2022

ESTABILIDAD DEL SISTEMA

LOTKA Y VOLTERRA

DANIELA PAMELIN ÁLVAREZ GUARNEROS A01026164

LOTKA Y VOLTERRA

ECUACIONES DEPREDADOR-PRESA

$$\begin{cases} p'(t) = \alpha_1 p(t) - \alpha_2 p(t) d(t) \\ d'(t) = -\beta_1 d(t) + \beta_2 p(t) d(t) \end{cases}$$

Donde p(t) representa las presas y d(t) los depredadores

Sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, acopladas, autónomas y no lineales, que se usan para describir dinámicas de sistemas biológicos en el que dos especies interactúan, una como presa y otra como depredador.

ESTABILIDAD

Para estudiar la estabilidad hay que "linerizar" las ecuaciones en un entorno de los puntos de equilibrio.

Los puntos de equilibrio son P1=(p,d)=(0,0) y P2=(p,d)=(β1/β2, α1/α2). Considerando las funciones:

$$f(p,d) = \alpha_1 p(t) - \alpha_2 p(t)d(t)$$

$$g(p,d) = -\beta_1 d(t) + \beta_2 p(t)d(t)$$

MATRIZ JACOBIANA

$$J(p,q) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial p} & \dfrac{\partial f}{\partial d} \\ \dfrac{\partial g}{\partial p} & \dfrac{\partial g}{\partial d} \end{pmatrix}$$

FORMA ESTÁNDAR

Matriz formada de derivada parciales de primer orden

$$J(p,q) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 d(t) & -\alpha_2 p(t) \\ \beta_2 d(t) & -\beta_1 + \beta_2 p(t) \end{pmatrix}$$

CONSTRUCCIÓN

Derivadas parciales de ecuaciones de Lotka y Volterra

MATRIZ JACOBIANA EN LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO

J (0 , 0)

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2\,(0) & -\alpha_2\,(0) \\ \beta_2(0) & -\beta_1 + \beta_2(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\beta_1 \end{pmatrix}$$

En J(β1/β2, α1/α2))

$$J\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) & -\alpha_2\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) \\ \beta_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) & -\beta_1 + \beta_2\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_2\,\beta_1/\beta_2 \\ \beta_2\alpha_1/\alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$$

EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

MATRIZ J(0,0)

Eigenvalores

$$J(0{,}0)=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & -\beta_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=(\alpha_1-\ \lambda)(-\beta_1-\ \lambda)=\lambda^2-(\alpha_1\beta_1)-(\alpha_1\lambda)+\lambda\beta_1$$

$$\lambda_1=\alpha_1$$

$$\lambda_2=-\beta_1$$

Eigenvectores

$$J(0{,}0)=\begin{pmatrix}\alpha_1-\alpha_1 & 0\\ 0 & -\beta_1-\alpha_1\end{pmatrix}$$

$$v1=(1{,}0)$$

$$\mathrm{J}(0{,}0)=\begin{pmatrix}\alpha_1-\beta_1 & 0\\ 0 & -\beta_1-\beta_1\end{pmatrix}$$

$$v2=(0{,}1)$$

EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

Matriz J(β1/β2, α1/α2)

Eigenvalores

$$J(\beta_1/\beta_2, \alpha_1/\alpha_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_2\,\beta_1/\beta_2 \\ \beta_2\alpha_1/\alpha_2 & 0 \end{pmatrix} = (\alpha_1 - \lambda)(-\beta_1 - \lambda) = \lambda^2 + (\alpha_1\beta_1) - (\alpha_1\lambda) - \lambda\beta_1$$

$$\lambda_1 = -i\sqrt{\beta_1}\sqrt{\alpha_1}$$

$$\lambda_1 = i\sqrt{\beta_1}\sqrt{\alpha_1}$$

Eigenvectores

$$v1 = \frac{-i\alpha_2\sqrt{\beta_1}}{\beta_2\sqrt{\alpha_1}}, 1$$

$$v2 = \frac{i\alpha_2\sqrt{\beta_1}}{\beta_2\sqrt{\alpha_1}}, 1$$

TIPOS DE PUNTOS CRÍTICOS

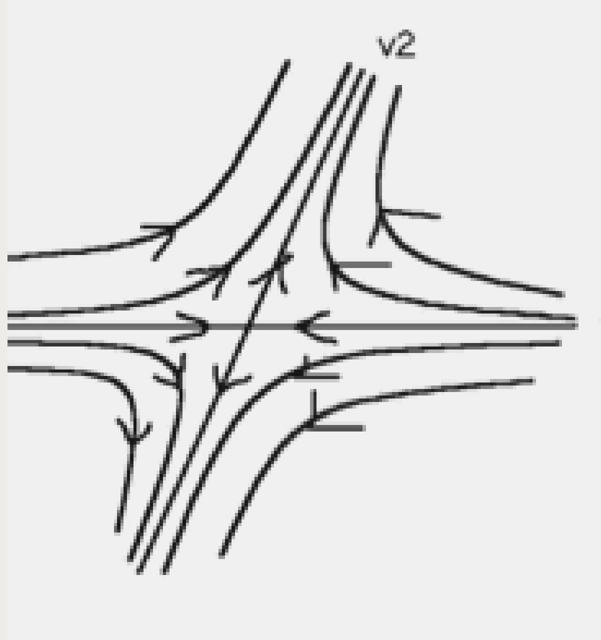
1. Si $\lambda 1 < \lambda 2 < 0$, entonces (p0, q0) es un nodo asintóticamente estable.
2. Si $\lambda 1 > \lambda 2 > 0$, entonces (p0, q0) es un nodo inestable.
3. Si $\lambda 1 < 0 < \lambda 2$, entonces (p0, q0) es un punto de silla.
4. Si $\lambda 1$ no es real y $Re(\lambda 1) < 0$, entonces (p0, q0) es un foco asintóticamente estable.
5. Si $\lambda 1$ no es real y $Re(\lambda 1) > 0$, entonces (p0, q0) es un foco inestable.
6. Si los autovalores son imaginarios puros el punto crítico es un centro. Las trayectorias son curvas cerradas que rodean al origen, que en general tienen forma de elipses, de modo que ninguna trayectoria tiende a él cuando $t \to +\infty$ o $t \to -\infty$. Por ello, el punto crítico es estable, pero no asintóticamente estable.

RESULTADOS

J(0,0)

$$\lambda_1 = \alpha_1$$

$$\lambda_2 = -\beta_1$$



PUNTO SILLA

Si λ1 < 0 < λ2, entonces (p0, q0) es un punto de silla. Es un punto crítico aislado donde tenemos un par de trayectorias opuestas que entran, otro par de trayectorias opuestas que salen del punto y el resto son ramas de hiperbolas con asintotas en las trayectorias anteriores. Inestable

En J(β1/β2, α1/α2))

$$\lambda_1 = -i\sqrt{\beta_1}\sqrt{\alpha_1}$$

$$\lambda_1 = i\sqrt{\beta_1}\sqrt{\alpha_1}$$

CENTRO

Si los autovalores son imaginarios puros el punto crítico es un centro. Las trayectorias son curvas cerradas que rodean al origen, que en general tienen forma de elipses, de modo que ninguna trayectoria tiende a él cuando t → +∞ o t → −∞. Por ello, el punto crítico es estable, pero no asintóticamente estable.

// REFERENCIAS

- Asencio G (2017)Modelo Depredador-Presa de Lotka-Volterra. Recuperado de: https://riull.ull.es/xmlui/bitstream/handle/915/6217/Modelo%20depredador-presa%20de%20Volterra-Lotka.pdf?sequence=1&isAllowed=y

- OssesA. (2005) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Recuperado de: https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2010/1/MA2601/4/material_docente/bajar%3Fid_material%3D300566

- Sotfware WolframApha