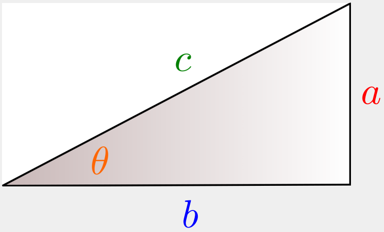


Figure: Ejemplo 3.

Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas se definen en términos de las propiedades de triángulos rectángulos.

- a, b y c son los **catetos** opuesto, adyacente e hipotenusa, respectivamente.
- θ es el *ángulo opuesto a la altitud* a.

Definimos las funciones trigonométricas seno (sin) y coseno (cos) y tangente (tan) como:

$$\sin\theta = \frac{a}{c} \tag{2}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c} \tag{3}$$

$$\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{4}$$

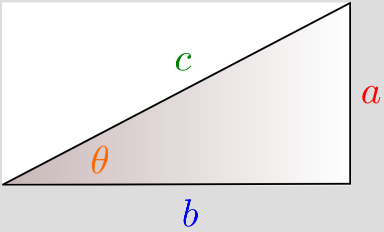
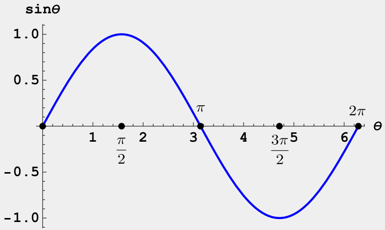


Figure: Triángulo rectángulo.

Gráficas de funciones trigonométricas:



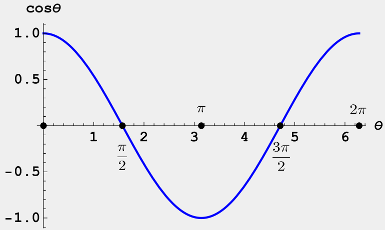


Figure: **Izquierda.** Gráfica de la función **seno**. **Derecha.** Gráfica de la función **coseno**.

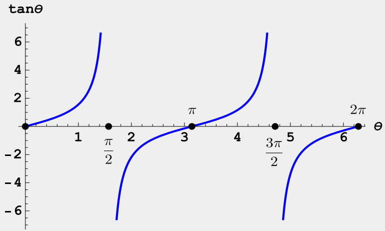


Figure: Gráfica de la función **tangente**.

Podemos dibujar un triángulo rectángulo dentro de un círculo, donde el centro del círculo coincida con el origen del sistema coordenado Cartesiano.

- La línea que conecta el centro del círculo a cualquier punto sobre la circunferencia forma la hipotenusa.
- La posición de un punto a lo largo de la circunferencia se puede especificar por las coordenadas:

$$\begin{aligned} a &= c\sin\theta \\ b &= c\cos\theta \end{aligned}$$

- De aquí, también se puede deducir la identidad

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{5}$$

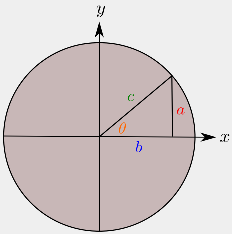


Figure: Triángulo rectángulo dentro de un círculo.

Identidades adicionales:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

Vectores

Un **vector** se concibe como un objeto que posee una **longitud (o magnitud)** y una **dirección** en el espacio (véase el ejemplo de la figura).
Simbólicamente, los vectores se representan mediante una **flecha dirigida**.
Ejemplos:

- Posición/desplazamiento
- Velocidad
- Aceleración
- Momento lineal
- Momento angular

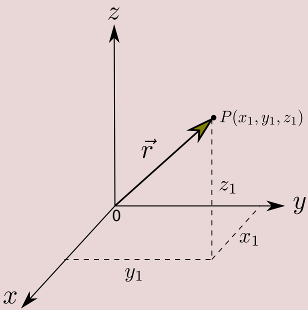


Figure: Vector de posición, $\vec{r} = (x_1, y_1, z_1)$, en coordenadas Cartesianas.

Componentes de vectores (caso bidimensional)

La figura muestra un vector $\vec{a}$, en el espacio bidimensional, cuya cola está situada en el origen de un sistema rectangular de coordenadas. Si dibujamos líneas perpendiculares desde la punta de $\vec{a}$ a los ejes, las cantidades a_x y a_y se llaman *componentes* (cartesianas) del vector $\vec{a}$.

- El vector $\vec{a}$ está completamente especificado por sus componentes.
- Las componentes de un vector pueden ser positivas, negativas, o cero.
- En la figura, las componentes a_x y a_y se hallan fácilmente por

$$a_x = |\vec{a}|\cos\phi \quad (6)$$
$$a_y = |\vec{a}|\sin\phi \quad (7)$$

donde $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

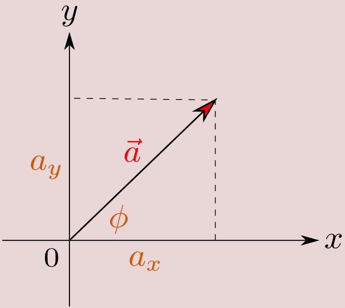


Figure: El vector $\vec{a}$ tiene una componente a_x en la dirección x y una componente a_y en la dirección y.

Vectores unitarios

Si la **magnitud** (o longitud) de un vector es **uno**, decimos que el vector es **unitario**. Establezcamos tres vectores unitarios a lo largo de la dirección de cada uno de los ejes coordenados *x*, *y* y *z*:

- $\mathbf{i}$ vector unitario en la dirección *x*:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0)$$

- $\mathbf{j}$ vector unitario en la dirección *y*:

$$\mathbf{j} = (0, 1, 0)$$

- $\mathbf{k}$ vector unitario en la dirección *z*

$$\mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

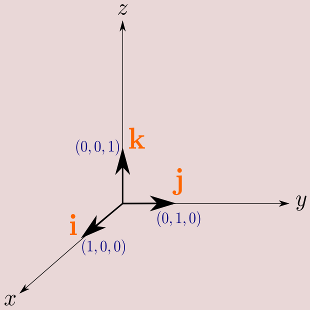


Figure: Vectores unitarios en la dirección de los ejes coordenados.

Representación y magnitud vectores

- En coordenadas rectangulares o cartesianas, podemos usar la siguiente terna

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \tag{8}$$

- Equivalentemente, podemos expresar el mismo vector términos de vectores unitarios

$$\vec{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \tag{9}$$

- Conocidas sus componentes cartesianas, la magnitud de un vector se cuantifica como

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{10}$$

Producto de un escalar por un vector

Sea $\vec{v}$ un vector y sea λ un escalar. La figura siguiente muestra la operación $\lambda\vec{v}$:

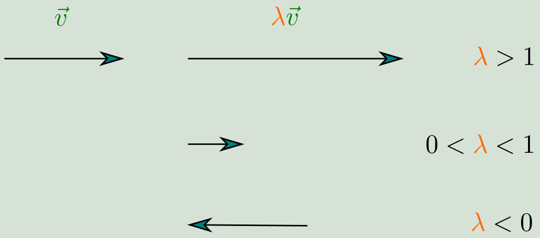


Figure: En términos generales, un escalar al multiplicar a un vector le modifica su tamaño y si el escalar es negativo además le invierte el sentido.

Conocidas las componentes cartesianas de $\vec{v}$, tenemos:

$$\lambda\vec{v} = (\lambda v_x, \lambda v_y, \lambda v_z) \quad (11)$$

$$\equiv \lambda v_x \mathbf{i} + \lambda v_y \mathbf{j} + \lambda v_z \mathbf{k} \quad (12)$$

- Ejercicio 1. Represente gráficamente el vector los vectores $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.
- Ejercicio 2. Calcúlese la magnitud de los siguientes vectores:
  1. $\vec{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
  2. $\vec{b} = 2\vec{a}$, donde $\vec{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
  3. $\vec{c} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{5})$
  4. $\vec{d} = (1, 1, 1)$
- Ejercicio 3. Interpretar $\vec{r}/|\vec{r}|$, donde $|\vec{r}|$ es la magnitud del vector $\vec{r}$.
- Ejercicio 4. ¿Cuál es el vector unitario en la dirección de $4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$?

- Ejercicio 5. Un aeroplano de desplaza 209 km en línea recta haciendo un ángulo de 22.5^o de Este a Norte. ¿Qué tan lejos se desplaza en dirección Este y Norte desde su punto de partida?

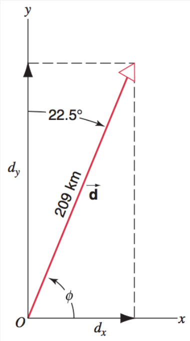


Figure: Ejercicio 5.

Suma de vectores

Consideremos un objeto en la posición especificada por el vector $\vec{r} = (r_x, r_y)$. Escogemos nuestro sistema coordenado de observación de tal manera que el objeto se encuentre en el plano *xy*. Partiendo del origen del sistema coordenado, podemos llegar al punto donde está el objeto por una infinidad de caminos. Dos de ellos son:

1. A lo largo del vector $\vec{r}$; es decir, recorriendo su magnitud
2. Moviéndose a lo largo de eje-*x* hasta alcanzar el punto $(r_x, 0, 0)$, y después paralelo al eje-*y* hasta llegar el punto terminal del vector.

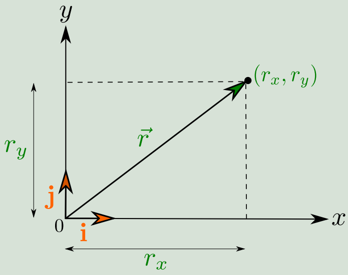
En el caso 2:

- $r_x\mathbf{i}$ es la primera parte del camino
- $r_y\mathbf{j}$ es la segunda parte del camino

Así pues

$$\vec{r} = r_x\mathbf{i} + r_y\mathbf{j} \tag{13}$$

donde hemos representado la combinación por el símbolo “$+$" que indica la **suma de vectores**.



Suma de vectores

- Sean los vectores $\vec{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$ y $\vec{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$. Su suma algebraica está dada por el vector

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}) + (v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}) \\ &= (u_x + v_x)\mathbf{i} + (u_y + v_y)\mathbf{j} + (u_z + v_z)\mathbf{k} \end{aligned} \tag{14}$$

- Representación gráfica de la suma de dos vectores:

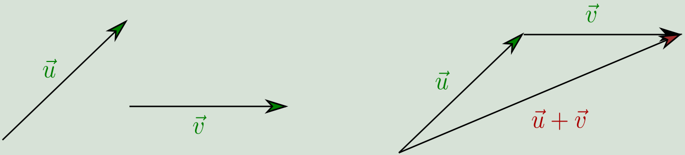


Figure: Tómese el primer vector, colóquese el segundo vector del tal manera que el inicio coincida con el final del primero, el vector suma será el vector que parte del inicio del primer vector y termina al final del segundo.

Propiedades de la suma de vectores

- La suma es conmutativa
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \tag{15}$$
- La suma es asociativa
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \tag{16}$$
- La multiplicación por un escalar λ es distributiva
$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} \tag{17}$$

Resta de vectores

Definimos la resta de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ representada por $\vec{u} - \vec{v}$ mediante la relación

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}), \tag{18}$$

donde el vector $-\vec{v}$ es el vector $\vec{v}$ multiplicado por -1. En coordenadas rectangulares, si $\vec{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$ y $\vec{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned} \vec{u} - \vec{v} &= (u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}) + (-v_x)\mathbf{i} + (-v_y)\mathbf{j} + (-v_z)\mathbf{k} \\ &= (u_x + (-v_x))\mathbf{i} + (u_y + (-v_y))\mathbf{j} + (u_z + (-v_z))\mathbf{k} \\ &= (u_x - v_x)\mathbf{i} + (u_y - v_y)\mathbf{j} + (u_z - v_z)\mathbf{k} \end{aligned} \tag{19}$$

Representación gráfica de la resta de vectores

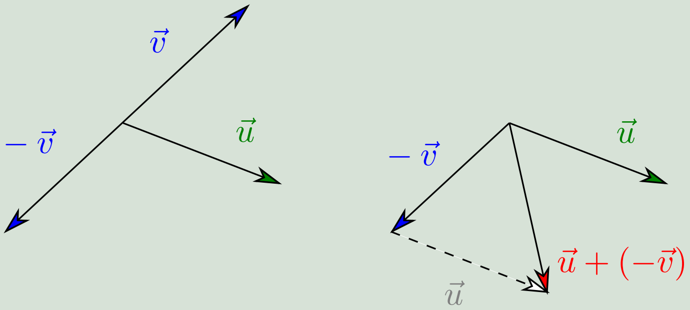


Figure: Se dibujan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de forma tal que tengan un origen común. Se invierte el sentido del vector $\vec{v}$ (multiplicación por -1). Se efectúa la suma de $\vec{u}$ y $-\vec{v}$, es decir, $\vec{u}+(-\vec{v})$, usando la regla ya conocida.

- Ejercicio 5. Dados los vectores

$$\vec{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k},$$
$$\vec{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

encontrar **a)** la suma $\vec{a} + \vec{b}$, **b)** la resta $\vec{a} - \vec{b}$ y **c)** las magnitudes correspondientes.
- Ejercicio 6. Si $\vec{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\vec{v} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, calcule **a)** $\vec{u} + \vec{v}$,**b)** $\vec{u} - \vec{v}$ y **c)** represente estos resultados gráficamente.
- Ejercicio 7. Dos vectores están dados por $\vec{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\vec{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Halle **a)** $\vec{a} + \vec{b}$, **b)** $\vec{a} - \vec{b}$ y **c)** un vector $\vec{c}$ tal que $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.
- Ejercicio 8. Una estación de radar detecta a un cohete que se aproxima desde el este. En el primer contacto, la distancia al cohete es de 12000 ft (pies) a 40.0^o sobre el horizonte. El cohete es rastreado durante otros 123^o en el plano este-oeste, siendo la distancia del contacto final de 25800 ft. Halle el desplazamiento del cohete durante el periodo de contacto del radar.

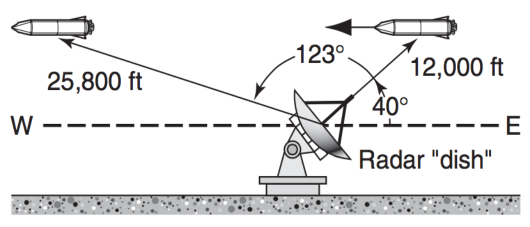


Figure: Ejercicio 8.

- Ejercicio 9. Dos vectores de magnitudes a y b forman un ángulo θ entre sí cuando son situados cola con cola. Muestre, tomando componentes a lo largo de los ejes perpendiculares, que la magnitud de su suma es

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}.$$

- Ejercicio 10. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen magnitudes iguales de 12.7 unidades. Están orientados como se muestra en la figura y su vector suma es $\vec{r}$. Halle a) las componentes x y y de $\vec{r}$, b) la magnitud de r, y c) el ángulo que forma $\vec{r}$ con el eje $+x$.

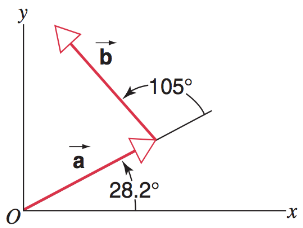


Figure: Ejercicio 10.

Cinemática

Parte de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos sin considerar las causas que lo originan.

Movimiento

Decimos que un cuerpo se mueve cuando este cambia de posición con respecto a otro (*respecto a un observador*). Tipos de movimiento:

- Traslación
- Rotación
- Traslación + rotación

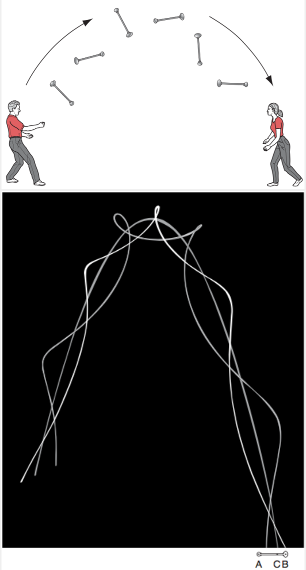


Figure: Movimiento complejo de un bastón.

Movimiento de traslación

Cuando todos los puntos de un objeto realizan la misma trayectoria (o trayectoria paralela), entonces decimos que el cuerpo ejecuta un **movimiento de traslación**.

En este tipo de movimiento, es suficiente considerar solo uno de los puntos que conforman el objeto; a este punto le llamamos **"masa puntual"** (o **partícula puntual**).
Nota. Se deberá establecer un **sistema de referencia: Observador y ejes coordenados**. El observador medirá posición e instantes.

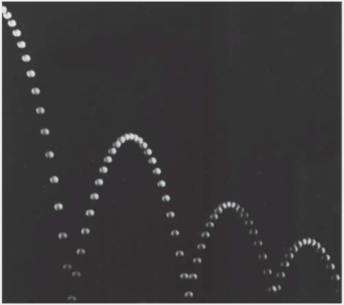


Figure: Fotografía estroboscópica de una pelota de golf.

Trayectoria (Movimiento de una partícula)

- La **posición** de una partícula se especifica proporcionando el valor de cada una de sus tres **coordenadas espaciales**.
- El **movimiento** de la partícula se define por su **posición en cada instante de tiempo**.
- Matemáticamente, las tres coordenadas espaciales son funciones del tiempo:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{20}$$

- El vector de posición

$$\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \tag{21}$$

especifica la trayectoria de la partícula.

El objetivo de la Mecánica (clásica) es determinar $\vec{r}(t)$ a partir de alguna **condición inicial** y con fundamento en alguna **ley dinámica**.

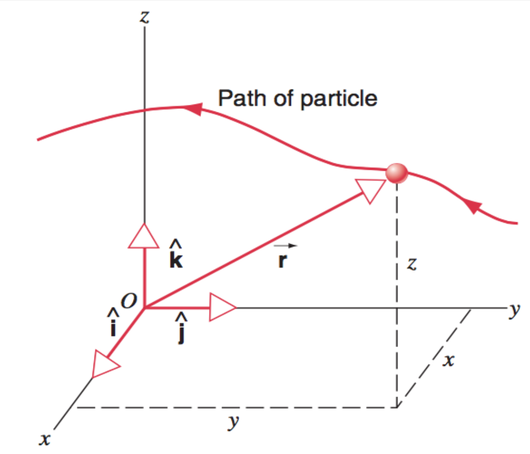


Figure: La posición de una partícula que se mueve en su trayectoria está determinada por el vector de posición $\vec{r}$, el cual tienen componentes x, y y z. También se muestran los tres vectores unitarios Cartesianos **i**, **j** y **k**.

Movimiento rectilíneo

- Movimiento descrito por un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta.
- Seleccionamos uno de nuestros ejes coordenados para que coincida con dicha trayectoria; los dos restantes no cambian en el tiempo.

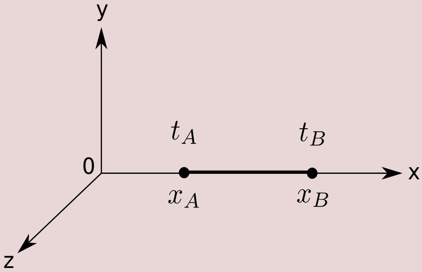


Figure: Segmento de trayectoria unidimensional con puntos extremos x_A y x_B. Las coordenadas de estos puntos son $(x_A, 0, 0)$ y $(x_B, 0, 0)$. Supongamos que el cuerpo estará en la posición x_A al tiempo t_A y en x_B al tiempo t_B.

Velocidad promedio en una dimensión

- La **velocidad promedio** nos da información sobre la **rapidez con la que el cuerpo cambió de posición**. Es decir, qué tan rápido el cuerpo pasó de un punto *A* a un punto *B*.
- Dicho cambio de posición, en el intervalo de tiempo especificado, lo podemos cuantificar, en una dimensión, como
$$v_p = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{22}$$
donde la letra griega Δ denota diferencias, por lo que $\Delta x = x_B - x_A$ y $\Delta t = t_B - t_A$.

La información de la velocidad promedio es limitada dado que no conocemos lo que sucedió en puntos intermedios dentro del segmento de la trayectoria *AB*.

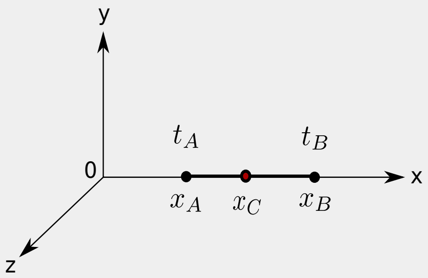


Figure: Con la velocidad promedio no tenemos información sobre lo que sucedió en un punto intermedio x_C.

Si se desea tener toda la información posible sobre el movimiento del objeto observado, necesitamos una cantidad que nos diga qué está pasando en cada instante de su trayectoria.

Velocidad instantánea

Considérese el desplazamiento de una partícula entre el tiempo t y un tiempo ligeramente posterior $t + \Delta t$. Durante este intervalo de tiempo, la partícula se mueve de $x(t)$ a $x(t + \Delta t)$. El desplazamiento es

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$

El desplazamiento es la pequeña distancia que la partícula se mueve en el pequeño intervalo de tiempo Δt. Para obtener la velocidad al tiempo t, dividimos el desplazamiento entre Δt y tomamos el límite conforme Δt tiende a cero. Esto es

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad \text{Velocidad instantánea} \tag{23}$$

A v se le conoce como **velocidad instantánea** o, simplemente, velocidad.

Aceleración en el movimiento rectilíneo

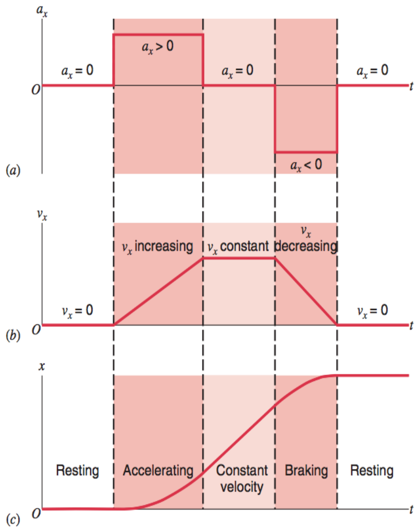
La aceleración es la cantidad que nos dice cómo está cambiando la velocidad. Si un objeto se mueve con velocidad constante, este no experimenta aceleración.

- **Aceleración promedio.** Si en un punto inicial A el cuerpo lleva una velocidad v_A y en un punto final B lleva una velocidad v_B, definimos la aceleración promedio como

$$a_p = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{24}$$

- **Aceleración instantánea.** En un proceso de límite, definimos la aceleración instantánea, o simplemente aceleración, como

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \tag{25}$$



(a) La aceleración, (b) la velocidad y (c) la posición y un automóvil que inicia en el reposo, acelera durante un intervalo, luego se mueve con velocidad constante, y desacelera hasta llegar al reposo. En la realidad, no podemos cambiar instantáneamente la aceleración de un objeto de uno a otro valor; tanto *a* como *v*, en una situación real, deben ser suaves y contínuos.

Unidades de medición

Las cantidades físicas definidas son sujetas a medición, por lo que conviene expresar su dimensionalidad; entendido esto como su relación en términos de las cantidades fundamentales de medida: **longitud (L), masa (M) y tiempo (T)**.

Sistema de unidades	Velocidad, $v = [L/T]$	Aceleración, $a = [L/T^2]$
CGS	cm/s	cm/s^2
MKS	m/s	m/s^2

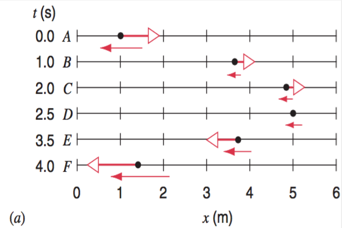
En la tabla se anotan las dimensiones usadas para la velocidad y la aceleración en dos sistemas de uso común en Física.

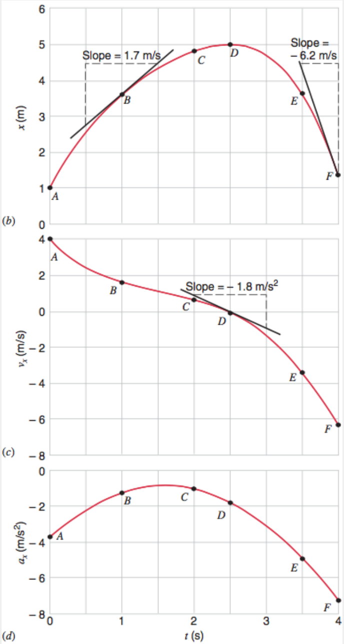
Observaciones

- Las cantidades **posición, velocidad y aceleración** son **suficientes** para caracterizar el movimiento.
- **La velocidad y la aceleración son cantidades vectoriales**. Dado que estamos analizando el caso del movimiento unidimensional, no usaremos, por lo pronto, la simbología de vectores.
- **La velocidad (aceleración) promedio** es una **estimación**, grosso modo, de la velocidad (aceleración) de un cuerpo.
- **La velocidad (aceleración) instantánea** cuantifica la velocidad (aceleración) en **cualquier instante** de tiempo.

- Ejemplo. Un cuerpo, durante 10.0 s, cambia su velocidad de 0.0 m/s a 20.0 m/s, y durante los siguientes 10.0 s cambia de 20.0 m/s a 0.0 m/s. ¿Cuál es su aceleración promedio en los primeros 10.0 segundos? ¿Cuál es su aceleración promedio total?

- Ejemplo. La figura a) muestra una sucesión de instantáneas de una partícula que se mueve a lo largo del eje x. En $t = 0$, está en la posición $x = +1.0$ m a la derecha del origen; en $t = 2.5$ s alcanza el reposo en $x = +5.0$ m; en $t = 4.0$ s regresa a $x = +1.4$ m. La figura b) muestra una gráfica de la posición vs. tiempo para este movimiento. Las figuras c) y d) muestran la velocidad y aceleración de la partícula, respectivamente. (a) Encuentre la velocidad promedio para los intervalos AD y DF. (b) Estime la pendiente de $x(t)$ en los puntos B y F y compare con los puntos correspondientes de la curva de velocidad $v_x(t)$.





- Ejercicio 11. ¿Qué distancia recorrerá tu automóvil, moviéndose a 112 km/h, durante 1 s de tiempo que te toma observar un accidente al lado de la carretera?
- Ejercicio 12. Una partícula tuvo una velocidad de 18 m/s en la dirección $+x$ y 2.4 s después su velocidad fue de 30 m/s en la dirección opuesta. ¿Cuál fue la aceleración promedio de la partícula durante este intervalo de 2.4 s?
- Ejercicio 13. ¿Qué distancia recorre un corredor en 16 s cuya gráfica de velocidad vs. tiempo se muestra en la figura? ¿Cuál es su aceleración en $t = 11$s ?

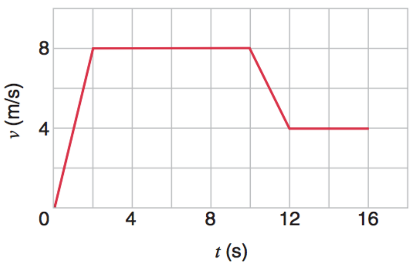


Figure: Ejercicio 13.

- Ejercicio 14. Suponga que la posición de un cuerpo como función del tiempo está dada por:

$$x(t) = \alpha t - \beta t^2,$$

donde $\alpha = 16$ m/s y $\beta = 6$ m/s^2; x se da en metros y t en segundos.

  1. ¿Cuál es la posición del cuerpo al tiempo $t = 1$ s?
  2. ¿Cuál es su velocidad instantánea en cualquier instante de tiempo?
  3. Al inicio de la observación, $t = 0$, ¿qué velocidad lleva el cuerpo?
  4. ¿A qué tiempo y en qué posición el cuerpo se encuentra en reposo?
  5. ¿Cuál es su aceleración instantánea ?
  6. ¿Cuándo la aceleración del cuerpo se hace cero?
  7. Grafique las curvas de posición, velocidad y aceleración como función del tiempo.

- Ejercicio 15. La posición de un objeto que se mueve en línea recta está dada por $x = 3t - 4t^2 + t^3$, donde x está en metros y t está en segundos. (a) ¿Cuál es la posición del objeto en $t = 0, 1, 2, 3$ y 4 s? (b) ¿Cuál es el desplazamiento del objeto entre $t = 0$ y $t = 2$ s? ¿Y entre $t = 0$ y $t = 4$ s? ¿Cuál es la velocidad promedio en el intervalo de tiempo entre $t = 2$ y $t = 4$ s? ¿Y desde $t = 0$ hasta $t = 3$ s?

- Ejercicio 16. Calcule la velocidad promedio en los dos casos siguientes: (a) Usted camina 240 ft a razón de 4 ft/s y luego corre 240 ft a razón de 10 ft/s a lo largo de una pista recta. (b) Usted camina durante 1.0 min a razón de 4ft/s y luego corre durante 1.0 min a razón de 10 ft/s a lo largo de una pista recta.

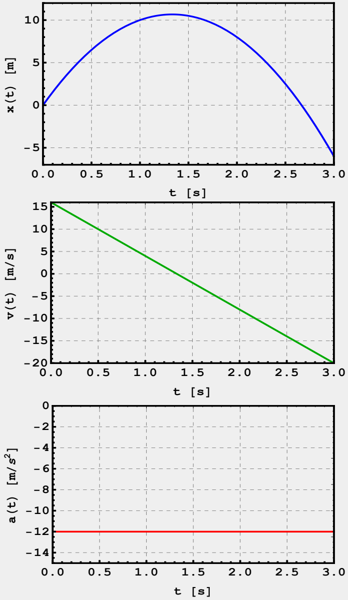


Figure: Ejercicio 14.

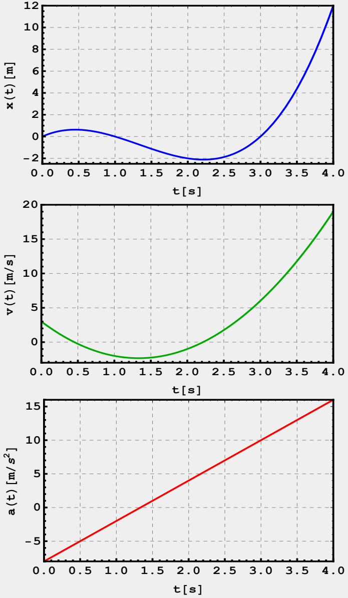


Figure: Ejercicio 15.

Recapitulando: Movimiento unidimensional

- Velocidad
  1. **Velocidad promedio (media)**

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

  2. **Velocidad instantánea**

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

- Aceleración
  1. **Aceleración promedio (media)**

$$a_p = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

  2. **Aceleración instantánea**

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Integración en cinemática:

- Si conozco la aceleración

$$a(t) = \frac{dv}{dt},$$

entonces

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t')dt'. \tag{26}$$

- Si conozco la velocidad

$$v(t) = \frac{dx}{dt},$$

entonces

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')dt'. \tag{27}$$

Movimiento rectilíneo uniforme

Características:

1. El cuerpo se mueve en línea recta
2. La velocidad v del cuerpo es constante (la velocidad instantánea no depende del tiempo)

Por lo tanto, partimos de la definición

$$v = \frac{dx}{dt} = \text{constante} \tag{28}$$

De lo anterior, se deduce que

$$x = x_0 + v(t - t_0) \tag{29}$$

donde x_0 es la posición inicial del cuerpo al instante t_0 (inicio de observación). Esta fórmula nos da la posición del cuerpo $x(t)$ en cualquier instante de tiempo t.

Observación

Las condiciones iniciales del movimiento son la posición y el instante en el cual el observador empieza a ver el movimiento del cuerpo. Estas no son la posición y el instante en el cual el cuerpo empieza a moverse (pueden coincidir, pero en general no es así).

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Características:

1. El cuerpo se mueve en línea recta
2. La aceleración a del cuerpo es constante (independiente del tiempo)

Posibles escenarios:

- Objetos sobre la superficie terrestre (movimiento horizontal)
- Objetos en caída libre

Partiendo de la definición, tenemos

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{constante} \tag{30}$$

Resolviendo la ecuación anterior, obtenemos que la velocidad, en cualquier instante t, está dada por

$$v = v_0 + a(t - t_0), \tag{31}$$

donde v_0 es la velocidad inicial del cuerpo en el instante t_0 (inicio de la observación).

Movimiento rectilíneo uniforme acelerado

Se puede hallar la posición del cuerpo, en cualquier instante de tiempo, usando la definición de velocidad instantátea

$$v = \frac{dx}{dt}. \tag{32}$$

Resolviendo esta última para x

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2, \tag{33}$$

donde x_0 y v_0 son la posición y velocidad iniciales, respectivamente, en el instante t_0.

Fórmulas adicionales

Partiendo de las ecs. (31) y (33), se pueden deducir las siguientes relaciones:

$$x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}, \tag{34}$$

$$x = x_0 + \frac{(v + v_0)(t - t_0)}{2}. \tag{35}$$

Movimiento en caída libre

La caída libre de un cuerpo es un movimiento uniforme acelerado, para el cual la aceleración

$$a = -g, \quad \text{donde} \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2. \tag{36}$$

Con este valor de la aceleración debida a la gravedad, se obtienen ecuaciones de movimiento equivalentes a (31), (33), (34) y (104). Esto es,

$$v = v_0 - g(t - t_0) \tag{37}$$

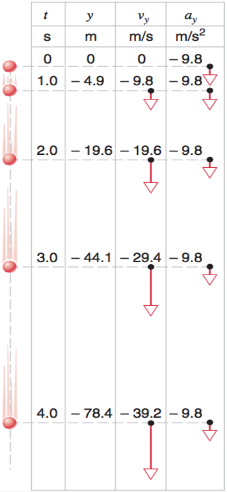
$$y = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2 \tag{38}$$

Adicionalmente,

$$y = y_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{-2g}, \tag{39}$$

con $g = 9.8$ m/s².

- Ejercicio 17. Un automóvil parte del reposo y se desplaza con una aceleración de 1.0 m/s² durante 1 s. Luego, se apaga el motor y el auto desacelera, debido a la fricción, duarnte 10 s, a 5 cm/s². Entonces se aplican los frenos y el automóvil se detiene en 5 s más. Calcular la distancia total recorrida por el automóvil.
  R: 9.25 m
- Ejercicio 18. Un cuerpo cae libremente a partir del reposo. Determine la posición y la velocidad del cuerpo después de que han transcurrido 1.0, 2.0, 3.0 y 4.0 s.
  R: -4.9 m; -19.6 m; -44.1 m; -78.4 m



t	y	v_y	a_y
s	m	m/s	m/s²
0	0	0	– 9.8
1.0	– 4.9	– 9.8	– 9.8
2.0	– 19.6	– 19.6	– 9.8
3.0	– 44.1	– 29.4	– 9.8
4.0	– 78.4	– 39.2	– 9.8

Figure: Ejercicio 18.

- Ejercicio 19. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 98 m/s, desde el techo de un edificio de 100 m de altura. a) Encontrar la altura máxima que alcanza el cuerpo sobre el suelo. b) El tiempo necesario para alcanzar esta última. c) La velocidad al llegar al suelo. d) El tiempo total transcurrido hasta que el cuerpo llega al suelo.
R: a) 590 m; b) 10 s; c) ~ -107.53 m/s; d) $\sim$ 21 s.
- Ejercicio 20. Se deja caer una piedra desde lo alto de un edificio. El sonido de la piedra al chocar con el suelo se escucha 5.0 s después. Si la velocidad del sonido es, aproximadamente, de 333.0 m/s, calcúlese la altura del edificio.
R: 106.8 m
- Ejercicio 21. Un vehículo cohete se mueve en el espacio libre con una aceleración constante igual a 9.8 m/s^2. (a) Si arranca del reposo, ¿qué tanto le tomará adquirir una velocidad de un décimo de la velocidad de la luz? (b) Qué tan lejos viajará al hacerlo así? (La velocidad de la luz es de 3.0×10^8 m/s).
R: $\sim 4.6 \times 10^{13}$ m; $\sim 3 \times 10^6$ s.
- Ejercicio 22. Un cable que soporta a un elevador desocupado de una construcción se rompe cuando el elevador está en reposo en la parte más alta de un edificio de 120 m de altura. (a) ¿A qué velocidad golpearía el elevador el terreno? (b) ¿Cuánto tiempo transcurrió en la caída? (c) ¿Cuál era su velocidad cuando pasó por el punto medio de su carrera hacia abajo? (d) ¿Durante cuánto tiempo estuvo cayendo cuando pasó por el punto medio?
R: a) $\sim$ -48.5 m/s; b) $\sim$4.94 s; $\sim$ -34.3 m/s; d) $\sim$ 3.5 s.

1. **Velocidad promedio (media)**

$$\vec{v}_p = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{t_B - t_A}$$

2. **Velocidad instantánea**
   Siendo $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \\ &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}\end{aligned}$$

1. **Aceleración promedio (media)**

$$\vec{a}_p = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{t_B - t_A}$$

2. **Aceleración instantánea**

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k}$$

Integración en cinemática:

- Si conozco la aceleración

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

entonces

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt'. \tag{40}$$

- Si conozco la velocidad

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

entonces

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt'. \tag{41}$$

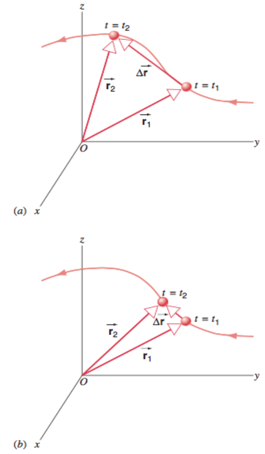


Figure: a) En el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ la partícula se mueve de la posición $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$. Su vector de desplazamiento en ese intervalo es $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. b) Conforme $\Delta t \to 0$, $\Delta\vec{r}$ se aproxima a la trayectoria real de la partícula.

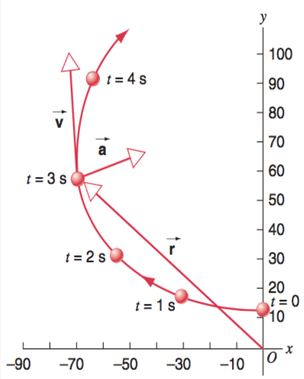


Figure: Vectores que representan posición, velocidad y aceleración. Note que no hay una relación particular entre las direcciones de $\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$.

- Ejercicio 23. Un cuerpo está viajando en una curva tal que sus coordenadas rectangulares, en función del tiempo, están dadas por $x(t) = 2t^2 - 3t$, $y(t) = t^3 + 1$, y $z = 0$. Suponiendo que t está dado en segundos y las coordenadas en metros, calcular: a) La posición del cuerpo cuando $t = 1$ s, b) las componentes rectangulares de la velocidad en cualquier instante, c) las componentes rectangulares de la velocidad cuando $t = 1$ s, d) la velocidad en cualquier instante, e) la velocidad cuando $t = 0$, f) el (los) tiempo(s) cuando la velocidad es cero, g) las componentes rectangulares de la aceleración en cualquier instante, h) las componentes rectangulares de la aceleración cuando $t = 1$ s, i) la aceleración en cualquier instante, j) la aceleración cuanto $t = 0$ s, k) el (los) tiempo(s) cuando la aceleración es paralela al eje x.
  R: a) $\vec{r}(1) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; b) ?; c) $v_x = 1$ m/s, $v_y = 3$ m/s y $v_z = 0$; d) ? ; e) $\vec{v} = -3\mathbf{i}$; f) ? ; g) ?; h) $a_x = 4$ m/s², $a_y = 6$ m/s, $a_z = 0$; i) ?; j) $\vec{a} = 4\mathbf{i}$; k) $t = 0$.
- Ejercicio 24. Una partícula se mueve en un plano xy de modo que sus coordenadas x y y varían con el tiempo de acuerdo con $x(t) = t^3 - 32t$ y $y(t) = 5t^2 + 12$. Aquí, x y y están en unidades de metros cuando t está en unidades de segundos. Halle la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 3$ s.
- Ejercicio 25. La velocidad de una partícula que se mueve en el plano xy está dada por $\vec{v} = (6t - 4t^2)\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$. Aquí $\vec{v}$ está en metros por segundo y $t(> 0)$ está en segundos. a) ¿Cuál es la aceleración cuando $t = 3$ s? b) ¿Cuándo, si alguna vez, es la aceleración cero? c) ¿Cuándo, si sucede, es cero la velocidad? d) ¿Cuándo, si sucede, es la rapidez (magnitud de la velocidad) igual a cero?

Magnitudes cinemáticas: $\begin{cases} \vec{r}\text{: vector de posición} \\ \vec{v}\text{: vector velocidad} \\ \vec{a}\text{: vector aceleración} \end{cases}$

Dinámica

En dinámica, nos enfrentamos al problema de encontrar las leyes que gobiernan el movimiento. Debemos describir las causas que provocan los cambios que experimenta la posición de los cuerpos a medida que transcurre el tiempo.

Cantidades dinámicas

Para introducirnos a la dinámica, debemos considerar las denominadas magnitudes dinámcas:

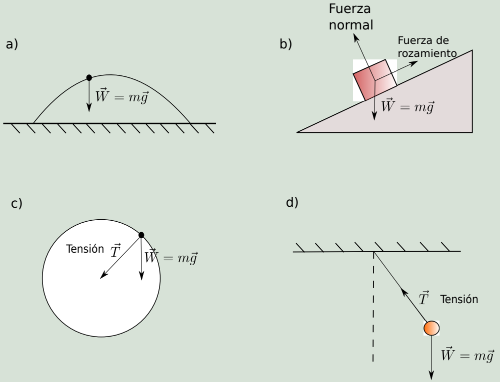
- $\vec{F}$: Fuerza
- $\vec{p}$: Momento lineal
- m: Masa
- $\vec{\tau}$: Torsión (torque)
- $\vec{L}$: Momento angular

$\vdots$

Fuerza

A la medida de la interacción de un cuerpo (o sistema) con sus alrededores la llamaremos fuerza. Es una cantidad vectorial que representaremos por $\vec{F}$.

Fuerzas que actúan sobre a) un cuerpo que es lanzado formando un ángulo con la horizontal cerca de la superficie de la Tierra; b) un cuerpo que se desliza sobre un plano inclinado; c) un cuerpo atado a una cuerda que gira sobre un plano vertical; d) un péndulo.



Leyes de Newton

Newton nos proveyó las leyes fundamentales de la mecánica.

- **Primera ley de Newton (ley de inercia).** Todo cuerpo en reposo o en estado de movimiento rectilíneo uniforme permanecerá así hasta que alguna interacción influya sobre este.

La primer ley establece que hay dos posibles estados para un objeto sobre el que la fuerza neta es cero:

- Estado de reposo (equilibrio estático)
- Estado de movimiento rectilíneo uniforme (equilibrio dinámico)

Masa: Medida de la inercia. Es decir, a mayor masa, mayor resistencia presenta un cuerpo a cambiar su estado de movimiento.

- **Segunda ley de Newton.** Esta ley nos provee la manera de cuantificar las interacciones:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{42}$$

donde la masa m es una constante.

- **Tercera ley de Newton.** En la interacción entre los cuerpos A y B, la fuerza que ejerce el cuerpo A sobre el cuerpo B (fuerza de acción) es la misma que ejerce el cuerpo B sobre el cuerpo A, pero de sentido contrario (fuerza de reacción). Esto es, las fuerzas aparecen en pares:
$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A} \tag{43}$$

Dimensiones de la fuerza:

	MKS	cgs
$[F] = \mathrm{MLT}^{-2}$	$\mathrm{kg{\cdot}m/s^2} = \mathrm{N}$ (newton)	$\mathrm{g{\cdot}cm/s^2} = \mathrm{dina}$

Cómo resolver problemas en dinámica

- Identificar las fuerzas aplicadas al sistema.
- Si las fuerzas no están dirigidas a lo largo de una misma recta, debemos descomponer estas en sus componentes.

Posibles variantes:

1. **El cuerpo está en reposo o se mueve con movimiento uniforme y rectilíneo:** La suma algebraica de la descomposición de fuerzas se iguala a cero.
2. **El cuerpo se mueve aceleradamente:** Se aplica la segunda ley de Newton a la suma algebraica de las componentes de fuerza neta.

Análisis del movimiento en dos dimensiones

Este es el movimiento que realizan los cuerpos en el plano. Es decir, se requieren dos coordenadas para localizar al objeto bajo estudio. Por ejemplo:

- Tiro parabólico
- Movimiento circular

En notación vectorial, representamos el vector de posición, en coordenadas cartesianas, como

$$\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \tag{44}$$

Del vector de posición, determinamos la velocidad instantánea usando la definición

$$\begin{aligned} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) &= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} \\ &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} \end{aligned} \tag{45}$$

Similarmente, se desprende de la definición que la acelaración instantánea es

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}) &= \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} \\ &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} \end{aligned} \tag{46}$$

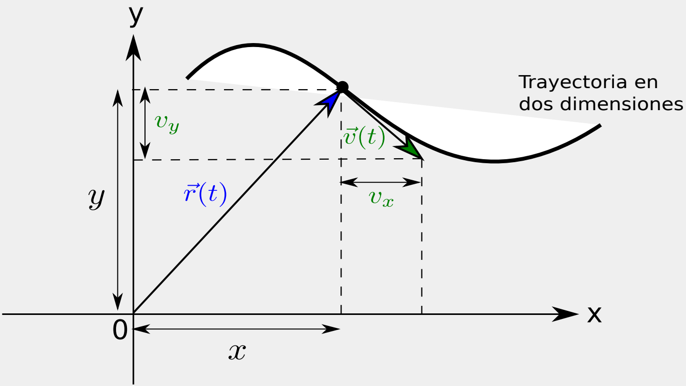


Figure: Movimiento de un cuerpo en una trayectoria bidimensional. El vector de posición $\vec{r}(t)$ señala la ubicación del cuerpo en el instante t. La velocidad $\vec{v}(t)$ siempre es tangente a la trayectoria.

Tiro parabólico

Este movimiento es consecuencia de la acción gravitacional que ejerce la tierra sobre los cuerpos. El análisis de este movimiento supone distancias pequeñas en comparación con el radio terrestre.

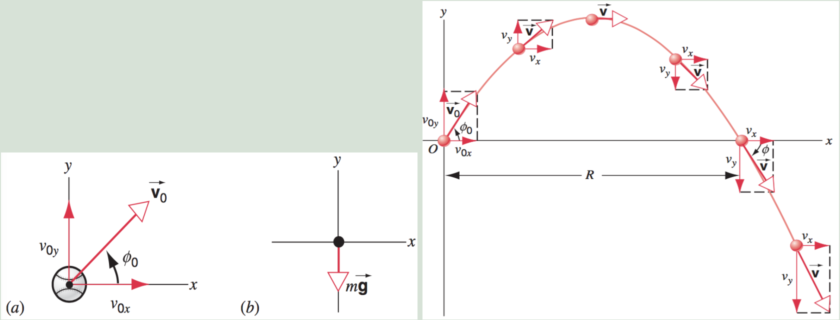


Figure: **Izquierda.** Un proyectil se lanza con una velocidad inicial $\vec{v}_0$ sujeto a la fuerza de gravedad. **Derecha.** Trayectoria del proyectil, que muestra la velocidad inicial $\vec{v}_0$ y también la velocidad $\vec{v}$, junto con sus componentes, en diferentes instantes.

Identificamos las fuerzas que actúan sobre el sistema: $\vec{W} = m\vec{g}$. De la segunda ley de Newton:

$$\vec{W} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -g\mathbf{j} \tag{47}$$

Condiciones iniciales:

- $\vec{v}_0$: velocidad inicial
- ϕ_0: ángulo de proyección

Con esta información, podemos determinar nuestras ecuaciones de movimiento. De la definición, relacionamos $\vec{a}$ y $\vec{v}$:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} \\
&= \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} \\
&= 0\mathbf{i} + (-g)\mathbf{j} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dv_y}{dt} = -g
\end{aligned} \tag{48}$$

Resolviendo para v_x y v_y en las ecuaciones (48), se obtiene

$$v_x = v_{0x} \tag{49}$$

$$v_y = v_{0y} - g(t - t_0) \tag{50}$$

Asimismo, podemos determinar la poscición del cuerpo mediante la relación conocida entre la velocidad $\vec{v}$ y la posición $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} \tag{51}$$

$$= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} \tag{52}$$

Luego

$$\frac{dx}{dt} = v_x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_{ox} \tag{53}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \Rightarrow \frac{dy}{dt} = v_{oy} - g(t - t_o) \tag{54}$$

Resolviendo para x y y, se obtiene

$$x = x_o + v_{ox}(t - t_o) \tag{55}$$

$$y = y_o + v_{oy}(t - t_o) - \frac{g}{2}(t - t_o)^2 \tag{56}$$

Ecuaciones de movimiento: Tiro parabólico

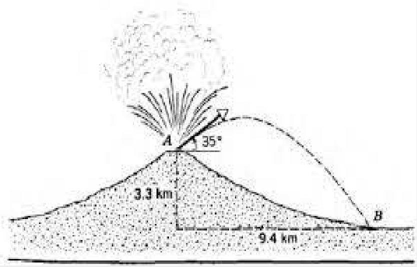
	Dirección x	Dirección y
Posición	$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$	$y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2$
Velocidad	$v_x = v_{0x}$	$v_y = v_{0y} - g(t - t_0)$

Adicionalmente, a partir de las anteriores, se desprenden las relaciones

$$y = y_0 + \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{-2g}, \tag{57}$$

donde, en todas las relaciones anteriores, x_0, v_{0x}, y_0 y v_{0y} son las condiciones iniciales en t_0.

- Ejercicio 26. Un lanzador de jabalina riñe con su entrenador, pues considera que su brazo es más fuerte a 30^o respecto a la horizontal. No obstante, su entrenador le recomienda ejecutar sus lanzamientos a un ángulo de 45^o respecto a la horizontal. Si la lanza sale con una velocidad inicial de 22 m/s, a) ¿Cuál es la diferencia entre las dos posiciones finales de la jabalina? b) Determine el tiempo de vuelo y la altura máxima alcanzada por la jabalina en ambos casos.
- Ejercicio 27. Durante las erupciones volcánicas pueden ser proyectados por el volcán gruesos trozos de roca; estos proyectiles se llaman *bloques volcánicos*. La figura muestra una sección transversal del Monte Fuji, en Japón. a) ¿A qué velocidad inicial tendría que ser arrojado de la boca *A* del volcán uno de estos bloques, formando 35^o con la horizontal, con objeto de caer en el pie *B* del volcán? b) ¿Cuál es el tiempo de recorrido en el espacio?



■ Ejercicio 28. En el libro de Galileo *Dos ciencias nuevas* el sabio afirma que "para elevaciones (ángulos de proyección) que excedan o no lleguen a 45^o por cantidades iguales, los alcances son iguales". a) Muestre esta aseveración (véase la figura). b) Para una velocidad inicial de 30 m/s y un alcance de 20.0 m, halle los dos ángulos posibles de elevación de la proyección.

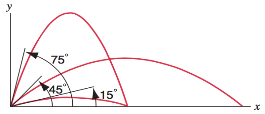


Figure: Ejercicio 23.

■ Ejercicio 29. ¿A qué velocidad inicial deberá el jugador de baloncesto lanzar la pelota, formando 55^o con la horizontal, para encestar el tiro de castigo, como se muestra en la figura? El aro de la cesta tienen un diámetro de 18 pulgadas. Obtenga los datos de la figura (ft = pies; 1 pie $\approx$ 0.30 m).

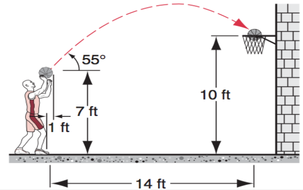


Figure: Ejercicio 24.

■ Ejercicio 30. a) Muestre que para un proyectil disparado desde la superficie a nivel del terreno con un ángulo ϕ_0 arriba de la horizontal, la razón de la altura máxima H y el alcance R está dada por $H/R = \frac{1}{4}\tan\phi_0$. b) Halle el ángulo de proyección para el cual la altura máxima y el alcance horizontal son iguales.

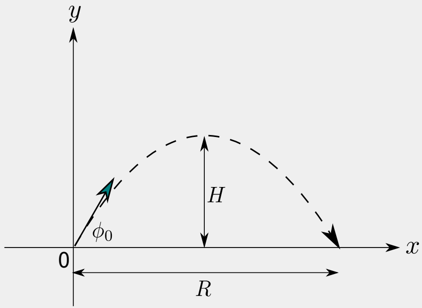
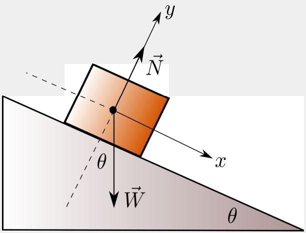


Figure: Ejercicio 30.

Plano inclinado. Considérese un bloque que se desliza sobre un plano inclinado. Sea θ el ángulo del plano inclinado y m la masa del bloque.



- Identificamos las fuerzas que actúan sobre el sistema: $\vec{W}$, peso; $\vec{N}$, normal. De la segunda ley de Newton

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{W} + \vec{N} \\ &= m\vec{a} \end{aligned} \tag{58}$$

- Escojemos las direcciones paralela y perpendicular al plano inclinado para la descomposición de fuerzas. Siendo $\vec{W} = W_x\mathbf{i} + W_y\mathbf{j}$ y $\vec{N} = N_x\mathbf{i} + N_y\mathbf{j}$, tenemos

$$ma_x = W_x + N_x, \tag{59}$$
$$ma_y = W_y + N_y. \tag{60}$$

- Dado que el bloque se mueve en la dirección $+x$, $a_y = 0$. Luego

$$\begin{aligned} ma_x &= W_x + N_x \quad (61) \\ 0 &= W_y + N_y \quad (62) \end{aligned}$$

- Adicionalmente, nótese de la geometría del sistema que

$$\begin{aligned} N_x &= 0 \quad (63) \\ N_y &= N \quad (64) \\ W_x &= |\vec{W}| \sin\theta = W \sin\theta, \quad \text{con} \quad W = mg \quad (65) \\ W_y &= -|\vec{W}| \cos\theta = -W \cos\theta \quad (66) \end{aligned}$$

- Sustituyendo en (61) y (62), se obtiene

$$\begin{aligned} ma_x &= W \sin\theta, \quad (67) \\ 0 &= -W \cos\theta + N. \quad (68) \end{aligned}$$

Resolviendo para a_x y N, considerando $W = mg$, llegamos a

$$\begin{aligned} a_x &= g \sin\theta, \quad (69) \\ N &= mg \cos\theta. \quad (70) \end{aligned}$$

- Ejercicio 31. Un bloque de 5.1 kg es jalado a lo largo de un piso sin fricción por una cuerda que ejerce una fuerza $F = 12$ N con un ángulo de $\theta = 25^o$ sobre la horizontal. a) ¿Cuál es la aceleración del bloque? b) La fuerza F se incrementa lentamente. ¿Cuál es el valor de F en el momento antes de que el bloque sea levantado del piso? c) ¿Cuál es la aceleración del bloque antes de que sea levantado del piso?

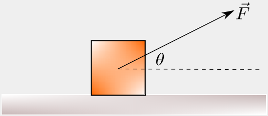


Figure: Ejercicio 21.

- Ejercicio 32. Una caja de 110 kg está siendo empujada a velocidad constante por la rampa de 34^o que se muestra en la figura. a) ¿Qué fuerza horizontal F se requiere? b) ¿Cuál es la fuerza ejercida por la rampa sobre la caja?

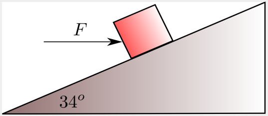


Figure: Ejercicio 22.

- Ejercicio 33. La figura muestra tres cajas con masas $m_1 = 45.2$ kg, $m_2 = 22.8$ kg y $m_3 = 34.3$ kg sobre una superficie horizontal carente de fricción. (a) ¿Qué fuerza horizontal F se necesita para empujar las cajas hacia la derecha, como si fueran una sola unidad, con una aceleración de 1.32 m/s²? (b) Halle la fuerza ejercida por m_2 sobre m_3. (c) Y por m_1 sobre m_2.

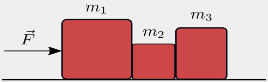


Figure: Ejercicio 23.

- Ejercicio 34. Tres bloques están unidos como se muestra en la figura 3 sobre una mesa horizontal carente de fricción y son jalados hacia la derecha con una fuerza $T_3 =$6.5 N. Si $m_1 = 1.2$ kg, $m_2 = 2.4$ kg y $m_3 =$3.1 kg, calcule (a) la aceleración del sistema y (b) las tensiones T_1 y T_2.

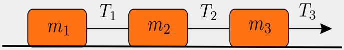


Figure: Ejercicio 24.

- Ejercicio 35. Un bloque es proyectado hacia arriba sobre un plano inclinado sin fricción a una velocidad v_o. El ángulo de inclinación es θ. a) ¿Cuánto avanza sobre el plano? b) ¿Cuánto tiempo le toma llegar hasta allí? c) ¿Cuál es su velocidad cuando regresa hasta la base? d) Halle las respuestas numéricas para $\theta = 35^o$ y $v_o = 8.2$ pies/s. [1 pie $\sim$ 0.3048 m] R: a) 0.55 m; b) 0.44 s

Fuerzas de fricción

La fuerza de fricción tiene su origen en la interacción microscópica de las superficies de los cuerpos en contacto. Podemos distinguir dos tipos de interacción por fricción:

- Fricción entre un cuerpo sólido y un fluido (líquidos y gases).
- Fricción entre un cuerpo sólido y otro sólido.

Para el segundo tipo:

- **Fricción estática.** Fuerza de fricción que actúa entre superficies en reposo una con respecto a la otra. Una vez iniciado el movimiento, esta fuerza de fricción disminuye.
- **Fricción cinética.** Fuerza de fricción que actúa entre superficies en movimiento relativo.

La fuerza de fricción estática aumenta desde cero hasta un límite superior en el que el cuerpo empieza a moverse:

$$0 \leq |\vec{F}_e| \leq |\vec{F}_{e,max}| \tag{71}$$

Empíricamente, podemos cuantificar dicha fuerza como:

$$\vec{F}_e = \mu_e \vec{N}. \tag{72}$$

Una vez que el cuerpo está en movimiento, sigue actuando la fuerza de fricción, pero esta será cinética. Empíricamente:

$$\vec{F}_c = \mu_c \vec{N}. \tag{73}$$

μ_e y μ_c son referidos como coeficientes de fricción estático y cinético, respectivamente.

- Ejemplo. Un bloque está en reposo sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Cuando el ángulo de inclinación se eleva, se halla que el deslizamiento apenas comienza a un ángulo de inclinación $\theta_e = 15^o$. ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano?

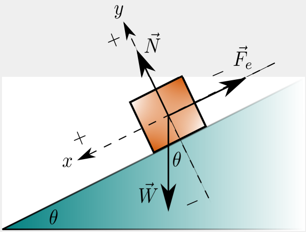


Figure: Ejercicio 24.

- Solución. Identificamos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Estas son la normal $\vec{N}$, el peso $\vec{W}$ y la fuerza de fricción estática $\vec{F}_e$. Así pues, en equilibrio estático

$$\vec{N} + \vec{W} + \vec{F}_e = 0. \tag{74}$$

- De la geometría del problema, se observa que las componentes de las fuerzas son:

$$N_x = 0, \quad N_y = N, \tag{75}$$
$$W_x = mg\sin\theta, \quad W_y = -mg\cos\theta. \tag{76}$$

- Haciendo las sustituciones correspondientes en (74), obtenemos

$$mg\sin\theta - F_e = 0, \tag{77}$$
$$N - mg\cos\theta = 0. \tag{78}$$

- En el ángulo θ_e, cuando el deslizamiento apenas comienza, F_e tiene su valor máximo $F_e = \mu_e N$. Luego

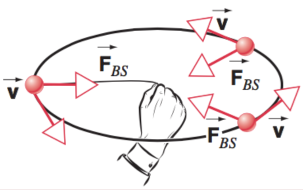
$$\mu_e = \frac{F_e}{N} = \frac{mg\sin\theta_e}{mg\cos\theta_e} = \tan\theta_e \tag{79}$$

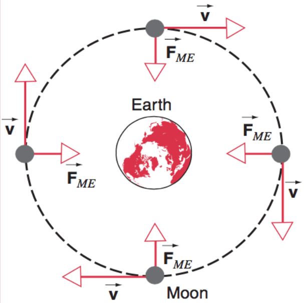
Para $\theta_e = 15^o$, se obtiene el valor para el coeficiente de fricción:

$$\mu_e = \tan(15^o) \sim 0.27. \tag{80}$$

Movimiento circular uniforme

- Movimiento de una partícula a velocidad constante en una trayectoria circular.
- Velocidad y aceleración son constantes en magnitud, pero sus direcciones cambian contínuamente.
- Ejemplos. Movimiento planetario (la Luna en órbita alrededor de la Tierra); objeto sujeto a una cuerda, donde la cuerda ejerce una fuerza sobre la partícula. En ambos casos se ejerce una fuerza de tipo central, también llamada **fuerza centrípeta**.





De acuerdo con la segunda ley de Newton, la aceleración y la fuerza neta deben tener la misma dirección. En el caso del movimiento circular a velocidad constante, la fuerza neta debe señalar hacia el centro del círculo. En términos de magnitudes:

$$|\sum_i \vec{F}_i| = ma_c. \tag{81}$$

El lado izquierdo de esta ecuación es, con frecuencia, llamado **"fuerza centrípeta"; no es un nuevo tipo de fuerza**. Distintas fuerzas dan como resultado una **componente neta que señala hacia el centro del círculo**.

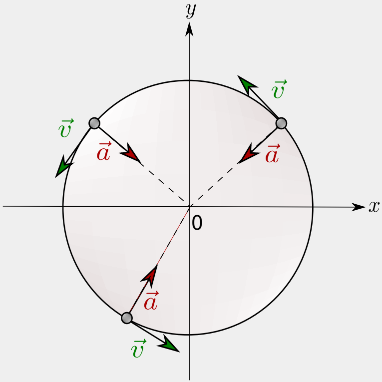


Figure: En el movimiento circular uniforme, la aceleración $\vec{a}$ está siempre dirigida hacia el centro del círculo y, por lo tanto, siempre es perpendicular a $\vec{v}$.

En el **movimiento circular uniforme**, si bien la magnitud de la velocidad permanece constante, la partícula experimenta una **aceleración** debido al **cambio de dirección** de dicha **velocidad**.

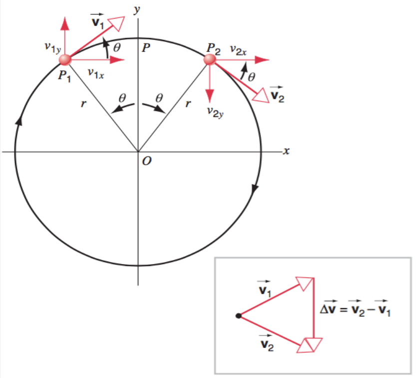


Figure: Una partícula se mueve con velocidad constante en un círculo de radio r. Los puntos P_1 y P_2 son opuestos al eje y. El vector $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - v_1$ apunta siempre hacia el centro del círculo, no importando dónde elijamos los puntos P_1 y P_2.

Movimiento circular

Considérese una partícula en movimiento circular uniforme en un marco referencia como en la figura. Sean los vectores unitarios:

- $\mathbf{e}_r$: Radial hacia afuera del origen (dirección de $\vec{r}$).
- $\mathbf{e}_\theta$: Senñala en la dirección creciente de θ (tangente al círculo)

En términos de los vectores unitarios **i** y **j**:

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} \qquad (82)$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j} \qquad (83)$$

Si en la trayectoria la partícula se mueve con **velocidad** constante, el vector de esta última es **tangencial** a la primera. Así pues,

$$\vec{v} = v\mathbf{e}_\theta. \qquad (84)$$

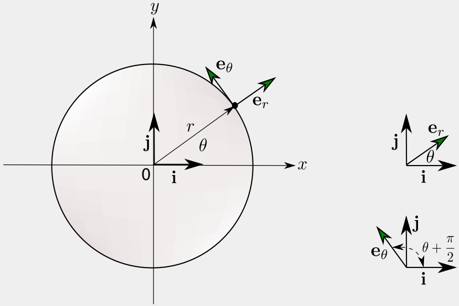


Figure: En el movimiento circular.

Con ayuda de la definición, se puede determinar la aceleración como

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{e}_\theta)}{dt} &= v\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}, \\
&= v\frac{d}{dt}(-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}), \\
&= v\left(-\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\mathbf{i} - \sin\theta\frac{d\theta}{dt}\mathbf{j}\right), \\
&= -v\underbrace{(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j})}_{\mathbf{e}_r}\frac{d\theta}{dt}, \\
&= -v\mathbf{e}_r\frac{d\theta}{dt}.
\end{aligned} \tag{85}$$

Por otro lado, $\frac{d\theta}{dt}$ es la distancia angular cubierta en una revolución dividida por el tiempo de una revolución. Esto es

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{2\pi r/v} = \frac{v}{r}. \tag{86}$$

Así pues, sustituyendo en (85),

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\mathbf{e}_r \qquad \text{Aceleración central} \tag{87}$$

Cantidades físicas asociadas al movimiento circular

En el movimiento circular uniforme:

- $|\vec{v}| = v$ = constante, donde $\vec{v}$ es tangencial a la trayectoria.
- El cambio en la dirección de la velocidad da lugar a una aceleración central (o centrípeta), cuya magnitud es:

  $$|\vec{a}_c| = a_c = \frac{v^2}{r},$$

  donde $\vec{a}_c$ apunta hacia el centro de la trayectoria (su magnitud es constante para este movimiento) y r es el radio de la trayectoria.
- Parámetros adicionales:

  $$\begin{aligned} f &= \frac{1}{T}, \quad \text{Frecuencia [Hz]}; T: \text{Periodo de una revolución [s]}, \\ \omega &= \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}, \quad \text{Velocidad (frecuencia) angular [rad/s]}. \end{aligned}$$

- Ejercicio 25. Calcular la velocidad angular de un disco que gira con movimiento uniforme de 12 radianes cada 3 segundos. Calcular también el periodo y la frecuencia de rotación.
  R: 4 rad/s; $\sim$ 1.57 s; $\sim$ 0.64 Hz
- Ejercicio 26. Un abanico está girando y completa 1200 revoluciones cada minuto. Consideremos un punto en la punta de un aspa, la cual tiene un radio de 0.15 m. a) ¿A qué distancia se mueve el punto en una revolución? b) ¿Cuál es la velocidad tangencial del punto? c)¿Cuál es su aceleración instantánea?
  R: a) $\sim$ 0.94 m; b) 6π m/s; c) $\sim$ 2406.6 m/s^2
- Ejercicio 27. Calcular la velocidad angular de un disco que gira con movimiento uniforme de 13.2 radianes cada 6 segundos. Calcular también el periodo y la frecuencia de rotación.
  R: $\sim$ 2.2 rad/s; 2.83 s; 0.35 Hz
- Ejercicio 28. Un astronauta está girando en una centrífuga de 5.2 m de radio. a) ¿Cuál es su velocidad si la aceleración es de 6.8g? b) ¿ Cuántas revoluciones por minuto se requieren para producir esta aceleración? R: a) $\sim$ 18.61 m/s; b) $\sim$ 34.37 rev/min
- Ejercicio 29. El tren rápido conocido como el TGV Atlantique, que recorre desde el sur de París hasta Le Mans, en Francia, tiene una rapidez máxima de 310 km/h. a) Si el tren toma una curva a esta velocidad y la aceleración experimentada por los pasajeros ha de estar limitada a 0.05g, ¿cuál es el radio de la curvatura de la vía más pequeña que puede tolerarse? b) Si existe una curva con un radio de 0.94 km, ¿A qué valor deberá disminuir su velocidad? R: a) $\sim$ 15 km; b) $\sim$ 21.46 m/s

Aceleración tangencial

Considerando el caso más general en el que la velocidad tangencial $\vec{v} = v\mathbf{e}_\theta$ no es constante, obtenemos la aceleración:

$$
\begin{aligned}
\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d(v\mathbf{e}_\theta)}{dt}, \\
&= v\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} + \mathbf{e}_\theta \frac{dv}{dt}, \\
&= -\frac{v^2}{r}\mathbf{e}_r + a_T\mathbf{e}_\theta = -a_c\mathbf{e}_r + a_T\mathbf{e}_\theta,
\end{aligned}
\tag{88}
$$

con

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

y donde

$$a_T = \frac{dv}{dt}, \tag{89}$$

es la componente de $\vec{a}$ que es tangente a la trayectoria de la partícula y proviene de de un cambio en la magnitud de v. Esta es llamada **aceleración tangencial**.

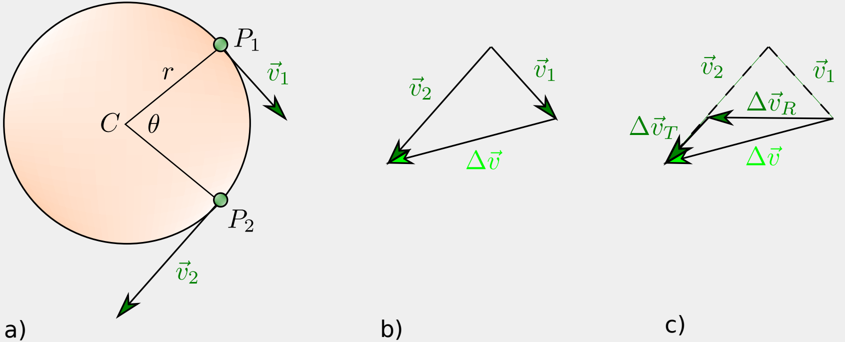


Figure: a) En el movimiento circular no uniforme la velocidad es variable. b) El cambio de la velocidad $\Delta\vec{v}$ al ir de P_1 a P_2. c) Existen dos partes para $\Delta\vec{v}$: $\Delta\vec{v}_R$ causada por el cambio en la dirección de $\vec{v}$, y $\Delta\vec{v}_T$, causada por el cambio en la magnitud de $\vec{v}$.

Aceleración tangencial y angular

$$a_T = \frac{dv}{dt} \quad \text{Aceleración tangencial.} \tag{90}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{Aceleración angular.} \tag{91}$$

Relación entre v y ω

De la definición de velocidad tangencial $v = ds/dt$, siendo $s = r\theta$,

$$v = r\omega \quad \Rightarrow \quad a_T = r\alpha. \tag{92}$$

Aceleración instantánea (magnitud)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_c^2} \tag{93}$$

- Cambio en la magnitud de la velocidad $\Rightarrow$ aceleración tangencial
- Cambio de la dirección de la velocidad $\Rightarrow$ aceleración central (centrípeta)

Caso particular: Aceleraciones angular y tangencial constantes

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \text{constante} \tag{94}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \text{constante} \tag{95}$$

Integrando (94) y (95), se obtiene

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0), \tag{96}$$

$$v = v_0 + a_T(t - t_0), \tag{97}$$

donde ω_0 (v_0) el la condición inicial de la velocidad angular (tangencial) en $t = t_0$.

Caso particular: Aceleración angular y tangencial constantes

Considerando, también, que

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \tag{98}$$

$$v = \frac{ds}{dt}, \tag{99}$$

entonces

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha(t - t_0), \tag{100}$$

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + a_T(t - t_0). \tag{101}$$

Integrando (100) y (101), obtenemos

$$\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{\alpha}{2}(t - t_0)^2, \tag{102}$$

$$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a_T}{2}(t - t_0)^2, \tag{103}$$

donde θ_0 (s_0) es la condición inicial de posición angular (lineal) en $t = t_0$.

- Ejercicio 30. Una partícula se está moviendo en un círculo de acuerdo a $\theta = 3t^2 + 2t$, donde θ se mide en radianes y t en segundos. Calcular la velocidad angular y la aceleración angular después de 4 segundos.
- Ejercicio 31. Un automóvil se mueve, paralelo a una autopista, con una aceleración constante de 0.3 m/s^2. El automóvil pasa sobre una elevación en el camino tal que lo alto de la elevación tiene forma de arco de circunferencia de 500 m de radio. En el momento que el automóvil está en lo alto de la elevación, su vector velocidad es horizontal y tiene una magnitud de 6 m/s^2. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector aceleración total para el automóvil en este instante? R: $\sim$ 0.31 m/s^2; -13.5^o
- Ejercicio 32. La rueda *A* de la figura, cuyo radio es de 30 cm, parte del reposo y aumenta su velocidad angular uniformemente a razón de 0.4 π rad/s, cada segundo. La rueda transmite su movimiento a la rueda *B* mediante una cuerda *C*. Obtener una relación entre las aceleraciones angulares y los radios de las dos ruedas. Encontrar el tiempo necesario para que la rueda *B* alcance una velocidad angular de 300 rpm.

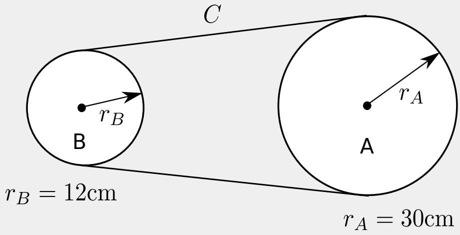


Figure: Problema 32.

Concepto de límite

Supongamos que tenemos una secuencia de numeros $l_1, l_2, l_3, \ldots$ que se acercan más y más a algún valor L. Por ejemplo:

$$0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \ldots$$

El límite de esta secuencia es 1. Ninguna de las entradas es igual a 1, pero se acercan más y más a dicho valor. Para indicar esto, escribimos

$$\lim_{i \to \infty} l_i = L$$

Aplicando la misma idea a funciones

$$\lim_{t \to a} f(t) = L \quad f \text{ se acerca arbitrariamente a } L \text{ conforme } t \text{ tiende a } a.$$

Sea f una función de la variable t. Si t cambia, $f(t)$ también lo hará. **El cálculo diferencial trata con la razón de cambio de dichas funciones.**

Representación gráfica de la derivada

Idea. Empezar con $f(t)$ en algún instante, y entonces cambiar el tiempo un poco y observar qué tanto cambia f(t). La taza de cambio está definida como la razón del cambio en f a el cambio en t. Esto es,

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Para definir el cambio de manera más precisa, debemos hacer que $\Delta t \to 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{df}{dt} = f' \end{aligned}$$

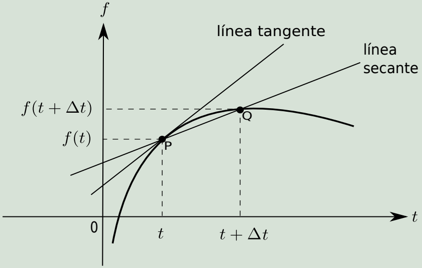


Figure: Geométricamente, la derivada significa que conforme Q se desliza a lo largo de la curva hasta casi coincidir con P, la línea secante va girando hasta una posición límite: la línea tangente a la curva en P.

Derivadas de algunas funciones elementales

1. $\frac{dC}{dt} = 0$, donde C es una cte.	2. $\frac{dt^n}{dt} = nt^{n-1}$
3. $\frac{de^t}{dt} = e^t$	4. $\frac{d}{dt} \ln t = \frac{1}{t}$
5. $\frac{d}{dt} \sin t = \cos t$	6. $\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t$
7. $\frac{d}{dt} \tan t = \sec^2 t$	8. $\frac{d}{dt} \cot t = \csc^2 t$
9. $\frac{d}{dt} \sec t = \sec t \tan t$	10. $\frac{d}{dt} \csc t = -\csc t \cot t$

Teoremas sobre derivadas

- Si f y g son funciones cuyas derivadas existen, entonces

$$\frac{d}{dt}(f(t) + g(t)) = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

- Sea f una función y c una constante, entonces

$$\frac{d(cf(t))}{dt} = c\frac{df(t)}{dt}$$

Teoremas sobre derivadas

- Sean f y g funciones cuyas derivadas existen, entonces

$$\frac{d(fg)}{dt} = f\frac{dg}{dt} + g\frac{df}{dt}$$

- Sea $a(t)$ una función y $F(a)$ una función de función, entonces

$$\frac{dF(a(t))}{dt} = \frac{dF}{da}\frac{da}{dt}$$

  A esta relación se le llama regla de la cadena.

- **Corolario.** Sean f y g funciones cuyas derivadas existen, y g es diferente de cero para todo valor de t, entonces

$$\frac{d}{dt}(f/g) = \frac{g\frac{df}{dt} - f\frac{dg}{dt}}{g^2}$$

Velocidad promedio e instantánea en una dimensión

$$v_p = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{Velocidad promedio}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{Velocidad instantánea}$$

Aceleración promedio e instantánea en una dimensión

$$a_p = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{Aceleración promedio}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{Aceleración instantánea}$$

Movimiento rectilíneo: aceleración constante

$$v = v_0 + a(t - t_0) \qquad \text{Velocidad}$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2 \qquad \text{Posición}$$

Fórmulas adicionales:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}, \\ x &= x_0 + \frac{(v + v_0)(t - t_0)}{2} \end{aligned}$$

x_0 y v_0 son la posición y velocidad iniciales, respectivamente, medidas en el tiempo $t = t_0$.